北 京 交 通 大 学

2016-2017-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、填空题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、已知 $(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=4$，则 $[(\alpha+\beta)\times(\beta+\gamma)]\cdot(\gamma+\alpha)=$________________.

2、向量 α，β 满足 $\|\alpha\|=3$，$\|\beta\|=2$，则内积 $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=$__________.

3、若三点 $A(a,b,3)$、$B(b,a,0)$、$C(1,-1,1)$ 共线，则 $a=$_____、$b=$_____.

4、点 $M(1,2,1)$ 到平面 $2x+y+z-7=0$ 的距离是_________.

5、设 3 阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$．$a$、$b$ 是数，若 $\alpha_3=a\alpha_1+b\alpha_2$，则 $|A|=$______.

6、设 A、B 为 4 阶方阵，且 $|A|=-2$，$|B|=3$，则 $|((AB)^T)^{-1}|=$__________.

7、已知 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{bmatrix}$ 的秩为 3．则 $a=$________________.

8、2017 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0\\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2016 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 2017 & \cdots & 2017 & 2017 & 2017\end{vmatrix}=$__________.

9、已知 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\beta_i\ (i=1,2,3,4)$ 非零，且与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，则

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$__________.　　1

10、设 **A** 是 4 阶矩阵，且 **A** 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$，则 **A** 中【　　　】　　（B）

（A）．必有一列元素全为 0；　　（B）．必有一列向量是其余列向量的线性组合；

（C）．必有两列元素成比例；　　（D）．任意列向量是其余列向量的线性组合．

二、（满分 10 分）求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程．

解　过直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 的平面束方程为 $(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$ ....4 分

其中，λ 为待定常数.

该平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直的充要条件他们的法向量互相垂直，即

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$ ....8 分

得 $\lambda=-1$，代入得投影平面方程为 $y-z-1=0$.

所以，投影直线方程为 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. ....10 分

三、（满分 10 分） 求通过直线 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$，且垂直于平面 $\pi_1: 3x+2y-z-5=0$ 的平面方程.

解：显然，待求平面 β 过点 $M_0(1,\ -2,\ 2)$，而其法向量

$$\vec{n}\perp\{2,\ -3,\ 2\} \text{ 及 } \vec{n}\perp\{3,\ 2,\ -1\},$$ ....4 分

即 $$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\{-1,\ 8,\ 13\}.$$ ....8 分

故所求平面方程为 $(x-1)-8(y+2)-13(z-2)=0$

或 $$x-8y-13z+9=0.$$ ....10 分

四、（满分 10 分） 平面 $\alpha: 2x-y+z+1=0$ 与 $\beta: x-3y+2z+4=0$ 是否相交？若相交，求出它们的交线在平面 $\pi: 2x+3y-6=0$ 上的投影的直线方程；若不相交，请给出证明.

解：因为，$2:(-1):1\neq 1:(-3):2$，因此，α 与 β 相交. ....2 分

设交线为 l，并设 π_1 为通过直线 l 且垂直于 π 的平面，则交线 l 在平面 π 上的投影直线就是 π_1 与 π 的交线.

设通过直线 l 的平面 π_1 的方程为 $k_1(2x-y+z+1)+k_2(x-3y+2z+4)=0$，

即 $$(2k_1+k_2)x+(-k_1-3k_2)y+(k_1+2k_2)z+(k_1+4k_2)=0.$$ ....6 分

由于 π_1 与 π 垂直，故 $2(2k_1+k_2)+3(-k_1-3k_2)=0$， ....8 分

解得，$k_1=7k_2$，因此，得平面 π_1 的方程为

π_1：$15\boldsymbol{x}-10\boldsymbol{y}+9\boldsymbol{z}+11=0$，

因此，所求投影直线方程为 $\begin{cases}15\boldsymbol{x}-10\boldsymbol{y}+9\boldsymbol{z}+11=0,\\ 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}-6=0.\end{cases}$ ....10 分

五、（本题满分 10 分） 求向量组 $\alpha_1=(1\quad 0\quad 2\quad 1)^T$，$\alpha_2=(1\quad 2\quad 0\quad 1)^T$，$\alpha_3=(2\quad 1\quad 3\quad 0)^T$，$\alpha_4=(2\quad 5\quad -1\quad 4)^T$，$\alpha_5=(1\quad -1\quad 3\quad -1)^T$ 的秩和一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示.

解：利用初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$ ....4 分

所以 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$， ....6 分

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 构成一个最大无关组， ....8 分

且 $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$. ....10 分

六、（本题满分 10 分） 当 a、b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多组解，并求出有无穷多组解时的通解.

解：利用初等行变换，对增广矩阵

$$(A,\ b)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$ ....3 分

当 $a\neq 1$ 时，$r(A)=r(A,\ b)=4$，此时，方程组有唯一解； ....5 分

当 $a=1$ 时，$(A,\ b)\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&b+1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，

若 $b\neq -1$，则 $r(A)=2$，$r(A,\ b)=3$，此时，方程组无解； ....7 分

若$b=-1$，则 $r(A)=r(A,\ b)=2<4$，方程组无穷多组解，并且

$$(A,\quad b)\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以，此方程组的通解为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.　　....10 分

七、（本题满分 10 分） 设$k_1(1,\quad 0,\quad 2)^T+k_2(0,\quad 1,\quad -1)^T$是齐次线性方程组$Ax=0$的通解，又

$A\alpha+3\alpha=0$，其中$\alpha=(1,\quad 2,\quad 3)^T$．试求：$(\mathrm{I})$矩阵$A$；$(\mathrm{II})$ A^{2016}．

解：(I) 设$\alpha_1=(1,\quad 0,\quad 2)^T$，$\alpha_2=(0,\quad 1,\quad -1)^T$，

由于$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$是齐次线性方程组$Ax=0$的通解，知α_1,α_2是$Ax=0$的解.

又$A\alpha+3\alpha=0$，故$A\alpha=-3\alpha$， 则　　...2 分

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha)=(0,\ 0,-3\alpha)$$　　...4 分

可知，　$A=(0,\ 0,-3\alpha)\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&0&-6\\0&0&-9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&-1&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&0&-6\\0&0&-9\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5&-1&-1\\4&1&-2\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\4&-2&-2\\6&-3&-3\end{bmatrix}.$$　　...6 分

$$(\mathrm{II})\quad A^{2016}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\4&-2&-2\\6&-3&-3\end{bmatrix}^{2016}=\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(2,-1,-1)\right)^{2016}$$

$$=(2-2-3)^{2015}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(2,-1,-1)$$

$$=-3^{2015}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\4&-2&-2\\6&-3&-3\end{bmatrix}=-3^{2015}A.$$　　...10 分

八、（本题满分 10 分） 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 C，使 $AC-CA=B$ 成立．并求出所有矩阵 C.

解：设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则

$$AC=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix},$$

$$CA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix},$$

由 $AC-CA=B$，得

$$\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}.$$ ...3 分

得线性方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$$

利用增广矩阵的初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix},$$

故 $a=-1$，$b=0$ 时，方程组有解，即存在矩阵 C，使 $AC-CA=B$ 成立． ...6 分

此时，方程组有解等价于

$$\begin{cases}x_1-x_3-x_4=1\\ x_2+x_3=0\end{cases}$$，解之得，

$$\begin{cases}x_1=x_3+x_4+1\\ x_2=-x_3\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\end{cases}$$ （自由未知量 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$） ...8 分

于是，所求 $C=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1 & -c_1\\ c_1 & c_2\end{pmatrix}$，其中 c_1，c_2 为任意常数． ...10 分

北 京 交 通 大 学

2017-2018-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、填空题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、向量 α，β 满足 $\|\alpha\| = 3$，$\|\beta\| = 2$，则内积 $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) =$__________.

2、设 $\alpha = \{2,5,-1\}, \beta = \{1,3,2\}$. λ 与 μ 满足________条件，才有 $\lambda\alpha + \mu\beta$ 与 z 轴垂直.

3、若平面经过点 $A(1, 2, -1)$ 和 z 轴，则此平面方程为________.

4、两平行平面 $\boldsymbol{\pi}_1: 19x-4y+8z+35=0, \boldsymbol{\pi}_2: 19x-4y+8z+42=0$，$d(\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2)$=____. —

5、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,$

$\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，如果 $|A|=1$，那么 $|B| =$__________.

6、空间三直线：$L_1: \dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y+4}{-5} = \dfrac{z}{3}$，$L_2: \begin{cases} x=3t \\ y=-1+3t \\ z=2+7t \end{cases}$，$L_3: \begin{cases} x+3y-z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$，则【 】.

（A）$L_1 /\!/ L_3$；（B）$L_1 /\!/ L_2$；（C）$L_2 \perp L_3$；（D）$L_1 \perp L_2$.

7、设直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\boldsymbol{\pi}: 4x-2y+z-2=0$，则 L 与 $\boldsymbol{\pi}$ 的位置关系【 】.

（A）L 平行于 π；（B）L 在 π 上；（C）L 垂直于 π；（D）L 与 π 斜交.

8、A, P 均为三阶方阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 Q^TAQ 为【 】.

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

9、设 A 为 n 阶非零阵，E 为 n 阶单位阵. 若 $A^3 = O$，则【 】.

（A）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆；（B）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆；

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆；（D）$E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

10、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是【 】.

（A）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1, A\boldsymbol{\alpha}_2,\dots, A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；

（B）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

（C）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；

（D）若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

二、（满分 10 分）求由平面 $\pi_1: x-3y+2z-5=0$，$\pi_2: 3x-2y-z+3=0$ 所成二面角的平分面方程.

三、（满分 10 分）已知平面 $\boldsymbol{\pi}: x-4y+2z+9=0$，直线 $L:\begin{cases}2x-2y+z+9=0\\ x-2y+2z+11=0\end{cases}$，求在平面 $\boldsymbol{\pi}$ 上，过直线 L 与平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的交点，且与直线 $\boldsymbol{L}$ 垂直的直线方程.

四、（满分 10 分）对于直线 $l_1: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ 与 $l_2: \dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$，

（1）l_1 与 l_2 是否共面？ （2）写出过 l_2 且平行于 l_1 的平面方程.

五、（满分 10 分）求向量组：

$$\alpha_1=(3,1,2,5),\alpha_2=(1,1,1,2),\alpha_3=(2,0,1,3),\alpha_4=(1,-1,0,1),$$

$$\alpha_5=(4,2,3,7),\quad \alpha_6=(7,3,4,9)$$

的秩和一个最大无关组，并把其余向量用该最大无关组线性表示.

．六、（满分 1 0 分）已知非齐次方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$

有 3 个线性无关的解．求 a 、b 的值以及方程组的通解.

七、（满分 10 分）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0)^T$．若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_1=(4,3)^T,\boldsymbol{A\alpha}_2=(7,-8)^T$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=(5,-5)^T$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$．

八、（满分 10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}$，$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

（1）求满足 $A\alpha_2=\alpha_1$，$A^2\alpha_3=\alpha_1$ 的所有 α_2，α_3；

（2）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

北 京 交 通 大 学

2018-2019-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、单选题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分）

1、设 $L_1:\begin{cases}x+3y-z+1=0\\2x+y-z=0\end{cases}$，$L_2:\dfrac{x+4}{-2}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+2}{3}$，$L_3:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+3t\\z=4+7t\end{cases}$，则【　　】

（A）$L_1//L_3$；（B）$L_1//L_2$；（C）$L_2\perp L_3$；（D）$L_1\perp L_2$.

2、直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 $\pi:4x+5y-6z+5=0$，则 L 与 π 的位置关系【　】

（A）L 在 π 上；（B）L 平行于 π；（C）L 垂直于 π；（D）L 与 π 斜交.

3、设 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，$B$ 是 2 阶方阵，且满足 $AB=B$，k_1,k_2 是任意常数，则 $B=$【　】

（A）$\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_1&k_2\end{bmatrix}$；（B）$\begin{bmatrix}k_1&-2k_2\\-2k_1&k_2\end{bmatrix}$；（C）$\begin{bmatrix}k_1&-k_1\\-k_2&k_2\end{bmatrix}$；（D）$\begin{bmatrix}k_1&k_2\\-k_1&-k_2\end{bmatrix}$.

4、$a=-5$ 是齐次线性方程组 $\begin{cases}3x_1+(a+2)x_2+x_3=0\\5x_1+ax_2+(a+5)x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ 有非零解的【　】

（A）充分必要条件；（B）充分而非必要条件；

（C）必要而非充分条件；（D）既非充分也非必要条件.

5、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为3维非零向量，则下列选项错误的是【　】.

（A）若 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（B）若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也线性无关；

（C）若 α_3 不能由 α_1,α_2 线性表示，α_4 不能由 α_2,α_3 线性表示，则 α_1 可以由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

（D）若 $R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)=R(\alpha_4,\alpha_1+\alpha_4,\alpha_2+\alpha_4,\alpha_3+\alpha_4)$，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

二、填空题（本题满分 15 分，共有 5 道小题，每道小题 3 分）

1、设 $\vec{a}\in R^3$ 与三个坐标轴成相等的锐角，且 $\|\vec{a}\|=2$，则 $\vec{a}$ 的坐标____________.

2、设 R^3 内四点 $A(2,1,-1)$，$B(3,0,1)$，$C(2,-1,3)$，$D\ (0,8,0)$，则四面体 $A-BCD$ 的体积为______.

3、过三点 $M_1(1,\ 2,\ 3)$，$M_2(3,\ 4,\ 6)$ 和 $M_3(4,\ 3,\ 3)$ 的平面的方程为_______.

4、直线 $L: 2x-1=2y-2=z-3$ 与平面 $\Pi: x+y+z=0$ 的夹角 $\varphi=$________.

5、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R^3$，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3,$

$\alpha_1+5\alpha_2+25\alpha_3)$，如果 $\det(A)=2$，那么 $\det(B)=$_______.

5、$\det(B)=12$.

三、（满分 10 分）求过点 $A(-1,2,3)$ 且与直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 相交，并与向量 $\alpha=(4,3,1)$ 垂直的直线方程.

四、（满分 10 分）求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}\ \ \dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线的方程.

五、（满分 10 分）平面 π，过 $\pi_1: 2x-3y-z+1=0$ 与 $\pi_2: x+y+z=0$ 的交线，且与 π_2 垂直，求 π 的方程.

六、（满分 10 分）设 $\alpha_1=(1,0,0,1)^T,\alpha_2=(1,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,2,-1,-3)^T,\alpha_4=(0,0,3,3)^T$，

$\beta=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示.

1）求 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足的条件；

2）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组，并用此极大无关组表示 β.

七、（满分 10 分）$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ \lambda+1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \lambda+1\end{pmatrix}$，当 λ 取何值时，

1）$\boldsymbol{\beta}$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而且表示式唯一？

2）$\boldsymbol{\beta}$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一？

八、(满分 10 分) 当λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda, \\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多组解，并求出有无穷多组解时的通解向量.

九、（满分 10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，当 a 为何值时，存在矩阵 C，使 $AC-CA=B$ 成立．并求出所有矩阵 C．

北 京 交 通 大 学

2019-2020-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、向量 α，β 满足 $\|\alpha\|=3$，$\|\beta\|=2$，则内积 $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=$【 】.

（A）2　　（B）3　　（C）5　　（D）6 .

2、设 $\alpha=\{2,5,-1\},\beta=\{1,3,2\}$．若 $\lambda\alpha+\mu\beta$ 与 z 轴垂直，则 λ 与 μ 满足【 】.

（A）$\lambda=-2\mu$　　（B）$\lambda=2\mu$　　（C）$\mu=2\lambda$　　（D）$\mu=-2\lambda$.

3、空间三直线：$L_1:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{3}$，$L_2:\begin{cases}x=3t\\ y=-1+3t\\ z=2+7t\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x+3y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$，则【 】.

（A）$L_1 // L_3$　　（B）L_1　　（C）$L_2\perp L_3$　　（D）$L_1\perp L_2$.

4、设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-2=0$，则【 】.

（A）L 平行于 π　　（B）L 在 π 上　　（C）L 垂直于 π　　（D）L 与 π 斜交.

5、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ y & -1\end{bmatrix}$，且 $AB=BA$，则【 】.

（A）$x=2,y=1$　　（B）$x=1,y=2$　　（C）$x=1,y=1$　　（D）$x=2,y=2$.

6、点 $M(1,2,1)$ 到平面 $2x+y+z-7=0$ 的距离是【 】.

（A）$\frac{\sqrt{6}}{2}$ （B）$\overline{\sqrt{6}}$ （C）$\sqrt{6}$ （D）$\frac{7}{\sqrt{6}}$.

7、设三维列向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，若令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$【 】.

（A）2 （B）5 （C）8 （D）12.

8、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换，得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为【 】.

（A）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

9、设 $\mathbf{A}$ 是 4 阶矩阵，且 $\mathbf{A}$ 的行列式$|\mathbf{A}|=0$，则 $\mathbf{A}$ 中【 】.

（A）必有一列元素全为 0 （B）必有一列向量是其余列向量的线性组合

（C）必有两列元素成比例 （D）任意列向量均是其余列向量的线性组合.

10、设四维向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的最大线性无关组是【 】.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ （B）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ （C）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ （D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$.

二、选择题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

1、平面 $\pi_1: 19x-4y+8z+35=0, \pi_2: 19x-4y+8z+42=0$，则 $d(\pi_1,\pi_2)=$【 B 】.

（A）7 （B）$\frac{1}{3}$ （C）$\frac{7}{2}$ （D）3.

2、已知空间上四点 $A(1,2,3),\ B(2,4,1),\ C(1,-3,5),\ D(4,-2,3)$，令三角形 ΔABC 的面积为 S，四面体 $A-BCD$ 的体积为 V，则【 】

（A）$S=\sqrt{65},\quad V=\frac{10}{3}$ （B）$S=\sqrt{65},\quad V=\frac{5}{3}$

（C）$S=\frac{\sqrt{65}}{2},\quad V=\frac{5}{3}$ （D）$S=\frac{\sqrt{65}}{2},\quad V=\frac{10}{3}$.

3、设 A 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组为 $Ax=0$，则【 】.

（A）$Ax=0$ 只有零解时，$Ax=b$ 必有惟一解

（B）$Ax=0$ 有非零解时，$Ax=b$ 必有无穷多组解

（C）$Ax=b$ 有惟一解时，$Ax=0$ 必有惟一解

（D）$Ax=0$ 有非零解时，$A^Tx=0$ 必有非零解.

4、A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量，若秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$ 秩 (A)，则线性方程组【 】.

（A）$Ax=\alpha$ 必有无穷多解 （B）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 必有非零解

（C）$Ax=\alpha$ 必有唯一解 （D）$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 仅有零解.

5、A, P 均为三阶方阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 Q^TAQ 为【　】.

（A）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

三、（满分 10 分）求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=2$ 上的投影直线的方程.

四、（满分 10 分）已知平面 $\boldsymbol{\pi}$ 经过两个平面 $\boldsymbol{\pi_1: x+y+1=0}$, $\boldsymbol{\pi_2: x+2y+2z=0}$ 的交线，并且与平面 $\boldsymbol{\pi_3: 2x-y-z=0}$ 垂直，求平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的方程.

五、（满分 10 分）设 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda+1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ \lambda+1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \lambda+1\end{pmatrix}$，

问：当λ取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而且表示式唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可以由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一？

六、（满分 10 分）当a为何值时，线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3+3=a\\ x_1+ax_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+ax_3=-2\end{cases}$ 无解，有惟一解，有无穷

多解？在有无穷多解的情况下，求出它的通解.

七、（满分 10 分）已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0)^T$. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $A\alpha_1=(1,2,-3)^T, A\alpha_2=(2,-3,1)^T, A\alpha_3=(-3,1,2)^T$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

北 京 交 通 大 学

2020-2021-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、设 $\alpha=\{2,5,-1\},\beta=\{1,3,2\}$．若 $\lambda\alpha+\mu\beta$ 与 $\boldsymbol{x}$ 轴垂直，则 λ 与 μ 满足【　　】.

（A）$\boldsymbol{\lambda}=-2\boldsymbol{\mu}$ （B）$\boldsymbol{\lambda}=2\boldsymbol{\mu}$ （C）$\boldsymbol{\mu}=2\boldsymbol{\lambda}$ （D）$\boldsymbol{\mu}=-2\boldsymbol{\lambda}$.

2、与向量 $\boldsymbol{\alpha}=(16,-15,12)$ 平行、方向相反，且长度为 75 的向量 $\boldsymbol{\beta}=$【　　】.

（A）$(-48,45,-36)$ （B）$(8,45,36)$ （C）$(48,45,36)$ （D）$(-48,25,-36)$.

3、已知向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{\alpha}|=1,|\boldsymbol{\beta}|=2,|\boldsymbol{\gamma}|=3$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$ 的长度为【　　】.

（A）$\sqrt{12}$ （B）$\sqrt{13}$ （C）$\sqrt{14}$ （D）$\sqrt{15}$.

4、设 $\boldsymbol{\alpha}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\boldsymbol{\beta}=k\vec{a}+\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，则 $k=$【　　】.

（A）-2 （B）-1 （C）0 （D）1.

5、空间三直线$L_1:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{3}$，$L_2:\begin{cases}x=3t\\y=-1+3t\\z=2+7t\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x+3y-z+1=0\\2x+y-z=0\end{cases}$，则【 】.

（A）$L_1 // L_2$ （B）$L_1 \perp L_2$ （C）$L_1 // L_3$ （D）$\boldsymbol{L}_1 \perp \boldsymbol{L}_3$.

故选（B）.

6、下列$\boldsymbol{R}^3$的子集中能构成子空间的是【 】.

（A）$\boldsymbol{U}_1=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)|\boldsymbol{x}_1=2\boldsymbol{x}_2=3\boldsymbol{x}_3\}$

（B）$\boldsymbol{U}_2=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)|\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3=1\}$

（C）$\boldsymbol{U}_3=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)|\boldsymbol{x}_1=2(\boldsymbol{x}_2-1)=3\boldsymbol{x}_3\}$

（D）$\boldsymbol{U}_4=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)|\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2=0\}$.

7、设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为任意非零向量，下列表述中完全正确的是【 】.

（A）$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\times(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=0$ （B）$(\boldsymbol{\alpha}\bullet\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\bullet\boldsymbol{\gamma})$

（C）$|\boldsymbol{\alpha}\bullet\boldsymbol{\beta}|\le|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$ （D）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$共线$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\bullet(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})$.

8、平行于$\boldsymbol{x}$轴，且过$\boldsymbol{M}(3,-1,\ 2)$及$\boldsymbol{N}(0,\ 1,\ 0)$的平面方程是【 】.

（A）$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}=1$ （B）$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=1$ （C）$\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}=1$ （D）$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=0$.

9、向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则下列向量组中线性无关的是【 】.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ （B）$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ （D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.

10、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{k},\ 2,\ 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,\ \boldsymbol{k},\ 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,\ 1)$线性无关，则【　　】.

（A）$\boldsymbol{k}\neq 2$且$\boldsymbol{k}\neq -3$　　（B）$\boldsymbol{k}\neq -2$且$\boldsymbol{k}\neq 3$

（C）$\boldsymbol{k}\neq 2$或$\boldsymbol{k}\neq -3$　　（D）$\boldsymbol{k}\neq -2$或$\boldsymbol{k}\neq 3$.

二、单选题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

11、已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$均为 4 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)$，且

$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则行列式$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$【　　】.

（A）5　　（B）10　　（C）15　　（D）20.

12、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是【　　】.

（A）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关

（B）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关

（C）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关

（D）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,A\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

13、已知 4 维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，若$\boldsymbol{\beta}_i$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均正交$(\boldsymbol{i}=1,2,3,4)$，则【 】.

（A）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=0$ （B）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=1$

（C）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\geq 1$ （D）$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leq 1$.

14、设有两个向量组：(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{a}_{11},\boldsymbol{a}_{12},\boldsymbol{a}_{13})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{a}_{21},\boldsymbol{a}_{22},\boldsymbol{a}_{23})$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{a}_{31},\boldsymbol{a}_{32},\boldsymbol{a}_{33})$和向量组(II)：$\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{a}_{11},\boldsymbol{a}_{12},\boldsymbol{a}_{13},\boldsymbol{a}_{14})$，$\boldsymbol{\beta}_2=(\boldsymbol{a}_{21},\boldsymbol{a}_{22},\boldsymbol{a}_{23},\boldsymbol{a}_{24})$，$\boldsymbol{\beta}_3=(\boldsymbol{a}_{31},\boldsymbol{a}_{32},\boldsymbol{a}_{33},\boldsymbol{a}_{34})$. 则下述命题正确的是【 】.

（A）(I) 相关$\Rightarrow$(II) 相关 （B）(II) 相关$\Rightarrow$(I) 无关

（C）(II) 无关$\Rightarrow$(I) 无关 （D）(I) 无关$\Rightarrow$(II) 无关.

15、设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$阶非零阵，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{I}$为$\boldsymbol{n}$阶单位阵. 以下命题正确的是【 】.

（A）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$不可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$不可逆 （B）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$不可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$可逆

（C）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$可逆 （D）$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$不可逆.

三、（满分 10 分）

对于直线$l_1:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$与$l_2:\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1）证明它们不共面；

2）写出过l_2且平行于l_1的平面方程.

四、(满分 10 分) 试求直线 $L:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 π： $x+y+z=0$ 上的投影直线方程，并将它写为对称式方程.

五、(满分 10 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,\ 1,\ 2,\ 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\ 0,\ 1,\ 3)$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,0,1)$， $\boldsymbol{\alpha}_5=(4,\ 2,\ 3,\ 7)$. 求其的一个极大无关组，并用其表示其余向量.

六、（满分 10 分）当 a 、b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多组解，并求出有无穷多组解时的通解.

七、（满分 10 分） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{a}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，若存在矩阵 $\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 成立．确定 a 的值，并求出所有矩阵 $\boldsymbol{X}$．

北 京 交 通 大 学

2021-2022-1 《几何与代数 B》 第二次月考 试卷答案

一、单选题（本题满分 30 分，共有 10 道小题，每道小题 3 分）

1、设向量α与β不平行，$\overrightarrow{AB}=\alpha+2\beta,\ \overrightarrow{BC}=-4\alpha-\beta,\ \overrightarrow{CD}=-5\alpha-3\beta$，则【 】.

（A） $ABCD$ 是矩形 （B） $ABCD$ 是梯形

（C） A,B,C,D 不共面 （D） A,B,C,D 共线.

2、已知向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$两两垂直，且$|\boldsymbol{\alpha}|=1,|\boldsymbol{\beta}|=2,|\boldsymbol{\gamma}|=3$，则$\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}+3\boldsymbol{\gamma}$的长度为【 】.

（A） $\sqrt{14}$ （B） 7 （C） $7\sqrt{2}$ （D） 14.

3、空间直线$L_1:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{3}$，$L_2:\begin{cases}x=3t\\ y=-1+3t\\ z=2+7t\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x+3y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$，则【 】.

（A） $L_1 // L_2$ （B） $L_1\perp L_2$ （C） $L_1 // L_3$ （D） $L_1\perp L_3$.

4、下列$\boldsymbol{R}^3$的子集中不能构成子空间的是【 】.

（A）$U_1=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1=2x_2=3x_3\}$

（B）$U_2=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+x_3=0\}$

（C）$U_3=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1-1=x_2-2=x_3-3\}$

（D）$U_4=\{(x_1,x_2,x_3)|x_1+2x_2+3x_3=0\}$.

5、平行于 x 轴，且过 $M(3,-1,\ 2)$ 及 $N(0,\ 1,\ 0)$ 的平面方程是【 】.

（A） $y-z=1$ （B） $y+z=1$ （C） $z-y=1$ （D） $y+z=0$.

6、已知向量组 $\alpha_1=(1,-1,\ 1),\ \alpha_2=(a,\ 2,\ 1),\ \alpha_3=(2,\ a,\ 0)$ 线性无关，则【 】.

（A） $a\neq-2$ 且 $a\neq3$ （B） $a\neq2$ 且 $a\neq-3$

（C） $a\neq2$ 或 $a\neq-3$ （D） $a\neq-2$ 或 $a\neq3$.

7、设 γ 是 3 维列向量，A 为 3 阶实矩阵，已知 α_1,α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，非齐次方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\beta\ \ (k_1,k_2\in\mathrm{R})$，则下列陈述错误的是【 】.

（A）向量组 α_1,α_2,β 一定线性无关 （B） $Ax=\beta$ 有无穷多解

（C） $|A|=0$ （D） $A\gamma$ 与 β 一定线性无关.

8、设 A,B,C,D 是四个 4 阶方阵，其中 A,D 是非零方阵，B,C 是可逆矩阵，且满足 $ABCD=O$，

若 $r(A)+r(B)+r(C)+r(D)=r$，则 r 的取值范围是【 】.

（A）$8\le r\le 10$ （B）$10\le r\le 12$ （C）$12\le r\le 16$ （D）$16\le r\le 18$.

9、向量组 $(\mathrm{I}):\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$，向量组 $(\mathrm{II}):\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 均线性无关，且 (I) 中任意向量均不能由 (II) 线性表示，(II) 组中任意向量也不能由 (I) 组线性表示，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$，则【 】.

（A）向量组 $(\mathrm{III}):\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 必线性无关

10、设 A 为 n 阶方阵，β 为 n 维列向量，且 $R(A,\beta)<R\begin{pmatrix} A & \beta \\ O & 1 \end{pmatrix}$，则【 】.

（A）$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解 （B）$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 只有零解

（C）方程组 $Ax=\beta$ 必有解 （D）方程组 $Ax=\beta$ 必无解.

二、单选题（本题满分 20 分，共有 5 道小题，每道小题 4 分）

11、若方程组 (I)$\begin{cases} x-z=a \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$ 和 (II)$\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ x+by+z=1 \end{cases}$ 同解，则 $a+b=$【 】.

（A）3 （B）2 （C）1 （D）0 .

12、设 A,B 均为 n 阶方阵，则【 】.

（A）$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}$ （B）$R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}=R(A^T,B^T)$

（C）$R\begin{pmatrix} A \\ AB \end{pmatrix}=R(A)$ （D）$R\begin{pmatrix} A \\ BA \end{pmatrix}=R(A)$.

13、设 4 维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，但$\boldsymbol{\beta}_2$不可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则下列叙述不成立的是【　　】.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$必线性无关　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$必线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$必线性无关　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$必线性无关.

14、设有两个向量组：(I)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$和向量组$(\mathrm{II})$：$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{12},a_{13},a_{14})$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})$，$\boldsymbol{\beta}_3=(a_{31},a_{32},a_{33},a_{34})$. 则下述命题正确的是【　　】.

（A）(I)相关$\Rightarrow(\mathrm{II})$相关　　（B）(II)相关$\Rightarrow(\mathrm{I})$无关

（C）(II)无关$\Rightarrow(\mathrm{I})$无关　　（D）(I)无关$\Rightarrow(\mathrm{II})$无关.

15、设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的秩为 1，则必有【　　】.

（A）$a-b=0$或$a+2b=0$　　（B）$a-b=0$或$a+2b\neq 0$

（C）$a-b\neq 0$且$a+2b=0$　　（D）$a-b\neq 0$且$a+2b\neq 0$.

三、（满分 10 分） 平面 $\boldsymbol{\pi}$ 过 $\boldsymbol{\pi}_1: 2x-3y-z+1=0$ 与 $\boldsymbol{\pi}_2: x+y+z=0$ 的交线，且与 $\boldsymbol{\pi}_2$ 垂直，求 $\boldsymbol{\pi}$ 的方程.

四、（满分 10 分） 求 R^3 中直线 $\boldsymbol{l}_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\boldsymbol{\pi}: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $\boldsymbol{l}_2$ 的方程.

五、（满分 10 分） 在 R^3 中，有向量组 $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$，以及向量组 $\boldsymbol{B}: \boldsymbol{\beta}_1=(2,1,2)^T, \boldsymbol{\beta}_2=(2,2,1)^T, \boldsymbol{\beta}_3=(1,2,-1)^T$.

1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是 R^3 的基；

2）R^3 中向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^T$，求其在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标.

六、（满分 10 分） 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$，问是否存在非单位矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$？若不存在，请说明理由；若存在，求出所有满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{B}$.

七、(满分 10 分) 向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,1,0)^T$，$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\beta}_1=(3,0,2)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(2,-1,1)^T$，