数学 100 問

【1】

$1 \leq m \leq n$ となる正整数を考えたとき、m は次の値を割り切ることを示せ

$$n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k}$$

ただし

$$\binom{n}{k} =_n \mathrm{C}_k$$

【解答】

$$\begin{aligned} n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} &= n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) && (1) \\ &= n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} - n \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} && (2) \\ &= n(-1)^{m-1} \binom{n-1}{m-1} = m(-1)^{m-1} \binom{n}{m} && (3) \end{aligned}$$

【2】

パスカルの三角形の 7 番目の部分には、7、21、35 という連続した二項係数があり、これが等差数列をなしている。3 項の等差数列を含む行をすべて求めよ。

【解答】

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$$

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0$$

$$k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$$

$$n + 2 = m^2$$

$$k = \frac{(m+1)(m-2)}{2} or \frac{(m-1)(m=2)}{2}$$

7 以上の平方数-2 となる数となる

【3】

等差数列 $\{a_n\}$ と $S_n = \sum a_n$ に対して、次の式が成立することをしめせ

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} = \frac{2^n}{n+1} S_{n+1}$$

【解答】

$$(a_{k+1} + a_{n-k+1})(n+1) = 2S_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_{k+1} + a_{n-k+1}(n+1) = 2S_{n+1} = \frac{2S_{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1} S_{n+1}$$

【4】

p を素数として、n,k の p 進数表示の第 i 桁目を a_i, b_i とする。また、$i > r$ で a_i は全て 0 となる。この時次のことを示せ。

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \pmod p$$

次に、パスカルの三角形で、全ての数が奇数となる行の行数 m の必要十分条件は $m = 2^n - 1$ となる正整数 n が存在することであることを証明せよ。

【解答】

$$n = a_r p^r + ... + a_1 p + a_0$$

$$k = b_r p^r + ... + b_1 p + b_0$$

$$n_1 = a_r p^{r-1} + ... + a_1$$

$$k_1 = b_r p^{r-1} + ... + b_1$$

$\binom{n}{k}$ の最初の b_0 項を考え、また、分母分子ともに p の倍数ではないことを考えて、

$$(\frac{n_1 p + a_0}{k_1 p + b_0})(\frac{n_1 p + a_0 - 1}{k_1 p + b_0 - 1})...(\frac{n_1 p + a_0 - b_0 + 1}{k_1 p + 1}) \equiv (\frac{a_0}{b_0})(\frac{a_0 - 1}{b_0 - 1})...(\frac{a_0 - b_0 + 1}{1}) = \binom{a_0}{b_0} \pmod p$$

となることがわかる。以上から、

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{n_1}{k_1} \pmod p$$

このような作業を r 回続ければ証明は完了する。
次に、$p = 2$ の場合を考えれば、$\binom{n}{k}$ 全てが奇数となるのは、a_i が全て 1 の時のみなので、証明は完了する