

## Экспоненциальное сглаживание

### Рекомендуемая литература

Hyndman, Athanasopoulos  
Forecasting: Principles and Practice (2nd ed)  
<https://otexts.com/fpp2>

Makridakis, Wheelwright, Hyndman (1998)  
Forecasting: methods and applications (3rd ed)  
Wiley: NY.

### Процедура Питон

`statsmodels.tsa.holtwinters.ExponentialSmoothing`

This is a full implementation of the holt winters exponential smoothing as per Hyndman, Athanasopoulos.

This includes all the unstable methods as well as the stable methods.

The implementation of the library covers the functionality of the R library as much as possible whilst still being Pythonic.

$y(t) = \text{Level} + \text{Trend} + \text{Seasonality} + \text{Noise}$

$y(t) = \text{Level} * \text{Trend} * \text{Seasonality} * \text{Noise}$

### Brown's simple exponential smoothing

Нет тренда, нет сезонной составляющей

### Модель

Представление модели: "подруливание"

$$s_0 = x_0$$

$$s_t = s_{t-1} + \alpha \cdot (x_{t-1} - s_{t-1})$$

Представление модели: взвешенное среднее

$$s_0 = x_0$$

$$s_t = \alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-1}$$

### Происхождение названия.

Почему экспоненциальное? Почему сглаживание?

$$s_t = \alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-1}$$

$$s_{t-1} = \alpha \cdot x_{t-2} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-2}$$

$$s_{t-2} = \alpha \cdot x_{t-3} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-3}$$

Подставляем в уравнение

$$s_t = \alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-1} = .$$

$$. = \alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot (\alpha \cdot x_{t-2} + (1 - \alpha) \cdot s_{t-2}) = .$$

$$. = \alpha \cdot x_{t-1} + \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot x_{t-2} + (1 - \alpha)^2 \cdot s_{t-2} = .$$

$$. = \alpha \cdot (x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot x_{t-2} + (1 - \alpha)^2 \cdot x_{t-3} + (1 - \alpha)^3 \cdot x_{t-4} + \dots) = .$$

## Double exponential smoothing Holt-Winters double exponential smoothing

Есть тренд, нет сезонной составляющей.  
Тренд линейный, локальный.

Возможно моделирование нелинейным трендом.  
Выигрыша в качестве модели нет  
(Лукашин Ю.П.

Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов  
Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003 г. - 416 с)

$s_t$  - «сглаженное» значение временного ряда (модельное, теоретическое значение)

$b_t$  - локальное значение тренда

$$s_1 = x_1$$

$$b_1 = x_1 - x_0$$

Уравнение для прогнозирования

$$\hat{y}_{t+h} = s_t + h \cdot b_t$$

Уравнение для уровня ряда

Уравнение для тренда

$$s_t = \alpha \cdot x_{t-1} + (1 - \alpha) \cdot (s_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta \cdot (s_t - s_{t-1}) + (1 - \beta) \cdot b_{t-1}$$

Линейный тренд для временных рядов.

Модифицированные уравнения

$$y = a + bx$$

$$y_t = a + b \cdot t$$

$t$  – номер наблюдения

$$y_t - y_{t-1} = (a + b \cdot t) - (a + b \cdot (t-1))$$

$$y_t - y_{t-1} = b$$

## Triple exponential smoothing Holt-Winters additive method

Есть тренд, есть сезонная составляющая.

Тренд линейный, локальный.

Сезонность локальная.

$T$  – период сезонных отклонений

$S_t$  - локальные сезонные поправки

Уравнение для прогнозирования

$$\hat{y}_{t+m} = L_t + m \cdot b_t + S_{t+m-T}$$

Уравнение для уровня ряда

Уравнение для тренда

Уравнение для сезонной составляющей

$$s_t = \alpha \cdot (x_{t-1} - S_{t-T}) + (1 - \alpha) \cdot (s_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta \cdot (s_t - s_{t-1}) + (1 - \beta) \cdot b_{t-1}$$

$$S_t = \gamma \cdot (x_t - s_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) \cdot S_{t-m}$$