近似算法作业

- Ex1
  形式化描述：给定V的一个子集V'作为证书，验证该子集中的任意两点u，v都不存在(u,v)属于E，若是返回1，不是返回0.
  该问题的NP完全性证明：
  1. 对证书V'，验证V'中的任意两点之间都不存在连线属于E，这需要$O(n^3)$的时间复杂度完成，n是G的顶点数。因此该问题可以在多项式时间内验证，属于NP问题。
  2. 设G'=(V,E')表示图G的补图，从团V'中任取不同的两点u,v，都存在(u,v)属于E'，即(u,v)不属于E，因此V'属于图G的独立集。所以团问题可以规约到独立集问题。而团问题是NPH的，因此所有NP类问题都可以归约到独立集问题。
- Ex2
  充分性：显然对于一个有着最大团size为α的图G，它的幂图G^m肯定有一个size为$m\alpha$的团，若存在size大于$m\alpha$的团，那么G^m中必然有一个副本有$\alpha+1$个顶点在团中，这就意味着在G的最大团的size不是α，这与条件相悖。因此G^m的最大团size是$m\alpha$.
  必要性：若G^m的最大团size为$m\alpha$，若每一个子图G贡献的结点数（最大团）大于α，则幂图G^m的最大团size必然要大于$m\alpha$；若每一个子图G的最大团size小于α，则幂图G^m的最大团size必然要小于$m\alpha$，因此图G的最大团size只能在等于α时，G^m中的最大团size为$m\alpha$.
- Ex3
  由ppt可以得到$\frac{A(I)}{OPT(I)} \leq 1 + \frac{m-1}{m}\frac{P_n}{OPT(I)}$.如果$\frac{P_n}{OPT(I)} \leq \frac{1}{3}$,那么有$\frac{A(I)}{OPT(I)} \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$,否则有$OPT(I) < 3P_n$,而因为$P_n$是实例I中时间最短的作业，若在最优调度中有机器上的作业数超过2，那么该机器上的作业时间$OPT'(I) = P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + ... + P_{ik} > nP_n > 3P_n > OPT(I)$与$OPT(I)$是最优调度的完成时间相悖，因此在最优调度在任何机器上至多包含两个作业。又根据ppt66页，机器的两个作业i，j分属于1-m和m-2m之间，且$P_1, P_2, ..., P_{2m}$按运行时间递减排序，而LPT将长时间作业分配到轻负载上，那么LPT的分配方案中，机器的两个作业也是分属于1-m和m-2m之间。因此LPT的分配结果与最优调度的结果一致，有$\frac{A(I)}{OPT(I)} = 1 \leq \frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$.