Representación de redes a través de la teoría de grafos

Serna Mendoza Jorge Armando
Optimización de flujo en redes

Resumen

Este trabajo busca representar redes mediante la teoría de grafos, con la implementación de la librería NetworkX de `Python`. A cada tipo de grafo se le identifica una aplicacion práctica y se representa con un ejemplo inspirado en datos reales.

Introducción

Un *grafo* $G = (N, A)$ es una pareja ordenada en la que N es un conjunto de *nodos* y A es un conjunto de *arcos*. El conjunto A se conforma de pares de nodos (u, v) y se dice que u y $v \epsilon N$ son adyacentes. En G se representa la adyacencia de u con v, mediante una línea que une el nodo u con el nodo v.

Un *multigrafo* es un grafo que tiene *multiarcos*, es decir, si u y v son adyacentes, existe mas un arco que une a u con v. Por otro lado, un *ciclo* es una sucesión de nodos y arcos tales que forman un camino que comienza y termina en el mismo nodo.

Grafo simple no dirigido acíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Los arcos $(u, v) \epsilon A$ no tienen dirección $\forall\ u, v \epsilon N$.
- G no tiene ciclos.

Ejemplo: La Filogenia es la relación de parentesco entre especies, se encarga de estudiar filiación de entidades que derivan unas de otras en un proceso evolutivo. Véase figura (1).

Cuadro 1: Bacterias.

Notación	Nombre
a	Aquifex
b	Thermotoga
c	Planctomyces
d	Cianobacteria
e	Proteobacteria
f	Spirochaetes
g	Cytophaga
h	Gram positiva

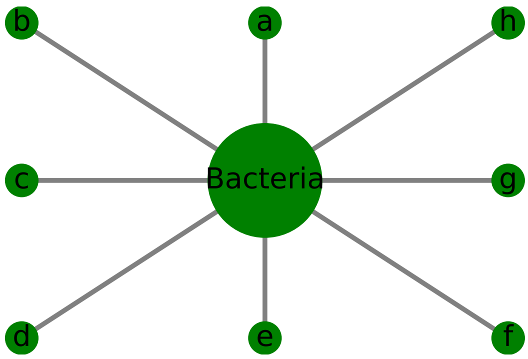

Figura 1: Árbol filogenético de la Bacteria

Código en Python de la figura (1).

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

#1 grafo simple no dirigido
G=nx.Graph()
G.add_edges_from([("Bacteria","a"), ("Bacteria","b"),("Bacteria","c"),("Bacteria","d"),("Bacteria","e"),("Bacteria","f"),("Bacteria","g"),("Bacteria","h")])
node1 = {"Bacteria"}
node2 = {"a", "b", "c","d","e", "f", "g", "h"}
pos = {"Bacteria":(0, 0),"a":(0,5), "b":(-5,5), "c":(-5,0), "d":(-5,-5), "e":(0,-5), "f":(5,-5), "g":(5,0), "h":(5,5)}
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, nodelist=node1,node_size=5000,
                        node_color='green', node_shape='o', width=5, alpha=1)
nx.draw_networkx_nodes(G, pos, nodelist=node2,node_size=400,
                        node_color='green', node_shape='o', width=5, alpha=1)
nx.draw_networkx_edges(G, pos, width=3, alpha=0.5, edge_color='grey')
nx.draw_networkx_labels(G, pos, font_size=18)
plt.axis('off')
plt.savefig('grafo1.eps', format='eps', dpi=1000)
```

Grafo simple no dirigido cíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Los arcos $(u, v) \in A$ no tienen dirección $\forall\ u, v \in N$.
- G tiene por lo menos un ciclo.

Ejemplo: Travelling Salesman Problem (TSP) es un problema que consiste en dada una lista de ciudades (n) y las distancias entre cada par de ellas (aristas), determinar cual es la ruta más corta posible que visita cada ciudad una vez y al finalizar regresa a la ciudad origen. Véase figura (2).

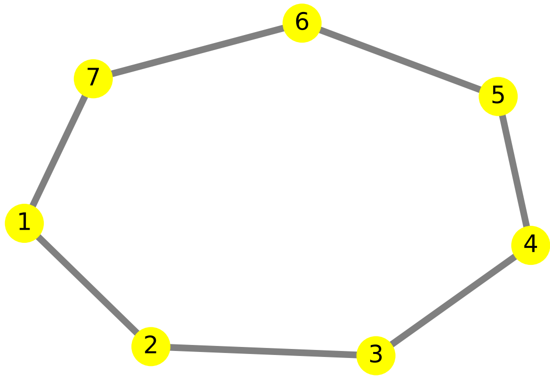

Figura 2: TSP con n=7

Grafo simple no dirigido reflexivo

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Los arcos $(u, v) \ \epsilon \ A$ no tienen dirección $\forall \ u, v \ \epsilon \ N$.
- G tiene por lo menos un nodo u tal que la relacion $(u, u) \ \epsilon \ A$.

Ejemplo: (Producto Cartesiano). Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un conjunto con 6 elementos y sea $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ un subconjunto de A. Se define el producto cartesiano $B = A \times A_1$.

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \end{array} \right\}$$

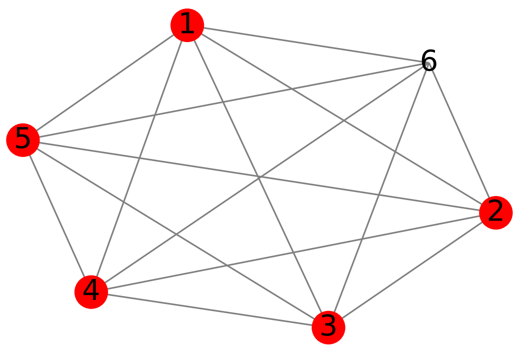

Figura 3: Representación de B como un grafo

En la figura 3 se representa de color rojo a los nodos de G que cumplen tener en A arcos de la forma (u, u).

Grafo simple dirigido acíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Existe al menos un arco $(u, v) \epsilon A$ con dirección.
- G no tiene ciclos.

Ejemplo: (Árbol genealógico). Un árbol genealógico visto como un grafo, es una representación de los descendientes de un individuo de forma organizada. Véase figura (4).

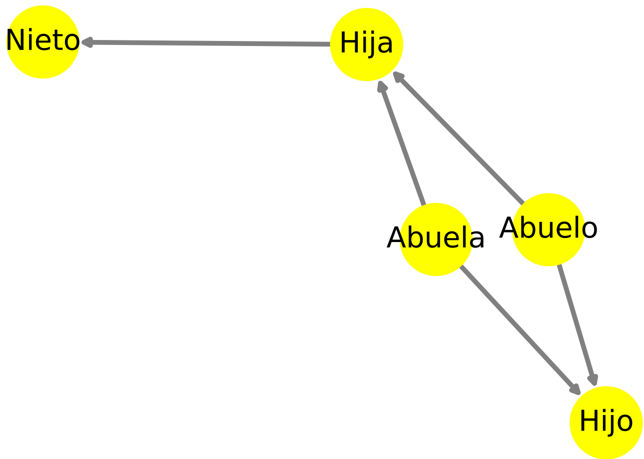

Figura 4: Ejemplo de un árbol genealógico

Grafo simple dirigido cíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Existe al menos un arco $(u, v) \epsilon A$ con dirección.
- G tiene a lo menos un ciclo.

Ejemplo: (Ciclo Hidrológico). El ciclo hidrológico es el proceso de circulación del agua entre los distintos compartimentos que forman la hidrosfera, donde intervienen reacciones químicas que provocan cambios de estado físico del agua. Véase figura (5).

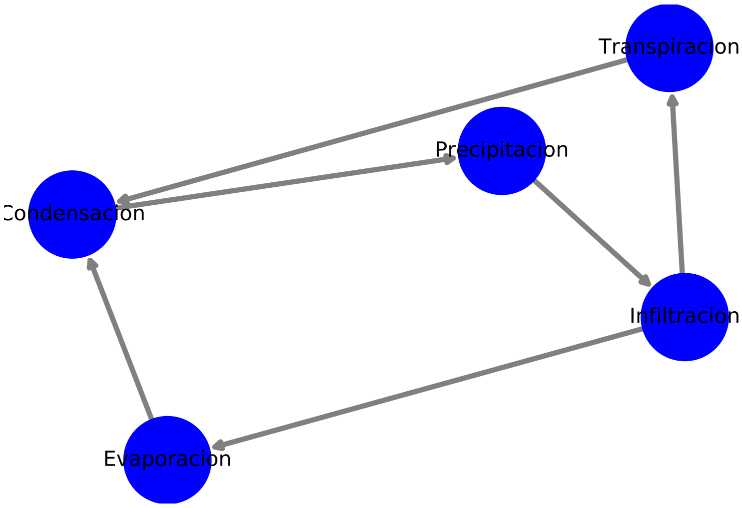

Figura 5: Ejemplo de un árbol genealógico

Grafo simple dirigido reflexivo

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G no tiene multiarcos.
- Existe al menos un arco $(u, v)\ \epsilon\ A$ con dirección.
- G tiene por lo menos un nodo u tal que la relacion $(u, u)\ \epsilon\ A$.

Ejemplo: (Estado del clima). Es la condición en que se encuentra la atmósfera en un determinado momento y lugar. Los estados del clima cambian todos los días con cierta probabilidad. Cuando se representa el clima mediante un grafo, los nodos representan los estados del clima y las aristas la probabilidad de pasar de un estado al otro. Véase figura (6).

Cuadro 2: Estado del clima.

Notación	Clima
1	Lluvioso
2	Soleado
3	Nublado
4	Nevado
5	Frío
6	Ventoso

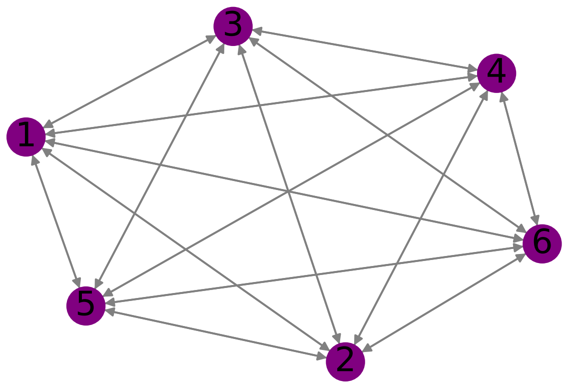

Figura 6: Estados del clima

Multigrafo no dirigido acíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Los arcos $(u, v) \epsilon A$ no tienen dirección $\forall\ u, v \epsilon N$.
- G no tiene ciclos.

Ejemplo: (Red de rutas). Cuando una red de rutas se representa mediante un grafo, los nodos representan lugares y los arcos representan el camino que une esos lugares. En la figura (7) se considera las rutas de 4 ciudades, tales ciudades pueden tener un único camino (azul) para llegar de ciudad a ciudad o más de un camino (verde) para llegar de ciudad a ciudad.

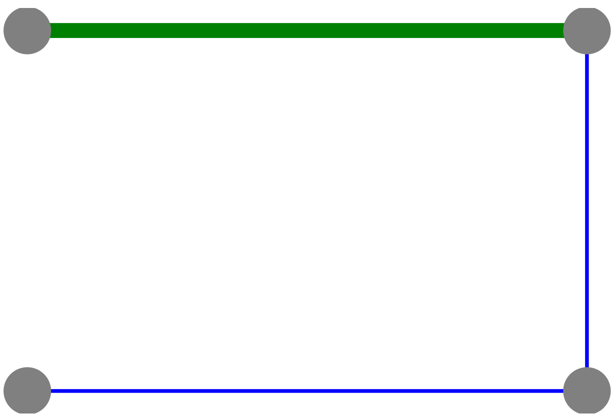

Figura 7: Red de rutas

Multigrafo no dirigido cíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Los arcos $(u, v) \epsilon A$ no tienen dirección $\forall u, v \epsilon N$.
- G tiene a lo menos un ciclo.

Ejemplo: (Puentes de Königsberg). El problema consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio. En la figura (8) se considera los 4 puntos de inicio posibles, tales puntos pueden tener un puente (azul) para llegar de un punto a otro punto o más de un puente (verde) para llegar de un punto a otro punto.

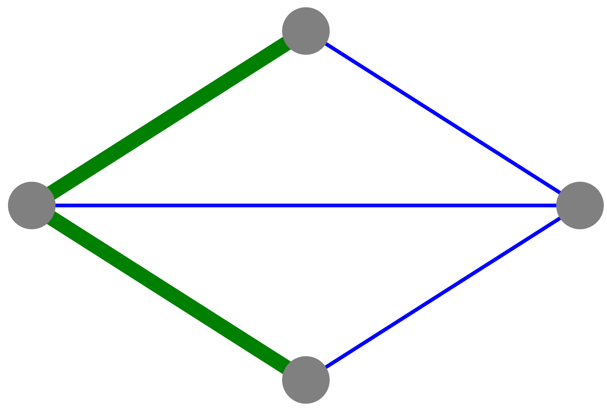

Figura 8: Puentes de Königsberg

Multigrafo no dirigido reflexivo

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Los arcos $(u, v) \epsilon A$ no tienen dirección $\forall u, v \epsilon N$.
- G tiene por lo menos un nodo u tal que la relacion $(u, u) \epsilon A$.

Ejemplo: (Proceso de calidad). En la industria se aplican procesos de calidad a los productos antes de ser sacados al mercado. Cuando un proceso de calidad se representa mediante un grafo, el grafo tiene un nodo origen que representa el inicio del proceso, nodos intermedios que llevan a cabo cada tarea de revisión de calidad, la misma revisión se puede llevar a cabo más de una vez antes de ser pasado a otro proceso de calidad y un nodo destino que representa el gin del proceso.

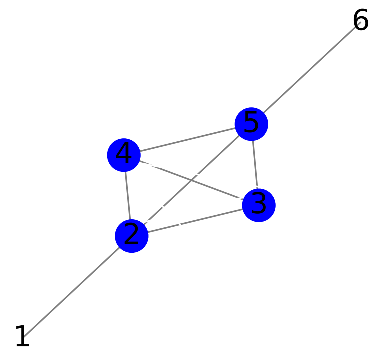

Figura 9: Proceso industrial de calidad

En la figura (9) el nodo 1 representa el inicio del proceso, los nodos intermedios (color azul) representan las actividades de revisión de calidad, las cuales se pueden llevar a cabo mas de una vez y el nodo 6 representa el fin del proceso.

Multigrafo dirigido acíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Existe al menos un arco $(u, v) \in A$ con dirección.
- G no tiene ciclos.

Ejemplo: (Red de vuelos en un aeropuerto). En la figura (10) se representa el número de viajes que puede existir entre un aeropuerto de una ciudad y otro de otra ciudad.

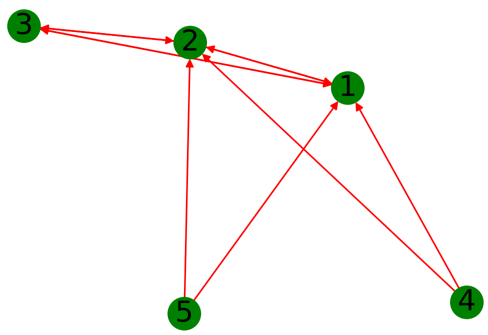

Figura 10: Red de vuelos

Multigrafo dirigido cíclico

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Existe al menos un arco $(u, v) \epsilon A$ con dirección.
- G al menos un ciclo.

Ejemplo: (Red de amistad). En la figura (12) se tiene un conjuto de personas que tienen agregado, son amigos, siguen, etc. a otra persona por algúna o algunas páginas de internet como Facebook, Instagram, Twiter, Hi-5, etc.

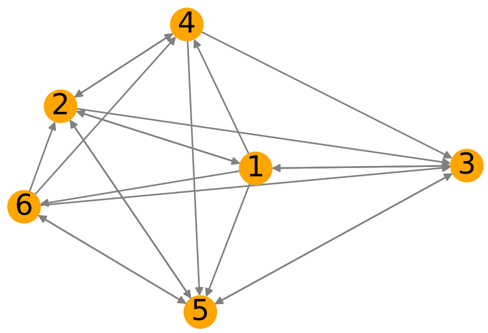

Figura 11: Redes sociales

Multigrafo dirigido reflexivo

Es un grafo $G = (N, A)$ que cumple:

- G tiene al menos un par de nodos, tales que tienen mas de una arista de adyacencia.
- Existe al menos un arco $(u, v) \epsilon A$ con dirección.
- G tiene por lo menos un nodo u tal que la relacion $(u, u) \epsilon A$.

Ejemplo: (Transmisión de enfermedades). En la figura (12) se representa la red social de un grupo de 6 personas los cuales pueden tener o desarrollar una cierta enfermedad, los arcos en la red representan la probabilidad de ser contagiado.

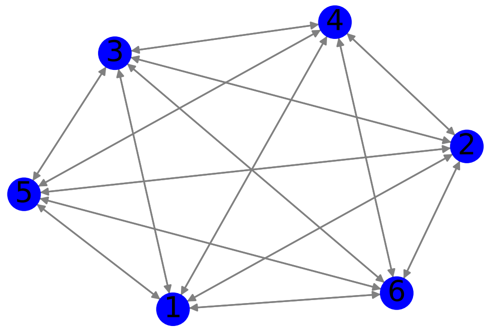

Figura 12: Transmisión de enfermedades

Referencias

[1] R. Ahuja, T. Magnanti, and J. Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms and Applicattions. *[Prentice Hall]*, 1993.

[2] Bazaraa M., Jarvis J., and Sherali H. *Linear Programming and Netwok Flows.* Wiley, 4th edition edition, 2010.

[3] Python. https://www.python.org/.

[4] Schaeffer. https://elisa.dyndns-web.com/teaching/opt/flow/.