TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición
Sea $f:[0,\infty)\longrightarrow\Re$. Se llama **transformada de Laplace** de f a la función

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

Notación
La transformada de Laplace de una función $f(t)$ la notaremos como

$$F(s)=L[f(t)]$$

Observaciones
1) La transformada de Laplace de una función $f(t)$ es una función $F(s)$ cuyo dominio es el conjunto de los números reales s tales que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ es convergente.
2) Es habitual utilizar la variable t para la función inicial f y la variable s para la transformada de Laplace F.

Ejemplo
Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones
a) $f(t)=1$ b) $f(t)=t^n$, $n\in N$ c) $f(t)=sen(t)$

Solución

a) Calculamos la transformada de Laplace de la función $f(t)=1$

$$L[1]=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}\qquad s>0$$

b) Calculamos la transformada de Laplace de la función $f(t)=t^n$, $n\in N$.

$$L[t^n]=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt \underset{st=u\Rightarrow t=\frac{u}{s}\Rightarrow dt=\frac{1}{s}du}{=} \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n\frac{1}{s}du=$$

$$=\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}du=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad s>0$$

c) Calculamos la transformada de Laplace de la función $f(t)=sen(t)$

$$L[sen(t)]=\int_0^\infty e^{-st}sen(t)dt \underset{\substack{u=e^{-st}\Rightarrow du=-se^{-st}dt\\ v'=sen(t)\Rightarrow v=-\cos(t)}}{=} \left[-\cos(t)e^{-st}\right]_0^\infty-s\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)dt=$$

$$=1-s\int_0^\infty e^{-st}\cos(t)dt \underset{\substack{u=e^{-st}\Rightarrow du=-se^{-st}dt\\ v'=\cos(t)\Rightarrow v=sen(t)}}{=} 1-s\left(\left[sen(t)e^{-st}\right]_0^\infty+\int_0^\infty se^{-st}sen(t)dt\right)=$$

$$=1-s^2\int_0^\infty e^{-st}sen(t)dt$$

Entonces

$$\left(1+s^2\right)\int_0^\infty e^{-st}sen(t)dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty e^{-st}sen(t)dt = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow \quad L[sen(t)] = \frac{1}{1+s^2} \qquad\qquad s > 0$$

Ejercicio

Calcular la transformada de Laplace de las funciones

a) $f(t) = e^{at}$ b) $f(t) = \cos(t)$

Propiedades de la transformada de Laplace

1) Linealidad

$$L[c_1 f(t) + c_2 g(t)] = c_1 L[f(t)] + c_2 L[g(t)]$$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = 4t^2 - 3sen(t)$

Solución

$$L\left[4t^2 - 3sen(t)\right] = 4L\left[t^2\right] - 3L[sen(t)] = \frac{8}{s^3} - \frac{3}{1+s^2}$$

2) Traslación

Si $L[f(t)] = F(s)$ entonces $L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$

Solución

$$L\left[e^{at}\right] = L\left[e^{at}\cdot 1\right] \underset{L[1]=\frac{1}{s}}{=} \frac{1}{s-a}$$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}sen(t)$

Solución

$$L\left[e^{at}sen(t)\right] \underset{L[sen(t)]=\frac{1}{1+s^2}}{=} \frac{1}{1+(s-a)^2}$$

Ejercicio

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}\cos(t)$

3) Cambio de escala

Si $L[f(t)] = F(s)$ entonces $L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = sen(at)$

Solución

$$L[sen(at)] \underset{L[sen(t)]=\frac{1}{1+s^2}}{=} \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2} = \frac{a}{a^2+s^2}$$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=e^{bt}sen(at)$

Solución

$$L\left[e^{bt}sen(at)\right] \underset{L[sen(at)]=\frac{a}{a^2+s^2}}{=} \frac{a}{a^2+(s-b)^2}$$

Ejercicio

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=e^{bt}\cos(at)$

4) Transformada de Laplace de una función multiplicada por t^n

Si $L[f(t)]=F(s)$ entonces $L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{d^nF}{ds^n}$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=t^2e^{at}$

Solución

$$L\left[t^2e^{at}\right] \underset{L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}}{=} (-1)^2\left(\frac{1}{s-a}\right)'' = \frac{2}{(s-a)^3}$$

También podemos calcular la transformada de Laplace de $f(t)=t^2e^{at}$ mediante la propiedad de cambio de escala

$$L\left[t^2e^{at}\right] \underset{L\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3}}{=} \frac{2}{(s-a)^3}$$

Ejercicio

1) Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)=t^ne^{at}$ por dos procedimientos distintos.

2) Hallar la transformada de Laplace de las funciones

a) $f(t)=t\,sen(at)$ b) $f(t)=t\cos(at)$

5) Transformada de Laplace de una derivada

Si $L[f(t)]=F(s)$ entonces $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de la función $g(t)=\cos(t)$

Solución

Si llamamos $f(t)=sen(t)$ entonces $f'(t)=\cos(t)=g(t)$. Se tiene que

$$L[\cos(t)]=L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)=\frac{s}{1+s^2}-sen(0)=\frac{s}{1+s^2}$$

Ejemplo
Si $L[f(t)] = F(s)$, hallar la transformada de Laplace de la función $f''(t)$.

Solución

$$L[f''(t)] = L\left[\left(f'(t)\right)'\right] = sL[f'(t)] - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) =$$
$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Ejercicio
Si $L[f(t)] = F(s)$, hallar la transformada de Laplace de la función $f'''(t)$.

Observación
Si $L[f(t)] = F(s)$, la transformada de Laplace de la derivada n-ésima de la función $f(t)$ es:

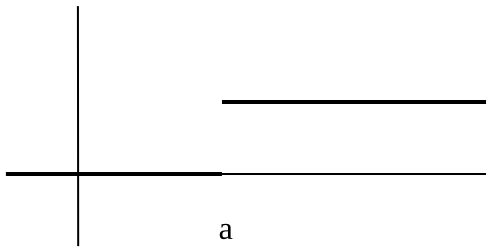
$$L[f^n(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots\cdots\cdots - f^{n-1}(0)$$

6) Transformada de Laplace de la función de Heaviside (función escalón)

Se llama **función de Heaviside ó función escalón** a la función

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ 1 & si\ t \geq a \end{cases}$$

Su gráfica es



La transformada de Laplace de la función escalón es

$$L[H(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}H(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0$$

Ejercicio

Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 1 \\ 1 & si\, 1 \leq t < 2 \\ 4 & si\, t \geq 2 \end{cases}$ de dos formas diferentes.

Transformada inversa de Laplace
Se llama **transformada inversa de Laplace** de una función $F(s)$ a una función $f(t)$ tal que $L[f(t)] = F(s)$. Se notará como

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Propiedad de linealidad de la transformada inversa de Laplace

$$L^{-1}[c_1F_1(s) + c_2F_2(s)] = c_1L^{-1}[F_1(s)] + c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

Transformada inversa de Laplace de las funciones mas significativas

- $L^{-1}\left[\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right]=t^n$
- $L^{-1}\left[\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right]=t^n e^{at}$
- $L^{-1}\left[\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}\right]=e^{bt}sen(at)$

  En particular

  $$L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=sen(at)$$
- $L^{-1}\left[\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\right]=e^{bt}\cos(at)$

  En particular

  $$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos(at)$$
- Si $L^{-1}[F(s)]=f(t)$, entonces

  $$L^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right]=H(t-a)f(t-a)=\begin{cases}0 & si\ t<a\\ f(t-a) & si\ t\geq a\end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s)=\dfrac{1}{(s-3)^4}$ b) $F(s)=\dfrac{5}{s^2+16}$

c) $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+25}$ d) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^4}$

Solución

a) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)^4}$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^4}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{6}\frac{3!}{(s-2)^4}\right]=\frac{t^3e^{2t}}{6}$$

b) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{5}{s^2+16}$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+16}\right]=L^{-1}\left[\frac{5}{4}\frac{4}{s^2+16}\right]=\frac{5}{4}sen(4t)$$

c) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+25}$

$$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2+25}\right]=L^{-1}\left[3\frac{s}{s^2+25}+\frac{2}{5}\frac{5}{s^2+25}\right]=3\cos(5t)+\frac{2}{5}sen(5t)$$

d) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^4}$

Para ello hallamos primeramente la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{1}{s^4}$. Se tiene que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{6}\frac{3!}{s^4}\right]=\frac{t^3}{6}=f(t)$$

Entonces la trasformada de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^4}$ es

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^4}\right]=H(t-2)f(t-2)=\begin{cases}0 & si\ t<2\\ \dfrac{(t-2)^3}{6} & si\ t\geq 2\end{cases}$$

Ejercicio

Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s)=\dfrac{8}{s^6}$ b) $F(s)=\dfrac{3}{(s-7)^2+16}$

c) $F(s)=\dfrac{5s-9}{s^2+49}$ d) $F(s)=\dfrac{e^{-5s}}{s^2+4}$

Observación

Para calcular la transformada inversa de Laplace de una función racional $F(s)=\dfrac{p(s)}{q(s)}$, descomponemos dicha función racional en fracciones simples.

$$\frac{p(s)}{q(s)}=R_1(s)+R_2(s)+\cdots\cdots\cdots+R_n(s)$$

Utilizando la linealidad de la transformada inversa de Laplace, se tiene

$$L^{-1}\left[\frac{p(s)}{q(s)}\right]=L^{-1}[R_1(s)]+L^{-1}[R_2(s)]+\cdots\cdots\cdots+L^{-1}[R_n(s)]$$

Ejemplo

Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s-3}$ b) $F(s)=\dfrac{1}{s^3+4s}$ c) $F(s)=\dfrac{5s+1}{s^2-6s+13}$

Solución

a) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s-3}$

Para ello descomponemos primeramente esta función racional en fracciones simples

$$\frac{s}{s^2-2s-3}=\frac{3}{4(s-3)}+\frac{1}{4(s+1)}$$

Entonces la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s-3}$ es

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-2s-3}\right]=L^{-1}\left[\frac{3}{4(s-3)}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{4(s+1)}\right]=\frac{3}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{-t}$$

b) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{1}{s^3+4s}$

Para ello descomponemos primeramente esta función racional en fracciones simples

$$\frac{1}{s^3+4s}=\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4s}-\frac{s}{4(s^2+4)}$$

Entonces la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{1}{s^3+4s}$ es

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3+4s}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{4s}\right]-L^{-1}\left[\frac{s}{4(s^2+4)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t)$$

c) Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{5s+1}{s^2-6s+13}$

Al tratarse de una fracción simple con raíces complejas en el denominador, expresamos el denominador como suma de cuadrados

$$s^2-6s+13=s^2-2s\cdot 3+9+4=(s-3)^2+4$$

Entonces la transformada inversa de Laplace de la función $F(s)=\dfrac{5s+1}{s^2-6s+13}$ es

$$L^{-1}\left[\frac{5s+1}{s^2-6s+13}\right]=L^{-1}\left[\frac{5(s-3+3)+1}{(s-3)^2+4}\right]=L^{-1}\left[5\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right]+L^{-1}\left[8\frac{2}{(s-3)^2+4}\right]=$$
$$=5e^{3t}\cos(2t)+8e^{3t}sen(2t)$$

Ejercicio

Hallar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(s)=\dfrac{1}{s^3-5s^2+4s}$ b) $F(s)=\dfrac{1}{s^3-2s^2}$

c) $F(s)=\dfrac{2s^2+5s+7}{s^3+2s^2+s+2}$ d) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+5}$

e) $F(s)=\dfrac{3s-2}{s^2+2s+50}$

Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales.

La trasformada de Laplace resulta de gran utilidad a la hora de resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, ya que al aplicarla, transforma estas ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Resolviendo estas últimas hallaremos la transformada de Laplace de la solución y con la transformada inversa obtendremos dicha solución.

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'-2y=e^{5t}$ con la condición inicial $y(0)=3$

Solución

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial se tiene

$$L[y'-2y]=L\left[e^{5t}\right] \;\Rightarrow\; L[y']-2L[y]=L\left[e^{5t}\right] \;\Rightarrow\; sL[y]-y(0)-2L[y]=\frac{1}{s-5}$$
$$\Rightarrow\; (s-2)L[y]-3=\frac{1}{s-5} \;\Rightarrow\; (s-2)L[y]=\frac{1}{s-5}+3=\frac{3s-14}{s-5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L[y] = \frac{3s-14}{(s-5)(s-2)}$$

Entonces la solución del problema es

$$y = L^{-1}\left[\frac{3s-14}{(s-5)(s-2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{3(s-5)} + \frac{8}{3(s-2)}\right] = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{8}{3}e^{2t}$$

Observación

La transformada de Laplace permite resolver de forma relativamente sencilla ecuaciones diferenciales lineales en las que el término independiente es una función definida a trozos, cosa que es difícil de hacer por otros procedimientos.

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + y = f(t)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, siendo $f(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 2 \\ 1 & si\, t \geq 2 \end{cases}$

Solución

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial se tiene

$$L[y'' + y] = L[f(t)] \;\Rightarrow\; L[y''] + L[y] = L[f(t)] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + L[y] = L[f(t)] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; s^2 L[y] - 1 + L[y] = \frac{e^{-2s}}{s} \;\Rightarrow\; (s^2+1)L[y] = \frac{e^{-2s}}{s} + 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; L[y] = \frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}$$

Entonces la solución del problema es

$$y = L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)} + \frac{1}{s^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s(s^2+1)}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

Calculamos la transformada inversa de Laplace de la función $h(s) = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$.

Descomponiendo esta función racional en fracciones simples, se tiene

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = 1 - \cos(t)$$

La solución del problema es

$$y = sen(t) + \begin{cases} 0 & si\, t < 2 \\ 1-\cos(t-2) & si\, t \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} sen(t) & si\, t < 2 \\ 1-\cos(t-2) + sen(t) & si\, t \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio

Hallar la función $y(t)$ que verifica

a) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 4 \\ y(0) = 0\,,\; y'(0) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' + y = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, siendo $f(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 3 \\ 1 & si\, t \geq 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = 0\,,\; y'(0) = 0 \end{cases}$, siendo $f(t) = \begin{cases} 0 & si\, t < 1 \\ 1 & si\, t \geq 1 \end{cases}$