

Esame di Laboratorio di Calcolo Numerico per Informatica

2022/2023

31/08/2023

È richiesto l'upload in Moodle di tre file Matlab: la function **cheb1_pts.m**, la function **cheb2_pts.m**, uno script il cui nome deve essere **CognomeNome_matricola.m**.
Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ed un insieme di n punti $X_n = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, è possibile approssimare tale funzione con un polinomio p interpolante la funzione in quei punti, detti nodi, ovvero soddisfacente la relazione

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Inoltre, nel caso si cerchi un polinomio di grado $n-1$, dati n nodi, allora il polinomio soddisfacente tale relazione esiste ed è unico.

Un possibile insieme di punti utilizzabili come nodi (ma meno preferibili) sono i punti equispaziati (in un intervallo generico $[a, b]$)

$$x_i^e = a + \frac{(b-a)}{n-1} \cdot i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

ma spesso, a causa del loro mal condizionamento, è preferibile utilizzare punti come quelli di Chebyshev (qui definiti in $[-1, 1]$)

$$x_i^c = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n-1$$

o quelli di Chebyshev-Lobatto (definiti anch'essi qui in $[-1, 1]$)

$$x_i^{cl} = \cos\left(\frac{i}{n-1}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Si sottolinea che entrambi gli ultimi due insiemi di punti sono definiti nell'intervallo $[-1, 1]$, quindi per muoverli in un generico intervallo $[a, b]$ è sufficiente effettuare la trasformazione

$$y = (x+1) \cdot \frac{b-a}{2} + a.$$

A partire dalla funzione **equi_pts.m**, si costruiscano le funzioni **cheb1_pts.m** e **cheb2_pts.m**, che rispettivamente costruiscono n punti di Chebyshev e di Chebyshev-Lobatto in un generico intervallo $[a, b]$. I parametri, **a**, **b** e **n** saranno dati in input e in output dovrà esserci il solo vettore **x** contenente gli n punti.

In seguito, si scriva uno script denominato **CognomeNome_matricola.m** dove utilizzare le funzioni appena create.

In particolare, si chiedere di definire nell'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ un vettore di 200 punti equispaziati denominato **x_eval** (che sarà utilizzato in seguito), e la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

che vorremo approssimare attraverso dei polinomi interpolanti.

Si generino 10 punti nei tre generi definiti sopra (attraverso le function create e quella data) e si faccia un plot limitando lo spazio al rettangolo $[-1, 1] \times [-2, 2]$, dove disegnare i punti appena generati in righe diverse (un insieme di punti sull'asse $y = 1$, uno sull'asse $y = 0$ e l'ultimo su $y = -1$), ovvero andando a disegnare i punti

$$(x_i^e, 1), \quad (x_i^c, 0), \quad (x_i^{cl}, -1).$$

Si chiede, in aggiunta, che i vari insiemi di punti siano disegnati attraverso dei cerchi e utilizzando un colore differente per ciascun insieme di punti differente. Si aggiunga, inoltre, una legenda e una griglia al grafico.

In seguito, considerando un numero di punti che va da $n=1$ a $n=N_{\max}$ (con $N_{\max}=25$), si generi, per ciascun n , attraverso il comando `polyfit` i (coefficienti dei) tre polinomi interpolanti (di grado $n - 1$) sui n nodi equispaziati, di Chebyshev e di Chebyshev-Lobatto. Attraverso il comando `polyval` si valutino, poi, i tre polinomi sui punti contenuti nel vettore `x_eval`.

Per ciascun n si calcoli inoltre l'errore assoluto massimo tra le valutazioni di ciascun polinomio di grado $n - 1$ sul vettore `x_eval` e il valore esatto di f sui punti contenuti in tale vettore e si immagazzinino tali valori su tre vettori `err1`, `err2` e `err3`, uno per ciascun polinomio interpolante sui tre insiemi di punti (rispettivamente equispaziati, Chebyshev e Chebyshev-Lobatto). Ciascun elemento di tali vettori saranno quindi l'errore assoluto del polinomio di grado $n - 1$ con la funzione.

Infine, si faccia il grafico, in scala semilogaritmica, dei vari errori di polinomi relativi ad insiemi di punti diversi tutti e tre inclusi nello stesso grafico e dati in funzione di n . Si richiede di disegnarli in tre colori diversi e utilizzando come stile grafico il cerchietto collegato da una linea. Si aggiunga la legenda al grafico.

Attenzione: Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.