Università degli Studi di Padova

Relazione per:

Progetto 2 Matlab

Realizzata da:
Gabriele Di Pietro, matricola 2010000
Michele Dioli, matricola 2077629
Riccardo Berengan, matricola 2080041

1 Introduzione

Autovalori sono la soluzione a $det(A - \lambda I) = 0$. L'autospazio è il sottospazio vettoriale costruito da tutti i autovalori λ, insieme al vettore nullo.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \iff (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda_1 = 5\lambda_2 = 2$ Molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio associato ad un autovalore quindi $|n - \mathrm{rk}(A - \lambda I)|$ Molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio associato ad un autovalore quindi $|n - rk(A - \lambda I)|$

2 Calcolo

2.1 Funzione Multigeo

Per il calcolo contiamo gli elementi "*nulli*" (minori di una tolleranza) sulla matrice U ottenuta dalla fattorizzazione LU. Lo si può fare perchè: Una riga nulla in U significa che il sistema lineare di $(A-\lambda I)x = 0$ ha soluzione libera, una riga nulla non dipende dalle altre righe della matrice, le righe nulle indicano che ci sono dipendenze lineari tra le righe. Contiamo quindi gli elementi in diagonale che sono maggiori di una tolleranza, contanto così il rango della matrice, lo sottraggo alla dimensione della matrice e otteniamo la dimensione dell'autospazio del autovalore che coincide con la molteplicità geometrica.

2.2 Funzione Multialg

Consideriamo il polinomio con m molteplicità algebrica $f(x) = (x-\lambda)^m g(x)$ e il metodo di Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ per trovare le radici di $g(x)$. Analizziamo la velocità di convergenza di $f(x) = (x-\lambda)^{m-1} g(x) + (x-\lambda)^m g'(x)$
$f'(x) = 0 \iff x = \lambda$, $m \geq 1$ non è subito alla radice $m(x-\lambda)^{m-1}$ è responsabile per la velocità di convergenza, quindi il metodo di Newton applicato ad una radice di molteplicità $m \geq 1$ ha una velocità linerare non più quadratica. Abbiamo che la stima dell'errore è ridotta dipendentemente dalla molteplicità della radice $|x_{n+1} - \lambda| \approx |x_n - \lambda|^{\frac{m-1}{m}}$
$\frac{m-1}{m}$ è la velocità di convergenza
(Newton vicino a radici multiple $\Rightarrow |e_{n+1}| \approx C|e_n|^{\frac{m-1}{m}}$ *)*
Calcoliamo l'autovalore con il metodo di Newton, iteriamo fino a un numero di iterazioni e o per aver raggiunto una tolleranza sensata. Applichiamo a Newton al polinomio caratteristico $f(\lambda) = det(A - \lambda)I \Rightarrow \lambda_{n+1} = \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$ Troviamo così il valore dell'autovalore. Per calcolare la molteplicità algebrica basta dividere l'autovalore per il polinomio caratteristico, e vedere quante volte lo posso fare prima di ottenere un valore di zero.

3 Test