Universidade de Évora
ANÁLISE MATEMÁTICA I

1^{a}Frequência **2012/13** **3/11/12**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Mostre por definição que:

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2^n} = 0.$$

2. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{32n^4+1}-\sqrt[3]{n^2+\frac{1}{2}}}{\sqrt[5]{n^4+1}-\sqrt{n-1}}$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}-1}-\sqrt{n+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!n!}{(2n)!}}$; *d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-2}{2n^2+4}\right)^{n^2-4}$.

II

3. Estude a natureza das séries seguintes e, qunado possível, determine a sua soma:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{1+n^2}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n\,(n+1)}$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n^2}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{1-n}(n+2)!}{(n+3)^{n+3}}$.

4. Estude, quanto à convergência absoluta e simples, a série alternada:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2+n}.$$

III

5. Considere a sucessão real (a_n) definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}. \end{cases}$$

a) Mostre, por indução matemática, que $a_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
b) Prove que (a_n) é estritamente decrescente.
c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

6. Considere a função real de variável real:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)\log(1-x)}.$$

a) Indique o domínio da função.
b) Calcule, caso exista, o $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Nome:
Curso:
N^o: