# Chapter 1

# Primitivação

**Definição 1.1** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I$ é um subintervalo de $\mathbb{R}$. Uma* <u>*primitiva*</u> *de $f$ é uma função $F : I \to \mathbb{R}$, derivável e cuja derivada é $f$. Ou seja,*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Uma primitiva de $f$ usualmente denota-se por $P(f)$, $F$ ou $\int f\, dx$

Perguntar qual é a primitiva de $2x$ é equivalente a perguntar qual é a função cuja derivada é $2x$. Pelas regras de derivação obtemos que $x^2$ é uma primitiva de $2x$. No entanto como a derivada de uma constante é zero então $\left(x^2 + c\right)' = 2x$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Ou seja, existem infinitas primitivas associadas á mesma função.

A proposição seguinte prova formalmente este facto e acrescenta que dado uma primitiva, $F$, de uma função $f$ então qualquer primitiva de $f$ é igual a $F$ a menos de uma constante.

**Proposição 1.2** *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $I$ designa um intervalo em $\mathbb{R}$.*

*a) Se $F$ é uma primitiva de $f$, então $F + c$ também é uma primitiva de $f$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.*

*b) Se $F_1$ e $F_2$ são primitivas de $f$ então $F_1 - F_2$ é constante no intervalo $I$.*

**Demonstração:**

**a)** Pelas regras da derivação e usando a definição de primitiva de $f$ temos

$$(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Logo $F + c$ é uma primitiva de $f$ visto a sua derivada ser igual a $f$.

**b)** Visto $F_1$ e $F_2$ serem ambas primitivas de $f$ temos

$$[F_1(x) - F_2(x)]' = f(x) - f(x) = 0.$$

Usando um corolário do Teorema de Lagrange concluimos que $F_1 - F_2$ é constante.

■

**Proposição 1.3** *Sejam $f,\, g : I \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então*

*a)* $P(f(x) + g(x)) = P(f(x)) + P(g(x))$

*b)* $P(\alpha f(x)) = \alpha P(f(x))$

*c)* $P(f'(x)) = f(x) + C$.

A demonstração destas propriedades resultam directamente das propriedades equivalentes para a derivação.

Uma questão que surge naturalmente é se toda a função é primitivável. A resposta é negativa.

**Exemplo 1.4** *Consideremos a função de Heaviside*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

*Então*

$$Pf(x) = \begin{cases} x + c & \text{se } x > 0, \\ d & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

*onde $c,\, d \in \mathbb{R}$. No entanto a primitiva de $f$ no ponto $0$ não existe. De facto, qualquer que seja o valor que se atribua a $Pf(0)$ a função $f$ não é derivável na origem.*

## 1.1 Primitivação imediata e quase imediata

As fórmulas da derivação fornecem processos de encontrar as primitivas de certas funções. A tabela seguinte resume essas fórmulas.

| **Derivada** | **Primitiva** |
|---|---|
| $\left(u^{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\, u^{\alpha} u'$ | $P\left(u^{\alpha} u'\right) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha \neq -1$ |
| $(e^u)' = e^u u'$ | $P\left(e^u u'\right) = e^u$ |
| $(\log\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$ | $P\left(\frac{u'}{u}\right) = \log\lvert u\rvert$ |
| $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$ | $P\left(u' \cos u\right) = \operatorname{sen} u$ |
| $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$ | $P\left(u' \operatorname{sen} u\right) = -\cos u$ |
| $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ | $P\left(\frac{u'}{\cos^2 u}\right) = \operatorname{tg} u$ |
| $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $P\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arcsen} u$ |
| $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ | $P\left(\frac{u'}{1+u^2}\right) = \operatorname{arctg} u$ |
| $(a^u)' = u' a^u \log a$ | $P\left(u' a^u\right) = \frac{a^u}{\log a}$ |
| $(\sinh u)' = u' \cosh u$ | $P\left(u' \cosh u\right) = \sinh u$ |
| $(\cosh u)' = u' \sinh u$ | $P\left(u' \sinh u\right) = \cosh u$ |

**Exemplo 1.5** $P(2x) = x^2 + c$ *porque* $\left(x^2+c\right)' = 2x$.

**Exemplo 1.6** $P\left(\frac{1}{x}\right) = \log\lvert x\rvert + c$ *porque* $(\log\lvert x\rvert + c)' = \frac{1}{x}$.

**Exemplo 1.7** $P(\cos x) = \operatorname{sen} x + c$ *porque* $(\operatorname{sen} x + c)' = \cos x$.

**Exercicio 1.8** *Com auxílio da tabela anterior calcule as seguintes primitivas:*

*a)* $f'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$;

*b)* $f'(x) = e^x + \frac{20}{1+x^2}$ *e* $f(0) = -2$

*c)* $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ *e* $f(0) = 4, \quad f(1) = 1$

**Resolução:**

**a)** Se $f'(x) = 4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}$ então $f$ será uma primitiva de $4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}$. Temos

$$\begin{aligned}
P\left(4\operatorname{sen} x + \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}\right) &= 4P(\operatorname{sen} x) + P\left(2x^4 - x^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 4P(\operatorname{sen} x) + 2P\left(x^4\right) - P\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -4\cos x + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= -4\cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

**b)** Temos

$$\begin{aligned}
P\left(e^x + \frac{20}{1+x^2}\right) &= P\left(e^x\right) + 20P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\
&= e^x + 20\operatorname{arctg} x + c.
\end{aligned}$$

Neste caso temos uma condição inicial $f(0) = 4$. Logo precisamos de determinar $c$ de modo a que a condição inicial se verifique. Isto é, precisamos de resolver a equação

$$e^0 + 20\operatorname{arctg} 0 + c = 4$$

obtendo-se $c = 3$. Logo a função pedida é

$$f(x) = e^x + 20\operatorname{arctg} x + 3.$$

**c)** Note que $P(f'') = f'$ e $P(f') = f$. Logo para obter $f$ precisamos de primitivar duas vezes. Deste modo calculamos

$$\begin{aligned}
P\left(12x^2 + 6x - 4\right) &= 12P\left(x^2\right) + 6P(x) - 4P(1) \\
&= 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + c \\
&= 4x^3 + 3x^2 - 4x + c.
\end{aligned}$$

A condição $f'(1) = 1$ verifica-se se e só se

$$4 + 3 - 4 + c = 1$$

ou seja se e só se $c = -2$. Logo $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$.

Agora primitivando $f'$ iremos obter $f$.

$$\begin{aligned}
P\left(4x^3 + 3x^2 - 4x - 2\right) &= 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 2x + c \\
&= x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + c.
\end{aligned}$$

Como $f(1) = 1$ então

$$1 + 1 - 2 - 2 + c = 1$$

obtendo-se $c = 3$. Logo a função pretendida é

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 3.$$

## 1.2 Primitivação por partes

O método de primitivação por partes usa-se quando a função dada a primitivar se pode decompôr num produto de dois factores.

**Theorem 1.9 (Primitivação por partes)** *Se $u$ e $v$ são funções diferenciáveis em $I$ então o produto $uv'$ é primitivável em $I$ se e só se $u'v$ o for. Nesse caso tem-se*

$$P\left(uv'\right) = uv - P\left(u'v\right).$$

**Demonstração:**

Se $u$ e $v$ são diferenciáveis então o produto $uv$ também é diferenciável e pela regra de derivação do produto de duas funções sabemos

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Assim

$$P\left((uv)'\right) = P\left(u'v + uv'\right)$$

a menos de uma constante. Logo

$$uv = P\left(u'v\right) + P\left(uv'\right)$$

obtendo-se

$$P\left(uv'\right) = uv - P\left(u'v\right). \tag{1.1}$$

■

Note que ao primitivarmos por partes reduzimos a primitivação da função $uv'$ á primitivação de $u'v$. Logo devemos fazer uma escolha adequada de modo que $P(u'v)$ seja mais simples de calcular.

Algumas sugestões para a escolha de $u$ e $v'$ encontram-se no quadro seguinte.

| Função: | $v'$ | $u$ |
|---|---|---|
| $f(x)\,e^x$ | $e^x$ | $f(x)$ |
| [1] $f(x)\operatorname{sen} x$ | $\operatorname{sen} x$ | $f(x)$ |
| [2] $f(x)\operatorname{arctg} x$ | $f(x)$ | $\operatorname{arctg} x$ |
| $f(x)\log x$ | $f(x)$ | $\log x$. |

Note que isto são apenas alguns critérios que nos poderão ser úteis numa fase inicial. No entanto, não constituem regra geral!!!

**Exemplo 1.10** *Calcule*

$$P\left(xe^x\right).$$

Façamos a escolha $u = x$ e $v' = e^x$. Então

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow u' = 1 \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = P\left(e^x\right) = e^x. \end{aligned}$$

Usando a fórmula (1.1) obtemos

$$P\left(xe^x\right) = xe^x - P\left(e^x\right).$$

Logo

$$P\left(xe^x\right) = (x-1)\,e^x + c$$

**Exemplo 1.11** *Calcule*

$$P\left(\log x\right)$$

Neste caso escolhemos $u = \log x$ e $v' = 1$. Então

$$\begin{aligned} u &= \log x \Longrightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' &= 1 \Longrightarrow v = P(1) = x \end{aligned}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} P\left(\log x\right) &= x\log x - P(1) \\ &= x\log x - x + c. \end{aligned}$$

[1] Procede-se do mesmo modo para qualquer outra função trigonométrica
[2] Procede-se do mesmo modo para qualquer outra função trigonométrica inversa.

**Exemplo 1.12** *Calcule*

$$P\left(\cos^2 x\right)$$

Escolhemos $u = v' = \cos x$. Então

$$\begin{aligned} u &= \cos x \Longrightarrow u' = -\operatorname{sen} x \\ v' &= \cos x \Longrightarrow v = P(\cos x) = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} P\left(\cos^2 x\right) &= \operatorname{sen} x \cos x - P\left(-\operatorname{sen}^2 x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + P\left(\operatorname{sen}^2 x\right). \end{aligned}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria temos

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

Assim

$$\begin{aligned} P\left(\cos^2 x\right) &= \operatorname{sen} x \cos x + P(1) - P\left(\cos^2 x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + x - P\left(\cos^2 x\right). \end{aligned}$$

Logo

$$2P\left(\cos^2 x\right) = \operatorname{sen} x \cos x + x$$

obtendo-se

$$P\left(\cos^2 x\right) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + c.$$

## 1.3 Primitivação por substituição

O teorema seguinte dá-nos uma nova técnica de primitivação que resulta da derivação da função composta.

**Theorem 1.13 (Primitivação por Substituição)** *Sejam $I$ e $J$ dois intervalos. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ primitivável e $\varphi : J \to I$ uma bijecção diferenciável. Então $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e*

$$P(f(x)) = P\left(f \circ \varphi(t)\,\varphi'(t)\right)|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \tag{1.2}$$

**Demonstração:**

Seja $F$ uma primitiva de $f$ e $x = \varphi(t)$. Então $F(x) = F \circ \varphi(t)$. Pela regra da derivação da função composta obtemos

$$F'(x) = (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Logo
$$P\left(F'(x)\right) = P\left(F'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right)$$
a menos de uma constante.

Assim
$$P(f(x)) = P\left(f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right)|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

■

No quadro seguinte encontram-se algumas substituições aconselháveis.

| **Função do tipo** | **Substituição aconselhada** |
|---|---|
| | |
| $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ | $x = \varphi(t) = a \operatorname{sen} t$ |
| | |
| $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ | $x = a \operatorname{tg} t \quad$ ou $\quad x = a \sinh t$ |
| | |
| $R\left(x, \sqrt{a - x^2}\right)$ | $x = a \sec t \quad$ ou $\quad x = a \cosh t$ |
| | |
| $R(x, e^x)$ | $x = \log t$ |
| | |
| $R(x, \log x) \cdot \frac{1}{x}$ | $x = e^t$ |
| | |
| $R(x, \operatorname{sen} x, \cos x)$ | $x = 2 \operatorname{arctg} t$ |
| | |
| $R(x, \operatorname{sen} x) \cdot \cos x$ | $x = \operatorname{arcsen} t$ |
| | |
| $R(x, \cos x) \cdot \operatorname{sen} x$ | $x = \arccos t$ |
| | |
| $R(x, \operatorname{tg} x)$ | $x = \operatorname{arctg} t$ |
| | |
| $R(x, \operatorname{cotg} x)$ | $x = \operatorname{arccotg} t$ |

**Exemplo 1.14** *Calcule*
$$P\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Fazendo a substituição $t = \sqrt{x+1}$ então $x = t^2 - 1 =: \varphi(t)$ logo $\varphi'(t) = 2t$. Usando a fórmula (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) &= P\left(\frac{t^2-1}{t}2t\right) = 2P\left(t^2-1\right) \\ &= 2\frac{t^3}{3} - 2t + c\Big|_{t=\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Substituindo $t$ por $\sqrt{x+1}$ obtemos

$$P\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + c.$$

**Exemplo 1.15** *Calcule*

$$P\left(\sqrt{4-x^2}\right).$$

Fazendo a substituição $x = \varphi(t) = 2\operatorname{sen} t$ então $\varphi'(t) = 2\cos t$ vindo

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{4-x^2}\right) &= P\left(\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t} \times 2\cos t\right) = P\left(\sqrt{4\left(1-\operatorname{sen}^2 t\right)} \times 2\cos t\right) \\ &= P\left(\sqrt{4\cos^2 t} \times 2\cos t\right) = 4P\left(\cos^2 t\right). \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1.12 obtemos

$$P\left(\sqrt{4-x^2}\right) = 2\left(\operatorname{sen} t\cos t + t\right) + c.$$

Se $x = 2\operatorname{sen} t$ então $t = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$. Substituindo na fórmula precedente obtemos

$$P\left(\sqrt{4-x^2}\right) = 2\left[\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right)\cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right) + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right] + c. \tag{1.3}$$

Note que sendo a função $\operatorname{arcsen} x$ a função inversa de $\operatorname{sen} x$ então a composição de uma função com a sua inversa é a identidade logo

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}. \tag{1.4}$$

Por outro lado, usando a fórmula fundamental da trigonometria

$$\begin{aligned} \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right) &= \sqrt{1-\left[\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\right)\right]^2} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Substituindo (1.4) e (1.5) em (1.3) obtemos

$$P\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + c.$$

**Exemplo 1.16** *Calcule*

$$P\left(e^{\sqrt{2-x}}\right).$$

Fazendo $t=\sqrt{2-x}$ então $x=\varphi(t)=2-t^2$ e $x'=\varphi'(t)=-2t$ obtendo-se

$$P\left(e^{\sqrt{2-x}}\right)=P\left(-2te^t\right)=-2P\left(te^t\right).$$

Pelo Exemplo 1.10

$$P\left(te^t\right)=(t-1)\,e^t+c.$$

Fazendo a substituição $t=\sqrt{2-x}$ obtemos

$$P\left(e^{\sqrt{2-x}}\right)=-\left(\sqrt{2-x}-1\right)e^{\sqrt{2-x}}+c.$$

## 1.4 Primitivação por decomposição

Esta técnica permite primitivar funções racionais.

**Definição 1.17** *Chamamos* <u>função racional</u> *a qualquer função do tipo*

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

*onde $N(x)$ e $D(x)$ são polinómios e $D(x)$ não se anula identicamente.*

**Definição 1.18** *Uma função racional diz-se:*

*a)* <u>própria</u> *se o grau do polinómio do numerador é menor que o grau do polinómio do denominador, isto é,*

$$\textit{grau } N(x) < \textit{grau } D(x);$$

*b)* <u>imprópria</u> *se o grau do polinómio no numerador é maior ou igual ao grau do polinómio no denominador, isto é,*

$$\textit{grau } N(x) \geqslant \textit{grau } D(x).$$

**Definição 1.19** *Dizemos que uma fracção é simples se for do tipo*

$$\frac{A}{(x-\alpha)^r} \qquad \textit{ou} \qquad \frac{Bx+C}{\left((x-a)^2+b^2\right)^s}$$

*onde $\alpha,\ a,\ b,\ A,\ B,\ C\in\mathbb{R}$ e $r,s\in\mathbb{N}$.*

A primitivação por decomposição resume-se a quatro passos:

**Passo 1-** Decompôr a fracção imprópria na soma de um polinómio com uma fracção própria;

**Passo 2-** Determinar as raízes (reais e complexas) do polinómio no denominador e factorizar;

**Passo 3-** Decompôr a função própria na soma de fracções simples;

**Passo 4-** Primitivar as fracções simples.

**Passo 1- Decomposição da fracção imprópria:**

Se $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fracção imprópria, decompomo-la na soma de um polinómio com uma fracção própria fazendo a divisão de polinómios obtendo-se:

$$N(x) = Q(x)\,D(x) + R(x)\,,$$

onde $Q(x)$ representa o polinómio quociente e $R(x)$ denota o resto da divisão de polinómios.

Assim

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

onde $\frac{R(x)}{D(x)}$ é a função própria obtida.

**Passo 2-** Para determinar as raizes do denominador utilizamos a regra de Ruffini.

**Passo 3-** cada raíz real $\alpha$ de $D(x)$ com multiplicidade $k$ dá origem a uma soma de $k$ funções simples da forma

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Cada par de raízes complexas $a \pm ib$ com $b > 0$ de $Q(x)$ com multiplicidade $k$, dá origem a uma soma de $k$ funções simples da forma

$$\frac{B_1x + C_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{B_2x + C_2}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_kx + C_k}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^k}.$$

A determinação das constantes $A_i,\ B_i,\ C_i$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$ faz-se pelo método dos coeficientes indeterminados.

**Passo 4-**

**4.1-** Para as fracções associadas às raízes reais temos

$$P\left(\frac{A}{(x-\alpha)^l}\right) = \begin{cases} A\log|x-\alpha| & \text{se } l = 1, \\ A\frac{(x-\alpha)^{-l+1}}{-l+1} = \frac{A}{1-l}\frac{1}{(x-\alpha)^{l-1}} & \text{se } l \in \{1, \ldots, k\}\,. \end{cases}$$

**4.2-** Para primitivar uma função do tipo

$$\frac{Bx + C}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^s}$$

com $b > 0$ pode fazer-se a substituição $x = a + b \operatorname{tg} t$ ou utilizar outras técnicas. Ver exemplo abaixo.(1.22)

**Exemplo 1.20** *Determine*
$$P\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right).$$

O grau do polinómio do numerador é 2 e o do denominador é 1 logo esta é uma fracção imprópria. Vamos reduzi-la a uma fracção própria utilizando o algoritmo da divisão de polinómios

$$\begin{array}{rl} x^2+0x+1 & |\underline{x-1} \\ \underline{-x^2+x} & \quad x+1 \\ 0+x+1 & \\ \underline{-x+1} & \\ 0+2 & \end{array}$$

Então
$$\frac{x^2+1}{x-1} = \underbrace{x+1}_{\text{polinómio}} + \underbrace{\frac{2}{x-1}}_{\text{fracção própria}}.$$

Assim
$$\begin{aligned} P\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) &= P(x+1) + 2P\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 2\log|x-1| + c. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.21** *Determine uma primitiva de*
$$\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2}.$$

Como o grau do polinómio no numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador então esta fracção é própria. O próximo passo é determinar as raízes do denominador e factorizá-lo.

Ora
$$2x^3+2x^2 = 2x^2(x+1)$$

portanto o denominador tem a raiz 0 com multiplicidade 2 e a raiz $-1$ com multiplicidade 1.

Logo
$$\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}\right). \tag{1.6}$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, começamos por reduzir ao mesmo denominador, o lado esquerdo da igualdade acima obtendo-se

$$\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2} = \frac{Ax\,(x+1) + B\,(x+1) + Cx^2}{2x^2\,(x+1)}.$$

Associando os termos do mesmo grau no numerador obtemos

$$\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2} = \frac{(A+C)\,x^2 + (A+B)\,x + B}{2x^2\,(x+1)}.$$

Para obtermos a igualdade, os coeficientes dos termos do mesmo grau no numerador têm de ser iguais, isto é

$$\begin{cases} A+C=2 \\ A+B=0 \\ B=1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se

$$A=-1,\ \ B=1 \text{ e } C=3.$$

Logo retomando (1.6) obtemos

$$\begin{aligned} P\left(\frac{2x^2+1}{2x^3+2x^2}\right) &= \frac{1}{2}P\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}\log|x+1| + c. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.22** *Determine uma primitiva de*

$$\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x}.$$

A fracção dada é própria visto o grau do polinómio do numerador ser inferior ao grau do polinómio no denominador.

Para calcular as raízes do denominador observe que

$$x^3+2x^2+5x = x\left(x^2+2x+5\right).$$

Para determinar as raízes de $x^2+2x+5$ usamos a fórmula resolvente geral obtendo-se

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2\pm i4}{2} = -1\pm 2i.$$

Logo o denominador tem uma raiz real 0 com multiplicidade 1 e um par de raizes complexas $-1\pm 2i$. Assim a decomposição em fracções próprias será

$$\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+4}.$$

Para determinar as constantes $A$, $B$ e $C$ reduzimos ao mesmo denominador

$$\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{A\left(x^2+2x+5\right)+Bx^2+Cx}{x^3+2x^2+5x},$$

ou seja,

$$\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x} = \frac{(A+B)\,x^2+(2A+C)\,x+5A}{x^3+2x^2+5x}.$$

A igualdade verifica-se se

$$\begin{cases} A+B=4 \\ 2A+C=3 \\ 5A=5 \end{cases}$$

obtendo-se

$$A=1,\ B=3 \text{ e } C=1.$$

Logo

$$P\left(\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x}\right) = P\left(\frac{1}{x}\right)+P\left(\frac{3x+1}{(x+1)^2+4}\right). \tag{1.7}$$

Para calcular a segunda primitiva podemos fazer a substituição $x=-1+2\operatorname{tg} t$ (**exercício).** Como alternativa podemos pensar na primitiva do logaritmo e nesse caso precisamos de ter $2x+2$ no numerador. Assim

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3x+1}{(x+1)^2+4}\right) &= P\left(\frac{3}{2}\frac{2x+2}{(x+1)^2+4}-\frac{2}{(x+1)^2+4}\right) \\ &= \frac{3}{2}P\left(\frac{2x+2}{(x+1)^2+4}\right)-2P\left(\frac{1}{4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right)}\right) \\ &= \frac{3}{2}\log\left(x^2+2x+5\right)-P\left(\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right)+c \\ &= \frac{3}{2}\log\left(x^2+2x+5\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c. \end{aligned}$$

Retomando (1.7) obtemos

$$P\left(\frac{4x^2+3x+5}{x^3+2x^2+5x}\right) = \log|x|+\frac{3}{2}\log\left(x^2+2x+5\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c.$$

Uff!!