



Análise Matemática II (2013/2014)

2ª Frequência

30/05/2014

Duração: 3h

Nome:

Número:

Curso:

Resolva cada grupo numa folha de teste diferente.

Grupo I

1. Mostre que a equação

$$x^2 y^2 + x^2 + y^2 = 1$$

define implicitamente y como uma função contínua e diferenciável $f(x)$ numa vizinhança do ponto $(0, -1)$. Determine a derivada de f no ponto dado.

2. Mostre que a aplicação vectorial definida pelas equações

$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v - \ln u \end{cases}$$

é invertível numa vizinhança do ponto $(1, 1)$. Encontre as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nesse ponto, sendo $z = 2u + v$ e $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções definidas implicitamente pelo sistema de equações acima.

3. Determine, caso existam, os extremos locais da função

$$f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$$

Justifique cuidadosamente a natureza desses extremos.

4. Utilizando multiplicadores de Lagrange, determine os pontos de extremo condicionado da função

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z,$$

sujeitos à restrição

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Grupo II

5. Calcule o integral duplo

$$\iint_D \frac{x}{y^2} dx dy,$$

onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 + 2$.

6. Utilizando integrais triplos, calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Calcule o integral de linha

$$\oint_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy,$$

sendo C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) percorrida no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

8. Justifique a existência de uma função $z = z(x, y)$ tal que

$$dz = (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy.$$

Encontre todas as funções $z = z(x, y)$ que têm esta propriedade.

BOM TRABALHO!