Apontamentos de **Álgebra Linear**

2013/2014

Prof. Raquel Barreira

ESTBarreiro/IPS

Prefácio

Estes apontamentos foram produzidos com o intuito de servirem de apoio às aulas de Álgebra Linear para os cursos de Licenciatura em Biotecnologia, Engenharia Civil e Engenharia Química da ESTBarreiro/IPS e resultam de uma revisão e ampliação dos apontamentos que foram utilizados em 2011/2012 e 2012/2013.
São omitidas as demonstrações dos teoremas e proposições apresentados razão pela qual não é dispensada a consulta de bibliografia adequada.

Raquel Barreira, setembro de 2013

Conteúdo

1 Introdução

1.1 O que é a Álgebra Linear?

O termo "Álgebra" diz respeito à manipulação de expressões e equações que envolvem variáveis. Ao calcularmos, por exemplo,

$$2x + 4y = 6x \Leftrightarrow 2x - 6x = -4y \Leftrightarrow -4x = -4y \Leftrightarrow x = y$$

em que x e y são variáveis, estamos a realizar operações algébricas.
Em linguagem corrente, o termo "Linear" costuma denotar algo que é simples. O termo ainda pode sugerir algo que seja retilíneo, ou seja, não curvo.
Há um paralelismo entre a matemática e a linguagem corrente: por um lado, em Álgebra Linear aparecem-nos apenas expressões em que as variáveis são apenas somadas e/ou multiplicadas por valores constantes o que torna a sua manipulação bastante mais **simples** e, por outro, os objetos manipulados nalguns casos traduzem-se geometricamente por **retas** ou planos (dependendo do número de variáveis em causa).
Por exemplo, $y - 2x = 0$ é uma equação linear. Se a reescrevermos como $y = 2x$ e estivemos a trabalhar no plano, reconhecemos imediatamente a reta de declive 2, que passa pela origem do referencial.
$x + 2y + 3z = 0$ é também uma equação linear e se estivermos a trabalhar no espaço tridimensional, geometricamente define um plano.
Quando há mais do que uma equação, dizemos que temos um sistema de

equações. E um exemplo de um sistema de equações lineares é

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

que representa a intersecção entre dois planos.
De facto, a Álgebra Linear tem uma natureza geométrica subjacente e é frequente recorrermos a exemplos no plano ou no espaço para ganharmos intuição acerca de alguns conceitos. Essa intuição deverá servir para lidarmos com objetos em outras dimensões que já não conseguimos visualizar.
Mas o que demos foram apenas exemplos que nos dão uma primeira noção do que é uma equação linear.
A definição mais formal de equação linar é:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são incógnitas.

A Álgebra Linear não se limita ao estudo das equações lineares mas estes primeiros exemplos têm como propósito dar uma noção do que é considerado "linear" neste contexto.

Exercício
Das seguintes equações, quais são as que **não são** lineares? E porquê?
(i) $x^2 + cos(y) = 0$
(ii) $2x + z = 1$
(iii) $x + 2y + 3xz = -1$

1.2 Para que serve?

Para além da ligação à geometria que já foi referida, existem diversas aplicações das ferramentas da Álgebra Linear nos mais variados domínios científicos.
Algumas das aplicações, das muitas que existem, estão na lista que se segue (entre parêntesis o nome do capítulo em que são abordadas as técnicas

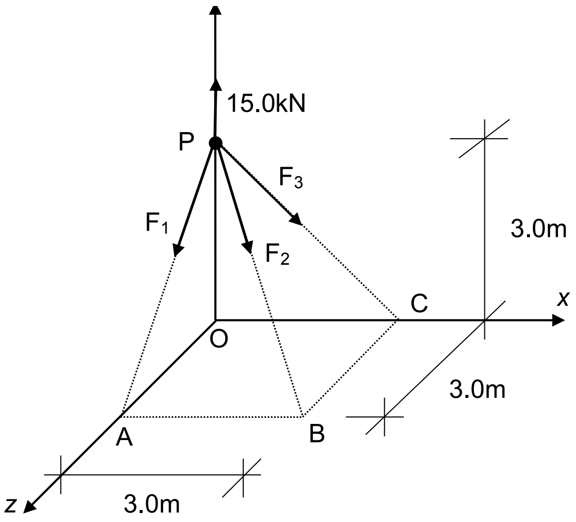
necessárias para cada uma das aplicações):

- Criptografia (Capítulo 2)
- Análise de estruturas (Capítulo 3);
- Prospeção de petróleo (Capítulo 7);
- Desenho de sistemas de som para automóveis para melhoria do conforto auditivo dos passageiros (Capítulo 7);
- *PageRank* utilizado para ordenar páginas *web* na internet (Capítulo 7);
- Cálculo de algumas áreas, de alguns volumes, ângulos entre retas e planos e diversas outras aplicações à geometria (Capítulo 8).

1.2.1 Um exemplo onde a Álgebra Linear pode intervir

Uma das aplicações da Álgebra Linear muito apreciada por quem tenha sistemas de muitas equações e muitas variáveis para resolver é o uso de técnicas que utilizam a representação matricial desses sistemas (mais à frente veremos o que isto é) para auxiliar à sua resolução.
O tradicional método da substituição para resolução de sistemas funciona para sistemas de qualquer dimensão mas, se quando temos 3 equações a 3 incógnitas já é muito demorado e suscetível a erros, imaginem o que é se tivermos 4, 10, 100, 1000 ou milhares de equações a milhares de incógnitas!
Vejamos um exemplo prático em que um sistema de equações lineares acaba por surgir:

Exemplo 1.2.1
Considere a partícula P na qual atuam as forças indicadas na figura. Determine os valores das forças F_1, F_2 e F_3, de modo a garantir o equilíbrio da partícula P.



Este é um exercício que poderá aparecer numa disciplina de Mecânica introdutória, num 1º semestre de uma licenciatura em Engenharia. Claro que a resolução deste problema sai do âmbito da nossa unidade curricular. Mas vejamos a sua resolução até ao ponto em que a Álgebra Linear pode intervir.

Definição das forças:

$$\vec{F_1} = F_1 \frac{(0,-3,3)}{\sqrt{18}} = -0.707 F_1 \vec{e_y} + 0.707 F_1 \vec{e_z}$$
$$\vec{F_2} = F_2 \frac{(3,-3,3)}{\sqrt{27}} = 0.111 F_2 \vec{e_x} - 0.111 F_2 \vec{e_y} + 0.111 F_2 \vec{e_z}$$
$$\vec{F_3} = F_3 \frac{(3,-3,0)}{\sqrt{18}} = 0.707 \vec{e_x} - 0.707 \vec{e_y}$$

Equilíbrio da partícula P:

$$\vec{R} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 0.111F_2 + 0.707F_3 = 0 \\ -0.707F_1 - 0.111F_2 - 0.707F_3 + 15 = 0 \\ 0.707F_1 + 0.111F_2 + 0 = 0 \end{cases}$$

O que resulta no final é um sistema de equações lineares. Podemos resolver este sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} 0 + 0.111F_2 + 0.707F_3 = 0 \\ -0.707F_1 - 0.111F_2 - 0.707F_3 + 15 = 0 \\ 0.707F_1 + 0.111F_2 + 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = -0.157F_2 \\ --- \\ F_1 = -0.157F_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ -0.707 \times (-0.157F_2) - 0.111F_2 - 0.707 \times (-0.157F_2) = -15 \\ --- \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ F_2 = -135.14 \\ --- \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = 21.22 \\ F_2 = -135.14 \\ F_1 = 21.22 \end{cases}$$

Foi relativamente simples resolver este sistema pelo Método da Substituição. Mas imagine como ficaria se em vez de três tivessemos um maior número de forças a atuar sobre a partícula, resultando assim num maior número de equações para resolver.

No Capítulo (3), veremos como resolver este sistema utilizando outro tipo de técnicas que simplificam esta resolução.

2 Matrizes

2.1 Introdução

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Damos o nome de matriz do tipo (ou de dimensão) $m \times n$ (lê-se "m por n") a um quadro formado por $m \times n$ elementos dispostos em m filas horizontais (ou linhas) e n filas verticais (ou colunas).
Geralmente, atribuímos letras maíusculas às matrizes e uma matriz A, do tipo $m \times n$, pode ser representada simbolicamente por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde a_{ij} representa o elemento da matriz A que se encontra na linha i e na coluna j. Dizemos que i é o índice de linha e j o índice de coluna.
O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ representa-se por $\mathcal{M}_{m \times n}$[1].

Exemplo 2.1.1
Para representar uma matriz A, do tipo 2×3 cujos elementos a_{ij} são dados por $a_{ij} = i + 2j$, com $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, podemos por começar pela sua

[1] Na literatura poderão encontrar $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ conforme se tratem de matrizes de elementos reais ou complexos. Como nesta unidade curricular trataremos apenas de matrizes reais, omitimos o $(\mathbb{R})$.

representação simbólica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e posteriormente calculamos cada um dos elementos a_{ij} de acordo com a fórmula dada. Por exemplo,

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + 2 \times 1 = 3 \\ a_{12} &= 1 + 2 \times 2 = 5 \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Chegamos assim à representação da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ diz-se **quadrada de ordem** n se $m = n$, ou seja, se tiver o mesmo número de linhas e colunas. Caso contrário, diz-se uma matriz **retangular**.

Exemplo 2.1.2
A matriz A do exemplo anterior, é uma matriz (retangular) do tipo 2×3. Pertence, por isso, ao conjunto $\mathcal{M}_{2 \times 3}$, ou seja $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}$.

Uma matriz quadrada A, de ordem n, pode representar-se simbolicamente por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para uma matriz quadrada, definimos a **diagonal principal** como sendo a diagonal que contém os elementos da forma a_{ii}, para todo o $i = 1, \dots, n$ e definimos a **diagonal secundária** como sendo a diagonal na direcção contrária à principal.

Exemplo 2.1.3

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ é quadrada, de ordem 3. Para esta matriz a diagonal principal é

$$\begin{matrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{matrix}$$

2.2 Matrizes especiais

- **Matriz linha**: é uma matriz do tipo $1 \times n$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz coluna**: é uma matriz do tipo $m \times 1$. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz nula**: se todos os seus elementos são nulos. Habitualmente representa-se por O. Por exemplo,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Casos particulares de matrizes quadradas

- **Matriz triangular superior**: se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz triangular inferior**: se todos os elementos acima da diagonal principal são nulos. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz diagonal**: se todos os elementos fora da diagonal principal são nulos. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Matriz identidade**, de ordem n: matriz quadrada de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal valem 1 e todos os outros elementos são nulos. Habitualmente representa-se por I_n e pode definir-se da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

  Como exemplos,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.2.1
Sejam A e B matrizes do tipo $m \times n$. Dizemos que B é a matriz **oposta** de A se

$$a_{ij} = -b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 2.2.2
As matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ são opostas.

Definição 2.2.3
Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Definimos a **transposta** da matriz A como sendo a matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ tal que

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

A matriz transposta de A representa-se por A^T.

Exemplo 2.2.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Obs. *Dada uma matriz A, $\left(A^T\right)^T = A$.*

Definição 2.2.5
Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$.
Uma matriz A diz-se **anti-simétrica** se $A = -A^T$.

Não confundir matriz simétrica com matriz oposta!

Exemplo 2.2.6
Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
A é simétrica e B é anti-simétrica (basta obterem A^T e B^T para verificar que as afirmações estão corretas).

2.3 Operações matriciais

2.3.1 Soma

Definição 2.3.1
Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Define-se a soma $A + B$ como sendo a matriz C, do tipo $m \times n$, dada por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Ou seja, somar duas matrizes não é mais do que pegar em duas matrizes com a mesma dimensão (atenção que isto é fundamental) e adicionar os elementos que estão na mesma linha e mesma coluna nas duas matrizes.

Exemplo 2.3.2
Se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 0+1 & -1+1 & 2+(-1) \\ 1+2 & 3+0 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Multiplicação de matriz por um escalar

Definição 2.3.3
Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar [2]. Define-se a multiplicação do escalar λ pela matriz A como sendo a matriz do tipo $m \times n$ que se obtém de A multiplicando todos os seus elementos por λ.

[2] Por um escalar entende-se um número real. Para não haver confusão entre os escalares e as matrizes, geralmente representam-se as matrizes por letras maiúsculas e os escalares por letras minúsculas gregas.

Exemplo 2.3.4
Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 2$.

$$\lambda A = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.3.5
Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:
(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(propriedade associativa);*
(ii) $A + B = B + A$ *(propriedade comutativa);*
(iii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(propriedade distributiva);*
(iv) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$*;*
(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(propriedade distributiva);*
(vi) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

2.3.3 Produto de matrizes

Já vimos duas operações que envolvem matrizes (a soma e a multiplicação por um escalar) que não representam dificuldade de cálculo. Vejamos agora uma outra operação, a multiplicação entre matrizes, que já não é tão intuitiva e simples.

Definição 2.3.6
Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Definimos o produto AB como sendo a matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}$ dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p.$$

Chama-se à atenção para o início da definição que nos diz em que condições é que duas matrizes podem ser multiplicadas. "$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$" significa que o número de colunas da primeira matriz tem de ser **exatamente**

Nem todas as matrizes podem ser multiplicadas entre si!

igual ao número de linhas da segunda. Note-se ainda que o resultado do produto é uma matriz do tipo $m \times p$ em que m é o número de linhas de A e p é o número de colunas de B.

Exemplo 2.3.7

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ o produto AB é possível porque $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 2}$. Sabemos que o resultado do produto será uma matriz do tipo 3×2.
Realizando agora a operação,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-1) & 1 \times 0 + (-2) \times 2 \\ 0 \times 1 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 2 \\ 3 \times 1 + 0 \times (-1) & 3 \times 0 + 0 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As dimensões de duas matrizes A e B nem sempre permitem realizar o produto entre elas. E por vezes, apesar de ser possível realizar o produto AB, não é possível realizá-lo pela ordem inversa, ou seja, BA. Podemos até pegar no exemplo anterior: AB foi possível de realizar, como vimos, mas BA já não seria possível uma vez que o número de colunas de B é diferente do número de linhas de A.

Ainda assim, há casos em que o produto de matrizes pela ordem inversa é possível porque as dimensões assim o permitem, embora o resultado possa ser diferente.
Vejamos o exemplo seguinte:

Exemplo 2.3.8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Temos $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (o cálculo de cada uma das multiplicações fica como exercício).

Ou seja, $AB \neq BA$! De facto, o **produto de matrizes não é comutativo**. Atenção!

Por este motivo é preciso ter muito cuidado com a ordem pela qual estamos a multiplicar as matrizes já que a ordem tem influência no resultado final.

Definição 2.3.9

Quando A e B são matrizes tais que $AB = BA$ dizemos que A e B são **permutáveis**.

Do exemplo anterior podemos retirar ainda uma outra conclusão: no produto de matrizes não é válida a lei do anulamento do produto, isto é,

$$AB = O \not\Rightarrow A = O \vee B = O.$$

Atenção que aqui por O entende-se a matriz nula e não o número real zero.

Proposição 2.3.10

Dadas matrizes A, B e C de dimensões apropriadas de tal forma que as operações façam sentido e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dois escalares, são válidas as seguintes propriedades:

(i) $A(BC) = (AB)C$ *(propriedade associativa);*

(ii) $A(B + C) = AB + AC$ *(propriedade distributiva);*

(iii) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$*;*

(iv) $AI = IA = A$ *(existência de elemento neutro para a multiplicação);*

(v) $(AB)^T = B^T A^T$. A ordem da multiplicação inverte!

As propriedades enunciadas em 2.3.5 e em 2.3.10, algumas intuitivas outras não, devem estar presentes na altura de resolver equações matriciais. Estas são equações em que a incógnita é uma matriz.

2.4 Matrizes em escada

Definição 2.4.1
Uma matriz do tipo $m \times n$ diz-me uma **matriz na forma em escada** se:

(i) Todas as linhas não nulas se encontram acima das linhas nulas;

(ii) O pivô (primeiro elemento não nulo) de cada linha não nula ocorre numa coluna à direita do pivô da linha anterior;

(iii) Todos os elementos numa coluna por baixo de um pivô são zero.

Exemplo 2.4.2
As seguintes matrizes estão na forma em escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No entanto, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não está na forma em escada porque o primeiro elemento não nulo da segunda linha não ocorre à direita do primeiro elemento não nulo da linha acima e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ não está em escada porque a primeira linha é nula e encontra-se acima de linhas não nulas.

2.4.1 Operações elementares

Às três operações que se seguem damos o nome de *operações elementares* sobre matrizes, e podem ser realizadas sobre linhas ou colunas:

(i) Trocar a posição das linhas (ou colunas) i e j. Costumamos representar por L_{ij} (ou C_{ij});

(ii) Multiplicar uma linha (ou coluna) i por um escalar não nulo. Costumamos representar por $L_i = \lambda L_i$ (ou $C_i = \lambda C_i$);

(iii) Adicionar a uma linha (ou coluna) i um múltiplo de uma linha (ou coluna) j. Costumamos representar por $L_i = L_i + \lambda L_j$ (ou $C_i = C_i + \lambda C_j$).

Exemplo 2.4.3
Um exemplo para cada uma das operações elementares:

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Qualquer matriz pode ser reduzida à forma em escada através da realização de uma ou mais operações elementares e esta redução não é única. Ou seja, dependendo das operações elementares realizadas, a matriz reduzida é diferente.

Exemplo 2.4.4
Vejamos um exemplo de redução à forma em escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vejamos agora uma redução alternativa para a mesma matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ambas as reduções à forma em escada estão corretas mas, como podemos ver, as matrizes finais são diferentes.

Exemplo 2.4.5
Vejamos agora um exemplo de redução à forma em escada que **não está correto**:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=2L_2+L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz final está na forma em escada mas resulta de uma operação que não é elementar. Parece ser a operação elementar (iii) mas não é. Repare que a que foi utilizada é do tipo $L_i = \lambda L_i + L_j$ e não do tipo $L_i = L_i + \lambda L_j$. A diferença aqui é súbtil e por isso é preciso um cuidado redobrado neste tipo de operação.
Para estar correto, deveria ficar

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obs. *O exemplo anterior de uma operação realizada que não é elementar é um erro muito comum sobretudo em matrizes que não têm como pivô 1 ou -1 porque parece que os cálculos ficam mais facilitados fazendo daquela forma. Mas **não podemos** realizar operações que não são elementares. Uma forma de contornar a situação, que consegue evitar (nalguns casos) recorrer a cálculos com frações, é colocar 1 ou -1 como pivô da primeira linha da matriz. Esta é uma boa prática, sobretudo se tal for possível com uma única troca de linha ou coluna.*

Exemplo 2.4.6
Pondo em prática a dica dada na observação anterior,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4.2 (In)dependência linear de linhas

Definição 2.4.7
Dada uma matriz com m linhas $L_1, \ldots, L_m$ chamamos *combinação linear* das linhas à expressão

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m,$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ que se designam por *coeficientes da combinação linear.*

Exemplo 2.4.8
Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

é um exemplo de uma combinação linear das linhas da matriz A com $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$.

Definição 2.4.9
Diz-se que as linhas $L_1, L_2, \ldots, L_m$ de uma matriz são *linearmente independentes* se

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m = O \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

onde O representa a linha nula.
Caso contrário, as linhas dizem-se *linearmente dependentes.*

Teorema 2.4.10
As linhas de uma matriz são linearmente dependentes se, e só se, uma delas é combinação linear das restantes.

Mais à frente voltaremos a tratar de dependência e independência linear mas, para já, é o suficiente para introduzirmos o conceito de característica de uma matriz.

2.4.3 Característica de uma matriz

Definição 2.4.11
Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Chama-se **característica da matriz** A e representa-se por $c(A)$ ao número máximo de linhas linearmente independentes.

Proposição 2.4.12
Para uma matriz A na forma de escada, tem-se que:
(i) As linhas não nulas são linearmente independentes;
(ii) $c(A)$ é igual ao número de linhas não nulas.

Exemplo 2.4.13
Considere-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Para determinar a sua característica, comecemos por fazer a sua redução à forma em escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como temos apenas 2 linhas não nulas, concluímos que $c(A) = 2$.

Obs. *O valor da característica de matriz é único para cada matriz, independentemente da forma como a matriz foi reduzida à forma em escada.*

Exercício

Calcule a característica da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.4.14

Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

com $k \in \mathbb{R}$.

A característica desta matriz dependerá, em princípio, do valor que o parâmetro real k tomar.

O que devemos fazer primeiro é, como habitualmente, reduzir a matriz à forma em escada:

$$\begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - kL_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$$

Tendo já a matriz reduzida à forma em escada, podemos verificar que o k vai influenciar a característica da matriz.

Mais concretamente, se $1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$ a terceira linha é nula pelo que

$$c(A) = \begin{cases} 2, & \text{se } k = 1, \\ 3, & \text{se } k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

2.4.4 Matriz inversa

Definição 2.4.15
Uma matriz quadrada A, de ordem n, diz-se **invertível** se existe uma matriz quadrada B, de ordem n, tal que

$$AB = BA = I_n.$$

A matriz B diz-se a **inversa** de A e representa-se por A^{-1}.

Proposição 2.4.16
A matriz inversa de uma matriz quando existe é única.

Proposição 2.4.17
Sejam A e B são matrizes quadradas, de ordem n, invertíveis e $p \in \mathbb{N}$. Então:

(i) A^{-1} *também é invertível e*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

(ii) AB *também é invertível e*

Troca-se a ordem da multiplicação!

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(iii) A^T *é invertível e*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T;$$

(iv) A^p *é invertível e*

$$(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p.$$

Proposição 2.4.18
Uma matriz A quadrada, de ordem n, é invertível se, e só se, a sua característica é máxima. Ou seja, se, e só se, $c(A) = n$.

A existência de matriz inversa permite-nos resolver equações matriciais como, por exemplo, a equação $AX = B$, com A e B matrizes quadradas, de ordem

n, conhecidas e X a matriz incógnita. Vamos ver de que forma:

$$AX = B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Admitindo que } A \text{ é invertível}}}{\Leftrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Se a equação fosse $XA = B$ o resultado seria diferente? Sim. Não nos podemos esquecer que **o produto de matrizes não é comutativo**. A forma de resolver esta outra equação seria:

$$XA = B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Admitindo que } A \text{ é invertível}}}{\Leftrightarrow} XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow XI_n = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Algoritmo de cálculo da matriz inversa

1. Dada A uma matriz quadrada, de ordem n, ampliá-la colocando à direita a matriz identidade de ordem n, isto é:

$$[\,A \,|\, I_n\,]\,;$$

2. Efetuar operações elementares sobre linhas em relação à nova matriz com o objectivo de obter a matriz identidade do lado esquerdo, isto é:

$$[\,I_n \,|\, B\,]\,;$$

3. $B = A^{-1}$

Exemplo 2.4.19

Para encontrar a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2=L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3-L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1=L_1-L_3]{L_2=L_2-2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Sabemos que o algoritmo terminou porque na última matriz ampliada já temos a matriz identidade do lado esquerdo. Logo, A^{-1} é a matriz que está do lado direito. Ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Obs. *Poder-se-ia verificar se o cálculo está correcto fazendo o produto* AA^{-1} *do qual se deve obter* I_3.

3 Sistemas de equações lineares

3.1 Introdução

Uma equação linear a n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

com $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b números reais dados.
Um sistema de m equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

com $a_{ij}, b_k \in \mathbb{R}$ para $i, k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Vejamos três exemplos de sistemas de equações lineares:
(a)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x - (2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 1 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ou seja, este sistema tem a solução única $(x, y) = (1, 1)$.

(b)

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x+2(2-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 4=4 \end{cases}$$

Ou seja, este sistema tem uma infinidade de soluções. Todas as do tipo $(x, 2-x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

(c)

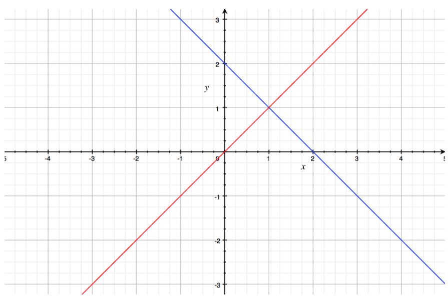
$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x+1-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 1=0 \end{cases}$$

Ou seja, este sistema é impossível pelo que não tem solução.

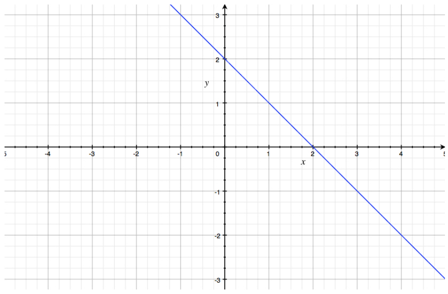
Há uma natureza geométrica implícita nestes três exemplos. Recordemos que uma equação linear com duas incógnitas representa uma reta no plano. Então, um sistema com duas dessas equações lineares representa a intersecção entre duas retas. Sabemos que essa intersecção poderá resultar num ponto, numa reta, ou no conjunto vazio.

Representemos as retas de cada um dos sistemas de equações lineares dos exemplos anteriores:

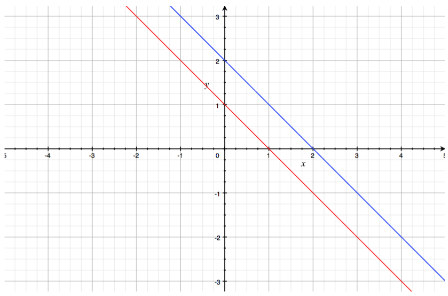
(a) A azul a reta $x+y=2$ e a encarnado a reta $x-y=0$. A intersecção resulta num ponto, o $(1,1)$;



(b) Neste caso, $x+y=2$ e $2x+2y=4$ representam retas coincidentes. Podíamos logo ter observado que a segunda equação é o dobro da primeira, pelo que são equivalentes. A intersecção das duas retas é uma reta.



(c) A azul a reta $x + y = 2$ e a encarnado a reta $x + y = 1$. Neste caso, as retas são paralelas pelo que não se intersectam. Logo, a sua intersecção é o conjunto vazio e o sistema de equações lineares é impossível (não tem solução).



Vimos três tipos distintos de sistemas quanto ao número de soluções e, de facto, os sistemas podem classificar-se quanto à existência e unicidade de solução da seguinte forma:

$$\textbf{Sistema} \begin{cases} \textbf{Possível} \begin{cases} \textbf{Determinado} \text{ - se possui solução única} \\ \textbf{Indeterminado} \text{ - se possui uma infinidade de soluções} \end{cases} \\ \textbf{Impossível} \text{ - se não tem solução} \end{cases}$$

3.2 Representação matricial

O sistema (3.1) é equivalente a $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A diz-se a matriz dos **coeficientes do sistema**, X diz-se a matriz das **incógnitas** e B diz-se a matriz dos **coeficientes constantes**.

Designamos por **matriz ampliada do sistema** e representamos por $[\,A\,|\,B\,]$ a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

3.3 Método de Eliminação de Gauss

Finalmente vamos ver um método alternativo ao chamado "Método da Substituição" que foi ensinado no ensino secundário para resolução de sistemas de equações lineares.

Dado um sistema de equações lineares escrito na forma matricial $AX = B$, o *Método de Eliminação de Gauss* consiste em:

(i) Representar a matriz ampliada do sistema, $[\,A\,|\,B\,]$;

(ii) Reduzir essa matriz à forma em escada realizando operações elementares sobre linhas;

(iii) Passar novamente para a forma de sistema;

(iv) Resolver o sistema "de baixo para cima".

Obs. *Para além das operações elementares sobre linhas é admitida ainda a troca de colunas dentro da matriz A (e é esta a única operação com colunas permitida) desde que não nos esqueçamos que esta troca implica uma troca de posição na ordem das incógnitas que deverá ser tida em conta quando se passar novamente para sistema.*

Exemplo 3.3.1

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x - y - 2z = 3 \end{cases}$$

O sistema é equivalente a $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para resolver o sistema utilizando o Método de Eliminação de Gauss, comecemos por reduzir a matriz ampliada à forma em escada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2-2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3+3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right]$$

Passando novamente para sistema e resolvendo “de baixo para cima”:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -y - 3z = 3 \\ -12z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (-1) = 0 \\ -y - 3 \times (-1) = 3 \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Este sistema tem a solução única $x = 1, y = 0$ e $z = -1$.
Se quisermos voltar à natureza geométrica implícita, este sistema representa a intersecção entre três planos no espaço e chegámos à conclusão que se interesectam apenas no ponto $(1, 0, -1)$.

Exemplo 3.3.2
Retomemos o sistema de equações lineares do exemplo 1.2.1

$$\begin{cases} 0 + 0.111F_2 + 0.707F_3 = 0 \\ -0.707F_1 - 0.111F_2 - 0.707F_3 + 15 = 0 \\ 0.707F_1 + 0.111F_2 + 0 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.111 & 0.707 \\ -0.707 & -0.111 & -0.707 \\ 0.707 & 0.111 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando o Método de Eliminação de Gauss,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0.111 & 0.707 & 0 \\ -0.707 & -0.111 & -0.707 & 15 \\ 0.707 & 0.111 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} -0.707 & -0.111 & -0.707 & 15 \\ 0 & 0.111 & 0.707 & 0 \\ 0.707 & 0.111 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 = L_3 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -0.707 & -0.111 & -0.707 & 15 \\ 0 & 0.111 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & -0.707 & 15 \end{array}\right]$$

Passando para sistema,

$$\begin{cases} -0.707F_1 - 0.111F_2 - 0.707F_3 = 15 \\ 0.111F_2 + 0.707F_3 = 0 \\ -0.707F_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = \frac{15+0.111\times 135.16+0.707\times(-21.22)}{-0.707} = -21.22 \\ F_2 = \frac{-0.707\times(-21.22)}{0.111} = 135.16 \\ F_3 = -21.22 \end{cases}$$

Se comparmos com a solução obtida pelo Método da Substituição, verificamos que existe uma pequena diferença no valor obtido para F_2. Esta diferença resulta de estarmos a fazer uma aproximação a duas casas decimais e do número de operações que fazemos em cada um dos métodos ser diferente o que origina que total de erro de aproximação acumulado seja também ligeiramente diferente.

É possível sabermos se um sistema tem solução ou não antes de o resolvermos. E quando tem solução, saber se essa solução é única. No que se segue, representamos por $c(A)$ a característica da matriz dos coeficientes do sistema e por $c(A|B)$ a característica da matriz ampliada.

Proposição 3.3.3
Um sistema $AX = B$ é possível se, e só se, $c(A) = c(A|B)$.

Corolário 3.3.4
Um sistema $AX = B$ é impossível se, e só se, $c(A) < c(A|B)$.

Corolário 3.3.5
Um sistema $AX = B$, com n incógnitas, é:
(i) Determinado, se $c(A) = n$;
(ii) Indeterminado, se $c(A) < n$.

Em resumo, dado um sistema de equações lineares $AX = B$, o sistema é

$$\begin{cases} \textbf{Possível} \text{ se } c(A) = c(A|B) \begin{cases} \textbf{Determinado} \text{ se } c(A) = \text{número de incógnitas} \\ \textbf{Indeterminado} \text{ se } c(A) < \text{número de incógnitas} \end{cases} \\ \textbf{Impossível} \text{ se } c(A) < c(A|B) \end{cases}$$

Exemplo 3.3.6
Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 1 \\ -2x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Redução à forma em escada da matriz ampliada $[A|B]$ correspondente a este sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 = L_3 + 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Concluímos que $c(A) = 2$ e $c(A|B) = 3$, ou seja, $c(A) < c(A|B)$ pelo que o sistema é impossível (não tem solução).

Exemplo 3.3.7

Considere o sistema $\begin{cases} x+z=0 \\ \alpha x - y + z = 0 \\ 2x + y - \alpha z = 0 \end{cases}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para discutir o sistema quanto à existência e unicidade de solução em função do parâmetro α, comecemos por escrever a matriz ampliada e reduzi-la à forma em escada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -\alpha & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3-2L_1]{L_2=L_2-\alpha L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha-2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha-1 & 1 \end{array}\right]$$

- Se $-2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$, temos $c(A) = 2$ e $c([A|B]) = 3$. Logo, o sistema é impossível.
- Se $-2\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -\frac{1}{2}$, temos $c(A) = 3$ e $c([A|B]) = 3$. Como o número de incógnitas também é 3, o sistema é possível e determinado.

Exercício

Numa loja de animais há iguanas, ratos e pavões. Há um total de 108 patas e 30 caudas e o número de iguanas é o dobro do número de ratos.

(a) Formule o problema como uma sistema de equações lineares;

(b) Verifique que o sistema tem solução única;

(c) Resolva o sistema através do Método de Eliminação de Gauss e obtenha a quantidade de iguanas, ratos e pavões há na loja.

4 Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada[1] é um escalar e vai ter grande aplicabilidade na resolução de sistemas de equações lineares, no cálculo da inversa de matriz e também noutros contextos que só em capítulos posteriores serão apresentados.

4.1 Cálculo

Definição 4.1.1
Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, define-se o determinante de A, e representa-se por $\det A$ ou $|A|$, como sendo o escalar

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 4.1.2
Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

Esta forma de cálculo é exclusiva para matrizes 2×2.
Existem diversas formas de definir o determinante de uma matriz quadrada mais geral, de ordem n, uma delas a axiomática. No entanto, vamos omitir essa definição optando por apresentar o *Teorema de Laplace* que nos indica um método de cálculo para determinantes de matrizes quadradas quaisquer. Para tal, necessitamos de introduzir algumas definições.

[1] Só se calculam determinantes de matrizes quadradas

Definição 4.1.3
Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. Define-se o *menor i, j de A* e representa-se por A_{ij} como sendo a submatriz de ordem $n-1$ que resulta de suprimir na matriz A a linha i e a coluna j.

Exemplo 4.1.4
Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Então, por exemplo,

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \; A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \; A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição 4.1.5
Dada uma matriz A, quadrada, de ordem n e fixando um dos seus elementos, a_{ij}, definimos o *complemento algébrico* de a_{ij} e representamos por Δ_{ij} ao seguinte valor

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|.$$

Exemplo 4.1.6
Para a matriz A do exemplo anterior, tem-se:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(8-0) = -8$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{3+3}|A_{33}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4-(-2) = -2$$

Obs. *Repare que $(-1)^{i+j}$ dá sempre 1 ou -1 consoante $i+j$ é par ou ímpar.*

Teorema 4.1.7 (Teorema de Laplace)
Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. Fixando, arbitrariamente, uma

linha i, tem-se

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Exemplo 4.1.8

Utilizando a matriz A dos exemplos anteriores e aplicando o Teorema de Laplace utilizando a 2ª linha:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\Delta_{21} + 3\Delta_{22} + 0\Delta_{23} = 2 \times 1 + 3 \times (-2) + 0 = -4$$

Obs. *O Teorema de Laplace ainda é válido se, em vez de uma linha, considerarmos uma coluna arbitrária.*

No caso particular de matrizes quadradas de ordem 3, uma forma alternativa de obter o determinante da matriz é a *Regra de Sarrus* que se ilustra de seguida.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) - \\ & - ((a_{31} \times a_{22} \times a_{13}) + (a_{32} \times a_{23} \times a_{11}) + (a_{33} \times a_{21} \times a_{12})) \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.9

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = {} & (1 \times 1 \times 1) + ((-1) \times 3 \times (-1)) + (2 \times 0 \times 4) - \\ & - ((-1) \times 1 \times 2 + 4 \times 3 \times 1 + 1 \times 0 \times (-1)) = -6 \end{aligned}$$

Obs. *Não esquecer que a Regra de Sarrus só se aplica a matrizes 3×3!*

Teorema 4.1.10

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n.
Então
(i) Se numa matriz trocarmos entre si duas linhas (colunas), o seu determinante passa ao simétrico;

(ii) Se B é a matriz que se obtém a partir de uma matriz A multiplicando uma única linha (ou coluna) por λ, então

$$|B| = \lambda |A|;$$

(iii) Sejam $L_1, \ldots, L_n$ as linhas da matriz e optemos por substituir A pela representação $L_1, \ldots, L_n$. Então

$$\det\,(L_1, \ldots, L_i + L_i', \ldots L_n) = \det\,(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n) + \det\,(L_1, \ldots, L_i', \ldots, L_n);$$

(iv) Adicionar a uma linha (coluna) um múltiplo de outra linha (coluna) não altera o valor do seu determinante.

Exemplo 4.1.11

Apresentamos um exemplo para cada uma das alíneas anteriores:

(i)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 2-1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

(iii)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(iv)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Obs. *Cuidado com a propriedade (ii). Se tivermos, por exemplo,*

$$A = \begin{bmatrix} a+b & c+d \\ e+f & g+h \end{bmatrix}$$

é errado *fazer:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}.$$

O que está correto é:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ e+f & g+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e+f & g+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ f & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ e & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ f & h \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.1.12

Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$, conseguimos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para tal, basta utilizarmos as propriedades dos determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_{12}}{\underset{\uparrow}{=}} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2=L_2-L_3}{\underset{\uparrow}{=}} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \times 2 = -4$$

Proposição 4.1.13
O determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal, isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Estes últimos resultados permitem deduzir um outro método de cálculo de determinantes, a que se costuma chamar *Método de Eliminação de Gauss*, uma vez que podemos efectuar operações elementares sobre a matriz até a reduzir à forma em escada (que, por ser quadrada, torna-se numa triangular superior) e o determinante não é mais que o produto dos elementos da diagonal principal. Temos, no entanto, de respeitar o efeito que cada operação elementar produz no valor do determinante, de acordo com o Teorema 4.1.10.

Exemplo 4.1.14
Calculemos, recorrendo ao Método de Eliminação de Gauss, o determinante da mesma matriz que foi utilizada para exemplificar a Regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-6) = -6.$$

Em resumo, foram apresentados três formas de calcular o determinante de uma matriz:

- Teorema de Laplace;
- Regra de Sarrus (só para matrizes quadradas, de ordem 3);
- Método de Eliminação de Gauss.

Qual o método mais adequado? Depende do tipo de matriz. Se é uma matriz 3×3, talvez seja boa ideia usar a Regra de Sarrus. Se for uma matriz de ordem superior a 3, só nos restam os outros dois métodos. Nessa situação, se a matriz tiver uma linha ou coluna com vários zeros, o Teorema de Laplace permite o cálculo rápido do determinante. Caso contrário, o Método de Eliminação de Gauss poderá ser uma melhor opção.

Proposição 4.1.15
São válidas as seguintes propriedades:
(i) Se A é uma matriz quadrada, de ordem n, então

$$|A^T| = |A|;$$

(ii) O determinante de uma matriz quadrada nula é 0;

(iii) Dadas as matrizes quadradas A e B de ordem n,

$$|AB| = |A| \times |B|;$$

(iv) Se A é uma matriz quadrada, de ordem n e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|;$$

(v) Uma matriz quadrada contendo uma linha (coluna) nula tem determinante nulo;

(vi) Uma matriz quadrada contendo duas linhas (colunas) iguais tem o seu determinante nulo;

(vii) Uma matriz quadrada com uma linha (coluna) múltipla de outra linha (coluna) tem o seu determinante nulo;

(viii) Se A é uma matriz invertível, tem-se

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|};$$

(ix) Se A é uma matriz quadrada, de ordem n, então $c(A) = n$ se, e só se, $|A| \neq 0$.

Note que, da última propriedade, resulta:

Proposição 4.1.16

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.

Uma das propriedades menos óbvias à primeira vista é a (iv). Esta propriedade é consequência direta da (ii) do Teorema 4.1.10 e é facilmente ilustrada com um exemplo:

Exemplo 4.1.17

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\lambda = 2$. A é uma matriz quadrada de ordem n, com $n = 3$.

No que se segue, é indicada em cada igualdade qual a linha em que a propriedade (ii) do Teorema 4.1.10 está a ser aplicada.

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ L_1}}{=} 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ L_2}}{=} 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ L_3}}{=} 2 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2^3|A| = \lambda^n|A|$$

Ou seja, o expoente em λ^n na propriedade $|\lambda A| = \lambda^n|A|$ é consequência de existirem n linhas numa matriz quadrada A de ordem n.

4.2 Aplicações dos determinantes

4.2.1 Cálculo da matriz inversa

É possível utilizar os determinantes no cálculo da matriz inversa. Comecemos por introduzir algumas definições.

Definição 4.2.1

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, representa-se por $\hat{A}$ a matriz dos seus complementos algébricos, isto é

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Designa-se por adjunta de A a transposta da matriz dos complementos algébricos, isto é,

$$adj(A) = \hat{A}^T.$$

Proposição 4.2.2
Seja A uma matriz invertível. Tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A).$$

Exemplo 4.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 2 - (12) = -5 \neq 0 \ \Rightarrow \ A \text{ é invertível.}$$

Cálculo dos complementos algébricos:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Logo,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad adj(A) = \hat{A}^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & -2 \\ -7 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

4.2.2 Resolução de sistemas de equações lineares

Consideremos um sistema de equações lineares na sua forma matricial dado por $AX = B$, com A a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes.

Definição 4.2.4
Um sistema $AX = B$ com n equações e n incógnitas tal que $|A| \neq 0$ diz-se um sistema de Cramer.

Proposição 4.2.5 (Regra de Cramer)
Um sistema de Cramer, $AX = B$, é sempre possível e determinado. Considerando n o número de equações e incógnitas, $X = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^T$, a solução única do sistema, é dada por:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

onde A_i é a matriz que se obtém substituindo em A a coluna i pela matriz *coluna B dos termos independentes.*

Exemplo 4.2.6

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

O sistema pode ser escrito na forma matricial $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $|A| = 3 \neq 0$, concluímos que o sistema é de Cramer, ou seja, é possível e determinado (tem solução única) e a sua solução é dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{3} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

5 Espaços Lineares

5.1 Definição e propriedades elementares

Definição 5.1.1
Seja E um conjunto não vazio munido de duas operações: soma entre elementos e produto de um elemento por um escalar real.
E diz-se um *espaço linear* sobre $\mathbb{R}$ se

1. (a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u},\ \forall\,\vec{u},\vec{v}\in E$;
   (b) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}),\ \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E$;
   (c) $\exists\,\vec{0}_E\in E:\vec{u}+\vec{0}_E=\vec{u},\ \forall\,\vec{u}\in E$;
   (d) $\forall\,\vec{u}\in E,\exists\,\vec{v}\in E:\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}_E$;
2. (a) $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v},\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R},\forall\,\vec{u}\in E$;
   (b) $(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u},\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\vec{u}\in E$;
   (c) $(\lambda\mu)\vec{u}=\lambda(\mu\vec{u}),\ \forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\,\vec{u}\in E$;
   (d) $1\vec{u}=\vec{u},\ \forall\,\vec{u}\in E$.

Obs. *É muito comum aparecer na literatura uma designação alternativa para espaço linear que é* espaço vetorial. *É também comum os elementos dos espaços lineares (ou vetoriais) serem designados por* vetores. *Daí o uso de setas por cima das letras que representam os elementos do espaço na definição acima. Não significa que representem sempre vetores no sentido habitual do termo. Na verdade, os elementos dos espaços lineares podem ser coisas muito variadas como veremos de seguida.*

Exemplo 5.1.2
Algums exemplos de espaços lineares:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\ldots$, $\mathbb{R}^n$ são espaços lineares;
- $\mathcal{M}_{m\times n}$ com as operações usuais de soma e produto de matriz por um escalar, é um espaço linear;
- O conjunto dos polinómios em x de grau inferior ou igual a n, ou seja, polinómios do tipo

  $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

  com as operações usuais de soma e produto de polinómio por um escalar, é um espaço linear;
- O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com as operações usuais de soma de funções e produto por um escalar, é um espaço linear.

Definição 5.1.3
Um subconjunto S de um espaço linear E diz-se um subespaço linear de E se, e só se, forem verificadas as seguintes condições:
(i) $S \neq \emptyset$;
(ii) $\vec{u} + \vec{v} \in S, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in S$;
(iii) $\lambda\vec{u} \in S, \forall\, \vec{u} \in S, \lambda \in \mathbb{R}$.

$\emptyset$ é o conjunto vazio

Exemplo 5.1.4

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 2x\right\}.$$

(i) $(0, 0) \in S$ porque $0 = 2 \times 0$. Logo, $S \neq \emptyset$.
(ii) Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2) \in S$.
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem escrever-se como

$$\vec{u} = (x_1, 2x_1),\ \vec{v} = (x_2, 2x_2).$$

Logo,

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,2x_1+2x_2)=(x_1+x_2,2(x_1+x2))\in S,$$

porque o vetor resultante verifica equação que define o subespaço.

(iii) Sejam $\vec{u}=(x,y)\in S$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\lambda\vec{u}=\lambda(x,y)=\lambda(x,2x)=(\lambda x,2\lambda x)\in S,$$

porque o vetor resultante verifica equação que define o subespaço.

$(i)+(ii)+(iii)\ \Rightarrow\ S$ é subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

Proposição 5.1.5
Seja S um subespaço linear de um espaço linear E. Então, $\vec{0}_E$ (o vetor nulo de E) pertence a S.

Esta proposição é especialmente útil para provar que um dado subconjunto **não é** subespaço linear. Vejamos o seguinte

Exemplo 5.1.6
Seja $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y=x,\ z=1\}$.
Temos que $\vec{0}_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)\notin S$. Logo, pela proposição anterior, concluímos que S não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

5.2 Combinação linear

Sejam $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_p}$ vetores de um certo espaço linear E. Um vetor $\vec{u}\in E$ diz-se uma *combinação linear* dos vetores $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_p}$ se existirem escalares $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{u}=\lambda_1\vec{v_1}+\cdots+\lambda_p\vec{v_p}.$$

Os escalares $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ dizem-se os *coeficientes da combinação linear*.

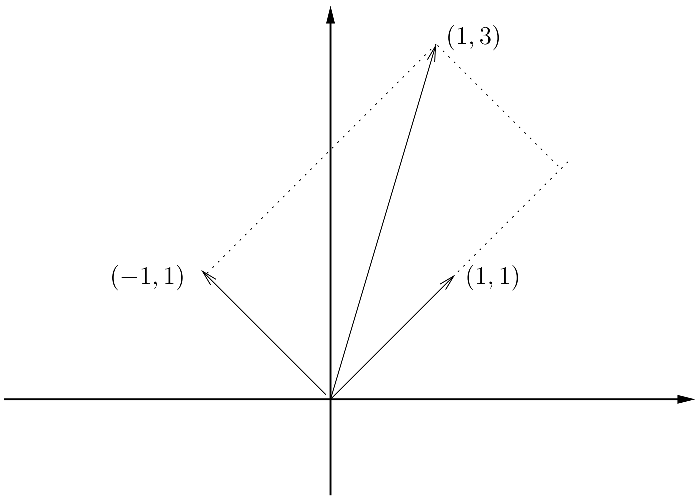
Obs. *Recorde que já tínhamos definido a combinação linear de linhas de uma* *matriz em 2.4.7.*

Exemplo 5.2.1
Para verificar se o vetor $(1,3)$ é uma combinação linear dos vetores $\{(1,1),(-1,1)\}$, suponhamos que existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}(1,3) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1)\\ &= (\lambda_1,\lambda_1) + (-\lambda_2,\lambda_2)\\ &= (\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 = 1\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 2\\ \lambda_2 = 1\end{cases}$$

Logo, $(1,3) = (1,1)+2(-1,1)$, pelo que $(1,3)$ é combinação linear dos vetores dados.
Podemos representar esta combinação linear graficamente:



Exemplo 5.2.2
Verifiquemos se $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.

Suponhamos que existiam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

As 3ª e 4ª equações do sistema tornam-no impossível. Logo, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **não é** combinação linear dos vetores dados.

5.3 Subespaço gerado por um conjunto de vetores

Teorema 5.3.1
Seja $X = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ um conjunto de vetores de um espaço linear E.
O conjunto

$$S = \{\vec{u} : \ \vec{u} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_p \vec{v_p}, \text{ com } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

de todas as combinações lineares de vetores de X é um subespaço linear de E, que se representa por $< X >$ ou $< \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p} >$ e se designa por subespaço gerado por *X.*
Diz-se então que X gera $< X >$ ou que X é um conjunto de geradores *de $< X >$.*

Exemplo 5.3.2

Verifiquemos que $X = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, com $\vec{v_1} = (1,1)$ e $\vec{v_2} = (-1,1)$, gera $\mathbb{R}^2$.
Para tal, temos de provar que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ se pode escrever como combinação linear dos vetores de X.
Consideremos um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^2$, (x,y), e sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}(x,y) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1)\\ &= (\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 = x\\ \lambda_1 + \lambda_2 = y\end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = \frac{x+y}{2}\\ \lambda_2 = \frac{y-x}{2}\end{cases}$$

pelo que $(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{y-x}{2}(-1,1)$, ou seja, (x,y) é combinação linear dos vetores de X.
Concluímos que $\mathbb{R}^2 =< (1,1), (-1,1) >$.

5.4 (In)dependência linear

Definição 5.4.1

Diz-se que os vetores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ de um espaço linear E são *linearmente independentes* se

$$\lambda_1\vec{v_1} + \ldots \lambda_p\vec{v_p} = \vec{0_E} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Caso contrário, os vetores dizem-se *linearmente dependentes*.

Exemplo 5.4.2

Alguns exemplos:

(i) Em $\mathbb{R}^3$, o sistema $\{(0,1,1), (0,1,0), (0,-2,-2)\}$ é linearmente dependente porque

$$2(0,1,1) + 0(0,1,0) + 1(0,-2,-2) = (0,0,0).$$

Ou seja, foi possível fazer uma combinação linear nula sem que, obrigatoriamente, fossem todos nulos os coeficientes da combinação.

(ii) Em $\mathbb{R}^2$, $((1,1),(-1,1))$ é linearmente independente porque, supondo que existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1,1) + \lambda_2(-1,1) = (0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Isto é, a única combinação linear que resulta num vetor nulo é a que tem todos os coeficientes nulos o que significa que os vetores dados são linearmente independentes.

Proposição 5.4.3

Seja $\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\}$ um conjunto de vetores. Então, o conjunto é linearmente dependente se, e só se, algum dos vetores se pode escrever como combinação linear dos restantes.

Corolário 5.4.4

Seja $\{\vec{v_1}, \ldots \vec{v_n}\}$ um conjunto de vetores. Então, o conjunto é linearmente independente se, e só se, nenhum dos seus vetores se pode escrever como combinação linear dos restantes.

Proposição 5.4.5

São válidas as seguintes:

(i) Se um dos vetores $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ é nulo, então o conjunto é linearmente dependente;

(ii) A independência ou dependência linear de um conjunto de vetores não se altera se a um deles adicionarmos uma combinação linear dos restantes.

5.5 Base e dimensão

Definição 5.5.1
Seja E um espaço linear.
Diz-se que $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ de vetores de E é uma *base* de E se:
(i) $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ são linearmente independentes;
(ii) $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ gera E, isto é, $E =< \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} >$

Exemplo 5.5.2
Já vimos em exemplos anteriores que $\mathbb{R}^2 =< (1,1), (-1,1) >$ e que $\{(1,1), (-1,1)\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Logo, podemos concluir que $\{(1,1), (-1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Definição 5.5.3
Chamamos a

- $\{(1,0), (0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$;
- $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- $\{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)\}$ (n vetores) a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.5.4
Sejam $X = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ um conjunto de n vetores linearmente independentes de um espaço linear E e $< X >$ o subespaço gerado por X. Então, todo o conjunto de $n+1$ vetores de $< X >$ é constituído por vetores linearmente dependentes.

Corolário 5.5.5
Num espaço linear, todas as bases têm o mesmo número de vetores.

Este corolário motiva a definição seguinte:

Definição 5.5.6
Seja E um espaço linear. Ao número de elementos de qualquer base de E damos o nome de *dimensão* de E e representamos por dim E.

Exemplo 5.5.7
Conhecendo as bases canónicas de $\mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que dim $\mathbb{R}^2 = 2$, dim $\mathbb{R}^3 = 3, \ldots,$ dim $\mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 5.5.8
Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2y\}$.
Um vetor genérico de S pode ser escrito como

$$(x, y, 2y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 2)$$

Logo, $S =< (1, 0, 0), (0, 1, 2) >$.
Verifiquemos se os vetores são linearmente independentes:

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,2) = (0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_2) = (0,0,0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Podemos concluir, assim, que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ além de gerarem S, são vetores linearmente independentes pelo que formam um base de S.

dim S =2 (porque obtivemos uma base do subespaço e verificámos que é composta por dois vetores).

Teorema 5.5.9
Seja E um espaço linear de dimensão n. Então:
(i) Qualquer conjunto de vetores linearmente independentes de E é um subconjunto de uma certa base de E;

(ii) Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes de E é uma base para E;

(iii) Qualquer conjunto finito de geradores de E contém uma base de E;

(iv) Qualquer conjunto de geradores de E com n elementos é uma base de E.

Corolário 5.5.10
Seja E um espaço linear de dimensão n e $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ um conjunto de vetores de E. Então:

1. *Se $p > n$, os vetores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ são linearmente dependentes;*

2. *Se $p < n$, o conjunto $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ não gera E;*

3. *Se $p = n$, são equivalentes:*

   (a) *O conjunto $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ gera E;*

   (b) *O conjunto $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ é linearmente independente;*

   (c) *O conjunto $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}\}$ é uma base de E.*

Exemplo 5.5.11
Recorrendo ao corolário anterior podemos concluir que

1. Em $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2), (-1,0), (1,1)\}$ são linearmente dependentes (uma vez que $n = 2$ e $p = 3$);

2. $\{(1,0,1), (0,2,0)\}$ não gera $\mathbb{R}^3$ (uma vez que $p = 2$ e $n = 3$);

3. Para provar que $\{(1,1), (-1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ (já provado) seria suficiente provar que o conjunto é linearmente independente ou que gera $\mathbb{R}^2$ (uma vez que $n = 2, p = 2$).

6 Transformações Lineares

6.1 Definição

Definição 6.1.1
Sejam E e F espaços lineares. Damos o nome de *transformação linear* a uma aplicação $T : E \to F$ que verifique as condições:
(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in E$;
(ii) $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$, $\forall\, \vec{u} \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.1.2
Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2z, x + y)$.
(i) Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
T\left(\vec{u} + \vec{v}\right) &= T\left((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)\right) \\
&= (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\
T\left(\vec{u}\right) + T\left(\vec{v}\right) &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= (2z_1, x_1 + y_1) + (2z_2, x_2 + y_2) \\
&= (2z_1 + 2z_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) \\
&= (2(z_1 + z_2), x_1 + y_1 + x_2 + y_2)
\end{aligned}$$

Logo, $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

(ii) Sejam $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T\left(\lambda\vec{u}\right) &= T\left((\lambda x, \lambda y, \lambda z)\right) \\
&= (2\lambda z, \lambda x + \lambda y) \\
\lambda T(\vec{u}) &= \lambda T(x, y) \\
&= \lambda(2z, x + y) \\
&= (2\lambda z, \lambda x + \lambda y)
\end{aligned}$$

Logo, $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$.
Conclusão: T é uma transformação linear.

Definição 6.1.3
Uma transformação linear $T : E \to F$ diz-se um *homomorfismo*.
Em particular:

- Se T é injetiva, diz-se um *monomorfismo*;
- Se T é sobrejetiva, diz-se um *epimorfismo*;
- Se T é bijetiva, diz-se um *isomorfismo*.

Teorema 6.1.4
Seja E um espaço linear e $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ uma base de E. Seja F um espaço linear e $\{\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_n}\} \in F$.
Então, existe uma única transformação linear $T : E \to F$ tal que

$$T(\vec{v_i}) = w_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 6.1.5
Consideremos uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e a base $\{(1, 1), (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned}
T(1, 1) &= (1, -1, 2) \\
T(1, 2) &= (0, 1, 3).
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema anterior, existe uma única transformação linear nestas condições. Determinemos a expressão geral de $T(x, y)$.

Em primeiro lugar, escrevemos (x, y) como combinação linear dos vectores da base dados.

$$\begin{aligned} (x, y) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2x - y \\ \lambda_2 = y - x \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $(x, y) = (2x - y)(1, 1) + (y - x)(1, 2)$.

Calculemos, então, $T(x, y)$.

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left((2x-y)(1,1) + (y-x)(1,2)\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ é linear}(i)}}{=} T\left((2x-y)(1,1)\right) + T\left((y-x)(1,2)\right) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ é linear}(ii)}}{=} (2x-y)T(1,1) + (y-x)T(1,2) \\ &= (2x-y)(1,-1,2) + (y-x)(0,1,3) \\ &= (2x-y, y-2x, 4x-2y) + (0, y-x, 3y-3x) \\ &= (2x-y, 2y-3x, x+y) \end{aligned}$$

6.2 Núcleo e Imagem

Definição 6.2.1

Sejam E e F espaços lineares e $T : E \to F$ uma transformação linear.

Ao subconjunto de E

$$Nuc(T) = \left\{\vec{u} \in E : \; T(\vec{u}) = \vec{0_F}\right\}$$

chamamos *núcleo* de T.

(i) Ao subconjunto de F

$$Im(T) = \{\vec{v} \in F : \; \exists\, \vec{u} \in E \text{ tal que } \vec{v} = T(\vec{u})\}$$

chamamos *imagem* de T.

Exemplo 6.2.2
Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2z, x + y)$.

$$Nuc(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ T(x, y, z) = (0, 0)\right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$T(x,y,z) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ (2z, x+y) = (0,0) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Logo,

$$Nuc(T) = \{(x, -x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 6.2.3
Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$.

$$Im(T) = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(x, y) = (a, b)\right\}$$

Cálculo auxiliar:

$$T(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (3x - y, -3x + y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = a \\ -3x + y = b \end{cases}$$

Matricialmente,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & a \\ -3 & 1 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & a \\ 0 & 0 & a+b \end{array}\right]$$

Ora, este sistema só é possível se $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ (para que a característica da matriz ampliada seja igual à característica da matriz dos coeficientes do sistema).
Assim,

$$Im(T) = \{(a, -a) : \ a \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 6.2.4
Dada uma transformação linear $T: E \to F$, chamamos

(i) *Nulidade* de T à dimensão do núcleo de T;

(ii) *Característica* de T à dimensão da imagem de T.

Teorema 6.2.5 (Teorema da dimensão)
Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então

$$dimNuc(T) + dimIm(T) = dim(E).$$

Exemplo 6.2.6
Consideremos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (2z, x + y)$, do exemplo 6.1.2.
Tínhamos visto que $Nuc(T) = \{(x, -x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}$. Um elemento arbitrário de $Nuc(T)$ pode ser escrito como

$$(x, -x, 0) = x(1, -1, 0),$$

pelo que $Nuc(T) =< (1, -1, 0) >$. Como se trata de um único vector, é linearmente independente. Logo $\{(1, -1, 0)\}$ é uma base de $Nuc(T)$ e a nulidade é 1.

Recorrendo ao Teorema da dimensão,

$$\dim\ Nuc(T) + \dim\ Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow 1 + \dim\ Im(T) = 3 \Leftrightarrow \dim\ Im(T) = 2.$$

Logo, a característica de T é 2.

Proposição 6.2.7
Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então,
(i) T é injetiva (ou monomorfismo) se, e só se, $Nuc(T) = \left\{\vec{0}_E\right\}$;
(ii) T é sobrejetiva (ou epimorfismo) se, e só se, $Im(T) = F$.

7 Valores e vetores próprios

7.1 Definição e cálculo

Definição 7.1.1
Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. Dizemos que $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, não nulo, é *vetor próprio* de A se existe um escalar λ, real ou complexo, tal que

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

O escalar λ diz-se o *valor próprio* associado ao vetor próprio $\vec{u}$.

Exemplo 7.1.2
Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.
O vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A porque

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{u}$$

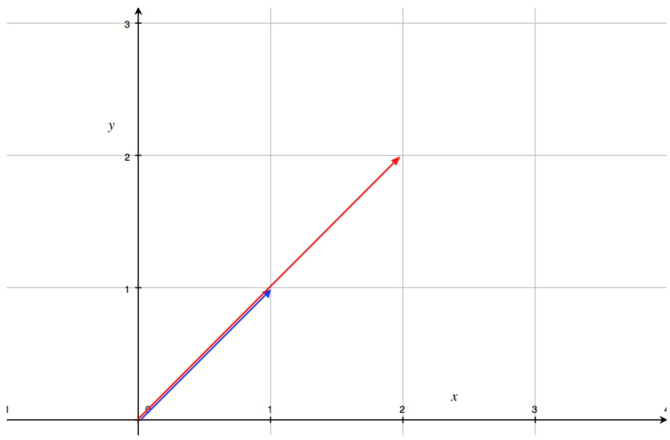
Concluímos ainda que 2 é o valor próprio associado ao vetor próprio $\vec{u}$

Geometricamente, os vetores próprios $\vec{u}$ são vetores especiais cuja direção **não é** alterada pela multiplicação $A\vec{u}$ e o sentido e comprimento de $A\vec{u}$ depende do valor de λ.

Exemplo 7.1.3
Para A e $\vec{u}$ do exemplo anterior, vimos que 2 era o valor próprio de A asso-

ciado ao vetor próprio u.

Na figura que se segue estão representados $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (a azul) e $A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (a vermelho). Verificamos que os vetores têm a mesma direção e que $A\vec{u}$ tem o dobro do comprimento de $\vec{u}$.



No exemplo 7.1.2 constatámos que um determinado vetor $\vec{u}$ que era dado é vetor próprio da matriz A, com um valor próprio 2 associado. Mas como podemos calcular os valores e vetores próprios de uma matriz?

Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ são tais que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, tem-se

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0},$$

ou seja, $\vec{u}$ é solução do sistema de equações lineares $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$, sistema que tem solução não nula se, e só se, for possível e indeterminado o que acontece se, e só se, $|A - \lambda I_n| = 0$.

Concluímos que os valores próprios de A são os escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $|A - \lambda I_n| = 0$ e os vetores próprios são as soluções não nulas $\vec{u}$ do sistema $(A - \lambda I_n)\vec{u} = 0$.

Obs. *Os valores próprios de uma matriz podem ser valores complexos (em $\mathbb{C}$) mesmo que a matriz só contenha elementos reais (em $\mathbb{R}$). No entanto, nos exemplos práticos que vão surgir no contexto desta unidade curricular, não irão aparecer valores próprios complexos.*

Definição 7.1.4
Ao polinómio de grau n,

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_n|,$$

chamamos *polinómio característico de* A.

Obs. *Sendo um polinómio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas. Logo, uma matriz de ordem n tem, no máximo, n valores próprios.*

7.1.1 Cálculo dos valores e vetores próprios

1. Obter o polinómio característico, $p(\lambda) = |A - \lambda I_n|$;

2. Calcular as raízes de $p(\lambda)$, isto é, as soluções de $p(\lambda) = 0$ que são os valores próprios de A;

3. Para cada λ encontrado no passo anterior, obter a solução $\vec{u}$ do sistema $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$, para encontrar os vetores próprios $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ associados àquele valor próprio.

Exemplo 7.1.5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. $p(\lambda) = |A - \lambda I_2| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$

2. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$

A matriz A tem dois valores próprios: -1 e 1.

3. Calculemos os vetores próprios $\vec{u} = (x, y)$ associados a -1:

$$\begin{aligned}
(A - (-1)I_2)\vec{u} = \vec{0} &\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ y=-x \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto dos vetores próprios de A associados ao valor próprio -1 é:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ y = -x\right\} = \{(x, -x) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Para o valor próprio 1 proceder-se-ia de forma análoga (deixamos ao cuidado do leitor) e o conjunto de vetores próprios associados a este valor próprio é

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ y = x\right\} = \{(x, x) : \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

7.2 Propriedades

Proposição 7.2.1

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n, e $\lambda \in \mathbb{R}$ um seu valor próprio. Então, o conjunto dos vetores próprios associados a λ forma um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 7.2.2

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n. Então, se $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ forem vetores próprios de A associados a valores próprios distintos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tem-se que $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ são linearmente independentes.

Proposição 7.2.3
Os valores próprios de uma matriz triangular superior são os elementos da diagonal principal.

Exemplo 7.2.4
Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Pela proposição anterior, sabemos que 1, 2 e 3 são os valores próprios desta matriz.
Se quisermos confirmar, temos de os calcular:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_3| \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Logo, pela Lei do Anulamento do Produto,

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \vee 2-\lambda = 0 \vee 3-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = 3.$$

Com este exemplo dá para perceber que a demonstração da proposição anterior é muito simples: é consequência direta do determinante de uma matriz triangular superior ser o produto dos elementos da diagonal principal.

Proposição 7.2.5
Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Então, $|A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n$.

8 Produto interno, externo e misto

8.1 Produto interno

Definição 8.1.1
Em $\mathbb{R}^2$, o *produto interno canónico* entre dois vetores

$$\vec{u} = (u_1, u_2),\ \vec{v} = (v_1, v_2)$$

representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\vec{u}|\vec{v}$ [1]e é definido por

$$\vec{u}|\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Em $\mathbb{R}^3$, o *produto interno canónico* entre dois vetores

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

é definido por

$$\vec{u}|\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo 8.1.2
Se $\vec{u} = (1, -2)$ e $\vec{v} = (2, 3)$,

$$\vec{u}|\vec{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 3 = -4.$$

Definição 8.1.3
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) e $\lambda \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes

[1]Vamos utilizar de agora em diante esta última representação

propriedades:

(i) $\vec{u}|\vec{v} = \vec{v}|\vec{u}$;

(ii) $\vec{u}|(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}|\vec{v} + \vec{u}|\vec{w}$;

(iii) $(\lambda\vec{u})|\vec{v} = \lambda(\vec{u}|\vec{v})$;

(iv) $\vec{u}|\vec{u} \geq 0$ e $\vec{u}|\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Definição 8.1.4

Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$), define-se a *norma euclideana* de $\vec{u}$ e representa-se por $\|\vec{u}\|$ como sendo o escalar $\sqrt{\vec{u}|\vec{u}}$. A norma euclideana corresponde ao comprimento do vetor.

Um vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) tal que $\|\vec{u}\| = 1$ diz-se um vetor *unitário*.

Proposição 8.1.5

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$) e $\lambda \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

(i) $\|\vec{u}\| \geq 0$;

(ii) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$;

(iii) $|\vec{u}|\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$;

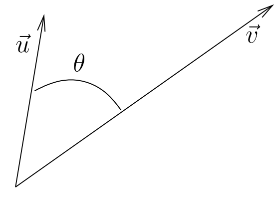
(iv) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Definição 8.1.6

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) não nulos.

O ângulo $\theta \in [0,\pi]$ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é tal que

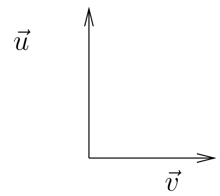
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}|\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$



Exemplo 8.1.7
Sendo $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$, tem-se

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}|\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Definição 8.1.8
Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$).
Diz-se que $\vec{u}$ é *ortogonal* a $\vec{v}$, e escreve-se $\vec{u} \perp \vec{v}$, se $\vec{u}|\vec{v} = 0$.



8.2 Produto externo

Definição 8.2.1
Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.
Define-se o *produto externo* de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ e representa-se por $\vec{u} \times \vec{v}$ como sendo o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

onde $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ são os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Trata-se de um "determinante simbólico" que pode ser calculado recorrendo ao Teorema de Laplace aplicado à primeira linha.

Exemplo 8.2.2

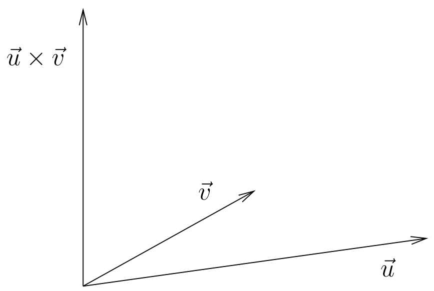
Sendo $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, -1)$, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{e_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{e_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{e_1} + \vec{e_2} - 3\vec{e_3} = -1(1, 0, 0) + (0, 1, 0) - 3(0, 0, 1) = (-1, 1, -3)$$

Proposição 8.2.3

O produto externo entre dois vetores é um vetor ortogonal a ambos.



Proposição 8.2.4

Para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

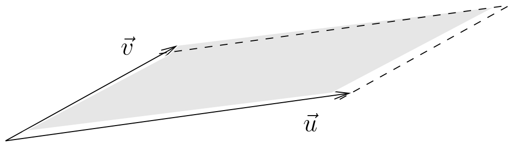
(i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;

(ii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

(iii) $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$;

(iv) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ *se, e só se,* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são linearmente dependentes.*

Proposição 8.2.5
Sejam $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ vetores linearmente independentes.
A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada por $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.



Exemplo 8.2.6
A área do paralelogramo determinado por $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (3, 0, -1)$ é dada por

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(-1, 1, -3)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}.$$

8.3 Produto misto

Definição 8.3.1
Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, chama-se *produto misto* de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ e por $\vec{w}$ ao escalar $\vec{u}|\vec{v} \times \vec{w}$, onde

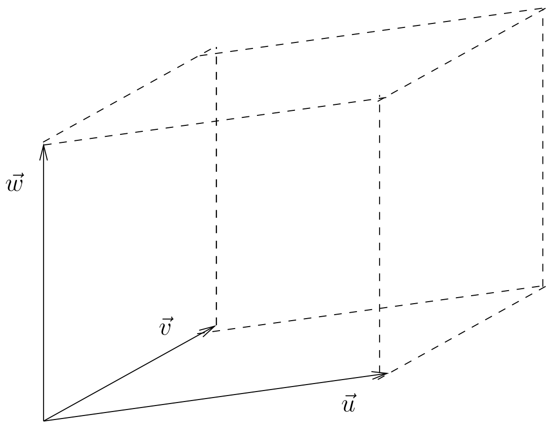
$$\vec{u}|\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Proposição 8.3.2
São válidas as seguintes propriedades:
(i) O produto misto muda de sinal quando se troca a posição de dois vetores;
(ii) $\vec{u}|\vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}|\vec{w}$;
(iii) $\vec{u}|\vec{v} \times \vec{w} = 0$ se, e só se, $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes.

Proposição 8.3.3
Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ linearmente independentes.
O volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado pelo módulo

do seu produto misto, ou seja,

$$\textit{Volume}=|\vec{u}|\vec{v}\times\vec{w}|$$



Exemplo 8.3.4

Sendo $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(-2,1,3)$ e $\vec{w}=(0,0,-2)$.

$$\vec{u}|\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&1&3\\0&0&-2\end{vmatrix}=-2$$

Logo, o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ é

$$\text{Volume}=|\vec{u}|\vec{v}\times\vec{w}|=|-2|=2.$$

Proposição 8.3.5

Os vetores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ são complanares[2] *se, e só se, o seu produto misto é zero.*

[2]Significa que pertencem ao mesmo plano.

8.4 Resumo de algumas aplicações do produto interno, externo e misto

- O produto interno permite verificar se dois vetores são ortogonais (perpendiculares);
- A norma de um vetor permite calcular o seu comprimento;
- O ângulo $\theta \in [0, \pi[$ entre dois vetores é dado através de
$$\cos\theta = \frac{\vec{u}|\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|};$$
- O produto externo entre dois vetores de $\mathbb{R}^3$ permite obter um vetor ortogonal a ambos;
- A área do paralelogramo definido por dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ é dada por $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$;
- O volume do paralelepípedo definido por vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ é dado por $|\vec{u}|\vec{v} \times \vec{w}|$

Bibliografia

[1] F. R. Agudo. *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica.* Escolar Editora, 1996.

[2] D. Lay. *Linear Algebra and its Applications.* "Addison-Wesley", 2012.

[3] L. T. Magalhães. *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada.* Texto Editora, 1998.

[4] A. Monteiro. *Matrizes.* "Verlag Dashöfer", 2011.

[5] A. Monteiro. *Álgebra Linear - Espaços Vectoriais e Transformações Lineares.* "Verlag Dashöfer", 2011.