# 2 SUCESSÕES

**2.1.** Indique quais são majoradas, minoradas e limitadas, de entre as sucessões cujos termos de ordem $n$ são:

*a)* $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$; *b)* $(-1)^n n^3$; *c)* $\dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$; *d)* $n^{(-1)^n}$; *e)* $\dfrac{(-1)^n n}{3n+1}$.

**2.2.** Prove, usando a definição, que:

*a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n} = 0$; *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$;

*d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+10}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$; *e)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$; *f)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{sen(n\alpha)}{n} = 0$;

*g)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; *h)* $\lim\limits_{n\to+\infty} (5-2n) = -\infty$; *i)* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n = \infty$.

**2.3.** Prove que toda a sucessão convergente é limitada.

**2.4.** Prove que se $(x_n)_n$ converge para $a$ e $(y_n)_n$ converge para $b$, então:

*a)* $x_n + y_n \to a+b$, quando $n \to +\infty$;

*b)* $x_n y_n \to ab$, quando $n \to +\infty$;

*c)* $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$, quando $n \to +\infty$, se $b \neq 0$ e $y_n$ não se anula.

**2.5.** Prove que :

*a)* Se $(x_n)_n$ tende para $+\infty$, $(-\infty)$ e $(y_n)$ é limitada, então $(x_n + y_n)_n$ tende para $+\infty$, ($-\infty$, respectivamente);

*b)* Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tendem ambas para $+\infty\,(-\infty)$, então $(x_n + y_n)_n$ tende para $+\infty$ ($-\infty$ respectivamente);

*c)* Se $(x_n)_n$ tende para $\infty$, então $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_n$, que está definida para $n$ suficientemente elevado, tende para 0;

*d)* Se $(x_n)_n$ tende para 0 e $x_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, então $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_n$ tende para $\infty$.

**2.6.** Estude o comportamento, quando $n \to +\infty$, das seguintes sucessões:

*a)* $x_n = \dfrac{3-5n^3+2n}{7n^3-1}$; *b)* $x_n = \dfrac{3n^4-5n^2-7}{n^3+n^2-1}$; *c)* $x_n = \dfrac{2n-5n^2}{7-2n^3}$;

*d)* $x_n = 10 + \dfrac{(-1)^n}{n}$; *e)* $x_n = \dfrac{10}{n} + (-1)^n$; *f)* $x_n = 10 + (-1)^n n$;

*g)* $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; *h)* $x_n = \dfrac{4^n+8^n}{5^n+1}$; *i)* $x_n = \dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$;

*j)* $x_n = \cos^2 n \; sen\dfrac{1}{n}$; *k)* $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$; *l)* $x_n = \sqrt{n(n+1)} - 2n$;

*m)* $x_n = \cos\dfrac{\pi}{n} sen\dfrac{\pi}{n}$; *n)* $x_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$; *o)* $x_n = \left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n$.

**2.7.** Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{x_n}$, sendo:

*a)* $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$;

*b)* $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$.

**2.8.** Considere a sucessão definida por

$$x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}.$$

*a)* Calcule os termos $x_1$, $x_2$ e $x_3$;

*b)* Mostre que $x_n \to 0$. (Sugestão: use o teorema das sucessões enquadradas.)

**2.9.** Prove que se $(x_n)_n$ tende para 0 e $|y_n| < |x_n|$ depois de alguma ordem, então também $(y_n)_n$ tende para 0.

**2.10.** Prove que a sucessão $(x_n)_n$ converge para $a$ se e só se $(x_n - a)_n$ tende para 0.

**2.11.** Considere a sucessão $u_n = 1 + (-1)^n$. Verifique que a propriedade recíproca de "Toda a sucessão convergente é limitada" não é verdadeira.

**2.12.** Considere a sucessão de termo geral $w_n = u_n v_n$, onde $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada e $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Prove que $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$.

**2.13.** Diga, justificando a resposta, se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{n^2+1} sen n$ é convergente.

**2.14.** Considerem-se as sucessões de termo geral

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}.$$

*a*) Calcule $\lim_{n\to+\infty} x_n$;

*b*) Sabendo que $y_n < 3 - \dfrac{1}{n!}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, justifique que $(x_n + y_n)$ é convergente.

**2.15.** Utilize o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite das seguintes sucessões, cujo termo de ordem $n$ é dado por:

*a*) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$;

*b*) $y_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

**2.16.** Prove que:

*a*) Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, então $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = b$ (isto é, se uma sucessão converge para $b$, então a média aritmética dos seus $n$ primeiros termos converge também para b);

*b*) Se $x_n > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, então $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = b$ (isto é, se uma sucessão converge para $b$, então a média geométrica dos seus $n$ primeiros termos converge também para b);

*c)* Se $x_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = b$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = b$.

**2.17.** Estude o comportamento, quando $n \to +\infty$, das sucessões seguintes:

*a)* $x_n = \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^n$; *b)* $x_n = \left(\dfrac{4n-3}{4n+1}\right)^n + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$; *c)* $x_n = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{-2n}$;

*d)* $x_n = \left(\dfrac{3n-2}{2n+5}\right)^{n-1}$; *e)* $x_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{27} + \cdots + \dfrac{2}{3^{n+1}}$; *f)* $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$;

*g)* $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3-1}{4n^3+2}}$; *h)* $x_n = \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$; *i)* $x_n = \sqrt[n]{\ln n}$.

**2.18.** Estude a monotonia das sucessões cujo termo geral se indica a seguir.

*a)* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$; *b)* $x_n = 1 - \dfrac{n+1}{2n}$; *c)* $x_n = n^{(-1)^n}$;

*d)* $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$; *e)* $x_n = \dfrac{2+2(-1)^n}{2n}$; *f)* $x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{3}$.

**2.19.** Estude a natureza das seguintes sucessões e diga se são ou não limitadas. Calcule, caso existam, o limite superior e inferior.

*a)* $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right) + sen\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

*b)* $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$;

*c)* $x_n = 10 + (-1)^n n$;

*d)* $x_n = n^{(-1)^n}$.

**2.20.** Dê exemplos de sucessões cujo conjunto dos sublimites seja o conjunto:

*a)* $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$; *b)* $\{2, 3\}$.

**2.21.** Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2}. \end{cases}$$

*a*) Mostre, por indução, que $x_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

*b*) Mostre que $(x_n)_n$ é uma sucessão crescente.

*c*) Mostre que $(x_n)_n$ é convergente e calcule o seu limite.

**2.22.** Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n+1}. \end{cases}$$

*a*) Encontre um minorante para o conjunto dos termos.

*b*) Mostre que $(x_n)_n$ é decrescente.

*c*) Mostre que $(x_n)_n$ é convergente.

*d*) Calcule o limite da sucessão $(x_n)_n$

**2.23.** Considere a sucessão cujos termos são $\sqrt{3}$, $\sqrt{3+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$, ....

*a*) Mostre que é crescente.

*b*) Mostre que é limitada superiormente.

*c*) Mostre que é convergente e determine o limite.

**2.24.** Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

*a*) A sucessão $(u_n)_n$, cujo termo geral é definido por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1} & \text{se } n \leq 10, \\ 3 & \text{se } n > 10, \end{cases} \qquad \text{é divergente.}$$

*b*) A sucessão $(v_n)_n$, cujo termo geral é definido por:

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n-1} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases} \qquad \text{é divergente.}$$

*c*) Se $(x_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(x_n)_n$ é convergente.

*d*) Uma sucessão decrescente de termos positivos tende para zero.