UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame 6 de Janeiro de 2014

Tempo: 2h 15 m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

(3) **1.** Considere a sucessão

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

a) Calcule $u_3 - u_2$.

b) Clasifique u_n quanto à monotonia.

c) Prove, utilizando o estudo efectuado sobre Séries Numéricas, que a sucessão u_n é convergente.

d) Justifique que u_n é sucessão limitada, indicando um minorante e um majorante.

(2) **2.** Estude a natureza das séries numéricas

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-2}{n}\right)^n$.

(1) **3.** Considere a adição de infinitas parcelas alternando entre 1 e -1, isto é

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Justificando com detalhe a resposta, o que pode dizer sobre o valor da sua soma?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** Nenhuma das anteriores.

Nota: A indicação da resposta sem justificação não será considerada.

Grupo II

(4) **4.**Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log x, & x > 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{2}, & x \leq 0. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade e a derivabilidade de f em $x = 0$.

b) Defina a função f'.

c) Indique os intervalos de monotonia e os extremos de f.

d) Mostre que existem $a > 0$ e $c \in]0, a[$ tal que

$$f'(c) = a^2 \log a.$$

(3) **5.**Calcule os seguintes limites (caso existam):

a) $\lim_{x \to 1^+} \left[(x-1)\log(x^2-1)\right]$; **b)** $\lim_{x \to 0^+} \left[(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}\right]$.

Grupo III

(3) **6.** Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\, dx$; **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x+2)}\, dx$.

(1) **7.** Classifique os pontos críticos da função:

$$f(x) = \int_0^{x^2} (2t^2 - 1)\, dt.$$

(1) **8.** Calcule a área da região limitada pelas equações: $x^2 = y - 1$ e $2x = -5y + 5$.

(2) **9.** Estude a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}\, dx.$$

Ex_06-01-2014

1. **Considere a sucessão:**

$$\boldsymbol{u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

   a. **Calcule $\boldsymbol{u_3 - u_2}$**

$$u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\therefore u_3 - u_2 = \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{5}{4} = \frac{1}{9}.$$

   b. **Classifique $\boldsymbol{u_n}$ quanto à monotonia.**

Parece que a sucessão é crescente … $u_n \leq u_{n+1}$???

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Então é verdade que $u_n \leq u_{n+1}$, assim a sucessão é monótona crescente.

   c. **Prove que $\boldsymbol{u_n}$ é convergente.**

A sucessão será convergente se o seu limite quando n tende a + infinito existir.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Esta é uma série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$ que é convergente. Assim a sucessão também é convergente pois o limite existe, é um número real.

   d. **Justifique que $\boldsymbol{u_n}$ é limitada.**

Como a sucessão é crescente, todos os termos são superiores ao primeiro (um minorante).

Por ser convergente e crescente, todos os termos são inferiores ao seu limite, digamos L.

$$1 = u_1 \leq u_n \leq L$$

2. Estude a natureza das séries numéricas:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

Vou comparar com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n-1}}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2}n^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ e $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1/2$, logo divergente, a série em causa também é **divergente**.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-2}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{n}\right)^n$

É uma série alternada. Em primeiro lugar vou testar a convergência absoluta (série dos módulos).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{2}{n}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$$

Para ver a natureza desta série de termos positivos vou aplicar o Critério da Raiz.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1.$$

Assim, pelo critério da raiz a série é convergente. Como estou a analisar a convergência absoluta, a série é **absolutamente convergente**.

3. Considere a adição infinita $1-1+1-1+1-1+\cdots$. Qual o valor da sua soma?

Trata-se da série $\sum(-1)^n$. Se analisar o termo geral obtenho …

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Como o termo geral não tende para 0, a série é divergente, isto é, não é possível calcular a sua soma.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log x, & x > 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{2}, & x \le 0 \end{cases}.$$

a. Estude a continuidade e a diferenciabilidade em $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 \log x = 0\times\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ R. Cauchy} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0$$

Como os limites laterais são iguais e igualam também $f(0)$, a função é contínua em $x = 0$.

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{2} - 0}{x} = \frac{0}{0} \text{ R. Cauchy} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 \log x - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^2 \log x = 0\times\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ R. Cauchy}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0.$$

Como as derivadas laterais são diferentes, a função não é diferenciável em $x = 0$.

b. Defina a função f'.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \log x + x^2, & x > 0 \\ \frac{e^x}{2}, & x < 0 \end{cases}.$$

c. Indique os intervalos de monotonia e os extremos de f.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3\log x + 1) = 0 & ,x > 0 \\ \frac{e^x}{2} = 0 & ,x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \log x = -1/3 & ,x > 0 \\ \text{impossível} & ,x < 0 \end{cases}$$

$$x = e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$	$+\infty$
f'	$+$	ss	$-$	0	$+$
f	cresce	Máx	decresce	Min	cresce

A função cresce em $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, +\infty[$;

A função decresce em $]0, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}[$

A função tem como máximo $f(0) = 0$ e tem como mínimo $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \frac{-1}{3e}$.

d. Mostre que existem $a > 0$ e $c \in]0, a[$ tais que

$$\boldsymbol{f'(c) = a^2 \log a.}$$

Como a função é contínua em $[0, a]$ e diferenciável em $]0, a[$, posso aplicar o Teorema de Lagrange à função f.

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a^3 \log a - 0}{a} = a^2 \log a.$$

5. Calcule os seguintes limites:

a. $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(x^2-1) = 0\times\infty = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x^2-1)}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\infty}{\infty}\ \text{R. Cauchy} =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x(x-1)^2}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x(x-1)^2}{-(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x(x-1)}{-(x+1)} = 0.$$

b. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan x} = 0^0$ indeterminação

Este limite dá uma indeterminação do tipo 0^0 e é necessário aplicar o exponencial do logaritmo. Assim transforma-se a indeterminação em $\frac{\infty}{\infty}$ e aplica-se a Regra de Cauchy.

CA:

$$(\tan x)^{\tan x} = e^{\log[(\tan x)^{\tan x}]} = e^{\frac{\log(\tan x)}{\frac{1}{\tan x}}} = e^{\frac{\log(\tan x)}{\operatorname{cotg} x}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\tan x)}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\infty}{\infty}\text{Regra Cauchy} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

Assim o limite pretendido é $e^0 = 1$.

6. Calcule os seguintes integrais:

a. $\displaystyle \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

Para encontrar uma primitiva vou utilizar a substituição $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ t = \operatorname{arcsen} x \\ dx = \cos t\, dt \end{cases}$.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}}{\operatorname{sen}^2 t}\cos t\, dt = \int \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt = \int \frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} - 1dt = -\operatorname{cotg} t - t = -\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x) - \operatorname{arcsen} x$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left[-\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x) - \operatorname{arcsen} x\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} =$$

$$= -\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} 1) - \operatorname{arcsen} 1 - \left(-\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -0 - \frac{\pi}{2} - \left(-1 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x+2)}dx$

Vou utilizar a primitivação de funções racionais ...

$$\frac{1x^2+1x+1}{(x^2+2x+1)(x+2)} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)(x+1) + B(x+2) + C(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{x^2(A+C) + x(3A+B+2C) + 2A+2B+C}{(x+1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B+2C=1 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=1 \\ C=3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x+2)}dx = \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}dx =$$

$$= -2\int \frac{1}{x+1}dx + \int (x+1)^{-2}dx + 3\int \frac{1}{x+2}dx = -2\log(x+1) - \frac{1}{x+1} + 3\log(x+2)$$

$$\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x+2)}dx = \left[-2\log(x+1) - \frac{1}{x+1} + 3\log(x+2)\right]_0^1 =$$

$$= -5\log 2 + \frac{1}{2} + 3\log 3.$$

7. Classifique os pontos críticos da função:

$$f(x) = \int_0^{x^2} 2t^2 - 1dt$$

Para determinar f' é necessário aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

$$f'(x) = (x^2)' \times \left(2x^{2^2} - 1\right) - 0' \times (2.0^2 - 1) = 2x(2x^4 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow \ x = 0 \lor x^4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ x = 0 \lor x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	decresce	mínimo	cresce	máximo	decresce	mínimo	cresce

A função tem um máximo em $x = 0$. O máximo é $f(0) = 0$.

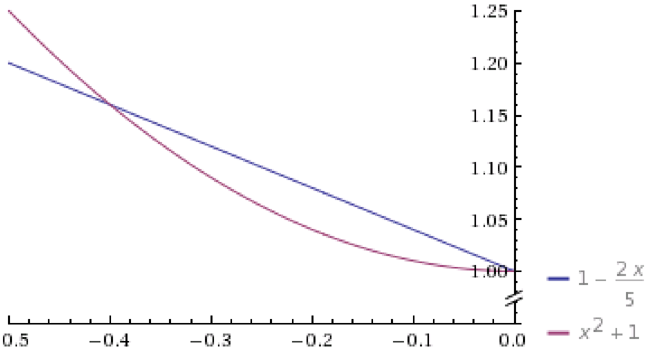
A função tem um mínimo em $x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. O mínimo é $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

8. Calcule a área da região limitada pelas equações $x^2 = y - 1, 2x = -5y + 5$

A primeira equação é uma parábola $y = x^2 + 1$.

A segunda é uma reta $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

As equações intersectam-se em $x = 0 \ e \ x = \frac{-2}{5}$



$$\text{Área} = \int_{\frac{-2}{5}}^{0} \frac{-2}{5}x + 1 - (x^2 + 1)dx = \left[\frac{-x^2}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{-2}{5}}^{0} = \frac{4}{375}.$$

9. Estude a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x} \ \mathbf{arctg} \ \boldsymbol{x}}{\sqrt[3]{\mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\mathbf{3}}} \boldsymbol{dx}.$$

Posso utilizar um critério que diz que o integral anterior tem a mesma natureza que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{1 + n + n^3}}$$

Vou calcular o limite do seu termo geral …

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{1 + n + n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$$

Como o termo geral da série não tende para zero, posso afirmar que a série diverge … assim o integral também diverge.