Universidade de Évora

Departamento de Matemática

2.ª Frequência de Análise Matemática I - 26 de novembro de 2016

Observações: Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as suas respostas. Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas. Numere todas folhas de teste que entregar: por exemplo, se entregar 3 folhas de teste, devem numerá-las como 1/3, 2/3 e 3/3.

Grupo I

1. Considere $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{arcsen\ x}{x} - 5.$$

a) Determine o domíno de f.

b) Estude a função f quanto à continuidade.

c) Calcule $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\lim_{x \to 0} f(x)$, caso o limite exista.

d) Diga, justificando devidamente a sua resposta, se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$. Em caso afirmativo, apresente a função prolongamento.

Grupo II

2. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3} & \text{se } x < 1, \\ \\ ae^{\frac{x-1}{2}} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Diga, justificando, para que valores de a a função f é diferenciável em $x = 1$.

$b)$ Determine a função derivada de f.

$c)$ Estude a função f quanto à monotonia.

$d)$ Indique a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = e^x - x - 2$. Mostre que a função f tem, exactamente, duas raízes em $\mathbb{R}$.

Grupo III

4. Calcule, caso existam, os seguintes limites (quando for conviniente use a Regra de Cauchy, justificando adequadamente):

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg(x) - 1}{sen(x) - \cos(x)}$; $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{sen(x)}{\ln(1+x)}$; $c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{2\sqrt{x} - x - 1}$

5. Demostre, utilizando o Teorema de Lagrange, a seguinte desigualdade

$$\frac{x}{1+x^2} \leq arctg(x), \quad \text{para todo o } x \geq 0.$$

Grupo IV

6. Estude, quanto à sua natureza, as seguintes séries numéricas:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n+2} - 1}{e^n + 5}$; $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$;

Bom Trabalho!!