Análise Matemática II (2012/2013)

1^a Frequência 09/04/2013 **Duração:** 2h

Nome:

Número: **Curso:**

Resolva cada parte numa folha de teste diferente.

Parte I

1. Considere a função $f = (f_1, f_2)$ de domínio D tal que

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \sqrt{1-x^2-y^2}, \\ f_2(x,y) &= \ln\left|y-x^2\right| \end{aligned}$$

   (a) Determine e esboce D.

   (b) Determine o conjunto dos pontos interiores e a fronteira de D e indique justificando se D é aberto, fechado, limitado.

2. Considere a função $f(x,y) = \frac{2x^2-y^3}{x^3+3y^2}$.

   (a) Calcule ou mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   (b) Diga justificando se f é prolongável por continuidade à origem. Em caso afirmativo, escreva a sua função prolongamento $\widetilde{f}$.

Parte II

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.

   (b) Calcule, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) Mostre que f não é diferenciável na origem.

4. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \sin(x^2-y) + e^{yz}$.

   (a) Calcule a derivada de f segundo o vector $(1,2,3)$ no ponto $(-1,1,0)$.

(b) Calcule o gradiente de $f \circ g$ no ponto $(1,1)$ onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $g(1,1) = (-1,1,0)$ e é diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz Jacobiana

$$\operatorname{Jac} g(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parte III

5. Considere a equação

$$x^3y^2 + x^3 + z^3 - z = 1.$$

(a) Justifique que na vizinhança do ponto $(1,0,1)$ a equação dada define implicitamente z como função f de x e y.

(b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $(1,0)$.

(c) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,0,1)$.

6. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

7. Determine o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = x^2y$ no conjunto

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\right\}.$$

BOM TRABALHO!