

Universidade de Évora
ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exame

2011/12

9/1/12

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões. Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu. Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Considerando as sucessões seguintes, justifique que existe limite, e calcule-o, ou mostre que não existe:

$$a) x_n = \sqrt[4]{9n^4 + 6n^2 + 1} - \sqrt{3n^2 + n}; \quad b) y_n = \frac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 2}.$$

2. Considere a sucessão real u_n definida por:

$$\begin{cases} u_1 &= 1; \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n}{1 + 2u_n}, \quad n > 1. \end{cases}$$

- a) Mostre que, $u_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
b) Prove que u_n é decrescente;
c) Justifique que u_n é convergente e calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Usando os critérios de convergência adequados, estude a natureza das séries seguintes. Indique os critérios que utilizou e justifique bem cada resposta.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}.$$

II

4. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \operatorname{tg}(ax), & \text{para } x \neq 0 \\ a^2, & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Calcule $a > 0$ de forma que f seja contínua na origem.

5. Mostre que a equação :

$$e^x + x = 0,$$

tem uma única solução em \mathbb{R} .

(Sugestão: use a diferenciabilidade para demonstrar a unicidade de solução).

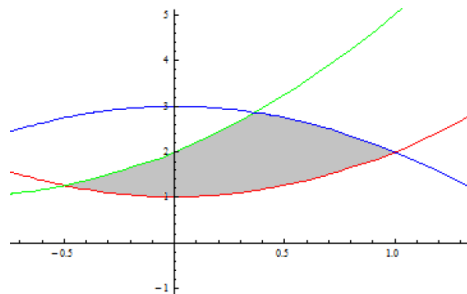
6. Determine o domínio, os intervalos de monotonia e os extremos (caso existam) da função $f(x) = (x - 1) \log(1 - x)$.

III

7. Determine todas as primitivas de cada uma das funções seguintes:

$$a) f(x) = \cos x (1 + \sin x)^4; \quad b) g(x) = \frac{1}{(5 + x) \sqrt{x + 1}}.$$

8. Calcule a área da região limitada, pelas curvas $y = x^2 + 1$, $y = (x + 1)^2 + 1$ e $y = -x^2 + 3$, sombreada na figura seguinte.



9. Sendo F uma função definida em \mathbb{R} por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$,

calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.

Nome:
Curso:
N^o:

Nome:
Curso:
N^o: