Análise Matemática I

1ª frequência

Évora, 8 de abril 2015

1. Calcular (justificando) os seguintes limites

$$\lim_{n\to\infty}(1+2n)^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$$

2. Diga quais das séries são convergentes e por que.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{\sqrt{n^6+n^3+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}.$$

3. Calcular a soma da seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \exp\left(\frac{1-n^3}{1+n+n^2}\right).$$

   Ajuda: Dividir os polinómios.

4. Dada a função

$$f(x)=\frac{\sin(x+\pi)}{x^2-\pi^2},$$

   encontrar o domínio da funcão (ou seja os pontos onde ela está definida) e estender a funcão f nos pontos onde ela não está definida, de forma a obter uma funcão **contínua** em todo $\mathbb{R}$ (se possível).

   Ajuda: Fatorar o denominador e ter em conta a periodicidade do seno.

1. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n)^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2(n+1)}{1+2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n} = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right]^{n^2/2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right]^{n/2} = \text{"}(e^{-1})^{+\infty}\text{"} = \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0.$

2. Estude a natureza das séries.

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1+n^2}{\sqrt{n^6+n^3+1}}$

Esta é uma série de termos positivos.

Como a diferença de graus (baixo – cima) é 3 – 2= 1, vou comparar com a série de Dirichlet $\sum\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1+n^2}{\sqrt{n^6+n^3+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n.n^2}{\sqrt{n^6}} = 1 > 0 \text{ e finito.}$$

Assim por comparação as séries $\sum\frac{1+n^2}{\sqrt{n^6+n^3+1}}$ e $\sum\frac{1}{n}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é a série harmónica (uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$), logo divergente, a série em causa também é **divergente**.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

O limite do termo geral já foi calculado na pergunta 1. Como deu zero não posso concluir nada sobre a sua convergência. No entanto por se tratar de uma série de termos positivos e "estar tudo" elevado a um n, posso aplicar o critério da raiz ou critério de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$$

Como o limite é menor que um, pelo critério da raiz de Cauchy, a série **converge**.

3. Calcule a soma da série.

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{\frac{1-n^3}{1+n+n^2}}$

Vou em primeiro lugar simplificar a fração … $\frac{1-n^3}{1+n+n^2} = \frac{(1+n+n^2)(1-n)}{1+n+n^2} = 1-n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{\frac{1-n^3}{1+n+n^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{1-n} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^n} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{e}\right)^n$$

$\therefore$ É uma série geométrica de razão $\frac{-1}{e}$. Como a razão verifica $-1 < \frac{-1}{e} < 1$, a série é **CONVERGENTE**.

A soma é $S = \dfrac{1^{\circ}\text{termo}}{1-\text{razão}} = \dfrac{(-1)^0 e^1}{1-\frac{-1}{e}} = \dfrac{e}{\frac{e+1}{e}} = \dfrac{e^2}{e+1}$.

4. Indique o domínio da função $f(x) = \frac{\text{sen}(x+\pi)}{x^2-\pi^2}$ e prolongar por continuidade a todo o $\mathbb{R}$.

$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - \pi^2 \neq 0\}$

$$x^2 - \pi^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \pi^2 \Leftrightarrow x = \pm\pi$$

$D = \mathbb{R}\backslash\{-\pi, \pi\}$

A função é prolongável por continuidade a $x = \pm\pi$ se os limites existirem ...

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\text{sen}(x+\pi)}{x^2-\pi^2} = \lim_{x\to-\pi}\frac{\text{sen}(x+\pi)}{(x+\pi)} \times \frac{1}{x-\pi} = 1 \times \frac{1}{-2\pi} = -\frac{1}{2\pi};$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(x+\pi)}{x^2-\pi^2} = \lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(x+\pi)}{(x-\pi)} \times \frac{1}{x+\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{\text{sen}(x-\pi)}{(x-\pi)} \times \frac{1}{x+\pi} = 1 \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Como estes limites existem a função é prolongável por continuidade a todo o conjunto $\mathbb{R}$.

A função prolongamento seria ...

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x+\pi)}{x^2-\pi^2}, x \neq \pm\pi \\ -\dfrac{1}{2\pi}, \quad x = -\pi \\ \dfrac{1}{2\pi}, \quad x = \pi \end{cases}.$$