1. Mostre que a equação $x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(0, -1)$. Determine a derivada no ponto dado.

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1 \leftrightarrow F(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

A equação define y, implicitamente, como função de x, $f(x)$ perto do ponto $(0, -1)$ se:

- $F(0, -1) = 0 \rightarrow 0^2(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2 - 1 = 0$ ✓
- $F \in C^1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2yx^2 + 2y$$

  Estas derivadas existem e são contínuas numa vizinhança de $(0, -1)$ ✓

- $\frac{\partial F}{\partial y}(0, -1) \neq 0 \rightarrow 2(-1)0^2 + 2(-1) = -2 \neq 0$ ✓

Assim a equação $F = 0$ define implicitamente y como função de x perto do ponto $(0, -1)$.

$$y'(0) = \frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, -1)}{\frac{\partial F}{\partial x}(0, -1)} = -\frac{0}{-2} = 0.$$

2. Calcule,

3. Determine, caso existam, os extremos locais de $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

1º Encontrar os pontos críticos ou estacionários $\nabla f(x, y) = (0,0)$.

$$\begin{cases} \frac{-8}{x^2} + \frac{1}{y} & = 0 \\ \frac{-x}{y^2} + 1 & = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{y^4} = \frac{1}{y} \\ x = y^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 8y = 0 \\ x = y^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^3 = 8 \\ x = y^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Há apenas o ponto crítico (4,2) pois o ponto (0,0) não pertence ao domínio da função.

2º Classificar o ponto crítico com a matriz Hessiana.

$$\mathcal{H}(x,y)=\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{16}{x^3} & \frac{-1}{y^2} \\ \frac{-1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$$

$$|\mathcal{H}(4,2)|=\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0 \text{ mas } \frac{1}{4}>0 \rightarrow \text{minimizante}$$

$\therefore$ O mínimo da função é $f(4,2)=6$.

4. Determine os extremos de $f(x,y,z)=x-2y+2z$ sujeito a $x^2+y^2+z^2=1$.

Constrói-se a função de Lagrange e encontram-se os seus pontos críticos …

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z\ \ +\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ -2+2\lambda y=0 \\ 2+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \overset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=\frac{-1}{2\lambda} \\ y=\frac{1}{\lambda} \\ z=\frac{-1}{\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2\lambda} \\ y=\frac{1}{\lambda} \\ z=\frac{-1}{\lambda} \\ \lambda^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mp\frac{1}{3} \\ y=\pm\frac{2}{3} \\ z=\mp\frac{2}{3} \\ \lambda=\pm\frac{3}{2} \end{cases}$$

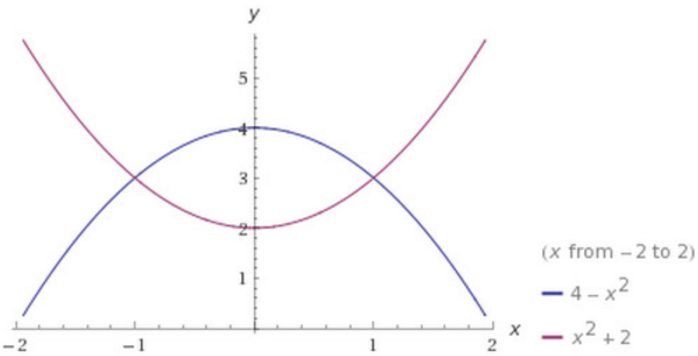
Temos os pontos críticos $\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3},\frac{-3}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)=-3, \qquad f\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{2}{3}\right)=3$$

$\therefore$ O mínimo é -3 e o máximo é 3.

5. Calcule $\iint_D \frac{x}{y^2}$, $D \rightarrow y=4-x^2, y=x^2+2$.

$$-1\leq x\leq 1$$
$$x^2+2\leq y\leq 4-x^2$$



$$\iint_D \frac{x}{y^2}=\int_{-1}^{1}\int_{x^2+2}^{4-x^2}\frac{x}{y^2}\,dydx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{-x}{y}\right]_{y=x^2+2}^{y=4-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-x}{4-x^2}-\frac{-x}{x^2+2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{-2x}{4-x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(4-x^2)\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2)\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 3)+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 3)=0.$$

6. Utilizando integrais triplos, calcule o volume do sólido limitado por

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1, \qquad x^2+y^2+z^2=4, \qquad z=\sqrt{x^2+y^2}}$$

O sólido S é uma coroa esférica limitada por um cone, em coordenadas esféricas é $\begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$V = \iiint_S 1 = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \times \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta d\rho = \int_1^2 \rho^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\theta d\rho = \int_1^2 \rho^2 \int_0^{2\pi} -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 \, d\theta d\rho =$$

$$= \int_1^2 \rho^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\pi - 0) d\rho = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

7. Calcule o integral de linha

$$\oint_C \boldsymbol{\frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy}.$$

Como a curva C é fechada e percorrida no sentido anti-horário, posso aplicar o Teorema de Green.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vou calcular primeiro as derivadas, se forem iguais, a função integranda é 0 e assim o integral pedido é zero (evito estar a desenhar e preencher o integral duplo com a região R limitada pela curva C).

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{1(x^2+y^2) - (x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1(x^2+y^2) - (x+y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \oint_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy = \iint_R 0 = 0.$$

8. Justifique a existência e encontre uma função z tal que

$$\boldsymbol{dz = \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy}.$$

Uma função z existe se $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Ora $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$

Para a encontrar é necessário que $\nabla z = (P, Q)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x^4 + 4xy^3 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^2 - 5y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x^4 + 4xy^3 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^2 - 5y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \displaystyle\int x^4 + 4xy^3 dx \\ z = \displaystyle\int 6x^2y^2 - 5y^4 dy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{4x^2y^3}{2} + A(y) \\ z = \dfrac{6x^2y^3}{3} - \dfrac{5y^5}{5} + B(x) \end{cases} \therefore z(x,y) = \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5 + C.$$