UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Análise Matemática I
(recuperação)

Exame final (1^a Chamada) e 2^a Frequência
2009/2010

29 de Junho de 2010

NOTA (IMPORTANTE!): os alunos que optem para fazer avaluação contínua (só aqueles que tiveram as notas não inferiores a 7,5 na Frequência I) têm de resolver os **Grupos de exercícios B e C** (cada Grupo em folha de Teste separada). Em vez, os alunos que pretendem fazer avaluação por Exame final têm de resolver o **Grupo de exercícios A** e, para alem disso, um dos **Grupos B OU C** (por sua escolha) (também cada Grupo em folha de Teste separada).

Duração da prova 3 horas (10:00 – 13:00)

Grupo A

1. Calcule o limite da sucessão

$$x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{(n+1)^2+1} + \frac{1}{(n+2)^2+1} + ... + \frac{1}{(2n)^2+1}.$$

2. Considere a sucessão definida por recorrência: $u_1 = 6$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$, $n \geq 1$.

   (a) Mostre que $\{u_n\}$ é limitada inferiormente;

   (b) Mostre que $\{u_n\}$ é monótona (especifique se está crescente ou decrescente);

   (c) Justifique a existência de limite e calcule-o.

3. Estude a natureza das séries (converge ou diverge e no caso de convergência converge absolutamente ou simplesmente):

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(\frac{2n+1}{n} + (-1)^n\right)$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$.

4. Encontre o domínio da função

$$y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\sqrt{\sin(2x)}.$$

Determine o interior, fronteira e fecho (aderência) deste conjunto. Justifique ainda que $x=2\pi$ é o ponto aderente ao domínio, mas não pertence ao mesmo.

Grupo B

1. Calcule os seguintes limites (utilizando os métodos adeguados):

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-4x+4}\right)$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^x$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$.

2. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por ramos:

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\in\,]-1,1[\,;\\ k\arcsin\frac{1}{x}, & |x|\geq 1,\end{cases}$$

onde $k\in\mathbb{R}$ é un parâmetro.

(a) Calcule os limite $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$.

(b) Escolhe um parâmetro k tal que f era contínua.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0=2$ (sendo k determinado na alínea (b)).

3. Calcule os seguintes integrais de Riemann:

(a) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x\ln(\sin x)\,dx$;

(b) $\int\limits_{3}^{8}\frac{\sin\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}}\,dx$;

(c) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x(x^2-2x+5)}$.

4. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx's da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Grupo C

1. Calcule as derivadas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \ln^3(4x)$;

   (b) $g(x) = e^{3x^2+1} \cos \frac{1}{x^2}$;

   (c) $\varphi(x) = \int\limits_{\sqrt{\sin x}}^{\sin^3 x} e^{-t^2}\, dt$.

2. Aplicando o Teorema de Lagrange mostre que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ tem lugar a desigualdade:

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|\,.$$

3. Estude a função $y = \frac{e^x}{1+x}$ por quanto extremos, monotonia, concavidade e pontos de inflexão. Esboça o seu gráfico.

4. Encontre comprimento do arco de curva $y = e^x$ entre $x = 0$ e $x = 1$.

BOM TRABALHO!