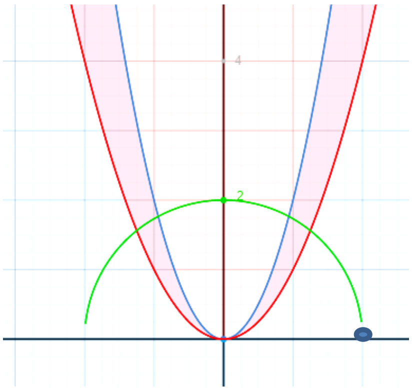
1.

a. Domínio de $f(x,y)=\frac{\sqrt{2x^2-y}-\ln(y-x^2)}{x^2+y^2-4}$ e ponto (2,0).



$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 2x^2-y\geq 0 \wedge y-x^2>0 \wedge x^2+y^2-4\neq 0\}$$

$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 2x^2 \wedge y>x^2 \wedge x^2+y^2\neq 4\}$$

Observações:

- A parábola de baixo é a tracejado;
- As duas partes da circunferência são a tracejado

b. $E=D_f\cup\{(2,0)\}$ é aberto ou fechado?

Como $int(E)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<2x^2 \wedge y>x^2 \wedge x^2+y^2\neq 4\}\neq E$, este conjunto não é aberto.

Como $\bar{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 2x^2 \wedge y\geq x^2\}\cup\{(2,0)\}\neq E$, este conjunto não é fechado.

c.

$$int(E)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<2x^2 \wedge y>x^2 \wedge x^2+y^2\neq 4\}$$

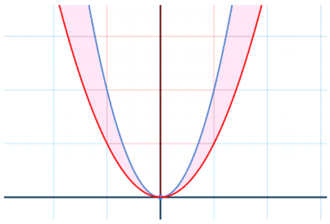
$$\partial E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=2x^2 \vee y=x^2 \vee (x^2+y^2=4 \wedge y\leq 2x^2 \wedge y\geq x^2)\}\cup\{(2,0)\}$$

$$\bar{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 2x^2 \wedge y\geq x^2\}\cup\{(2,0)\}$$

$$E'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 2x^2 \wedge y\geq x^2\}$$

d. Qual destes últimos é conexo por arcos?

O único que é conexo por arcos é o derivado.



2. Verifique se a seguinte função é contínua na origem.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}, & x^2-y^2\neq 0\\ 0, & x^2-y^2=0\end{cases}$$

A função será contínua se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=0$$

Os direcionais

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(m^3+1)x^3}{(1-m^2)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(m^3+1)x}{1-m^2}=0\ se\ m\neq\pm 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=(1-x)x}} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+1-x)x^3}{(1-1+x)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(2-x)x}{x} = 2$$

Assim os limites direcionais são diferentes do limite ao longo da curva (parábola). O limite pretendido não existe e a função não é contínua em (0,0).

3. Calcule as derivadas parciais

a) $\boldsymbol{z = x^3y + \mathrm{sen}(xy^3)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^3\cos(xy^3)\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 3xy^2\cos(xy^3)$$

b) $\boldsymbol{z = \frac{\ln(x^2+y^2)}{\arctan(x-y)}}$

$$z = \frac{\ln u}{\arctan v}, \quad u = x^2+y^2, v = x-y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{u\arctan v}2x - \frac{\ln u}{(1+v^2)(\arctan v)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(x^2+y^2)\arctan(x-y)} - \frac{\ln(x^2+y^2)}{(1+(x-y)^2)(\arctan(x-y))^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cdots$$

4. Verifique se a seguinte função é diferenciável na origem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+xy^3+2xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Em primeiro lugar é necessário calcular as derivadas parciais em (0,0) por definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Para que a função seja diferenciável em (0,0) é necessário que o seguinte limite exista e seja 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\times(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\times(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{2x^3+xy^3+2xy^2}{x^2+y^2}-0-2\times(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4 \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta = 0$$

Como o limite depende é 0 a função é diferenciável em (0,0).

O diferencial é $d(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 2dx$.

5. Escreva a equação do plano tangente à superfície definida por $z^2 = 4x^2 + y^2$ em (-1,-1,2).

$$z^2 = 4x^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1,-1,2)\times(x+1) + \frac{\partial F}{\partial y}(-1,-1,2)\times(y+1) + \frac{\partial F}{\partial z}(-1,-1,2)\times(z-2) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(-1,-1,2) = -8;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(-1,-1,2) = -2;\ \frac{\partial F}{\partial z} = -2z \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(-1,-1,2) = -4$$

A equação fica …

$$-8(x+1) - 2(y+1) - 4(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow -8x - 2y - 4z = 2$$

A reta normal é … $(x,y,z) = (-1,-1,2) + k(-8,-2,-4), k \in \mathbb{R}$

$$\text{ou ainda } \begin{cases} x = -1 - 8k \\ y = -1 - 2k \\ z = 2 - 4k \end{cases}$$

6. Considere $f = \arctan(xy)$.

a. Calcule a derivada direcional em (1,2), na direção de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}$, como as derivadas parciais existem e são contínuas perto de $(1,2)$, a função é aí diferenciável e assim posso usar a fórmula

$$f'\left((1,2); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \langle \nabla f(1,2), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle = \langle \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

Como esta derivada é positiva, neste ponto a função é crescente.

b. A direção de crescimento mais rápido … é o gradiente em (1,2)

$$\nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$