Análise Matemática II (2014/2015)

Exame de época normal 19/06/2015 **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

Resolva cada grupo numa folha de teste diferente !!!

Grupo I

1. Considere a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + \frac{\ln(1+xy)}{xy}.$$

(i) Determine o *domínio* $D(f)$ desta função e representa-o geometricamente.

(ii) Se o conjunto $D(f)$ é *aberto* ? *fechado* ? *compacto* ? *conexo*? Justifique com cuidade cada resposta.

(iii) Tendo em conta que $(0,0) \in \overline{D(f)} \setminus D(f)$, verifique se a função f é *prolungável* ao ponto $(0,0)$ por continuidade.

2. Mostre que o sistema das equações

$$\begin{cases} u \sin v = x + y \sin z, \\ v \sin u = x + z \sin y \end{cases}$$

admete uma solução única em relação às variáveis u e v numa vizinhança do ponto $M_0\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e que as funções $u = u(x,y,z)$ e $v = v(x,y,z)$ são continuamente diferenciáveis em torno desse ponto. Determine a *matriz de Jacobi* da aplicação $(x,y,z) \mapsto (u,v)$ no ponto M_0.

3. Considere a função

$$z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}.$$

(i) Escreve a equação do *plano tangente* ao gráfico dessa função no ponto $(1,1,1/4)$.

(ii) Determine o *diferencial de segunda ordem* $d^2 z$ no ponto $(1,1)$.

4. Encontre os *valores mínimo e máximo* da função

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

no círculo

$$\mathrm{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 25\right\}.$$

Grupo II

5. Determine o *volume do sólido* limitado pelas superfícies $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Faça desenho (**obrigatório** !)

6. Seja L a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ orientada no sentido antihorário. Calcule o integral

$$\oint_L \left(1 - x^2\right) y\, dx + x \left(1 + y^2\right)\, dy$$

   (i) diretamente;

   (ii) aplicando a *fórmula de Green.*

   Compare os resultados.

7. Encontre o *fluxo* do raio-vector $\overrightarrow{\mathbf{r}} = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + z\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ através a superfície lateral exterior do cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq h$.

8. Considere o *campo vectorial* $\overrightarrow{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}\,(x, y, z) = \left(x^2 - 2yz\right)\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(y^2 - 2xz\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} + \left(z^2 - 2xy\right)\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

   (i) Averigue que o campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ é *conservativo.*

   (ii) Encontre um *potencial* de $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, isto é tal função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que $\nabla u = \overrightarrow{\mathbf{F}}$.

   (iii) Calcule o *trabalho* do campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ para deslocar uma partícula material da origem ao ponto $M_0\,(1, 2, 3)$.

BOM TRABALHO!

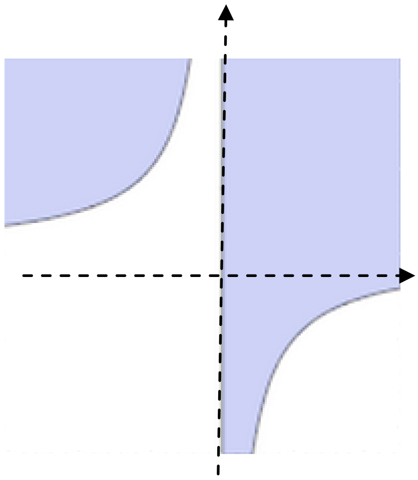
1.

i.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0 \wedge xy \neq 0 \wedge 1 + xy > 0\}$$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge y > -\frac{1}{x}\right\}$$

A linha $y = -\frac{1}{x}$ é a tracejado



ii.

$int(D_f) = D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0) \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge y > -\frac{1}{x}\right\}$ Logo D_f é **aberto**.

$\overline{D_f} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -\frac{1}{x}\right\} \neq D$ Logo D_f **não é fechado.**

Como D_f não é fechado então **não é compacto**, teria de ser fechado + limitado (por acaso também não é).

D_f **não é conexo** pois está separado pelos eixos das coordenadas.

iii.

O ponto (0,0) é um ponto de acumulação que não pertence ao conjunto, por isso a função f poderá ser prolongada por continuidade a este ponto se o limite seguinte existir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\ln(1 + xy)}{xy}$$

No primeiro vou utilizar coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\theta\, \rho \sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \cos^2\theta\, \rho \sin\theta = 0.$$

No segundo vou utilizar uma mudança de variável e usar o limite notável

$$\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = 1$$

Seja $u = xy$, se $(x,y) \to (0,0)$ então $u \to 0$ e assim fica …

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

Se não utilizasse o limite notável, através da regra de Cauchy chegaria também ao resultado.

$\therefore$ Assim o limite pretendido é 0+1=1, e a função f **pode ser prolongada por continuidade à origem**.

2.

$$\begin{cases} u\sin v = x + y\sin z \\ v\sin u = x + z\sin y \end{cases} \to \begin{cases} u\sin v - x - y\sin z = 0 \\ v\sin u - x - z\sin y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma solução única em relação às variáveis u e v perto de $(x,y,z,u,v) = \left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ se

$$\left.\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos c \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix} \to \left.\begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \checkmark$$

A matriz jacobiana é dada por

$$\mathrm{Jac}\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = -\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \times \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \left.\begin{bmatrix} -1 & -\sin z & -y\cos z \\ -1 & -z\cos y & -\sin y \end{bmatrix}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A inversa de uma matriz 2x2 é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{determinante}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.

i. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow \frac{1}{2(x^2+y^2)} - z = 0 \Leftrightarrow F = 0$

A equação do plano tangente à equação $F = 0$, no ponto (a,b,c) é

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \times (x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) \times (y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \times (z-c) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}\left(1,1,\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \longmapsto \frac{\partial F}{\partial y}\left(1,1,\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 \longmapsto \frac{\partial F}{\partial z}\left(1,1,\frac{1}{4}\right) = -1$$

A equação fica

$$-\frac{1}{4}\times(x-1)-\frac{1}{4}\times(y-1)-1\times\left(z-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{x}{4}-\frac{y}{4}-z=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow x+y+4z=3.$$

ii. $d^2z(a,b) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a,b)dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(a,b)dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(a,b)dy^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \longmapsto \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3} \longmapsto \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3} \longmapsto \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2} \longmapsto \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3y^2-x^2}{(x^2+y^2)^3} \longmapsto \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore d^2z(a,b) = \frac{1}{4}dx^2 + 1dxdy + \frac{1}{4}dy^2$$

4.

Vou primeiro examinar os extremos sem a restrição

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-12=0 \\ 2y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-8 \end{cases}$$

O ponto $(6,-8)$ está fora do círculo de raio 5, por isso não vale a pena ver se é máximo ou mínimo

Finalmente vou examinar os extremos na fronteira da região com o multiplicador de Lagrange.

A função de Lagrange é $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25)$. Os pontos críticos são…

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-12+2\lambda x=0 \\ 2y+16+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\lambda)=6 \\ y(1+\lambda)=-8 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{1+\lambda} \\ y=-\dfrac{8}{1+\lambda} \\ \dfrac{36}{(1+\lambda)^2}+\dfrac{64}{(1+\lambda)^2}=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{1+\lambda} \\ y = -\dfrac{8}{1+\lambda} \\ (1+\lambda)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{1+\lambda} \\ y = -\dfrac{8}{1+\lambda} \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{6}{1+\lambda} \\ y = -\dfrac{8}{1+\lambda} \\ \lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ \lambda = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Como dividi por $1+\lambda$, tenho de ver à parte o caso $\lambda = -1$ que dá uma condição impossível.

Há dois pontos críticos $(3,-4), (-3,4)$ que pertencem à fronteira ✓

$z(3,-4) = -75$ é o mínimo

$z(3,-4) = 125$ é o máximo

Também se poderia calcular a matriz Hessiana Orlada e classificar os pontos críticos.

5.

$$6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 36 - 12(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 13(x^2+y^2) + 36 = 0 \dashrightarrow x^2 + y^2 = v$$

$$v^2 - 13v + 36 = 0 \Leftrightarrow v = 4 \vee v = 9$$

$$x^2 + y^2 = 4 \vee x^2 + y^2 = 9$$

Mas se $x^2 + y^2 = 9$ a primeira equação fica $-3 = 3$ ↯

Logo a intersecção do paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ com o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ é uma circunferência de raio 2.

A limitação superior é o paraboloide voltado para baixo e a inferior é o cone … é como se fosse um ‘corneto’ onde a parte de baunilha é o cone e o gelado é limitado pelo paraboloide.

Para a região circular vou utilizar coordenadas polares $0 \le \rho \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\text{Volume} = \iiint 1 = \iint 6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(6 - \rho^2 - \sqrt{\rho^2}\right) \rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^2 6\rho - \rho^3 - \rho^2 d\rho = 2\pi \left[3\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi.$$

6.

i. $r(t) = (R\cos t, R\sin t), 0 \le t \le 2\pi$
$r'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$
$F\big(r(t)\big) = F(R\cos t, R\sin t) = \big((1 - R^2\cos^2 t)R\sin t, R\cos t\,(1 + R^2\sin^2 t)\big)$

$$\oint_C (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy = \int_C F(r)\cdot r'dt = \int_0^{2\pi} -(1-R^2\cos^2 t)R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\,(1+R^2\sin^2 t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t - R^2\sin^2 t + 2R^4\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \cdots$$

ii. Pelo Teorema de Green (a curva é fechada e percorrida no sentido anti-horário)

$$\oint_C (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy = \iint_D 1+y^2-(1-x^2) = \iint_D x^2+y^2$$

A região D é um círculo de raio R. Vou usar coordenadas polares $0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le 2\pi$

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho\, d\theta = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{2}\pi$$

7. Vou utilizar o Teorema da Divergência (Gauss) pois o cone é uma região fechada.

$$\iint_S F = \iiint_{cone} div(F) = \iiint_{cone} 1+1+1 = \iiint_{cone} 3$$

Para limitar o cone vou utilizar coordenadas cilíndricas $0 \le \rho \le h, 0 \le \theta \le 2\pi, \sqrt{\rho^2} \le z \le h$

$$\int_0^h d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_\rho^h 3\rho\,dz = \int_0^h d\rho \int_0^{2\pi} 3\rho(h-\rho)d\theta = 6\pi\int_0^h \rho h - \rho^2 d\rho = 6\pi\left[\frac{h\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^h = 6\pi\left(\frac{hh^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \pi h^3$$

8.

i. F é conservativo se $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}; \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}; \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$

$$-2z = -2z; -2x = -2x; -2y = -2y \checkmark$$

ii. Encontrar u tal que $\nabla u = F$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = F_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 - 2yz \\ \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xz \\ \frac{\partial u}{\partial z} = z^2 - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \int x^2 - 2yz\,dx \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \int y^2 - 2xzdy \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \int z^2 - 2xydz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{x^3}{3} - 2yzx + A(y,z) \\ u = \frac{y^3}{3} - 2xzy + B(x,z) \\ u = \frac{z^3}{3} - 2xyz + C(x,y) \end{cases}$$

$$\therefore u(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2yzx$$

iii. Como F é conservativo basta calcular a diferença do potencial entre o último ponto e o primeiro

$$\text{Trabalho} = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} F = u(1,2,3) - u(0,0,0) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{27}{3} - 12 = 0.$$