Universidade de Évora

Departamento de Matemática

1.^{a} Frequência - 22 de outubro de 2016

Observações: Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas. Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as suas respostas. Numere todas folhas de teste que entregar: por exemplo, se entregar 3 folhas de teste, devem numerá-las como 1/3, 2/3 e 3/3.

Grupo I

1. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3 \wedge x + 1 \geq 0\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

a) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado (conjunto dos pontos de acumulação) A.

b) Diga, justificando, se A é um conjunto aberto, fechado e/ou limitado.

c) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A

Grupo II

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Mostre que a sucessão $(x_n)_n$ é converge e determine o seu limite.

Sugestão: Mostre primeiro que $(x_n)_n$ é descrescente e depois aplique o teorema das sucessões monótonas

3. Calcule os limites seguintes:

$a)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+2}-1}{2^n+1}$; $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; $\quad c)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\; sen\,(n!)}{n+1}$.

Grupo III

4. Considere a seguinte série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}.$$

Determine a sua soma, caso exista.

5. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$; $\quad b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} sen\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\quad c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Grupo IV

6. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

$a)$ Se $a\in int(A)$, então $a\in fr(\mathbb{R}\backslash A)$;

$b)$ Se a sucessão $(x_n)_n$ é limitada, então $(x_n)_n$ é converge;

$c)$ Dada a sucessão $x_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$, tem-se que $\underline{\lim}\; x_n = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{\lim}\; x_n = \dfrac{3}{2}$;

$d)$ Se $x_n \geq 1$ para um número infinito de valores de n, então a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ é divergente.

Bom Trabalho!!