AM II ◆ 1.ª FREQ. ◆ 2012-2013 ◆ 9/4/2013

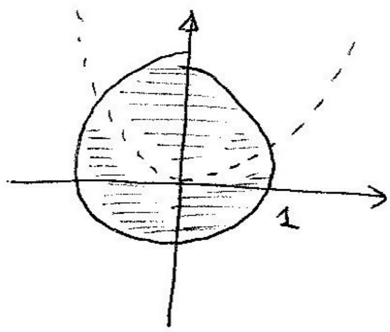
① $f(x,y) = \left(\sqrt{1-x^2-y^2},\ \ln|y-x^2|\right)$

a) Domínio e representação.

como há o módulo, já é ≥ 0

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \geq 0 \ \wedge\ y-x^2 \neq 0\}$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad y \neq x^2$$



é a bola sem o $y = x^2$

• $\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 > 0 \ \wedge\ y-x^2 \neq 0\}$

Como $\text{int}(D) \neq D$, D não é aberto

• $\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 = 0 \ \vee\ (y-x^2 = 0 \wedge 1-x^2-y^2 \geq 0)\}$

• $\bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \geq 0\}$

Como $\bar{D} \neq D$, D não é fechado.

• D é limitado e não é compacto.

② $f(x,y) = \dfrac{2x^2 - y^3}{x^3 + 3y^2}$

a) Mostre que não há limite na origem

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{2x^2-y^3}{x^3+3y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \infty$$

$\therefore$ Como um dos limites iterados já não existe, então não existe o limite "principal".

b) Mostrar se f é prolongável

Como não existe limite quando $(x,y)\to(0,0)$ da função, f não é prolongável por continuidade à origem //

II

(3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^4}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Continuidade.

- Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é contínua pois é o quociente de duas funções contínuas

- Para $(x,y) = (0,0)$ f será contínua se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^4}} \underset{\text{c. polares}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho\cos\theta\,\rho\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\,\text{sen}^4\theta}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^4\theta)}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\rho\sqrt{\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^4\theta}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{2\rho} \underbrace{\frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^4\theta}}}_{\text{limitada}} = 0$$

f é contínua em $(0,0)$.

b) $\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h\times 0}{\sqrt{h^2+0^4}} - 0}{h}$

$= 0$

$\cdot\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0\times h}{\sqrt{0^2+h^4}} - 0}{h}$

$= 0$

c) f é diferenciável em $(0,0)$?

É dif. em $(0,0)$ se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$?

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^4}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^4}}$

c.pla $= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho\cos\theta\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho\sqrt{\rho^2(\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^4\theta)}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\rho^2\mathrm{sen}^4\theta}}$

$= \frac{2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}$ Como o limite depende de θ, não existe.

$\therefore$ f não é diferenciável em $(0,0)$.

(4) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2-y) + e^{yz}$

a) Derivada de f segundo $(1,2,3)$ no ponto $(-1,1,0)$

$$\nabla f = \left(2x\cos(x^2-y) \,,\, -\cos(x^2-y) + z e^{yz} \,,\, y e^{yz} \right)$$

existem e são contínuas perto de $(-1,1,0)$

logo f é diferenciável em $(-1,1,0)$

$$\nabla f(-1,1,0) = (-2, -1, 1)$$

$$D_f\big((-1,1,0);(1,2,3)\big) = \nabla f(-1,1,0) \cdot (1,2,3) =$$

$$= (-2,-1,1)\cdot(1,2,3) = -2-2+3 = -1$$

b) $D_{f\circ g} = D_f(g(1,1)) \times D_g(1,1)$ $\qquad g(1,1) = (-1,1,0)$

D_f: gradiente de f

D_g: Jacobiana de g

$$= \nabla f(-1,1,0) \times D_g(1,1) = \begin{bmatrix} -2, -1, 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5, -7 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{f\circ g}(1,1) = (-5, -7)$$

5/9

⑥ Extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

1.º Pontos Críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ 4x^9 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x(x^8 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x^3 \\ x^8 = 1 \end{cases}$$

$(0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad (-1,-1) \text{ e } (1,1)$$

2.º Classificar os P.C. $\quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$

→ em $(0,0)$ $\quad |\mathcal{H}(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16$ é ponto sela

→ em $(-1,-1)$ $\quad |\mathcal{H}(-1,-1)| = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0$

$\hookrightarrow 12 > 0$ $\quad (-1,-1)$ é minimizante

O mínimo é $f(-1,-1) = -1$

→ em $(1,1)$ $\quad |\mathcal{H}(1,1)| = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0$ $\quad (1,1)$ é minimizante

$\hookrightarrow 12 > 0$

O mínimo é $f(1,1) = -1$ //

III

(5) $x^3y^2 + x^3 + z^3 - z = 1$

a) Justifique que a equação define z implicitamente como função de x e y numa vizinhança de $(1,0,1)$.

$$\overbrace{x^3y^2 + x^3 + z^3 - z - 1}^{F} = 0$$

- $F(1,0,1) = 0 \longrightarrow 0+1+1-1-1 = 0$ ✓
- $F \in C^1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y^2 + 3x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^3y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 1$$

existem e são contínuas perto de $(1,0,1)$

logo $F \in C^1$ perto de $(1,0,1)$

- $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) \neq 0 \longrightarrow 3\times 1^2 - 1 = 2 \neq 0$ ✓

$\therefore$ Assim é verdade que a equação $F=0$ define z em função de x e y, implicitamente perto de $(1,0,1)$

b) $$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)} = -\frac{0}{2} = 0$$

c) Equação do plano Tangente em $(1,0,1)$ é

$$\nabla F(1,0,1) \cdot (x-1, y-0, z-1) = 0$$

$$(3, 0, 2) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$$

$$3x - 3 + 0y + 2z - 2 = 0$$

$$3x + 2z = 5$$

(7) $f(x,y) = x^2 y$ su $x^2 + 2y^2 = 6$

$$\mathcal{L} = x^2 y - \lambda (x^2 + 2y^2 - 6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2\lambda x = 0 \\ x^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-\lambda) = 0 \\ x^2 - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -4\lambda y = 0 \\ y^2 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \lambda \\ x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ - \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ 4y^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\boxed{(0,\sqrt{3}),\ (0,-\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\boxed{(2,1)},\ \boxed{(-2,1)},\ \boxed{(2,-1),\ (-2,-1)}$$

Ho 6 punti critici

- $f(0,\sqrt{3}) = f(0,-\sqrt{3}) = 0$
- $f(2,1) = f(-2,1) = 4$
- $f(-2,-1) = f(2,-1) = -4$

Il minimo è -4

Il massimo è 4