Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA I

2^a Frequência **21/12/12**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Encontre $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$ de modo a que a função:

$$f(x) := \begin{cases} \beta + (1-x)^{-\frac{1}{2x}}, & x < 0; \\ \alpha, & x = 0; \\ \dfrac{x}{x^3 + \sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$.

2. Recorde que

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Calcule $\operatorname{ch}(0)$, $\operatorname{sh}(\log 5)$ e $\operatorname{sh}(-\log 5)$.

b) Esboce o gráfico da função $\operatorname{ch} x$.

c) Mostre que a equação:

$$\frac{x}{2} + 2 - \operatorname{sh} x = 0$$

tem uma **única** solução em $\mathbb{R}$.

Sugestão: use a diferenciabilidade para demonstrar a unicidade de solução.

3. Caracterize os extremos locais da função:

$$f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\,.$$

II

4. Indique a expressão geral das primitivas da função:

$$\text{a)}\quad f(x) = e^{2x}\,\text{sen}(3x); \qquad \text{b)}\quad g(x) = \frac{3}{5+x^2}.$$

5. Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a)}\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(3x)\ dx; \qquad \text{b)}\quad \int_0^{62} \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}\ dx; \qquad \text{c)}\quad \int_2^3 \frac{1}{x^3+x}\ dx.$$

6. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{x^3} \text{sen}(t)\ dt.}{x}.$$

III

7. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & x \neq 0, \\ f(0), & x = 0. \end{cases} \end{array}$$

a) Verifique que g é contínua em $\mathbb{R}$.
b) Mostre que se f é constante então g também é constante em $\mathbb{R}$.

8. Calcule a área da região plana situada na região $x \geq 1$ e limitada pelas curvas $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ e $y = \dfrac{1}{x^2}$.

1. Encontre α e β de modo que a função seja contínua em $x = 0$.

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\beta + (1-x)^{\frac{-1}{2x}}}, \boldsymbol{x} < 0 \\ \boldsymbol{\alpha} \quad\quad\quad\quad , \boldsymbol{x = 0} \\ \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^3 + \sqrt{x}}} \quad\quad , \boldsymbol{x} > 0 \end{cases}$$

Para que a função seja contínua em $x = 0$ é necessário que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \beta + (1-x)^{\frac{-1}{2x}} = \beta + \lim_{x\to 0^-} (1-x)^{\frac{-1}{2x}}$$

Este limite dá uma indeterminação do tipo 1^∞ e é necessário aplicar o exponencial do logaritmo. Assim transforma-se a indeterminação em $\frac{0}{0}$ e aplica-se a Regra de Cauchy.

CA:

$$(1-x)^{\frac{-1}{2x}} = e^{\ln(1-x)^{\frac{-1}{2x}}} = e^{\frac{-\ln(1-x)}{2x}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\ln(1-x)}{2x} = \text{Regra Cauchy} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \beta + e^{\frac{1}{2}} = \beta + \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^3 + \sqrt{x}} = \text{Regra Cauchy} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{0 + \infty} = 0$$

Assim $\beta + \sqrt{e} = 0 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ e $\beta = -\sqrt{e}$.

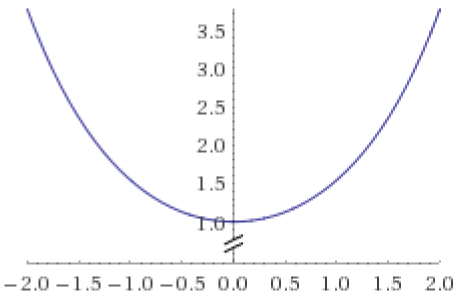
2. $\boldsymbol{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$, $\boldsymbol{\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

a. $\boldsymbol{\cosh 0} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$

$$\boldsymbol{\operatorname{senh}(\ln 5)} = \frac{e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}}{2} = \frac{5 - \frac{1}{5}}{2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{senh}(-\ln 5)} = \frac{e^{-\ln 5} - e^{\ln 5}}{2} = \frac{\frac{1}{5} - 5}{2} = \frac{-24}{10} = \frac{-12}{5}$$

b. $\boldsymbol{\cosh x}$



c. Mostre que a equação $\frac{x}{2} + 2 - \text{senh}\, x = 0$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

Define-se a função f e através do Teorema de Bolzano garante-se a existência de pelo menos uma solução. Utilizam-se os resultados calculados na pergunta anterior em $\pm \ln 5$.

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 - \text{senh}\, x$$

$$f(-\ln 5) = \frac{-\ln 5}{2} + 2 - \text{senh}\,(-\ln 5) = \frac{-\ln 5}{2} + 2 + \frac{12}{5} > 0$$

$$f(\ln 5) = \frac{\ln 5}{2} + 2 - \text{senh}\,(\ln 5) = \frac{\ln 5}{2} + 2 - \frac{12}{5} < 0$$

$\therefore$ Como a função f é contínua em $[-\ln 5, \ln 5]$ visto ser um polinómio e a função seno-hiperbólico (contínuas) e $f(-\ln 5) \times f(\ln 5) < 0$, posso aplicar o Teorema de Bolzano e concluir que existe um ponto c em $]-\ln 5, \ln 5[$ tal que f(c) = 0. Um zero da função f é uma solução da equação referida.

Finalmente para garantir a unicidade da solução vou utilizar a derivada. Como o coseno-hiperbólico é sempre superior a 1 posso afirmar que a derivada é estritamente negativa

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cosh x < 0$$

$\therefore$ Uma função cuja derivada é estritamente negativa será estritamente decrescente. Assim, a ter um zero, ele é único.

3. Caracterize os extremos locais de $f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

$$f'(x) = 2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -1 \lor x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1		0		$1/2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		decresce	mínimo	cresce	máximo	decresce	mínimo	cresce	

A função tem um máximo local em $x = 0$. O máximo local é $f(0) = 0$.

A função tem um mínimo absoluto em $x = -1$. O mínimo é $f(-1) = -\frac{1}{3}$.

A função tem um mínimo local em $x = \frac{1}{2}$. O mínimo local é $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{96}$.

4. Indique a expressão geral das primitivas das funções:

a. $\int \boldsymbol{e^{2x}}\ \mathbf{sen}\ (\mathbf{3}\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{dx}$

Primitivação por partes

$$\begin{cases} u' = e^{2x} & \rightarrow & u = \frac{1}{2}e^{2x} \\ v = \text{sen}\ (3x) & \rightarrow & v' = 3\cos(3x) \end{cases}$$

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\ (3x)\ dx = \frac{1}{2}e^{2x} \times \text{sen}\ (3x) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\ \times 3\cos(3x)\ \ dx = \frac{e^{2x}\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\ \cos(3x)\ \ dx$$

De novo primitivando por partes ...

$$\begin{cases} u' = e^{2x} & \rightarrow & u = \frac{1}{2}e^{2x} \\ v = \cos\ (3x) & \rightarrow & v' = -3\ \text{sen}(3x) \end{cases}$$

$$\int \boldsymbol{e^{2x}}\ \mathbf{sen}\ (\mathbf{3}\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{dx} = \frac{e^{2x}\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos\ (3x) + \int \frac{1}{2}e^{2x}\ 3\ \text{sen}(3x)\ dx\right) =$$

$$= e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3\cos\ (3x)}{4}\right) - \frac{9}{4}\int \boldsymbol{e^{2x}}\ \ \mathbf{sen}(\mathbf{3}\boldsymbol{x})\ \ \boldsymbol{dx}$$

Agora passamos todas as primitivas para o lado esquerdo ...

$$\int e^{2x}\ \text{sen}\ (3x)\ dx + \frac{9}{4}\int e^{2x}\ \ \text{sen}(3x)\ \ dx = e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3\cos\ (3x)}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4}\int e^{2x}\ \ \text{sen}(3x)\ \ dx = e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3\cos\ (3x)}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int e^{2x}\ \text{sen}\ (3x)\ dx = \frac{4}{13}e^{2x}\left(\frac{\text{sen}\ (3x)}{2} - \frac{3\cos\ (3x)}{4}\right) + c.$$

b. $\int \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dx}$

Trata-se de uma primitiva imediata que resulta de aplicar a fórmula $\int \frac{u'}{a^2+u^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)$

$$\int \frac{3}{5 + x^2}dx = 3\int \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + x^2}dx = \frac{3}{\sqrt{5}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + c.$$

5. Calcule os seguintes integrais:

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(3x)dx$

Para calcular uma primitiva é necessário utilizar a primitivação por partes ou então a fórmula $\cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2}$

$$\int \cos^2(3x)dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(6x)}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(3x)dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}0 + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(0) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}.$$

b. $\displaystyle\int_0^{62} \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Para o cálculo de uma primitiva vou utilizar a substituição

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x+2} = t \\ x = t^6 - 2 \\ dx = 6t^5 dt \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = \int \frac{t}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = \int \frac{6t^6}{t^2(t+1)} dt = \int \frac{6t^4}{t+1} dt$$

Agora é necessário dividir os polinómios pois o grau em cima é superior ou igual ao grau em baixo.

$$\frac{6t^4}{t+1} = 6t^3 - 6t^2 + 6t - 6 + \frac{6}{t+1}$$

$$\int \frac{6t^4}{t+1} dt = \int 6t^3 - 6t^2 + 6t - 6 + \frac{6}{t+1} dt = \frac{6t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} - 6t + 6\ln(t+1)$$

Finalmente voltando a x obtém-se a primitiva desejada para calcular o integral

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = \frac{3(\sqrt[6]{x+2})^4}{2} - 2\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^3 + 3\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^2 - 6\sqrt[6]{x+2} + 6\ln(\sqrt[6]{x+2} + 1)$$

$$\int_0^{62} \frac{\sqrt[6]{x+2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = \left[\frac{3(\sqrt[6]{x+2})^4}{2} - 2\sqrt{x+2} + 3\sqrt[3]{x+2} - 6\sqrt[6]{x+2} + 6\ln(\sqrt[6]{x+2} + 1)\right]_0^{62} =$$

$$= \frac{3(\sqrt[6]{64})^4}{2} - 2\sqrt{64} + 3\sqrt[3]{64} - 6\sqrt[6]{64} + 6\ln(\sqrt[6]{64} + 1) - \left(\frac{3(\sqrt[6]{2})^4}{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[6]{2} + 6\ln(\sqrt[6]{2} + 1)\right) =$$

$$= 24 - 16 + 12 - 12 + 6\ln(3) - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[6]{2} - 6\ln(\sqrt[6]{2} + 1).$$

c. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3+x}\,dx$

Para o cálculo de uma primitiva vou utilizar a primitivação de funções racionais.

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+xC+A}{x(x^2+1)}\Longrightarrow\begin{cases}A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\ C=0\\ A=1\end{cases}$$

Assim $\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}$

$$\int\frac{1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\int_2^3\frac{1}{x^3+x}dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_2^3=\ln 3-\frac{1}{2}\ln 10-\left(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5\right).$$

6. Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen} t\,dt}{x}$$

Substituindo diretamente o x por 0, obtem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen} t\,dt}{x}=\frac{\int_0^0\operatorname{sen} t\,dt}{0}=\frac{0}{0}$$

Estas indeterminações são levantadas aplicando a Regra de Cauchy. Note-se que é necessário derivar um integral cujos extremos são funções de x. Assim é necessário aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen} t\,dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen} t\,dt\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\operatorname{sen}x^3-2x\operatorname{sen}x^2}{1}=0$$

7. Sendo *f* uma função contínua, considere a função *g*

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\,, & x\neq 0\\ f(0), & x=0\end{cases}.$$

a. Verifique que g é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Como para $x \neq 0$ a função é contínua pois é a multiplicação de $\frac{1}{x}$ com um integral indefinido com função integranda contínua, resta analisar a continuidade no ponto 0.

A função g será também contínua em 0 se

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{T. Fun. Cál. Int.}}{\overset{\text{Regra Cauchy}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{1f(x) - 0}{1} = f(0)$$

$\therefore$ Assim a função g é contínua em todo o $\mathbb{R}$.

b. Mostre que se f é constante então também g é constante.

Se f é constante então $f(x) = c$. Vejamos de g também é constante …

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x c dt = \frac{1}{x} cx = c.$$

8. Calcule a área da região plana situada na região $x \geq 1, y = \frac{\ln x}{x^2}$ e $y = \frac{1}{x^2}$.

Intersetando as duas curvas com y, obtem-se $x = e$. Temos assim os dois extremos de integração.

A primitivação será feita por partes

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{x^2} & \rightarrow \quad u = -\frac{1}{x} \\ v = (1 - \ln x) & \rightarrow \quad v' = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) dx = -\frac{1}{x}(1 - \ln x) - \int -\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^e = \frac{\ln e}{e} - \frac{\ln 1}{1} = \frac{1}{e}.$$