Análise Matemática II (2014/2015)

Exame de recurso 03/07/2015 **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

1. Considere a função de duas variáveis

$$f(x,y) = \frac{\arcsin\left(x - y^2\right)}{xy}.$$

(i) Determine o *domínio* $D(f)$ desta função e representa-o geometricamente.

(ii) Se o conjunto $D(f)$ é *conexo* ou não ?

(iii) Determine a *aderência* $\overline{D(f)}$ do domínio. Se $\overline{D(f)}$ é um conjunto *conexo* ?

Justifique bem cada resposta (sobre tudo de alíneas **(ii)** e **(iii)**).

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = x^2 + y^2; \\ u^3 + v^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \tag{1}$$

(i) Mostre que o sistema (1) pode ser univocamente resolvido em relação às varáveis u e v numa vizinhança do ponto $M_0 \in \mathbb{R}^4$ cujas coordenadas são: $x = 1$, $y = -1$, $u = -1$, $v = 1$.

(ii) Determine o *diferencial* dz no ponto $(1, -1)$ da função composta $z = f(x,y)$ dada por

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(u^2 + v^2\right)$$

onde as funções $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ são definidas implicitamente pelo sistema (1) em torno do ponto M_0 (ver alínea **(i)**).

3. Encontre a distância maior entre os pontos da superfície

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6 \tag{2}$$

ao plano $z = 0$.

Sugestão: Maximiza a função $f(x,y,z) = z^2$ sujeita à condição (2).

4. Com uso da integração dupla ou tripla calcule o volume do sólido obtido como a intersecção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e da bola de raio 2 centrado no ponto $M(0,0,2)$. Faça desenho (**obrigatório** !)

5. Calcule o *integral de linha*

$$\oint_L (xy + x + y)\ dx + (xy + x - y)\ dy$$

onde L é a circunferência $x^2 + y^2 = 4x$ percorrida no sentido antihorário

(**i**) diretamente;

(**ii**) aplicando a *fórmula de Green.*

Compare os resultados.

6. Encontre a *massa* de uma película cónica de forma $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq h)$ se a sua densidade $\rho\,(x.y.z) = z^2$.

Sugestão: Utilize a *integração de superfície* de 1^a espécie.

7. Averigue se existe uma função $z = z\,(x, y)$ cujo diferencial tem a forma

$$dz = \left(x^2 + 2xy - y^2\right)\ dx + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)\ dy.$$

No caso afirmativo encontre todas tais funções.

8. Considere o campo vectorial

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = -x^3 y\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + y^3\,\overrightarrow{\mathbf{j}} - yz^3\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

(**i**) Encontre o *rotacional* e a *divergência* do campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.

(**ii**) Determine o conjunto de todas as *fontes* de $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ e representa-o geometricamente.

BOM TRABALHO!

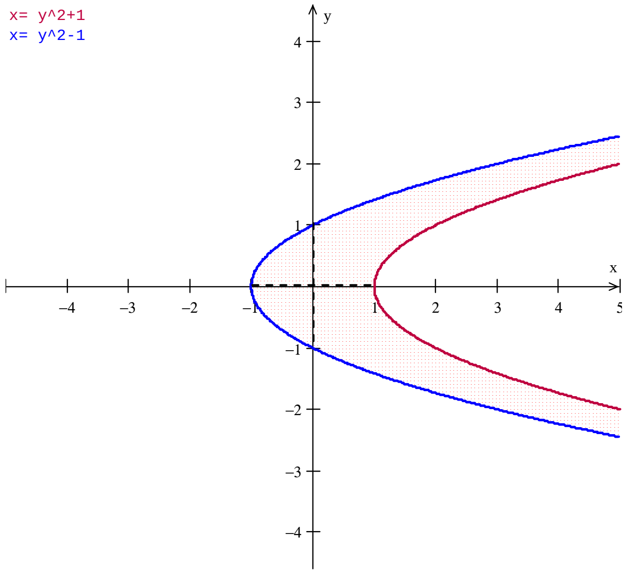
1.

i.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x - y^2 \le 1 \wedge xy \ne 0\}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 1 \le x \le y^2 + 1 \wedge x \ne 0 \wedge y \ne 0\}$$

Os eixos são a tracejado



ii.

D_f não é conexo pois os eixos não pertencem ao conjunto e assim é impossível 'conectar' alguns pontos do conjunto a outros.

iii.

$$\overline{D_f} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le y^2 + 1\}$$

Este conjunto já é conexo (pelas razões contrárias apresentadas em cima).

2.

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = x^2 + y^2 \\ u^3 + v^3 = x^3 + y^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ u^3 + v^3 - x^3 - y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases}$$

i. O sistema pode ser univocamente determinado em relação a u e v perto de $(x,y,u,v) = (1,-1,-1,1)$ se

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(1,-1,-1,1)} \ne 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}_{(1,-1,-1,1)} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \checkmark$$

ii. O diferencial é dado por $dz(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)dy$

Para encontrar estas derivadas parciais é necessário utilizar a regra da cadeia.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2v}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,-1,1) = \frac{-2}{4}\frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) + \frac{2}{4}\frac{\partial v}{\partial x}(1,-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2v}{(u^2+v^2)^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,-1,1) = \frac{-2}{4}\frac{\partial u}{\partial y}(1,-1) + \frac{2}{4}\frac{\partial v}{\partial y}(1,-1)$$

Finalmente as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial v}{\partial x}(1,-1), \frac{\partial u}{\partial y}(1,-1), \frac{\partial v}{\partial y}(1,-1)$ são dadas pela seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,-1)} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{bmatrix}^{-1}_{(1,-1,-1,1)} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,-1,-1,1)} =$$

$$= -\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -2x & -2y \\ -3x^2 & -3y^2 \end{bmatrix}_{(1,-1,-1,1)} = -\frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A inversa de uma matriz 2x2 é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{determinante}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Assim $\frac{\partial u}{\partial x}(1,-1) = 0, \frac{\partial v}{\partial x}(1,-1) = 1, \frac{\partial u}{\partial y}(1,-1) = 1, \frac{\partial v}{\partial y}(1,-1)$.

Desta forma $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = -\frac{1}{2}$.

Finalmente o diferencial fica $dz(1,-1) = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$.

3.

A função de Lagrange é $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = z^2 + \lambda(2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6)$. Os pontos críticos são…

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x\lambda+2z\lambda=0\\ 6y\lambda=0\\ 2z+4z\lambda+2x\lambda=0\\ 2x^2+3y^2+2z^2+2xz=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\lambda(2x+z)=0\\ y=0\\ z+2z\lambda+x\lambda=0\\ x^2+z^2+xz=3\end{cases} \vee \begin{cases}0=0\\ \lambda=0\\ z=0\\ 2x^2+3y^2=6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ y=0\\ z=0\\ x^2=3\end{cases} \vee \begin{cases}z=-2x\\ y=0\\ -2x-4x\lambda+x\lambda=0\\ x^2+4x^2-2x^2=3\end{cases} \vee \begin{cases}0=0\\ \lambda=0\\ z=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ y=0\\ z=0\\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases} \vee \begin{cases}z=\mp 2\\ y=0\\ \lambda=\mp\frac{2}{3}\\ x=\pm 1\end{cases} \vee \begin{cases}0=0\\ \lambda=0\\ z=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

Pontos críticos $(\pm\sqrt{3},0,0)$, $(\pm 1,0,\mp 2)$ e todos os pontos da elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ com $z=0$.

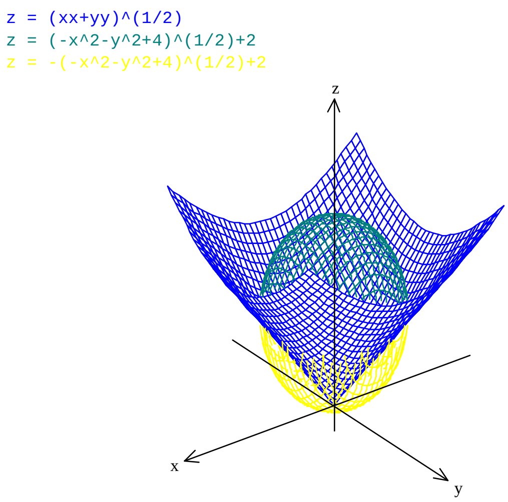
$f(\pm\sqrt{3},0,0)=0$ mínimo.

$f(\pm 1,0,\mp 2)=4$ máximo.

$f(elipse\ e\ z=0)=0$ mínimos.

Também se poderia calcular a matriz Hessiana Orlada e classificar os pontos críticos.

Assim a distância máxima é $\sqrt{4}=2$.



4.

$$\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ x^2+y^2+(z-2)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z^2+z^2-4z+4=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z(z-2)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}0=x^2+y^2\\ z=0\end{cases} \vee \begin{cases}4=x^2+y^2\\ z=2\end{cases}$$

As duas superfícies intersectam-se na origem ou na circunferência de raio 2 no plano de raio 2.

Há duas regiões limitadas pelo cone e pela esfera: a primeira é dentro do cone e dentro da esfera; a segunda é fora do cone e dentro da esfera (parte de baixo).

Vou utilizar integração dupla e coordenadas polares

$$0\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$$

$$V_1 = \iint \sqrt{-x^2 - y^2 + 4} + 2 - \sqrt{x^2 + y^2} = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{-\rho^2 + 4} + 2 - \sqrt{\rho^2}\right) \rho d\theta$$

$$2\pi \int_0^2 \rho(-\rho^2 + 4)^{1/2} + 2\rho - \rho^2 d\rho = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(-\rho^2 + 4)^{3/2} + \rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\left(4 - \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}(4)^{3/2}\right)\right) = 8\pi$$

$$V_2 = \iint \sqrt{x^2 + y^2} - \left(-\sqrt{-x^2 - y^2 + 4} + 2\right) = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\rho^2} + \sqrt{-\rho^2 + 4} + 2\right) \rho d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

O volume pedido é $8\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$.

5.

i. $x^2 + y^2 = 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$ circunferência de centro $(2,0)$ e raio 2
$r(t) = (2 + 2\cos t, 2\sin t), 0 \le t \le 2\pi$
$r'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$
$F(r(t)) = F(2 + 2\cos t, 2\sin t) =$
$= \left((2 + 2\cos t)2\sin t + 2 + 2\cos t + 2\sin t, (2 + 2\cos t)2\sin t + 2 + 2\cos t - 2\sin t\right)$

$$\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \int_0^{2\pi} F(r) \cdot r' dt = \cdots \textbf{muito extenso}$$

ii. Pelo Teorema de Green (a curva é fechada e percorrida no sentido anti-horário)

$$\oint_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint_D y + 1 - (x + 1) = \iint_D y - x$$

A região D é um círculo de raio 2 e centrado em (2,0). Vou usar coordenadas polares

$$\begin{cases} x - 2 = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \text{onde o jacobiano é } \rho \text{ e } \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_D y - x = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (\rho\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\theta - 2)\rho d\theta = \int_0^2 \rho[-\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta - 2\theta]_0^{2\pi} d\rho = \int_0^2 \rho(-4\pi)d\rho =$$

$$= -4\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = -8\pi.$$

6. .

$$\text{Massa} = \iint_S z^2$$

A superfície S é a parte de cima do hiperboloide (pois $0 \le z \le h$). Assim é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e é parametrizado por $r(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho), 0 \le \rho \le h, 0 \le \theta \le 2\pi$.

O integral de superfície de 1ª espécie com $f(x,y,z) = z^2$ é

$$\iint_S f = \iint_D f(r).\left\|\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta}\right\|$$

$f(r) = f(\rho\cos\theta\,,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\rho) = \rho^2.$

$\frac{\partial r}{\partial \rho} = (\cos\theta\,,\mathrm{sen}\,\theta\,,1), \frac{\partial r}{\partial \theta} = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\rho\cos\theta\,,\rho)$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 1 \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & \rho \end{vmatrix} = (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta - \rho\cos\theta\,,-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta - \rho\cos\theta\,,\rho)$$

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{3}\rho$$

$$\iint_S f = \iint_D f(r).\left\|\frac{\partial r}{\partial \rho}\times\frac{\partial r}{\partial \theta}\right\| = \iint_D \rho^2.\sqrt{3}\rho = \sqrt{3}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^3 d\theta d\rho = 2\pi\sqrt{3}\int_0^h \rho^3 d\rho = 2\pi\sqrt{3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^h = \pi\sqrt{3}\frac{h^4}{2}.$$

7.

Existe a função se $F = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$ é conservativo, ie se $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

$$2x - 2y = 2x - 2y \checkmark$$

Encontrar z tal que $\nabla z = F$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = F_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + 2xy - y^2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \int x^2 + 2xy - y^2 dx \\ z = \int x^2 - 2xy - y^2 dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 + A(y) \\ z = x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + B(x) \end{cases}$$

$$\therefore z(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

8.

i. $rot(F) = (-z^3 - 0, 0 - 0, 0 - -x^3) = (-z^3, 0, x^3)$.

$div(F) = -3x^2y + 3y^2 - 3yz^2$

ii. Os pontos que são fontes são aqueles onde a divergência é positiva

$$-3x^2y + 3y^2 - 3yz^2 \geq 0 \Leftrightarrow y(-3x^2 + 3y - 3z^2) \geq 0$$

$$(y \geq 0 \wedge y \geq x^2 + z^2) \vee (y \leq 0 \wedge y \leq x^2 + z^2)$$

Quando $y \geq 0$ trata-se dos pontos exteriores ao paraboloide $y = x^2 + z^2$

Quando $y \leq 0$ trata-se de todo esse semi-espaço (pois é sempre verdade $y \leq x^2 + z^2$)