Álgebra Linear e Geometria Analítica B

2014/15

Departamento de Matemática

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Slides da 2ª Semana de aulas

Matrizes

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **transformação elementar sobre as linhas de A** a uma transformação de um dos seguintes tipos:

I. Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$;

II. Multiplicação de uma linha de A por um $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

III. Substituição da linha i de A pela sua soma com linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Notação

Vai adoptar-se a seguinte notação para as transformações sobre linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\ell_3]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-3)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Notação

$A \xrightarrow[T]{} B$, significa que a matriz B se obteve de A efectuando a transformação elementar T (de tipo não especificado).

Definição

Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ **é equivalente por linhas a** $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se B se pode obter a partir de A efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares sobre linhas. Tal será denotado por

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1} \ell_i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é "*reversível*".

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

Exercício

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Não é elementar

Qual a importância das matrizes elementares?

(São invertíveis)

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*.*
Se

$$I_m \underset{T}{\longrightarrow} E,$$

sendo T *uma transformação elementar sobre linhas, então*

$$A \underset{T}{\longrightarrow} EA.$$

Nota: Qualquer transformação elementar sobre as linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida premutiplicando A (multiplicando à esquerda) por uma matriz elementar que resulta de I_m efectuando nas suas linhas a mesma transformação elementar que se pretende nas linhas de A.

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se efectuarmos a transformação elementar nas linhas de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Se fizermos a mesma transformação elementar nas linhas de I_2, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vejamos que EA dá o mesmo resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Que matriz se deve multiplicar à esquerda de A para:

1. *obter a matriz*

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2. *obter a matriz*

$$B_2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2/7 & 5/7 & -2/7 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Observação

Cá para nós... "As matrizes elementares são **vingativas**"

Proposição

Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

I. *Se* $i \neq j$ *e* $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E^{-1}$ $(E^{-1} = E)$.

II. *Se* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *e* $I_n \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha}\ell_i]{} E^{-1}$.

III. *Se* $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ *e* $I_n \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} E$ *então* $I_n \xrightarrow[\ell_i + (-\beta)\ell_j]{} E^{-1}$.

As matrizes elementares são invertíveis

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são <u>elementares</u>, então são <u>invertíveis</u>. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício

Justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, sabendo que

$$A = E_2 E_3 E_1,$$

onde E_1, E_2, E_3 *são as matrizes do exemplo anterior. Qual a inversa?*

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Chama-se **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha.Considera-se que uma linha nula não tem pivô. Chamam-se pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Exemplo

Os pivôs da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ são $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -4 \end{bmatrix}$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é **equivalente por linhas** *a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

Redução de uma matriz à forma de escada

Exemplo

Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$.

Então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\xrightarrow[\ell_2 + (-\frac{1}{2})\ell_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + (2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A' está em forma de escada e é equivalente por linhas a A.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Exemplos

Calculemos a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (f.e.)$$

Assim, $r(A) = 2$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ *e* $\mathrm{r}(A) \leq n$*, isto é,*

$$\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ *então é da forma* $A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$*.Após reduzir a matriz à f.e. a matriz obtida só poderão ser de um dos seguintes tipos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) \leq 3$.

Definição

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida** (abreviadamente, denotado por **f.e.r.**) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Estão em forma de escada reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \ \text{com } A'' \ \text{única}.$$

Redução de uma matriz à forma de escada reduzida

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.).$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.)$$

Observação

Uma matriz pode dar origem a <u>diversas</u> suas formas de escada, mas só dá origem a <u>uma</u> matriz em forma de escada reduzida.

Proposição

Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas <u>se e só</u> se têm a mesma forma de escada reduzida.

Exercício

Diga se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Justifique que A é invertível.*
5. *Indique A^{-1}.*
6. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Exemplo

Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

Vejamos se A é invertível.

Recorrendo ao teorema anterior,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell 2 + 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) = 1$ que sendo menor que $2 =$ordem de $A \Rightarrow A$ não é invertível.

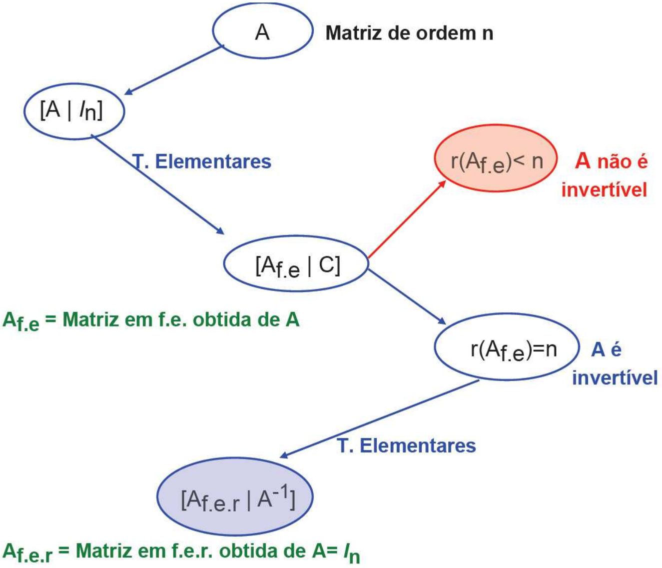
Caso A seja invertivel como obter A^{-1} ?

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível podemos calcular A^{-1} do seguinte modo:

1. Partindo de A efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n;
2. Partindo da identidade I_n efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas. A matriz obtida no final é A^{-1}.

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Conclusão: Como saber se A é invertível (esquematicamente):



Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + (-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} & \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}} \end{array}\right].$$