Exame de Análise Matemática I

Évora, 17 de junho 2015

1. Calcular (justificando) o limite seguinte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+4n^2+4n^4}-n^2}{n^2+4n+1}$$

2. Diga se a série é convergente e por que.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right).$$

3. Calcular a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}.$$

Ajuda: Separar em duas frações.

4. Derivar a função

$$f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right),\ x\neq 0$$

Indique que valores toma a função no domínio $x\neq 0$.

5. Calcular

$$\int_1^{e}\frac{\ln(x^2)}{x}\mathrm{d}x.$$

6. Encontre a função f, contínua em $[1,\infty)$, que verifica a equação

$$f''(x)=\frac{\ln(x)}{x^2},\ x>1,$$

e as condições iniciais $f(1)=f'(1)=0$.

7. Calcular a área da região compreendida entre as curvas

$$f(x)=(\cos(x))^2 \text{ e } g(x)=(\sin(x))^2,\ -\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}.$$

1. Vou utilizar "o conjugado"

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+4n^2+4n^4}-n^2\right)\left(\sqrt{1+4n^2+4n^4}+n^2\right)}{(n^2+4n+1)\left(\sqrt{1+4n^2+4n^4}+n^2\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+4n^2+4n^4-n^4}{(n^2+4n+1)\left(\sqrt{1+4n^2}+4n^4+n^2\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^4}{(n^2)(3n^2)}=1.$$

2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1$$

Primeiro vou simplificar a expressão e aplicar o conjugado

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}-1=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}=\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$$

Trata-se de uma série de termos positivos, vou comparar com $\sum\frac{1}{n^2}$ [pois grau baixo – grau cima =2]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(2n)}=\frac{1}{2}>0 \text{ e finito.}$$

Assim, por comparação, as séries $\sum\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$ $\sum\frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha=2>1$, converge. Desta forma a série pretendida também **converge**.

3. Vou separar em duas frações simples, pois a série será de Mengoli ou telescópica.

$$\frac{0n+2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{A}{2n+1}+\frac{B}{2n+3}=\frac{A(2n+3)+B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(2A+2B)+3A+B}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\begin{cases}2A+2B=0\\3A+B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-B\\-2B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

Esta é uma série de Mengoli com k=1, $\sum a_n-a_{n+1}$ e $a_n=\frac{1}{2n+1}$

A soma é dada por … (atenção que o primeiro termo é a_0)

$$S=a_0-1\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{1}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=1-0=1.\ \text{Converge}$$

4.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Como a derivada é <u>sempre</u> 0, a função é <u>sempre</u> igual a uma constante. Para saber qual é basta calcular num ponto. Como $f(1) = \frac{\pi}{2}$, o contradomínio é apenas $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Isto é a função toma sempre o valor $\frac{\pi}{2}$.

5.

$$\int_1^e \frac{\ln x^2}{x} dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\, dx = 2\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 = 1.$$

6. $f'' = \frac{\ln x}{x^2}, f(1) = f'(1) = 0.$

$$f' = \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \text{por partes} \quad \begin{cases} u' = \frac{1}{x^2} & \to u = -\frac{1}{x} \\ v = \ln x & \to v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\frac{1}{x} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

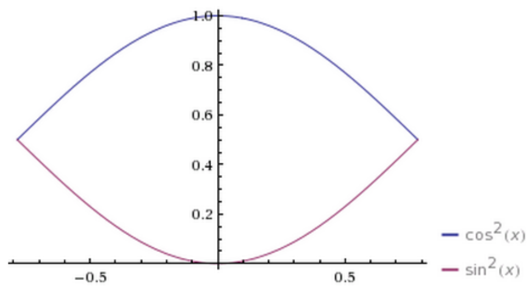
$$\text{como } f'(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1} + C = 0 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

$$f = \int -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 dx = -\int \frac{1}{x}\ln x\, dx - \int \frac{1}{x} dx + \int 1 dx = -\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x + x + D$$

$$\text{como } f(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(\ln 1)^2}{2} - \ln 1 + 1 + D \Leftrightarrow D = -1$$

$$\therefore f(x) == -\frac{(\ln x)^2}{2} - \ln x + x - 1$$



7.

Vou usar a fórmula $\cos^2 x - \text{sen}^2\, x = \cos 2x$

$$\text{Área} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x - \text{sen}^2\, x\, dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}[\text{sen}\, 2x]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}(1 - -1) = 1.$$