

# Programação Declarativa

## Licenciatura em Engenharia Informática

2014–2015

Vitor Beires Nogueira

Escola de Ciências e Tecnologia  
Universidade de Évora

## Conceitos Básicos

## Factos

## Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

## Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

## Definição

Factos são formas de expressar que uma determinada relação (*predicado*) se verifica entre objectos

## Exemplo

```
plus(0,0,0) .   plus(0,1,1) .   plus(0,2,2) .
plus(1,0,1) .   plus(1,1,2) .   plus(1,2,3) .
```

## Programa simples

Um conjunto finito de factos.

### Exemplo (Familia bíblica)

```

father(terach, abraham).    male(terach).
father(terach, nachor).     male(abraham).
father(terach, haran).      male(nachor).
father(abraham, isacc).     male(haran).
father(haran, lot).         male(isaac).
father(haran, milcah).      male(lot).
father(haran, yiscah).

                                female(sarah).
mother(sarah, isaac).       female(milcah).
                                female(yiscah).
```

## Conceitos Básicos

### Factos

### Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

### Definição

*Queries* são a forma de obter informação de um programa em lógica.

### Exemplo

```
father(terach, abraham) ?
```

### Queries vs Factos

- O facto  $P$  . indica que o goal  $P$  é verdade.
- A query  $P ?$  pergunta se o goal  $P$  é verdade.

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

### Regras de dedução

- As consequências lógicas são obtidas aplicando regras de dedução.
- A regra de dedução mais simples é a **identidade**: de  $P$  deduzimos  $P$ .

### Respostas a queries

- A resposta a `father(terach, abraham)` ? é *yes*.
- A resposta a `male(joe)` ? é *no*. Porquê?

### Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição

Uma variável lógica indica um individuo/objecto não especificado

### Exemplo

`father(abraham, X) ?`

`X=isaac`

Utilizando deste modo, uma variável permite sumariar muitas *queries*.

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instânciasQueries (quantificação  
existencial)Factos (quantificação  
universal)Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simplesSignificado de um programa  
em lógica

## Definição

Um termo é:

- uma constante. Por exemplo `isaac`.
- uma variável. Por exemplo `x`.
- um termo composto, definido por um functor e uma sequência de um ou mais termos
  - ▶ Um functor é caracterizado pelo seu nome (átomo) e pela sua aridade (número de argumentos)
  - ▶ Exemplos: `hot(milk), list(a, list(b, nil)), tree(tree(nil, 3, nil), 5, R)`.

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

## Estrutura de dados

Os termos são as únicas estruturas de dados nos programas em lógica.

## Termos *ground* e *non ground*

Termos

- ground não tem variáveis. Exemplo  $f_{OO}(a, b)$ .
- non ground tem variáveis. Exemplo  $f_{OO}(X)$ .



## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição

Uma substituição é um conjunto finito (possivelmente vazio) de pares da forma  $X_i = t_i$  em que

- $X_i$  é uma variável
- $t_i$  é um termo
- $X_i \neq X_j$  para todo  $i \neq j$
- $X_i$  não ocorre em  $t_j$  para qualquer  $i$  e  $j$ .

### Exemplo

$\{X=abraham, Y=isaac\}$

### Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição

O resultado da aplicação de uma substituição  $\theta$  a um termo  $A$  é denotado por  $A\theta$  e é o termo que resulta de substituir todas as ocorrências de  $X$  por  $t$  em  $A$ , para todos os pares  $X = t \in \theta$ .

### Exemplo

O resultado de aplicar  $\{X=abraham, Y=isaac\}$  ao termo  $father(X, Y)$  é  $father(abraham, isaac)$ .

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição

$A$  é uma instância de  $B$  se existir uma substituição  $\theta$  tal que  $A = B\theta$

### Exemplo

O termo `father(abraham, isaac)` é uma instância de `father(X, Y)`.

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

 A variável lógica,  
substituições e instâncias

 Queries (quantificação  
existencial)

 Factos (quantificação  
universal)

 Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

 Um interpretador abstracto  
simples

 Significado de um programa  
em lógica

## Variáveis em queries

- As variáveis nas *queries* são quantificadas existencialmente.
- A *query* `father(abraham, X) ?` deve ser lido como existe um  $X$  tal que `abraham` é o pai de  $X$ ?

## Regra de dedução: generalização

Uma *query* (existencial)  $P$  é uma consequência lógica de uma instância dela,  $P\theta$ , para qualquer substituição  $\theta$ .

## Exemplo

O facto `father(abraham, isaac)` implica que existe um  $X$  tal que `father(abraham, X) ?` é verdade. Qual é?

## Variáveis em factos

- As variáveis em factos são quantificadas universalmente.
- O facto `likes(X, pomegranates)` . deve ser lido como todos os objectos gostam de *pomegranates* (romãs).

## Regra de dedução: instanciação

De um expressão  $P$  quantificada universalmente podemos deduzir  $P\theta$ , para qualquer substituição  $\theta$ .

## Exemplo

- A partir de `plus(0, X, X)` . podemos deduzir que `plus(0, 2, 2)` ? é verdade.
- `likes(X, X)`

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

### Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição

$C$  é um instância comum de  $A$  e  $B$  se é uma instância de  $A$  e uma instância de  $B$ , ou seja, se existirem substituições  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tal que  $C = A\theta_1$  é sintacticamente idêntico a  $B\theta_2$

### Exemplo

- $\text{plus}(0, 3, 3)$  é uma instância comum entre  $\text{plus}(0, 3, Y)$  e  $\text{plus}(0, X, X)$ . Porquê?

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

## Exemplo (Queries conjuntivas)

- `father(terach, X), father(X, Y)?`
- De um modo geral,  $Q_1, \dots, Q_n$ ?

## Consequência lógica

- Caso ground: consequência de cada um dos elementos (trivial)
- Non ground: uma query conjuntiva é consequência lógica de um programa  $P$  se todos os *goals* da conjunção são consequência de  $P$ , tendo em conta que as variáveis partilhadas deve ter a mesma instânciação em todos os goals. É condição suficiente que exista um instância ground da query que seja consequência de  $P$ .

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Interpretação operacional

Em termos operacionais, para resolver de uma query conjuntiva  $A_1, \dots, A_n$  utilizando um programa  $P$ , devemos encontrar uma substituição  $\theta$  tal que  $A_1\theta$  e  $\dots A_n\theta$  são instâncias ground de factos em  $P$

### Exemplo

Considere a query `father(haran, X), male(X)` ? É verdade? Se sim, qual a substituição utilizada?



## Conceitos Básicos

Factos

Queries

 A variável lógica,  
substituições e instâncias

 Queries (quantificação  
existencial)

 Factos (quantificação  
universal)

 Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

## Regras

 Um interpretador abstracto  
simples

 Significado de um programa  
em lógica

## Definição

Regras são expressões da forma

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

em que  $n \geq 0$ ,  $A$  é a cabeça da regra e  $B_1, \dots, B_n$  o corpo. Nota: as variáveis também são universalmente quantificadas e o alcance (scope) é a regra toda.

## Exemplo

```
son(X, Y) <- father(Y, X), male(X).
```

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

### Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

## Interpretação de regras

As regras podem ser interpretadas de um modo operacional ou declarativo

### Definição

A lei do *modus ponens* universal define que a partir da regra  $R = (A \leftarrow B_1, \dots, B_n)$  e dos factos  $B'_1, \dots, B'_n$ , o goal  $A'$  pode ser derivado se  $A' \leftarrow B'_1, \dots, B'_n$  for uma instância de  $R$ .

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica, substituições e instâncias

Queries (quantificação existencial)

Factos (quantificação universal)

Queries conjuntivas e partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto simples

Significado de um programa em lógica

### Definição (Programa em lógica)

Um programa em lógica é um conjunto finito de regras.

### Definição (Consequência lógica)

Um goal  $G$  existencialmente quantificado é uma consequência lógica do programa  $P$  se existir uma cláusula em  $P$  com uma instância *ground*  $A \leftarrow B_1, \dots, B_n, n \geq 0$  tal que  $B_1, \dots, B_n$  são consequências lógicas de  $P$  e  $A$  é uma instância de  $G$ .

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

### Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Exemplo (Familia bíblica: regras)

```
son(X,Y) <- father(Y, X), male(X).
son(X,Y) <- mother(Y, X), male(X).
grandparent(X,Z) <- father(X, Y), father(Y, Z).
grandparent(X,Z) <- father(X, Y), mother(Y, Z).
grandparent(X,Z) <- mother(X, Y), mother(Y, Z).
grandparent(X,Z) <- mother(X, Y), father(Y, Z).
```

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

### Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Exemplo (Família bíblica: regras mais elegantes)

```
parent(X, Y) <- father(X, Y).
parent(X, Y) <- mother(X, Y).
son(X,Y) <- parent(Y, X), male(X).
grandparent(X,Z) <- parent(X, Y), parent(Y, Z).
```

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

---

**Input:** A ground goal  $G$  and a program  $P$

**Output:** yes if  $G$  is a logical consequence of  $P$ ,  
no otherwise

**Algorithm:** Initialize the resolvent to  $G$ .  
while the resolvent is not empty do  
    choose a goal  $A$  from the resolvent  
    choose a ground instance of a clause  $A' \leftarrow B_1, \dots, B_n$  from  $P$   
        such that  $A$  and  $A'$  are identical  
        (if no such goal and clause exist, exit the while loop)  
    replace  $A$  by  $B_1, \dots, B_n$  in the resolvent  
if the resolvent is empty, then output yes, else output no.

---

**Figura :** Interpretador abstracto que responde *yes/no* a *queries ground* relativamente a um programa em lógica

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

## Escolhas no algoritmo

No algoritmo do interpretador abstracto existem duas escolhas:

- 1 o goal a “reduzir”: arbitrário
- 2 a cláusula e sua instância: não determinística

## Definição (Redução)

Uma redução de um goal  $G$  através de um programa  $P$  consiste na substituição de  $G$  pelo corpo de uma instância de uma cláusula em  $P$ , cuja cabeça é idêntica ao *goal* escolhido.

## Conceitos Básicos

Factos

Queries

A variável lógica,  
substituições e instâncias

Queries (quantificação  
existencial)

Factos (quantificação  
universal)

Queries conjuntivas e  
partilha de variáveis

Regras

Um interpretador abstracto  
simples

Significado de um programa  
em lógica

### Definição (Significado de um programa)

O *significado* (semântica) de um programa em lógica  $P$ , denotado por  $M(P)$ , é o conjunto de *goals ground* deduzíveis a partir de  $P$ .

### Definição (Correcção)

Um programa  $P$  é correcto em relação a determinado significado  $M$  sse  
 $M(P) \subseteq M$

### Definição (Completeness)

Um programa  $P$  é completo em relação a determinado significado  $M$  sse  
 $M(P) \supseteq M$