Universidade de Évora

Departamento de Matemática

1.ª FREQUÊNCIA - 22/10/2016

RESOLUÇÃO

Grupo I

1. Considere o seguinte conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3 \wedge x+1 \geq 0\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Como

$$|x+2| < 3 \Longleftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$$

e

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1,$$

então,

$$|x+2| < 3 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1,$$

pelo que o conjunto em questão é

$$A = [-1,1[\cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Donde, atendendo às definições, tem-se que

$int(A) = (-1,1)\,,\quad fr(A) = \{-1,1\} \cup \left\{1+\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\},\quad \overline{A} = [-1,1] \cup \left\{1+\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
e $\quad A' = [-1,1]\,.$

b) Pela alínea anterior, sabe-se que $int(A) \neq A$, então pode concluir-se que A não é um conjunto aberto. Por outro lado, dado que $\overline{A} \neq A$, então A não é um conjunto fechado.

Além disso, como

$$-1 \leq x \leq 2, \quad \forall x \in A,$$

pode afirmar-se que o conjunto A é limitado, pois é majorado por 2 e minorado por -1.

c) Dado que $-1, 2 \in A$ e $-1 \leq x \leq 2$, para todo o $x \in A$, então $\sup(A) = \max(A) = 2$ e $\inf(A) = \min(A) = -1$.

Grupo II

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Provemos primeiro, através do Princípio de Indução Matemática, que a sucessão $(x_n)_n$ é descrescente, ou seja, que $x_{n+1} - x_n \leq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Seja $P(n) : x_{n+1} - x_n \leq 0$.

i) Provemos que $P(1) : x_2 - x_1 \leq 0$ é verdadeira.

Como

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+1} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

então conclui-se que $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

ii) Vejamos agora que $P(n)$ é hereditária, ou seja, que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, isto é, que

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} \leq 0.$$

Como, por hipótese de indução, se tem

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\, x_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, x_{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{n+1}$$

e dado que

$$n+2 > n+1,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

então, tem-se que

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\, x_{n+1} + \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}\, x_{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{n+1} = x_{n+1},$$

ou seja,

$$x_{n+2} - x_{n+1} \leq 0.$$

Portanto, $P(n)$ é hereditária. Donde, aplicando-se o Princípio de Indução Matemática, por i) e ii) conclui-se que $P(n)$ é universal, isto é, a sucessão $(x_n)_n$ é descrescente.

Como $(x_n)_n$ é descrescente, então

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots,$$

pelo que a sucessão é majorada. Por outro lado, mostrando que $(x_n)_n$ é positiva, ou seja, $x_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que $(x_n)_n$ é limitada.

Provemos então que a sucessão $(x_n)_n$ é positiva. Seja $P(n) : x_n > 0$.

I) Mostremos que $P(1)$ é verdadeira.

Como $x_1 = 1 > 0$, então $P(1)$ é verdadeira.

II) Vejamos agora que $P(n)$ é hereditária, ou seja, que

$$x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0.$$

Dado que, por hipótese de indução,

$$x_n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\, x_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{n+1} > 0$$

então,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+1} > 0,$$

pelo que, $P(n)$ é hereditária. Logo, aplicando-se o Princípio de Indução Matemática, por I) e II) conclui-se que $P(n)$ é universal, ou seja, a sucessão $(x_n)_n$ é positiva.

Finalmente, pelo o teorema das sucessões monótonas, sabe-se que toda a sucessão monótona e limitada é convergente, portanto, $(x_n)_n$ é convergente. Seja $L = \lim\limits_n x_n$.

Como $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{n+1}$, pelas propriedades do limites, tem-se que

$$\lim_n x_{n+1} = \lim_n \left(\frac{1}{2}\, x_n + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_n x_n + \lim_n \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow L = \frac{1}{2}\, L + 0 \Leftrightarrow L = 0.$$

3.

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+2}-1}{2^n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^2-1/2^n}{1+1/2^n}=\frac{4-0}{1+0}=4;$$

$$b)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+2/n^2-1/n^3}}{1+2/n}=1;$$

$$c)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\ sen\,(n!)}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\times sen\,(n!)\,.$$

Uma vez que a sucessão de termo geral $x_n = sen\,(n!)$ é uma sucessão limitada, pois

$$|sen\,(n!)|\le 1,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

e como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1/\sqrt[3]{n}}{1+1/n}=0,$$

então no limite em questão tem-se o produto de uma sucessão limitada por uma que tende para zero. Logo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\ sen\,(n!)}{n+1}=0.$$

Grupo III

4. A série numérica pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\right].$$

Como as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ são duas séries geométricas de razões $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ e $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$, respectivamente, portanto convergentes. E, dado que a soma de duas séries convergentes é uma série convergente, então pode concluir-se que a série inicial é convergente, pelo que tem soma. Sendo a sua soma dada por $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma da primeira série e S_2 é a soma da segunda.

Assim, uma vez que

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1},$$

tem-se $\quad S = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} + \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}.$

5.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}.$

Como

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} - \frac{A}{n+1} = \frac{2A}{n^2 - 1} \Rightarrow 2 = 2A \Leftrightarrow A = 1,$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ é uma série de Mengoli, com $x_n = a_n - a_{n+2}$, em que

$$a_n = \frac{1}{n-1}.$$

Uma vez que

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{1}{n-1} = 0,$$

tem-se que a sucessão $(a_n)_n$ é convergente, portanto, a série de Mengoli é convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} sen \left(\frac{1}{n^2} \right).$

Como $\dfrac{1}{n^2} \in \left]0, 1\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então trata-se de uma série de termos não negativos. Por outro lado, dado que

$$x_n = sen \left(\frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{1}{n^2} = y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet, com $\alpha = 2 > 1$, logo, convergente. Então, por aplicação do Critério Geral de Comparação, conclui-se que a série dada também é convergente.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Como $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então temos uma série de termos não negativos. Portanto, por aplicação do Critério da Raiz de Cauchy, uma vez que

$$L = \lim_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1,$$

podemos concluir que a série é convergente.

Grupo IV

6.

a) Se $a \in int(A)$, então $a \in fr(\mathbb{R} \backslash A$.

Falsa, porque se $a \in int(A)$ e dado que $int(A) = ext(\mathbb{R}\backslash A)$, então isto significa que $a \in ext(\mathbb{R}\backslash A)$. Por outro lado, sabemos que $fr(\mathbb{R}\backslash A) \cap ext(\mathbb{R}\backslash A) = \varnothing$. Portanto, $a \notin fr(\mathbb{R}\backslash A)$, pelo que a afirmação é falsa.

b) Se a sucessão $(x_n)_n$ é limitada, então $(x_n)_n$ é converge.

Falsa, porque, por exemplo, a sucessão de termo geral $x_n = (-1)^n$ é limitada uma vez que $-1 \leq x_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, mas não é convergente, pois

$$\lim_n x_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_n x_{2n-1}.$$

c) Dada a sucessão $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n n}{2n+1}$, tem-se que $\underline{\lim}\ x_n = \frac{1}{2}$ e $\overline{\lim}\ x_n = \frac{3}{2}$.

Verdadeira, pois a subsucessão dos termos de ordem par tem por termo geral

$$x_{2n} = 1 + \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{(-1)^{2n}2n}{4n+1} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{2n}{4n+1},$$

cujo limite é

$$\lim_n x_{2n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{2n}{4n+1}\right) = 1 + 0 + \lim_n \frac{2}{4+1/n} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}.$$

e a subsucessão dos termos de ordem ímpar tem por termo geral

$$x_{2n-1} = 1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{4n-1} = 1 - \frac{1}{2n-1} - \frac{2n-1}{4n-1},$$

cujo limite é

$$\lim_n x_{2n-1} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{2n-1} - \frac{2n}{4n-1}\right) = 1 - 0 - \lim_n \frac{2}{4-1/n} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\underline{\lim}\, x_n = \frac{1}{2}$ e $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$, pelo que a afirmação é verdadeira.

d) Se $x_n \geq 1$ para um número infinito de valores de n, então a série $\sum_{n\geq 1} x_n$ é divergente.

Verdadeira, pois se $x_n \geq 1$ para um número infinito de valores de n, então existe uma sua subsucessão $(x_{\alpha_n})_n$ tal que $x_{\alpha_n} \geq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se a subsucessão $(x_{\alpha_n})_n$ for convergente, então (pelas propriedades dos limites) tem-se que

$$\lim_n x_{\alpha_n} \geq 1.$$

Logo, pelo teorema da unicidade do limite, se a sucessão $(x_n)_n$ for convergente tem-se que

$$\lim_n x_n \neq 0$$

e, consequentemente, não se verifica a condição necessária de convergência de uma série, pelo que a série é divergente. Donde, a afirmação é verdadeira.