1. Calcule os limites

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2}{1+n+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1.$

b) $\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{n+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n-\sqrt{n+n^2}\right)\left(n+\sqrt{n+n^2}\right)}{n+\sqrt{n+n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-(n+n^2)}{n+\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{2n} = \frac{-1}{2}.$

2. Estude a natureza das séries.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{n^7+n^5+1}}$

Esta é uma série de termos positivos.

Como a diferença de graus (baixo – cima) é 7/2 – 2= 3/2, vou comparar com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+n+n^2}{\sqrt{n^7+n^5+1}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}n^2}{\sqrt{n^7}} = 1 > 0 \text{ e finito.}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{1+n+n^2}{\sqrt{n^7+n^5+1}}$ e $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha = 3/2$, logo convergente, a série em causa também é **convergente**.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-2n}$

Esta é uma série de termos positivos. Vou utilizar o critério D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-2(n+1)}}{ne^{-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-2n}e^{-1}}{ne^{-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^{-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-1}}{n} = \frac{1}{e} < 1$$

Como o limite é menor que um, pelo critério D'Alembert, a série **converge**.

3. Calcule a soma da série.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(e^2)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{e^2}\right)^n$$

$\therefore$ É uma série geométrica de razão $\frac{-1}{e^2}$. Como a razão verifica $-1 < \frac{-1}{e^2} < 1$, a série é **CONVERGENTE**.

A soma é $S = \dfrac{1^{\text{º}}\text{termo}}{1 - \text{razão}} = \dfrac{(-1)^0 e^{-2.0}}{1 - \frac{-1}{e^2}} = \dfrac{1}{\frac{e^2+1}{e^2}} = \dfrac{e^2}{e^2+1}$.

4. Indique o domínio da função $f(x) = \frac{x+1}{x^3-x}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^3 - x \neq 0\}$$

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

$$D = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

5. Estudar a continuidade no ponto $x = 0$ da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{x}, x < 0 \\ \dfrac{x+\pi}{x+1} \quad , x \geq 0 \end{cases}$$

A função será contínua se os limites laterais forem iguais.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \pi \times 1 = \pi;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\pi}{x+1} = \pi.$$

Assim a função é contínua em $x = 0$.