# Exame de AM I
## U. de Évora, 18 de junho de 2014

**1. Calcular o limite de** $\dfrac{3n+n^2}{1+n^3} - \dfrac{1-n^3}{2n+n^3}$ **.**

**2. Encontrar a soma da série** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2^n}{3^n}$ **.**

**3. Calcular as derivadas primeira e segunda de** $x^4 - 2x^2$ **, compor a lista de pontos críticos, classificar os pontos críticos em máximos e mínimos relativos. Encontrar os máximos e mínimos absolutos no intervalo** $[0, 2]$ **(quando existir) e traçar o gráfico aproximado da função nesse intervalo.**

**4. Derivar três vezes a função** $\dfrac{2x^3+4x^2-1}{x+2}$ **e simplificar o resultado.**

**5. Derivar a função** $\displaystyle\int_1^{1+x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ **,** $x \in \mathbb{R}$ **.**

**6. Encontrar a área da região compreendida entre as curvas** $y_1(x) = 2x - x^2$ **e** $y_2(x) = -x$ **.**

Nota: os limites de integração são as duas soluções de $y_1(x) = y_2(x)$ .

**7. Diga se o integral** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(4+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ **é convergente e se o for, calcule o seu valor.**

**8. Encontrar o polinómio de Taylor de grau** $3$ **de** $\ln(x)$ **no ponto** $x = 2$ **.**

**1. Calcular o limite**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+n^2}{1+n^3}-\frac{1-n^3}{2n+n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^3}-\frac{-n^3}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+1=0+1=1.$$

**2. Encontrar a soma da série**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3^n}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

São duas séries geométricas. A primeira tem como razão $1/3$, a segunda $2/3$.

A soma de uma série geométrica é dada por $S=\frac{1^{\underline{o}}\ termo}{1-r}$.

$$S_1=2\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=1 \qquad S_2=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{6}{3}=2$$

Assim a soma da série pretendida é $S=1+2=3$.

**3. Calcular 1as e 2as derivadas de $x^4-2x^2$. Pontos críticos e classificar (geral e em [0,2]). Gráfico.**

$f(x)=x^4-2x^2;\ \ f'(x)=4x^3-4x;\ \ f''(x)=12x^2-4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=0\vee x^2-1=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\pm1$

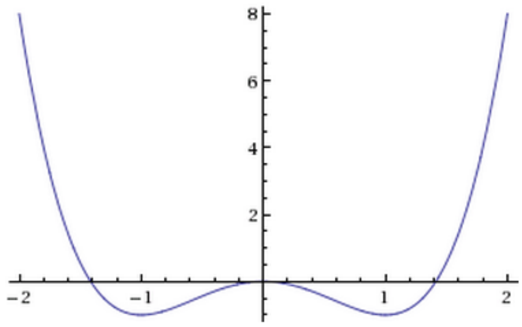
| | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | decresce | mín | cresce | Máx | decresce | mín | cresce |

A função tem como máximo relativo $f(0)=0$.

A função tem como mínimo relativo (vai ser também absoluto) $f(\pm1)=-1$.

No intervalo [0,2] é necessário calcular $f(0)=0, f(2)=8$.

Assim neste intervalo o máximo absoluto é $f(2)=8$ e o mínimo absoluto é $f(1)=-1$.



4. **Derivar três vezes $\frac{2x^3+4x^2-1}{x-2}$**

$$f'(x) = \frac{(6x^2+8x)(x-2)-(2x^3+4x^2-1)1}{(x-2)^2} = \frac{4x^3-8x^2-16x+1}{(x-2)^2};$$

$$f''(x) = \frac{(12x^2-16x-16)(x-2)^2-(4x^3-8x^2-16x+1)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4x^3-24x^2+48x+30}{(x-2)^3}$$

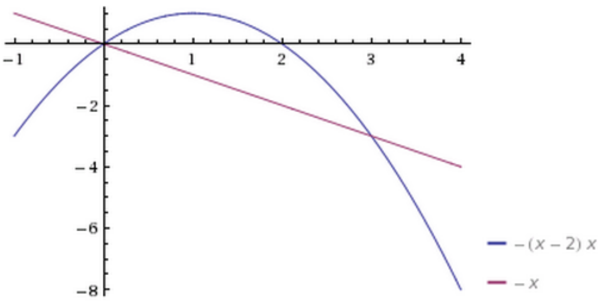
$$f'''(x) = \frac{(12x^2-48x+48)(x-2)^3-(4x^3-24x^2+48x+30)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{186}{(x-2)^4}.$$

5. **Derivar a função $\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt$.**

É necessário aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral ...

$$\left(\int_1^{1+x}\frac{1}{t}dt\right)' = (1+x)'\frac{1}{1+x}-(1)'\frac{1}{1} = 1\times\frac{1}{1+x}-0 = \frac{1}{1+x}.$$

6. **Encontrar a área de $y = 2x - x^2, y = -x$.**




Para encontrar os limites de integração é necessário igualar as equações

$$2x - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Como a função superior é $\mathbf{2x - x^2}$ e a inferior é $\mathbf{-x}$

$$\text{Área} = \int_0^3 2x - x^2 - (-x)dx = \int_0^3 -x^2+3xdx = \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{-3^3}{3}+\frac{3.3^2}{2}-0 = -9+\frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

7. **Diga se o integral é convergente (calcule-o) $\int_1^\infty \frac{1}{(4+x)^{3/2}}dx$.**

$$\int_0^\infty \frac{1}{(4+x)^{3/2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b (4+x)^{\frac{-3}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(4+x)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{4+x}}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{4+b}} - \frac{2}{\sqrt{4}} = \frac{2}{\infty} - 1 = -1 \quad \text{Converge.}$$

8. **Encontrar o polinómio de Taylor de grau 3 de $\ln x$ no ponro $x = 2$.**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \text{Resto}$$

$f(2) = \ln 2$ ;

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \quad \rightarrow f'(2) = \dfrac{1}{2}$;

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow f''(2) = \dfrac{-1}{4}$;

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \quad \rightarrow f'''(2) = \dfrac{1}{4}$;

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2 \times 4} + \frac{(x-8)^3}{6 \times 4} + Resto.$$