1.

a. Domínio de $f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - 5$

$D = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 1 \; e \; x \neq 0\} = [-1,1] \setminus \{0\}$.

b. Continuidade

A função é contínua no seu domínio.

c.

$$f(-1) = \frac{\arcsin(-1)}{-1} - 5 = \frac{\pi}{2} - 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} - 5 = 2\frac{\pi}{6} - 5$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x} - 5\right) = \frac{0}{0} - 5 \text{ regra Cauchy } = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 5 = -5$$

d. Prolongável por continuidade a *x*=0?

A função é prolongável por continuidade a x=0 porque existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

A função prolongamento é …

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} - 5, x \neq 0 \\ -5 \qquad\quad , x = 0 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-4x+3}, x < 1 \\ a\, e^{\frac{x-1}{2}} \qquad , x \geq 1 \end{cases}$$

a. Encontre $\underline{a}$ para que *f* seja diferenciável em *x*=1.

É necessário primeiro que seja contínua em x=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{0}{0} \text{ regra Cauchy } = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2x-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} a\, e^{\frac{x-1}{2}} = a$$

Pelo que $a = -\frac{1}{2}$.

Para ser diferenciável é necessário também que $f_e'(1) = f_d'(1)$

$$f_e'(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{x^2-4x+3} - -\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x^2-2x+1}{2x^2-8x+6}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{2x^3-10x^2+14x-6}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ regra Cauchy } = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-2}{6x^2-20x+14} = \frac{0}{0} \text{ regra Cauchy } = \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{12x-20} = -\frac{1}{4}$$

$$f_d'(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} - -\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ regra Cauchy } = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}} = -\frac{1}{4}$$

Pelo que f é diferenciável em x=1 se $a = -\frac{1}{2}$.

b. $\boldsymbol{f'(x)}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3-(x-1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}, & x<1\\ -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}} & ,x\geq 1\end{cases}$$

c. Monotonia.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-x^2+2x-1}{(x^2-4x+3)^2}=0, x<1\\ -\dfrac{1}{4}e^{\frac{x-1}{2}}=0 \quad ,x\geq 1\end{cases} \text{Não tem zeros}$$

Como para $x<1,\ f'(x)<0$ então a função f é decrescente em $]-\infty,1[$

Como para $x>1,\ f'(x)<0$ então a função f é decrescente em $]1,+\infty[$

d. Equação da reta tangente a f em x=1.

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y--\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

3. Mostre que $\boldsymbol{f(x)=e^x-x-2}$ tem exatamente duas soluções.

Como f é contínua e $f(0)\times f(2)<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano f tem pelo menos uma raiz $\mathbf{c_1}$ no intervalo]0,2[.

Como f é contínua e $f(-2)\times f(0)<0$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano f tem pelo menos uma raiz $\mathbf{c_2}$ no intervalo]-2,0[.

Como $f'(x)=e^x-1>0$ para $x>0$, f é estritamente crescente e a ter um zero será único (será $\mathbf{c_1}$).

Como $f'(x)=e^x-1<0$ para $x<0$, f é estritamente decrescente e a ter um zero será único (será $\mathbf{c_2}$).

Assim f tem exatamente duas raízes.

4.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\sin x-\cos x}=\frac{0}{0}\text{ regra Cauchy }=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x+\sin x}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(1+x)}\times\sin x=\text{"}infinitéssimo\times limitada\text{"}=0$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x-1}{2\sqrt{x}-x-1}=\frac{0}{0}\text{ regra Cauchy }=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}=\frac{0}{0}\text{ regra Cauchy }=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}}=2.$$

5. $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x$

Com $f(x) = \arctan x$ em $[0, x]$, o Teorema de Lagrange diz que existe $c \in]0, x[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Como $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$ fica …

$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{\arctan x}{x}$$

Finalmente como $0 < c < x$

$$\frac{1}{1 + x^2} < \frac{\arctan x}{x} < \frac{1}{1 + 0^2}$$

$$\frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x$$

6.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{n+2} - 1}{e^n + 5}$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{e^{n+2} - 1}{e^n + 5} = \pm e^2$$

Como o termo geral da série não tende para 0, a série é **divergente**.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$

Trata-se de uma série alternada.

Analisando a convergência absoluta …

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + 1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n} + 1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Por comparação as séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ e $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ têm a mesma natureza. Como $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma série de Dirichlet com $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ logo divergente, a série a ser estudada também é divergente. Assim **não converge absolutamente**.

Analisando a convergência simples … como $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \to 0$ e é decrescente, pelo critério de Leibnitz a série é simplesmente convergente.