Ficha de Exercícios: "Matrizes"

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique qual o tipo da matriz A.

   (b) Quais os valores das entradas a_{12} e a_{21}?

   (c) Para que pares (i, j) se tem $a_{ij} = 1$?

   (d) Indique qual é a 2^{a} coluna de A e qual é a sua 1^{a} linha.

2. Resolva cada equação matricial em a, b, c e d:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule, quando possível:

   (a) $A + 2B$; (b) $3B + D$; (c) $4D - 3C$.

4. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}$ definida por:

   (a) $a_{ij} = i + j$;

   (b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -1, & i > j \\ 2, & i < j. \end{cases}$

5. Determine a, b e c números reais tais que: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

6. Considere as matrizes $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine uma matriz $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, que satisfaça a equação

$$X + A = 2(X - B).$$

7. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$;

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

8. Para cada par de matrizes indicadas determine, se possível, as matrizes A^2, B^2, AB e BA.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Utilizando as matrizes A e B do exercício 7(a), calcule: AB, $(AB)^T$, B^TA^T e A^TB^T.

10. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine as matrizes simétricas e as matrizes hemi-simétricas.

11. Mostre que a única matriz de ordem n que é simétrica e hemi-simétrica é a matriz nula.

12. Utilizando as matrizes do exercício 3, calcule sempre que possível:

   (a) $AD + BD$;

   (b) $BD + A$;

   (c) $(A + B)D$;

   (d) $D^T(A^T + B^T)$;

   (e) $(C^2)^T$;

   (f) $(C^T)^2$.

13. Utilizando as matrizes A e B do exercício 8(a), calcule $(AB)_{12}$, a primeira linha de AB e a terceira coluna de BA.

14. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Se A e B são matrizes quadradas com a mesma ordem então
   $$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

   (b) Se A e B são matrizes quadradas com a mesma ordem então
   $$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

   (c) Se A e B são matrizes quadradas com a mesma ordem então
   $$(AB)^n = A^nB^n$$
   para todo o $n \in \mathbb{N}$.

15. Obtenha uma fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$, onde A é a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

16. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Indique quais estão em forma de escada e quais estão em forma de escada reduzida.

(b) Determine a característica de cada uma das matrizes.

(c) Para cada uma das matrizes, que não esteja em forma de escada reduzida, encontre a sua forma de escada reduzida.

17. Determine se são equivalentes por linhas as matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Calcule a característica das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

19. Discuta, em função dos valores reais de α e β, a característica das seguintes matrizes:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível, cuja inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma matriz B tal que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Determine uma matriz C tal que $AC = A + 2I_3$ e justifique que essa matriz é única.

21. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

22. Verifique se as matrizes seguintes são, ou não, invertíveis:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

23. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Indique se cada uma das matrizes é elementar de tipo I, II ou III.

(b) Sem efectuar a multiplicação de matrizes determine

$$A\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 9 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad C\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 4 & 5 & \beta \\ \gamma & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad D\begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 1 \\ 6 & \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(c) Para as matrizes elementares encontradas em (a), determine as suas inversas.

24. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_1E_2A = I$.

(b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.

(c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

25. Expresse A e A^{-1} como produto de matrizes elementares:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

26. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$
Encontre matrizes E, F e G elementares e R uma matriz em forma de escada, por forma a que se tenha
$$A = EFGR.$$

27. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

28. (a) Determine o conjunto dos valores $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}$$
é invertível.

(b) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ a matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$$
é invertível.

29. Indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) Toda a matriz invertível pode ser factorizada como um produto de matrizes elementares.

(b) Se A é uma matriz quadrada singular, então o sistema $AX = B$ tem infinitas soluções.

(c) Se A é uma matriz quadrada singular, então a sua forma de escada reduzida tem pelo menos uma linha nula.

(d) Se A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogéneo $AX = 0$ tem apenas a solução trivial.

(e) Se A é uma matriz quadrada singular e se B é obtida de A por troca de duas linhas, então B também é singular.

Ficha de Exercícios: "Sistemas de Equações Lineares"

1. Quais das equações seguintes são equações lineares em x, y e z?

   (a) $x + \pi y + \sqrt[3]{2}z = e$;

   (b) $x^2 + xy + z = 2$;

   (c) $\sin y + 2z = -x$;

   (d) $ax + 6y - 3z = 9$, com $a \in \mathbb{R}$.

2. Um sistema de duas equações lineares, em três variáveis, pode representar que figuras geométricas do espaço $\mathbb{R}^3$?

3. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 6x_3 - 4x_4 = -6. \end{cases}$$

   (a) Indique a matriz simples do sistema, a matriz das incógnitas, a matriz dos termos independentes e a matriz ampliada.

   (b) Qual a forma matricial do sistema?

   (c) Justifique de duas formas distintas que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 1, 1, 3)$ é solução do sistema.

4. Resolva, geometricamente e analiticamente, os seguintes sistemas, nas incógnitas x_1, x_2, sobre $\mathbb{R}$:

   (a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

5. Discuta e resolva os seguintes sistemas de equações lineares. Determine para cada caso o conjunto das soluções do sistema:

   (a) $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y + z = 2. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x + 2y - 2z - w = 1 \\ 2x + y - z + 4w = -1 \\ -3x + 3z + 9w = 0. \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 8 \\ 7x + y - 8z = -5 \\ -4x + 3y + z = 10. \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

   (h) $\begin{cases} x + 2y - 2z - w = 1 \\ 2x + y - z + 4w = -1 \\ -3x + 3z + 9w = 0. \end{cases}$

   (i) $\begin{cases} x + 7y + 5z + 3w + 2u = 0 \\ 4y + 2z + 2w = 1 \\ 2x - 2y + 4z + u = -1 \\ 3x - y + 7z + w + 3u = 0. \end{cases}$

6. Sem efectuar cálculos, justifique quais dos seguintes sistemas têm mais do que uma solução:

(a) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

7. Determine os valores da constante $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema seguinte, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, tenha soluções não nulas:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + y + cz = 1 \\ x + by + z = 1 \\ cx + y + az = 1. \end{cases}$$

(a) Resolva o sistema para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$.

(b) Para $a = b = c = 1$, determine a característica da matriz simples e da matriz ampliada do sistema.

(c) Para b qualquer, mostre que, quando $a = c$, o sistema não é determinado.

9. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e utilize a matriz A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = \alpha \\ \;\;2x - 2z = \beta \\ -x + y + z = \gamma \end{cases} , \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

10. (a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema seguinte seja possível:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = \alpha \\ 3x - y + 3z = 4 \\ 5x - 3y + 5z = 10. \end{cases}$$

(b) Calcule a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

onde α é o valor determinado em (a).

11. Considere os seguintes sistemas de equações lineares, nas variáveis reais x, y e z:

(a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+(b+1)z=3 \\ x+y+(a-1)z=a-1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-by-az=-a \\ x-2y+2z=3 \\ x-by+2z=2 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} -x+ay+bz=b \\ x-y+z=2 \\ x-ay+z=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x-ay+2z=-1 \\ -x-y+(a+1)z=b-2 \end{cases}$.

Discuta os sistemas em função dos parâmetros reais a e b.

12. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas variáveis reais x, y, z e w:

$$\begin{cases} x+z+2w=0 \\ x+y+z+(\alpha+2)w=0 \\ 2x+y+(\alpha+2)z+(\alpha+4)w=0 \\ 4x+\beta y+4z+8w=\beta. \end{cases}$$

(a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

(b) Para $\alpha=\beta=0$ indique o conjunto-solução do sistema.