Álgebra Linear e Geometria Analítica B

2014/15

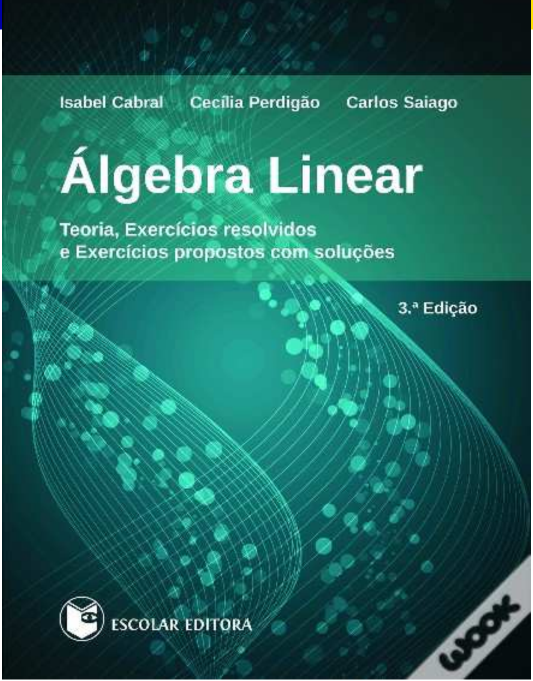
Departamento de Matemática

Slides da 1ª Semana de aulas

FCT/UNL

O material aqui exposto serve de apoio às aulas Teóricas da Unidade Curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica-B, no ano lectivo de 2014/15, e tem por base a Referência Bibliográfica:

ISABEL CABRAL, CECÍLIA PERDIGÃO, CARLOS SAIAGO, Álgebra Linear, Escolar Editora (3ª ou 4ª Edição)


Isabel Cabral Cecília Perdigão Carlos Saiago
Álgebra Linear
Teoria, Exercícios resolvidos
e Exercícios propostos com soluções
3.ª Edição
ESCOLAR EDITORA
wook

Apresentação

Responsável: Herberto de Jesus da Silva

Regente: Cláudio Fernandes

1. Gabinete 50, 3piso ed. VII
2. Horário de dúvidas: Segunda-Feira 15:00h às 18:30h
3. caf@fct.unl.pt

Professores dos Turnos Práticos:
Maria Helena Santos (P1,P2,P3,P4,P5)
Rosário Fernandes (P8,P9,P10)
Cláudio Fernandes (P6,P7)

Testes: **T1** 1º 22 de Outubro
T2 2º 26 de Novembro
T3 3º 17 de Dezembro

Avaliação: Consultar o clip

Programa

1. **Matrizes**
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes $\hookleftarrow$ **1º Teste**
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios $\hookleftarrow$ **2º Teste**
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica $\hookleftarrow$ **3º Teste**

Matrizes

1.1 Algumas definições e exemplos

- $\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ - conjunto dos escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Definição

Matriz é um quadro de números, denominados **entradas da matriz**, dispostos em m linhas e n colunas, dizendo-se por isso que a **matriz é de tipo** $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(ou abreviadamente $A = [a_{ij}]$)

a_{21} - elemento de A situado na linha 2 e na coluna 1

a_{ij} - elemento de A situado na linha i e na coluna j
- elemento da posição (i, j)

(em primeiro lugar temos o número de linhas e depois o número de colunas)

linha i de $A = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

coluna j de $A = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ - conjunto das matrizes do tipo $m\times n$ sobre $\mathbb{K}$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}); \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & i & -5 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$ (Matriz quadrada de ordem 3)

$$D = [1 \;\; 3 \;\; 5 \;\; -i] \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{C})$$ (Matriz linha)

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$$ (Matriz coluna)

$$F = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{1}(\mathbb{R})$$

Definição

Diz-se que as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$. Caso contrário escreve-se $A \neq B$.

Nota:

- $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

  $$\underline{\underline{A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n}}$$

- a_{ij}, b_{ij} - dizem-se elementos **homólogos**

- Só podem ser iguais matrizes com igual número de linhas, igual número de colunas e com elementos homólogos iguais.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- A diz-se uma **matriz–linha** se $m = 1$.
- A diz-se uma **matriz–coluna** se $n = 1$.
- A diz-se uma **matriz quadrada** se $m = n$. Neste caso diz-se que A é **quadrada de ordem** n ou, simplesmente, que A é uma matriz de ordem n.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -e^{-2} & 5\pi \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \ \ e\ \ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Alguns tipos de matrizes quadradas importantes:

Definição

Dada uma matriz quadrada de ordem n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

aos elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ chamam-se **elementos diagonais** de A.

Ao $n-$uplo $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ chama-se **diagonal principal** de A.

Definição

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - **triangular superior** ($a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i > j$)

- $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - **triangular inferior** ($a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i < j$)

- $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - **diagonal** ($a_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$)

- $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$ - **escalar** (diagonal com $a_{ii} = \alpha, \; i = 1, \ldots, n$)

Definição

À uma matriz escalar de ordem n cujos elementos diagonais são todos iguais a 1 chama-se **matriz identidade** de ordem n e representa-se por I_n,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes identidade

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{\pi} \end{bmatrix}$$

Triangular superior *Diagonal* *Escalar*

1.2 Operações com matrizes (Adição)

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denota-se por $A+B$ à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i,j) é $a_{ij}+b_{ij}$ isto é

$$(A+B)_{ij} = a_{ij}+b_{ij} \qquad i=1,\ldots,m \quad j=1,\ldots,n$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{12} & \cdots & a_{1n}+a_{1n} \\ a_{21}+a_{21} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+a_{m1} & a_{m2}+a_{m2} & \cdots & a_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix}$$

Atenção: Só se adicionam matrizes do mesmo tipo!!!!

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. São do mesmo tipo 3×2, logo podemos somá-las.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & -1+2 \\ 3+2 & 0+2 \\ -1+0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ então

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \textbf{?} \quad \textbf{(não se somam)}$$

Proposição

Tem-se:

1. $\forall_{A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+B=B+A$ (comutativa);
2. $\forall_{A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad (A+B)+C=A+(B+C)$ (associativa);
3. $\exists_{0_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\ \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$ (existência de elemento neutro);
4. $\forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}\ \exists_{-A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$ (existência de oposto).

Nota:

$$0_{m\times n}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz nula}}, \quad -A=\underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -A_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz oposta de } A}$$

Se $A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representa-se por $A-B$ a matriz $A+(-B)$.

1.2 Operações com matrizes (Multiplicação por um escalar)

Definição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz produto do escalar α pela matriz A**, e denota-se por αA, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i,j) é αa_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$$

$\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & A_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 \times 2 & 3 \times (-1) \\ 3 \times 3 & 3 \times 0 \\ 3 \times (-1) & 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Tem-se*

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

1.2 Operações com matrizes (Multiplicação de matrizes)

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se **produto da matriz A pela matriz B**, e representa-se por AB, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p.$$

Assim,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes? **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de A igual ao **número de linhas** de B.

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Podemos efectuar o produto AB*?*

Sim, A *é do tipo* 3×4 *e* B *é do tipo* 4×2.

Assim a matriz AB *será uma matriz do tipo* 3×2.

Efetuando o produto,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nota: (Geral...)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então:

- $AB = [(AB)_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$;
- O elemento (i,j) da matriz produto AB é

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Conclusão:$(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de A pela j-ésima matriz coluna de B.

Atenção que o produto de matrizes não é comutativo...

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tem-se que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mas

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$AB \neq BA.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam B, C matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B+C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

Há no entanto algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ que não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa (já visto no exemplo anterior);
2. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
   isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
3. $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
   $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Nota: Quando não for importante especificar a ordem da matriz nula, em vez da notação $0_{n\times m}$ usa-se simplesmente a notação 0.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente k de A** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por A^k, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

Proposição

Quaisquer que sejam $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

Observação

Em geral, se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$ **Porquê?**

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é invertível.

É B é invertível? **Claro!!!**

Para A quantas matrizes B podem existir ?

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1}.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ? **Não!!!**

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *<u>não</u> tem inversa porque, para qualquer* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B *tal que* $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A *é não invertível (singular)*

Observação

A matriz $0_{n\times n}$ *também não é invertível.*

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz* *invertível*.

1. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $AB = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $BA = I_n$.
2. *Se* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é tal que* $BA = I_n$ *então* $B = A^{-1}$ *e, portanto,* $AB = I_n$.

Teorema

1. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então* A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *e* A *é invertível então* αA *é invertívele* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.
3. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e* $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.

Teorema

1. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então* A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *e* A *é invertível então* αA *é invertível e* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.
3. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e* $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.

Observação

Não temos fórmula para a inversa de $A + B$. *Em geral,*

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$
- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4 Matriz transposta

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz transposta** de A, e representa-se por $A^\top$, a matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$\left(A^\top\right)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

1. $\left(A^\top\right)^\top = A.$
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top.$
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top.$
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top.$
5. *Se A é invertível então $A^\top$ é invertível e* $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$ 

Definição

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se **simétrica** se $A = A^\top$ e **hemi–simétrica** se $A = -A^\top$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ *é simétrica pois* $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é hemi–simétrica pois*

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -\pi i & -2i \\ \pi i & 0 & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ *não é simétrica nem hemi–simétrica.*

1.4 Matriz conjugada

$\mathbb{K} = \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1$

O **conjugado** de $z = a + bi$ é o número $\overline{z} = a - bi$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. Define-se a **conjugada** de A e representa-se por $\overline{A}$ a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado. Tem-se, pois, $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ e $\left(\overline{A}\right)_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Tem-se*

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
3. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.
4. $\overline{AC} = \overline{A}\;\overline{C}$.
5. $\overline{A^k} = \left(\overline{A}\right)^k$.
6. *Se* $m = n$ *e* A *for uma matriz invertível então* $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
7. $\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}$.

Matriz transconjugada

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se **transconjugada** de A e representamos por A^* a matriz

$$\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Definição

Uma matriz A diz-se **hermítica** se $A = A^*$ e **hemi–hermítica** se $A = -A^*$.