♣ Primitivação Direta / Imediata

Notação $\int u dx \leftrightarrows Pu$

Primitivas	Derivadas
c e a são constantes e u e v são funções de x	
♠ $\int c dx = cx$	$(c)' = 0$
♠ $\int u' u^a dx = \frac{u^{a+1}}{a+1}, a \neq -1$	$(u^a)' = a u' u^{a-1}$
♠ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln\lvert u\rvert$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
♠ $\int u' e^u dx = e^u$	$(e^u)' = u' e^u$
♠ $\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a}, a \neq 1$	$(a^u)' = u' a^u \ln a$
♠ $\int u' \cos u \, dx = \operatorname{sen} u$	$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
♠ $\int u' \operatorname{sen} u \, dx = -\cos u$	$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
♠ $\int \frac{u'}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right)$	$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
♠ $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2 - u^2}} dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right)$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$= -\arccos\left(\frac{u}{a}\right)$	$(\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Propriedades

✓ $\int c u dx = c \int u dx$	$\Leftrightarrow (cu)' = c(u)'$
✓ $\int u \pm v dx = \int u dx \pm \int v dx$	$\Leftrightarrow (u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$
✗ $\int u \times v dx \neq \int u dx \times \int v dx$	⚠ $(u \times v)' = u'v + uv'$
✗ $\int \frac{u}{v} dx \neq \frac{\int u dx}{\int v dx}$ ⚠	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

♣ PRIMITIVAÇÃO POR PARTES (utilizar quando há 2 funções a multiplicar)

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$u' = \cdots \rightarrow u = \cdots$
$v = \cdots \rightarrow v' = \cdots$

Critério

$\boldsymbol{u'}$	$\boldsymbol{v}$
e^x	$\ln(x)$
$\sin x$	polinómios
$\cos x$	arc ...

$\int \ln(x)\, dx = \int 1 \times \ln(x)\, dx$ escolhe-se $u' = 1$ e $v = \ln(x)$

♣ PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (utilizar quando há algo a chatear)

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big) \times x' dt \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \\ t &= \varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

O que está a chatear $= t$. Isola-se o x e essa função é o $\varphi(t)$. Após resolver a primitiva com t não esquecer de voltar a x.

♣ PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS (utilizar quando há uma fração de polinómios)

- Se o grau do numerador for <u>maior ou igual</u> ao grau do denominador ⇨ <u>dividir</u> os polinómios
- Caso contrário proceder da seguinte forma:

1. Factoriza-se o denominador (encontrar os zeros) e colocar na forma $(x-a)(x-b)$ ...
2. Igualar a fracção inicial em fracções simples

$$\frac{\text{polinómio}}{(x-a)(x-b)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

3. As primitivas resultantes são da forma:
   - $\displaystyle\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(x-a)$
   - $\displaystyle\int \frac{B}{(x-b)^2} dx = B \int (x-b)^{-2} dx = B \frac{(x-b)^{-1}}{-1}$
   - $\displaystyle\int \frac{Dx+E}{x^2+1} dx = \int \frac{Dx}{x^2+1} dx + \int \frac{E}{x^2+1} dx = \frac{D}{2}\ln(x^2+1) + E \operatorname{arctg}(x)$

Atenção à multiplicidade das raízes.