

Resolução dos Exercícios de Matemática Financeira

Exercício nº 1

Calcular o valor futuro acumulado, a juros simples e a juros compostos, no período de 3 anos e meio à taxa de 17,5%, de um depósito no valor de 10.000 u.m.

Dados:

$C_0 = 10.000$ u.m.

$t = 3,5$ anos

$i = 17,5\%$ ano

$C_t = ?$

- a) Regime de juros simples

$$C_t = C_0 (1 + i \cdot t)$$

$$C_{3,5} = 10\,000 (1 + 3,5 \cdot 0,175) = \underline{\underline{16\,125 \text{ u.m.}}}$$

- b) Regime de juros composto

$$C_t = C_0 (1 + i)^t$$

$$C_{3,5} = 10\,000 (1 + 0,175)^{3,5} = \underline{\underline{17\,584,6 \text{ u.m.}}}$$

Exercício nº 2

Calcular o valor actual dos seguintes recebimentos, considerando uma taxa de desconto de 17,5% com juro composto:

- a) 2.000 u.m. dentro de 1 ano;

- b) 3.500 u.m. dentro de 2,5 anos;

- c) 4.000 u.m. dentro de 5 anos.

Dados:

$i = 17,5\%$ ano

$C_0 = ?$

- a) $C_1 = 2\,000$ um.u

$t = 1$ ano

$$C_0 = 2\,000 (1 + 0,175)^{-1} = \underline{\underline{1\,702,13 \text{ u.m.}}}$$

- b) $C_{2,5} = 3\,500$ um.u

$t = 2,5$ anos

$$C_0 = 3\,500 (1 + 0,175)^{-2,5} = \underline{\underline{2\,338,69 \text{ u.m.}}}$$

- c) $C_5 = 4\,000$ um.u

$t = 5$ anos

$$C_0 = 4\,000 (1 + 0,175)^{-5} = \underline{\underline{1\,785,95 \text{ u.m.}}}$$

Exercício nº 3

Um dado capital, aplicado à taxa anual de 15%, em regime de juros simples, transformou-se no final do 4º ano em 9000 u.m.

Dados:

$$C_4 = 9.000 \text{ u.m.}$$

$$t = 4 \text{ anos}$$

$$i = 15\% \text{ ano}$$

a) Determine o valor do capital aplicado - RJS

$$Co = ?$$

$$C_t = Co (1+i*t)$$

$$Co = C_t / (1+i*t)$$

$$C_0 = 9\,000 / (1+4*0,15) = \underline{\underline{5\,625 \text{ u.m.}}}$$

b) Quanto perdeu o investidor nesse mesmo período, por não ter aplicado o mesmo capital à mesma taxa, em regime de juro composto? - RJC

$$Co = 5\,625 \text{ u.m.}$$

$$C_4 = ?$$

$$C_4 = 5\,625 (1+0,175)^4 = 9\,838,2 \text{ u.m.}$$

$$9\,838,2 - 9\,000 = \underline{\underline{838,2 \text{ u.m.}}}$$

R. Perdeu 838,2 u.m.

Exercício nº 4

Um determinado cliente deve pagar a um banco as seguintes quantias nas datas indicadas:

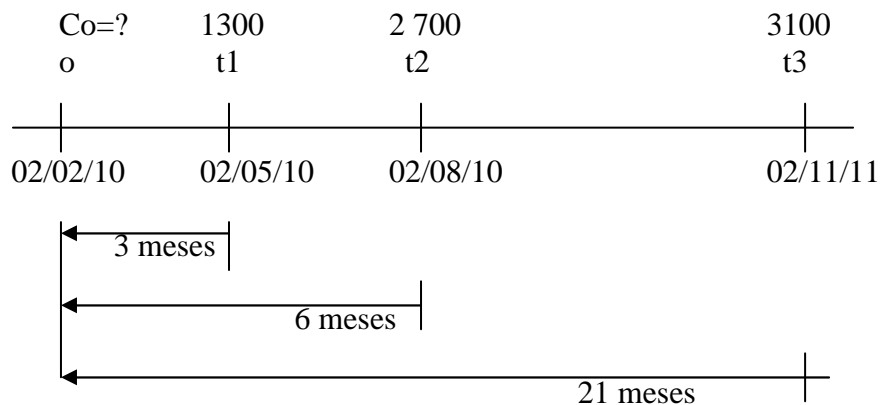
1 300 u.m. em 02/05/10

2 700 u. m. em 02/08/10

3 100 u. m. em 02/11/11

Sabendo que o banco utiliza uma taxa de juro anual de 12%, indique:

a) Quanto pagaria o cliente se a liquidasse de uma só vez em 02/02/10.



$$t_1 = 3 \text{ meses} = (28 + 31 + 30)/365 = 0,244$$

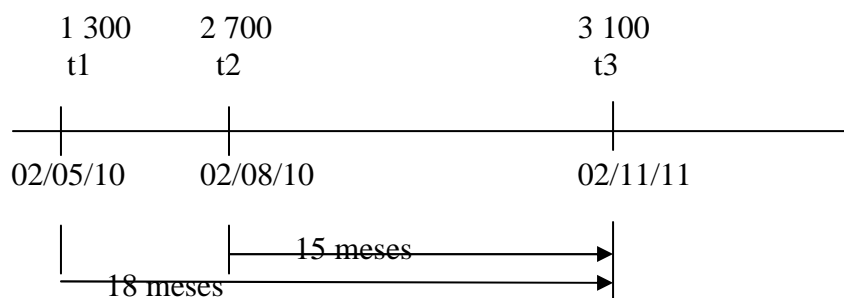
$$t_2 = 6 \text{ meses} = (181)/365 = 0,50$$

$$t_3 = 21 \text{ meses} = (638)/365 = 1,75$$

$$Co = 1\,300 (1+0,12)^{-0,244} + 2\,700(1+0,12)^{-0,5} + 3\,100 (1+0,12)^{-1,75}$$

$$Co = 1\,265 + 2\,551 + 2\,542 = \underline{\underline{6\,358 \text{ u.m.}}}$$

b) Se a dívida se for acumulando, qual o seu valor na data do último vencimento.



$$C_t = 1\,300 (1+0,12)^{1,5} + 2\,700(1+0,12)^{1,5} + 3\,100$$

$$C_t = 1\,540,8 + 3\,110,9 + 3\,100 = \underline{\underline{7\,751,7 \text{ u.m.}}}$$

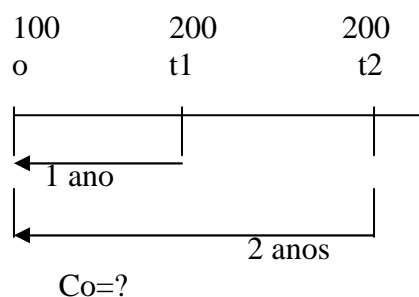
Exercício nº 5

Supondo que se pretende vender um determinado bem e que se receberam as seguintes propostas:

- a) 100 u. m., a pronto, mais duas prestações anuais de 200 u.m.
- b) 3100 u. m., a pronto, mais 150 u.m. passado um ano;
- c) 2100 u. m., passado um ano mais duas prestações anuais de 150 u.m.

Indique qual a mais favorável, considerando uma taxa de juro de 15% ao ano.

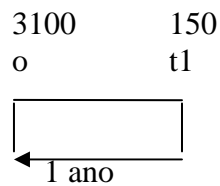
a)



$$Co = 100 + 200(1+0,15)^{-1} + 200 (1+0,12)^{-2}$$

$$Co = \underline{\underline{425,14 \text{ u.m.}}}$$

b)

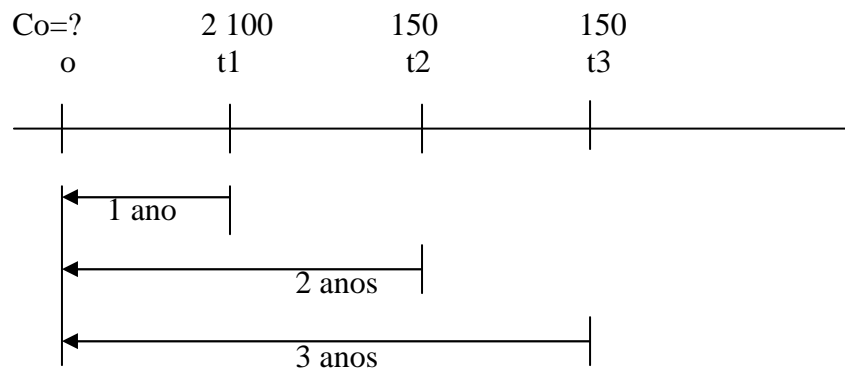


$$Co=?$$

$$Co = 3100 + 150(1+0,15)^{-1}$$

$$Co = \underline{\underline{3\,230,43\text{ u.m.}}}$$

c)



$$Co = 2\,100 (1+0,15)^{-1} + 150(1+0,15)^{-2} + 150(1+0,15)^{-3} = \underline{\underline{2\,038,1\text{ u.m.}}}$$

Exercício nº 6

Dada a taxa de capitalização de 20% ao ano, calcular as taxas de capitalização equivalentes, reportadas aos seguintes períodos de tempo:

a) 1 mês

$$i = \text{taxa do período maior} = 20\%$$

$$i' = \text{taxa do período menor} = ?$$

$$m = \text{Período da taxa maior} / \text{Período da taxa menor} = 12/1 = 12$$

$$i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$$

$$i' = (1+0,20)^{(1/12)} - 1 \quad i' = \underline{\underline{1,53\% \text{ ao mês}}}$$

b) 3 meses

$$i = \text{taxa do período maior} = 20\%$$

$$i' = \text{taxa do período menor} = ?$$

$$m = \text{Período da taxa maior} / \text{Período da taxa menor} = 12/3 = 4$$

$$i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$$

$$i' = (1+0,20)^{(1/4)} - 1 \quad i' = \mathbf{4,66\% \text{ ao trimestre}}$$

c) 6 meses

i = taxa do período maior = 20%

i' = taxa do período menor = ?

m = Período da taxa maior / Período da taxa menor = $12/6 = 2$

$$i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$$

$$i' = (1+0,20)^{(1/2)} - 1 \quad i' = \mathbf{9,52\% \text{ ao semestre}}$$

Exercício nº 7

Dada a taxa de capitalização de 10% ao semestre, calcular as taxas de capitalização equivalentes, reportadas aos seguintes períodos de tempo:

a) 1 mês

i = taxa do período maior = 10%

i' = taxa do período menor = ?

m = Período da taxa maior / Período da taxa menor = $6/1 = 6$

$$i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$$

$$i' = (1+0,10)^{(1/6)} - 1 \quad i' = \mathbf{1,6\% \text{ ao mês}}$$

b) 3 meses

i = taxa do período maior = 10%

i' = taxa do período menor = ?

m = Período da taxa maior / Período da taxa menor = $6/3 = 2$

$$i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$$

$$i' = (1+0,10)^{(1/2)} - 1 \quad i' = \mathbf{4,88\% \text{ ao mês}}$$

c) 1 ano

i = taxa do período maior = ?

i' = taxa do período menor = 10%

m = Período da taxa maior / Período da taxa menor = $12/6 = 2$

$$i = (1+i')^m - 1$$

$$i = (1+0,10)^2 - 1 \quad i = \mathbf{21\% \text{ ao ano}}$$

Exercício nº 8

Calcular o valor actual de uma renda certa de 50 u.m., efectiva ao fim de cada mês (mensal), durante 4 anos, considerando:

a) a taxa de juro anual nominal de 15% capitalizada mensalmente;

Todas as taxas nominais são proporcionais ou seja 15% ao ano capitalizada mensalmente é igual a $15/12 = 1,25\%$ ao mês, $i' = 1,25\%$ durante 4×12 meses = 48 meses.

Trata-se de uma renda, temporária, certa, imediata e inteira, de 48 termos mensais (4 anos * 12 meses) *normais ou* postecipados, com o valor de 50 u.m.

Expressão que simboliza o valor actual de uma renda, temporária, certa, imediata e inteira, de n termos *normais ou* postecipados, e unitários.

$$a_m \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Termo da renda 50 u.m.

$$50 a_{48} \left[\frac{1 - (1+0,0125)^{-48}}{0,0125} \right] = 1\,796,57 \text{ u.m.}$$

b) a taxa de juro anual efectiva de 15% capitalizada mensalmente.

Trata-se do mesmo tipo de renda que na alínea a).

Todas as taxas efectivas não são proporcionais ou seja 15% ao ano capitalizada mensalmente é igual a $i' = (1+i)^{(1/m)} - 1$

Ou seja, $m = 12/1 = 12$

i' (taxa efectiva mensal) = $(1+0,15)^{(1/12)} - 1$ $i' = 1,1715\%$ durante 4×12 meses = 48 meses

$$a_m \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Termo da renda 50 u.m.

$$50 a_{48} \left[\frac{1 - (1+0,011715)^{-48}}{0,011715} \right] = 1\,827,78 \text{ u.m.}$$

Exercício 9

Nota: Na resolução deste exercício, abaixo apresentada, considerou-se que os termos da renda são antecipados. No entanto, por lapso, no enunciado indicava *termos nominais*, este tipo de classificação não existe, deveria ser *termos normais*. Assim, devem voltar resolver este problema mas considerando que os termos são normais ou postecipados, neste caso a fórmula é exactamente igual à do exercício anterior.

Calcule o valor actual das seguintes rendas imediatas de **termos antecipados**:

a) 100 u.m. por ano pagáveis durante 20 anos

b) 200 u.m. por ano pagáveis durante 10 anos

Para cada caso utilize:

1) a taxa de juro efectiva de 15% ao ano

2) a taxa de juro nominal de 20% convertível trimestralmente

a1) 100 u.m. por ano pagáveis durante 20 anos a taxa de juro efectiva de 15% ao ano.

Renda temporária, certa, imediata, inteira de termos antecipados.

$$\text{Valor actual} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)} = \left\{ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right\} * (1+i)$$

Termo = 100 u.m.

n = 20 anos

i = 15% ao ano

$$100 \ddot{a}_{\overline{20}|15\%} = 100 [1 - (1+0,15)^{-20}] / 0,15 (1+0,15) = \mathbf{719,82 \text{ u.m.}}$$

a2) 100 u.m. por ano pagáveis durante 20 anos à taxa de juro nominal de 20% convertível trimestralmente.

Taxa nominal anual de 20% = taxa nominal trimestral de 20/4=5%

m = 12/3= 4

A taxa nominal trimestral de 5% corresponde a uma taxa efectiva anual i de
 $i = (1+0,05)^4 - 1$ **i = 21,55% ao ano**

$$100 \ddot{a}_{\overline{20}|21,55\%} = 100 [1 - (1+0,2155)^{-20}] / 0,2155 (1+0,2155) = \mathbf{552,66 \text{ u.m.}}$$

b1) 200 u.m. por ano pagáveis durante 10 anos a taxa de juro efectiva de 15% ao ano

Renda temporária, certa, imediata, inteira de termos antecipados.

$$\text{Valor actual} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|i}}{(1+i)} = \left\{ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right\} * (1+i)$$

Termo = 200 u.m.

n = 10 anos

i = 15% efectiva ao ano

$$200 \ddot{a}_{\overline{10}|15\%} = 200 [1 - (1+0,15)^{-10}] / 0,15 (1+0,15) = \mathbf{1\ 154,3 \text{ u.m.}}$$

b2) 200 u.m. por ano pagáveis durante 10 anos à taxa de juro nominal de 20% convertível trimestralmente.

Taxa nominal anual de 20% convertível trimestralmente = taxa trimestral de 20/4=5%

m = 12/3= 4

Taxa anual i = (1+0,05)⁴ - 1 **i = 21,55% ao ano**

$$200 \ddot{a}_{\overline{10}|21,55\%} = 200 [1 - (1+0,2155)^{-10}] / 0,2155 (1+0,2155) = \mathbf{967,83 \text{ u.m.}}$$

Exercício nº 10

Considerando uma taxa nominal semestral de 7%, indique o valor actual das seguintes rendas certas:

a) Renda de 20 termos anuais de 30 u.m., vencendo-se o primeiro no início do ano.

Renda anual temporária, certa, imediata, inteira e antecipada

$$\text{Valor actual} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i(1+i)} = \{ [1 - (1+i)^{-n}] / i \} * (1+i)$$

Termo = 30 u.m.

n = 20 anos

i = 7% ao semestre

$$m = 12/6 = 2$$

$$\text{Taxa anual } i = (1+0,07)^2 - 1 \quad i = 14,49\% \text{ ao ano}$$

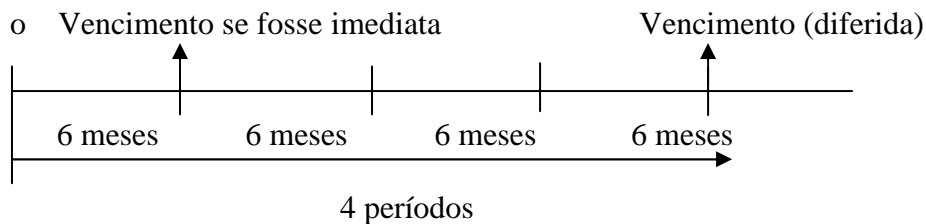
$$30 \ddot{a}_{\overline{20}|14,49\%} = 30 [1 - (1+0,1449)^{-10}] / 0,1449 * (1+0,1449) = 221,21 \text{ u.m.}$$

c) Renda perpétua de termos semestrais de 20 u. m., vencendo-se o primeiro dentro de 2 anos.

Renda perpétua, certa, diferida e inteiras de termos antecipados e constantes, termo unitário

$$\text{Cálculo do valor actual} = \ddot{a}_{\infty|i} = 1/i * (1+i)^{-n}$$

Co=?



$$20 \ddot{a}_{\infty|7\%} = 20 * 1/0,07 * (1+0,07)^{-4} = 217,97 \text{ u.m.}$$

Exercício 11

Para a aquisição de um equipamento foram apresentadas as seguintes alternativas:

1 - Pagamento contra entrega de 42 500 u.m.

2- Entrada de 10 000 u.m. e 10 prestações semestrais iguais e postecipadas de 4.500 u.m.

Decida qual das opções de financiamento parece a mais adequada, considerando uma taxa de juro de 15% ao ano.

Taxa de juro semestral = $15/2 = 7,5\%$

Termo da renda 4 500 u.m.

$N = 10$

$$4\,500 \cdot a_{\overline{10}|7,5} = 4\,500 [1-(1+0,075)^{-10}] / 0,075 = \mathbf{30\,888,36 \text{ u.m.}}$$

$$2 - 10\,000 + 30\,888,36 = \mathbf{40\,888,36 \text{ u.m.}}$$

A opção 2 é a mais adequada.

Exercício de Amortização de Empréstimos

Para ampliar as suas instalações uma empresa necessitou de recorrer a um crédito bancário de médio prazo. Após negociação com o seu banco obteve um empréstimo nas seguintes condições:

- Valor total do empréstimo: 10 000 u.m., a utilizar integralmente em Janeiro de 2009.
- Diferimento (carência) de 3 anos durante os quais a empresa apenas paga 50% do juro anual devido, acumulando-se o restante ao capital em dívida.
- Amortizações nos 3 anos seguintes em anuidades constantes vencíveis no final de cada ano.

Elaborar o plano de reembolso do empréstimo bancário.

Este exercício foi resolvido nas aulas. Serão apenas tiradas as dúvidas relativas à sua resolução.

Exemplo A

No dia 1 de Junho de 2009, um casal arrendou uma casa de férias para passar os meses de Junho a Setembro com a família, pelo valor de 350 euros mensais. Propôs ao proprietário que a renda fosse paga no final de cada mês, iniciando-se o pagamento no dia 1 do mês seguinte. Considere uma taxa de juro efectiva mensal de 1,5%.

a) Classifique a renda.

Renda temporária de 4 termos constantes mensais, certa, imediata e inteira, normais ou postecipados.

b) Quanto teria de entregar ao proprietário, se o casal propusesse pagar a totalidade da renda de uma só vez no início do contrato?

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Termo da renda 350 u.m.

$$350 \cdot a_{\overline{4}|1,5} = 350 [1-(1+0,015)^{-4}] / 0,015 = \mathbf{1\,349,03 \text{ u.m.}}$$

c) E quanto teria de pagar se pagasse tudo no fim?

$$\text{Valor acumulado ou futuro} = \boxed{s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} (1+i)^n}$$

$$350 S_{4\overline{1,5}} = 1\,349,03 \cdot (1+0,015)^4 = \mathbf{1\,431,82\,u.m.}$$

Exemplo B

Supondo que os pagamentos foram efectuados no início de cada mês:

A renda passaria a ser uma renda de termos antecipados.

a) Quanto teria de pagar se propusesse pagar a totalidade dos pagamentos no início do contrato?

Classificação da renda:

Renda mensal temporária, certa, imediata, inteira e de termos antecipados

$$\text{Valor actual} = \boxed{\ddot{a}_{n|i} = a_{n|i} (1+i)}$$

$$\text{Valor actual} = 1\,349,03 \cdot (1+0,015) = \mathbf{1\,360,27\,u.m.}$$

b) E se todos os pagamentos fossem efectuados de uma única vez no final da renda?

Valor acumulado ou futuro **de uma renda de termos antecipados** =

$$= \boxed{{}^s s_{n|i} = s_{n|i} (1+i)}$$

$$350 {}^s S_{4\overline{1,5}} = 1\,349,03 \cdot (1+0,015) = \mathbf{1\,453,30\,u.m.}$$

Exemplo C

Supondo que o casal tratou do assunto com alguma antecedência e chegou a acordo com o proprietário sobre o arrendamento em 1.3.2009. Terá também acordado que iniciaria a utilização da casa no dia 1.6.2009 e efectuaria o primeiro pagamento em 1.7.2009:

a) Quanto custou a totalidade da renda na data do acordo?

Nestas condições a renda classifica-se: Renda mensal temporária, certa, **diferida de 3 períodos**, inteira e de 4 termos normais ou postecipados de 350 u.m..

$$t | \overline{a}_{n|i} = \overline{a}_{n|i} (1+i)^{-t}$$

$$350 {}^* 3 | \overline{a}_{4\overline{1,5}} = 350 \{ [1-(1+0,015)^{-4}] / 0,015 \} \cdot (1+0,015)^{-3} = \mathbf{1\,290,1u.m.}$$

b) Se os pagamentos efectuados se referissem ao início de cada mês e a utilização da casa se iniciasse no dia 1 de Julho, pelo período de quatro meses, qual seria o valor actualizado da renda?

Nestas condições a renda classifica-se: Renda mensal temporária, certa, **diferida de 4 períodos**, inteira e de 4 termos antecipados de 350 u.m..

$$\text{Valor Actual} = \boxed{t | \ddot{a}_{n|i} = t | \overline{a}_{n|i} \cdot (1+i) = \{ [1 - (1+i)^{-n}] / i \} \cdot (1+i)^{-t+1}}$$

$$350 {}^4 | \ddot{a}_{4\overline{1,5}} = 350 \{ [1-(1+0,015)^{-4}] / 0,015 \} (1+0,015) (1+0,015)^{-4} = \mathbf{1\,290,1\,u.m.}$$