Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Primeira Chamada **2014/15**

I

Responda apenas a 2 perguntas deste grupo.

1. Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \ln\left(x^2+4x+y^2-2y+1\right)$.

2. Esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = 9x^2+4y^2$.

3. Estude a continuidade da função f, se $f(x) = \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ para $x \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$

II

Responda apenas a 2 perguntas deste grupo.

4. calcule usando a regra da cadeia $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$, se $w = u\sin v$, $u = x^3 + 2\sqrt{1+y^2}$ e $v = \ln(1+x^2)\,y^3$

5. Considere a função $f(x,y) = x^2\ln(y)$.

a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico (x,y).

b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $P(5,1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{5}(-1,4)}$

6. Encontre, caso existam, os extremos locais de $f(x,y) = x^2-4xy+y^3+4y$.

III

Responda apenas a 2 perguntas deste grupo.

7. Inverta a ordem de integração do integral $\quad I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \; d\,x \; d\,y\,.$

8. Um sólido é delimitado pelo cone de equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano $z = 2\,.$ Sendo a sua densidade dada por $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, calcule a sua massa.

9. Calcule o volume do sólido situado acima do cone de equação $z^2 = x^2+y^2$ e interior à esfera de centro na origem e raio $3\,.$

10. Calcule

$$\int_C xy^{\frac{2}{5}} \; d\,S\,,$$

se o caminho C é parametrizado por $x = \frac{1}{2}t,\; y = t^{\frac{5}{2}}$ com $0 \leq t \leq 1\,.$

IV

Responda apenas a 2 perguntas deste grupo.

11. Considere o campo vetorial $\quad F(x,y,z) = (\; x^3 y\,,\; xyz\,,\; xy+yz+xz\;)\,.$

a) Calcule a divergêcia de f num ponto genérico $(x,y,z)\,.$

b) Calcule o rotacional de f no ponto $(1,0,-1)\,.$

12. Se a superfície S é a parte do gráfico de $z = 9-x^2-y^2$ com $z \geq 0$ e $F(x,y,z) = (\; 3x\,,\; 3y\,,\; z\;)$; calcule o integral de superfície $\int_S F\,.\; n\; d\,S$ onde $n(x,y,z)$ representa um vector normal a S no ponto $(x,y,z)\,.$

13. Seja Q a região delimitada pelas condições $x^2+y^2 \leq 4,\; 0 \leq z \leq 3$ e seja S a sua superfície. Se $F(x,y,z) = (\; x^3\,,\; y^3\,,\; z^3\;)1,$, use o teorema da divergêcia para calcular $\int_S F\,.\; n\; d\,S$ onde $n(x,y,z)$ representa um vector normal a S no ponto $(x,y,z)\,.$

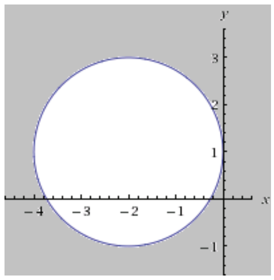
1. Encontre o domínio D de $f(x,y) = \ln(x^2+4x+y^2-2y+1)$.

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4x+y^2-2y+1>0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+2)^2+(y-1)^2>4\}$$

<u>CA</u>:

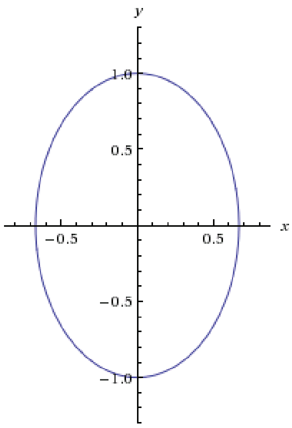
$$x^2+4x+y^2-2y+1>0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1>-1+4+1 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2>4$$

Trata-se do exterior de um círculo centrado em (-2,1) e raio 2 (tracejado).

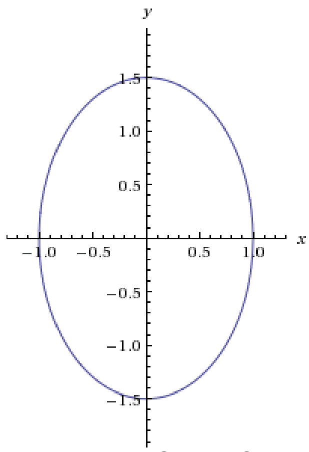


2. Esboce as curvas de nível de $f(x,y) = 9x^2+4y^2$

Curvas de nível: $f(x,y)=K \Leftrightarrow 9x^2+4y^2=K$. São elipses centradas na origem.



$K=4 \rightarrow\ 9x^2+4y^2=4$



$K=9 \rightarrow\ 9x^2+4y^2=9$

3. Estude a continuidade de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

A função f é contínua para $(x,y)\neq(0,0)$ pois é o quociente de uma função contínua (o seno) com outra contínua (um polinómio) e esta última nunca se anula.

Para ser contínua também em (0,0) é necessário que o limite do ramo de cima coincida com 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = (subs\ x^2+y^2=\rho^2) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\rho^2)}{\rho^2} = 1 \neq 0.$$

Assim a função não é contínua no ponto (0,0), pelo que é contínua em $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

4. Calcule, com a regra da cadeia $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$, com $w = u\operatorname{sen} v$, $u = x^2+2\sqrt{1+y^2}$, $v = \ln(1+x^2)\,y^3$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sen} v\, 2x + u\cos v\,\frac{2xy^3}{1+x^2} =$$

$$= \operatorname{sen}(\ln(1+x^2)\,y^3)\,2x + \left(x^2+2\sqrt{1+y^2}\right)\cos(\ln(1+x^2)\,y^3)\,\frac{2xy^3}{1+x^2}.$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{sen} v \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + u \cos v \, 3\ln(1+x^2)\, y^2 =$$

$$= \operatorname{sen}(\ln(1+x^2)\, y^3) \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \left(x^2 + 2\sqrt{1+y^2}\right) \cos(\ln(1+x^2)\, y^3)\, 3\ln(1+x^2)\, y^2.$$

5. Considere a função $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 \ln y}$.

a. $\nabla f(x,y) = \left(2x \ln y, \dfrac{x^2}{y}\right)$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial u}(5,1) = \nabla f(5,1) \cdot u = (0{,}25) \cdot \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{4\sqrt{5}}\right) = \dfrac{25}{4\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$.

6. Determine os extremos locais de $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y}$.

1º Encontrar os pontos críticos ou estacionários $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{cases} 2x - 4y & = 0 \\ -4x + 3y^2 + 4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 - 8y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Existem os pontos críticos $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $(4,2)$.

2º Classificar os ponto críticos com a matriz Hessiana.

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{bmatrix}$$

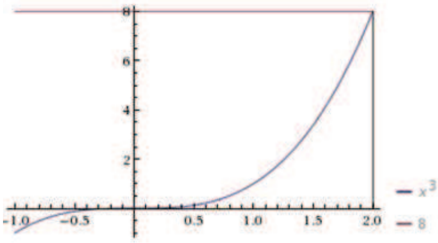
$$\left|\mathcal{H}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)\right| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0 \ \rightarrow \text{ponto de sela}$$

$$|\mathcal{H}(4,2)| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ mas } 2 > 0 \rightarrow \text{minimizante}$$

$\therefore$ O mínimo da função é $f(4,2) = 0$.

7. Inverta a ordem de $\boldsymbol{\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 dxdy}$.

$$\begin{matrix} 0 \le y \le 8 \\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2 \end{matrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^3 \end{matrix}$$

$$\therefore \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^3} dydx$$

8. Calcule a massa de um sólido com densidade $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, delimitado pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano $z=2$.

$$Massa=\iiint densidade$$

A intersecção de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e $z=2$ origina uma circunferência centrada na origem e raio 2.
Vou utilizar coordenadas cilíndricas com

$$\begin{cases} 0\le\rho\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ \rho\le z\le 2 \end{cases}$$

$$Massa=\int_0^2 d\rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_\rho^2(\rho^2+z^2)\times\rho dz=\int_0^2 d\rho\int_0^{2\pi}\left[\rho^3z+\frac{\rho z^3}{3}\right]_{z=\rho}^{z=2}d\theta=$$

$$=\int_0^2 d\rho\int_0^{2\pi}2\rho^3+\frac{8\rho}{3}-\left(\rho^4+\frac{\rho^4}{3}\right)d\theta=\int_0^2\left(-\frac{4\rho^4}{3}+2\rho^3+\frac{8\rho}{3}\right)(2\pi-0)d\rho=$$

$$=2\pi\left[-\frac{4\rho^5}{15}+\frac{\rho^4}{2}+\frac{4\rho^2}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=2}=2\pi\left(-\frac{128}{15}+8+\frac{16}{3}\right)=\frac{48\pi}{5}.$$

9. Calcule o volume do sólido situado acima do cone $z^2=x^2+y^2$ e interior à esfera centrada na origem de raio 3.

O sólido é … tipo um 'corneto'. A parte do cone é a baunilha e a bola de gelado é limitada em cima pela esfera.
Em coordenadas esféricas fica

$$\begin{cases} 0\le\rho\le 3 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$Volume=\iiint 1=\int_0^3 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\times\rho^2\sin\varphi\, d\varphi=$$

$$=\int_0^3\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}[-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}d\theta=\int_0^3\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}-\frac{\sqrt{2}}{2}+1d\theta=\int_0^3\rho^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)(2\pi-0)d\rho=$$

$$=2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=3}=\pi(-\sqrt{2}+2)(9-0)=9\pi(-\sqrt{2}+2).$$

10. Com o caminho C parametrizado por $r(t)=\left(\frac{1}{2}t,t^{5/2}\right)$, $0\le t\le 1$, calcule $\int_C xy^{2/5}$.

Trata-se de resolver um integral de linha de uma função escalar $f(x,y)=xy^{2/5}$.

$$\int_C f(x,y) = \int_a^b f(r) \times \|r'\| dt$$

$$f(r) = f\left(\frac{1}{2}t, t^{5/2}\right) = \frac{1}{2}t\left(t^{5/2}\right)^{2/5} = \frac{1}{2}t^2.$$

$$\|r'\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}t^{3/2}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}t^{3/2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{t^3+25}$$

$$\therefore \int_C xy^{2/5} = \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 \times \frac{1}{2}\sqrt{t^3+25}dt = \frac{1}{4}\frac{1}{3}\int_0^1 3t^2(t^3+25)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{12}\left[\frac{(t^3+25)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{18}\left(26^{\frac{3}{2}} - 25^{\frac{3}{2}}\right).$$

11. Considere o campo vetorial $\boldsymbol{F(x,y,z) = (x^3y, xyz, xy+yz+zx)}$.

a. $\boldsymbol{div(F)} = 3x^2y + xz + y + x.$

b. $\boldsymbol{rot(F)} = (x+z-xy, 0-(y+z), yz-x^3).$

$rot(F)(1,0,-1) = (0,1,-1)$

12. Seja S a superfície que é parte do gráfico de $\boldsymbol{z = 9 - x^2 - y^2}$ com $\boldsymbol{z \geq 0}$ e $\boldsymbol{F(x,y,z) = (3x, 3y, z)}$. Calcule o integral de superfície $\int_S F.ndS$

A superfície pode ser parametrizada por $r(x,y) = (x, y, 9-x^2-y^2), x, y \in R$

Trata-se de resolver um integral de superfície de uma função vetorial.

$$\int_S F.ndS = \iint_R F(r).\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}$$

$F(r) = F(x,y,9-x^2-y^2) = (3x, 3y, 9-x^2-y^2).$

$\frac{\partial r}{\partial x} = (1,0,-2x) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (0,1,-2y)$

$$F(r).\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial x} = \begin{vmatrix} 3x & 3y & 9-x^2-y^2 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 9 - x^2 - y^2 + 6x^2 + 6y^2 = 9 + 5x^2 + 5y^2$$

$$\int_S F.ndS = \iint_R F(r).\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial x} = \iint_R 9 + 5x^2 + 5y^2$$

Agora a região R é a interseção de $z = 9 - x^2 - y^2$ com $z = 0$ que dá a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Assim no integral duplo vou utilizar coordenadas polares $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$\iint_R 9 + 5x^2 + 5y^2 = \int_0^3 d\rho \int_0^{2\pi} (9 + 5\rho^2)\rho d\theta = \int_0^3 (9\rho + 5\rho^3)(2\pi - 0)d\rho = 2\pi \left[\frac{9\rho^2}{2} + \frac{5\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=3} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{81}{2} + \frac{5.81}{4} - 0\right) = \frac{567}{2}\pi.$$

13. Seja Q a região limitada por $x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3$ e S a sua superfície. Se $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, use o Teorema da Divergência para calcular o integral de superfície $\int_S F.ndS$

Como a superfície é fechada, o Teorema da Divergência diz que $\iint_S F = \iiint_Q div(F)$.

$div(F) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

É necessário colocar o sólido fechado Q, limitado pela superfície S, em coordenadas cilíndricas …

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

$$\iint_S F = \iiint_Q div(F) = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 3(\rho^2 + z^2) \times \rho dz = 3\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left[\rho^3 z + \frac{\rho z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=3} d\theta =$$

$$= 3\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} 3\rho^3 + 9\rho - (0)d\theta = 3\int_0^2 (3\rho^3 + 9\rho)(2\pi - 0)d\rho =$$

$$= 6\pi\left[\frac{3\rho^4}{4} + \frac{9\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = 6\pi(12 + 18) = 180\pi.$$