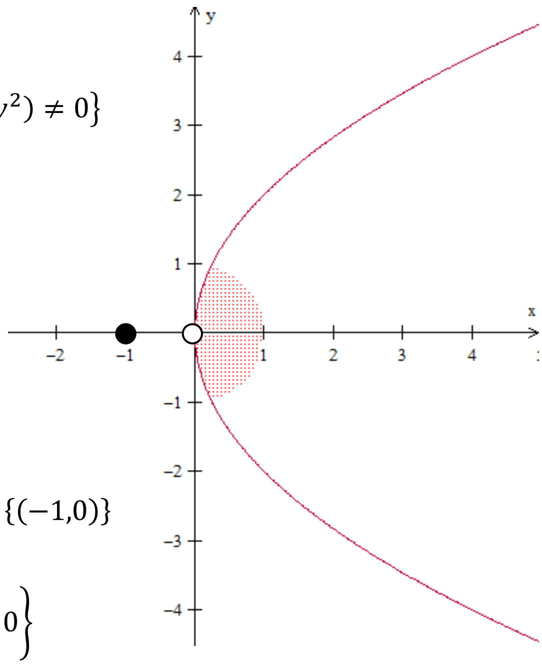
1. Considere $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ e o conjunto $A=D_f\cup\{(-1,0)\}$, onde D_f é o domínio de f

a. Desenhe o conjunto A. Determine o interior, fronteira, fecho, derivado e pontos isolados.



$$D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 4x-y^2\geq 0\wedge 1-x^2-y^2>0\wedge \ln(1-x^2-y^2)\neq 0\}$$

$$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2<1\wedge x^2+y^2\neq 0\right\}$$

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2<1\wedge x^2+y^2\neq 0\right\}\cup\{(-1,0)\}$$

$$int(A)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2<1\wedge x^2+y^2\neq 0\right\}$$

$$fr(A)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\left(x=\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2\leq 1\right)\vee\left(x^2+y^2=1\wedge x\geq\frac{y^2}{4}\right)\right\}\cup\{(-1,0)\}$$

$$\bar{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2\leq 1\right\}\cup\{(-1,0)\}$$

$$A'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq\frac{y^2}{4}\wedge x^2+y^2\leq 1\right\}$$

Conjunto dos pontos isolados $=\{(-1,0)\}$

b. Diga, justificando, se A é aberto, fechado, conexo, compacto.

Como $int(A)\neq A$, o conjunto não é aberto.

Como $\bar{A}\neq A$, o conjunto não é fechado.

A não é conexo (não é possível ligar o ponto isolado com os outros pontos do conjunto).

A é limitado mas como não é fechado não é compacto.

2. Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\rho^2\left(\sqrt{\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta+1}+1\right)} =$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\sqrt{\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta+1}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

3. Considere a função $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$. Diga se é prolongável por continuidade a $(0,0)$.

A função será prolongável por continuidade a (0,0) se existir o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4}$$

$$\lim_{x\to 0, y=x}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

Como para direções diferentes resultam limites diferentes, o limite pretendido não existe.

Assim a função não é prolongável por continuidade à origem.

4. Calcule as derivadas parciais

a) $f(x,y,z) = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3y-1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z^2+3x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2yz+1$$

b) $f(x,y) = \mathrm{sen}\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + \mathrm{sen}\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y}\mathrm{sen}\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}\cos^2\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} + \mathrm{sen}\frac{x}{y}\left(-\frac{-x}{y^2}\mathrm{sen}\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}\cos^2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)$$

5. Calcule a derivada da função $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ na direção do vetor gradiente em $(3,4,0)$.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x,y,z)$$

$$\nabla f(3,4,0) = \left(\frac{-3}{125}, \frac{-4}{125}, 0\right)$$

Como as derivadas parciais existem e são contínuas numa vizinhança do ponto (3,4,0), a função é aí diferenciável. Assim a derivada da função no ponto (3,4,0) na direção do seu vetor gradiente é:

$$f'\left((3,4,0); \left(\frac{-3}{125}, \frac{-4}{125}, 0\right)\right) = \langle \nabla f(3,4,0), \left(\frac{-3}{125}, \frac{-4}{125}, 0\right) \rangle = \langle \left(\frac{-3}{125}, \frac{-4}{125}, 0\right), \left(\frac{-3}{125}, \frac{-4}{125}, 0\right) \rangle =$$

$$= \frac{9}{125^2} + \frac{16}{125^2} + 0 = \frac{25}{125^2} = \frac{1}{625}.$$

6. Verifique se a seguinte função é diferenciável em $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Em primeiro lugar é necessário calcular as derivadas parciais em (0,0) por definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h0}{(h^2+0^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2.0.h}{(0^2+h^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Para que a função seja diferenciável em (0,0) é necessário que o seguinte limite exista e seja 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \times (x) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \times (y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - 0 - 0 \times (x) - 0 \times (y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho\cos\theta\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2\sqrt{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} = \infty$$

Como o limite não existe (e não é 0) a função não é diferenciável em (0,0).

7. Considere a função $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} - xy$.

a) Mostre que a função é diferenciável em (3,4) e determine o diferencial nesse ponto.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x$$

Como as derivadas parciais existem e são contínuas numa vizinhança de (3,4) a função é diferenciável aí.

O diferencial é ...

$$df(3,4)=\frac{\partial f}{\partial x}(3,4)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(3,4)dy=\left(\frac{3}{5}-4\right)dx+\left(\frac{4}{5}-3\right)dy=-\frac{17}{5}dx-\frac{11}{5}dy$$

b) Escreva a equação do plano tangente à superfície definida por $z=f(x,y)$ em (3,4,-7).

$$z=f(x,y)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}-xy-z=0\Rightarrow F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-xy-z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(3,4,-7)\times(x-3)+\frac{\partial F}{\partial y}(3,4,-7)\times(y-4)+\frac{\partial F}{\partial z}(3,4,-7)\times(z+7)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}(3,4,-7)=-\frac{17}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(3,4,-7)=-\frac{11}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-1\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial y}(3,4,-7)=-1$$

A equação fica ...

$$-\frac{17}{5}\times(x-3)-\frac{11}{5}\times(y-4)-1\times(z+7)=0\ \Leftrightarrow-\frac{17x}{5}-\frac{11y}{5}-z=-12\Leftrightarrow 17x+11y+5z=60$$