Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA I

2015/16

1ªFrequência **6/Nov/2015**

I

1. Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões::

a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+4}$ *b)* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3+\cos(e^{-n})}{n!+\sqrt{n}}$

✓ *c)* $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2+k}$; *d)* $\lim_{n\to+\infty} (n^2)^{\frac{n^2}{2}}(1+n^2)^{-\frac{n^2}{2}}$

2. Considere a sucessão real u_n definida por:

$$\begin{cases} u_1 = e^e; \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{3}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

✓ *a)* Mostre, pelo método de indução matemática, que $u_n > 3, \forall n \in N$.

✓ *b)* Estude a monotonia da sucessão.

✓*c)* Analise a convergência da sucessão e, no caso de convergência, calcule o seu limite.

II

3.

a) Verifique que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(n-\sqrt{n}\right)$ é divergente;

b) Prove que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+2)n}$ é convergente e determine a sua soma.

Sug.: $\dfrac{1}{(n+2)n} = \dfrac{1\backslash 2}{n} - \dfrac{1\backslash 2}{n+2}$.

$\sqrt[n]{\ }$

c) Seja $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n + b^{2n}}{c^n + d^n}$; $c, d > 0$; $Max\{|a|, b^2\} < \cancel{Max}\{c, d\}$. Min

Provar a convergência absoluta. Sug.: comparar com a série geométrica.

d) Prove que a série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\log^2 n}$ é simplesmente convergente.

Sug.: Critério de Leibniz e comparação com série de Dirichlet.

4. Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. Sug.: comparar a_n^2 com $|a_n|$.

III

5. Considere a função $f(x) = \log\left(\frac{(1+x)\,(x^2-2x+1)}{(1-x)\,(x^2+2x+1)}\right)$.

a) Determine o domínio, D_f, da função f;

b) Diga, justificando, se a função é par ou impar em D_f.

6. Considere a função seguinte:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{e^x \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x^2}, & \text{para } x < 0; \\ 1, & \text{para } x = 0; \\ \dfrac{\log(1+x)}{x}, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade da função.

b) Mostre que a função f admite máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-a, a]$ (com $a \in]0, +\infty[$) .

1. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+4}$

Se n é par: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1$, se n é ímpar $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^2}{n^2+4} = -1$. Desta forma **o limite não existe**.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3+\cos(e^{-n})}{n!+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!+\sqrt{n}} \times (3+\cos(e^{-n})) =$ "infinitéssimo × limitada" $= 0$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{3n^2+k}$

$$A(n) := n \times \frac{2n}{3n^2+n} \le \frac{2n}{3n^2+1} + \cdots + \frac{2n}{3n^2+n} \le \frac{2n}{3n^2+1} \times n \coloneqq B(n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n^2+n} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{n\to+\infty} B(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Pelas sucessões enquadradas o limite pretendido é $\frac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2)^{\frac{n^2}{2}} (1+n^2)^{-\frac{n^2}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{1+n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} = \cdots = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$$\text{C. A.} \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} = \left(\frac{1+n^2}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} = \left[\left(1+\frac{-1}{1+n^2}\right)^{1+n^2}\right]^{\frac{n^2/2}{1+n^2}} \to (e^{-1})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

2. Sucessão definida por recorrência

$$u_n = \begin{cases} u_1 = e^e \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{3}, n \ge 2 \end{cases}$$

a) Provar por indução matemática que $u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $P_{(n)} \to u_n > 3$

♦ $P_{(1)}$ é verdade? $P_{(1)} \longrightarrow u_1 > 3 \Leftrightarrow e^e > 3$ ✓

♦ Sabendo que $P_{(n)}$ é verdade (hipótese indução), será que $P_{(n+1)}$ é verdade (tese indução)?

$P_{(n+1)} \longrightarrow u_{n+1} > 3 \Leftrightarrow \dfrac{2u_n+3}{3} > 3 \Leftrightarrow 2u_n + 3 > 9 \Leftrightarrow u_n > 3$ ✓ (por hipótese indução)

$\therefore u_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Estudar a monotonia.

Como $u_1 = e^e, u_2 = \frac{2e^e+3}{3} < e^e$ a sucessão poderá ser decrescente.

$$u_n \geq u_{n+1}?$$

$$u_n \geq u_{n+1} \Leftrightarrow u_n \geq \frac{2u_n + 3}{3} \Leftrightarrow u_n \geq 3 \checkmark$$

$\therefore$ Como por a) $u_n > 3$ a desigualdade em cima é verdadeira e assim a sucessão e monótona decrescente.

c) Analisar a Convergência.

Para ser convergente tem de ser MONÓTONA + LIMITADA

Por b) a sucessão é monótona ✓.

Por a) a sucessão é minorada $u_n > 3$. Como é decrescente também é majorada pelo primeiro termo. Assim $3 < u_n \leq e^e$ e é também limitada ✓.

Desta forma a sucessão é convergente para um L, $u_n \to L \;\; e \;\; u_{n+1} \to L$

Passando ao limite a expressão de u_{n+1}, fica ...

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{3} \to L = \frac{2L + 3}{3} \Leftrightarrow L = 3.$$

$\therefore$ O limite é 3.

3.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(n - \sqrt{n}\right)$

Vou analisar o termo geral ... começo com **n par**

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n - \sqrt{n}\right)\left(n + \sqrt{n}\right)}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$\therefore$ Como o termo geral não tende para 0, a série é **Divergente**.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ é uma série de Mengoli ou Telescópica com $a_n = \frac{1}{n}$ e $k = 2$

$\therefore$ A soma é $S = a_1 + a_2 - 2 \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ **Converge**

c) $\sum \frac{a^n + b^{2n}}{c^n + d^n}, c, d > 0; \max\{|a|, b^2\} < \min\{c, d\}$

Para a convergência absoluta é necessário que a seguinte série convirja. Vou comparar com a série geométrica $\sum \frac{1}{M^n}, M = \min\{c, d\}$.

$$\sum \left|\frac{a^n + b^{2n}}{c^n + d^n}\right| \leq \sum \frac{|a|^n + b^{2n}}{c^n + d^n} \leq \sum \frac{|a|^n}{2M^n} + \sum \frac{b^{2^n}}{2M^n}$$

Agora estas séries são geométricas e a razão **r** verifica $-1 < r < 1$ pela desigualdade do enunciado. Assim a série é convergente.

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n}$

Trata-se de uma série alternada.

Vou testar a convergência absoluta. ($\log n < \sqrt{n}$ para $n \geq 2$)

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\log^2 n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^2 n} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Assim a série dos módulos é superior à série harmónica (que é divergente). Por comparação a série dos módulos também é divergente.

$\therefore$ A série **não converge absolutamente**.

Vou testar agora a convergência simples.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log^2 n} \qquad \text{com } a_n = \frac{1}{\log^2 n}$$

$\therefore$ Como $a_n \to 0$ ✓ e a_n é decrescente $\left(a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\log^2 n} \geq \frac{1}{\log^2(n+1)} \checkmark\right)$, pelo critério de Leibnitz a série é **simplesmente convergente**.

4. Se $\sum a_n$ converge absolutamente então $\sum a_n^2$ converge.

$$\sum a_n^2 \leq \sum |a_n|^2 \leq \left(\sum |a_n|\right)^2$$

Assim a série a ser estudada é menor que outra que converge. Por comparação é também convergente.

5. Função $f(x) = \log\left(\frac{(1+x)(x^2-2x+1)}{(1-x)(x^2+2x+1)}\right)$

a) Domínio

$$\log\left(\frac{(1+x)(x^2-2x+1)}{(1-x)(x^2+2x+1)}\right)=\log\left(\frac{(1+x)(x-1)^2}{(1-x)(x+1)^2}\right)=\log\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1-x}{x+1}>0\wedge x\neq\pm1\right\}$$

Tenho de fazer uma tabela de sinais. O numerador é uma reta e anula-se em $x=1$. O denominador é uma outra reta que se anula em $x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Fração	$-$	SS	$+$	0	$-$

$\therefore\ D=]-1,1[$

b) Paridade

$\boldsymbol{f(-x)}=\log\left(\frac{1+x}{-x+1}\right)=\log\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{1-x}{x+1}\right)=-\boldsymbol{f(x)}$. A função é ímpar.

6. Estudar a continuidade

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{\log(1+x)}{x}, & x>0\end{cases}$$

a) Para já posso dizer que a função é contínua para $x>0$ (pois é o quociente de duas funções contínuas) e para $x<0$ (é o produto e quociente de funções contínuas).

A função será contínua em $x=0$ se $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

Assim a função também é contínua na origem, pelo que fica contínua em todo o $\boldsymbol{R}$.

b) Como a função é contínua em $\boldsymbol{R}$ é também contínua em qualquer intervalo limitado e fechado da forma $[-a,a], a>0$. Assim pelo Teorema de Weirstrass a função admite máximo e mínimo nesse intervalo.