# Ficha de Exercícios: "Determinantes"

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

   (a) $[3] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{R})$;

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$;

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & i \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$;

   (e) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & i \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

2. Determine o(s) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ satisfaz $\det(A) = -6$.

3. Considere uma matriz $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mostre que $\det(M) = \frac{1}{2}(trM)^2 - \frac{1}{2}tr(M^2)$.

4. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Usando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz $A$

   (a) através da segunda linha de $A$;

   (b) através da primeira coluna de $A$;

   (c) através da terceira linha de $A$.

5. Aplique o Teorema de Laplace, preferencialmente a uma linha ou coluna com um número máximo de zeros, no cálculo do determinante da seguinte matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Determine, sem efectuar cálculos e apenas utilizando algumas das propriedades dos determinantes:

   (a) $\det(A^T)$, onde $A$ é matriz do exercício anterior;

   (b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \cos(2,701) & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ \pi & 0 & 6 & e^3 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 3 & 9 & 0 \\ 98 & 13 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -6 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 9 & -1 & 2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$

7. Calcule o determinante das seguintes matrizes, usando transformações elementares:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $A'$, onde $A \underset{3l_2}{\longrightarrow} A'$;

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. Considere uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ onde $A_k$, a linha $k$ de $A$, é da forma $aA_i + bA_j$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $A_i, A_j$ as linhas $i$ e $j$ de $A$, respectivamente, com $i, j, k$ distintos. Mostre que $\det(A) = 0$.

9. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ temos

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

10. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = 0$$

11. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4-x & -4 & -4 \\ 2 & -2-x & -4 \\ 3 & -3 & -4-x \end{bmatrix}.$$

    Determine os valores de $x$ para os quais a matriz $B$ é invertível.

12. Considere matrizes $E_1$, $E_2$ e $E_3$ tais que $I_n \underset{l_2 \leftrightarrow l_4}{\longrightarrow} E_1$, $I_n \underset{l_2+(-4)l_3}{\longrightarrow} E_2$ e $I_n \underset{2l_3}{\longrightarrow} E_3$. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n > 3$ de determinante 7. Calcule:

    (a) $\det(E_1A)$;  (b) $\det(E_2A)$;  (c) $\det(E_3A)$.

13. Sabendo que $A$ é uma matriz $5 \times 5$ sobre $\mathbb{C}$ tal que $\det(A) = 7i$, calcule:

    (a) $\det(-A)$;

    (b) $\det(2A)$;

    (c) $\det(\overline{A}^T)$;

    (d) $\det(A^{-1})$.

14. Seja $A$ uma matriz de ordem $n > 1$. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) $\det(A - I_n) = \det(A) - 1$;

(b) $\det(A + A) = 2^n \det(A)$;

(c) $\det(5A) = 5\det(A)$;

(d) $\det(A^T A) > 0$;

(e) Se $A^2 = A$ então $\det(A) = 0$;

(f) Se $\det(A) = 0$, então o sistema homogéneo $AX = 0$ é possível e indeterminado;

(g) Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema $AX = B$, onde $B$ é uma qualquer matriz coluna, é possível determinado.

15. Sejam $A, B$ matrizes de ordem $n$. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

    (a) Se $A$ é invertível e $\det(ABA) = 0$, então $\det(B) = 0$;

    (b) Se $A$ é invertível e $A^{-1} = A$, então $|A| = \pm 1$;

    (c) Se $B$ é invertível, então $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$;

    (d) Se a forma de escada reduzida de $A$ tem uma linha nula, então $|A| = 0$;

    (e) Não existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $|AA^\top| = 1$.;

    (f) Se $|A| \neq 0$, então $A$ pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

16. Considere a matriz $A$ no exercício 4.

    (a) Determine $\widehat{A}$, a matriz dos complementos algébricos de $A$.

    (b) Calcule $A(\operatorname{adj} A)$.

17. Para cada uma das seguintes matrizes, calcule a matriz adjunta e a sua inversa:

    (a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

18. Se possível, resolva os seguintes sistemas, usando a Regra de Cramer.

    (a) $\begin{cases} 3x - 2y &= 7 \\ -5x + 6y &= -5 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 2x + y &= 7 \\ -3x + z &= -8 \\ y + 2z &= -3 \end{cases}$

19. Encontre o valor de $x$ sem resolver o sistema para as restantes incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{cases}$$

20. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

    (a) Se $A$ é uma matriz de ordem $n \geq 2$, então $A\,adj(A)$ é uma matriz diagonal.

    (b) A regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

    (c) Se $A$ é uma matriz de ordem $n \geq 2$ invertível, então a $adj(A)$ também é invertível.

    (d) Se $A$ é uma matriz de ordem $n \geq 2$ com uma linha nula, então a $adj(A)$ também tem uma coluna nula.

21. Sejam $p, n \in \mathbb{N}$, com $n > p$, $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que $\det(AB) = 0$.

# Ficha de Exercícios: "Espaços Vectoriais"

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ a adição usual de vectores e uma multiplicação externa $\odot$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida do seguinte modo:

$$\alpha \odot (x,y) = (\alpha x, y),$$

para quaisquer $\alpha\in\mathbb{R}$ e $(x,y)\in R^2$. Mostre que $(\mathbb{R}^2,+,\odot)$ não é um espaço vectorial.

2. Sejam $E$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ e $u,u_1,\ldots,u_n\in E$. Mostre que:

   (a) $\alpha(u_1+\cdots+u_n)=\alpha u_1+\cdots+\alpha u_n$; (b) $(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)u=\alpha_1 u+\cdots+\alpha_n u$.

3. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\mathbb{Q}^3$;
   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2-y^2-z^2=0\}$;
   (c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1\}$.

4. Mostre que é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ o conjunto:

   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+3z=0,\ y+z=0,\ z=0\}$;
   (b) $\{(a,b,2a+3b) : a,b\in\mathbb{R}\}$.

5. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=yz\}$;
   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=3y-4z\}$;
   (c) $\{(a,b,2a+3b+4) : a,b\in\mathbb{R}\}$;
   (d) $\{(a-1,b+1,2a+3b+1) : a,b\in\mathbb{R}\}$.

6. Mostre que o subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes indicadas é um subespaço de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

   (a) Simétricas; (b) Hemi-simétricas.

7. Mostre que o subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes não invertíveis não é um subespaço de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

8. Em $\mathbb{R}^2$ considere os subespaços

$$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\} \qquad \text{e} \qquad G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-y\}.$$

   (a) Mostre que $F\oplus G=\mathbb{R}^2$.
   (b) Determine a projecção, sobre $F$ segundo $G$, do vector $(2,3)$ de $\mathbb{R}^2$.

9. Sejam $E$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $v_1,v_2\in E$. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Se $(v_1,v_2)$ é linearmente dependente, então para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $\alpha v_1+\beta v_2 = 0_E$;

(b) Se $0v_1 + 0v_2 = 0_E$, então $(v_1, v_2)$ é linearmente dependente;

(c) Se $(v_1, v_2)$ é linearmente independente, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha v_1 + \beta v_2 \neq 0_E$;

(d) Se para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_E$, então $(v_1, v_2)$ é linearmente independente;

(e) Se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha v_1 + \beta v_2 \neq 0_E$, então $(v_1, v_2)$ é linearmente dependente.

10. Considere os vectores $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ e $u_4 = (0,1,0,1)$ de $\mathbb{R}^4$. Mostre que:

(a) $u_4$ é combinação linear de $u_1, u_2, u_3$;

(b) $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ é uma sequência linearmente dependente;

(c) $(u_1, u_2, u_3)$ é uma sequência linearmente independente.

11. Considere os elementos $p(x) = x^2 - 2x - 3$, $q(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e $r(x) = ax^2 - 1$ de $\mathbb{R}_2[x]$, sendo $a \in \mathbb{R}$. Determine o valor de $a$ de modo a que a sequência $(p, q, r)$ seja linearmente dependente.

12. Sejam $a$, $b$ e $c$ valores reais distintos. Mostre que a sequência $((1,1,1), (a,b,c), (a^2, b^2, c^2))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

13. Considere cada um dos seguintes subconjuntos do espaço vectorial indicado:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + b + c = 0 \right\} \quad \text{em } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

$$G = \left\{ ax^2 + bx + c \ \in \mathbb{R}_2[x] : a + b + c = 0 \right\} \qquad \text{em } \mathbb{R}_2[x] \quad \text{e}$$

$$H = \left\{ (a, b, c) \ \in \mathbb{R}^3 : a - 2b + c = 0 \right\} \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

(a) Justifique que cada um dos conjuntos é um subespaço do espaço vectorial indicado, apresentando uma sequência geradora.

(b) Indique, justificando, uma base de cada um dos subespaços.

(c) Indique a dimensão de cada um dos subespaços.

14. Indique uma base do subespaço vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes simétricas.

15. Sejam $E$ um espaço vectorial real e $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ uma base de $E$. Considere em $E$ os seguintes subespaços:

$$F = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_4, e_1 + e_2 + e_4 \rangle \qquad \text{e} \qquad G = \langle e_5 \rangle.$$

(a) Indique duas bases de $G$ distintas.

(b) Mostre que $F = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_4 \rangle$.

(c) Mostre que $F = \langle e_1 + e_2, e_3, e_4 \rangle$.

(d) Justifique que a sequência $(e_1 + e_2, e_3, e_4)$ é linearmente independente.

(e) Determine a dimensão de $F$ e a dimensão de $G$.

16. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$W = \langle (1,2,2), (0,-1,1) \rangle \qquad \text{e} \qquad U = \langle (2,1,7), (1,0,4) \rangle.$$

Mostre que $W = U$.

17. No espaço vectorial $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ considere a sequência de vectores

$$\mathcal{S} = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

e seja $F$ o subespaço gerado por $\mathcal{S}$.

(a) Verifique que $\mathcal{S}$ não é uma base de $F$.

(b) Determine uma subsequência de $\mathcal{S}$ que seja uma base de $F$.

(c) Mostre que $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ pertence a $F$ indicando a sequência das coordenadas do vector na base indicada na alínea anterior.

(d) Indique uma base de $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ à qual pertençam os vectores da base de $F$ indicada em (b).

(e) Determine um subespaço $G$ de $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ tal que $F \oplus G = \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

18. Sejam $E$ um espaço vectorial real e $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ uma base de $E$. Considere os subespaços de $E$:

$$F = \langle e_1 + e_3 - e_4, e_3, e_1 - e_4, e_5 \rangle \qquad \text{e} \qquad G = \langle e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3 \rangle.$$

(a) Determine a dimensão de $F + G$.

(b) Mostre que $F \cap G = \langle e_3 \rangle$.

19. Considere os subespaços vectoriais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{bmatrix} : u, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{e} \qquad G = \left\{ \begin{bmatrix} v & 0 \\ w & -v \end{bmatrix} : v, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determine uma base de $F$, $G$, $F + G$ e $F \cap G$.

20. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base de $\mathcal{L}(A)$, o espaço das linhas de $A$.

(b) Verifique se o vector $(2,1,1,2,1)$ pertence a $\mathcal{L}(A)$.

(c) Indique qual a nulidade (dimensão de $\mathcal{N}(A)$) de $A$.

(d) Determine uma base de $\mathcal{N}(A)$.

21. Indique, justificando, quais das afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

    (a) Seja $E$ um espaço vectorial de dimensão 1 sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $F$ um subespaço de $E$. Então $F = E$;

    (b) Seja $E$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $X, Y \subset E$ são tais que $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = E$, então tem de ser $X \cap Y \neq \emptyset$;

    (c) Se $u_1, u_2, u_3$ são vectores linearmente dependentes num espaço vectorial $E$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, então existem $i \neq j$, onde $i, j \in \{1, 2, 3\}$, tais que $u_i$ é combinação linear de $u_j$;

22. Seja $E$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$. Sejam $F$ e $G$ subespaços de $E$ tais que $\dim(F) = 2$ e $\dim(G) = n - 1$. Mostre que ou $F \subseteq G$ ou $\dim(F \cap G) = 1$.