UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame 5 de Janeiro de 2015

Tempo: 2h 30 m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

(2) **1.** Calcule, caso existam, os seguintes limites

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-n+3}\right)^{2n}$.

(3) **2.** Estude a natureza das séries numéricas

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}\ \cos(n))^n}{n!}$, sendo e o número de Neper;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+n+3}{\sqrt[3]{8n^7+3n+1}}$.

(2) **3.** Mostre que a seguinte série alternada é simplesmente convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\,\pi)\ \frac{n}{n^2+1}\ .$$

Grupo II

(2) **4.** Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1.$$

Prove que a equação $g(x) = 0$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

(2) **5.** Determine o polinómio de Taylor de ordem 4 de

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

na vizinhança do ponto 1.

(2) **6.** Estude a função

$$h(x) = \frac{x}{\log(x)}$$

quanto à existência de rectas assímptotas. Justifique com pormenor as afirmações.

Grupo III

(1) **7.** Determine a função que verifica as seguintes condições:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{x+1}{4x^2+9}, \qquad f(0) = 1.$$

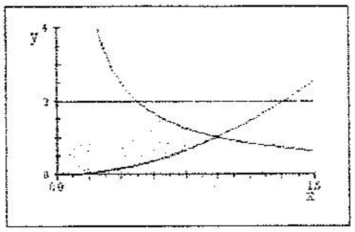
(1) **8.** Indique o valor do integral $\displaystyle\int_2^3 x\sqrt{4-x}\, dx$, justificando com detalhe.

(1) **9.** Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 2} \dfrac{\int_x^2 e^{t^2} dt}{x-2}$.

(2) **10.** Determine a área do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \frac{1}{x},\ x \geq 0,\ y \leq 2 \right\},$$

representada a sombreado na figura seguinte



(2) **11.** Prove que o integral

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$$

converge e encontre o seu valor .

1. **Calcule:**

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n 2+3^n 3}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n 3}{3^n} = 3.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-n+3}\right)^{2n} = e^2$

$$\text{C. A.}\left(\frac{n^2+1}{n^2-n+3}\right)^{2n} = \left(\frac{n^2-n+3+n-2}{n^2-n+3}\right)^{2n} = \left(1+\frac{n-2}{n^2-n+3}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+3}{n-2}}\right)^{\frac{n^2-n+3}{n-2}}\right]^{\frac{2n}{\frac{n^2-n+3}{n-2}}}$$

$$\to (e^1)^2 = e^2$$

2. **Estude a natureza das séries numéricas:**

a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(e\cos n)^n}{n!}$

Não é uma série de termos positivos.

Vou analisar a convergência absoluta e usar $|\cos n| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(e\cos n)^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n!}$$

Agora sim já tenho uma série de termos não negativos e posso aplicar o critério D'Alembert (há fatoriais)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,e^n e}{(n+1)n!\,e^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e}{(n+1)} = 0 < 1.$$

Assim, pelo critério D'Alembert posso concluir que a série $\sum\frac{e^n}{n!}$ é convergente. Esta série é maior que $\sum\left|\frac{(e\cos n)^n}{n!}\right|$, pelo que, por comparação, esta última também converge. Finalmente como estou a analisar a convergência absoluta, posso afirmar que a série **converge absolutamente**.

b. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2+n+3}{\sqrt[3]{8n^7+3n+1}}$

Como a diferença de graus (baixo – cima) é ⅓, vou comparar com a série de Dirichlet $\sum\frac{1}{n^{1/3}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n^2+n+3}{\sqrt[3]{8n^7+3n+1}}}{\frac{1}{n^{1/3}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1/3}3n^2}{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{n^7}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{7/3}}{2n^{7/3}} = \frac{1}{2} > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{3n^2+n+3}{\sqrt[3]{8n^7+3n+1}}$ e $\sum \frac{1}{n^{1/3}}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1/2$, logo divergente, a série em causa também é **divergente**.

3. **Mostre que a série $\sum \cos(n\pi)\frac{n}{n^2+1}$ converge simplesmente.**

É uma série alternada. Em primeiro lugar vou testar a convergência absoluta (série dos módulos). Observação: $\cos(n\pi) \equiv (-1)^n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

Esta série é de termos não negativos. Como a diferença de graus (baixo – cima) é 1, vou comparar com a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^1}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n^1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{n}{n^2+1}$ e $\sum \frac{1}{n^1}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $\alpha = 1$, logo divergente, a série em causa também é divergente.

Como estou a testar a convergência absoluta, posso afirmar que a série **não converge absolutamente**.

Para testar a convergência simples vou utilizar o critério de Leibnitz.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1} \longmapsto a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

$$a_n \geq a_{n+1}? \longmapsto \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \checkmark \; a_n \text{ é decrescente.}$$

Como $a_n \to 0$ e é decrescente, a série **converge simplesmente**.

4. **Mostre que a equação $-2x^3 + x^3 - x + 1 = 0$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.**

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$$
$$g(0) = 1 \; e \; g(1) = -1$$

Como a função g é contínua em $[0,1]$, pois é um polinómio, e $g(0) \times g(1) < 0$, posso aplicar o Teorema de Bolzano e concluir que existe pelo menos um ponto c em $]0,1[$ tal que $g(c) = 0$.

Para mostrar que é único vou calcular a derivada …

$$g'(x) = -6x^2 + 2x - 1 < 0$$

Esta derivada é uma parábola volta para baixo sem raízes pelo que é estritamente negativa. Assim a função g é estritamente decrescente, e a ter um zero ele é **único**.

5. Determine o polinómio de Taylor de ordem 4, na vizinhança do ponto 1 de $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -1(1+x)^{-2} \to f'(1) = -2^{-2} = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3} \to f''(1) = 2.2^{-3} = \frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4} \to f'''(1) = -6.2^{-4} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = 24(1+x)^{-5} \to f^{(4)}(1) = 24.2^{-5} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ P_4(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(x-1) + \tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{-3/8}{3!}(x-1)^3 + \frac{3/4}{4!}(x-1)^4$$

6. Estude, quanto à existência de assimptotas a função $h(x) = \frac{x}{\log x}$.

Como o domínio é $D =]0,+\infty[\backslash\{1\}$, há a possibilidade de existir uma assimptota vertical.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\log x} = \frac{1}{0} = \infty$$

Há uma assimptota vertical $x = 1$.

As assimptotas oblíquas são $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} = 0 \qquad \text{e} \qquad b = \lim_{x\to+\infty} h(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} = \frac{\infty}{\infty}\ (R.Cauchy) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

Não há assimptotas oblíquas.

7. Determine a função que verifica as condições: $f'(x) = \frac{x+1}{4x^2+9}$, $f(0) = 1$.

$$f(x) = \int \frac{x+1}{4x^2+9}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{4x^2+9}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{3^2+(2x)^2}dx = \frac{1}{8}\log(4x^2+9) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Como $f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\log(9) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{8}\log(9)$

$$\therefore\ f(x) = \tfrac{1}{8}\log(4x^2+9) + \tfrac{1}{6}\arctan\left(\tfrac{2x}{3}\right) + 1 - \tfrac{1}{8}\log(9)$$

8. Calcule

$$\int_2^3 x\sqrt{4-x}dx$$

Para encontrar uma primitiva vou utilizar a substituição $\begin{cases}\sqrt{4-x}=t\\ x=4-t^2\\ dx=-2tdt\end{cases}$.

$$\int x\sqrt{4-x}dx=\int(4-t^2)t(-2t)dt=\int -8t^2+2t^4dt=-8\frac{t^3}{3}+2\frac{t^5}{5}=-\frac{8}{3}\sqrt{4-x}^3+\frac{2}{5}\sqrt{4-x}^5$$

$$\int_2^3 x\sqrt{4-x}dx=\left[-\frac{8}{3}\sqrt{4-x}^3+\frac{2}{5}\sqrt{4-x}^5\right]_2^3=-\frac{8}{3}+\frac{2}{5}-\left(-\frac{8}{3}\sqrt{2}^3+\frac{2}{5}\sqrt{2}^5\right).$$

9. Calcule …

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_x^2 e^{t^2}dt}{x-2}=\frac{0}{0}(R.Cauchy+Teo.Fund.Cál.Int.)=\lim_{x\to 2}\frac{-e^{x^2}}{1}=-e^4.$$

10. Calcule a área de $x^2\le y\le\frac{1}{x}x\ge 0,y\le 2$.

A região tem de ser partida em duas …

$$Área=\int_0^{1/2}2-x^2dx+\int_{1/2}^1\frac{1}{x}-x^2dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2}+\left[\log x-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^1=\frac{2}{3}+\log 2.$$

11. Prove que o integral $\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$ converge e calcule o seu valor.

$$\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/2}\log x\,dx$$

A primitiva é encontrada por Partes $\begin{cases}u'=x^{-1/2} & \to u=\frac{x^{1/2}}{1/2}\\ v=\log x & \to v'=\frac{1}{x}\end{cases}$

$$\int x^{-1/2}\log x\,dx=\frac{x^{1/2}}{1/2}\log x-\int\frac{x^{1/2}}{1/2}\frac{1}{x}dx=2\sqrt{x}\log x-2\int x^{-1/2}dx=2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}.$$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/2}\log x\,dx=\lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}\right]_a^1=\lim_{a\to 0^+}\left(-4-2\sqrt{a}\log a\right)$$

Deste limite resulta uma indeterminação $0 \times \infty$

$$\lim_{a\to 0^+} \sqrt{a}\log a = \lim_{a\to 0^+} \frac{\log a}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{\infty}{\infty} (R.\,Cauchy) = \lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{2}a^{-3/2}} = \lim_{a\to 0^+} -2\sqrt{a} = 0.$$

E assim, o nosso integral impróprio de 2ª espécie é convergente, sendo igual a -4.