Análise Matemática II (2014/2015)

1^a Frequência 27/03/2015 **Duração:** 3h

Nome:

Número: **Curso:**

Resolva cada grupo numa folha de teste diferente.

Grupo I

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x - \sqrt{y}}}{\ln(x^2 + y^2)}.$$

Determine o domínio $D(f)$ da função f e responde às perguntas seguintes.

(a) se o conjunto $D(f)$ é aberto ou fechado?

(b) se o conjunto $D(f)$ é conexo ?

(c) quais são pontos da fronteira $\partial D(f)$ que não pertencem a $D(f)$?

(d) se o conjunto $\partial D(f) \setminus D(f)$ é compato? conexo?

Justifica bem cada resposta. Dê ilustração geométrica.

2. Encontre as superfícies de nível da função

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}.$$

Interprete geometricamente.

3. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(1 + x^2 y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

<u>**Sugestão:**</u> Use o limite notável e substituição de variáveis adequada.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y}{x^2-2y} & \text{se } x^2 - 2y \neq 0; \\ 0 & \text{se } x^2 - 2y = 0. \end{cases}$$

Diga, justificando, se f é contínua ou não na origem..

Grupo II

5. Determine as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ das funções seguintes (em todos os pontos onde existem):

   (a) $z = xy \ln(x+y)$;

   (b) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;

   (c) $z = (x^2+y^2)\,\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2-y^2}}$.

   Sugestão: Na alínea **(c)** faça as substituições adequadas e use a regra da cadeia.

6. Verifique se ~~Demonstre que~~ a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   é diferenciável na origem e determine o seu diferencial em $(0,0)$.

7. Escreva a equação do plano tangente ao paraboloide hiperbólico

$$z = 4y^2 - x^2$$

   no ponto $(2,1,0)$. Determine a reta normal à superfície no ponto indicado. Faça ilustração geométrica.

8. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = xy - z^2.$$

   (a) Calcule a norma do gradiente de f no ponto $\mathbf{x}_0 = (-9, 12.10)$;

   (b) Encontre a derivada direcional $f'(\mathbf{x}_0; \mathbf{v})$ onde $\cancel{\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

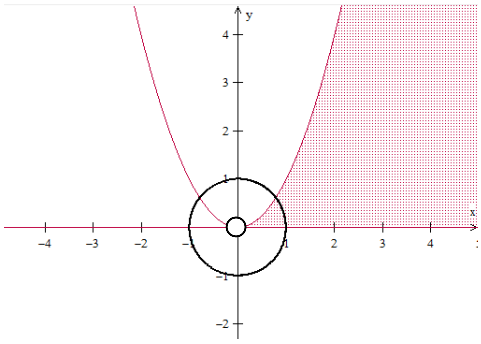
$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

BOM TRABALHO!

1. **Considere $f(x,y) = \frac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{\ln(x^2+y^2)}$. Determine o domínio da função.**

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - \sqrt{y} \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 > 0 \wedge \ln(x^2+y^2) \neq 0\}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \sqrt{y} \wedge y \geq 0 \wedge (x,y) \neq (0,0) \wedge x^2 + y^2 \neq 1\}$$



Observação: a fronteira da circunferência é a tracejado … não entra no domínio

$$int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \sqrt{y} \wedge y > 0 \wedge (x,y) \neq (0,0) \wedge x^2 + y^2 \neq 1\}$$

Como $int(D) \neq D$, o conjunto não é aberto!

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \sqrt{y} \wedge y \geq 0\}$$

Como $\overline{D} \neq D$, o conjunto não é fechado!

Como a circunferência corta o conjunto, ele não é conexo.

Os pontos da fronteira de D que não estão em D são a origem e a parte da circunferência na área sombreada, isto é …

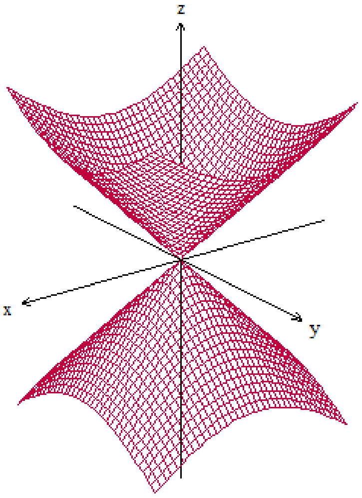
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq \sqrt{y}\} \cup \{(0,0)\}$$

O conjunto atrás é fechado e limitado, por isso compacto. No entanto não é conexo pois não é possível ligar a origem com o pedaço da circunferência.

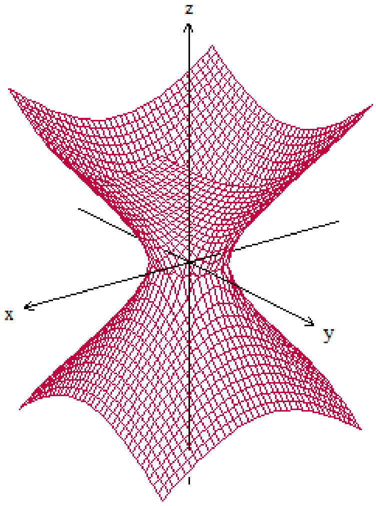
2. **Superfícies de nível de $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$**

$$\sqrt{x^2 + y^2 - z^2} = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = k^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - k^2}$$

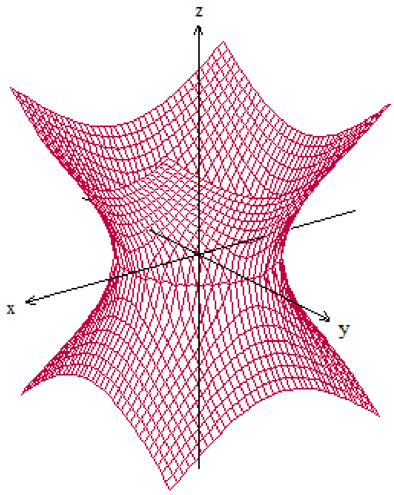
São hiperboloides (tipo ampulhetas).



k=0



k=1



k=2

3. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Vou usar coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} (1+\rho^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{-\frac{1}{\rho^2}}$$

Nova mudança … $\beta = \frac{1}{\rho^2}$. Se $\rho \to 0$ então $\beta \to +\infty$

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left(1+\frac{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\beta^2}\right)^{-\beta} = \left[\lim_{\beta\to+\infty}\left(1+\frac{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{\beta^2}\right)^{\beta^2}\right]^{\lim\limits_{\beta\to+\infty}\frac{-\beta}{\beta^2}} = \left(e^{\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right)^0 = 1.$$

4. Verifique se a seguinte função é contínua na origem.

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2y}{x^2-2y}, & x^2-2y\neq 0 \\ 0, & x^2-2y=0 \end{cases}}$$

A função será contínua se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y}{x^2-2y} = 0$$

Acontece que este limite não existe. Vou calcular os iterados.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+2y}{x^2-2y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1, \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2y}{x^2-2y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{2y}{-2y} = -1.$$

Assim os limites iterados são diferentes, o limite pretendido não existe e a função não é contínua em (0,0).

5. Calcule as derivadas parciais

a) $\boldsymbol{z = xy\ln(x+y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$

b) $\boldsymbol{z = \arctan\frac{x}{y}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2+x^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{y^2+x^2}$$

c) $\boldsymbol{z = (x^2+y^2)\frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2-y^2}}}$

$$z = \frac{u^2-u^3}{1+v}, \quad u = \sqrt{x^2+y^2}, v = \sqrt{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u-3u^2}{1+v}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{u^2-u^3}{(1+v)^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+y^2}-3(x^2+y^2)}{1+\sqrt{x^2-y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}^3}{\left(1+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

6. Verifique se a seguinte função é diferenciável na origem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Em primeiro lugar é necessário calcular as derivadas parciais em (0,0) por definição.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

Para que a função seja diferenciável em (0,0) é necessário que o seguinte limite exista e seja 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\times(x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\times(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0-1\times(x)-1\times(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2 - yx^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{-\rho^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \rho^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2\sqrt{\rho^2}} = \cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta - \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Como o limite depende de θ não existe (e não é 0) a função não é diferenciável em (0,0).

O diferencial é $d(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = dx + dy$.

7. Escreva a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4y^2 - x^2$ em (2,1,0).

$z = 4y^2 - x^2 \Leftrightarrow 4y^2 - x^2 - z = 0 \Rightarrow F(x,y,z) = 4y^2 - x^2 - z$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,0)\times(x-2) + \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,0)\times(y-1) + \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,0)\times(z-0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(2,1,0) = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8y \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,0) = 8$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,0) = -1$$

A equação fica …

$$-4\times(x-2) + 8\times(y-1) - 1\times(z-0) = 0 \;\Leftrightarrow 4x + 8y - z = 0$$

A reta normal é … $(x,y,z) = (2,1,0) + k(-4,8,-1), k \in \mathbb{R}$

8. Considere $f = xy - z^2$.

a) Calcule a norma do gradiente em (-9,12,10)

$$\nabla f(x,y,z) = (y,x,-2z), \quad \nabla f(-9,12,10) = (12,-9,-20)$$

$$\|\nabla f(-9,12,10)\| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = 25.$$

b) Calcule a derivada direcional no ponto anterior, na direção de $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Como as derivadas parciais existem e são contínuas perto de $(12,-9,-20)$, a função é aí diferenciável e assim posso usar a fórmula

$$f'\left((12,-9,20);\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \langle \nabla f(12,-9,20), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\rangle = \langle (12,-9,-20), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\rangle =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{9}{\sqrt{3}} - \frac{20}{\sqrt{3}} = -\frac{17}{\sqrt{3}}.$$