Álgebra Linear e Geometria Analítica B

2014/15

Departamento de Matemática

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Slides da 3ª Semana de aulas

Programa

1. Matrizes
2. **Sistemas de Equações Lineares**
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Aos elementos $a_1, \ldots, a_n$ chamamos **coeficientes** da equação e a b o **termo independente** da equação.
Se $b = 0$ diz-se que a equação é linear **homogénea**.

O elemento $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (1) se

$$a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Exemplos

1. *A equação linear*
$$ax + by = c,$$
com a, b *não são ambos nulos, define uma recta em* $\mathbb{R}^2$.
2. *A equação linear*
$$Ax + By + Cz = D,$$
em que A, B, C *não são todos nulos, define um plano em* $\mathbb{R}^3$.

Passemos a definir agora sistema de equações lineares:

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Exemplos

1.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2.
$$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Definição

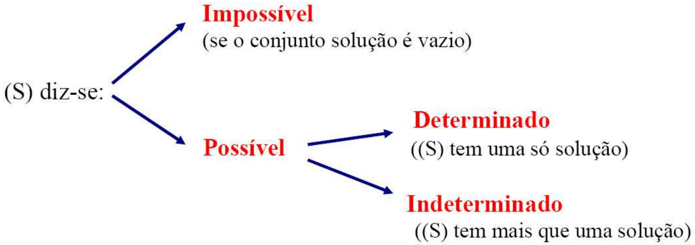
Um elemento $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ diz-se uma **solução** do sistema de n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

se substituindo em cada equação equação do sitema as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ por $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, todas as equações se transformam numa proposição verdadeira.

O conjunto formado por todas as soluções de um sistema chama-se **conjunto-solução** do sistema.

Classificação de sistemas:



Exemplos

1. *Um sistema homegéneo*

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

é sempre possível, pois $(0, 0, \ldots, 0)$ *é uma solução do sistema.*

2. Para o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & -4 \end{array}\right.,$$

$(0,1)$ e $(-4,3)$ são soluções, pois

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -4 & + & 2\times 1 & = & 2 \\ -2\times(0) & - & 4\times 1 & = & -4 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} -4 & + & 2\times 3 & = & 2 \\ -2\times(4) & - & 4\times 3 & = & -4 \end{array}\right..$$

Além disso,

$$\begin{aligned} CS &= \{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \alpha_1 = 2-2\alpha_2\} \\ &= \{(2-2\alpha_2,\alpha_2) :\ \alpha_2\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

constituí o conjunto de todas as soluções do sistema. O sistema é **possível e indeterminado** (aprenderemos de seguida a resolver o sistema).

O nosso objectivo neste capítulo é:

(1) **Discussão do sistema**: Indicar para um dado sistema se este é impossível ou possível e, no caso de ser possível, se é determinado ou indeterminado, sem determinar o conjunto de soluções.

(2) **Resolução do sistema**: Dado um sistema de equações lineares, determinar o conjunto das suas soluções (que será o conjunto vazio se o sistema for impossível).

Definição

Dado um sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

chamaremos **forma matricial** do sistema (S) a

$$(S) \qquad AX = B$$

onde
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

1. $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é a **matriz simples** do sistema
2. $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz das incógnitas**
3. $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz dos termos independentes**.

Chama-se **matriz ampliada** do sistema

$$(S) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. ,$$

à matriz

$$[A \mid B] \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

cuja coluna i, $i = 1, \ldots, n$, é igual à coluna i de A e cuja coluna $n+1$ é igual à coluna (única) de B.

Observação

Note-se que

$$\mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) + 1,$$

porque a matriz $[A \mid B]$ tem o mesmo número de linhas mas mais uma coluna que a matriz A.

Exemplo

Para o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3*, sobre* $\mathbb{R}$*,*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array} \right. ,$$

tem-se a seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

A sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Proposição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Se* $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *é uma matriz* **invertível** *então os sistemas*

$$(S) \qquad AX = B \qquad e \qquad (S') \qquad (PA)X = PB$$

são equivalentes (isto é, têm o mesmo conjunto de soluções).

Observação

Na prática a matriz P *será uma sequência de matrizes elementares que vão permitir transformar o nosso sistema inicial* $AX = B$ *num sistema mais simples, onde seja possível reconhecer as soluções.*

Exercício

Considere os sistemas

$$(S_1)\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \\ 2x+3y=2 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=0 \\ 2x+3y=1 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}.$$

1. *Discuta cada um dos sistemas* (S_1), (S_2) *e* (S_3).
2. *Resolva os sistemas possíveis.*

Resumo sobre a discussão de sistemas:

$AX = B$ com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$AX = B$
Sistema

- $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Impossível
- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Possível
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$
    Sistema Possível Determinado
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$.
    Sistema Possível Indeterminado, com grau de indeterminação $n - \mathrm{r}(A)$

Alguns exemplos resolvidos:

Exemplo 1

Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & & +z & = & 2 \\ 3x & -y & +2z & = & 3. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2+(-2)\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_3+(-3)\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$r(A) = r(A|B) = 2$, $n = 3$ incógnitas (possível e indeterminado)

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema equivalente a que corresponde a última matriz ampliada é

$$\begin{cases} x \quad\quad +\frac{1}{2}z &= 1 \\ \quad\quad y \quad -\frac{1}{2}z &= 0 \\ \quad\quad\quad 0 &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z. \end{cases} \qquad \color{blue}{Obs:} \begin{array}{l} x, y \hookrightarrow \text{variáveis líderes} \\ z \hookrightarrow \text{variável Livre} \end{array}$$

$\therefore$ O sistema é possível e indeterminado, com um gráu de indeterminação, e o conjunto-solução é

$$CS = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo 2

Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} \quad\; y + 2z = \frac{5}{2} \\ 2x \quad\; + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{2}{5} l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

(f.e.) $r(A) = r(A|B) = 3 = n$

$$\xrightarrow[\ell_2+\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+\ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

O sistema equivalente a que corresponde a última matriz ampliada é

$$\begin{cases} x & = \frac{1}{2} \\ \quad y & = \frac{1}{2} \\ \qquad z & = 1. \end{cases}$$

Obs : $x, y, z \hookrightarrow$ variáveis líderes

$\therefore$ O sistema é possível e determinado e o conjunto-solução é

$$CS = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Exemplo 3 Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ x & +3y & & = & 3. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 - \ell_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(f.e.) $r(A) = 2 < r(A|B) = 3$

Um sistema equivalente ao inicial é

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ & & 0 & = & 1. \end{cases}$$

$\therefore$ O sistema é impossível e o conjunto solução é $\emptyset$.

Definição

Um sistema de equações lineares $AX = B$ diz-se um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y & = 2 \\ x + y & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$(f.e.)\ r(A) = r(A|B) = 2$ $(*)$

$$\xrightarrow[\ell_1 + \ell_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

- *O sistema é possível e determinado.* $CS = \{(2, -2)\}$.

Outra forma seria:
Em $(*)$ verificou-se que $r(A) = 2 = n$, logo A é invertível. Calculando a inversa de A obtém-se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, colocando o sistema na forma matricial obtém-se

$$AX = B$$

e multiplicando em ambos os termos da igualdade por A^{-1} obtém-se

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow \underline{X = A^{-1}B}.$$

$X = A^{-1}B$ é assim a única solução do sistema.
Efectuando os cálculos

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

logo $CS = \{(2, -2)\}$.

Observação

Os sistemas de Cramer são sempre possíveis e determinados com solução $X = A^{-1}B$.

Exemplo

Suponha-se agora que se pretende resolver os sistema

$$(S)\ \begin{cases} 2x + y &= a \\ x + y &= b \end{cases}$$

com a, b *números reais.*

1. *Podemos resolver como habitualmente (exercício);*
2. *Podemos usar o facto de ser um sistema de Cramer. Efectivamente, em* $(*)$ *verificou-se que* $r(A) = 2$, *logo* A *é invertível. Calculando a inversa de* A *obtém-se:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O sistema (S) *na forma matricial é dado por*

$$AX = B \quad \textit{onde} \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B.$$

Tem-se então que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ -a+2b \end{bmatrix}.$$

$\therefore$ O sistema (S) é possível e determinado e o conjunto solução é

$$CS = \{(a-b, -a+2b)\}.$$

Obs: O raciocínio do exercício anterior pode ser aplicado a qualquer sistema $AX = B$ que seja um sistema de cramer. O sistema de Cramer é sempre possível e determinado e a solução é dada por

$$X = A^{-1}B.$$

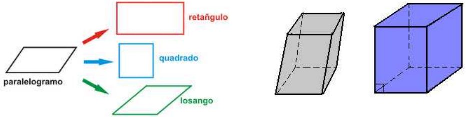
Programa

Determinantes

3. Determinantes (só matrizes quadradas)

O determinante de uma matriz vai permitir, por exemplo:

1. Determinar se uma matriz quadrada é ou não invertível,
2. Resolver sistemas de Cramer,
3. calcular áreas de paralelogramos (em $\mathbb{R}^2$) e volumes de paralelepípedos (em $\mathbb{R}^3$),



4. ...

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *(*$n \geq 2$*) e* $i, j \in \{1, \dots, n\}$*, denotamos por*

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A *se retirarmos a linha* i *e a coluna* j*.*

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A, e representa-se por

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A|,$$

ao número

- Se $n = 1$, então
$$\det A = a_{11}.$$

- Se $n > 1$, então
$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n),$$
ou seja, se $n > 1$,
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i}\det A(1|i).$$

Exemplo

Se A for uma matriz de ordem 2, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

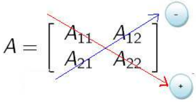
então,

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2} \det A(1|2).$$

Porque $A(1|1) = a_{22}$ e $A(1|2) = a_{21}$ vem que

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Fórmula para cálculo do determinante de uma matriz 2×2



Exemplo

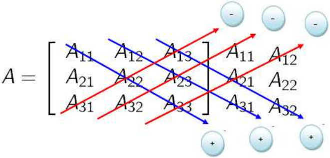
Se A for uma matriz de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \textit{então,}$$

$$\det A =$$
$$a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3)$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \ldots$$

Fórmula para cálculo do determinante de uma matriz 3×3

(Regra de Sarrus)



Exercício

Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, *com* $n \geq 2$. *Designa-se por* **complemento algébrico** *da posição* (i,j) *de* A, *ao escalar definido por*

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

Observação

$$\begin{aligned} \det A =& a_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n) \\ =& a_{11}\widehat{a}_{11} + \ldots + a_{1n}\widehat{a}_{1n}. \end{aligned}$$