Universidade de Évora
ANÁLISE MATEMÁTICA I

3^{a}Frequência **2010/11** **15/1/11**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1.Determine todas as primitivas de cada uma das funções seguintes:

$$a)\ f(x) = \frac{x + arctg(x)}{1+x^2}; \quad b)\ g(x) = e^x\ \cos x; \quad c)\ h(x) = \cos^3 x.$$

2. Determine, se possível, para a função definida pela expressão:

$$f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

a) uma primitiva, $F_1(x)$, que se anula no ponto $x = 0$;
b) uma primitiva, $F_2(x)$, tal que: $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x) = \log 2$;
c) uma primitiva, $F_3(x)$, tal que: $\lim\limits_{x\to+\infty} F_3(x) = 0$.

II

3. Calcule os seguintes integrais:

$$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\left(x^3 + 2\pi\right) dx; \qquad b)\ \int_1^e x\ \log^2(x)\, dx;$$

$$c)\ \int_1^e \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}} dx; \qquad d)\ \int_1^2 \frac{x^2-2x+2}{x^2\,(x-3)} dx.$$

III

4. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e seja $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$.

$a)$ Sabendo que F é diferenciável, calcule $F'(x)$.

$b)$ Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in R\backslash\{0\}$, $xF(x) > 0$.

5. Calcule a área da região limitada pelas linhas de equações $x^2y = 1$, $y = -5x$ e $x = -3y$, sombreada na figura seguinte.