Universidade de Évora

Departamento de Matemática

1.^{a} Frequência - 22 de outubro de 2016

Observações: Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas. Apresente todos os cálculos que efectuar e justifique todas as suas respostas. Numere todas folhas de teste que entregar: por exemplo, se entregar 3 folhas de teste, devem numerá-las como 1/3, 2/3 e 3/3.

Grupo I

1. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3 \wedge x+1 \geq 0\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

a) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado (conjunto dos pontos de acumulação) A.

b) Diga, justificando, se A é um conjunto aberto, fechado e/ou limitado.

c) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A

Grupo II

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Mostre que a sucessão $(x_n)_n$ é converge e determine o seu limite.

Sugestão: Mostre primeiro que $(x_n)_n$ é descrescente e depois aplique o teorema das sucessões monótonas

3. Calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+2}-1}{2^n+1}$; *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\, sen\,(n!)}{n+1}$.

Grupo III

4. Considere a seguinte série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{3})^n + (\sqrt{2})^n}{(\sqrt{3}\times\sqrt{2})^n}.$$

Determine a sua soma, caso exista.

5. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} sen\left(\frac{1}{n^2}\right)$; *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Grupo IV

6. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Se $a \in int(A)$, então $a \in fr(\mathbb{R}\backslash A)$;

b) Se a sucessão $(x_n)_n$ é limitada, então $(x_n)_n$ é converge;

c) Dada a sucessão $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$, tem-se que $\underline{\lim}\, x_n = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{\lim}\, x_n = \dfrac{3}{2}$;

d) Se $x_n \geq 1$ para um número infinito de valores de n, então a série $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ é divergente.

Bom Trabalho!!

1. $A = \{x \in \mathbb{R}: |x+2| < 3 \wedge x+1 \geq 0\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\} = [-1,1[\cup \left\{2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \dots\right\}$

a. $int(A) =]-1,1[$; $\partial(A) = \left\{-1,1,2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \dots\right\}$; $\overline{A} = [-1,1] \cup \left\{2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \dots\right\}$; $A' = [-1,1]$

b. Como $A \neq int(A)$, A não é aberto; Como $A \neq \overline{A}$, A não é fechado; Como A está contido numa bola centrada na origem de raio 3, A é limitado.

c. O supremo é 2 (o menor dos majorantes); o ínfimo é -1 (o maior dos minorantes); o máximo é 2 (pois o supremo está em A); o mínimo é -1 (pois o ínfimo pertence a A).

2. Sucessão definida por recorrência

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{n+1}, n \geq 2 \end{cases}$$

Primeiro note-se que todos os termos são números não negativos $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$ a sucessão poderá ser decrescente.

$$u_n \geq u_{n+1}?$$

$$u_n \geq u_{n+1} \Leftrightarrow u_n \geq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{u_n}{2} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow u_n \geq \frac{2}{n+1} \geq 0 \checkmark$$

$\therefore u_n \geq 0$ a desigualdade em cima é verdadeira e assim a sucessão e monótona decrescente.

Por outro lado, por ser decrescente, todos os termos são menores que o 1ª, assim temos que $0 \leq u_n \leq 1$.

O que prova que a sucessão é limitada. Se é monótona e limitada então é convergente.

Desta forma a sucessão é convergente para um L, $u_n \to L \;\; e \;\; u_{n+1} \to L$

Passando ao limite a expressão de u_{n+1}, fica ...

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{n+1} \to L = \frac{L}{2} + \frac{1}{+\infty + 1} \Leftrightarrow L - \frac{L}{2} = 0 \Leftrightarrow L = 0.$$

$\therefore$ O limite é 0.

3. Calcule os limites

a) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+2} - 1}{2^n + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+2}}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{\frac{2^n}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^2 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = 4.$

b) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3}}{n} = 1.$

c) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} \sin(n!) = \text{"infinitéssimo} \times \text{limitada"} = 0.$

4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n+\left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}\right)^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$$

Trata-se de duas séries geométricas com razões $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$, respetivamente. Como estão ambas entre -1 e 1, as séries são convergentes, pelo que a soma das séries também o é.

A soma da primeira é $S_1=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. A soma da segunda é $S_2=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

Assim a soma da série 'principal' é $S=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

5.

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1}$

É uma série de termos positivos. Vou comparar com a série $\sum\frac{1}{n^2}$ e assim irá convergir.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}=2>0 \text{ e finito}$$

Por comparação as séries $\sum\frac{2}{n^2-1}$ e $\sum\frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza. Como $\sum\frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet com $\alpha=2>1$ logo convergente, a série a ser estudada também é **convergente**.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

É uma série de termos positivos. Vou comparar com a série $\sum\frac{1}{n^2}$ e assim irá convergir.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1>0 \text{ e finito}$$

Por comparação as séries $\sum\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e $\sum\frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza. Como $\sum\frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet com $\alpha=2>1$ logo convergente, a série a ser estudada também é **convergente**.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Como é uma série de termos positivos e o termo geral está elevado a **n**, vou utilizar o critério da raiz ou critério de Cauchy.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n}=e^{-1}<1$$

Assim, pelo critério da raiz, a série é **convergente**.

6.

a. $a\in int(A)\to a\in fr(\mathbb{R}\backslash A)$.
Falso pois se $A=[0,1]$ o ponto 0.5 é interior e não pertence à fronteira de $\mathbb{R}\backslash A$

b. $(x_n)_n$ é limitada, então também é convergente.
Falso pois $(x_n)_n=(-1)^n$ é limitada e não é convergente.

c. $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n n}{2n+1}$ então $\underline{\lim}\, x_n=\frac{1}{2}$ e $\overline{\lim}\, x_n=\frac{3}{2}$.
Verdade

d. Se $x_n\geq 1$ então a série $\sum x_n$ é divergente.
Verdade porque assim o termo geral não pode tender para 0, critério fundamental para a série convergir.