Universidade de Évora

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exame 21/01/2015

1. Determine e esboce o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$.

2. Estude a continuidade da função f, se $f(x,y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$

3. Escreva a equação do plano tangente e da reta normal à superfície de equação $\ln\left(\frac{y}{2x}\right) - z = 0$ no ponto $P(1,2,0)$.

4. Calcule o integral, invertendo primeiro a ordem de integração,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(y^3+1\right)\right) dy\, dx.$$

5. Considere o campo vetorial $F(x,y) = \left(-2y^3 \sin x,\ 6y^2 \cos x + 5\right)$.

a) Mostre que F é conservativo ($\exists$ um campo escalar f tal que $F = \nabla f$).

b) Seja C uma curva de classe C^1 que vai do ponto $A\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ao ponto $B\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$ calcule $\int_C F \cdot dr$.

6. O sólido Q é definido pelas inequações $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e $z \geq 0$. Sendo a sua densidade dada por $\delta(x,y,z) = x$, calcule a sua massa.

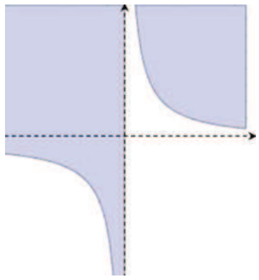
7. Seja S a parte do parabolóide $Z = 4 - x^2 - y^2$ com $z \geq 0$ e seja C a sua fronteira. Calcule

$$\oint_C y\,dx + (x + e^{z})\,dy + (1 + ye^{z})\,dz,$$

usando o teorema de Stokes.

1.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 \geq 0\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{x}\right\}$$



2.

A função f é contínua para $(x,y) \neq (0,0)$ pois é o quociente de uma função contínua (o cosseno) com outra contínua (um polinómio) e esta última nunca se anula.

Para ser contínua também em (0,0) é necessário que o limite do ramo de cima coincida com 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} = (subs\ x^2 + y^2 = \rho^2) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \rho^2\right)}{\rho^2} = [Indeter. R. Cauchy] =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho \operatorname{sens}\left(\frac{\pi}{2} - \rho^2\right)}{2\rho} = 1.$$

$\therefore$ Assim a função também é contínua no ponto (0,0), pelo que é contínua em $\mathbb{R}^2$.

3. .

$$F(x,y,z) = \ln\left(\frac{y}{2x}\right) - z$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{x} \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,0) = -1 \;\blacksquare\; \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(1,2,0) = \frac{1}{2} \;\blacksquare\; \frac{\partial F}{\partial z} = -1 \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(1,2,0) = -1$$

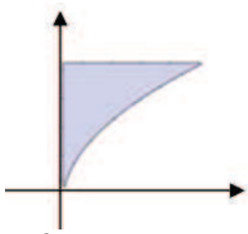
$$\therefore \text{ Eq. Plano Tangente: } -1(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) + (-1)(z-0) = 0 \Leftrightarrow -x + \frac{1}{2} - z = 0.$$

Vetor normal: $\nabla F(1,2,0) = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$

$$\therefore \text{ Eq. Reta Normal: } (x,y,z) = (1,2,0) + k\left(-1, \frac{1}{2}, -1\right), k \in \mathbb{R}.$$

4.

$$\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{array} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{array}$$

$$\therefore \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{\pi y^3}{2} + \frac{\pi}{2}\right) dy dx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \cos\left(\frac{\pi y^3}{2} + \frac{\pi}{2}\right) dx dy = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi y^3}{2} + \frac{\pi}{2}\right)(y^2 - 0) dy =$$

$$= \frac{2}{3\pi} \int_0^1 \frac{3\pi}{2} y^2 \cos\left(\frac{\pi y^3}{2} + \frac{\pi}{2}\right) dy = \frac{2}{3\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y^3}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1} = -\frac{2}{3\pi}.$$

5.

a. $F(x,y) = (P,Q)$ é conservativo se $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \operatorname{sen} x = \frac{\partial Q}{\partial x} \checkmark$$

b. Como F é conservativo, existe uma função f (o seu potencial) tal que $\nabla f = F$.
Encontrada essa função f, o integral de linha que liga o ponto A a B fica $\int_C F = f(B) - f(A)$

$$\nabla f = F \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2y^3 \operatorname{sen} x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 \cos x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = \int -2y^3 \operatorname{sen} x \, dx \\ f = \int 6y^2 \cos x + 5 dy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = 2y^3 \cos x + Y(y) \\ f = 2y^3 \cos x + 5y + X(x) \end{cases}$$

$$\therefore f(x,y) = 2y^3 \cos x + 5y.$$

$$\therefore \int_C F = f(B) - f(A) = f\left(\frac{\pi}{4}, -1\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) = -2\frac{\sqrt{2}}{2} - 5 - (0+5) = -\sqrt{2} - 10.$$

6.

$$Massa = \iiint densidade$$

O sólido Q é a semiesfera positiva de raio 2 (o hemisfério norte). Vou utilizar coordenadas esféricas.

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore Massa = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi}{4} \int_0^2 \rho^3 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = 0.$$

7.

$$F(x,y,z) = (y, x + e^z, 1 + ye^z)$$

O Teorema de Stokes liga um integral sobre a curva fechada C com um integral sobre a superfície S.

$$\oint_C F = \int_S rot(F)$$

Assim vou calcular primeiro o rotacional de F ...

$$rot(F) = (e^z - e^z, 0 - 0, 1 - 1) = (0,0,0)$$

$$\therefore \oint_C y dx + (x + e^z) dy + (1 + ye^z) dz = \int_S (0,0,0) = 0.$$