3 SÉRIES NUMÉRICAS

3.1. Determine o termo geral e, sempre que possível, a soma das seguintes séries :

a) $2-2+2-2+2-\cdots$;

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$;

c) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$;

d) $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}+\cdots$;

e) $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots$;

f) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}\right)+\cdots$;

g) $\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots$;

h) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots$;

3.2. Determine as somas parciais das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$; *b)* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$; *c)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$; *d)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n}$;

e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{6}{5^{n-2}}$; *f)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n}$; *g)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\,(n+2)}}$ *h)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

3.3. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$. Sendo $k \in \mathbb{N}$, mostre que a série $\sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+k})$ é convergente e prove que a sua soma é $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - ka$.

3.4 Mostre que:

a) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} = \frac{1}{4}$;

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1} n\,(n+1)} = 1.$

3.5 Considere a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+n}$.

a) Calcule o resto de ordem 100 da série;

b) Determine uma ordem a partir da qual, o erro que se comete ao tomar para valor da soma da série a sua soma parcial, não exceda $0,1$.

3.6. Diga qual a natureza e determine o termo geral de uma série cuja sucessão das somas parciais é $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

3.7. Conclua, através da análise do termo geral, quanto à natureza das seguintes séries:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{n+3}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2n^2-1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$; *c)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{3n+1}{5n+2}}$; *d)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3}$.

3.8. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) A soma de duas séries divergentes é divergente.

b) A soma de uma série convergente com uma série divergente é uma série divergente.

c) Se $a_n \to 0$, quando $n \to +\infty$, então a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é convergente.

d) As séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ e $\sum\limits_{n\geq 100} \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ são da mesma natureza.

3.9. Estude quanto à convergência, usando o critério de comparação, as seguintes séries:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n}$; *b)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$; *c)* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|sen\ n|}{n^2}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} sen\dfrac{1}{n}$; *e)* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$; *f)* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2+2n-1}{2n^4+n^2+2}$.

3.10. Prove que se a série de termos não negativos $\sum_{n\geq 1} a_n$ é convergente e se $p > 1$, então a série $\sum_{n\geq 1} a_n^p$ também é convergente.

3.11. Estude quanto à convergência, usando o critério de D'Alembert, as seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n!}$; *b)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+4}{3^n}$; *c)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2}$;

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; *e)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times (3n+3)}$; *f)* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+2}}{n!}$.

3.12. Estude quanto à convergência simples ou absoluta as séries de termos gerais:

a) $\frac{sen\ n}{2^n}$; *b)* $(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; *c)* $(-1)^n \frac{n}{2n^3+1}$;

d) $\left(-\frac{3}{n}\right)^n$; *e)* $(-1)^n \frac{n^4}{n^4+1}$; *f)* $(-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

3.13. Prove que se a série $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge, então a série $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ também converge. Mostre que a proposição recíproca é falsa.

3.14. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+1}$; *b)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^2+1}$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+1}$; *d)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[n sen \frac{1}{n} - (n+2)\, sen \frac{1}{n+2}\right]$;

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2}$; *f)* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$;

$g)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\frac{1}{n}}{n+1}$;

$h)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{n^2+4}}$;

$i)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-(2n+1)}$;

$j)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (1+senx)^n$.

3.15. Determine os valores do número real α para os quais a série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)^{-\alpha}$ é:

$a)$ simplesmente convergente;

$b)$ absolutamente convergente.

3.16. Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e $(b_n)_n$ uma sucessão limitada. Mostre que:

$a)$ Se a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é convergente, então a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n b_n$ também o é;

$b)$ Se a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge, então a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2$ também é convergente. (Sugestão: use o resultado anterior);

$c)$ A recíproca da proposição anterior é falsa, através de um contra-exemplo.