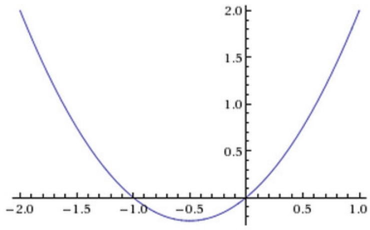
1. Simplificar e prolongar por continuidade.

A parábola $x^2 + x$ é a imagem ao lado, por isso para $x < -2$ é positiva. Assim posso tirar o módulo.



$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & se\ x \geq -2 \\ -x-2, & se\ x < -2 \end{cases}$$

Assim para $x > -2$, $|x+2| = x+2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+2}, & se\ x < -2 \\ \dfrac{x^2+x}{x+2}, & se\ x > -2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}, x \neq -2$$

A função é prolongável por continuidade a $x = -2$ se o seguinte limite existir

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$\therefore$ A função não é prolongável por continuidade a $x = -2$.

2.

a. Derivar 3 vezes $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+x+5}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x+1)(x+3)-(x^3+3x^2+x+5)}{(x+3)^2} = \frac{2x^3+12x^2+18x-2}{(x+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2+24x+18)(x+3)^2-(2x^3+12x^2+18x-2)2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{2x^3+18x^2+54x+58}{(x+3)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2+36x+54)(x+3)^3-(2x^3+18x^2+54x+58)3(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{-12}{(x+3)^4}$$

b. Derivar $f(x) = x\ln(\ln x)$

$$f'(x) = \ln(\ln x) + x(\ln(\ln x))' = \ln(\ln x) + x\frac{(\ln x)'}{\ln x} = \ln(\ln x) + x\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

3. Mostre que $x \sin x = 1$ tem exatamente uma solução em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$x \sin x = 1 \leftrightarrow x \sin x - 1 = 0 \qquad f(x) = x \sin x - 1$$

- f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pois é o produto de duas contínuas;
- $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$

Então pelo Corolário do Teorema do Valor Intermédio, existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f(c) = 0.$

Para mostrar que é único vou provar que a derivada nunca é zero no intervalo.

$$f'(x) = \sin x + x \cos x > 0 \text{ em } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Assim a função f é <u>estritamente</u> crescente, logo a ter um zero é único.

4. Estudo da função $f(x) = xe^{-x^2+1/2}$.

$$f'(x) = e^{-x^2+1/2} + x(-2x)e^{-x^2+1/2} = e^{-x^2+1/2}(1-2x^2)$$

Pontos críticos $f'(x) = 0$.

$$e^{-x^2+1/2}(1-2x^2) = 0 \leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = (-2x)e^{-x^2+1/2}(1-2x^2) + e^{-x^2+1/2}(-4x) = e^{-x^2+1/2}(4x^3 - 6x)$$

Como $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0$, o máximo é $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Como $f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$, o mínimo é $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2+1/2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2-1/2}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Regra L´Hôpital} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2-1/2}} = 0$$

Como ambos os limites dão zero, o máximo e o mínimo obtidos antes são absolutos.

5. Teorema de Rolle e Teorema do valor médio.

$$r(t) = -49 + 75t - 90t^2 + 20t^3, t \geq 0.$$

a. No instante inicial a partícula está em $r(0) = -49$.

A equação $r(t) = -49$ tem, além de $t = 0$, as seguintes soluções…

$$r(t) = -49 \leftrightarrow 75t - 90t^2 + 20t^3 = 0 \leftrightarrow t(75 - 90t + 20t^2) = 0 \to t(15 - 18t + 4t^2) = 0 \leftrightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{4}.$$

Os outros dois instantes são $t = \frac{9\pm\sqrt{21}}{4}$.

b. Velocidade média entre 0 e 4.

$$VM = \frac{r(4) - r(0)}{4 - 0} = \frac{91 - -49}{4} = 35.$$

c. Velocidade

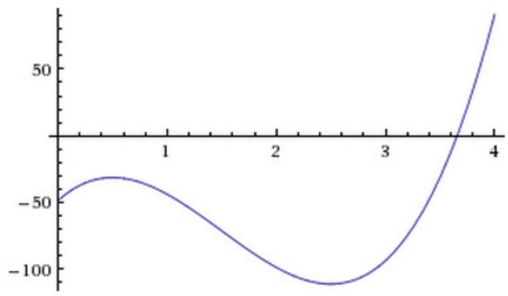
$$r'(t) = 75 - 180t + 60t^2.$$

O teorema do valor médio diz que existe pelo menos um $c \in]0,4[: r'(c) = \frac{r(4)-r(0)}{4-0} = 35.$

$$r'(t) = 35 \leftrightarrow 40 - 180t + 60t^2 = 0 \leftrightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

Como estão ambos no intervalo]0,4[, o Teorema verifica-se em 2 pontos.

d. Pontos mais afastados …



Pelo gráfico o mais afastado é em $t = 4, r(4) = 91$.

O mais afastado (para baixo) é no mínimo em $t = \frac{9+\sqrt{57}}{6}$.

6. Regra de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x^3 - 16x^2 + 14x + 30}{24 - 26x - 15x^2 + 25x^3 - 9x^4 + x^5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to -1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 32x + 14}{-26 - 30x + 75x^2 - 36x^3 + 5x^4} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$