EXERCÍCIOS PARA
ANÁLISE MATEMÁTICA I

2017/2018

**DOCENTES: Ana Isabel Santos, Jorge Salazar, José Ribeiro,
Rui Albuberque e Vladimir Goncharov.**

Esta ficha de exercícios é composta por um conjunto de exercícios que os alunos da unidade curricular de Análise Matemática I, leccionada pelo Departamento de Matemática da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Évora aos cursos de Ciências da Terra e da Atmosfera, Engenharia das Energias Renováveis, Engenharia Geologica, Engenharia Informática, Engenharia Mecatrónica, Matemática Aplicada e Matemática Aplicada à Economia e Gestão, deverão resolver ao longo do semestre.

Esta ficha, que foi elaborada tendo por base a bibliografia recomendada e o programa da unidade curricular, é composta por nove secções, as quais serão acrescentadas de modo sequencial ao longo do semestre. Refira-se ainda que as respectivas soluções encontram–se no final de cada uma das secções.

1 NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM $\mathbb{R}$ e INDUÇÃO MATEMÁTICA

1.1. Demonstre as seguintes propriedades do módulo (exercício opcional):

a) $|x| = \max\{-x, x\}$;

b) $-|x| \leq x \leq |x|$;

c) $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$;

d) $|x-b| \leq a \Longleftrightarrow b-a \leq x \leq b+a$;

e) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

f) $|xy| = |x|\,|y|$;

g) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y|$;

1.2 Determine os pontos interiores, exteriores, fronteiros, de acumulação e isolados dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) $A = (1, 5]$

b) $B = [-3, -1) \cup (1, 2] \cup \{0, 4\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-2| \leq 7\}$;

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\right\}$;

e) $E = \left\{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.3. Determine o interior, o exterior, a fronteira, o derivado, o fecho e o conjunto dos pontos isolados dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, indicando quais são abertos ou fechados:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} : x^2 \leqslant 25\right\}$;

b) $B = (-\infty, 4]$;

c) $C = (-3, +\infty)$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| \geq 1\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{Z} : |3 - x| < 1 \wedge x \leq \sqrt{3}\right\}$;

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 2\right| < 1\right\}$;

g) $G = \mathbb{N}$; *h*) $H = \mathbb{Q}$; *i*) $I = \mathbb{R}$.

1.4. Considere $D_f \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

a) Determine D_f;

b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado de D_f;

c) Diga, justificando, se D_f é aberto, fechado e/ou limitado.

1.5. Seja $D_g \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right).$$

a) Determine D_g;

b) Determine o interior, o exterior, a aderência e o derivado de D_g;

c) Diga, justificando, se D_g é aberto, fechado e/ou limitado.

1.6. Considere $D_h \subset \mathbb{R}$ o domínio da função definida por

$$h(x) = \frac{e^{3x}}{x^2 - 1}.$$

a) Determine D_h;

b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o conjunto dos pontos isolados de D_h;

c) Diga, justificando, se D_h é aberto, fechado e/ou limitado.

1.7. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são majorados, minorados ou limitados e indique, caso existam, o supremo, o infímo, o máximo e o mínimo de cada um:

a) $A = (5, +\infty)$;

b) $B = (-\infty, -2]$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 9\right\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq 1\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{Z} : |5 - x| < 5 \wedge x \geq \sqrt{5}\right\}$;

f) $F = \left\{m^{(-1)^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

1.8. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Se $A \subset int\,(A)$, então é um conjunto aberto;

b) Seja $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1\right\}$, então $\{-1, 0, 1\} \subset fr\,(A)$;

c) Se $a \in A$, então $a \in \overline{A}$;

d) Se $a \in ext(A)$, então $a \in fr(\mathbb{R} \backslash A)$;

e) Seja $B = (-5, 2]$, então $inf(B) = \min(B) = -5$ e $\sup(B) = \max(B) = 2$.

1.9. Prove que, apesar de verdadeiras para os primeiros naturais, as proposições seguintes são falsas:

a) $n^2 - 2n = n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) $2^{2^n} + 1$ é primo, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.10. Usando o método de indução matemática verifique que:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$;

d) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

1.11. Seja $(a_n)_n$ o termo geral de uma progressão de razão r e $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a soma dos n primeiros termos dessa progressão. Mostre que:

a) se a progressão é aritmética, então $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n, \forall n \in \mathbb{N}$;

b) se a progressão é geométrica, então $S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}, \forall n \in \mathbb{N}$.