Exame
A.M.I 07/01/2013

1. Mostre por definição que:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+3}{(n+1)^2} = 2$$

---

2. Calcule, caso existam, os seguintes limites
a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-1}$; b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n+1}$

---

3. Estude, quanto à convergência, as seguintes séries de termos não negativos:
a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

II

4. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações
a) $\lim_{x\to 5} f(x)=2$ e $\lim_{x\to 5} g(x)=0$ então $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)}$ é infinito
b) Se $\lim_{x\to 6} f(x)\times g(x)$ existe então o limite deve ser $f(6)\times g(6)$
c) Se $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ então $\lim_{x\to 1} f(x)-f(1)=0$

---

5. Seja a função real de variável real $f(x)=(2x)^{3x}$
a) Determine o subconjunto de IR onde a função é diferenciável
b) Calcule, se possível, $f'(0)$ e $f'(\frac{1}{2})$

6. Qual é a primitiva de $f(x) = 10\,\frac{\operatorname{arctg}(5x)}{2+50x^2}$ que passa pelo ponto $(\frac{1}{3}, \pi^2)$

III

8. a) Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que $F'(1)=0$
b) Utilizando a substituição $e^t = x$, determine, para $a=0$, o valor de $F(1)$

$$F: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow F(x) = \int_1^{\log x} \left(a e^{-t^2} + \frac{1}{1+e^t}\right) dt$$

---

9. Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de eq $y=0$, $y = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ e $x=e$

---

7. a) Determine o valor integral: $\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)} dx$.
b) Indique a natureza do integral seguinte e calcule o seu valor se for possível: $\int_1^{+\infty} \frac{3}{(x+2)^2} dx$.

[redacted] HR

1. Mostre por definição que

$$\lim \frac{2n^2+4n+4}{(n+1)^2} = 2$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$ tem que existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ de tal forma que para ordens a partir dessa $n > p \Longrightarrow \left|\frac{2n^2+4n+4}{(n+1)^2} - 2\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{2n^2+4n+4}{(n+1)^2} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+4n+4-2(n+1)^2}{(n+1)^2}\right| = \left|\frac{2}{(n+1)^2}\right| = \frac{2}{(n+1)^2} < \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (n+1)^2 > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n+1 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1$$

Assim dado um $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número natural $p > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1$ e a demostração está concluída.

2. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a. $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$ Trata-se de multiplicar e dividir pelo 'conjugado'.

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-1}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2-n+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \lim \frac{n^2-n+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2-1}} = \lim \frac{-n+2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \lim \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}.$$

b. $\lim \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n+1}$ Trata-se de uma indeterminação 1^∞ que irá originar uma exponencial.

CA:

$$\left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+1} - \frac{2}{2n^2+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1 + \frac{-2}{2n^2+1}\right)^{2n^2+1}\right]^{\frac{n+1}{2n^2+1}}$$

O limite dentro dos parêntesis retos é e^{-2}, enquanto que o limite da fração em expoente é 0. Assim o limite é $(e^{-2})^0 = e^0 = 1$.

3. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ Vou comparar esta série com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$ pois a diferença de graus é 1.

$$\lim \frac{\frac{n^2+1}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^1}} = \lim \frac{(n^2+1)n}{n^3+n+1} = \lim \frac{n^3}{n^3} = 1 > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{n^2+1}{n^3+n+1}$ e $\sum \frac{1}{n^1}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é a série harmónica que diverge (ou é a Série de Dirichlet com $\alpha = 1$, logo divergente), a série em causa também é **divergente**.

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ Por estar envolvido um fatorial vou utilizar o critério D'Alembert.

$$\lim \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim \frac{2^n \times 2(n+1) \times n! \times n^n}{(n+1)^n \times (n+1) \times 2^n n!} = 2 \times \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Este limite vai originar uma exponencial e^{-1}(proceder como no exercício 2b).

A solução é então $2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$. Assim pelo critério D'Alembert posso afirmar que a série **converge**.

4. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

a. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$ então $\lim_{x\to 5} \frac{f(x)}{g(x)}$ é infinito

Verdadeiro pois nos limites uma constante diferente de zero, a dividir por zero é infinito.

b. Se $\lim_{x\to 6} f(x) \times g(x)$ existe então o limite deve ser $f(6) \times g(6)$

Verdadeiro, propriedade dos limites.

c. Se $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ então $\lim_{x\to 1} f(x) - f(1) = 0$

Verdadeiro, se o primeiro limite existe, a função tem aí derivada, logo também é contínua.

5. Seja a função real de variável real $f(x) = (2x)^{3x}$

a. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a função é diferenciável.

Para derivar esta função é necessário aplicar o exponencial do logaritmo.

$$((2x)^{3x})' = \left(e^{\ln(2x)^{3x}}\right)' = \left(e^{3x\ln 2x}\right)' = (3x\ln 2x)' \times e^{3x\ln 2x} = (3\ln 2x + 3)(2x)^{3x}$$

Como está presente um logaritmo é necessário que $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Assim a função é diferenciável em $]0, +\infty[$.

b. Calcule, se possível $f'(0)$ e $f'(1)$.

$$f'(1) = (3\ln 2 + 3)(2)^3 = (3\ln 2 + 3) \times 8$$

Como, pela alínea anterior, só existe derivada em pontos superiores ao 0, é impossível calcular $f'(0)$.

6. Calcule a primitiva de $f(x) = \frac{10arctg(5x)}{2+50x^2}$ que passa por $\left(\frac{1}{5}, \pi^2\right)$.

$$\int \frac{10arctg(5x)}{2+50x^2}dx = \frac{5}{2}\int \frac{5}{1+(5x)^2} \times (arctg(5x))^1 dx = \frac{5}{2}\frac{(arctg(5x))^2}{2} + c$$

Se passa em $\left(\frac{1}{5}, \pi^2\right)$, quer dizer que quando $x = \frac{1}{5}$ a função vale π^2. Com esta pista determina-se o valor da constante c.

$$\frac{5}{2}\frac{(arctg(1))^2}{2} + c = \pi^2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + c = \pi^2 \Leftrightarrow c = \pi^2 - \frac{5\pi^2}{64} \Leftrightarrow c = \frac{61\pi^2}{64}$$

A função pretendida é finalmente

$$\frac{5(arctg(5x))^2}{4} + \frac{61\pi^2}{64}.$$

7.

a. Determine o valor do integral $\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}dx$.

O cálculo desta primitiva é imediato (apesar de dar a entender de ser de funções racionais)

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-2)(x+1)}dx = \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x-2}dx = [\ln|x^2-x-2|]_0^1 = \ln|-2| - \ln|-2| = 0.$$

b. Indique a natureza do seguinte integral e calcule-o se possível.

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{(x+2)^2}dx$$

Trata-se de um integral impróprio de 1ª espécie.

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{(x+2)^2} dx = \lim_{b\to+\infty} 3\int_1^b (x+2)^{-2} dx = 3\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\right]_1^b = 3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b+2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1.$$

Como o resultado foi uma constante, o integral é **convergente**.

8. Considere a função definida em $[1,+\infty[$. por

$$\boldsymbol{F(x) = \int_1^{\ln x} ae^{-t^2} + \frac{1}{1+e^{-t}} dt}$$

a. Determine a para que $F'(1) = 0$.

Através do Teorema Fundamental do Cálculo Integral determina-se a derivada de F.

$$F'(x) = (\ln x)' \times \left(ae^{-(\ln x)^2} + \frac{1}{1+e^{-\ln x}}\right) - 1' \times \left(ae^{-(1)^2} + \frac{1}{1+e^{-1}}\right) = \frac{1}{x}\left(ae^{-(\ln x)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$$

$$F'(x) = \frac{a}{xe^{-(\ln x)^2}} + \frac{1}{x+1}$$

$$F'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{1} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

b. Utilizando a substituição $e^t = u$ e $a = 0$, determine $F(1)$.

$$F(1) = \int_1^0 \frac{1}{1+e^{-t}} dt$$

A substituição $e^t = u \Leftrightarrow t = \ln u \Leftrightarrow dt = \frac{1}{u} du$ se $t = 0 \Leftrightarrow u = 1$ se $t = 1 \Leftrightarrow u = e$

$$\int_1^0 \frac{1}{1+e^{-t}} dt = \int_e^1 \frac{1}{1+\frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du = \int_e^1 \frac{1}{u+1} du = [\ln(u+1)]_e^1 = \ln(2) - \ln(e+1).$$

9. Calcule a área da região do plano limitada por $y = 0$, $y = \frac{\ln x}{x}$ e $x = e$.

Intersetando as duas curvas com y, obtem-se $x = 1$. Temos assim os dois extremos de integração.

$$\text{Área} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} - 0dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^1 dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$