

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Recurso

20 de Janeiro de 2014

Tempo: 2h 15 m

Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

- (2) 1. Considere a sucessão

$$u_n = \frac{2}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

- a) Classifique u_n quanto à monotonia.
- b) A sucessão é limitada? Justifique com detalhe a resposta.
- c) Classifique-a, justificando, quanto à existência de limite.

- (3) 2. Estude a natureza das séries numéricas

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n+2)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)};$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$

- (2) 3. Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3-x)^n}{2n+1}$$

indique, justificando, os valores de x para os quais a série é:

- a) absolutamente convergente;
- b) simplesmente convergente;
- c) divergente.

Grupo II

- (3.5) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x < 0; \\ \frac{1}{2-x}, & 0 \leq x < 2; \\ 1, & x = 2; \\ \frac{1}{e^{2-x}}, & x > 2. \end{cases}$$

- a) Estude a continuidade e a derivabilidade de f .
- b) Determine a função f' .
- c) Mostre que existe $c \in]-\pi, 0[$, tal que $f'(c) = \frac{1}{2\pi}$.
- d) Calcule $f([0, +\infty[)$.

- (3) 5. Calcule os seguintes limites (caso existam):

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(x-1) \log(x^2-1)]$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}]$.

Grupo III

- (1.5) 6. Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}$.

Sugestão: Na alínea b) use a substituição $t = \sqrt[4]{x}$.

- (1.5) 7. Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \cos(2\pi e^{t-1}) - 1 \, dt}{(x-1)^2}.$$

- (1.5) 8. Esboce e calcule a área da região limitada pelas condições:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \arctan x.$$

- (2) 9. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+2x+x^2}}{1+x^3} \, dx$; b) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x} \, dx$.

ExRec_20-01-2014