# Análise Matemática II (2014/2015)

$2^a$ Frequência 29/05/2015 **Duração:** 3h

Nome:

Número: Curso:

Resolva cada grupo numa folha de teste diferente !!!

## Grupo I

1. Considere a aplicação $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y)$ definida por

$$\begin{cases} x = u \cos \frac{v}{u}; \\ y = u \sin \frac{v}{u}, \end{cases}$$

$u \neq 0$. Observe que $\Phi(2, \pi) = (0, 2)$, mostre que $\Phi$ tem *aplicação inversa* diferenciável numa vizinhança do ponto $(2, \pi)$ e encontre a *matriz de Jacobi* $\operatorname{Jac}(\Phi^{-1})(0, 2)$.

2. Aplicando a *fórmula de Taylor* de $2^a$ ordem calcule aproximadamente o valor de

$$\frac{\cos 0,1}{\cos 0,2}.$$

a meio

3. Considere a função

$$u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4.$$

Encontre as derivadas

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

4. Com uso da regra de multiplicadores de Lagrange encontre os valores mínimo e máximo da função

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

na bola

$$\mathrm{B} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\right\}.$$

# Grupo II

5. Considere a região limitada pelas parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ e pela recta $x = 4$. Determine a área desta região

   (i) com *integração dupla*;

   (ii) com *integração de linha* aplicando o *Teorema de Green*.

   Faça desenho.

6. Com *integração tripla* encontre o volume do sólido limitado pelo *hiperbolóide elíptico*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

   (*de duas folhas*) e pelo cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Faça desenho.

   **Sugestão**; Para facilitar os cálculos pode fazer primeiro uma substituição $x = a\xi$, $y = b\eta$, $z = c\zeta$ (não esquece do respetivo *jacobiano*).

7. Classifique e calcule os seguintes *integrais de linha*:

   (i) $\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds$;  a meio

   (ii) $\int\limits_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$.

   Em ambos casos $C$ é uma espira da *hélice circular* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$, percorrida na direcção de crescimento do parâmetro $t$. Faça desenho. Explica o sentido físico de cada um dos integrais.

8. Considere o *campo vectorial* $\overrightarrow{\mathrm{F}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}(x, y) = \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right) \overrightarrow{\mathrm{i}} + \left(2y\cos x - x^2 \sin y\right) \overrightarrow{\mathrm{j}}.$$

   (i) Verifique se o campo $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ é *conservativo*;

   (ii) no caso afirmativo encontre o *potencial* de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$;

   (iii) usando as alíneas (i) e (ii) calcule o integral

$$\int\limits_{(0,\pi)}^{(2\pi,0)} \left(2x\cos y - y^2 \sin x\right) dx + \left(2y\cos x - x^2 \sin y\right) dy.$$

BOM TRABALHO!

**1.** $\boldsymbol{\Phi(u,v) \rightarrow \begin{cases} x = u\cos\frac{v}{u} \\ y = u\sin\frac{v}{u} \end{cases}}$

$\Phi(2,\pi) = \left(2\cos\frac{\pi}{2}, 2\sin\frac{\pi}{2}\right) = (0,2)\checkmark$

$\Phi$ tem aplicação inversa numa vizinhança de $(2,\pi)$ se o determinante da matriz jacobiana for não nulo.

$$\text{Será invertível se } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,\pi)} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\frac{v}{u} + \frac{v}{u}\sin\frac{v}{u} & -\sin\frac{v}{u} \\ \sin\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} & \cos\frac{v}{u} \end{vmatrix}_{(2,\pi)} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\checkmark$$

A matriz jacobiana da inversa é dada por

$$\mathrm{Jac}(\Phi^{-1})(0,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(2,\pi)}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(0,2)} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

A inversa de uma matriz 2x2 é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{determinante}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**2. Calcular, aproximadamente o valor de $\boldsymbol{\frac{\cos 0.1}{\cos 0.2}}$**

É necessário utilizar a fórmula de Taylor de ordem 2 à função $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ no ponto $(0,0)$

- $f(0,0) = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sin x}{\cos y} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\cos x}{\cos y} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\cos x \cos y \cos^2 y + \cos x \sin y 2 \cos y \sin y}{\cos^4 y} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$$\frac{\cos x}{\cos y} \cong 1 + 0(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}\left(-1(x-0)^2 + 2 \times 0(x-0)(y-0) + 1(y-0)^2\right)$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} \cong 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Assim $\frac{\cos 0.1}{\cos 0.2} \cong 1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.2^2}{2} \cong 1 - 0.005 + 0.002 \cong 0.997$.

**3.** $\boldsymbol{u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4}$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(1 + 2x + 2y + 2x - 6xy + 4x^3 - 8x^2y^2)}{\partial x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2 + 2 - 6y + 12x^2 - 16xy^2)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(32x - 16y^2)}{\partial x} = 32.$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(-1 + 2x + 2y - 3x^2 - 3y^2 - 8x^2y + 4y^3)}{\partial x}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2 - 6x - 16xy)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(-6 - 16y)}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(u)}{\partial y}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(-1 + 2x + 2y - 3x^2 - 3y^2 - 8x^2y + 4y^3)}{\partial y}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2 - 6y - 8x^2 + 12y^2)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(-16x)}{\partial x} = -16.$$

**4. Encontre os pontos extremos de $\boldsymbol{u = x^2 + 2y^2 + 3z^2}$ na bola $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 \leq 100}$.**

Vou primeiro examinar os extremos sem a restrição

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Só há um ponto crítico, a origem, que pertence ao interior da região, por isso vale a pena classifica-lo.

$$\mathcal{H}(x,y,z) = \mathcal{H}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = 2 \to d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \to d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

Como são todos positivos, a origem é um minimizante. O mínimo é $u(0,0,0) = 0$.

Finalmente vou examinar os extremos na fronteira da região com o multiplicador de Lagrange.

A função de Lagrange é $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 100)$. Os pontos críticos são…

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ 6z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(2+\lambda) = 0 \\ 2z(3+\lambda) = 0 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow$$

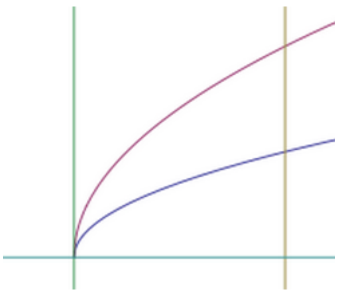
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = -3 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ z = 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -3 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = -3 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \\ z = 0 \\ \dots \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \\ \lambda = -3 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = -3 \\ z = \pm 10 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -2 \\ z = 0 \\ y = \pm 10 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = \pm 10 \end{cases}$$

Há 6 pontos críticos $(0,0,\pm 10), (0,\pm 10,0), (\pm 10,0,0)$

$$u(0,0,\pm 10) = 300, \qquad u(0,\pm 10,0) = 200, \qquad u(\pm 10,0,0) = 100$$

$\therefore$ Assim o máximo é 300 e o mínimo é 0.



**5. Calcule a área da região limitada por $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4$:**

**a) Através de integração dupla.**

$$\text{Área} = \iint_D 1 = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} 1 dy dx = \int_0^4 2\sqrt{x} - \sqrt{x} dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{16}{3}.$$

**b) Através de integrais de linha com o Teorema de Green.**

A função integranda do integral de linha tem de corresponder a 1 no integral duplo (para dar a área). Assim pode ser, por exemplo, $F(x,y) = (0,x)$.

Desta forma $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

Posso então aplicar o Teorema de Green à curva C que é a fronteira da região D em cima.

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_D 1 = \text{Área}$$

Resta assim calcular o integral de curva para funções vetoriais. Como a fronteira é a composição de três curvas é necessário partir em três integrais de linha, um sobre a curva $C_1$ $(y = \sqrt{x})$, outro sobre a curva $C_2$ $(x = 4)$ e outro sobre a curva $C_2$ $(y = 2\sqrt{x})$

$$\oint_C F = \oint_{C_1} F + \oint_{C_2} F + \oint_{C_3} F$$

A parametrização da curva $C_1$ é $r_1(t) = (t, \sqrt{t}), 0 \leq t \leq 4$

$$\oint_{C_1} F = \int_0^4 F(r_1)\cdot r_1'\,dt = \int_0^4 (0,t)\cdot\left(1,\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)dt = \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{2}dt = \frac{1}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

A parametrização da curva $C_2$ é $r_2(t) = (4,t), 2 \le t \le 4$

$$\oint_{C_2} F = \int_2^4 F(r_2)\cdot r_2'\,dt = \int_2^4 (0,4)\cdot(0,1)dt = \int_2^4 4dt = 4(4-2) = 8.$$

A parametrização da curva $C_3$ é $r_3(t) = \left(t, 2\sqrt{t}\right), 0 \le t \le 4$. Atenção que é percorrida ao contrário.

$$\oint_{C_3} F = -\int_0^4 F(r_3)\cdot r_3'\,dt = -\int_0^4 (0,t)\cdot\left(1,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = -\int_0^4 \sqrt{t}dt = -\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = -\frac{2}{3}\sqrt{4^3} = -\frac{16}{3}.$$

$$\therefore \oint_C F = \oint_{C_1} F + \oint_{C_2} F + \oint_{C_3} F = \frac{8}{3} + 8 - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}.$$

**6. Calcular o volume do sólido limitado por $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$**

A interseção de ambas dá duas elipses $z = \pm\sqrt{2}c, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Coordenadas elípticas $\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -c\sqrt{1+\rho^2} \le z \le c\sqrt{1+\rho^2} \end{cases}$. O jacobiano é $ab\rho$.

O hiperboloide $z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1}$ nas coordenadas fica $z = \pm c\sqrt{1+\rho^2}$

$$V = \iiint_S 1 = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-c\sqrt{1+\rho^2}}^{c\sqrt{1+\rho^2}} 1\times ab\rho\,dzd\theta d\rho = ab\int_0^1 \rho\int_0^{2\pi} 2c\sqrt{1+\rho^2}d\theta d\rho = 2abc\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}(2\pi-0)d\rho =$$

$$= 2\pi abc\int_0^1 2\rho(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}d\rho = 2\pi abc\left[\frac{(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi abc}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

**7. Classifique e calcule os seguintes integrais de linha:**

***i)*** $\boldsymbol{\int_C x^2+y^2+z^2\,ds}$

Trata-se de um integral de linha de 1ª espécie com a função integranda escalar $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

A curva C já está parametrizada por $r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), 0 \le t \le 2\pi$

$$f(r) = (a\cos t\,, a\sin t\,, bt) = a^2 + b^2t^2$$
$$\|r'\| = \|(-a\sin t\,, a\cos t\,, b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\pi} f(r)\times\|r'\|dt = \int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\left[a^2t+\frac{b^2t^3}{3}\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 2\pi + \frac{b^2(2\pi)^3}{3}\right).$$

Este integral pode representar a massa de uma arame parametrizado por $r(t)$ com a densidade igual ao quadrado da distância à origem (ou apenas $x^2+y^2+z^2$).

***ii)*** $\displaystyle\int_C \boldsymbol{ydx+zdy+xdz}$

Trata-se de um integral de linha de 2ª espécie com a função integranda vetorial $F(x,y,z)=(y,z,x)$.

A curva C já está parametrizada por $r(t) = (a\cos t\,, a\sin t\,, bt), 0 \le t \le 2\pi$

$$F(r) = (a\sin t\,, bt, a\cos t)$$
$$r' = (-a\sin t\,, a\cos t\,, b)$$
$$\int_C F\,ds = \int_0^{2\pi} F(r)\cdot r'dt = \int_0^{2\pi}(a\sin t\,, bt, a\cos t)\cdot(-a\sin t\,, a\cos t\,, b)dt = \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2 t + 2abt\cos t\,dt =$$
$$= \left[-a^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)+2ab(t\sin t+\cos t)\right]_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

Este integral pode representar o trabalho realizado pelo campo de forças $F$ ao deslocar uma partícula ao longo da curva C.

**8. Considere o campo vetorial $\boldsymbol{F(x,y) = (2x\cos y - y^2\sin x\,, 2y\cos x - x^2\sin y)}$**

**a. Verifique se F é conservativo;**

Será se $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y} \checkmark$$

**b. Encontre um potencial;**

Encontrar $f$ tal que $\nabla f = F$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = P\\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y - y^2\sin x\\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos x - x^2\sin y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = \int 2x\cos y - y^2\sin x\,dx\\ f = \int 2y\cos x - x^2\sin y\,dy\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f = x^2\cos y + y^2\cos x + A(y)\\ f = y^2\cos x + x^2\cos y + B(x)\end{cases} \therefore f(x,y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C.$$

**c. Calcule o integral de linha que liga o ponto (0,π) a (2π,0).**

Como $F$ é conservativo basta calcular a diferença do potencial entre o último ponto e o primeiro

$$\int_{(0,\pi)}^{(2\pi,0)} F = f(2\pi,0) - f(0,\pi) = (2\pi)^2 - \pi^2 = \pi^2.$$