Universidade de Évora
ANÁLISE MATEMÁTICA I

2ª Frequência **2015/16** **18/12/2015**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões. Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + \frac{25}{4}}$; *b)* $g(x) = \arcsin(2x)$.

2. Calcule todas as primitivas da função $f(x) = \frac{e^{4x}+e^{2x}+e^{x}}{e^{x}+1}$, usando a substituição $t = e^x$.

3. Considere a função racional $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+x}{(x^2-2x+1)(1+x^2)}$.

a) Verifique que o polinómio $D(x) = (x^2 - 2x + 1)(1 + x^2)$ tem uma raíz real de multiplicidade algébrica 2 e um par de raízes complexas conjugadas.

b) Escreva $f(x)$ como uma soma de fracções simples.

c) Calcule todas as primitivas da função $f(x)$.

II

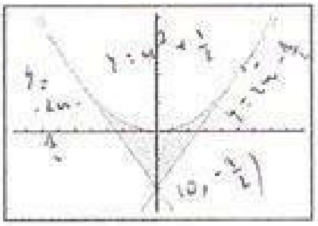
4. a) Calcule o integral: $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x+1}{4+x^2}dx$.

b) Averigúe se o integral impróprio é convergente ou divergente e, no caso de ser convergente, calcule o seu valor: $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\,(\log x)^2}dx$.

Sugestão: use a substituição $t = \log x$.

5. Calcule, caso exista, o seguinte limite: $\lim_{x\to -1}\left[\dfrac{1}{x+1}\displaystyle\int_0^{\log(x+2)} e^{t\,\mathrm{tg}\,t}\,dt\right]$.

6. Determine a área da região plana $D \subset R^2$ limitada pelas curvas, $y = x^2 + \dfrac{1}{2}$, $y = 2x - \dfrac{1}{2}$ e $y = -2x - \dfrac{1}{2}$, sombreada na figura.



III

7. Considere a função $f(x) = x^x$, $x > 0$.

a) Verifique que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

b) Verifique que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

c) Verifique que $f'(x) = f(x)(\log x + 1)$.

d) Verifique que f decresce em $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$ e atinge o mínimo global em $\dfrac{1}{e}$.

8. a) Mostre que, de todos os rectângulos de perímetro P, o que tem área máxima é o quadrado de lado $\dfrac{P}{4}$. Sugestão: Maximize a função: $\left(\dfrac{P}{2} - x\right)x$, $0 < x < \dfrac{P}{2}$.(Porquê?)

b) Mostre que, de todos os rectângulos com área A, o que tem perímetro mínimo é o quadrado de lado $\sqrt{A}$. Sugestão: Minimize a função: $x + \dfrac{A}{x}$, $0 < x$.(Porquê?)

9. Uma equação do 3ºgrau, $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, $a \neq 0$, tem três raízes reais distintas. Prove que $b^2 > 3ac$. Sugestão: aplique o teorema de Rolle ao polinómio do 3º grau; depois, calcule o discriminante da derivada.

1. Calcule todas as primitivas de:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+\frac{25}{4}}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+\frac{9}{4}}dx = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{2(x+2)}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\int \arcsin 2x\, dx \rightarrow$ por partes $u' = 1, v = \arcsin 2x$

$$= x \arcsin 2x - \int x\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx = x\arcsin 2x - \frac{2}{-8}\int -8x(1-4x^2)^{-1/2}dx$$

$$= x\arcsin 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c, c \in \mathbb{R}$$

2. Calcule todas as primitivas de

$\displaystyle\int \frac{e^{4x}+e^{2x}+e^x}{e^x+1}dx \rightarrow$ por substituição $e^x = t, x = \ln t\,, dx = \frac{1}{t}dt$

$$= \int \frac{t^4+t^2+t}{t+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^3+t+1}{t+1}dt = \int t^2 - t + 2 - \frac{1}{t+1}dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - \ln(t+1) = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x - \ln(e^x+1) + c, c \in \mathbb{R}$$

3.

$$\frac{3x^3+2x^2+x}{(x^2-2x+1)(x^2+1)} = \frac{3x^3+2x^2+x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \cdots = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{3x^3+2x^2+x}{(x^2-2x+1)(x^2+1)}dx = 4\int\frac{1}{x-1}dx + 3\int(x-1)^{-2}dx - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= 4\ln(x-1) - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + c, c \in \mathbb{R}$$

4.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x+1}{4+x^2}dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\int\frac{2x}{4+x^2}dx + \int\frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(4+x^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int_0^\pi \frac{x+1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(4+x^2) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\ln(4+\pi^2) + \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln 4\right).$$

b) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \quad \rightarrow$ Integral impróprio de 1ª espécie. Primitiva imediata

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_e^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^b = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{\ln b}+\frac{1}{\ln e} = 1.\ \textbf{Converge}$$

5.

$$\lim_{x\to-1}\frac{\int_0^{\ln(x+2)} e^{t\tan t}dt}{x+1} = \frac{0}{0}\ \text{(Regra Cauchy \& TFCI)} = \lim_{x\to-1}\frac{\frac{1}{x+2}e^{\ln(x+2)\tan(\ln(x+2))}}{1} = 1.$$

6. Área

$$2\int_0^1 x^2+\frac{1}{2}-\left(2x-\frac{1}{2}\right)dx = 2\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-1+1\right) = \frac{2}{3}$$

7.

$a)$ $\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty$

$b)$ $\lim_{x\to0} x^x = 0^0$ indeterminação

$$e^{\ln(x^x)} = e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}\ (Regra\ Cauchy) = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{-x} = 0$$

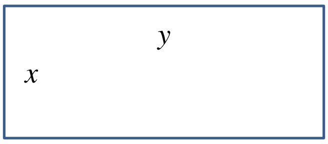
O limite é $e^0 = 1$.

$c)$ $(x^x)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = (\ln x+1)x^x$

$d)$ $f' = 0 \leftrightarrow \ln x+1 = 0 \leftrightarrow x = e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	decresce	mínimo	cresce

8.



a) Perímetro $P = 2x + 2y \leftrightarrow y = \frac{P}{2} - x$

Função área: $xy \rightarrow A(x) = x\left(\frac{P}{2} - x\right)$

$A'(x) = \dfrac{P}{2} - 2x \ldots A'(x) = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{P}{4}$

x	0		$\frac{P}{4}$		$+\infty$
A'		$+$	0	$-$	
A		cresce	Máximo	decresce	

b) Área $A = xy \leftrightarrow y = \frac{A}{x}$

Função perímetro: $2x + 2y \rightarrow P(x) = 2x + 2\frac{A}{x}$

$P'(x) = 2 - 2\dfrac{A}{x^2} \ldots P'(x) = 0 \leftrightarrow x = \sqrt{A}$

x	0		$\sqrt{A}$		$+\infty$
P'		$-$	0	$+$	
P		decresce	mínimo	cresce	

9.

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \leftrightarrow x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4 \times 3a \times c}}{2 \times 3a}$$

A derivada terá duas raízes reais distintas se o discriminante for maior que zero

$$4b^2 - 4 \times 3a \times c > 0 \leftrightarrow b^2 > 3ac$$

Assim, como a derivada tem duas raízes reais diferentes, a função poderá ter 3 raízes reais distintas.