CAPÍTULO 4

Cálculo diferencial

4.1 Introdução

Fermat, o verdadeiro criador do cálculo diferencial, afirma Laplace.

Em 1629, Pierre de Fermat realizou uma das suas primeiras investigações matemáticas, recuperou uma obra de Apollonius, "*Plane Loci*", chegando assim, a um importante trabalho sobre máximos e mínimos intitulado "*Métodos para determinar Máximos e Mínimos e Tangentes a Linhas Curvas*".

Ao tentar determinar máximos e mínimos de uma curva, Fermat vai observar que a tangente tem que ser paralela ao eixo horizontal, nestes pontos. O problema era identificar quais os pontos em que a tangente é paralela ao eixo horizontal. Para resolver este problema, Fermat vai usar o processo da posição limite de uma secante, em que considera infinitamente pequena a distância entre os pontos de intersecção com a curva.

O único senão deste procedimento foi ter considerado este infinitamente pequeno aparentemente igual a zero, em vez de ser a tender para zero. Mais tarde, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), em simultâneo e de forma independente, vão desenvolver este ramo da Matemática reparando esta falha

Newton tentava resolver vários problemas de Mecânica nomeadamente precisava de, dado um deslocamento, determinar a velocidade (ou seja, derivar) e de, dada a velocidade, determinar o deslocamento (ou seja, integrar ou primitivar). Nesta íntima relação com a Física desenvolveu decisivamente o Cálculo Diferencial.

Com Leibniz (doutorado em Direito) o Cálculo Infinitesimal foi algebrizado introduzindo-se com rigor as definições das quantidades infinitesimais dx e dy.

A aceitação do conceito de derivada foi difícil e demorada. Contudo, no século XIX a introdução formal da definição de limite por Cauchy veio resolver esta questão.

4.2 Funções diferenciáveis

Consideremos o seguinte problema geométrico: dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que num ponto $a \in D$ tem o valor $f(a) \in \mathbb{R}$, qual é a recta do plano $\mathbb{R}^2$ que melhor aproxima o gráfico de f num vizinhança do ponto $(a, f(a))$?

A resposta a este problema é, naturalmente, a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Surge então a questão de como calcular a equação dessa recta

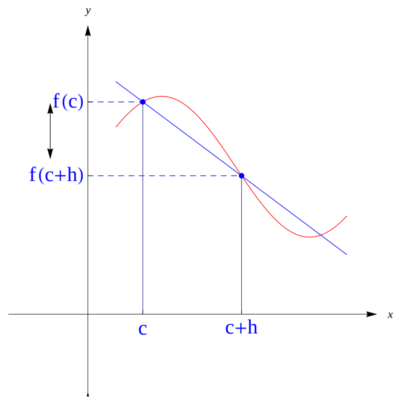

Figura 4.1: Razão incremental como declive de uma recta secante ao gráfico de f em torno do ponto c.

tangente.

A resolução do problema geométrico inicial passa por calcular o declive da recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$.

Dada uma função f definida numa vizinhança $V_\varepsilon(c)$ dum ponto c do deu domínio, designa-se por **razão incremental de f em c** à função definida em $V_\varepsilon(c) \setminus \{c\}$ pelo quociente:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \ (x \neq c).$$

Sendo $h = x - c$, que se designa por incremento ou acréscimo, a razão incremental também se pode escrever sob a forma:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \ (h \neq 0).$$

Ilustramos esta função na figura 4.1.

Esse cálculo do declive da recta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(c, f(c))$ pode ser feito através da noção de limite, pode ser obtido como o "limite" de rectas secantes ao gráfico.

Para cada $h \in \mathbb{R}$ suficientemente perto de zero, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos $(c, f(c))$ e $(c+h, f(c+h))$: o seu declive é dado por

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Na figura 4.2 podemos observar que a variação do valor de h $(h_i, i = 1, 2, 3, ...)$, faz deslocar os pontos $(c + h, f(c + h))$ que, em conjunto com o ponto $(c, f(c))$ definem as rectas secantes $(s_1, s_2, s_3, ...)$ ao gráfico da função f.

Quando $h \to 0$, as correspondentes rectas secantes "tendem" para a recta tangente, t, ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável $h = x - c$ $(\Longleftrightarrow x = c + h)$.

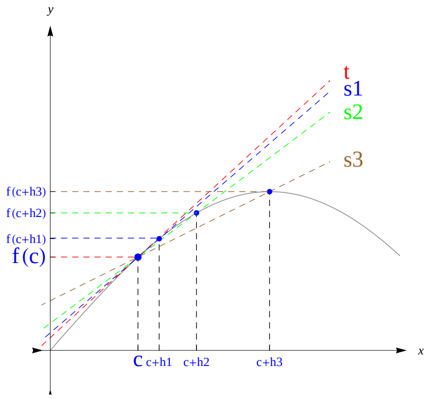

Figura 4.2: Rectas secantes $(s_1, s_2, s_3, ...)$ ao gráfico da função f.

Definição 4.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto do seu domínio. Diremos que f é* ***diferenciável no ponto*** *$a \in D$, com derivada $f'(a)$, se existir em $\mathbb{R}$ o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemplo 4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = mx + b, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $m, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Temos então que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(mx + b) - (ma + b)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{m(x - a)}{x - a} = m = f'(a)$$

Concluimos que:

$$\textit{Se } f(x) = mx + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \textit{então} \ \ f'(x) = m, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.1 *Observe que esta expressão inclui como caso particular, quando $m = 0$, a função constante. Temos então que*

$$f(x) = b, \ b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \ \ \textit{então} \ \ f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a igualdade trigonométrica

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right), \forall a, b \in \mathbb{R},$$

temos, então, que para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2a+h}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cos\left(a + \tfrac{h}{2}\right) = \cos(a) \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que:

$$\textit{Se } f(x) = \operatorname{sen} x, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \textit{então} \ \ f'(x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.2 *Duma forma análoga se concluiria que*

$$\text{Se } f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos, então, que para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h} = \lim_{h\to 0} e^a \frac{e^h - 1}{h} = \\ &= e^a \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^a.\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que:

$$\text{Se } f(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad f'(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.4 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x) = x^n,\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Usando a igualdade (prove por indução esta igualdade)

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right), \forall a \in \mathbb{R},$$

temos, então, que

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + ... + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1}\right) = na^{n-1}.$$

Concluimos, assim, que:

$$\text{Se } f(x) = x^n,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad f'(x) = nx^{n-1},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota 4.3 *Usando os resultados do exemplo anterior, é possível mostrar que para qualquer expoente* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\text{Se } f(x) = x^\alpha,\ \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{então} \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a definição anterior de derivada de uma função, podemos agora usar esta segunda noção para dar uma definição precisa da primeira.

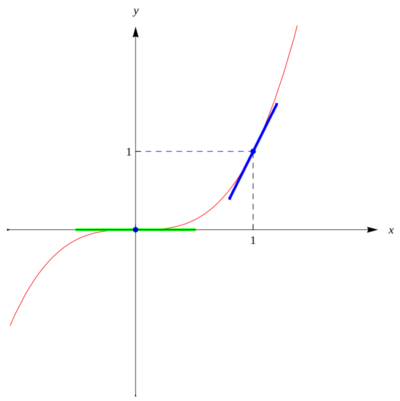

Figura 4.3: Gráfico da função $f(x) = x^3$ e das suas rectas tangentes nos pontos $(1,1)$ e $(0,0)$.

Definição 4.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} -> \mathbb{R}$, uma função diferenciável num ponto $a \in D$. A recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é a recta definida pela equação:*

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Considere a função $f(x) = x^3$, definida em $\mathbb{R}$. A sua derivada no ponto $x = 1$ existe e é dada por:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^3 + 3h^2 + 3h + 1) - 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2 + 3h + 3) = 3$$

logo a recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(1, f(1)) = (1,1)$ é a recta de equação

$$y = f(1) + f'(1)\cdot(x - 1) \iff y = 1 + 3(x - 1) \iff y = 3x - 2.$$

Por outro lado, a derivada da função $f(x) = x^3$, no ponto $x = 0$ é dada por:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 = 0.$$

Logo a recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(0, f(0)) = (0,0)$ é a recta horizontal de equação

$$y = 0.$$

O gráfico da função e estas duas rectas tangentes são apresentados na figura **??**.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^- = (-\infty, a) \cap D$.

Diz-se que f é **diferenciável à esquerda no ponto** a se existir em $\mathbb{R}$ o limite

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a) = f'(a^+).$$

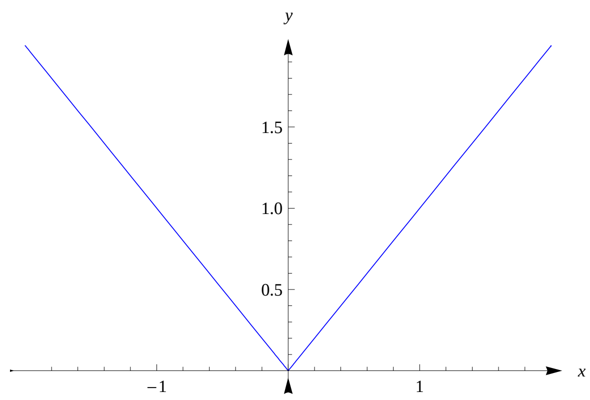

Figura 4.4: Gráfico da função módulo.

Definição 4.3 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de $D_a^- = (-\infty, a) \cap D$. Diz-se que f é* ***diferenciável à esquerda no ponto*** *a (ou f tem* ***derivada lateral à esquerda,*** *$f'(a^-)$,* ***no ponto*** *a) se existir em $\mathbb{R}$ o limite*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f_e'(a) = f'(a^-).$$

Proposição 4.1 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de D_a^+ e de D_a^-. f é diferenciável no ponto a se, e só se, f tem derivadas laterais iguais nesse ponto.*

Demonstração. Consequência simples da definição de limites laterais. ∎

Exemplo 4.5 *Consideremos a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.4.

Averiguemos se esta função é diferenciável no ponto zero.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (1) = 1 = f'(0^+).$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-1) = -1 = f'(0^-).$$

Podemos concluir que f é diferenciável à esquerda e à direita no ponto zero mas que os valores das derivadas à direita e à esquerda são diferentes, ou seja,

$$f'(0^+) = 1 \neq -1 = f'(0^-),$$

logo a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

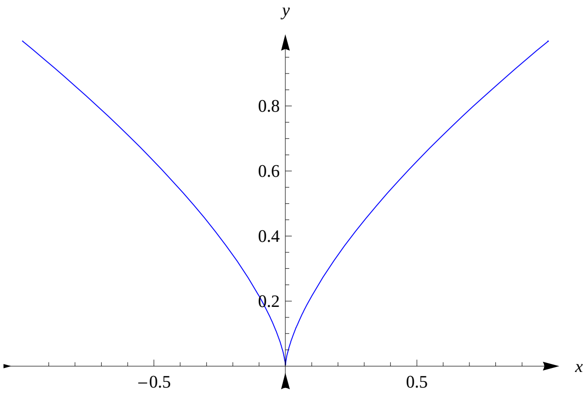

Figura 4.5: Gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Exemplo 4.6 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, cujo gráfico está representado na figura 4.5.*

Averiguemos se esta função é diferenciável no ponto zero.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty.$$

Logo a função não é diferenciável no ponto zero.

Observemos que estes dois últimos exemplos mostram que uma função pode ser contínua num ponto (como é o caso da função módulo $f(x) = |x|$ e da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ no ponto zero) e, no entanto, não ser diferenciável nesse ponto. Qual será então a relação entre a diferenciabilidade e a continuidade de uma função num ponto?

Teorema 4.1 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é uma função diferenciável num ponto $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Sabemos por hipótese que f é diferenciável em a, logo existe e é finito o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Com efeito para $x \in D$, $(x \neq a)$ tem-se que

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,(x - a)\,,$$

logo

$$\lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

o que mostra a continuidade da função f no ponto a. ■

Nota 4.4 *Este teorema diz-nos que*

$$f \text{ diferenciável em } a \quad \Longrightarrow \quad f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e,

$$f \text{ contínua em } a \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ diferenciável em } a,$$

como observámos nos exemplos da função módulo $f(x) = |x|$ *e da função* $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Nota 4.5 *Por outro lado este teorema garante que*

$$f \text{ não é contínua em } a \quad \Longrightarrow \quad f \text{ não é diferenciável em } a,$$

Por exemplo no capítulo anterior verificámos que a função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

não era contínua no ponto zero, logo, por este teorema , sabemos que também não é diferenciável no ponto zero.

Vejamos agora as regras algébricas de derivação para as funções soma, produto, multiplicação por um escalar e quociente.

Teorema 4.2 *Sejam* $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis num ponto* $a \in Df \cap Dg$. *Seja, ainda,* $c \in \mathbb{R}$ *uma constante. Então as funções* $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$ *e* $\dfrac{f}{g}$ *(com* $g(a) \neq 0$*) também são diferenciáveis no ponto* a, *sendo as suas derivadas dadas por:*

1) $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$
2) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$

Demonstração. Como f e g são funções diferenciáveis no ponto a sabemos que existem e são finitos os limites

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

1) Multiplicação por uma constante:

$$\lim_{x\to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} c\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) = c \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

Podemos concluir que $c \cdot f$ é diferenciável em a e que

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$$

2) Função soma:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(f(x)+g(x))-(f(a)+g(a))}{x-a} = \\
\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))+(g(x)-g(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a)
\end{aligned}$$

Podemos concluir que $f+g$ é diferenciável em a e que

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$$

3) Função produto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)+f(x)g(a)-f(x)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\left(g(x)-g(a)\right)+g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a} g(a)+\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).
\end{aligned}$$

Como f é diferenciável no ponto a, sabemos que é contínua no ponto a, logo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, facto necessário para obter a última igualdade. Podemos concluir que $f\cdot g$ é diferenciável em a e que

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

4) Função quociente, supondo que $g(a)\neq 0$.

Vamos dividir esta demonstração em duas partes:

(i) Consideramos o caso particular em que a função $f(x)=1$, ou seja, estudamos o caso da função $\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ no ponto a.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\left(-\frac{1}{g(x)g(a)}\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\
&= -\frac{1}{[g(a)]^2}g'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

Também neste cálculo utilizámos o facto de g ser diferenciável no ponto a, logo contínua para obter $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Podemos concluir que $\left(\dfrac{1}{g}\right)$é diferenciável em a e que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

(ii) Notando, agora, que $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$ temos que, através da derivada da função produto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a)\left[-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\right] = \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.\end{aligned}$$

Podemos concluir que $\left(\dfrac{f}{g}\right)$é diferenciável em a e que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

Decorrem imediatamente deste teorema resultados muito importantes e muito úteis.

Exemplo 4.7

As funções polinomiais $P(x)$ são diferenciáveis para qualquer valor real $a \in \mathbb{R}$.

De facto, qualquer polinómio se obtém como soma, produto e multiplicação por um escalar, de funções constantes e da função identidade, que já sabemos serem diferenciáveis para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.8

As funções racionais $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ são diferenciáveis para qualquer valor do seu domínio.

Este resultado é imediato tendo em conta que as funções racionais são definidas como o quociente entre duas funções polinomiais.

Exemplo 4.9 *Consideremos a função tangente definida por*

$$\begin{aligned}\textit{tangente}: \quad & D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \\ & x \to tg(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\end{aligned}$$

Seja $a \in D$. Usando a fórmula para a derivada do quociente obtida no teorema anterior podemos calcular a derivada da função tangente da seguinte forma:

$$(tg(x))' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Logo concluimos que:

$$f(x) = tg(x),\ \forall x \in D \quad \textit{então} \quad f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2},\ \forall x \in D.$$

Teorema 4.3 *(Derivada da função composta) Sejam $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in Dg$ e $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = g(a) \in Df$. Então a função composta $(f \circ g)$ é diferenciável no ponto $a \in D_{f \circ g}$*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Demonstração. Usando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{g(a+h) - g(a)}, \text{ com } g(a+h) \neq g(a) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Como g é diferenciável em a, por hipótese, temos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Como f é diferenciável em $g(a) = b$, por hipótese, temos que

$$\lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b).$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável $y = g(a+h)$ temos que quando $h \to 0$ então $y = g(a+h) \to g(a) = b$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b).$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \\
&= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.10 *Consideremos a função* $h(x) = \operatorname{sen}(x^2+4)$ *definida em* $\mathbb{R}$. *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Observemos que* $h = f \circ g$ *com* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x^2 + 4$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(y) = \operatorname{sen} y$. *Como* $g'(x) = 2x$ *e* $f'(y) = \cos y$ *então*

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = \cos\left(a^2+4\right) \cdot (2a) = 2a\cos\left(a^2+4\right).$$

Concluimos que

$$\text{Se } h(x) = \operatorname{sen}\left(x^2+4\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ então } h'(x) = 2x\cos\left(x^2+4\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.11 *Consideremos a função* $h(x) = e^{x^2-3}$ *definida em* $\mathbb{R}$. *Seja* $a \in \mathbb{R}$. *Observemos que* $h = f \circ g$ *com* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x^2 - 3$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(y) = e^y$. *Como* $g'(x) = 2x$ *e* $f'(y) = e^y$ *então*

$$h'(a) = (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) = e^{a^2-3} \cdot (2a) = 2ae^{a^2-3}.$$

Concluimos que

$$\text{Se } h(x) = e^{x^2-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ então } h'(x) = 2xe^{x^2-3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veremos agora um resultado que relaciona a derivada duma função estritamente monótona e invertível com a derivada da sua inversa. Para demonstrar este resultado vamos utilizar o teorema anterior.

Teorema 4.4 *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função estritamente monótona e contínua no intervalo* I *e seja* $f^{-1} : f(I) \to I$ *a sua inversa. Se* f *é diferenciável num ponto* $a \in I$ *e* $f'(a) \neq 0$, *então* f^{-1}*é diferenciável no ponto* $b = f(a)$ *e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstração. Assumiremos que f é diferenciável em todo o intervalo I. Provaremos apenas que se f^{-1} é diferenciável em $f(I)$, o valor da derivada é, de facto, o que foi apresentado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa temos que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$$

e a esta composição de funções aplicamos o teorema anterior.

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \quad &\Longrightarrow \left(f^{-1} \circ f\right)'(x) = (x)' \\
&\Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in I.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = a$ e $b = f(a)$ obtemos o resultado pretendido. ■

Exemplo 4.12 *Consideremos a função exponencial* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *A sua inversa é a função logaritmo:*

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f^{-1}(x) = \log x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Como $f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *temos, pelo teorema anterior, que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto* $x \in \mathbb{R}^+$ *e que*

$$\left(f^{-1}\right)(x) = \log x \Longrightarrow (\log)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Podemos concluir que

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.13 *Seja* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ *e* $x \in \mathbb{R}^+$.

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\log(x^\alpha)}\right)' = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.14 *Seja* $g : Dg \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função positiva e, dado* $\alpha \in \mathbb{R}$, *consideremos a função* $f : Df \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(y) = y^\alpha$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$. *Supondo que* g *é diferenciável num ponto* $a \in Dg$ *e dado que* f *é uma função diferenciável no ponto* $b = g(a) \in Df$, *podemos concluir (através do teorema da função composta), que a função composta* $h = (f \circ g) = g^\alpha$ *é diferenciável em* a *e*

$$\begin{aligned} (g^\alpha)'(a) = h'(a) = (f \circ g)'(a) = \ & f'(g(a)) \cdot g'(a). = \\ & \alpha(g(a))^{\alpha-1} \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Temos que

$$(g^\alpha)'(x) = \alpha(g(x))^{\alpha-1} \cdot g'(x), \forall x \in D.$$

Exemplo 4.15 *Consideremos a restrição da função seno ao intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *i.e.*

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \operatorname{sen}(x), \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco seno:

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ definida por } f^{-1}(y) = arc \ \operatorname{sen}(y), \forall y \in [-1, 1].$$

Como

$$f'(x) = (\operatorname{sen})'(x) = \cos(x) \neq 0, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

só podemos aplicar o teorema anterior para $y \in \left]-1, 1\right[$. *Este teorema garante que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto* $x \in \left]-1, 1\right[$ *e que*

$$(arc \ \operatorname{sen})'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(arc \ \operatorname{sen}(y))} = \frac{1}{\cos x}, \ \forall y \in \left]-1, 1\right[.$$

Tendo em conta que, se $y = \operatorname{sen} x$ *então*$1 - y^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$ *para a restrição considerada, tem-se que* $\sqrt{1 - y^2} = \cos x$. *Podemos concluir que*

$$(arc\ \operatorname{sen})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ \forall y \in \left]-1, 1\right[.$$

Exemplo 4.16 *Seguindo um raciocínio análogo se concluíria que*

$$(arc\ \cos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \forall y \in \left]-1, 1\right[.$$

Exemplo 4.17 *Consideremos a restrição da função tangente ao intervalo* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *i.e.*

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = tg(x), \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

A sua inversa neste intervalo é a função arco tangente:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ definida por } f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}(y), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Já calculámos a derivada da função tangente obtendo que

$$f'(x) = (tg)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Podemos aplicar o teorema da função inversa para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto $y \in \mathbb{R}$ *e que*

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(y))}} = \cos^2(\operatorname{arctg}(y)) = \cos^2 x, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta que, se $y = tg\,(x)$ *então* $1+y^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *para a restrição considerada, tem-se que* $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+y^2}$. *Podemos concluir que*

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Associada a uma função f que seja diferenciável, pelo menos para alguns pontos do seu domínio, existe uma outra função, designada a função derivada de f, como é indicado na próxima definição.

Definição 4.4 *Sejam* $f : Df \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função que é diferenciável em todos os pontos do conjunto* $D \subset Df$. *Então, designa-se por* ***função derivada de*** f, f', *a função qua a cada ponto* $x \in D$ *associa a derivada de* f *nesse ponto:*

$$\begin{aligned} f' :\ & D \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) \end{aligned}$$

Exemplo 4.18 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ os teoremas anteriores garantem que a função é diferenciável. Aplicando a regra da derivação do produto e a derivada da função composta, calculamos a derivada para $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left(x^2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)' &= (x^2)' \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Para $x = 0$ utilizamos a definição de derivada num ponto para averiguar se a função é diferenciável.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f'(0).$$

Logo a função também é diferenciável no ponto zero. A função derivada define-se por:

$$\begin{aligned} f':\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 4.19 *Consideremos a função módulo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ já definida anteriormente por*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0, \end{cases}$$

Como mostrámos esta função não é diferenciável no ponto zero. A função derivada define-se por

$$\begin{aligned} f':\ & \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0, \\ -1 & se\ x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.3 Teoremas fundamentais

A derivada de uma função desempenha um papel importante e decisivo no estudo do comportamento da função.

Definição 4.5 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e c um ponto do seu domínio. Diz-se que*

- *f tem um máximo local em c, se $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (para algum $\delta > 0$).*
- *f tem um mínimo local em c, se $f(x) \geq f(c)\ \forall x \in V_\delta(c) \cap D$ (para algum $\delta > 0$).*
- *f tem um extremo local em c, se f tem um mínimo ou máximo local em c.*

Um extremo local não é, necessariamente um ponto de máximo ou mínimo da função, uma vez que a respectiva desigualdade $f(x) \leq f(c)$ ou $f(x) \geq f(c)$ apenas se tem que verificar para uma vizinhança do ponto e, não em todo o seu domínio.

Qual será a relação entre a derivada da função num ponto e o facto desse ponto ser um ponto onde a função tem um extremo local?

Dizia Pierre de Fermat, no séc. XVII, "*...no gráfico de uma função suficientemente regular, os pontos que têm ordenada maior ou menor que do que a de todos os outros pontos vizinhos, são pontos de tangente horizontal...*" Traduzindo para uma linguagem actual.

Teorema 4.5 ***(Teorema de Fermat)*** *Seja f uma função definida num intervalo $I =]a, b[$, tal que f tem um extremo local num ponto $c \in I$. Se f é diferenciável no ponto c, tem-se que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f tem um máximo local no ponto $c \in I =]a, b[$ (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local).

Sabemos então que existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) \leq f(c) \ \forall x \in V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[\Longleftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0 \ \forall x \in V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[$$

Usando este facto, tem-se que:

$$f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{ e que } \quad f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Como f é diferenciável no ponto c,

$$0 \leq f'(c^-) = f'(c) = f'(c^+) \geq 0 \Longrightarrow f'(c) = 0.$$

■

Nota 4.6 *Este teorema diz-nos que*

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Longrightarrow f'(c) = 0.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, ou seja,

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Nota 4.7 *Por exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, cujo gráfico está representado na figura 4.6, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero e, no entanto, não tem um extremo local nesse ponto, é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.*

Nota 4.8 *Uma função pode ter um extremo local e não ser diferenciável nesse ponto. Lembremos o caso da função módulo que tem um mínimo no ponto zero e, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.*

O teorema seguinte, devido ao matemático francês Michel Rolle (1652–1719), fornece uma informação importante sobre os zeros da derivada.

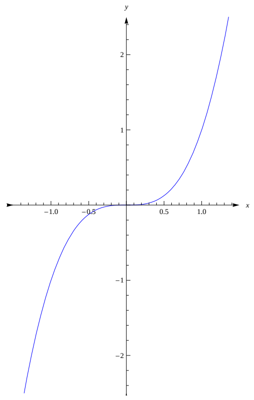

Figura 4.6: Gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$.

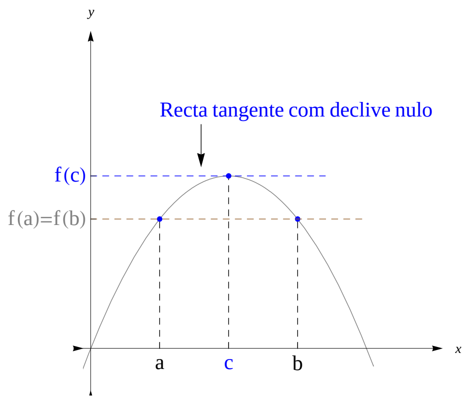

Figura 4.7: Interpretação geométrica do teorema de Rolle.

Teorema 4.6 ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função definida e contí nua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciá vel em $]a,b[$. Então:*

$$f(a)=f(b)\Longrightarrow \exists c\in\,]a,b[\,:f'(c)=0.$$

Demonstração. Como f está nas condições do teorema de Weierstrass, sabemos que f tem máximo e mínimo em $[a,b]$. Sejam:

$$M=\max_{[a,b]}f \qquad \text{e} \quad m=\min_{[a,b]}f$$

Se $M=m$, então f é uma função constante em $[a,b]$ pelo que:

$$f'(c)=0,\quad \forall c\in\,]a,b[\,.$$

Se $M>m$, então a hipótese $f(a)=f(b)$ implica que pelo menos um dos valores M ou m seja assumido por f num ponto $c\in]a,b[$. Temos então que f tem um extremo nesse ponto c.

Como f é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema de Fermat para concluir que então $f'(c)=0$. ■

Do teorema de Rolle decorrem dois corolários de grande utilidade no estudo de funções.

Corolário 4.1 *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe sempre, pelo menos, um zero da sua derivada.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior a uma função f, contínua em $[a,b]$, e diferenciável em $]a,b[$, tal que $f(a)=0=f(b)$. ■

Corolário 4.2 *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

Demonstração. A demonstração será feita por redução ao absurdo.

Sejam p e q dois zeros consecutivos da derivada de f, isto é, $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in\,]p,q[\,$. Se nesse intervalo existissem dois pontos c_1,$c_2\in\,]p,q[$ zeros da função, isto é, $f(c_1)=f(c_2)=0$, então o teorema de Rolle aplicado ao intervalo $]c_1,c_2[$ garantia que teria de haver um zero da derivada no interior desse intervalo o que absurdo uma vez que p e q são zeros *consecutivos* da derivada. ■

O teorema seguinte, o teorema do valor médio de Lagrange, consequência do teorema de Rolle, diz-nos que uma função diferenciável num intervalo $[a,b]$, deve ter nalgum ponto desse intervalo, a derivada igual ao declive da recta secante $\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ que passa nos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, como podemos observar na figura 4.8.

Teorema 4.7 ***(Teorema de Lagrange ou do valor médio)*** *Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $a<b$. Seja f uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado $[a,b]$, e diferenciável em $]a,b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c\in]a,b[$ tal que:*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

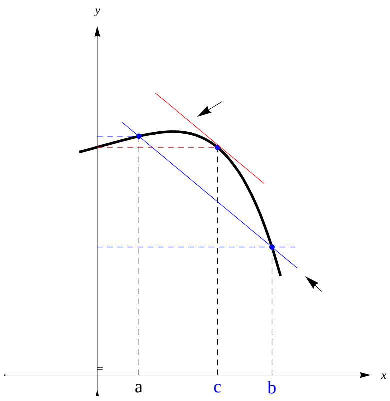

Figura 4.8: Interpretação geométrica do teorema de Lagrange.

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

É uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $g(a) = g(b)$. Esta função está nas condições do teorema de Rolle. Logo, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$, tal que $g'(c) = 0$. Mas:

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ou seja , existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Nota 4.9 *O Teorema de Rolle é uma caso particular deste teorema. Trata-se do caso em que $f(a) = f(b)$, ou seja, o caso em que a tangente é uma recta horizontal.*

Exemplo 4.20 *Consideremos a função seno e, através do teorema de Lagrange, mostremos que se tem*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^+$. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é cont ínua em $[0, x]$ e diferenciável em $]0, x[$, logo podemos aplicar o teorema de Lagrange a esta função: existe $c \in]0, x[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

ou seja,

$$\cos(c) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Então tem-se que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = |\cos(c)| \leq 1 \Leftrightarrow |\operatorname{sen} x| \leq |x|, \textit{ para todo o } x \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^-$. *Duma forma análoga obtem-se que*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Como $|\operatorname{sen} 0| \leq |0|$ *, podemos finalmente, concluir que*

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como consequência deste teorema vamos considerar alguns corolários muito úteis no estudo duma função.

Corolário 4.3 *Seja* f *uma função com derivada nula em todos os pontos dum intervalo* I*, então* f *é constante em* I.

Demonstração. Sejam $a, b \in I$ quaisquer pontos diferentes do intervalo I $(a < b)$. Como f é diferenciável em $[a, b]$, o Teorema de Lagrange garante que

$$\text{existe } c \in]a, b[\text{ tal que : } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como, por hipótese, $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, a igualdade anterior implica que $f(b) = f(a)$.

Como a e b eram quaisquer pontos do intervalo, podemos concluir que a função f é constante em I. ■

Como consequência imediata deste corolário obtemos o seguinte resultado.

Corolário 4.4 *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e sejam* $f; g : I \to \mathbb{R}$ *diferenciáveis em* I *tais que* $f'(x) = g'(x)$*, para todo o* $x \in I$. *Então existe uma constante* $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $f = g + C$ *em* I.

Demonstração. Basta considerar a função $h = f - g$ e aplicar o corolário anterior. ■

Corolário 4.5 *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* I. *Então:*

(a) f *é crescente em* I *se e só se* $f'(x) \geq 0$ *para todo o* $x \in I$;
(b) f *é decrescente em* I *se e só se* $f'(x) \leq 0$ *para todo o* $x \in I$.

Demonstração. Só demonstraremos a alínea (a), uma vez que as demonstrações são análogas.

Como temos que demonstrar uma equivalência iremos demonstrar cada uma das implicações:

(i) $(\Longrightarrow)$ Seja f é crescente em I.

Então tem-se, para qualquer ponto $c \in I$,

$$\left.\begin{array}{l} x < c \implies f(x) \leq f(c) \\ x < c \implies x - c < 0 \end{array}\right\} \implies \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad \forall x \in I \quad (x \neq c).$$

Neste caso o limite da razão incremental em c, ou seja, $f'(c)$, (que existe uma vez que f é diferenciável em I), tem que ser não-negativo. Como c era uma qualquer ponto do intervalo I podemos concluir que $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$.

(ii) $(\Longleftarrow)$ Seja $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$.

Dados quaisquer dois pontos $a, b \in I$, com $a < b$, o teorema de Lagrange garante que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Mas, por hipótese, $f'(c) \geq 0$, logo $f(b) \geq f(a)$, ou seja,

$$a < b \Longrightarrow f(a) \leq f(b), \text{ para quaisquer } a, b \in I,$$

o que quer dizer que a função é crescente em I. ■

O corolário anterior relaciona o sinal da derivada duma função com a sua monotonia.

Embora não seja possível manter a equivalência, uma das implicações contínua a ser verdadeira se considerarmos as desigualdades estritas.

Corolário 4.6 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Então:*

(a) *se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in I$ então f é estritamente crescente em I;*

(b) *se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in I$.então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. A demonstração segue de perto a demonstração correspondente do corolário anterior. ■

Nota 4.10 *O recíproco do corolário anterior não é verdadeiro. por exemplo a função*

$$\begin{array}{rrl} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ & x \to & f(x) = x^3 \end{array}$$

é estritamente crescente e, no entanto, tem-se que $f'(0) = 0$.

Exemplo 4.21 *Consideremos a função*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^2\right).$$

A função derivada é $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$.

Para $x > 0$ temos que $f'(x) > 0$ logo a função é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$.

Para $x < 0$ temos que $f'(x) < 0$ logo a função é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$.

Corolário 4.7 *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança dum ponto c, $V =]c - \delta, c + \delta[$, contida no seu domínio, excepto possivelmente no próprio ponto c. Seja f contínua no ponto c. Então:*

$$(a) \quad \left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \forall x \in]c - \delta, c[\\ f'(x) < 0 & \forall x \in]c, c + \delta[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tem um máximo local em } c.$$

$$(b) \quad \left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \forall x \in]c - \delta, c[\\ f'(x) > 0 & \forall x \in]c, c + \delta[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tem um mínimo local em } c.$$

Demonstração. (a) Pelo corolário anterior sabemos que se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]c-\delta, c[$ então f é estritamente crescente em $]c-\delta, c[$.

Seja $a \in]c-\delta, c[$.

Escolhemos um outro ponto qualquer $y \in]a, c[$, ou seja, um ponto tal que $a < y < c$.

Como f é estritamente crescente no intervalo $]c-\delta, c[$ te-se que $f(a) < f(y)$.

Como f é contínua em c, existe o limite lateral esquerdo de $f(y)$ quando y tende para c, e esse limite é $f(c)$. Tomando este limite na desigualdade anterior tem-se que $f(a) \leq f(c)$, $\forall a \in]c-\delta, c[$.

De forma análoga se mostra que $f(c) \geq f(b)$, $\forall b \in]c, c+\delta[$.

Através destas duas desigualdades podemos afirmar que $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in I$.

(b) A demonstração da existência dum mínimo local seria análoga. ∎

Exemplo 4.22 *Consideremos a função módulo*

$$\begin{array}{rll} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ & x \to & f(x) = |x| \end{array}$$

Já vimos que esta função é contínua em $\mathbb{R}$, *diferenciável em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e que a função derivada é*

$$\begin{array}{rll} f': & \mathbb{R}\setminus\{0\} \to & \mathbb{R} \\ & x \to & f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Para $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 > 0$*; para* $x \in \mathbb{R}^-$, $f'(x) = -1 < 0$ *e a função é contínua no ponto* $x = 0$, *logo, pelo corolário anterior, podemos afirmar que tem um mínimo local no ponto* $x = 0$ *(embora não sendo diferenciável neste ponto).*

Se considerarmos uma função cuja função derivada é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, o teorema de Bolzano garante que $f'(x)$ toma todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$. Contudo, mesmo quando f' não é contínua em $[a, b]$, tal propriedade contínua a ser válida, facto que é garantido no próximo teorema.

Teorema 4.8 *(Teorema de Darboux) Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$. *Seja* f *uma função definida e diferenciável* $[a, b]$ *e seja* k *um número real entre* $f'(a)$ *e* $f'(b)$. *Então, existe um ponto* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = k$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f'(a) < k < f'(b)$.

Consideremos a função $g(x) = kx - f(x)$, com $x \in [a, b]$. Como g é contínua em $[a, b]$, e $[a, b]$ é um intervalo limitado e fechado, g tem um máximo e mínimo em $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass.

Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$, então o máximo não é atingido no ponto $x = a$.

Como $g'(b) = k - f'(b) > 0$, então o máximo não é atingido no ponto $x = b$.

Logo o máximo é atingido nalgum ponto $c \in]a, b[$, logo $g'(c) = 0 = k - f'(c)$.

Então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = k$. ∎

Teorema 4.9 *(**Teorema do valor médio de Cauchy**) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Sejam f, g duas funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e $g'(x)$ não se anula em $]a, b[$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração. Consideremos a função

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$$

Pelo teorema de Rolle, como $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, temos que $g(b) - g(a) \neq 0$, logo h está bem definida. Além disso, h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e $h(b) = h(a)$.

Podemos aplicar o teorema de Rolle à função h que nos garante que existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Então:

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Como $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$, temos que:

$$\exists c \in]a, b[\colon \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

Tal como o teorema de Rolle é um caso particular do teorema de Lagrange, também o teorema de Lagrange é uma caso particular deste teorema. É o caso particular em que a função $g(x) = x$, é a função identidade.

Utilizando este teorema do valor médio de Cauchy obtemos duas proposições de grande utilidade no levantamento de indeterminações no cálculo de limites. Omitimos a sua demonstração.

Teorema 4.10 *(Regra de Cauchy) Sejam f, g duas funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto I, excepto possivelmente num ponto c (istoé, f e g são diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$)*

Suponhamos que:

$$\begin{cases} g'(x) \neq 0, \; x \in I \setminus \{c\} \\ \\ \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \quad ou \quad \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty \\ \\ \exists \lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a \end{cases}$$

Então existe o $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a.$$

Teorema 4.11 *(Extensão da regra de Cauchy) A regra de Cauchy, sendo válidas as restantes condições, é extensível às sguintes situações:*

1. *Quando os limites acima referidos são limites laterais.*
2. *Quando o limite a da razão das derivadas é igual a* $\pm\infty$.
3. *Quando f e g são funções diferenciáveis num intervalo aberto $I =]b, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$ e se calculam os limites quando x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.*

Exemplo 4.23 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Nota 4.11 *O facto de o* $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *não existir não significa que o* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *não exista, significa, sim, que não pode utilizar a regra de Cauchy.*

Exemplo 4.24 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}}{\cos x}, \text{ que não existe.}$$

Mas

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \left(x \frac{x}{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$$

porque $\lim_{x\to 0} x \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 0.1 = 0$ *e a função* $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ *é limitada.*

Nota 4.12 *A regra de Cauchy não se aplica caso não se tenha* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

Exemplo 4.25 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+1}{3x+1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Mas se aplicássemos a regra de Cauchy (que não podemos aplicar) o resultado seria

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{3x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \text{ que é falso!}$$

4.3.1 Levantamento de indeterminações em limites de funções diferenciáveis, utilizando a regra de Cauchy

(i) Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

Exemplo 4.26 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Exemplo 4.27 *Calcular o* $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 4.28 *Calcular o* $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Exemplo 4.29 *Calcular o* $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty.$$

Exemplo 4.30 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log \operatorname{sen} x}{\log x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{sen} x}{\log x} \underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Exemplo 4.31 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^3+4x-5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^3+4x-5} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(3x^2+4\right)} = 0.$$

Nota 4.13 *Por indução se mostraria que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{p(x)} = 0, \text{ onde } p(x) \text{ é um polinómio de grau } k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.32 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3+4x-5}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+4x-5} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2+4} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

Nota 4.14 *Por indução se mostraria que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{p(x)} = +\infty, \text{ onde } p(x) \text{ é um polinómio de grau } k \in \mathbb{N}.$$

(ii) Indeterminações do tipo $0 \times \infty$ ou $\infty - \infty$

Estas indeterminações reduzem-se a indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$, utilizando as igualdades:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right].$$

Exemplo 4.33 *Calcular o* $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 e^{-x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 e^{-x}\right) \overset{(\infty\times 0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Nota 4.15 *Por indução verifica-se que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.34 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x\operatorname{sen} x}\underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x+x\cos x}\underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0.$$

Exemplo 4.35 *Calcular o* $\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to +\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{(\infty\times 0)}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{RC}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

(iii) Indeterminações do tipo 0^0, 1^∞ e ∞^0

Estas indeterminações reduzem-se às indeterminações anteriores, utilizando a igualdade:

$$x=e^{\log x},\ \text{para todo o } x\in\mathbb{R}^+.$$

Exemplo 4.36 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}\overset{(0^0)}{=}\lim_{x\to 0^+} e^{\log x^{\operatorname{sen} x}}=\lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\log x}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen} x\log x\overset{(0\times\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\underset{RC}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{-\cos x}=1\cdot 0=0$$

Então:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x\log x}=e^0=1.$$

Exemplo 4.37 *Calcular o* $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\overset{(\infty^0)}{=}\lim_{x\to 0^+} e^{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to 0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \underset{RC}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 0$$

Então:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Exemplo 4.38 *Calcular o* $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to 1} e^{\log x^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\log x}{x-1}}$$

Mas:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} \underset{RC}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Então:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{\log x}{x-1}} = e^1 = e.$$

4.4 Derivadas de ordem superior à primeira.

O conceito de derivadas de ordem superior à primeira de uma funçã o f resulta naturalmente de considerar as derivadas de funções derivadas, caso existam.

Definição 4.6 *Seja f uma função definida num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ e diferenciável em I. Se a função derivada f' é diferenciável num ponto $a \in I$, isto é, existe o limite*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(a),$$

*então a função f diz-se **duas vezes diferenciável no ponto** $a \in I$ e ao limite referido chama-se **segunda derivada de** f **no ponto** $a \in I$ ou **derivada de ordem dois de** f **no ponto** $a \in I$.*

Se a função f' é diferenciável em qualquer ponto de I, diz-se que f é duas vezes diferenciável em I.

De modo análogo se define a terceira derivada num ponto $a \in I$ que se denota, quando existe, por $f'''(a)$.

Por indução define-se a diferenciabilidade de f de qualquer ordem n e as derivadas de ordem n que se denotam por $f^{(n)}$, $D^n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx}$.

Definição 4.7 *Uma função f diz-se* ***n vezes diferenciável no ponto*** $a \in I$ *quando existem as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, ...,$f^{(n-1)}$ e existe o limite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a).$$

Por convenção considera-se a derivada de ordem zero a própria função: $f^{(0)} = f$.

Definição 4.8 *Uma função f diz-se* ***indefinidamente diferenciável em*** *I (conjunto aberto ou intervalo aberto de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto), quando f é n vezes diferenciável para qualquer $n \geq 0$.*

Definição 4.9 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $I =]a, b[$. Se existir a n-ésima derivada de f em todo o intervalo I, e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, diremos que f* ***é uma função de classe*** *$C^n(I)$, ou que $f \in C^n(I)$. Diremos ainda que f é uma função de classe $C^0(I)$ se f for contínua em I, e que* **f** ***é uma função de classe*** *$C^\infty(I)$ se $f \in C^n(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 4.39 *Consideremos a função exponencial de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Esta função é indefinidamente diferenciável em qualquer ponto de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l} f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \\ f''(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima derivada de f existe e é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.40 *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Como mostrámos anteriormente, a função derivada define-se por:

$$\begin{array}{rl} f': & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & se\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Vimos também que o $\lim_{x \to 0} f'(x)$ não existe, pelo que esta função f' não é contínua no ponto zero. Temos então: $f \in C^0(\mathbb{R})$, existe $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mas como f' não é contínua no ponto zero então $f \notin C^1(\mathbb{R})$. A função f é apenas duas vezes diferenciável para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Podemos definir a segunda derivada por:

$$\begin{array}{rl} f'': & \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \to f''(x) = -\dfrac{2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} + 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}. \end{array}$$

Exemplo 4.41 *Considere a função polinomial de domínio $\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{array}{lcl}
f'(x) & = & 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 \\
f''(x) & = & 5.4.a_5x^3 + 4.3.a_4x^2 + 3.2.a_3x + 2.a_2 \\
f'''(x) & = & 5.4.3.a_5x^2 + 4.3.2.a_4x + 3.2.a_3 \\
f^{(4)}(x) & = & 5.4.3.2.a_5x + 4.3.2.a_4 \\
f^{(5)}(x) & = & 5.4.3.2.a_5 \\
... & & ... \\
f^{(n)}(x) & = & 0, \ \forall n > 5
\end{array}$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima derivada de f existe e é uma função contínua em todo o $\mathbb{R}$. A função polinomial é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Nota 4.16 *Se considerarmos o ponto $x = 0$ observemos que*

$$\begin{array}{lclcl}
f(0) & = & a_0 = 0!a_1 & \Longrightarrow & a_0 = \dfrac{f(0)}{0!} = f(0) \\
f'(0) & = & a_1 = 1!a_1 & \Longrightarrow & a_1 = \dfrac{f'(0)}{1!} \\
f''(0) & = & 2.a_2 = 2!a_2 & \Longrightarrow & a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!} \\
f'''(0) & = & 3.2.a_3 = 3!.a_3 & \Longrightarrow & a_3 = \dfrac{f'''(0)}{3!} \\
f^{(4)}(0) & = & 4.3.2.a_4 = 4!.a_4 & \Longrightarrow & a_4 = \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} \\
f^{(5)}(0) & = & 5.4.3.2.a_5 = 5!a_5 & \Longrightarrow & a_5 = \dfrac{f^{(5)}(0)}{5!} \\
... & & & & ... \\
f^{(n)}(0) & = & 0, \ \forall n > 5 & &
\end{array}$$

Podemos reescrever o polinómio inicial da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f(0)}{0!}.$$

Se considerarmos um polinómio de grau n

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \\
&= \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.
\end{aligned}
$$

Veremos que expressões análogas desempenham um papel muito importante na aproximação de funções genéricas (que admitem derivadas de várias ordens) por polinómios. Dada uma função pretende-se aproximá-la por uma outra que seja "mais bem comportada". Nesta perspectiva, é claro que as funções polinomiais são funções muito simples: as suas derivadas são ainda funções polinomiais e para calcular o valor de um polinómio basta apenas utilizar operações de adição e multiplicação.

Definição 4.10 *Seja f uma função n vezes diferenciável num ponto a do seu domínio. Chama-se **polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto** a, ao polinómio:*

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,
\end{aligned}
$$

com as convenções $0! = 1$, $0^0 = 1$.

*No caso de $a = 0$ o polinómio de Taylor é também chamado **polinómio de MacLaurin**,*

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.42 *Consideremos a função exponencial definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$.*

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = e^x \implies f'(0) = e^0 = 1 \\
&f''(x) = e^x \implies f''(0) = e^0 = 1 \\
&... \\
&f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = e^0 = 1
\end{aligned}
$$

O polinómio da Maclaurin de ordem n é

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}.$$

Observemos o gráfico da função exponencial e das suas aproximações polinomiais de primeira ($p_1(x) = 1 + x$) e segunda ($p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$) ordens na figura 4.9.

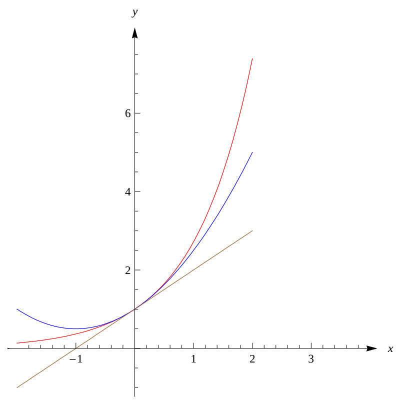

Figura 4.9: Gráfico da função exponencial e das suas aproximações polinomiais de primeira ($p_1(x) = 1 + x$) e segunda ($p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$) ordens.

Exemplo 4.43 *Consideremos a função* $f(x) = \log(1+x)$.

$$f(x) = \log(1+x) \implies f(0) = \log 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{3\times 2}{(1+x)^4} \implies f^{(4)}(0) = \frac{3\times 2}{(1+0)^4} = 3\times 2 = 3!$$

$$\ldots$$

O polinómio da Maclaurin de ordem n é

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!x^n}{n!} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

Nota 4.17 *Observe que o polinómio de Taylor de ordem $n = 1$, de f, no ponto a corresponde à expressão da recta tangente a f no ponto a:*

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Nota 4.18 *Uma propriedade importante do polinómio de Taylor de qualquer função f, n vezes diferenciável, é que a função e a suas derivadas até à ordem n, no ponto a, são iguais ao polinómio e às suas correspondentes derivadas nesse ponto, ou seja:*

$$f^{(k)}(x) = p_n^{(k)}(x), \quad \textit{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Com esta ferramenta, o polinómio de Taylor, será possível obter "*boas*" aproximações polinomiais ao gráfico de determinadas funções? O Teorema de Taylor estabelece que (sob certas condições) uma função pode ser aproximada (na vizinhança de algum ponto dado) por um polinómio, de modo que o erro que se comete ao substituir a função pelo polinómio seja "*pequeno*".

Teorema 4.12 ***(Fórmula de Taylor)*** *Seja f uma função contínua e n vezes diferenciável num intervalo aberto I , $a \in I$. Tem-se que, para qualquer $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r_n(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x) \end{aligned}$$

em que

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

No caso em que $a = 0$ também se designa esta fórmula por ***fórmula de MacLaurin****.*

É imediato a partir da sua definição que o polinómio de Taylor de f, associado ao ponto a, converge para $f(a)$ quando x tende para a. Então o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n}$$

gera uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Aplicando a regra de Cauchy (as condições verificam-se), e tendo em atenção que as derivadas de f e de $p_n(x)$ são contí nuas e iguais no ponto a até à ordem n, verifica-se que surgem sucessivas indeterminações do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

$$\frac{r_n^{(k)}(x)}{[(x-a)^n]^{(k)}} = \frac{f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x)}{n\,(n-1)\,(n-k+1)\,(x-a)^{(n-k)}},\ k < n$$

Esta sucessão de indeterminações do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ será levantada quando se aplica a regra de Cauchy pela n- ésima vez, obtendo-se

$$\frac{r_n^{(n)}(x)}{[(x-a)^n]^{(n)}} = \frac{f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Como a derivada de ordem n de f é contínua no ponto a, e uma vez que o denominador já não se anula podemos calcular o limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) - p_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Nota 4.19 *O segundo membro da igualdade anterior designa-se por* ***desenvolvimento de Taylor*** *(ou tayloriano) de ordem n duma função f no ponto a.*

Podemos identificar a expressão deste resto consoante o comportamento da função f.

Existem várias expressões para o resto da fórmula de Taylor devidas aos matemáticos italianos Joseph Louis Lagrange e Giuseppe Peano, ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy e ao matemá tico português Vicente Gonçalves. Não vamos abordar este interessante assunto com detalhe, vamos considerar apenas o resto de Lagrange. Se exigirmos que a existência de derivada de ordem $n+1$ é possível encontrar a seguinte expressão para o resto.

Teorema 4.13 *(**Fórmula de Taylor com resto de Lagrange**) Seja f uma função contínua e $(n+1)$ vezes diferenciável num intervalo aberto I , $a \in I$. Tem-se que, para qualquer $x \in I$, existe c entre a e x para o qual é possível escrever o resto da fórmula de Taylor como*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ou seja, tem-se que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

para algum $c \in (a,x)$ se $a < x$ ou $c \in (x,a)$ se $x < a$.

Omitimos a demonstração deste resultado. Vamos considerar algumas aplicações numéricas e gráficas da fórmula de Taylor.

Exemplo 4.44 *Vamos aproximar a função seno por um polinómio, usando a fórmula de Taylor, tendo em conta que esta função é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$.*

$$f(x) = \operatorname{sen}$$

Calculemos as derivadas de ordem n no ponto $x = 0$.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \implies f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \implies f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \implies f'''(0) = -1$$

$$....$$

$$\textit{Logo } f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & n = 1, 5, 9, ... \\ -1 & n = 3, 7, 11, ... \\ 0 & n \textit{ é par} \end{cases}$$

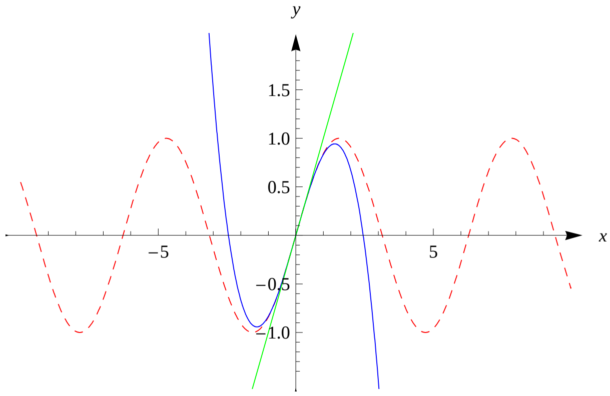

Figura 4.10: Aproximação linear da função seno: $p_1(x) = x$.

O resto de Lagrange é dado pela expressão

$$r_{2n-1}(x) = \frac{(-1)^n \operatorname{sen} c}{(2n)!} x^{2n}, \text{ com } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Este erro corresponde ao erro cometido nas aproximações que se consideram e pode ser majorado por

$$|r_{2n-1}(x)| = \left| \frac{(-1)^n \operatorname{sen} c}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

Claro que quanto maior for a ordem n da aproximação polinomial utilizada menor será o erro $r_n(x)$.

Esta afirmação é ilustrada nas figuras seguintes em que consideramos os seguintes polinómios de Taylor:

$$n = 1 \implies p_1(x) = x$$

$$n = 3 \implies p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$n = 5 \implies p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$n = 7 \implies p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$n = 9 \implies p_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$n = 11 \implies p_{11}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

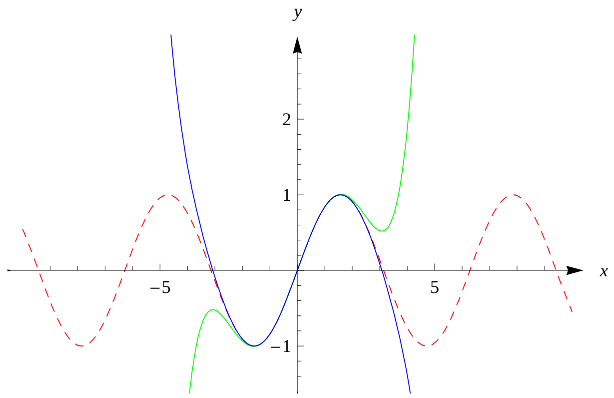

Figura 4.11: Aproximação polinomial da função seno de grau $n = 5$ e $n = 7$.

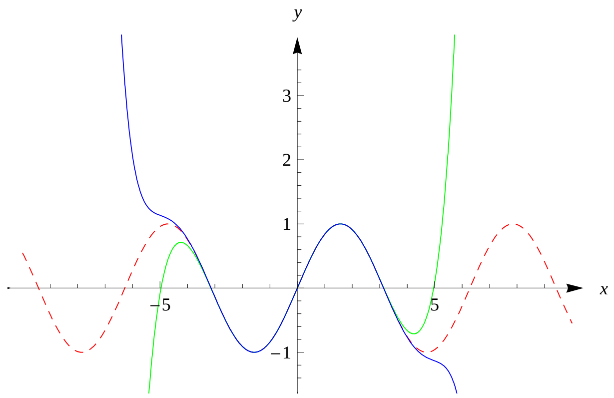

Figura 4.12: Aproximação polinomial da função seno de grau $n = 9$ e $n = 11$.

Exemplo 4.45 *Consideramos a função $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ no intervalo $]-1, +\infty[$. Vamos aproximar esta função por um polinómio de grau 2, utilizando a fórmula de Taylor no ponto $a = 0$. Então:*

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} \implies f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \implies f'(0) = \frac{1}{3},$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}} \implies f''(0) = -\frac{2}{9},$$

$$f'''(c) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(1+c)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27}(1+c)^{-\frac{8}{3}},$$

$$e\ r_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3, \text{ com } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Logo:

$$f(x) = p_2(x) + r_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3.$$

Esta igualdade vai fornecer valores aproximados para $\sqrt[3]{x+1}$em que é possível majorar o erro que se comete ao considerar cada uma das aproximações.

Por exemplo se considerarmos $x = 1$ obtemos que:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} = f(1) \quad &= p_2(1) + r_2(1) = \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}} \\ &= \frac{11}{9} + \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}.\end{aligned}$$

Podemos afirmar que $\frac{11}{9}$ é um valor aproximado do número irracional $\sqrt[3]{2}$. O erro que se comete nesta aproximação em que consideramos a fórmula de Taylor de ordem 2 é dado pelo resto de Lagrange de ordem 2,

$$r_2(1) = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}.$$

Como $c > 0$ temos que $1 + c > 1$ donde obtemos que $(1+c)^{-\frac{8}{3}} < 1$. Então:

$$r_2(1) = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}} < \frac{5}{81} < 6,173 \times 10^{-2}.$$

Podemos concluir que o erro cometido ao aproximar $\sqrt[3]{2}$ por $\frac{11}{9}$ é inferior a $6,173 \times 10^{-2}$.

Uma outra aplicação desta fórmula é na determinação de limites de funções.

Exemplo 4.46 *Consideremos o seguinte limite:*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log(|\cos x|) + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2}$$

Estamos em presença duma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. *Vamos usar a fórmula de Taylor de ordem 3 da função* $f(x) = \log(|\cos x|)$, *que é uma função indefinidamente diferenciável no domínio* $D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$. *Como* $\pi \in D$ *podemos escrever a fórmula de Taylor de ordem 3 da função* f *em potências de* $(x-\pi)$. *Sabemos pelo teorema de Taylor que existe* c *entre* x *e* π *tal que*

$$f(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-\pi)^3.$$

Como:

$$f(x) = \log(|\cos x|) \implies f(\pi) = 0,$$

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \implies f'(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(\cos x)^2} \implies f''(\pi) = -1 \ \textit{e}$$

$$f'''(c) = -\frac{2\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3}$$

temos que

$$f(x) = -\frac{1}{2!}(x-\pi)^2 - \frac{2\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3}\frac{(x-\pi)^3}{3!} = -\frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3(\cos c)^3}.$$

Calculamos, agora o limite pretendido:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\log(|\cos x|) + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\dfrac{(x-\pi)^2}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3(\cos c)^3} + \dfrac{(x-\pi)^2}{2}}{(x-\pi)^2}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{-\dfrac{\operatorname{sen} c(x-\pi)^3}{3(\cos c)^3}}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi} -\frac{x-\pi}{3}\frac{\operatorname{sen} c}{(\cos c)^3}$$

$= 0$, *uma vez que quando* $x \to \pi$ *também* $c \to \pi$.

4.5 Aplicações da fórmula de Taylor.

4.5.1 Máximos, mínimos, sentido da concavidade e pontos de inflexão duma função

As derivadas de ordem superior à primeira e a fórmula de Taylor são também de grande utilidade no estudo das funções assim como no esboço do seu gráfico.

Teorema 4.14 *Seja f uma função n vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto a do seu domínio. Se $f'(a) = 0$ e se $f^{(n)}(a)$ (com $n > 1$) é a primeira derivada que não se anula no ponto a, isto é,*

$$f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

e $f^{(n)}$ é contínua em a, então :

1. *Se n é par, f tem um extremo local no ponto a, que é* $\begin{cases} \text{máximo se } f^{(n)}(a) < 0 \\ \text{mínimo se } f^{(n)}(a) > 0 \end{cases}$
2. *Se n é ímpar, f não tem um extremo local no ponto a.*

Demonstração. A derivada de ordem n da função f é contínua em a, logo existe uma vizinhança deste ponto em que a a função $f^{(n)}$ tem o mesmo sinal que $f^{(n)}(a)$. Mas, pelo próprio enunciado sabemos que existe uma vizinhança do ponto a em que a função é n vezes diferenciável. Se intersectarmos estas vizinhanças obtemos uma nova vizinhança $V_\delta(a)$ do ponto a em que as duas condiç ões são verificadas. Podemos escrever, $\forall x \in V_\delta(a)$, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange da função f:

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

para algum c entre a e x. Mas, por hipótese, as derivadas de f até á ordem $n-1$ (inclusivé) são nulas, logo podemos escrever

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in V_\delta(a).$$

O que é equivalente a

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in V_\delta(a).$$

Vejamos que:

1. Se n é par, então $(x-a)^n \geq 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$,
pelo que o sinal da diferença $f(x) - f(a)$ é o sinal da derivada $f^{(n)}(c)$
$\begin{cases} \text{Se o sinal é positivo, tem-se que } f(x) > f(a),\ \forall x \in V_\delta(a), \\ \qquad \text{logo } f \text{ tem um mínimo no ponto } a \\ \text{Se o sinal é negativo, tem-se que } f(x) < f(a),\ \forall x \in V_\delta(a), \\ \qquad \text{logo } f \text{ tem um máximo no ponto } a \end{cases}$
2. Se n é ímpar, então $(x-a)^n$ muda de sinal em torno de a, pelo que, qualquer que seja o sinal de $f^{(n)}(c)$, a diferença $f(x) - f(a)$ terá sinais diferentes para $x < a$ e $x > a$, pelo que f não tem um extremo local no ponto a.

■

Podemos considerar a seguinte consequência imediata deste teorema.

Corolário 4.8 *Seja f uma função 2 vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto a do seu domínio. Se $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$ e f'' é contínua no ponto a então tem-se que:*

$$\begin{cases} f''(a) < 0 \implies & f \text{ tem um má ximo no ponto } a, \\ f''(a) > 0 \implies & f \text{ tem um mínimo no ponto } a. \end{cases}$$

Exemplo 4.47 *Consideremos a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Tem-se que:*

$$\begin{array}{lllll} f'(x) & = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 & = & 0 & \text{em } x = 1 \\ f''(x) & = 12x^2 - 24x + 12 & = & 0 & \text{em } x = 1 \\ f'''(x) & = 24x - 24 & = & 0 & \text{em } x = 1 \\ f^{(4)}(x) & = 24 & \neq & 0 & \text{em } x = 1. \end{array}$$

Como $n = 4$ é par e $f^{(4)}(1) > 0$ podemos concluír que f tem um mínimo em $x = 1$.

Exemplo 4.48 *Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$.*

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{2} - \cos x = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mas:

$$f''(x) = \operatorname{sen} x \implies f''\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \text{ e } f''\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Então pelo corolário anterior podemos concluir que a função f tem um máximo relativo no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e tem um mínimo relativo no ponto de abcissa $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ para todo o $k \in \mathbb{Z}$.

A segunda derivada duma função é extremamente útil no estudo do sentido das concavidades do gráfico de uma função.

Definição 4.11 *Seja f uma função diferenciável num ponto a. Diz-se que, no ponto $a \in I$, f tem:*

- ***concavidade voltada para cima*** *se o gráfico de f estiver, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, isto é, se existir uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a, tal que:*
  $$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a), \ \forall x \in V_\delta(a).$$
- ***concavidade voltada para baixo*** *se o gráfico de f estiver, localmente, abaixo da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, isto é, se existir uma vizinhança $V_\delta(a)$ de a, tal que:*
  $$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a), \ \forall x \in V_\delta(a).$$

Diz-se que f tem ***concavidade voltada para cima (ou para baixo)*** *no intervalo I, se f tiver esse tipo de concavidade em todos os pontos do intervalo I.*

Definição 4.12 *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I que contem o ponto a. Diz-se que f tem um* ***ponto de inflexão*** *em $a \in I$ se em torno desse ponto ocorrer uma mudança no sentido da concavidade do gráfico da função.*

Out[362]=

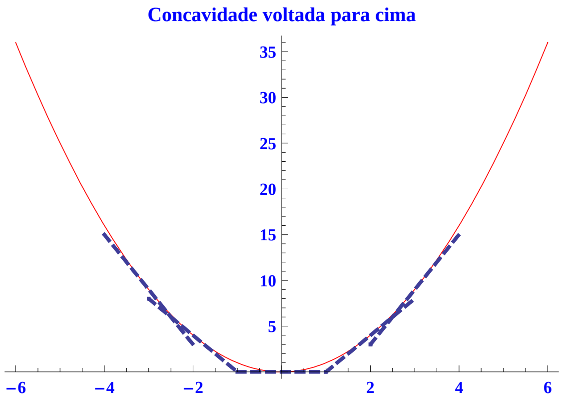

Figura 4.13: O gráfico de uma função com a concavidade voltada para cima: localmente as rectas tangentes ao gráfico da função ficam sempre abaixo do gráfico.

Out[344]=

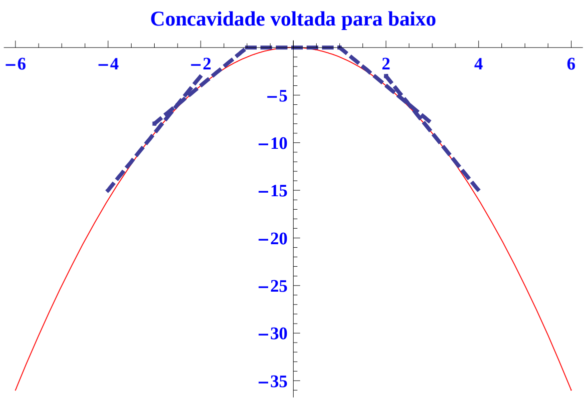

Figura 4.14: O gráfico de uma função com a concavidade voltada para baixo: localmente as rectas tangentes ao gráfico da função ficam sempre acima do gráfico.

Teorema 4.15 *Sejam I um intervalo e f uma função com segunda derivada contínua em I. Então:*

1. *O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em todos os pontos x interiores tais que $f''(x) > 0$.*
2. *O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em todos os pontos x interiores tais que $f''(x) < 0$.*

Demonstração. Seja a um ponto interior a I tal que $f''(a) \neq 0$. Como a segunda derivada de f é contínua em I e $f''(a) \neq 0$, existe uma vizinhança $V_\delta(a)$, com $V_\delta(a) \subset I$, onde $f''(x)$ toma o sinal de $f''(a)$, isto é, se $f''(a) > 0$ então $f''(x) > 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$, se $f''(a) < 0$ então $f''(x) < 0$, $\forall x \in V_\delta(a)$.

Seja $x \in V_\delta(a)$, pelo teorema de Taylor, existe $c \in V_\delta(a)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Para sabermos se o gráfico de f está, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, temos que estudar o sinal da diferença:

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]\,.$$

Mas

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!} - [f(a) + f'(a)(x-a)] \\ &= f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!} \end{aligned}$$

O sinal desta diferença depende apenas do sinal de $f''(c)$ que, por sua vez, tem o sinal de $f''(a)$. Podemos concluir que:

1. Se $f''(a) > 0$ então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0$, logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.
2. Se $f''(a) < 0$ então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0$, logo o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. ∎

Deste teorema podemos tirar a seguinte conclusão, com uma formulação semelhante ao teorema de Fermat, para o caso da primeira derivada.

Corolário 4.9 *Sejam I um intervalo e f uma função com segunda derivada contínua em I. Se f tem um ponto de inflexão num ponto a interior a I, então $f''(a) = 0$.*

Tal como o teorema de Fermat este corolário afirma que o anulamento da segunda derivada (desde que exista) é **condição necessária, mas não suficiente** para a função ter um ponto de inflexão nesse ponto.

Este corolário diz-nos que

$$f \text{ duas vezes diferenciável e com ponto de inflexão em } c \implies f''(c) = 0.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, ou seja,

$$f \text{ duas vezes diferenciável e } f''(c) = 0 \not\Rightarrow\ f \text{ tem ponto de inflexão em } c.$$

Exemplo 4.49 *Consideremos a função* $f(x) = x^4$ *cuja segunda derivada é* $f''(x) = 12x^2$.

Esta segunda derivada anula-se para $x = 0$ *e, no entanto,* $f''(x) > 0$, $\forall x \neq 0$. *Então o gráfico desta função tem sempre a concavidade voltada para cima, não existindo pontos de inflexão.*

Precisamos de ter informação adicional sobre o comportamento da função para garantir a existência dum ponto de inflexão, facto que é exposto no resultado seguinte.

Teorema 4.16 *Seja* I *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e seja* $a \in int\ (I)$. *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq 3$.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ *tal que* $f,\ f',\ f'', ..., f^{(n)}$ *são contínuas em* I, *e*

$$f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad mas \;\; f^{(n)}(a) \neq 0$$

Então:
(i) Se n *é par e* $f^{(n)}(a) > 0$, *então o gráfico de* f *tem a concavidade voltada para cima no ponto* a;
(ii) Se n *é par e* $f^{(n)}(a) < 0$, *então o gráfico de* f *tem a concavidade voltada para baixo no ponto* a;
(iii) Se n *é ímpar, então* a *é um ponto de inflexão de* f.

Demonstração. Como $f^{(n)}(x)$ é contínua e $f^{(n)}(a) \neq 0$, existe uma vizinhança V de a, $V \subset I$, onde $f^{(n)}(x)$ toma o sinal de $f^{(n)}(a)$, isto é, se $f^{(n)}(a) > 0$ então $f^{(n)}(a) > 0$, $\forall x \in V$, se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f^{(n)}(a) < 0$, $\forall x \in V$.

Seja $x \in V$. Como f é n vezes diferenciável em I e $V \subset I$, pelo teorema de Taylor existe $c \in V$ tal que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

Por hipótese, $f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$, logo,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Para sabermos se o gráfico de f está, localmente, acima da sua recta tangente no ponto $(a, f(a))$, temos que estudar o sinal da diferença:

$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]\,.$$

Mas

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n - [f(a) + f'(a)(x-a)] \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Se n é par então $(x-a)^n > 0$, $\forall x \in V \setminus \{a\}$, o que implica que o sinal da diferença anterior é o sinal de $f^{(n)}(c)$. Assim:

(i) se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] > 0$,
o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no ponto a;
(ii) se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então $f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] < 0$.
o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no ponto a;
Se n é ímpar, então $(x-a)^n > 0$, $\forall x > a$ e $(x-a)^n < 0$, $\forall x < a$, logo o sinal da diferença anterior passa de valores menores do que zero para valores maiores que zero. Assim:
(iii) se n é ímpar, então a é um ponto de inflexão de f. ∎
Consideremos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 4.50 *Consideremos a função*

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x.$$

Como $f'(x) = 1 + \cos x$ *temos que:*

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mas $f'''(x) = -\cos x$, *logo nos pontos de abcissa* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *temos que:* $f'''(k\pi) = 1$, *se* k *é ímpar e* $f'''(k\pi) = -1$, *se* k *é par. Podemos concluir, pelo teorema anterior, que os pontos de abcissa* $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *são pontos de inflexão.*

Exemplo 4.51 *Consideremos a função*

$$f(x) = x^2 (x-1)^3.$$

Como $f''(x) = 2(x-1)(10x^2 - 8x + 1)$ *temos que:*

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{4+\sqrt{6}}{10} \vee x = \frac{4-\sqrt{6}}{10}.$$

Mas $f'''(x) = 6(10x^2 - 12x + 3)$, *logo*

$$f'''(1) \neq 0,\ f'''\left(\frac{4+\sqrt{6}}{10}\right) \neq 0 \text{ e } f'''\left(\frac{4-\sqrt{6}}{10}\right) \neq 0.$$

Podemos concluir, pelo teorema anterior, que estes três pontos são pontos de inflexão.

Para um estudo mais completo é necessário considerar, ainda, a existência de assímptotas.

Definição 4.13 *Sejam* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e* a *ponto de acumulação de* D. *Diz-se que a recta vertical* $x = a$ *é uma* ***assímptota vertical*** *ao gráfico de* f, *quando se verifica pelo menos uma das quatro igualdades:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$$

Definição 4.14 *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a recta de equação*

$$y = mx + p,$$

*com $m, p \in \mathbb{R}$, é uma **assímptota à esquerda** ao gráfico de f (resp. **assímptota à direita** ao gráfico de f), se*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0 \quad \textit{(resp. } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0\textit{)}$$

*Quando $m = 0$, diz-se que o gráfico de f tem uma **assímptota horizontal** à esquerda (resp. assímptota horizontal à direita).*

Proposição 4.2 *Seja f uma função definida num intervalo da forma $]-\infty, a[$ (resp. $]a, +\infty[$), com $a \in \mathbb{R}$. O gráfico de f tem uma assímptota à esquerda (resp. assímptota à direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad p = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

$$\textit{(resp. } m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)\textit{)}$$

Neste caso, a assímptota à esquerda (resp. assímptota à direita) é única e a sua equação é

$$y = mx + p.$$

Exemplo 4.52 *Consideremos a função*

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Tem-se que:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) - 1 \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$

Assim, a recta $y = x - 1$ é uma assímptota à direita e à esquerda e a recta $x = -1$ é uma assímptota vertical, conforme se pode observar na figura 4.15.

Estamos em condições de estudar uma função analisando todos os aspectos tratados nesta secção e de esboçar o seu gráfico.

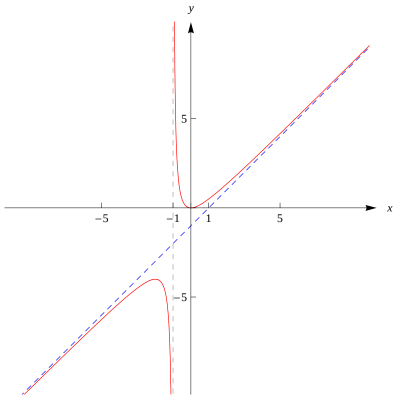

Figura 4.15: O gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ indicando-se as assímptotas $y = x - 1$ e $x = -1$.

4.6 Exercícios Propostos

1) Calcule, usando a definição, a derivada das seguintes funções num ponto genérico $x = a$:

$a)\ \ f(x) = e^x; \quad b)\ \ f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}; \quad c)\ \ f(x) = \operatorname{sen} x; \quad d)\ \ f(x) = \cos x.$

2) Determine as derivadas das seguintes funções:

$a)$ $f(x) = 8x - 24x^2$;

$b)$ $f(x) = \cos x - e^x$;

$c)$ $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$;

$d)$ $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$;

$e)$ $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$;

$f)$ $f(x) = (2x^2 - 1)(x^{-\frac{2}{3}} + x^2)$;

$g)$ $f(x) = x^2 e^{\operatorname{sen} x}$;

$h)$ $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$;

$i)$ $f(x) = \log(kx),\ k, x > 0$;

$j)$ $f(x) = \log\log x$;

$l)$ $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$;

$m)$ $f(x) = \cos \operatorname{arcsen} x$;

$n)$ $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$;

$o)$ $f(x) = (\log x)^x$;

$p)$ $f(x) = \dfrac{-3x+7}{2x+3}$;

$q)$ $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos 2x}$;

$r)$ $f(x) = \dfrac{\log 2x}{\operatorname{sen} x}$.

$s)$ $f(x) = (arctg\,(x))^{\operatorname{arcsen} x}$.

3) Determine a equação da recta tangente à curva $y = x^2 - 4$:

a) no ponto $(x, y) = (3, 5)$;
b) nos pontos em que intersecta o eixo dos xx;
c) nos pontos em que intersecta o eixo dos yy.

4) Determine a equação da recta tangente à curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, no ponto $(-2, 5)$.

5) Determine os valores das constantes a, b e c para os quais os gráficos dos dois polinómios

$$p(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^3 - c,$$

se intersectam no ponto $(1, 2)$ e admitam a mesma tangente naquele ponto.

6) Determine a função derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

a) $f(x) = |x|$, *b*) $f(x) = e^{-|x|}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$, *d*) $f(x) = x^2 H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

7) Mostre, usando o teorema de Lagrange, que:

a) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ para $x > 0$;

b) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;

c) $0 < x - \log(1+x) < x^2$ para $x > 0$.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável com $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.
Prove que $f'''(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$.
Mostre que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

10) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

(Sugestão: aplique o teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

11) Determine, sempre que existam, os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}, \ \alpha \in \mathbb{R};$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x};$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3};$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^5};$ *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\cot x;$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \ \operatorname{sen}(\frac{a}{x});$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6};$ *h*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}.$ *i*) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}};$

j) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^k - x^k}{\log a^k - \log x^k}, \ k \in \mathbb{N};$ *l*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(\log x)^x}{x};$ *m*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x;$

n) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ (2-x)^{tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \ ;$ *o*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - \cosh(1-x)}{\cos(1-x) - 1} \ ;$ *p*) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x};$

q) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ (\log x \cdot \log\log x)\,;$ *r*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x} \ ;$ *s*) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

12) Encontre a derivada de ordem n das funções:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x;$ *b*) $f(x) = \cos(2x);$ *c*) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}.$

d) $f(x) = \log(1+x);$ *e*) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 4x - 9.$

13) Determine o polinómio de Taylor de ordem 6 da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, no ponto $x = \pi/2$.

14) Determine o polinómio de Taylor de ordem n, no ponto $x = 0$ (o polinómio de Mac Laurin) das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 1$; *b*) e^x; *c*) $\dfrac{1}{1+x}$;

d) e^{5x-1}; *e*) $\log(x+1)$; *f*) $\operatorname{sen}(2x+3)$.

15) Determine o polinómio de Taylor de ordem n das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $\dfrac{1}{x}$ em $x = 2$; *b*) $\sqrt{x}$ em $x = 1$.

16) Encontre os extremos locais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; *b*) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$;

c) $f(x) = x^2(x-12)^2$; *d*) $f(x) = x \log x$.

17) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0, \\ b + \operatorname{arctg}(x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Determine a e b de modo a que f seja contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

18) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto zero e definida por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ \operatorname{arctg}(ax) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine a.
b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (considerando o valor de a que determinou).
c) Estude f quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada.
d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

19) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$

a) Determine os extremos locais (se existirem) de g.
b) O que pode afirmar sobre o número de soluções da equação $f''(x) = 0$.

20) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Calcule $(arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\,(x)))'$.

21) Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
b) A função f é necessariamente limitada.
c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

22) Determine um polinómio do 2^ograu tendo como uma das suas raízes $x = -1$, que toma para $x = 0$ o valor 1 e tal que é máximo para $x = 1$.

23) Entre todos os rectângulos que se podem inscrever numa circunferência de raio r, determine aquele cuja área é máxima.

24) Estude e esboce o gráfico das seguintes funções :

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+2}$; *b*) $g(x) = x + \log\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$; *c*) $h(x) = x \log|x|$.

4.7 Soluções dos exercícios

1) *a*) $f'(a) = e^a$; *b*) $f'(a) = na^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$; *c*) $f'(a) = \cos x$; *d*) $f'(a) = -\operatorname{sen} x$.

2) *a*) $f'(x) = 8x - 24x^2$;

b) $f'(x) = -\operatorname{sen} x - e^x$;

c) $f'(x) = -\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;

d) $f'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^4 x}$;

e) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$;

f) $f'(x) = 4x(x^{-\frac{2}{3}} + x^2) + (2x - \frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}})(-1 + 2$

g) $f'(x) = (2\ x\ + x^2 \cos x)e^{\operatorname{sen} x}$;

h) $f'(x) = 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$;

i) $f'(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0$;

j) $f'(x) = \dfrac{1}{x \log x}$;

l) $f'(x) = \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$;

m) $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

n) $f'(x) = \left(\log \operatorname{sen} x + \dfrac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)(\operatorname{sen} x)^x$;

o) $f'(x) = (\log x)^x \left(\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}\right)$;

p) $f'(x) = -\dfrac{23}{(2x+3)^2}$;

q) $f'(x) = \dfrac{\cos(2x) + (2x+1)\operatorname{sen}(2x)}{\cos^2(2x)}$;

r) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - x\log(2x)\cos x}{x \operatorname{sen}^2 x}$.

s) $f'(x) = (arctg\,(x))^{\operatorname{arcsen} x}$
$\left(\dfrac{\log(arctg\,(x))}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\operatorname{arcsen}(x)}{(1+x^2)\,arctg x}\right)$;

3) *a*) $r(x) = 6x - 13$; *b*) $r(x) = -4x - 8$; $r(x) = 4x - 8$; *c*) $r(x) = -4$.
4) $r(x) = 5$.
5) $a = 1,\ b = 0$ e $c = -1$.

6) *a*) $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

b) $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{e^x}, & x > 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.

c) $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$.

d) $D_{f'} = \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0. \end{cases}$

11) *a*) α; *b*) 1; *c*) $\dfrac{1}{2}$; *d*) $+\infty$; *e*) 0; *f*) a; *g*) $\frac{1}{5}$; *h*) $\dfrac{1}{2}$; *i*) 0; *j*) a^k;

l) 0; *m*) 1; *n*) $e^{\frac{2}{\pi}}$; *o*) 1; *p*) 1; *q*) 0; *r*) 1; *s*) e.

12) *a*) $f^{(n)}(x) = (\operatorname{sen} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } n \bmod 4 = 0; \\ \cos x & \text{se } n \bmod 4 = 1; \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } n \bmod 4 = 2; \\ -\cos x & \text{se } n \bmod 4 = 3. \end{cases}$

b) $f^{(n)}(x) = (\cos 2x)^{(n)} = \begin{cases} 2^n \cos 2x & \text{se } n \bmod 4 = 0; \\ -2^n \operatorname{sen} 2x & \text{se } n \bmod 4 = 1; \\ -2^n \cos 2x & \text{se } n \bmod 4 = 2; \\ 2^n \operatorname{sen} 2x & \text{se } n \bmod 4 = 3. \end{cases}$

c) $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$

d) $f^{(n)}(x) = (\log(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$

e) $f'(x) = 3x^2 + 10x + 4$; $f''(x) = 6x + 10$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ se $n > 4$;

13) $1 - \dfrac{1}{2!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4 + \dfrac{1}{6!}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^6.$

14) *a*) $-1 + x^3$ se $n \geq 3$;

b) $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$;

c) $1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n$;

d) $\dfrac{1}{e}\left(1 + 5x + \dfrac{5^2}{2!}x^2 + \dfrac{5^3}{3!}x^3 + ... + \dfrac{5^n}{n!}x^n\right)$;

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$;

e) $\displaystyle\operatorname{sen} 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} x^k$;

15) *a*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} (x-2)^k$;

b) $1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{2^2 2!}(x-1)^2 + \dfrac{3}{2^3 3!}(x-1)^3 - \dfrac{3 \times 5}{2^4 4!}(x-1)^4 +$

$+ \dfrac{3 \times 5 \times 7}{2^5 5!}(x-1)^5 + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{3 \times 5 \times ... \times (2n-3)}{2^n n!}(x-1)^n.$

16) *a*) $x = -2$ é ponto de mínimo, mí nimo é $f(-2) = 2$;
b) Não tem extremos;
c) $x = 0$ e $x = 12$ são pontos de mínimo, mínimo é $f(0) = f(12) = 0$;
$x = 6$ é pontos de máximo, máximo é $f(6) = 1296$;
d) $x = \frac{1}{e}$ é ponto de mínimo local, mínimo é $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

17) *a*) $a = 1$ e $b = 0$.

18) *a*) $a = 1$; *b*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$;

c) Domínio de diferenciabilidade $D_{f'} = \mathbb{R}$ e a função derivada é definida por:

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & \text{se } x > 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) Estritamente crescente em $]-\infty, 1[$, estritamente decrescente em $]1, +\infty[$ e

$f(1)$ é um máximo absoluto de f.

19) *a*) Os pontos $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de máximo (local) para g e os pontos $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de mínimo (local).

b) Tem um número infinito de soluções.

20) $(arctg\,(f(x)) + f\,(arctg\,(x)))' = \dfrac{1}{1+f^2(x)} f'(x) + f'(arctg\,(x)) \dfrac{1}{1+x^2}$.

21) *a*) Verdadeira. *b*) Falsa. *c*) Verdadeira.

22) $p(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x + 1$.

23) O quadrado.