Análise Matemática I - 3ª Frequência
U. de Évora, 21 de abril de 2014

Calcular o limite das seguintes sucessões (quando existir)

a) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$ b) $n\cdot(2n+1)\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$

Diga (e justifique) se estas séries são convergentes e calcular a soma quando o são

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^{n-1}-2^{2n-3}}{6^{n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot e^n}{4^{n-1}}$ (derivar a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n$).

Diga quais das séries seguintes são convergente e justifique

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{5+(-1)^n\cdot n^3}}{2+n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{n^3+n^6}}$.

Encontrar o domínio de convergência da série e calcular a soma (ou seja, expressar $f(x)$ sem utilizar o somatório)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+x^n+\left(-x^2\right)^n}{n!}\ .$$

Encontrar o polinómio de Taylor de grau 3 da função $\sqrt[3]{x}$ à volta do ponto $a=8$.

Demonstrar a igualdade $\arctan(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}$.

Encontrar a soma da série "telescópica"

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

1. Calcular os limites

a. $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}.$$

b. $$\lim_{n\to+\infty}n(2n+1)\left(1-e^{-1/n^2}\right)=-\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{-1/n^2}-1\right)}{-1/_{n^2}}{-1}/_{n^2}\,n(2n+1)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{-1/n^2}-1\right)}{-1/_{n^2}}\frac{2n^2+n}{n^2}=1\times 2=2.$$

2. Diga se as séries são convergentes e calcule a soma.

a. $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{5^{n-1}-2^{2n-3}}{6^{n+1}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{5^n5^{-1}}{6^n6}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^{2n}2^{-3}}{6^n6}=\frac{1}{5\times 6}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{8\times 6}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n$$

A primeira é uma série geométrica de razão 5/6. Como a razão verifica -1<r<1, ela é convergente.

A segunda é uma série geométrica de razão 2/3. Como a razão verifica -1<r<1, ela é convergente.

Assim a série em causa é também convergente, visto ser a subtração de duas convergentes.

A soma da primeira é $S_1=\frac{primeiro}{1-r}=\frac{\frac{5}{6^3}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{5}{6^3}}{\frac{1}{6}}=\frac{5\times 6}{6^3}=\frac{5}{36}$.

A soma da segunda é $S_2=\frac{primeiro}{1-r}=\frac{\frac{2}{6^3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{6^3}}{\frac{1}{3}}=\frac{2\times 3}{6^3}=\frac{1}{36}$.

Assim a soma da série é $\frac{5}{36}-\frac{1}{36}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

b. $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{ne^n}{4^{n-1}}$$

Vou utilizar o critério da razão (do quociente ou D'Alembert)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)e^{n+1}}{4^n}}{\frac{ne^n}{4^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n4^{-1}(n+1)e^ne}{ne^n4^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{en+e}{4n}=\frac{e}{4}<1 \text{ logo é convergente.}$$

3. Diga quais das seguintes séries são convergentes e justifique.

a. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{5+(-1)^n n^3}}{2+n^2}$

Esta série parece não estar bem definida pois para n=3 o que está dentro da raiz fica negativo …

Omitindo o $(-1)^n$ posso dizer que se trata de uma série de termos positivos e vou comparar com a série $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ pois a diferença entre o grau em baixo pelo grau em cima é 2-3/2 = ½.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{5+n^3}}{2+n^2}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}\sqrt{5+n^3}}{2+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}n^{3/2}}{n^2} = 1 > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{\sqrt{5+n^3}}{2+n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $p = 1/2$, logo divergente, a série em causa também é **divergente**.

b. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+5}{\sqrt{n^3+n^6}}$

Vou comparar com a série $\sum \frac{1}{n^2}$ pois a diferença entre o grau em baixo pelo grau em cima é 3-1= 2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+5}{\sqrt{n^3+n^6}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n+5)}{\sqrt{n^3+n^6}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1 > 0 \text{ e finito}$$

Assim por comparação as séries $\sum \frac{n+5}{\sqrt{n^3+n^6}}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ têm a mesma natureza. Como a segunda é uma série de Dirichlet com $p = 2$, logo convergente, a série em causa também é **convergente**.

4. Encontrar o domínio de convergência e calcular a soma da série.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1+x^n+(-x^2)^n}{n!}$$

É necessário utilizar $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, isto é, $e^x - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Quando $x = 1 \leftrightarrow e^1 - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, quando $x = -x^2 \leftrightarrow e^{-x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$

Assim tem-se que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1+x^n+(-x^2)^n}{n!}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=$$

$$=-(e^1-1)+(e^x-1)+\left(e^{-x^2}-1\right)=e^{-x^2}+e^x-e^1-1.$$

Quanto ao raio de convergência com ... $\sum\frac{1}{n!}x^n\to a_n=\frac{1}{n!}$.

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)n!}{n!}=+\infty.$$

A série de potências converge em $|x-0|<R\leftrightarrow-\infty<x<+\infty$ ... converge sempre.

5. Encontrar o polinómio de Taylor de grau 3 de $\sqrt[3]{x}$ perto de a=8.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\text{Resto}$$

$f(8)=\sqrt[3]{8}=2;$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ \to\ f'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12};$

$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}\ \to\ f''(8)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{8^5}}=\frac{-1}{144};$

$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3}=\frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}\ \to\ f'''(8)=\frac{10}{27\sqrt[3]{8^8}}=\frac{10}{6912};$

$$\sqrt[3]{x}=2+\frac{x-8}{12}-\frac{(x-8)^2}{2\times144}+\frac{10(x-8)^3}{6\times6912}+Resto.$$

6. Demonstrar que $\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Sabe − se que $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ logo $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ *também* $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$

Como $\arctan x$ é a primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$, basta tomar a série da segunda e primitivar ...

$$\arctan x=\int\frac{1}{1+x^2}=\int\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

6. Encontrar a soma da série telescópica (Mengoli) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{An+A+Bn-B}{n^2-1} \leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B=2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n - a_{n+2}$$

É uma série telescópica com k=2. A soma é $S = a_1 + \cdots + a_k - k\lim a_n$.

Atenção que são os dois primeiros termos, como começa em 2 será o $a_2 + a_3$

$$S = a_2 + a_3 - 2\lim \frac{1}{n-1} = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - 0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$