UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

1^a **Frequência** 2 de Novembro de 2013

Tempo: 2h 15m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em <u>folhas de teste separadas</u>.

Grupo I

(2) **1.** Prove utilizando o método de indução matemática que

$$\frac{2n}{3n+5} < \frac{2}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(3) **2.** Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+n^2+1} - (n^2+1)$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{4n^2+n+1}}$.

(2) **3.** Considere a sucessão

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}\,.$$

Use o teorema das sucessões enquadradas para calcular

$$\lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Grupo II

(4) **4.** Estude a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, calcule a respectiva soma:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}} \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-3}{5n^2} \qquad c) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{6}{4n^2-9}.$$

(2) **5.** Responda **apenas a uma** das questões seguintes:

a) Justifique que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+n^2}$ é convergente e que a sua soma é menor que 1.

b) Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ é absolutamente convergente para $\alpha > 1$.

Grupo III

(4) **6.** Considere a função

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Estude f quanto à existência de assímptotas.

c) Caracterize a função inversa de f.

(2) **7.** Indique os valores reais de k e λ para os quais a função

$$g(x) = \begin{cases} -3x + k^2 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{e^x} & , \quad 0 < x < 2 \\ \log_2(x) - 2\lambda & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

(1) **8.** Prove que a equação

$$\cos x = x$$

tem pelo menos uma solução.

Justifique rigorosamente a sua resposta.

F1_02-11-2013

1.

$$P_n \longrightarrow \frac{2n}{3n+5} < \frac{2}{3}$$

$$P_1 \longrightarrow \frac{2}{8} < \frac{2}{3} \;\surd$$

$$P_{n+1} \longrightarrow \frac{2(n+1)}{3(n+1)+5} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6n+6 < 6n+16 \;\surd$$

2.a)

$$\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-(n^2+1)\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-(n^2+1)\right)\left(\sqrt{n^4+n^2+1}+(n^2+1)\right)}{\sqrt{n^4+n^2+1}+(n^2+1)} =$$

$$\lim\frac{n^4+n^2+1-(n^2+1)^2}{\sqrt{n^4+n^2+1}+(n^2+1)} = \lim\frac{-n^2}{\sqrt{n^4}+n^2} = -\frac{1}{2}$$

2.b)

$$\lim\sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{4n^2+n+1}} = \lim\frac{\dfrac{(n+1)(n+2)}{4(n+1)^2+n+2}}{\dfrac{n(n+1)}{4n^2+n+1}} = \lim\frac{n^2 4n^2}{4n^2n^2} = 1$$

3.

$$\lim\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k} = \lim\frac{n}{n^2+0}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} = ?$$

$$\textit{termos }(n+1)\times\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2}\times(n+1)\textit{ termos}$$

$$\frac{n^2+n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n^2+n}{n^2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\therefore$ O limite é 1.

4.a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n\times 2^{-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$\therefore$ É uma série geométrica de razão 3/2. Como a razão não verifica -1 < 3/2 < 1, a série é **DIVERGENTE**.

4.b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-3}{5n^2}$$

$$\lim \frac{2n^2-3}{5n^2} = \lim \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ Como o termo geral da série não tende para 0 a série é **DIVERGENTE**.

4.c)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{4n^2-9} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{(2n-3)(2n+3)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+3}$$

$\therefore$ É uma série de Mengoli com k=3 e a sua soma é dada por (atenção que começa em 2)

$$\mathrm{S} = a_2 + a_3 + a_4 - 3 \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-3} = \frac{23}{15} \ \textbf{CONVERGE}$$

5.a)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n+n^2} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$\therefore$ Como a última série é uma geométrica com razão ½ (logo convergente pois a razão verifica -1<1/2<1), por comparação a primeira série de termos positivos também é convergente.

Para provar que a sua soma é inferior a 1 basta calcular a soma da série geométrica.

5.b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$\therefore$ Como a série dos módulos é uma série de Dirichlet e é referido que $\alpha > 1$ então converge. Se a série dos módulos converge a série original **CONVERGE ABSOLUTAMENTE**.

6.a)

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x-2} > 0 \wedge x-2 \neq 0\right\} =]2,+\infty[$$

O contradomínio do logaritmo é toda a reta real.

6.b)

$$y = \log\left(\frac{1}{x-2}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^y} = x-2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^y} + 2 = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x} + 2 \quad D = \mathbb{R} \ \text{ e } \ D' =]2,+\infty[$$

7.

$$\lim_{x\to 0^-} -3x + k^2 = k^2 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{e^x} = 1$$

$$k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{5}{e^2} \text{ e } \lim_{x\to 2^+} \log_2 x - 2\lambda = 1 - 2\lambda$$

$$\frac{5}{e^2} = 1 - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5}{2e^2} + \frac{1}{2}$$

8.

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

$$f(0) = 1 \; e \; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ Como a função f é contínua em $[0, \pi/2]$ e $f(0) \times f(\pi/2) < 0$, posso aplicar o Teorema de Bolzano e concluir que existe um ponto c em $]0, \pi/2[$ tal que $f(c) = 0$.

Um zero da função f é uma solução da equação referida.