UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

Exame de Recurso **19 de Janeiro de 2015**

Tempo: 2h 30 m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em <u>folhas de teste separadas.</u>

Grupo I

(2) **1.** Mostre que a igualdade é verdadeira

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^k} = 3 - \frac{3}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) **2.** Calcule os limites das seguintes sucessões numéricas

a) $\lim \dfrac{1+2+4+\cdots+2^n}{1+3+9+\cdots+3^n}$; **b)** $\lim \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{3}{\sqrt[3]{n^3+p}}$.

(3) **3.** Estude a natureza das séries numéricas e determine o valor da sua soma, se possível:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{3^n}$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{6}{n^2-9}$.

Grupo II

(4) **4.**Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$; b) $\lim_{x\to+\infty} (2x)^{\frac{x+1}{x^2}}$.

(1) **5.**Considere a função definida por:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{kx}, & x < 0 \\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases},$$

onde k é um número real diferente de zero.

Diga, justificando, para que valor de k é a função f prolongável por continuidade ao ponto zero.

(1) **6.**Usando o teorema de Rolle mostre que o polinómio

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

tem no máximo dois zeros em $\mathbb{R}$.

Grupo III

(0.5) **7.** Determine a função $g :]-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que:

$$g''(x) = \frac{1}{2+x}, \quad g'(-1) = 2 \text{ e } g(-1) = 3.$$

(3) **8** Calcule os integrais seguintes:

a) $\int_2^4 \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ b) $\int_2^3 \frac{8x^2+x+1}{x^3-x}dx$

(1) **9.** Seja F a função definida, em $[0, +\infty[$, tal que

$$F(x) = \int_0^x \log(2+t)dt.$$

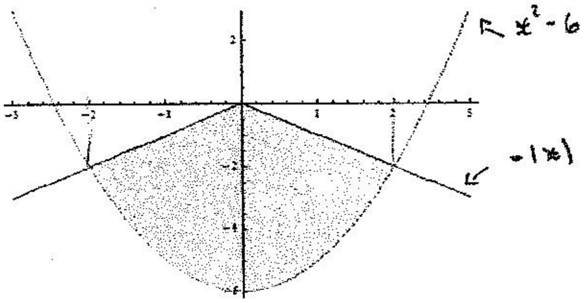
Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) $F(0) = \log(2)$.

b) A função F é crescente em $[0, +\infty[$.

(1,5) **10.** Calcule a área da região plana, representada a sombreado na figura seguinte, delimitada pelos gráficos das funções

$$f(x) = -|x| \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 6.$$



(1) **11.** Encontre o erro nesta resolução e mostre que o integral não é convergente

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

ExRec_19-01-2015