Universidade de Évora
ANÁLISE MATEMÁTICA I

2ªFrequência **2011/12** **21/12/11**

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.
Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.
Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

I

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) := \begin{cases} (x-1)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{se} \quad x < 2, \\ 1 & \text{se} \quad x = 2, \\ \dfrac{\operatorname{arctg}^2(x-2)}{x-2} & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determine os parâmetros a e b, de modo que a função f seja contínua. Justifique bem a resposta.

b) Com os valores dos parâmetros a e b encontrados na alínea a) (quem não resolveu a alínea a) pode considerar $a = b = 0$), determine as derivadas laterais $f'(a^-)$ e $f'(a^+)$.

c) Calcule a função derivada $f'(x)$ em todos os pontos em que a função f é diferenciável.

d) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico desta função no ponto $x = 1$.

2. Usando as propriedades de funções contínuas e diferenciáveis (Teoremas de Bolzano, de Rolle e de Lagrange) mostre que

a) A equação
$$x^7 + 2x^5 + x - 3 = 0$$
tem uma e só uma raíz real.

b) Para quaisquer $a, b \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ têm lugar as desigualdades

$$|a-b| \le |\operatorname{arcsen} a - \operatorname{arcsen} b| < \frac{2}{\sqrt{3}}|a-b|.$$

Justifique bem a resposta.

II

3. Calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x-1}-\frac{4}{(x-1)(x+1)}\right);\qquad b)\ \lim_{x\to\pi}\ \operatorname{sen}(x+\pi)^{\operatorname{sen}(x+\pi)}.$$

4. Considere a função real de variável real $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 10x + 1$.

a) Calcule todas as derivadas da função f até $f^{(5)}$.

b) Prove que $a = 1$ é o único ponto de estacionaridade de f.

c) Justifique a afirmação: $f(1) = -4$ é mínimo local de f.

III

5. Considere a função $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} + 1.$$

Determine o polinómio de Taylor, de 1^a ordem, da função f, no ponto 1.

6. Determine todas as primitivas de cada uma das funções seguintes:

$$a)\ f(x) = x^2\cos x;\qquad b)\ g(x) = e^x\ \sqrt{2-3e^x};$$

$$c)\ h(x) = \frac{x}{(x-3)(x+1)};\qquad d)\ w(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}+(x-1)^2}.$$

7. Considere a função, definida em $]-1,+\infty[$, pela expressão $f''(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Obtenha, se possível:

a) A primitiva que verifica as condições: $f'(0) = f(0) = 1$.

b) A primitiva que verifica as condições: $f'(0) = 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.