UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Análise Matemática I

Exame (2^a Chamada)

2009/2010

Responda aos gurpos I e II em folhas de teste separadas

Grupo I

1. Encontre o *limite superior* e o *limite inferior* da sucessão numérica:

$$x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

2. Estude por quanto a *convergência* as seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right);$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}};$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} n\right)^n;$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n2^n}.$

Na alínea (d) justifique se a série converge *simplesmente* ou *absolutamente*. Para alem disso determine o número de termos que precisamos somar para obter aproximativamente o valor de soma da série com um erro não superior a $0,01$.

3. Considere a função

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

(a) Mostre que $f(x)$ está definida em toda recta numérica e é *estritamente crescente*.

(b) Justifique que f é *invertivel* em $\mathbb{R}$ e determine a sua *inversa* f^{-1}.

(c) Sendo D o *domínio* da função f^{-1} determine o *interior*, a *fronteira* e a *aderência* do conjunto $D \diagdown \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(d) Estude a função $f(x)$ por quanto *concavidade* e *pontos de inflexão*.

4. Usando os *Teoremas de Bolzano* e *de Rolle* mostre que existe um e só um número $x \in]0, 1[$ tal que

$$e^x = \ln(x + 3).$$

Grupo II

1. Calcule os seguintes *limites* (utilizando os métodos apropriados):

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$;

   (b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$;

   (c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.

2. Encontre o valor do parâmetro $a > 0$ tal que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por ramos:

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\frac{x}{a}} \frac{\sin t}{t}\, dt & \text{se} \quad x > a, \\ x^2 - 4x + 4 & \text{se} \quad x \leq a \end{cases}$$

   era *contínua* em $\mathbb{R}$. Justifique que $f(x)$ é *diferenciavel* em todo $x > a$ e calcule o valor da *derivada* $f'(2a)$.

3. Calcule as *famílias de primitivas* especificando o método que está a utilizar:

   (a) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x}\, dx$ (**Sugestão**: faça a *substituição* $\sqrt{1 + \ln x} = t$);

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 2x + 2}\, dx$.

4. Determine o *volume* e a *área de superfície lateral* do *sólido de revolução* obtido com geração dá parábola cúbica $3y = x^3$ em torno da eixe dos xx's ($x \in [1, 2]$). Faça o respectivo desenho.

BOM TRABALHO!