Análise Matemática I recuperação

2011/2012

Universidade de Évora

1^a frequência: 23–03-2012 **duração:** 2h30m

Cada grupo deve ser resolvido em folhas de teste separadas.

Deve numerar as folhas de teste que entrega.

Não é permitido o uso de calculadoras, nem qualquer equipamento electrónico.

Justifique cuidadosamente cada resposta.

Grupo I- Sucessões

1. Calcule caso existam ou mostre que não existem os limites das seguintes sucessões:

   (a) $u_n = \dfrac{2^{2n} - 3^n}{(-2)^n - 3^{2n}}$;

   (b) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$;

   (c) $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{2n^3+k}}$;

   (d) $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln (2n)}$.

2. Considere a seguinte sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \text{ para } n \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Mostre que $a_n > 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostre que $\{a_n\}$ é decrescente;

   (c) Justifique que $\{a_n\}$ é convergente e calcule o seu limite.

3. Usando a definição de limite mostre que se $\{u_n\}$ é convergente então

$$L = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1}.$$

Grupo II- Séries

4. Calcule a soma das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-2n}3^{1+n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}} - (n+2)^{\frac{1}{n+2}}$.

5. Determine a natureza das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{\sqrt{9n^2+6n+1}}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2+3}}{n+4}$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n^2+2}{n^2+5}\right)^n$.

6. Diga justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Se $\{u_n\}$ é uma sucessão limitada e $\{v_n\}$ é um infinitésimo então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ é convergente;

   (b) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$ então a série é $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^n$ é divergente;

   (c) Se $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ para qualquer $n \geq 17$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Bom Trabalho!