UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

2^a Frequência 20 de Dezembro de 2013

Tempo: 2h Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em folhas de teste separadas.

Grupo I

(3) **1.** Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+1)}$; **b)** $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - 16x^4}}$.

(2) **2.** Resolva a seguinte equação diferencial, sujeita à condição dada:

$$f'(x) = e^x \cos x\,, \qquad f(0) = 0\,.$$

(2) **3.** Calcule todas as primitivas da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-5}\,, \quad \text{usando a substituição} \quad t = \sqrt{x-1}.$$

Grupo II

(2) **4.**Determine uma função f tal que:

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 6x^5}{4 + x^6}.$$

(4) **5.**Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^e 3x^5 \log(x^3)dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 + 3\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}dx$

(Sugestão: utilize a substituição $t = \operatorname{sen} x$)

Grupo III

(2,5) **6.** Considere a função definida por

$$\Phi(x) = \int_{x^3}^{8} \frac{1}{t^2 + 1}dt.$$

a) Determine os domínios de $\Phi(x)$ e de $\Phi'(x)$.

b) Calcule $\Phi(2)$ e indique, justificando, o sinal de $\Phi(3)$.

c) Estudar $\Phi(x)$ quanto à monotonia e existência de extremos.

(2,5) **7.** Calcule a área compreendida entre o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & , \quad x > 1, \end{cases}$$

e o eixo das abcissas.

(2) **8.** Indique, justificando, a natureza do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{3 + \operatorname{sen} x}{1 + x^2}dx.$$

FZ_20-12-2013

1. Calcule todas as primitivas de:

a. $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$

$$\frac{2x^2 - 1x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+1)} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -B + C = -1 \\ A - C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

b. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - 16x^4}}\,dx$

A primitiva é imediata. É necessário utilizar a fórmula do arc-seno $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4 - 16x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{4(1 - 4x^4)}}\,dx = \frac{1}{2 \times 4}\int \frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2)^2}}\,dx = \frac{1}{8}\operatorname{arcsen} 2x^2 + c$$

2. Resolva a seguinte equação diferencial, sujeita à condição

$$f'(x) = e^x \cos x, \qquad f(0) = 0$$

Primitivação por partes $\begin{cases} u' = e^x & \rightarrow \quad u = e^x \\ v = \cos x & \rightarrow \quad v' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \times \cos x - \int e^x \times -\operatorname{sen} x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

De novo primitivando por partes … $\begin{cases} u' = e^x & \rightarrow \quad u = e^x \\ v = \operatorname{sen} x & \rightarrow \quad v' = \cos x \end{cases}$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx\right) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - \int e^x \cos x\,dx$$

Agora passamos todas as primitivas para o lado esquerdo …

$$\int e^x \cos x\,dx + \int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \Leftrightarrow 2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + c.$$

Finalmente utilizamos a pista para encontrar a constante c.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^0(\cos 0 + \operatorname{sen} 0)}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) - 1}{2}.$$

3. Calcule todas as primitivas de:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-5}}$$

Para o cálculo das primitivas vou utilizar a substituição $\begin{cases} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2tdt \end{cases}$. É necessário dividir os polinómios…

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x-5} dx = \int \frac{t}{t^2+1-5} 2tdt = \int \frac{2t^2}{t^2-4} dt = \int 2 + \frac{8}{t^2-4} dt$$

$$\frac{8}{t^2-4} = \frac{8}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{At+2A+Bt-2B}{t^2-4} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$\int 2 + \frac{8}{t^2-4} dt = \int 2 + \frac{2}{t-2} - \frac{2}{t+2} dt = 2t + 2\log(t-2) - 2\log(t+2) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x-1} + \log\left(\sqrt{x-1}-2\right) - \log\left(\sqrt{x-1}+2\right)\right) + c.$$

4. Determine uma primitiva de

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{6x^2 - 6x^5}{4 + x^6}}$$

$$\int \frac{6x^2-6x^5}{4+x^6} dx = \int \frac{6x^2}{4+x^6} dx - \int \frac{6x^5}{4+x^6} dx = \frac{6}{3} \int \frac{3x^2}{2^2+(x^3)^2} dx - \int \frac{6x^5}{4+x^6} dx =$$

$$= \frac{2}{2} \arctan\left(\frac{x^3}{2}\right) - \log(4+x^6).$$

5. Calcule os seguintes integrais

a. $\displaystyle\int_1^e \boldsymbol{3x^5 \log x^3 \, dx}$

$$\text{Por partes} \begin{cases} u' = 3x^5 & \rightarrow \quad u = \frac{x^6}{2} \\ v = \log x^3 & \rightarrow \quad v' = \frac{3}{x} \end{cases}$$

$$\int 3x^5 \log x^3 \; dx = \frac{x^6}{2} \log x^3 - \int \frac{x^6}{2} \frac{3}{x} \; dx = \frac{x^6}{2} \log x^3 - \frac{3}{2} \int x^5 \; dx = \frac{x^6}{2} \log x^3 - \frac{x^6}{4}$$

$$\int_1^e 3x^5 \log x^3 \, dx = \left[\frac{x^6}{2} \log x^3 - \frac{x^6}{4}\right]_1^e = \frac{e^6}{2} \log e^3 - \frac{e^6}{4} - \left(\frac{1^6}{2} \log 1^3 - \frac{1^6}{4}\right) = \frac{5e^6}{4} + \frac{1}{4}.$$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+3\,\mathrm{sen}\,x+\sin^2 x}dx$

Vou utilizar a substituição $\begin{cases} \mathrm{sen}\,x = t \\ x = \mathrm{arcsen}\,t \\ dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{cases}$. Atenção que $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$$\int \frac{\cos x}{2+3\,\mathrm{sen}\,x+\mathrm{sen}^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+3t+t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1}{2+3t+t^2}dt$$

$$\frac{1}{2+3t+t^2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2} = \frac{At+2A+Bt+B}{2+3t+t^2} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{2+3t+t^2}dt = \int \frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}dt = \log(t+1)-\log(t+2) = \log(\mathrm{sen}\,x+1)-\log(\mathrm{sen}\,x+2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+3\,\mathrm{sen}\,x+\sin^2 x}dx = \left[\log(\mathrm{sen}\,x+1)-\log(\mathrm{sen}\,x+2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \log\left(\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}+1\right)-\log\left(\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}+2\right)-(\log(\mathrm{sen}\,0+1)-\log(\mathrm{sen}\,0+2)) =$$

$$= \log 2-\log 3-\log 1+\log 2 = 2\log 2-\log 3.$$

6. Considere a função definida por

$$\boldsymbol{\Phi(x) = \int_{x^3}^{8} \frac{1}{t^2+1}dt}$$

a. Determine o domínio de Φ e Φ'.

Como não existem restrições na variável x, o domínio é $D_\Phi = \mathbb{R}$.

Para determinar Φ' é necessário aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

$$\Phi'(x) = 8' \times \frac{1}{8^2+1} - (x^3)' \times \frac{1}{(x^3)^2+1} = \frac{-3x^2}{x^6+1}$$

Aqui também não existem restrições na variável x, o domínio é $D_{\Phi'} = \mathbb{R}$.

b. Calcule $\Phi(2)$ e indique o sinal de $\Phi(3)$.

$$\Phi(2) = \int_{2^3}^{8} \frac{1}{t^2+1}dt = \int_8^8 \frac{1}{t^2+1}dt = 0.$$

$\displaystyle\Phi(3) = \int_{3^3}^{8} \frac{1}{t^2+1}dt = \int_{27}^{8} \frac{1}{t^2+1}dt = -\int_8^{27} \frac{1}{t^2+1}dt < 0$ Pois a função integranda é positiva.

c. Estudar Φ quanto à monotonia e extremos.

$$\Phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2}{x^6+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Φ'	$-$	0	$-$
Φ	decresce	----	decresce

A função é decrescente no seu domínio.

A função não tem extremos.

7. Calcule a área compreendida entre o eixo das abcissas e o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Área} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

Estes são integrais impróprios. O primeiro é de 2ª espécie e o "problema" está no 0. O segundo é de 1ª espécie.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x^{-1/2}dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(2\sqrt{1}-2\sqrt{a}\right) = 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to +\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to +\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to +\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right) = 1$$

$\therefore$ A área é $2 + 1 = 3$.

8. Indique, justificando a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{1+x^2}dx.$$

Posso utilizar um critério que diz que o integral anterior tem a mesma natureza que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+\operatorname{sen} n}{1+n^2}$$

Agora esta é uma série de termos positivos. O seu termo geral é menor que $\frac{4}{n^2}$, que é o termo geral de uma série de Dirichlet que converge ($\alpha = 2 > 1$).

$$\frac{3 + \operatorname{sen} n}{1 + n^2} \leq \frac{4}{1 + n^2} < \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{ CONVERGE}$$

∴ Por comparação, a série em causa converge. Assim o integral (que tem a mesma natureza) também converge.