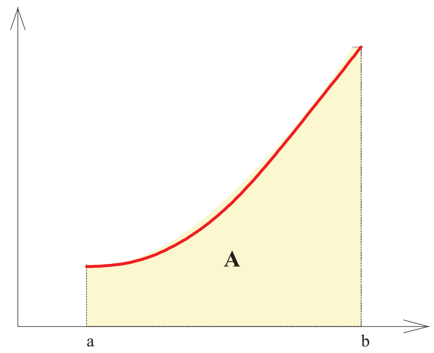
Chapter 2

Integração

Historicamente, as ideias que estiveram na origem do Cálculo Integral precederam de muitos séculos o Cálculo Diferencial. Entre os precursores da moderna teoria da integração podemos destacar Eudoxos (Século IV A.C.) que parece ter sido o criador do método da exaustão. Em termos intuitivos, este método consiste em aproximar uma dada figura geométrica, cujo comprimento, área ou volume se pretende determinar por figuras "inscritas" ou "circunscritas" de medidas conhecidas, tomando-se depois o limite dessas medidas para a medida da figura dada. Contudo, só no século XIX foram elaboradas teorias baseadas em definições rigorosas do conceito de integral.

2.1 Motivação e definição de integral

Uma das vias mais naturais para motivar o conceito de integral consiste em recorrer à noção intuitiva de área. Consideremos uma função f limitada e não negativa no intervalo $[a, b]$. O integral de f pode interpretar-se intuitivamente como sendo a área da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo do x e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, ou seja, $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$.



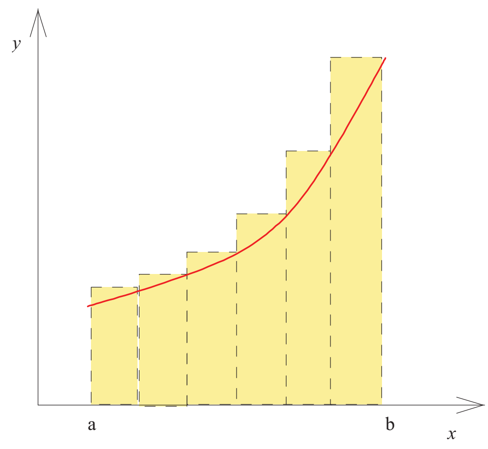
Questão: Como determinar a área da região A?

Começamos por aproximar a área da região A pela área do rectângulo de largura $b-a$ e altura M onde

$$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

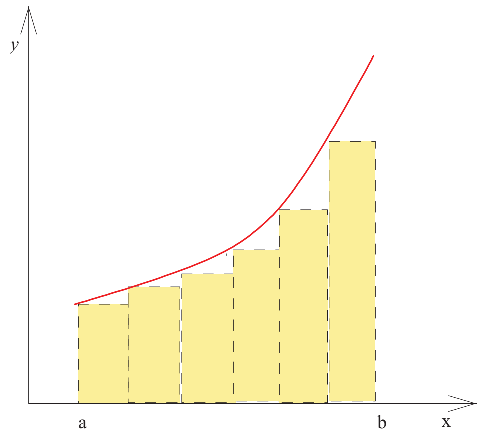
Note que sabemos que o supremo existe porque f é limitada.

Para obtermos uma melhor aproximação poderíamos decompôr o intervalo $[a, b]$ num número finito de subintervalos $[a, x_1], \ [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, b]$ (com $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$). Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ determinamos o supremo de f e aproximamos a área da figura dada pela soma dos rectângulos de altura $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ e base $x_i - x_{i-1}$.



Soma superior de Darboux

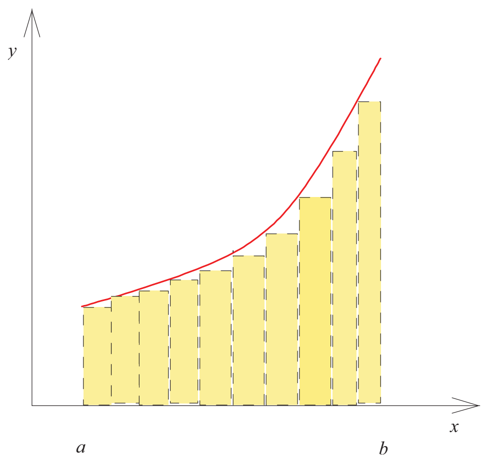
Analogamente poderíamos fazer uma aproximação por defeito considerando o ínfimo de f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.



Soma inferior de Darboux

Intuitivamente, somos levados a pensar que se introduzíssemos mais pontos no intervalo $[a, b]$ o valor aproximado por excesso diminuiria e o valor aproximado por defeito aumentaria.

Quando a largura de cada rectângulo se torna infinitesimamente pequena "parece" obtermos a área pretendida.



As próximas definições e os resultados obtidos tornam mais rigorosa a nossa intuição e demonstram a sua veracidade.

Definição 2.1 *Seja $[a, b]$ um intervalo com $b > a$. Uma* partição *de $[a, b]$ é um conjunto de pontos $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ onde $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_i \in \,]a, b[$ para qualquer $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Notação 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada partição P de $[a,b]$ denotamos*

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

onde $i \in \{1, \ldots, n\}$.

O conjunto de todas as partições do conjunto $[a,b]$ denota-se por $\mathcal{P}([a,b])$.

Definição 2.3

a) *Chamamos* soma inferior de Darboux *da função f relativamente à partição $P \in \mathcal{P}([a,b])$, ao número*

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

b) *Chamamos* soma superior de Darboux *da função f relativamente à partição $P \in \mathcal{P}([a,b])$, ao número*

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

c) *Chama-se* integral inferior de Darboux *de f em $[a,b]$ ao número*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} s(f,P). \tag{2.1}$$

d) *Chama-se* integral superior de Darboux *de f em $[a,b]$ ao número*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} S(f,P). \tag{2.2}$$

Theorem 2.4 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $b > a$ é limitada em $[a,b]$ então os integrais superior e inferior existem sempre.*

Demonstração:

Se f é limitada então existem dois números $m,\ M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ em $[a,b]$ e portanto

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m (x_i - x_{i-1}) = m(x_n - x_0) = m(b-a).$$

Analogamente é fácil ver que **(exercício)**

$$S(f,P) \leqslant M(b-a).$$

Assim

$$m(b-a) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant M(b-a).$$

Ou seja, os conjuntos

$$\underline{S} = \{s(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

e

$$\overline{S} = \{S(f,P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$$

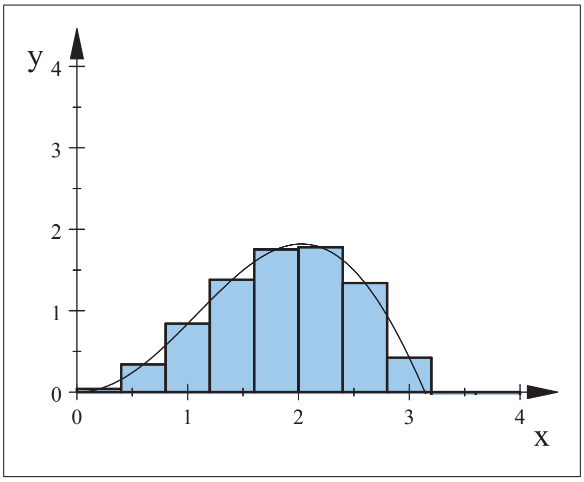
são limitados. Logo pelo princípio do supremo admitem ínfimo e supremo. Pela definição de integral superior e integral inferior de Darboux (ver (2.1) e (2.2)), concluimos que existem $\underline{\int}_a^b f(x)\ dx$ e $\overline{\int}_a^b f(x)\ dx$.

■

Nota 2.5 *Se em vez de tomarmos o supremo e o ínfimo em cada subintervalo tomarmos um ponto arbitrário,* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *então a soma que obtemos é designada por* soma de Riemann *e dada por*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Na figura abaixo indicamos uma soma de Riemann da função $f(x) = x \operatorname{sen} x$



Definição 2.6 *Uma função diz-se* Riemann integrável *se os integrais superior e inferior de Darboux existem e são iguais.*

Notação 2.7 *O* integral de Riemann *de* f *no intervalo* $[a,b]$ *denota-se por*

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

O intervalo $[a,b]$ *chama-se* intervalo de integração*. Aos pontos* a *e* b*, chamam-se* extremos de integração*. A variável* x *é designada por* variável de integração.

Definição 2.8 *Um refinamento da partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição Q de $[a,b]$ tal que $P \subset Q$. Neste caso dizemos que Q é* <u>mais fina</u> *que P.*

Exemplo 2.9 *Seja $I = [0,1]$ e $P = \{0;\ 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1\}$. Se tomarmos $Q := P \cup \{0,5\}$ obtemos também uma partição de $[0,1]$ e $P \subset Q$. Logo Q é mais fina que P.*

O próximo teorema diz-nos que á medida que refinamos uma partição as somas inferiores de Darboux crescem e as somas superiores de Darboux decrescem.

Theorem 2.10 *Se P e Q são duas partições de $[a,b]$ e $P \subset Q$ então*

$$\begin{aligned} s(f,P) &\leqslant s(f,Q) \\ S(f,P) &\geqslant S(f,Q). \end{aligned}$$

Demonstração: Basta verificarmos o que acontece se a partição Q tiver mais um ponto que a partição P. Isto é,

$$Q = P \cup \left\{x'\right\}$$

onde $x' \in]x_{i-1}, x_i[$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$

Assim na soma inferior de Darboux, a parcela $m_i(x_i - x_{i-1})$ será substituída pela soma $m_i'(x' - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x')$, onde

$$m_i' = \inf_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x) \qquad \text{e} \qquad m_i'' = \inf_{x \in [x', x_i]} f(x).$$

Como $m_i \leqslant m_i'$ e $m_i \leqslant m_i''$ então

$$\begin{aligned} m_i(x_i - x_{i-1}) &= m_i\left(x_i - x' + x' - x_{i-1}\right) = m_i\left(x_i - x'\right) + m_i\left(x' - x_{i-1}\right) \\ &\leqslant m_i''\left(x_i - x'\right) + m_i'\left(x' - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Logo

$$s(f,P) \leqslant s(f,Q).$$

A demonstração da desigualdade relativa às somas superiores é análoga e fica como exercício.

■

Theorem 2.11 *Se f é limitada em $[a,b]$ então*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

Demonstração:

Sejam P_1 e P_2 duas partições quaisquer do intervalo $[a,b]$. Se designarmos $P_{12} = P_1 \cup P_2$ então P_{12} é mais fina que P_1 e mais fina que P_2. Pelo resultado anterior

$$s(f,P_1) \leqslant s(f,P_{12}) \leqslant S(f,P_{12}) \leqslant S(f,P_2).$$

Logo

$$s(f,P_1) \leqslant S(f,P_2).$$

Fixando P_2 e tomando o supremo entre todas as partições $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tem-se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx \leqslant S(f,P_2).$$

Tomando o ínfimo entre todas as partições $P \in \mathcal{P}([a,b])$ obtém-se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\ dx.$$

■

Theorem 2.12 *Uma função f, limitada em $[a,b]$ é Riemann Integrável neste intervalo se e só se*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b]) : \overline{S}(f,P_\varepsilon) - \underline{S}(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demonstração: Suponhamos que f é Riemann Integrável em $[a,b]$. Então

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ dx = \overline{\int_a^b} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Logo

$$\sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} \underline{S}(f,P) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Por definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_1 de $[a,b]$ tal que

$$\underline{S}(f,P_1) > \int_a^b f(x)\ dx - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente por definição de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_2 de $[a,b]$:

$$\overline{S}(f,P_2) < \int_a^b f(x)\ dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se tomarmos P_ε qualquer partição mais fina que P_1 e P_2, ou seja, $P_\varepsilon \supseteq P_1 \cup P_2$. Então pelo teorema anterior

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P_\varepsilon) &\leqslant \overline{S}(f,P_2) < \int_a^b f(x)\ dx + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \underline{S}(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{S}(f,P_1) + \varepsilon \\
&\leqslant \underline{S}(f,P_\varepsilon) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo

$$\overline{S}\,(f,P_\varepsilon)-\underline{S}\,(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$$

como pretendemos.

Reciprocamente, como para qualquer partição P de $[a,b]$ se tem

$$\underline{S}\,(f,P)\leqslant\underline{\int_a^b} f\leqslant\overline{\int_a^b} f\leqslant\overline{S}\,(f,P)$$

então

$$0\leqslant\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\leqslant\overline{S}\,(f,P)-\underline{S}\,(f,P)\,.$$

Por hipótese, dado $\varepsilon>0$ sabemos que existe uma partição de $[a,b]\,,\ P_\varepsilon$, tal que

$$\overline{S}\,(f,P_\varepsilon)-\underline{S}\,(f,P_\varepsilon)<\varepsilon.$$

Então

$$0\leqslant\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\leqslant\overline{S}\,(f,P_\varepsilon)-\underline{S}\,(f,P_\varepsilon)<\varepsilon.$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrariamente pequeno então conclui-se que

$$\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b}=0.$$

Ou seja, f é Riemann Integrável.

$\blacksquare$

Exemplo 2.13 *Considere a função de Dirichlet restringida ao intervalo* $[1,3]$ *e definida por*

$$f\,(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in\mathbb{Q},\\ 0 & se\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Calculando as somas inferiores e superiores de Darboux obtemos

$$\begin{aligned} s\,(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}0\,(x_i-x_{i-1})=0,\\ S\,(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}1\,(x_i-x_{i-1})=3-1=2.\end{aligned}$$

Logo

$$\underline{\int_1^3} f\,(x)\ dx=0\qquad e\qquad \overline{\int_1^3} f\,(x)\ dx=2.$$

Ou seja, f *não é Riemann integrável.*

Exercicio 2.14 *Seja $f(x) = x$ onde $x \in [0,2]$. Considerando P uma partição que divide o intervalo $[0,2]$ em n subintervalos de comprimentos iguais, i.e.,*

$$P = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n}\right\}.$$

a) Determine as somas superiores e inferiores de Darboux.

b) Determine $\int_0^2 x\ dx$.

Resolução:

Temos

$$x_i - x_{i-1} = \frac{2}{n}$$

e

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_{i-1} = \frac{2(i-1)}{n}, \\ M_i &= \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \frac{2i}{n}. \end{aligned}$$

Logo

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n}\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\frac{n-1}{2}n = 2 - \frac{1}{n},$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n}\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\frac{n+1}{2}n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Note que utilizámos a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, obtida no capítulo sobre sucessões.

Assim

$$\underline{\int_0^2} x\ dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{S}(f,P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$$

e

$$\overline{\int_0^2} x\ dx = \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}(f,P) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Logo

$$\int_0^2 x\ dx = 2.$$

□

Tendo em vista os dois últimos exemplos, será natural perguntar quando é que uma função é Riemann integrável.

Os dois próximos teoremas apresentam-nos uma condição suficiente para a integrabilidade.

Theorem 2.15 *Se f é contínua em $[a,b]$ então f é Riemann integrável neste intervalo.*

Omitimos a demonstração deste teorema porque utiliza a noção de continuidade uniforme que está fora do âmbito desta disciplina.

Theorem 2.16 *Se f é monótona em $[a,b]$ então f é Riemann integrável.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, suponhamos que f é monótona crescente. Então

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad M_i = f(x_i).$$

Sejam $\varepsilon > 0$ e $P \in \mathcal{P}([a,b])$ tais que

$$x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Note que, sendo f monótona, se $f(a) = f(b)$ então f seria constante no intervalo $[a,b]$, não havendo por isso nada a demonstrar. Logo podemos assumir que $f(a) < f(b)$.

Temos

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo pelo teorema anterior f é Riemann integrável.

■

Apresentamos de seguida algumas propriedades do integral de Riemann.

Proposição 2.17 *Sejam f e g funções Riemann Integráveis em $[a,b]$ então:*

a) a função $c \cdot f$ é Riemann integrável em $[a,b]$ e tem-se

$$\int_a^b cf(x)\ dx = c \int_a^b f(x)\ dx \qquad \forall\, c \in \mathbb{R};$$

b) a função $f + g$ é Riemann integrável e

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx;$$

c) se $f \leqslant g$ *então*

$$\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx;$$

d) seja $c \in\ ]a,b[$ *então* f *é Riemann integrável nos intervalos* $[a,c]$ *e* $[c,b]$ *e*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx;$$

e)

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx;$$

f) para qualquer $c \in [a,b]$

$$\int_c^c f(x)\ dx = 0;$$

g) se $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant M(b-a).$$

h) se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *em* $[a,b]$ *e* ϕ *é contínua em* $[m,M]$ *então* $\phi \circ f$ *é Riemann integrável em* $[a,b]$.

i) a função $|f|$ *é Riemann integrável em* $[a,b]$ *e*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

Nota 2.18 *A recíproca da alínea i) não é válida. Isto é, existem funções* f *tais que* $|f|$ *é Riemann integrável, mas* f *não é.*

Basta considerar por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

A função f *não é Riemann integrável, mas* $|f(x)| \equiv 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. *Logo*

$$\int_a^b |f(x)|\ dx = b - a$$

$\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

2.2 A integração e a primitivação

O próximo teorema estabelece a relação entre duas áreas essenciais da Análise Matemática: o cálculo diferencial e o cálculo integral. Isaac Barrow, Professor de Newton apercebeu-se que a integração e a diferenciação são processos inversos. Foi Newton e Leibniz que exploraram esta relação e desenvolveram técnicas que lhes permitiram calcular áreas e integrais de forma fácil sem terem de calcular limites de somas, como fizémos anteriorment.

Theorem 2.19 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja f Riemann integrável em $[a,b]$. Então a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$$

é contínua em $[a,b]$. Além disso, se f for contínua em $x_0\in\,]a,b[$ então F é diferenciável em x_0 e tem-se

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Demonstração:
Parte 1- Vamos demonstrar que F é contínua no ponto $x_0\in[a,b]$, ou seja, dado $\varepsilon>0$ arbitrário precisamos de encontrar $\delta>0$ tal que

$$|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

Temos

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x_0)| &= \left|\int_a^x f(t)\ dt-\int_a^{x_0} f(t)\ dt\right|\\ &= \left|\int_a^x f(t)\ dt-\left(\int_a^x f(t)\ dt+\int_x^{x_0} f(t)\ dt\right)\right|\\ &= \left|\int_x^{x_0} f(t)\ dt\right|.\end{aligned}$$

Como f é limitada então existe $M>0$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ para qualquer $x\in[a,b]$. Pela Proposição 2.17 g) obtém-se

$$\left|\int_x^{x_0} f(t)\ dt\right|\leqslant M|x-x_0|.$$

Assim, dado $\varepsilon>0$ arbitrário basta considerarmos $\delta<\frac{\varepsilon}{M}$ para obtermos

$$|F(x)-F(x_0)|\leqslant M|x-x_0|<M\delta<\varepsilon,$$

ou seja F é contínua em x_0.

Parte 2- Vamos mostrar que para $x_0 \in [a,b[\,,\ F'_+(x_0) = f(x_0)\,,$ isto é,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,.$$

Pela definição de limite isto equivale a dizer que dado $\varepsilon > 0$ queremos arranjar $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ x \in [a,b] : x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt - f(x_0)\right| \\
&= \frac{1}{x - x_0}\left|\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\ dt\right| \\
&\underset{\text{Prop. 2.17 g)}}{\leqslant} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\ dt.
\end{aligned}$$

Por hipótese, f é contínua em x_0, isto é,

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \overline{\delta} > 0 : |x - x_0| < \overline{\delta} \Longrightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se tomarmos $\delta = \overline{\delta}$ obtemos

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon(x - x_0)}{x - x_0} = \varepsilon.$$

Logo $F'_+(x_0) = f(x_0)\,.$ Analogamente se demonstraria que $F'_-(x_0) = f(x_0)$ **(exercício)**. Concluindo-se que

$$F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

$\blacksquare$

Nota 2.20 *Uma consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo é que toda a função f contínua em $[a,b]$ é primitivável neste intervalo e uma sua primitiva é dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Theorem 2.21 (Regra de Barrow) *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e seja Pf uma primitiva qualquer de f então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = Pf(b) - Pf(a)\,. \tag{2.3a}$$

Demonstração: *Como vimos a função* $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ *é uma primitiva de* f *em* $[a,b]$. *Sendo* F *também uma primitiva de* f *então* Pf *e* F *diferem de uma constante. Digamos*

$$Pf(b) - Pf(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = \int_a^b f(t)\ dt - \int_a^a f(t)\ dt = \int_a^b f(t)\ dt.$$

■

A fórmula (2.3a) é designada por fórmula de Barrow e neste texto será escrita na forma

$$\int_a^b f(t)\ dt = [Pf(x)]_a^b.$$

Assim o Teorema Fundamental do Cálculo forneceu-nos um método útil para calcular o integral de uma determinada função f primitivável.

Em vez de considerarmos partições e trabalharmos com as somas de Darboux, ou somas de Riemann, se soubermos que a função f é primitivável, calcular o seu integral no intervalo $[a,b]$ resume-se a determinar uma primitiva de f e fazer a sua variação em $[a,b]$

Exemplo 2.22 *Calcule* $\int_0^1 x\ dx.$

Temos

$$\int_0^1 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2.23 *Calcule* $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ dx.$

Note que se $u = \operatorname{arctg} x$ então $u' = \frac{1}{1+x^2}$ e $P(u'u) = \frac{u^2}{2}$. Logo

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\ dx = \left[\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Exemplo 2.24 *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\ dx.$

Se $u = \operatorname{tg} x$ então $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $P\left(u'u^2\right) = \frac{u^3}{3}$. Logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \left[\frac{(\operatorname{tg} x)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3}{3} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{27}.$$

2.3 Integração por partes

Theorem 2.25 *Sejam u, $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções com derivadas Riemann integráveis em $[a,b]$ então*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\ dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\ dx. \tag{2.4}$$

Demonstração:

Pela fórmula da derivação do produto temos

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)\,.$$

Logo

$$\int_a^b [u(x)\, v(x)]'\ dx = \int_a^b u'(x)\, v(x)\ dx + \int_a^b u(x)\, v'(x)\ dx.$$

Como a primitiva da derivada de uv é uv, aplicando a fórmula de Barrow ao membro esquerdo da igualdade anterior vem

$$[u(x)\, v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)\, v(x)\ dx + \int_a^b u(x)\, v'(x)\ dx.$$

Logo obtém-se (2.4).

■

Exemplo 2.26 *Seja*

$$\int_0^1 xe^x\ dx.$$

Então

$$\begin{aligned} u &= x \Longrightarrow u' = 1 \\ v' &= e^x \Longrightarrow v = P(e^x) = e^x. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x\ dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx \\ &= e - 0 - [e^x]_0^1 \\ &= e - e + e^0 = 1. \end{aligned}$$

2.4 Integração por substituição

Theorem 2.27 *Se se verifica pelo menos uma das condições*

1. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ é diferenciável com φ' Riemann integrável em $[c,d]$;*

2. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann integrável e $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ monótona com derivada φ' Riemann integrável em $[c,d]$;*

então tem-se

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx = \int_c^d (f\circ\varphi(y))\cdot\varphi'(y)\ dy. \tag{2.5}$$

Demonstração:

Vamos apenas assumir 1.

Se F é uma primitiva de f em $[a,b]$ então

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\ dx &= [F(x)]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) \\ &= (F\circ\varphi)(d) - (F\circ\varphi)(c) \\ &= [F\circ\varphi(x)]_c^d = \int_c^d (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)\ dx.\end{aligned}$$

A última igualdade deve-se ao Teorema da derivação da função composta onde

$$(F\circ\varphi)' = \left(F'\circ\varphi\right)\varphi' = (f\circ\varphi)\,\varphi'.$$

Para completar a demonstração teríamos de assumir apenas 2 e obter (2.5).

Deixamos ao cuidado do aluno a busca desta demonstração que pode facilmente ser encontrada nas referências bibliográficas.

■

Exemplo 2.28 *Seja*

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx.$$

Fazendo a substituição $t=\sqrt{x}$ então

$$x = t^2 \Longrightarrow dx = 2t\ dt.$$

Relativamente aos extremos de integração temos

$$\begin{aligned}\text{se } x &= 1 \text{ então } t = \sqrt{1} = 1, \\ \text{se } x &= 2 \text{ então } t = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+1}{t} 2t\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2+1\right)\ dt \\ &= 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}-\frac{1}{3}-1\right) \\ &= 2\frac{5\sqrt{2}-4}{3}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.29 *Seja*

$$\int_0^1 \frac{e^x}{3+4e^x}\ dx.$$

Fazendo a substituição $e^x = t$ *então*

$$x = \log t \ \ e \ dx = \frac{1}{t} dt.$$

Relativamente aos extremos de integração temos

$$\begin{aligned} se\ x &= 0 \ \text{então}\ t = e^0 = 1, \\ se\ x &= 1 \ \text{então}\ t = e.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{3+4e^x}\ dx &= \int_1^e \frac{1}{3+4t}\ dt = \frac{1}{4}\left[\log\left(3+4t\right)\right]_1^e \\ &= \frac{1}{4}\log\left(\frac{3+4e}{7}\right).\end{aligned}$$

Exemplo 2.30 *Seja*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}\ dx.$$

A função integranda pode ser vista como uma função que depende de $\operatorname{sen} x$ *multiplicada pela função* $\cos x$. *Na tabela de substituições aconselháveis na secção de primitivas por substituição sugere-se a substituição* $x = \operatorname{arcsen} t$. *Logo*

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt$$

e os extremos de integração correspondentes são

$$\begin{aligned} x &= 0 \Longrightarrow t = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ x &= \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.\end{aligned}$$

Observe que $t = \operatorname{sen} x$ *e pela fórmula fundamental da trigonometria* $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. *Assim substituindo vem*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{6-5t+t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t-3)}\,dt.\end{aligned}$$

Recordando a primitivação de funções racionais, vamos decompôr a fracção $\frac{1}{(t-2)(t-3)}$ *em fracções simples obtendo-se*

$$\frac{1}{(t-2)(t-3)} = \frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{t-3}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t-2}\,dt\\ &= \left[\log|t-3|\right]_0^1 - \left[\log(t-2)\right]_0^1\\ &= \log 2 - \log 3 - \log 1 + \log 2\\ &= 2\log 2 - \log 3.\end{aligned}$$

□

Com o Teorema Fundamental do Cálculo torna-se fácil derivar directamente funções do tipo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

onde f é contínua.

Exemplo 2.31 *Seja*

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t}\ dt.$$

Como $f(t) = \sqrt{t}$ *é contínua em* $\mathbb{R}_0^+$ *então pelo Teorema Fundamental do Cálculo* F *é diferenciável em* $\mathbb{R}^+$ *e*

$$F'(x) = \sqrt{x}.$$

Theorem 2.32 *Se* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e* u *e* v *diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *então*

$$F(x) := \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ *e*

$$F'(x) = f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))\, u'(x) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: é uma consequência imediata do Teorema Fundamental do Cálculo e da regra da derivação da função composta.

■

Exemplo 2.33 *Seja*

$$F(x) = \int_x^{e^x} t\ dt.$$

Como $f(t) = t$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *então* F *é diferenciável e*

$$F'(x) = e^x e^x - x = e^{2x} - x.$$

2.5 Teoremas da média do cálculo integral

É fácil calcular o valor médio de um número finito de pontos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Mas como calculamos a temperatura média durante um dia? Se $T(t)$ representar a função temperatura onde t é o tempo medido em horas e $T(t)$ a temperatura medida em graus centígrados então a temperatura média no intervalo de tempo $[a, b]$ é dada por

$$\overline{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(t)\ dt.$$

Coloca-se a questão se haverá algum instante $c \in [a,b]$ tal que a temperatura neste instante é igual á temperatura média? O próximo teorema diz-nos que isto é verdade para funções contínuas.

Theorem 2.34 (Primeiro Teorema da Média) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe $c \in \left]a,b\right[$:*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx.$$

Demonstração:

A demonstração deste teorema é uma consequência do Teorema do Valor Médio de Lagrange e do Teorema Fundamental do Cálculo.

Seja

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral F é contínua em $[a,b]$. Como f é contínau em $[a,b]$ então f é diferenciável em $\left]a,b\right[$. Logo pelo Teorema de Lagrange existe $c \in \left]a,b\right[$:

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

Sabemos que $F(a) = 0$ e $F'(c) = f(c)$, logo

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a}.$$

$\blacksquare$

Geometricamente o teorema da média diz-nos que a área de uma determinada região limitada por uma função contínua é igual á área de um rectângulo com base de largura $b - a$ e altura $f(c)$.

figura

Theorem 2.35 (Segundo Teorema da Média) *Sejam $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ onde f é contínua e g é Riemann integrável e não muda de sinal em $[a,b]$. Então existe $c \in \left]a,b\right[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\ dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx. \tag{2.6}$$

Demonstração:

Como f é contínua num intervalo limitado e fechado então f tem máximo e mínimo. Logo existem M e m tais que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \forall\ x \in [a,b].$$

Por hipótese supomos, sem perda de generalidade, que $g(x) \geqslant 0$ em $[a,b]$. Então

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Logo

$$m\int_a^b g(x)\ dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\ dx \leqslant M\int_a^b g(x)\ dx.$$

Se $\int_a^b g(x)\ dx = 0$ então $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = 0$ e portanto a igualdade (2.6) é óbvia. Se $\int_a^b g(x)\ dx \neq 0$ então

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} \leqslant M.$$

Logo existe $d \in]m,M[$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx} = d.$$

Como f é contínua, pelo Teorema do Valor Intermédio de Bolzano existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = d$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(c)\int_a^b g(x)\ dx.$$

■

Nota 2.36 *O Primeiro Teorema da Média é uma consequência imediata do segundo tomando* $g \equiv 1$.

Exercicio 2.37 *Encontre o valor médio da função* $f(x) = x^2 + 1$ *no intervalo* $[-1,2]$.

Resolução: Temos

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)\ dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1\right) = 2.$$

□

Exercicio 2.38 *Mostre que a velocidade média de um carro no intervalo de tempo* $[t_1, t_2]$ *é a mesma que a média das velocidades instantâneas.*

Resolução:

Seja $s(t)$ o espaço percorrido. Sabemos que

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{e} \quad v(t) = s'(t).$$

Aplicando o Teorema da média do cálculo integral sabemos que existe $c \in]t_1, t_2[$ tal que

$$v(c) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\ dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\ dt = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_m.$$

□

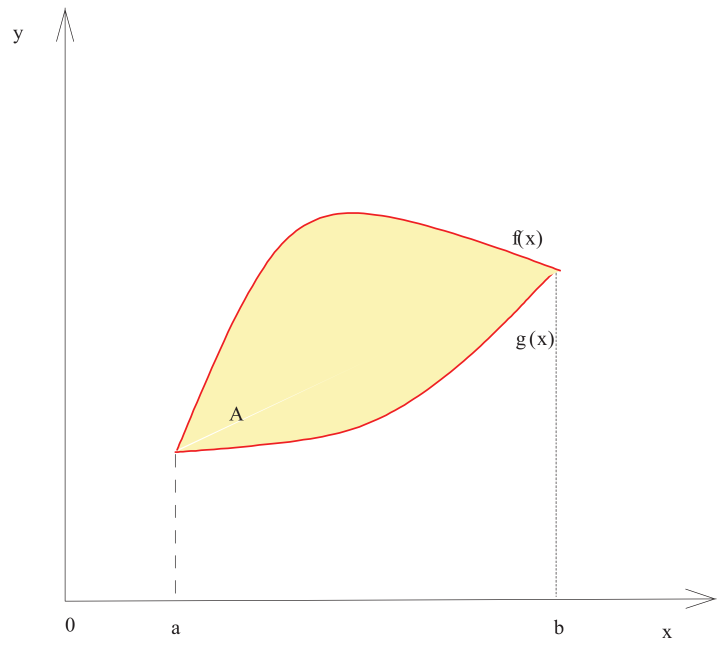
Chapter 3

Aplicações do cálculo integral

Neste capítulo apresentam-se algumas aplicações do cálculo integral. Iremos concentrar-nos apenas no cálculo de áreas entre duas curvas, volumes de sólidos de revolução, comprimentos de arcos de curvas, áreas de superfícies de revolução.

3.1 Cálculo de áreas

Considere a região A que se situa entre duas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as linhas verticais $x = a$ e $x = b$ onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$.



A área representada na figura é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$

Exercicio 3.1 *Determine a área da região limitada superiormente por* $y = e^x$*, limitada inferiormente por* $y = x$ *e limitada lateralmente pelas rectas verticais* $x = 0$ *e* $x = 1$*.*

Resolução:

A área de A é dada por

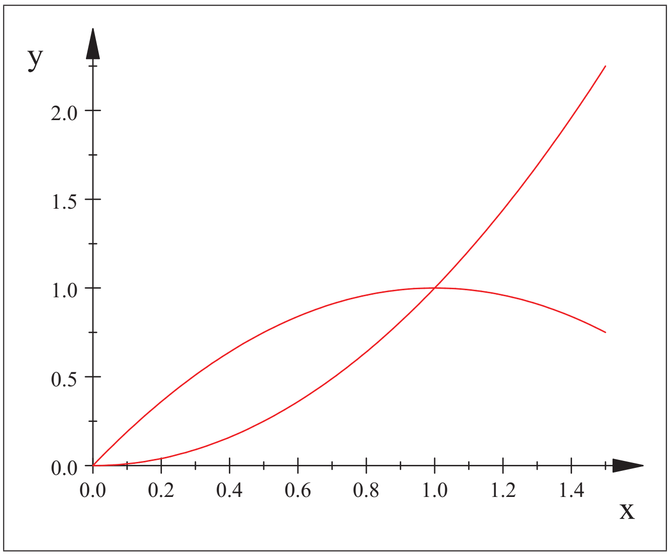
$$\int_0^1 (e^x - x)\ dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}.$$

□

Exercicio 3.2 *Determine a área da região limitada pelas parábolas* $y(x) = x^2$ *e* $z(x) = 2x - x^2$*.*

Resolução:

Graficamente temos



Para obtermos o intervalo de integração precisamos de determinar os pontos de intersecção das duas parábolas. Para tal basta resolver a equação

$$x^2 = 2x - x^2$$

obtendo-se

$$2x^2 - 2x = 0 \Longleftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Logo os pontos de intersecção são $(0, y(0))$ e $(1, y(1))$, ou seja, $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

A área da região representada na figura acima é então dada por

$$\int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right)\, dx = 2\int_0^1 \left(x - x^2\right)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Se nos pedirem a área entre duas curvas $y = f(x)$ e $z = g(x)$ onde $f(x) \geqslant g(x)$ para alguns valores de x e $f(x) \leqslant g(x)$ para os restantes então temos de subdividir a região A em duas subregiões A_1 e A_2.

A área pretendida será dada por

$$\text{Área}(A) = \underbrace{\int_0^c (f(x) - g(x))\, dx}_{\text{Área}(A_1)} + \underbrace{\int_c^2 (g(x) - f(x))\, dx}_{\text{Área}(A_2)}.$$

Vamos elucidar com o seguinte exemplo.

Exercicio 3.3 *Determine a área da região limitada por* $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ *e* $x = \frac{\pi}{2}$.

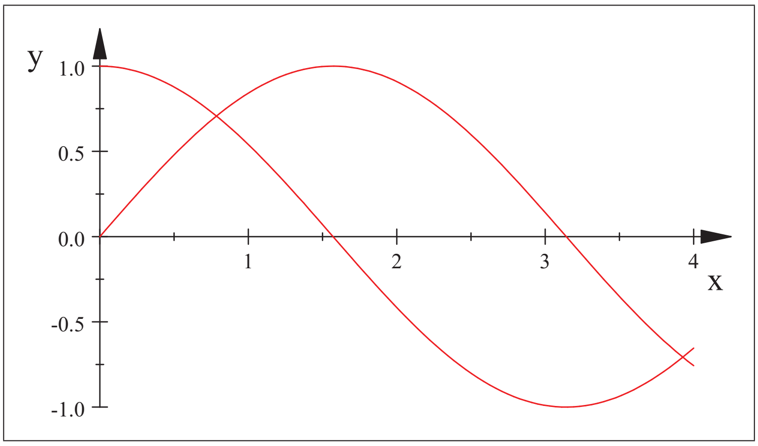
Resolução:

Determinemos os pontos de intersecção:

$$\operatorname{sen} x = \cos x \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Como $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ então a abcissa do ponto de intersecção é $x = \frac{\pi}{4}$. Para obtermos a ordenada basta substituirmos $x = \frac{\pi}{4}$ em $y = \operatorname{sen} x$ ou $y = \cos x$. Logo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é ponto de intersecção.

Graficamente temos



Assim a área das duas regiões representadas acima é

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \cos x)\ dx \\ &= [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

□

Por vezes é mais simples determinar a área de uma região considerando x em função de y, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.4 *Determine a área limitada pela linha $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$.*

Resolução:

Para obtermos os pontos de intersecção reescrevemos as equações acima com x em função de y, isto é,

$$x = y + 1 \text{ e } x = \frac{y^2 - 6}{2}.$$

Igualando obtemos

$$y + 1 = \frac{y^2 - 6}{2} \Longleftrightarrow 2y + 2 = y^2 - 6 \Longleftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos $y = -2$ ou $y = 4$. Assim $P_1 = (-1, -2)$ e $P_2 = (5, 4)$ são os pontos de intersecção.

A área pedida é dada por

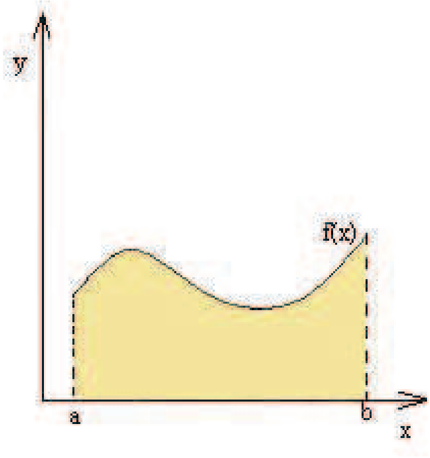
$$\begin{aligned} \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 6}{2} \right)\ dy &= \int_{-2}^{4} \left(y - \frac{y^2}{2} + 4 \right)\ dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + 4y \right]_{-2}^{4} = 8 - \frac{16 \times 2}{3} + 16 - 2 - \frac{8}{6} + 8 = 18. \end{aligned}$$

□

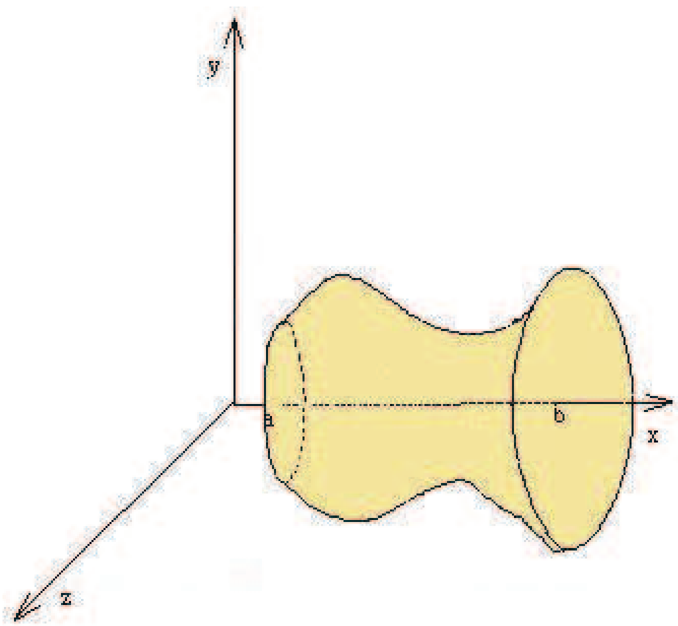
3.2 Volumes de sólidos de revolução

O cálculo de volumes de sólidos será abordado na disciplina de Análise Matemática II usando integrais múltiplos. Contudo, certos sólidos designados por *sólidos de revolução* podem ser calculados usando apenas o cálculo integral em $\mathbb{R}$.

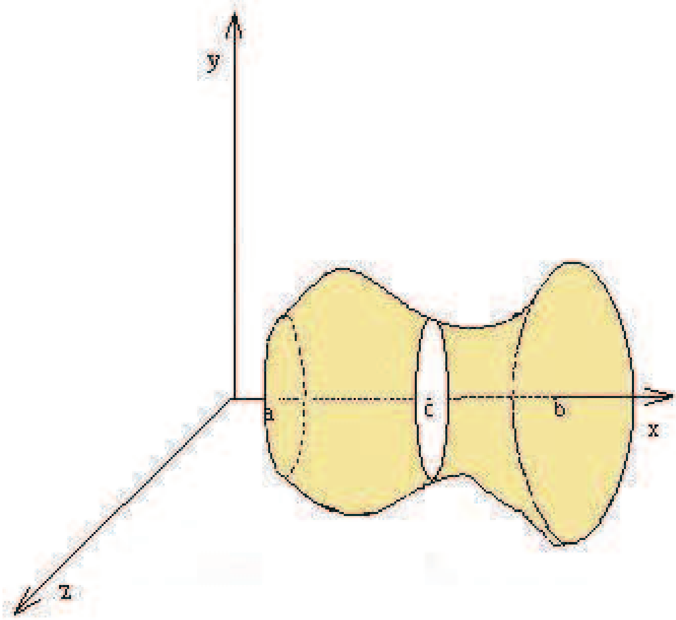
Consideremos região A limitada por uma dada função $f(x)$ e pelas rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, como mostra a figura abaixo.



Se fizermos uma rotação de 360 graus em torno do eixo x obtemos o sólido representado na figura abaixo.



Fazendo um corte no sólido, perpendicular ao plano xy passando pelo ponto $P = (c, 0, 0)$ é fácil ver que a região que se obtém é um círculo de raio $f(c)$.



Intuitivamente, o volume é dado pela "soma infinita" das áreas destes círculos com x a variar entre a e b.

Assim, sabendo que a área de um círculo de raio r é dado por πr^2, obtemos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \; dx.$$

Isto é uma "soma infinita " de áreas de círculos com raio $f(x)$ onde x varia entre a e b.

Exercicio 3.5 *Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva* $y = \sqrt{x}$ *em torno do eixo-*x *onde* $x \in [0, 1]$.

Resolução:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \; dx = \pi \int_0^1 x \; dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Exercicio 3.6 *Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva* $y = x^3$ *em torno do eixo-*y *e limitado por* $y = 8$ *e* $y = 0$.

Resolução:

Quando fazemos a rotação em torno do eixo-y então a variável de integração será y e a curva será "x em função de y". Assim

$$y = x^3 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

vindo
$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \ dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} \ dy = \pi \frac{3}{5} \left[y^{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{96}{5} \pi.$$

□

3.3 Comprimento do arco de uma curva

Na primeira aula de integrais aproximámos a área de uma determinada região pela "soma" das áreas dos rectângulos, quando a largura de cada rectângulo se aproxima de zero. A ideia aqui será aproximar uma dada curva, por uma linha poligonal.

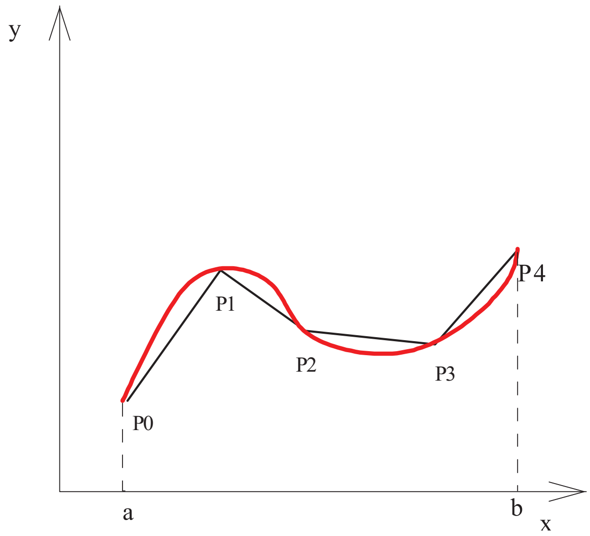
Theorem 3.7 *Se f' é contínua em $[a,b]$ então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ para $x \in [a,b]$ é dado por*
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \ dx. \tag{3.1}$$

Demonstração:

Vamos apenas dar uma ideia da demonstração, omitindo algumas formalidades.

Consideremos uma partição do intervalo $[a,b]$. Isto é,
$$x_0 = a, \ x_n = b \text{ e } x_i \in]a,b[\ \text{ com } x_{i-1} < x_i \text{ para qualquer } i \in \{1,\ldots,n-1\}.$$

A cada uma destas abcissas façamos corresponder os respectivos pontos no plano que se encontram na curva f. Isto é
$$P_i = (x_i, f(x_i)) \qquad \text{para } i \in \{0,\ldots,n\}.$$



Utilizando o Teorema de Pitágoras é fácil obter o comprimento de cada segmento de recta $\overline{P_{i-1}P_i}$ onde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Com efeito o comprimento é dado por

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \tag{3.2}$$

Como, por hipótese, f' é contínua em $[a, b]$ então em particular f é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Assim, aplicando o Teorema do Valor Médio de Lagrange garantimos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe

$$c_i \in \left]x_{i-1}, x_i\right[: f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Logo

$$\left(f'(c_i)\right)^2 (x_i - x_{i-1})^2 = (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2.$$

Substituindo em (3.2) obtemos

$$\left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \left(1 + (f'(c_i))^2\right)} = (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}.$$

O comprimento da linha poligonal que aproxima a curva f é dada pela soma de cada segmento de recta, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right|.$$

Se introduzirmos mais pontos na partição de $[a, b]$ é fácil perceber que obtemos uma melhor aproximação para o comprimento da curva. Se introduzirmos um número infinito de pontos, "a soma infinita" do comprimento dos segmentos de recta $\overline{P_{i-1}P_i}$ dará o comprimento da curva pretendido. Ou seja, se designarmos por L o comprimento da curva obtemos

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\overline{P_{i-1}P_i}\right| = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2} dx,$$

onde a última igualdade resulta da definição das somas de Riemann.

■

Exercicio 3.8 *Calcule o comprimento da curva* $y = x^{\frac{3}{2}}$ *para* $x \in [0, 1]$.

Resolução

Primeiro calculamos a derivada

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$

Usando a fórmula (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{4}{9}\left[\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right). \end{aligned}$$

3.4 Área de uma superfície de revolução

Uma superfície de revolução é a fronteira de um determinado sólido de revolução.

Se observarmos a figura 7 é fácil perceber intuitivamente que a área de uma superfície de revolução é a "soma infinita" dos perímetros das circunferências de raio $f(x)$ que constituem o sólido quando x varia entre a e b. Tendo em conta que o perímetro de uma circunferência de raio r é dado por $2\pi r$ e designando por S a área da superfície de revolução obtemos

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx. \tag{3.3}$$

Exercicio 3.9 *Determine a área da superfície obtida por rotação da curva* $y=\sqrt{4-x^2}$ *em torno do eixo do* x, *para* $x \in [-1,1]$.

Resolução:

Aplicando a fórmula (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\, dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2}\frac{\sqrt{4-x^2+x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 dx = 8\pi. \end{aligned}$$

□