PRIMITIVAS		DERIVADAS
$\int c\,dx = cx, \quad c \in \mathbb{R}$	$\leftrightarrows$	$(c)' = 0$
$\int u' u^a = \frac{u^{a+1}}{a+1}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\leftrightarrows$	$(u^a)' = a.u'.u^{a-1}$
$\int u'.e^u = e^u$	$\leftrightarrows$	$(e^u)' = u'.e^u$
$\int \frac{u'}{u} = \log u$	$\leftrightarrows$	$(\log u)' = \frac{u'}{u}$
$\int u'.\cos u = \sin u$	$\leftrightarrows$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$\int -u'.\sin u = \cos u$	$\leftrightarrows$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$\int u'.a^u = \frac{a^u}{\log a}, \quad a > 0$	$\leftrightarrows$	$(a^u)' = u'.a^u.\log a$
$\int \frac{u'}{1+u^2} = arctg\, u$	$\leftrightarrows$	$(arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$		$(u \times v)' = u'v + uv'$
$\int -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u$		$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\int u \pm v = \int u \pm \int v$	$\leftrightarrows$	$(u \pm v)' = (u)' \pm (v)'$
$\int cu = c\int u$	$\leftrightarrows$	$(cu)' = c(u)'$

PRIMITIVAÇÃO POR PARTES (utilizar quando há 2 funções a multiplicar)

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

$u' = \cdots \rightarrow u = \cdots$
$v = \cdots \rightarrow v' = \cdots$

Critério	u'	v
	e^x	$\ln(x)$
	$\sin x$ ou $\cos x$	*polinómios*

$\int \ln(x)\, dx = \int 1 \times \ln(x)\, dx$ escolhe-se $u' = 1$ e $v = \ln(x)$

PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO (utilizar quando há algo a chatear)

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big) \times x'dt \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \\ t &= \varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

O que está a chatear = ***t***. Isola-se o ***x*** e essa função é o $\varphi(t)$. Após resolver a primitiva com ***t*** não esquecer de voltar a ***x***.

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS (utilizar quando há uma fracção de polinómios)

- Se o grau do numerador for **maior ou igual** ao grau do denominador ⇨ **dividir** os polinómios
- Se não proceder da seguinte forma:

1. Factoriza-se o denominador (encontrar os zeros) e colocar na forma $(x-a)(x-b)$ ...
2. Igualar a fracção inicial em fracções simples

$$\frac{\text{polinómio}}{(x-a)(x-b)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

3. As primitivas resultantes são da forma:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a)$$

$$\int \frac{B}{(x-b)^2}dx = B\int (x-b)^{-2}dx = B\,\frac{(x-b)^{-1}}{-1}$$

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+1}dx = \int \frac{Dx}{x^2+1}dx + \int \frac{E}{x^2+1}dx = \frac{D}{2}\ln(x^2+1) + E\,\text{arctg}(x)$$

Atenção à multiplicidade das raízes.

Integrais de Linha ou Curvilíneos

- Quando o campo $f: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ é **escalar** (a primeira notação é usado quando a curva é fechada)

$$\oint_{C} f d\alpha = \int_{C} f\, d\alpha = \int_{a}^{b} f\big(\alpha(t)\big) \times \|\alpha'(t)\| dt$$

- Quando o campo $F: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ é **vetorial** (a notação _•_ diz respeito a um produto interno)

$$W = \oint_{C} F d\alpha = \int_{C} F\, d\alpha = \int_{a}^{b} F\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t) dt$$

Onde a curva **C** é parametrizada por $\alpha(t)$ e $a \le t \le b$

Este último integral também é chamado de trabalho (Work) do campo de forças F ao deslocar uma partícula ao longo da curva C

- Quando o campo vectorial $\boldsymbol{F}$ é um campo **potencial** (**gradiente**, **conservativo**), ié existe uma função escalar f tal que $F = \nabla f$ e a curva **C** liga o ponto **A** ao ponto **B**, então

$$\int_{C} F\, d\alpha = f(B) - f(A)$$

Se a curva é fechada e o campo F é conservativo, então o integral de linha é 0.

Se $F(x,y) = (F_1, F_2)$, F é gradiente se $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$

Se $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$, F é gradiente se $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}, \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}, \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z}$

(com esta propriedade também se diz que o campo $\boldsymbol{F}$ é irrotacional, ou que o seu rotacional é 0)

Parametrizar curvas

- Segmento de recta entre o ponto A e o ponto B $\quad \alpha(t) = (1-t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}, 0 \le t \le 1$
- Circunferência de raio R (no plano) $\quad \alpha(t) = (R\cos t\,, R\sin t), 0 \le t \le 2\pi$
- Outra curva qualquer: chamar *x=t* ou *y=t*

- O tamanho de uma linha (Length) é um integral de linha com a função integranda igual a 1.

$$L = \int_{C} 1\, d\alpha = \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt$$

INTEGRAIS DUPLOS

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dA$$

→ ordem de integração *dxdy* ou *dydx*

↓ região de integração (no plano $\mathbb{R}^2$)

- **Esboçar a região de integração e encontrar a ordem certa de integração**

Tentar colocar uma das varáveis entre duas constantes sem que a região "*apresente cantos/vértices*".

- **Inverter a ordem de integração**

Para inverter a ordem de integração faz-se o esboço da região e troca-se a variável que está entre duas constantes, isto é, tenta-se limitar a outra variável entre duas constantes e adapta-se o restante.

- **Coordenadas polares** $(x,y)\mapsto(\rho,\theta)$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\le\rho\le R \\ y=\rho\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

Quando existirem regiões definidas com x^2+y^2, ou com porções de círculos, é habitual mudar as coordenadas cartesianas para as polares.

Desta forma onde está x^2+y^2 passará a estar apenas ρ^2 e na região será muito mais simples limitar o raio ρ e o ângulo θ.

Não esquecer de multiplicar a função por ρ que é o Jacobiano da transformação das coordenadas.

- **Área de uma figura plana Ω**

$$\text{Área}=\iint_{\Omega} 1\,dA$$

- **Massa e centro de massa de uma figura plana Ω**

$$M=\iint_{\Omega}\delta(x,y)\,dA$$ onde δ é a densidade

O centro de massa é o ponto (x_*,y_*) dado por $x_*=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}x\delta(x,y)\,dA$; $y_*=\frac{1}{M}\iint_{\Omega}y\delta(x,y)\,dA$.

- **Momento de Inércia de uma figura plana Ω em relação à origem**

$$I_O=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y)\,dA$$

- **Momento de Inércia de uma figura plana Ω em relação ao eixo dos xx e dos yy**

$$I_{xx}=\iint_{\Omega}y^2\delta(x,y)\,dA \quad ; \quad I_{yy}=\iint_{\Omega}x^2\delta(x,y)\,dA$$

Quando a figura é homogénea então a densidade é constante **$\delta(x,y) = c$**
Por vezes diz-se que: a *densidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância à origem*. Fica:

$$\delta(x,y)=\frac{c}{\|(x,y)-(0,0)\|^2}=\frac{c}{\|(x,y)\|^2}=\frac{c}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}}=\frac{c}{x^2+y^2}.$$

Ou então diz-se que: *a densidade é proporcional à distância à recta y=2*. Fica:

$$\delta(x,y)=c\|(x,y)-(x,2)\|=c\|(0,y-2)\|=c\sqrt{(y-2)^2}=c(y-2).$$

Teorema de Green (faz a ligação entre um integral de linha e um duplo)

INGREDIENTES:

- $F(x,y)=(F_1,F_2)$ é uma função vectorial de classe C^1 (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- a curva C é regular, fechada e percorrida no sentido positivo (anti-horário);
- a curva C delimita uma região R no plano.

$$\oint_C F d\alpha = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA$$

INTEGRAIS TRIPLOS

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dV$$ → ordem de integração

↓ região de integração (no espaço $\mathbb{R}^3$)

- **Coordenadas Cilíndricas** $(x, y, z) \mapsto (\rho, \theta, z)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

Usar quando existirem regiões definidas com x^2+y^2 mas no espaço, em R^3.
Desta forma onde está x^2+y^2 passará a estar apenas ρ^2.
Não esquecer de multiplicar a função por ρ que é o Jacobiano da transformação das coordenadas.

- **Coordenadas Esféricas** $(x, y, z) \mapsto (\rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array}.$$

Note-se que **R** é o raio da esfera; **θ** é o ângulo no "*chão*" plano z=0, isto é o ângulo no *equador*; **φ** é o ângulo com o eixo dos zz, isto é com o *pólo norte*. Para a semiesfera superior fica $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Usar quando existirem regiões definidas com $x^2+y^2+z^2$.
Desta forma onde está $x^2+y^2+z^2$ passará a estar apenas ρ^2.
Não esquecer de multiplicar a função por $\rho^2\sin(\varphi)$ que é o Jacobiano da transformação.

- **Volume de uma figura Ω no espaço**

$$\text{Volume} = \iiint_{\Omega} 1\,dV$$

- **Momentos de Inércia de uma figura Ω no espaço em relação aos eixos Ox, Oy e Oz**

$$I_{xx} = \iiint_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\,dV \;\; ; \;\; I_{yy} = \iiint_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)\,dV \;\; ; \;\; I_{zz} = \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y, z)\,dV \,.$$

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

- Quando o campo $f: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ é <u>**escalar**</u>

$$\iint_S f = \iint_D f\big(r(u,v)\big) \times \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv.$$

- Quando o campo $F: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ é <u>**vectorial**</u> (a notação _•_ diz respeito a um produto interno)

$$Fluxo = \iint_S F = \iint_D F\big(r(u,v)\big) \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} dudv$$

Onde a superfície **S** é parametrizada por ***r(u,v)*** e os parâmetros ***u*** e ***v*** estão na região ***D***.
Note-se que em ambos os casos o primeiro integral é de superfície e o segundo é um duplo.

- Quando a superfície é dada na forma $z = g(x,y)$

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big) \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

$$Fluxo = \iint_S F(x,y,z) = \iint_D F\big(x,y,g(x,y)\big) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) dudv.$$

- A <u>**área da superfície S**</u> é um integral de superfície (escalar) com a função integranda igual a 1.

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv.$$

Ou se a superfície é dada na forma $z = g(x,y)$

$$A = \iint_S 1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

TEOREMA DE STOKES (faz a ligação entre um integral de superfície e um curvilíneo)

INGREDIENTES:

- $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ é uma função vectorial de classe C[1] (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- D é uma região fechada no plano cuja fronteira é C (percorrida no sentido anti-horário;

$$\iint_S rot(F) = \oint_C F d\alpha.$$

TEOREMA DA DIVERGÊNCIA (GAUSS) (liga um integral de superfície com um triplo)

INGREDIENTES:

- $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ é uma função vectorial de classe C[1] (ié as derivadas parciais das suas componentes existem e são contínuas);
- S é uma superfície que limita um sólido V.

$$\iint_S F = \iiint_V div(F) dV$$

A **divergência** de um campo vectorial $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ é

$$div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3)$$

A divergência é um escalar.

O **rotacional** de um campo vectorial $F(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ é o seguinte vector

$$rot(F) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3)$$

O rotacional é um vector.