UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática I

1^a Frequência 7 de Novembro de 2014

Tempo: 2h 15m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Em cada folha de teste indique os grupos e alíneas que resolveu.

Resolva cada um dos grupos em <u>folhas de teste separadas</u>.

Grupo I

(4) **1.** Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência

$$u_n = \begin{cases} u_1 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}.$$

a) Prove por indução matemática que $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que a sucessão u_n é convergente.

c) A sucessão u_n é limitada ? Justifique.

(3) **2.** Calcule, caso existam, os seguintes limites :

a) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{5 + sen\left(n^2+1\right)}{n^2+1}$ b) $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 n}{2n^2+k}$

Grupo II

(6) **3.** Estude a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, calcule a respectiva soma:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos^n(3)}{3^n}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right).$

(2) **4.** Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos, indique, justificando com pormenor, qual a natureza das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right).$

b) $\sum a_n b_n.$

Grupo III

(2) **5.** Determine o domínio da função:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right).$$

(2) **6.** Estude a continuidade da função $f(x)$ no ponto $x=1$, sendo

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\sin(x-1)-\sin(x-1)}{x^2-2x+1} & \text{se } x\neq 1\\ 0 & \text{se } x=1.\end{cases}$$

(1) **7.** Mostre que a seguinte equação

$$\ln x+2x-1=0$$

tem pelo menos uma raíz real.

Justifique rigorosamente a sua resposta.

F1_07-11-2011

1.

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$

a) Provar por indução matemática que $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Seja $P_{(n)} \to u_n > 2$

♦ $P_{(1)}$ é verdade? $P_{(1)} \longrightarrow u_1 > 2 \Leftrightarrow u_1 > 2$ ✓

♦ Sabendo que $P_{(n)}$ é verdade (hipótese indução), será que $P_{(n+1)}$ é verdade (tese indução)?

$$P_{(n+1)} \longrightarrow u_{n+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{3u_n - 2}{u_n} > 2 \Leftrightarrow 3u_n - 2 > 2u_n \Leftrightarrow u_n > 2 \checkmark \text{ (por hipótese indução)}$$

$\therefore u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que a sucessão u_n é convergente.

Para ser convergente tem de ser MONÓTONA e LIMITADA

Vou primeiro provar que a sucessão é monótona (como $u_1 = 3, u_2 = \frac{7}{3}$ está a decrescer).

$$u_n \geq u_{n+1}?$$

$$u_n \geq u_{n+1} \Leftrightarrow u_n \geq \frac{3u_n - 2}{u_n} \Leftrightarrow {u_n}^2 \geq 3u_n - 2 \Leftrightarrow {u_n}^2 - 3u_n + 2 \geq 0 \Leftrightarrow u_n \leq 1 \vee u_n \geq 2$$

Como por a) $u_n > 2$ a desigualdade em cima é verdadeira e assim a sucessão e monótona decrescente.

Para mostrar que a sucessão é limitada … ver próxima alínea (penso que a pergunta está mal estruturada).

$\therefore$ Assim a sucessão e convergente!

c) A sucessão é limitada? Justifique.

Por a) $u_n > 2$. Como a sucessão é decrescente, todos os termos são menores ou iguais ao primeiro.

$$u_n \leq u_1 \Leftrightarrow u_n \leq 3$$

$\therefore$ Assim $2 < u_n \leq 3, , \forall n \in \mathbb{N}$ o que quer dizer que é limitada.

2. Calcule os limites

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 + \sin(n^2+1)}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} \times (5 + \sin(n^2+1)) = \text{"infinitéssimo} \times \text{limitada"} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos^2 n}{2n^2 + k} = \cdots = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^2 n}{2n^2 + k} ??$

3. Estude a natureza das séries e calcule a soma em caso de convergência.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n}$

$$\text{C. A.}\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n}=\left(\frac{n+5}{n+5}-\frac{3}{n+5}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{-3}{n+5}\right)^{n+5}\right]^{\frac{2n}{n+5}}\rightarrow(e^{-3})^2=e^{-6}$$

$\therefore$ Como o termo geral não tende para 0, a série é **DIVERGENTE**.

b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-2}$

Trata-se de uma série alternada.

Vou testar a convergência absoluta.

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-2}\right|=\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-2}$$

Esta é uma série de termos positivos (sim pois começa em 5).

Como $\frac{1}{\sqrt{n}-2}>\frac{1}{\sqrt{n}}$ (para $n>5$) então posso concluir por comparação que como $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum\frac{1}{n^{1/2}}$ é uma série divergente (pois é uma série de Dirichlet com $\alpha=1/2\leq 1$), a série $\sum\frac{1}{\sqrt{n}-2}$ também diverge (pois o seu termo geral é maior que o termo geral de uma série divergente).

$\therefore$ A série **não converge absolutamente**.

Vou testar agora a convergência simples.

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-2}=\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}-2}\qquad\text{com } a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-2}$$

$\therefore$ Como $a_n\to 0$ ✓ e a_n é decrescente $\left(a_n\geq a_{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n}-2}\geq\frac{1}{\sqrt{n+1}-2}\checkmark\right)$, pelo critério de Leibnitz a série é **simplesmente convergente**.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^n 3}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos 3}{3}\right)^n$

$\therefore$ É uma série geométrica de razão $\frac{\cos 3}{3}$. Como a razão verifica $-1<\frac{\cos 3}{3}<1$, a série é **CONVERGENTE**.

A soma é $S=\dfrac{1^{\text{º}}\text{termo}}{1-\text{razão}}=\dfrac{\frac{\cos 3}{3}}{1-\frac{\cos 3}{3}}=\dfrac{\frac{\cos 3}{3}}{\frac{3-\cos 3}{3}}=\dfrac{\cos 3}{3-\cos 3}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$ é uma série de Mengoli ou Telescópica com $a_n=\dfrac{1}{n!}$ e $k=2$

A soma é $S = a_1 + a_2 - 2 \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3}{2}$ **Converge**

4. Sendo $\sum a_n$, $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos, qual a natureza das seguintes séries:

a) $\sum\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$

Se as séries com os termos gerais a_n e b_n são convergentes então eles tendem para 0. Assim o seu inverso tenderá para $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = +\infty + \infty = +\infty$$

$\therefore$ Desta forma temos uma série cujo termo geral não tende para 0, pelo que é **Divergente**.

b) $\sum a_n\, b_n$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\left(\text{pois } \sum a_n \text{ converge}\right)$, pelo 2º critério de comparação as séries

$\sum a_n b_n$ e $\sum b_n$ têm a mesma natureza. Como a 2ª converge, então a primeira também **converge**.

5. Indique o domínio da função $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+1}{x^2-4} > 0 \wedge x^2 - 4 \neq 0\right\}$$

Tenho de fazer uma tabela de sinais. O numerador é uma reta e anula-se em $x = -1$. O denominador é uma parábola e anula-se em $x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		-1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Fração	$-$	SS	$+$	0	$-$	SS	$+$

$\therefore D =]-2, -1[\cup]2, +\infty[$

6. Estudar a continuidade no ponto $x = 1$ da função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \sin(x-1) - \sin(x-1)}{x^2 - 2x + 1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$$

A função será contínua se o limite do ramo de cima for igual a $f(1) = 0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\sin(x-1)-\sin(x-1)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}=1$$

Como o limite é diferente de $f(1)=0$, a função não é contínua em $x=1$.

7. Mostre que a equação $\ln x+2x-1=0$ tem pelo menos uma raiz real.

$$f(x)=\ln x+2x-1$$

$$f(1)=1\ e\ f(e^{-2})=-3+\frac{2}{e^2}$$

$\therefore$ Como a função f é contínua em $[e^{-2},1]$ pois trata-se da soma de um logaritmo com um polinónio e $f(1)\times f(e^{-2})<0$, posso aplicar o Teorema de Bolzano e concluir que existe um ponto c em $]e^{-2},1[$ tal que $f(c)=0$.