ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ

Пусть некоторая функция ***f*(*x*)** задана на отрезке $x \epsilon [a, b]$ и определена рядом своих точек $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, .. n,\ a \leq x_i \leq b$

Основная задача ***интерполяции*** — нахождение значения функции в тех точках внутри данного интервала, где она не задана, т.е. для промежуточных аргументов.

Определение 1. Точки $x_0, x_1, \dots x_n$ называются ***узлами интерполяции***. Точка, в которой нужно найти значение функции – ***точкой интерполяции***.

Требуется построить интерполирующую функцию $F(x)$, принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. такую, что $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$.

Тогда, ***условие интерполяции***: $F(x_i) = y_i$. При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых.

Геометрически задача интерполирования функции одной переменной означает построение кривой $y = F(x)$, проходящей через заданные точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) (см. рис. 1).Полученная таким образом интерполяционная формула $y = F(x)$ обычно используется для вычисления значений исходной функции $f(x)$ для значений аргумента x, отличных от узлов интерполяции.

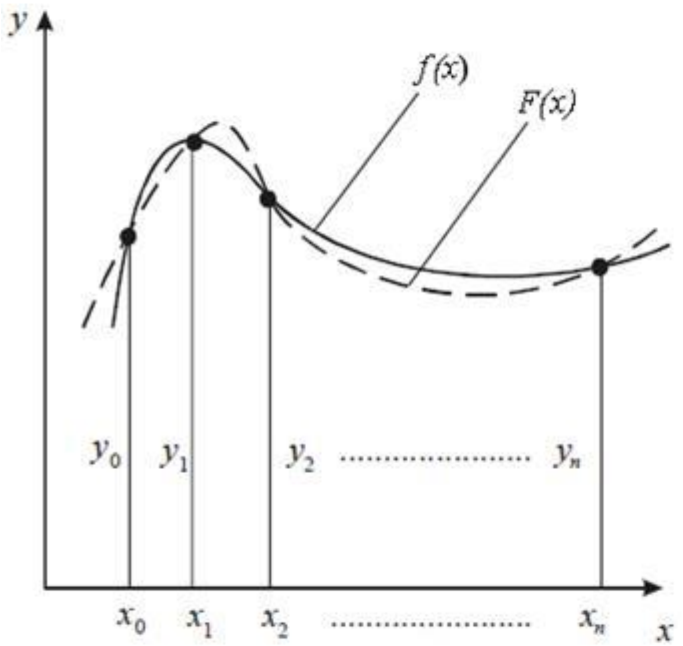

Рис. 1.Геометрическая интерпретация интерполяции

Определение 2. Процесс вычисления значений функции ***F(x)*** в точках отличных от узлов интерполирования называется ***интерполированием*** функции ***f(x)***. При этом различают ***интерполирование*** в узком смысле, когда x принадлежит интервалу $[x_0, x_n]$, и ***экстраполирование***, когда x находится за пределами отрезка.

Наиболее распространены следующие виды *интерполяции*:

- ***линейная интерполяция***, при которой промежуточная точка, расположенная между двумя узловыми точками (x_i, y_i)и (x_{i+1}, y_{i+1}), лежит на отрезке прямой, соединяющей две ближайшие узловые точки;

- ***квадратичная интерполяция***, при которой промежуточная точка между узловыми точками (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)и (x_{i+1}, y_{i+1}) лежит на отрезке параболы, соединяющей эти узловые точки;

- ***полиномиальная интерполяция***, при которой промежуточные точки вычисляются как значение некоторого многочлена $P_n(x)$, причем $P_n(x_i) = f(x_i)$;

- ***сплайновая интерполяция***, при которой промежуточные точки находятся с помощью отрезков полиномов невысокой степени, проходящих через узловые точки и поддерживающие определенные условия стыковки в концевых точках;

Задача нахождения интерполяционной функции $F(x)$ имеет бесконечное число решений, так как через заданные точки x_i, y_i можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Однако эта задача становится однозначно разрешимой, если вместо произвольной функции $\boldsymbol{F(x)}$ искать полином $\boldsymbol{P_n(x)}$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям $P_n(x_i) = f(x_i)$:

$$F(x) = P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n, \;\; i = 0, 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Определение 3. Алгебраический многочлен, удовлетворяющий условиям интерполяции, называется ***интерполяционным многочленом***.

Существует различные формы записи интерполяционного многочлена: традиционная форма (1), многочлен Лагранжа и интерполяционная формула Ньютона.

В случае использования в качестве интерполирующей функции многочлена **n**-й степени (требующий **n+1** узел интерполяции) задача интерполяция табличной функции имеет единственное решение, т.е. коэффициенты $\mathbf{a_0,\ldots,\ a_n}$ определяются единственным образом. Действительно, можно составить систему из **n+1** линейных уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов $\mathbf{a_0,\ldots,\ a_n}$:

$$\begin{array}{r} i=0 \\ i=1 \\ \ldots \\ i=n \end{array} \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов этой СЛАУ называется матрицей **Вандермонда**. Ее определитель не равен нулю, поскольку все значения узлов интерполяции различны между собой и ни одна из строк не является линейной комбинацией других строк, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & . & x_1^n \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0$$

Таким образом, СЛАУ, а значит и задача полиномиальной интерполяции имеет единственное решение, поэтому вектор коэффициентов $\mathbf{a_0,\ldots, a_n}$ может быть выбран единственным образом.

Примечание. Отметим, что вычисление коэффициентов полинома посредством решения системы в вычислительной практике ***реализуется крайне редко***. Причиной этого является плохая обусловленность матрицы Вандермонда, приводящая к заметному росту погрешности при выполнении условий интерполирования уже при сравнительно невысоких порядках полинома. К этому следует добавить, что вычислительные затраты реализации метода пропорциональны $\mathbf{n^3}$.

Принято различать локальную и глобальную интерполяцию. В том случае, когда полином един для всей области интерполяции, говорят, что интерполяция ***глобальная.*** В тех случаях, когда между различными узлами полиномы различны, говорят о ***кусочной*** или ***локальной интерполяции.***

Линейная интерполяция

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является ***линейная интерполяция***. Она состоит в том, что заданные точки (x_i, y_i), $(i = 0, 1, \ldots, n)$ соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках (см. рис. 2).

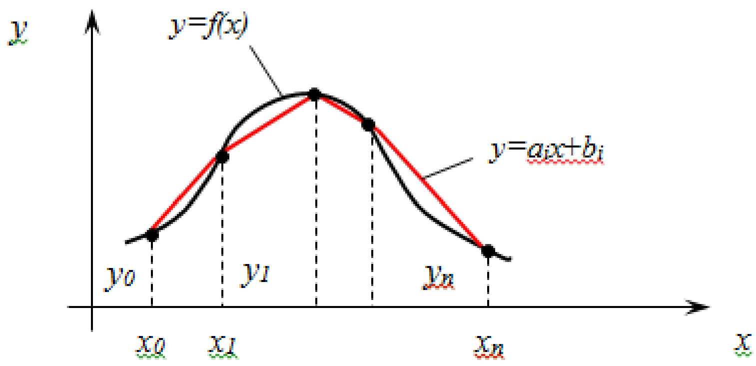

Рис. 2. Линейная интерполяция

Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов (x_{i-1}, x_i), то для каждого из них в качестве уравненияинтерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i — го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i), в виде:

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Отсюда:

$$y = a_i x + b_i\ ,\ x_{i-1} \le x \le x_i \tag{2}$$

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x, а затем подставить его в формулу (2) и найти приближенное значение функций в этой точке.

Квадратичная интерполяция

В случае ***квадратичной интерполяции*** в качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен (см. рис.3). Уравнения квадратного трехчлена имеет вид:

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i x_{i-1} \le x \le\ \ x_{i+1} \tag{3}$$

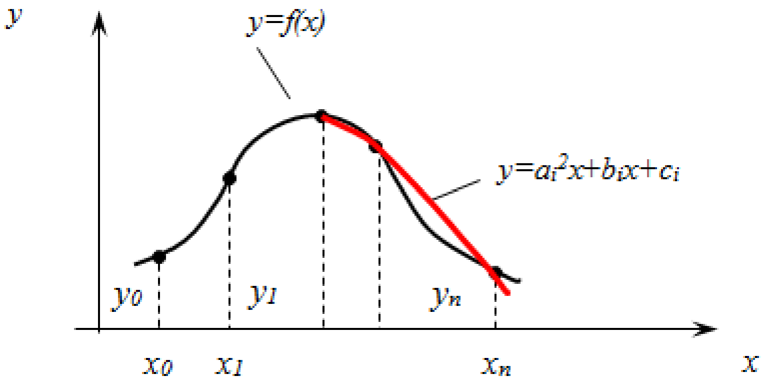

Рис. 3.Квадратичная интерполяция

Для определения неизвестных коэффициента a_i , b_i , c_i необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (3) через три точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$. Эти условия можно записать в виде:

$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}$
$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = y_i$
$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}$

Интерполяция для любой точки $x \in [x_0,\ x_n]$ проводится по трем ближайшим ней узлам.

Пример 1. Найти приближенное значение функции y=f(x) при x=0,35 для заданной таблицы:

Таблица 1

x	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

1. Используем линейную интерполяцию. Значение x=0,35 находится между узлами $x_{i-1} = 0{,}3$ и $x_i = 0{,}4$. Тогда:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{5{,}44 - 3{,}79}{0{,}4 - 0{,}3} = 16{,}5$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 3{,}79 - 16{,}5 \cdot 0{,}3 = -1{,}16$$

$$y \approx 16{,}5x - 1{,}16 = 16{,}5 \cdot 0{,}35 - 1{,}16 = 4{,}615$$

2. Используем квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений для ближайших узлов к точке x=0,35: $x_{i-1} = 0{,}2$, $x_i = 0{,}3$, $x_{i+1} = 0{,}4$, соответственно$y_{i-1} = 2{,}38$, $y_i = 3{,}79$, $y_{i+1} = 5{,}44$.

$$0{,}2^2 a_i + 0{,}2 b_i + c_i = 2{,}38$$
$$0{,}3^2 a_i + 0{,}3 b_i + c_i = 3{,}79$$
$$0{,}4^2 a_i + 0{,}4 b_i + c_i = 5{,}44$$

В результате решения системы, получим: $a_i = 12$, $b_i = 8{,}1$, $c_i = 0{,}28$. Тогда:

$$y \approx 12 \cdot 0{,}35^2 + 8{,}1 \cdot 0{,}35 + 0{,}28 = 4{,}585$$

Многочлен Лагранжа

Построим интерполяционный полином Ln(x), степени не больше n и для которого выполнены условия (4).

$$Ln(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$$

$$Ln(x_i) = y_i \tag{4}$$

Лагранж предложил строить многочлен Ln(x) в виде:

$$Ln(x) = l_0(x) + l_1(x) + \cdots + l_n(x) \tag{5}$$

где $l_i(x)$ – полином степени n, который удовлетворяет условию :

$$l_i(x_j) = \begin{cases} y_i, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть $x_0, x_{1,} \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ – корни этого многочлена. Требование (6) совместно с выражением (5) обеспечивает выполнение условий (4).

Полиномы $l_i(x)$составим следующим образом:

$$l_i(x) = c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n) \tag{7}$$

Здесь в каждом полиноме $l_i(x)$отсутствует скобка $(x-x_i)$, которой соответствует коэффициент c_i.

Найдем неизвестные коэффициенты $c_i, i = 0,1,\ldots,n,$ называемые коэффициентами Лагранжа, используя условие: $Ln(x_i) = y_i$

При $x = x_0$ $Ln(x_0) = y_0$

$$Ln(x_0) = c_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots.(x_0-x_n) = y_0$$

Следовательно, коэффициент c_0 вычисляется по следующей формуле:

$$c_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots.(x_0-x_n)}$$

При $x = x_1$ $Ln(x_1) = y_1$

$$Ln(x_1) = c_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots.(x_1-x_n) = y_1$$

Следовательно, коэффициент c_0 вычисляется по следующей формуле:

$$c_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots.(x_1-x_n)}$$

Значения остальных коэффициентов вычисляются аналогично:

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Тогда:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots(x_3-x_n)}\ldots\ldots$$

С учетом найденных коэффициентов интерполяционный многочлен Лагранжа запишется в виде:

$$Ln(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{8}$$

или:

$$Ln(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{9}$$

Хотя формула Лагранжа имеет не совсем привычную форму, тем не менее, это одна из форм записи полинома ***n*** степени.

Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки x. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях n (n<20). Многочлен Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операции, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально n^2 и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

Линейная и квадратичная интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

Пример 2. Найти приближенное значение функции y=f(x) при x=0,35 для заданной таблицы (см. табл.1) с помощью многочлена Лагранжа.

Решение: Найдем:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}1-0{,}2)(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}4)(0{,}1-0{,}5)} = 0{,}0234375 * y_0 = 0{,}0234375 * 1{,}25 = 0{,}029297$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}3)(0{,}2-0{,}4)(0{,}2-0{,}5)} = (-0{,}15625) * y_1 = (-0{,}15625) * 2{,}38 = -0{,}37187$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}4)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}2)(0{,}3-0{,}4)(0{,}3-0{,}5)} = 0{,}703125 * y_2 = 0{,}703125 * 3{,}79 = 2{,}66485$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}5)}{(0{,}4-0{,}1)(0{,}4-0{,}2)(0{,}4-0{,}3)(0{,}4-0{,}5)} = 0{,}46875 * y_3 = 0{,}46875 * 5{,}44 = 2{,}55$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$= \frac{(0{,}35-0{,}1)(0{,}35-0{,}2)(0{,}35-0{,}3)(0{,}35-0{,}4)}{(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-0{,}2)(0{,}5-0{,}3)(0{,}5-0{,}4)} = -0{,}0390625 * y_3 = -0{,}0390625 * 7{,}14 = -0{,}27891$$

$$\boldsymbol{Ln(0,35) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) = 4,59336}$$

Многочлен Ньютона

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

При построении интерполяционного полинома в форме Ньютона используется понятие разделенной разности.

Разделенные разности являются рабочим аппаратом при изучении функций, заданных таблицей значений в неравноотстоящих узлах.

Разделенные разности (или разностные отношения) нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах: $f(x_i) = y_i$.

Разделенные разности первого порядка называют величины (определяются через разделенные разности нулевого порядка):

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

или:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(\, x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{10}$$

Разделенные разности второго порядка называют величины (определяются через разделенные разности первого порядка):

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$$

или:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(\, x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \tag{11}$$

Разделенные разности *k*-го порядка определяются через разделенные разности порядка k-1:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(\, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} \tag{12}$$

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$Nn(x) = f(x_0) + f(x_0,\ x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0,\ x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \cdots + f(x_0,\ x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \tag{13}$$

$$Nn(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_{0,}x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \tag{14}$$

Отметим, что при добавлении новых узлов первые члены многочлена Ньютона остаются неизменными.

Для повышения точности интерполяции в сумму (13) могут быть добавлены новые члены, что требует подключения дополнительных интерполяционных узлов. При этом безразлично, в каком порядке подключаются новые узлы. Этим формула Ньютона выгодно отличается от формулы Лагранжа.

Пример 3. Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции ***для x=0,22*** для заданной таблицы 2. При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя различные узлы.

Таблица 2

x	**0,15**	**0,2**	**0,33**	**0,47**	**0,62**
y	1,25	2,38	3,79	5,44	7,14

Решение: Вычисления произведем по формуле:

$$Nn(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Для вычисления значение функции при x=0,22 за x_0 возьмем сначала 0,15, затем 0,2.

$$f(x_0, x_1) = \frac{2{,}38 - 1{,}25}{0{,}2 - 0{,}15} = 22{,}6$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3{,}79 - 2{,}38}{0{,}33 - 0{,}2} = 10{,}846$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{10{,}846 - 22{,}6}{0{,}33 - 0{,}15} = -65{,}3$$

$$y(0{,}22) = 1{,}25 + 22{,}6 \cdot (0{,}22 - 0{,}15) - 65{,}3 \cdot (0{,}22 - 0{,}15) \cdot (0{,}22 - 0{,}2) = 2{,}74058$$

Для $x_0 = 0{,}2$:

$$f(x_0, x_1) = \frac{3{,}79 - 2{,}38}{0{,}33 - 0{,}2} = 10{,}846$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{5{,}44 - 3{,}79}{0{,}47 - 0{,}33} = 11{,}786$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{11{,}786 - 10{,}846}{0{,}47 - 0{,}2} = 3{,}482$$

$y(0{,}22) = 2{,}38 + 10{,}846 \cdot (0{,}22 - 0{,}2) + 3{,}482 \cdot (0{,}22 - 0{,}2) \cdot (0{,}22 - 0{,}33) = 2{,}58926$

Принимаем $y(0{,}22) = \frac{2{,}74058+2{,}58926}{2} = 2{,}66492$.

Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Узлы интерполирования $x_0, x_1, ..., x_n$ называются равноотстоящими, если:

$x_i - x_i = h = const$, где h - шаг интерполирования, $x_i = x_0 + ih$.

Конечные разности являются рабочим аппаратом при изучении функций, заданных таблицей значений в равноотстоящих узлах.

Конечными разностями первого порядка называют величины:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \ i = 0, 1, \dots, n-1$

Конечными разностями второго порядка называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \dots = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Аналогично для любого k можно записать:

$$\Delta^k y_0 = y_k - k y_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k-2} + \dots + (-1)^k y_0$$

$$\Delta^k y_i = y_{k+i} - k y_{k+i-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{k+i-2} + \dots + (-1)^k y_i$$

Используя конечные разности, можно определить y_k:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0$$

Перейдем к построению интерполяционного многочлена Ньютона. Этот многочлен запишем в виде:

$$Nn(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \qquad (15)$$

Условие интерполяции $Pn(x_i) = y_i$ используем для нахождения коэффициентов многочлена:

$$Nn(x_0) = a_0 = y_0$$

$$Nn(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_0 + a_1 h = y_1$$

$$Nn(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = a_0 + 2a_1h + 2a_1h^2 = y_2$$

…………………

Найдем отсюда коэффициенты a_0, a_1, a_2:

$$a_0 = y_0, \qquad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad a_2 = \frac{y_2 - a_0 - 2a_1h}{2h^2} = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Общая формула имеет вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\, h^k} k = 0, 1, \dots, n$$

Подставляя эти выражения в (15), получим:

$$Nn(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед:**

$$Nn(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (16)$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на всем отрезке изменения аргумента $[x_0, x_n]$. Однако более целесообразно (с точки зрения повышения точности расчетов) использовать эту формулу для $x_0 \le x \le x_1$. При этом за x_0 может приниматься любой узел интерполяции x_k. Например для $x_1 \le x \le x_2$, вместо x_0 лучше взять значение x_1. Тогда интерполяционный многочлен Ньютона:

$$Nn(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i \qquad (17)$$

Интерполяционную формулу (17) обычно используют для вычислений значений функции в точках левой половины отрезка.

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$Nn(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (18)$$

При **экстраполировании** для отыскания значений функции для $x < x_0$ используется первый интерполяционный многочлен Ньютона. В этом случае $t = < 0$ и говорят, что первая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования назад**.

При отыскании значений функции для $x > x_n$ используется второй интерполяционный многочлен Ньютона.

В этом случае $t = > 0$ и говорят, что вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования вперед**.

Замечание. При экстраполировании получаются бóльшие погрешности, чем при интерполировании. Поэтому пределы его применения ограничены. Тем не менее, экстраполирование можно проводить в узких пределах, например в пределах шага h. В более далеких точках можно получить неверные значения y. Формула Лагранжа применяется в обоих случаях.

Необходимо отметить, что формулы Ньютона являются видоизменениями формулы Лагранжа. Однако в формуле Лагранжа нельзя пренебречь ни одним из слагаемых, так как все они равноправны и представляют многочлены n-й степени. В формулы Ньютона в качестве слагаемых входят многочлены повышающихся степеней, коэффициентами при которых служат конечные разности, разделенные на факториалы. Конечные разности, как правило, быстро уменьшаются, что позволяет в формулах Ньютона пренебречь слагаемыми, коэффициенты при которых становятся малыми. Это обеспечивает вычисление промежуточных значений функции достаточно точно с помощью простых интерполяционных формул.

Пример 4. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для x=0,22 для заданной таблицы (см. табл.1).

Решение: Для вычисления значение функции при x=0,22 воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т.к. x лежит в левой половине отрезка. Ограничимся конечными разностями третьего порядка:

$$Nn(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

Примем x_0=0,2. Тогда $t = \frac{(x-x_0)}{h} = \frac{0{,}22-0{,}2}{0{,}1} = 0{,}2$

Конечные разности первого порядка : $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;

Тогда: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3{,}79 - 2{,}38 = 1{,}41$;

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5{,}44 - 3{,}79 = 1{,}65$;

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 7{,}14 - 5{,}44 = 1{,}7$

Конечные разности второго порядка : $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$;

Тогда: $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 1{,}65 - 1{,}41 = 0{,}24$;

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 1{,}5 - 1{,}65 = 0{,}05$

Конечные разности третьего порядка : $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$;

Тогда: $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -0{,}15 - 0{,}24 = -0{,}19$

Получаем:

$$y(0{,}22) \approx 2{,}38 + 0{,}2 \cdot 1{,}41 + \frac{0{,}2(-0{,}8)}{2} \cdot 0{,}24 + \frac{0{,}2(-0{,}8)(-1{,}8)}{6} \cdot (-0{,}19) \approx 2{,}63368$$

Конечные разности функций удобно располагать в таблице (чтобы нагляднее понимать какие конечные разности надо вычислять):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$				
x_5	y_5	Δy_5					
x_6	y_6						

Если $x_0 \le x \le x_1$, то при использовании **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

Δy_i, $i = 0,..5$	$\Delta^2 y_i$, $i = 0,..4$	$\Delta^3 y_i$, $i = 0,..3$	$\Delta^4 y_i$, $i = 0,..2$	$\Delta^5 y_i$, $i = 0,1$	$\Delta^6 y_i$, $i = 0$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \quad \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i; \quad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

$t =(x - x_0)/h$

$$Nn(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Если $x_1 \le x \le x_2$, можно также использовать предыдущую формулу.

Но, для увеличения точности вычислений, рекомендуется взять вместо x_0 значение x_1 и тогда при использовании **первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед** необходимо вычислить (см. таблицу):

Δy_i, $i = 1,..5$	$\Delta^2 y_i$, $i = 1,..4$	$\Delta^3 y_i$, $i = 1,..3$	$\Delta^4 y_i$, $i = 1,..2$	$\Delta^5 y_i$, $i = 1$

$$Nn(x) = y_1 + t\Delta y_1 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_1 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_1$$

Количество слагаемых в этом случае уменьшается на единицу.

Для интерполирования назад все то же самое, только считаем с конца!!!!

$$Nn(x) = y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Сплайн-интерполяция

Рассмотренные в предыдущих разделах варианты интерполяции, когда интерполяционный полином строится сразу по всем узлам интерполяции, называется *глобальной* ***интерполяцией***. При этом увеличение числа узлов автоматически приводит к повышению степени полинома, и как следствие, к проявлению его колебательных свойств (см. рис.4). Поэтому при большом числе узлов интерполяционные полиномы становятся практически непригодными.

Отрезок, на котором определена функция, можно разбить на участки, содержащие малое число экспериментальных точек, и для каждого из них построить интерполяционные полиномы. Обычно полиномиальную интерполяцию осуществляют максимум по 5-7 узлам. Интерполяцию по нескольким узлам называют *локальной.*

Однако в этом случае аппроксимирующая функция будет иметь точки, где производная не является непрерывной, т. е. график функции будет содержать точки “излома” (см. рис. 5, точка x*).

Кубические сплайны лишены этого недостатка.

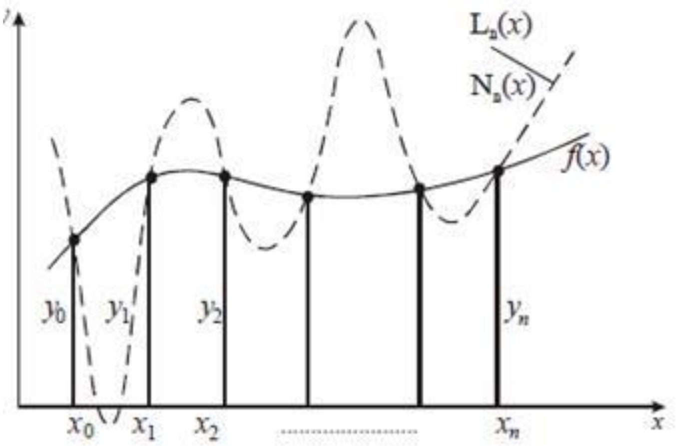

Рис. 4. Проявление колебательных свойств глобального интерполяционного полинома при большом числе узлов

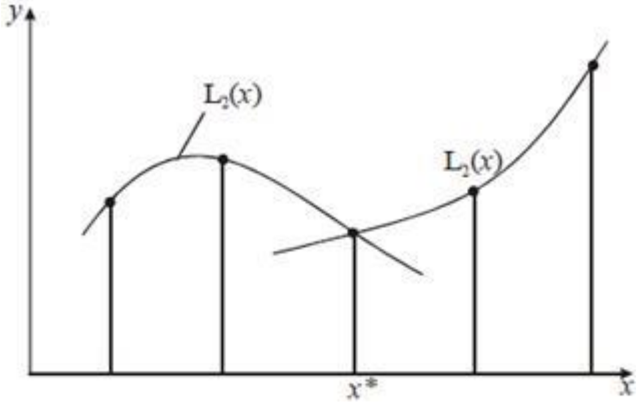

Рис. 5. Иллюстрация варианта локальной интерполяции по каждым трем узлам

Наиболее широкое практическое применение, в силу их простоты, нашли кубические сплайны. Основные идеи теории кубических сплайнов сформировались в результате попыток математически описать гибкие рейки из упругого материала (механические сплайны). Исследования теории балок показали, что гибкая тонкая балка между двумя узлами достаточно хорошо описывается кубическим полиномом, и поскольку она не разрушается, то аппроксимирующая функция должна быть, по меньшей мере, непрерывно дифференцируемой. Это означает, что функции $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$, определяющие форму этой балки, должны быть непрерывными на отрезке $[a, b]$.

Кубическим интерполяционным сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам x_i, называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ функция $S(x)$ является полиномом третьей степени;

2. функция $S(x)$, а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Кубический сплайн является многочленом третьей степени, который для i-го участка записывается так:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений. Часть из них вытекает из условий прохождения графика функции $S(x)$ через заданные точки:

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1},$$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i {h_i}^2 + d_i {h_i}^3 = y_i,$$

$$h_i = (x - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Эта система содержит $2n$ уравнений. Найти все коэффициенты из этих уравнений нельзя, так как условий меньше, чем искомых параметров. Поэтому указанные условия дополняют условиями гладкости функции (т.е. непрерывности первой производной) и гладкости первой производной (т.е. непрерывности второй производной) в узлах интерполяции.

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Приравнивая в каждом внутреннем узле $x = x_i$ значения этих производных, вычисленные в левом и правом от узла интервалах, получаем:

$$b_{i+1} = b_i + 2h_i c_i + 3h_i^2 d_i,$$

$$c_{i+1} = c_i + 3h_i d_i\ , i = 0, 1, \dots, n-1$$

Система линейных уравнений (для всех участков), содержит $2n$ — 2 уравнения с $4n$ неизвестными (неизвестные $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, d_n$ – коэффициенты сплайнов). Чтобы определить два недостающих уравнения добавляют граничные условия:

$$S''(x_0) = c_1 = 0\ \text{ и } S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n$$

Совместное решение $4n$ уравнений позволяет найти все $4n$ коэффициента.

К важным достоинствам интерполяции кубическими сплайнами относится получение функции, имеющей минимальную возможную кривизну. К недостаткам сплайновой интерполяции относится необходимость получения сравнительно большого числа параметров.