УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Вычислительная математика

Малышева Татьяна Алексеевна, доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 2020

Численные методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи. Дано нелинейное уравнение вида **f(x)= 0,** где **f(x)** — заданная алгебраическая или трансцендентная (включает в себя тригонометрические или экспоненциальные функции) функция.

f(x)= $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ (имеет *n*-корней)

f(x)= $\sin x+0{,}1x^2$ (имеет *бесконечное множество* решений)

Решить уравнение – это найти такое $x^* \in R$: **f**(x^*)=0. Значение x^* называют *корнем уравнения*.

Методы делятся на:

- **точные** (позволяют найти решение непосредственно с помощью формул)
- **итерационные** (приближенные)

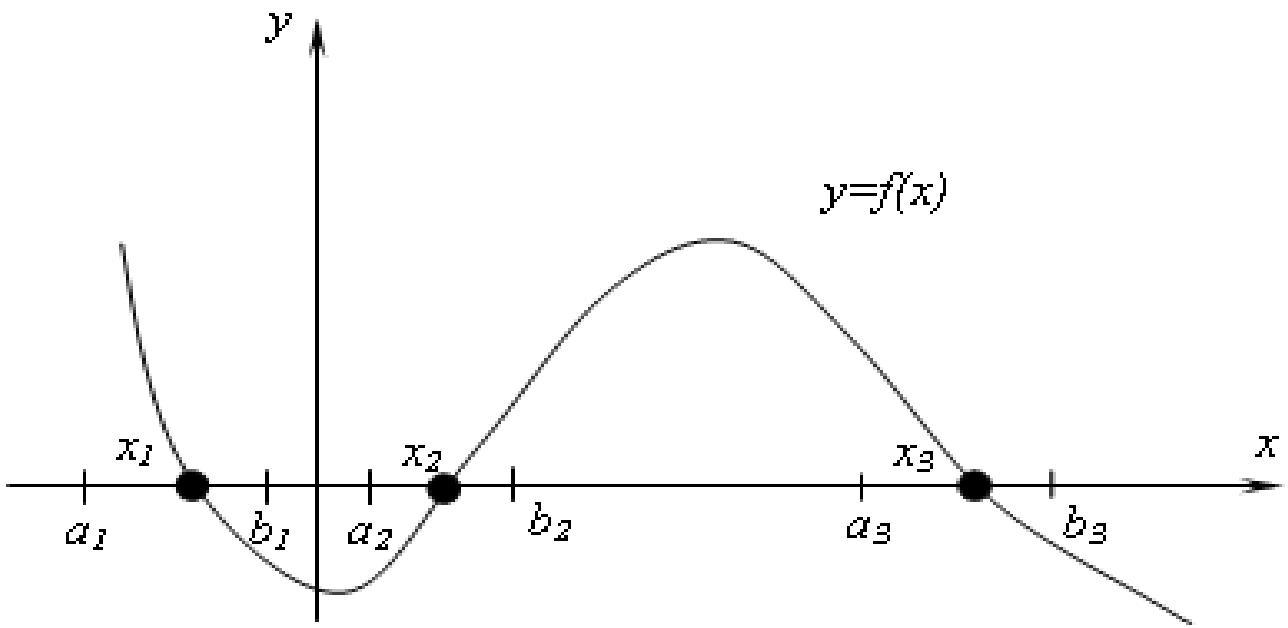
Этапы приближенного решения нелинейных уравнений

- Отделение (локализация) корней, т.е. определение интервала [a,b], на котором содержится только один корень уравнения **f(x)=0**. Такой интервал называется интервалом изоляции корня
- Уточнение корней до заданной точности

Способы отделения корней

- графический
- табличный
- аналитический

Графическое отделение корней



Табличное отделение корней

Аналитическийспособ состоит в нахождении экстремумов функции $f(x)$, исследование ее поведения при $x \to \pm\infty$ и нахождении участков возрастания и убывания функции.

Табличныйспособ– это построение таблицы Табулирования функции.
О наличии корней свидетельствуют перемены знака функции. Чтобы не произошла потеря корней, шаг изменения аргумента должен быть достаточно мелким, а интервал изменения достаточно широким.

x	***f(x)***
-3	-29,280
-2,5	-13,818
-2	-3,330
-1,5	2,933
-1	5,720
-0,5	5,783
0	3,870
0,5	0,733
1	-2,880
1,5	-6,218
2	-8,530
2,5	-9,068
3	-7,080
3,5	-1,818
4	7,470
4,5	21,533
5	41,120

Теоремы существования корней

- ***Необходимое условие существования корня уравнения на отрезке* [a,b]:**

Теорема 1. Если непрерывная функция **f(x)** на концах отрезка [a; b] принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения.

- ***Достаточное условие единственности корня* на отрезке [a,b]:**

Теорема 2. Если непрерывная функция **f(x)** на отрезке [a; b] принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная **f'(x)** сохраняет знак внутри отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения **f(x) = 0**.

Методы уточнения приближенных значений действительных корней

- *метод половинного деления (метод дихотомии);*
- *метод хорд*
- *метод Ньютона (метод касательных) ;*
- *модифицированный метод Ньютона (метод секущих);*
- *метод простых итераций ;*
- и др.

Основные требования и показатели численных методов

- устойчивость;
- сходимость;
- эффективность (скорость сходимости);

Алгоритм считается <u>устойчивым</u>, если он обеспечивает нахождение существующего и единственного решения при различных исходных данных (малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов)

Алгоритм <u>сходится</u>, если итерационная последовательность приближений x_1, x_2,…,x_n→x* , $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

<u>Скорость сходимости</u>(эффективность) – обозначает количество итераций, затраченных алгоритмом для достижения приемлемой точности решения задачи. Чем выше скорость, тем меньше итераций необходимо выполнить.

Различают линейную, сверхлинейную, квадратичную скорость:

$|x^n - x^*| \le \alpha |x^{n-1} - x^*|^\beta, \quad \alpha \in (0{,}1), \quad \beta = 1$ – линейная,

$1 < \beta < 2$ – сверхлинейная, $\beta = 2$ – квадратичная.

Метод половинного деления

Идея метода: начальный интервал изоляции корня делим пополам, получаем начальное приближение к корню:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

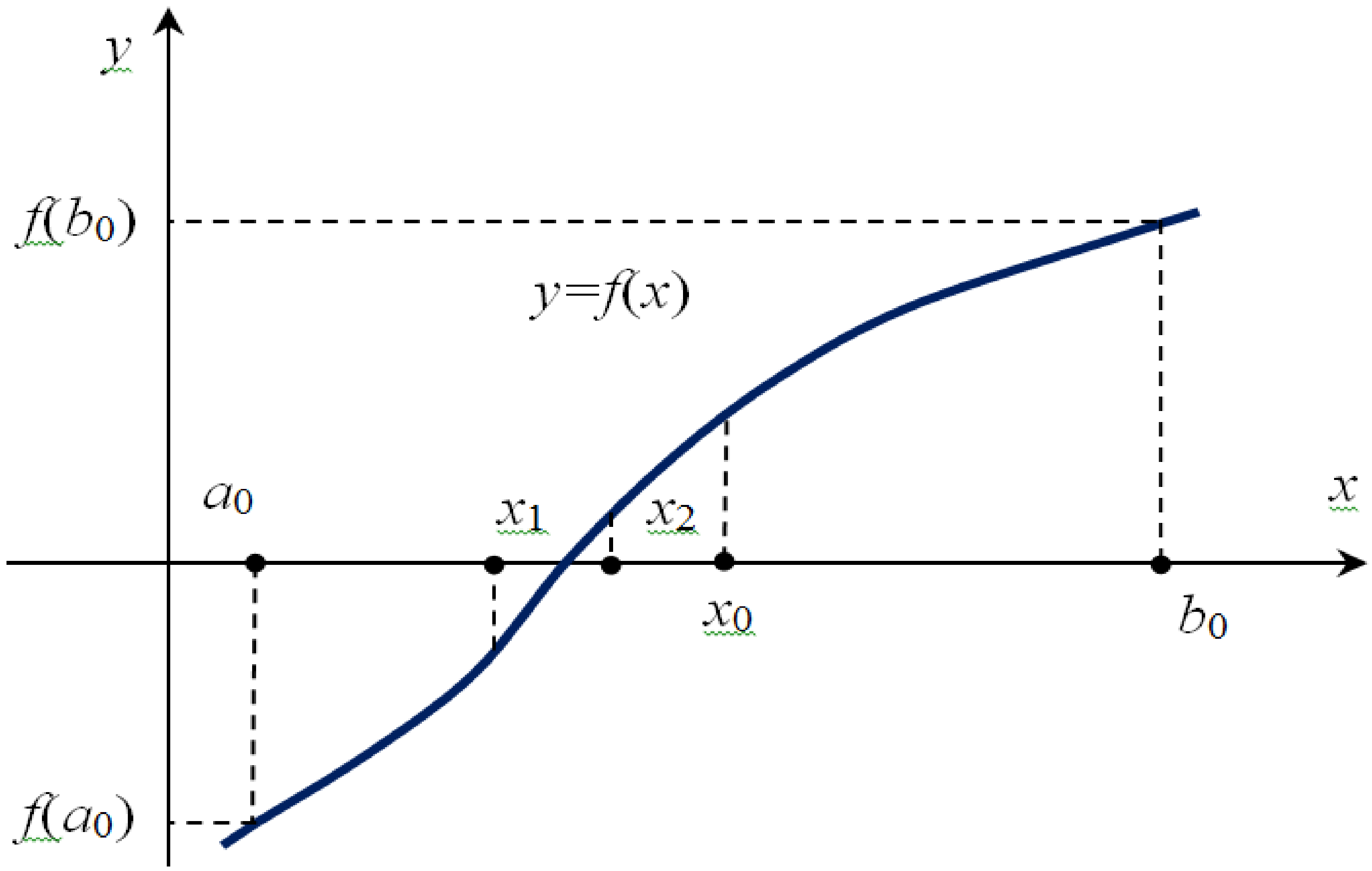
Вычисляем $f(x_0)$. В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$. Другую половину отрезка $[a_0, b_0]$, на которой функция $f(x)$ знак не меняет, отбрасываем. Новый интервал вновь делим пополам, получаем очередное приближение к корню: $x_1=(a_1+b_1)/2$. и т.д.

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_i = \frac{a_i+b_i}{2}}$

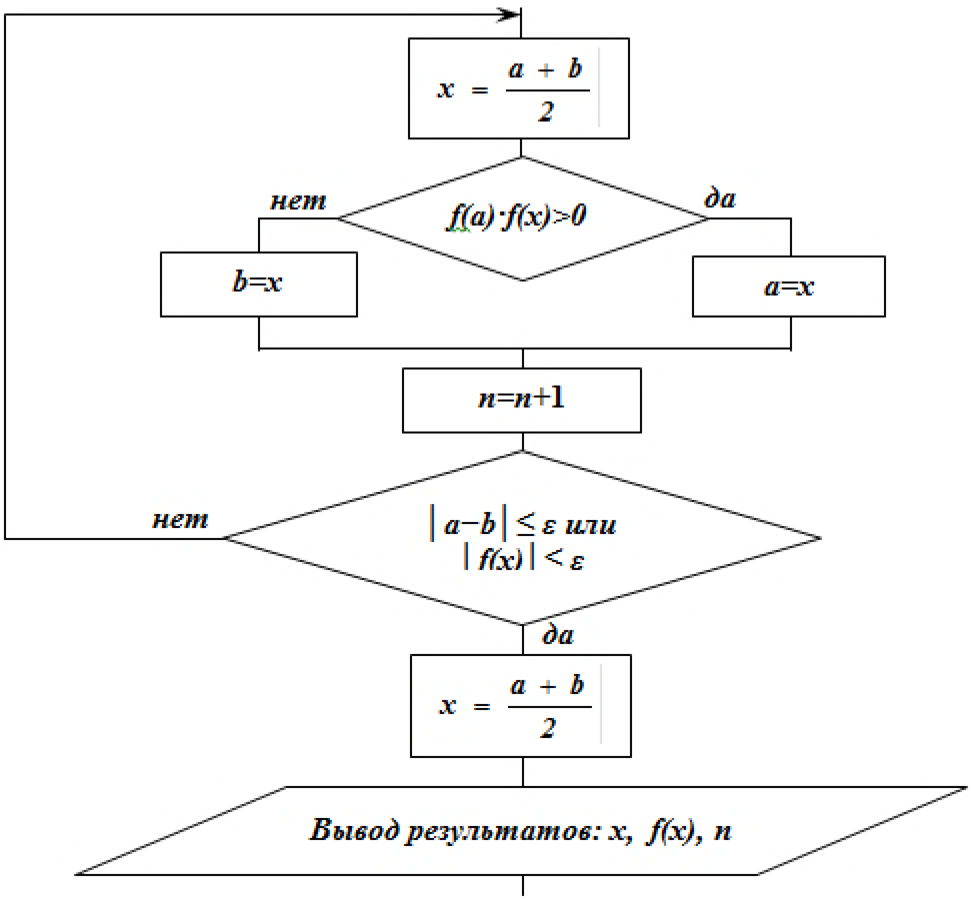
Критерий окончания итерационного процесса: $|b_n - a_n| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^* = \frac{a_n+b_n}{2}$ или $x^* = a_n$ или $x^* = b_n$

Визуализация метода половинного деления



Блок-схема метода половинного деления



Достоинства и недостатки метода ПД

Достоинства:

- прост и надежен.
- обладает абсолютной сходимостью (близость получаемого численного решения задачи к истинному решению.)
- устойчив к ошибкам округления.

Рекомендация: применять когда требуется высокая надежность счета, а скорость несущественна.

Недостатки:

- если интервал содержит несколько корней, то неизвестно к какому относится вычислительный процесс.
- медленный метод: имеет линейную сходимость.

Оценка числа итераций

$$|a_1 - b_1| = \frac{|a_0 - b_0|}{2}, \ |a_2 - b_2| = \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$$

$$|a_k - b_k| = |a_0 - b_0| \cdot 2^{-k}$$

$$|a_0 - b_0| \cdot 2^{-k} \le \varepsilon$$

$$k \ge \log_2 \frac{|a_0 - b_0|}{\varepsilon}$$

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, при $|a_0 - b_0| = 1$

$$k = 9{,}966 \approx 10$$

Пример 1. Метод половинного деления

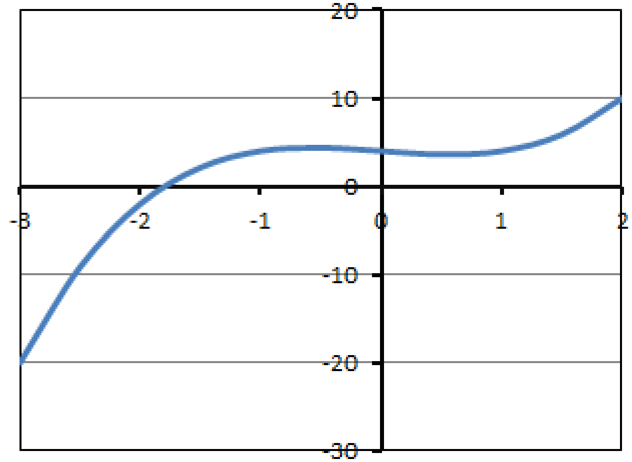
Найти корень уравнения:

$$x^3 - x + 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$$n = 7$$

$$x^* \approx 1{,}79297$$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	|a-b|
0	-2,00000	-1,00000	-1,50000	-2,00000	4,00000	2,12500	1
1	-2,00000	-1,50000	-1,75000	-2,00000	2,12500	0,39063	0,5
2	-2,00000	-1,75000	-1,87500	-2,00000	0,39063	-0,71680	0,25
3	-1,87500	-1,75000	-1,81250	-0,71680	0,39063	-0,14185	0,125
4	-1,81250	-1,75000	-1,78125	-0,14185	0,39063	0,12961	0,0625
5	-1,81250	-1,78125	-1,79688	-0,14185	0,12961	-0,00480	0,03125
6	-1,79688	-1,78125	-1,78906	-0,00480	0,12961	0,06273	0,015625
7	-1,79688	-1,78906	-1,79297	-0,00480	0,06273	0,02905	0,0078125

Метод хорд

Идея метода: функция *y=f(x)* на отрезке [a, b] заменяется хордой и в качестве приближенного значения корня принимается точка пересечения хорды с осью абсцисс.

Уравнение хорды, проходящей через точки A(*a, f(a))* и B *(b, f(b):*

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

Точка пересечения хорды с осью абсцисс (*y=0):*

$$x = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

Вычисляем x_0, *f(*x_0*).* В качестве нового интервала выбираем ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a_0, x_0]$ либо $[b_0, x_0]$.

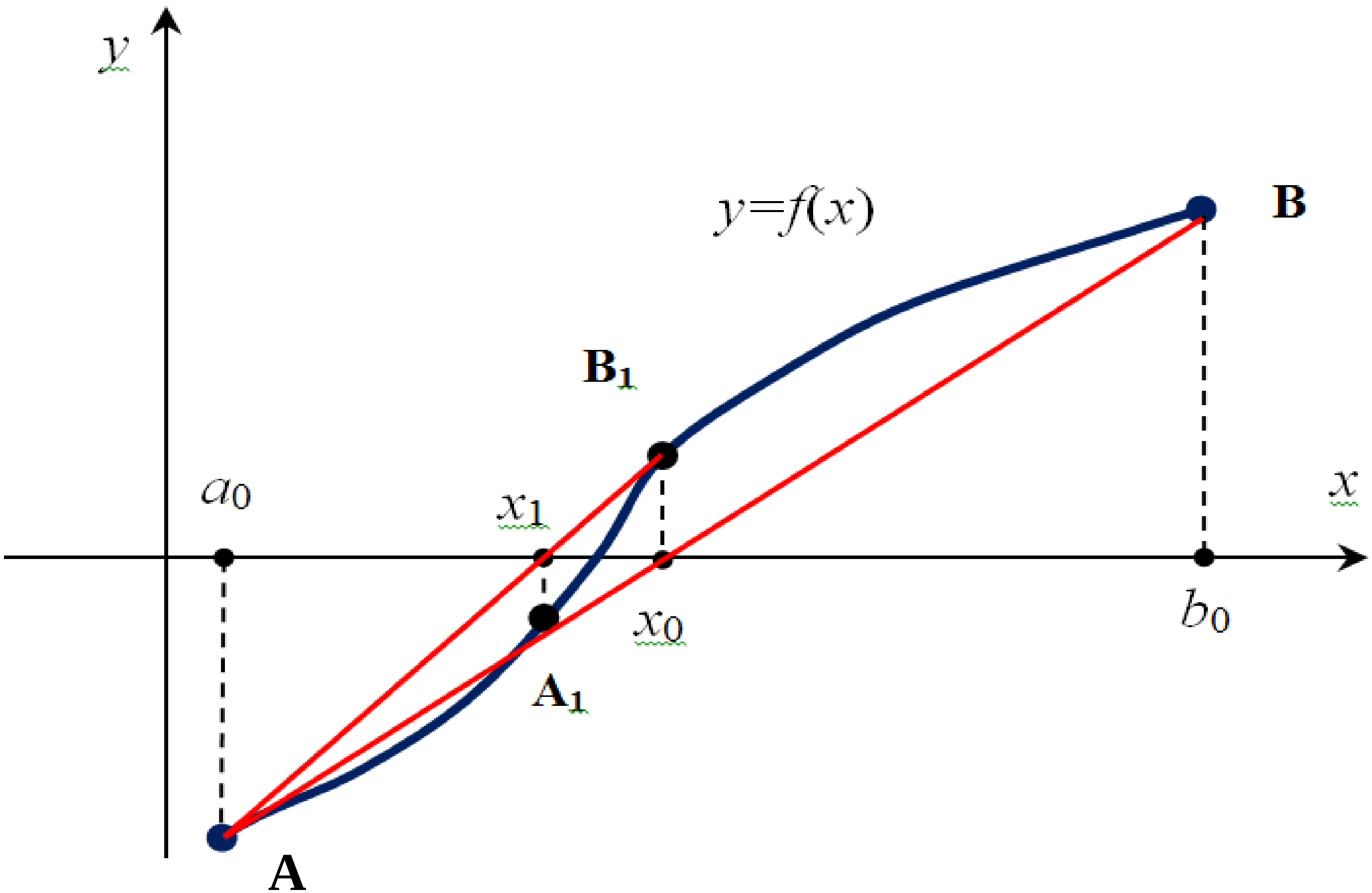
Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \text{ или } |f(x_n)| \le \varepsilon.$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода хорд



Условия сходимости метода хорд

Достаточное условие сходимости метода:

- функция *y= f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- *f(a)·f(b) < 0* (на концах отрезка [*a;b*]функция имеет разные знаки);
- производные *f'(x)* и *f''(x)* сохраняют знак на отрезке [*a;b*];

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:

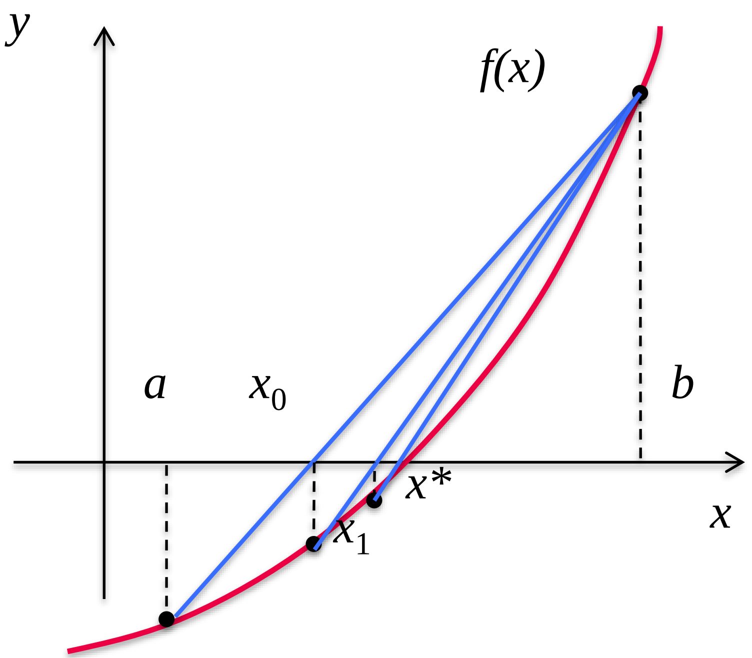
Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие: $f(x) \cdot f''(x) > 0$ (тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

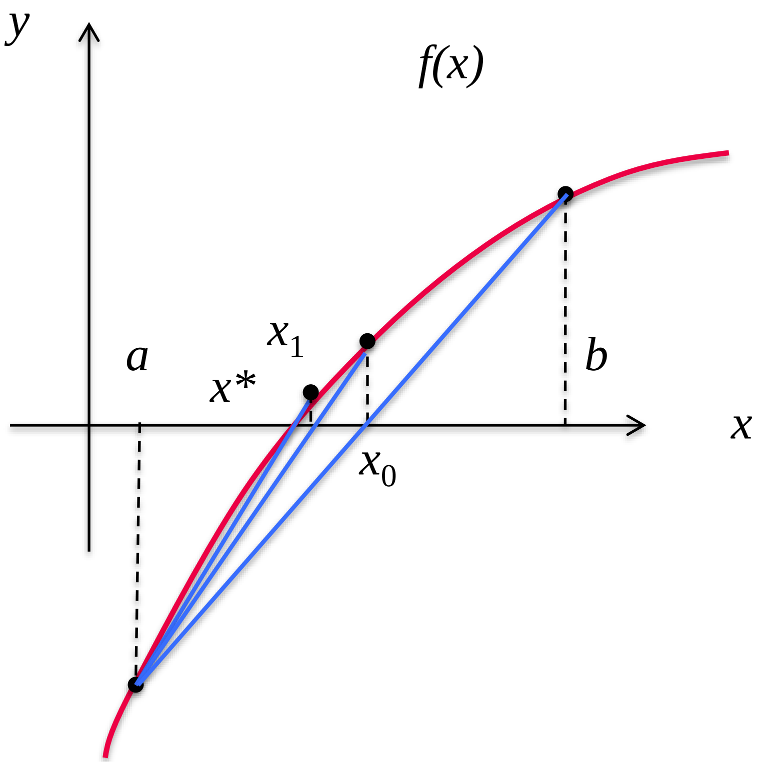
Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_0 = b \rightarrow x_1 = b - \frac{(a-b)}{f(a)-f(b)} f(b) \quad x_{i+1} = x_i - \frac{(a-x_i)}{f(a)-f(x_i)} f(x_i)}$$

$$\boldsymbol{x_0 = a \rightarrow \quad x_1 = a - \frac{(b-a)}{f(b)-f(a)} f(a) \qquad x_{i+1} = x_i - \frac{(b-x_i)}{f(b)-f(x_i)} f(x_i)}$$

Визуализация метода хорд





$$x_{i+1} = x_i - \frac{(a_i - x_i)}{f(a_i) - f(x_i)} f(x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(b_i - x_i)}{f(b_i) - f(x_i)} f(x_i)$$

Достоинства и недостатки метода хорд

Достоинства:

- Простота реализации

Недостатки:

- Скорость сходимости – линейная. Порядок сходимости метода хорд выше, чем у метода половинного деления.
- Выбор начального приближения.

Пример 2. Метод хорд

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

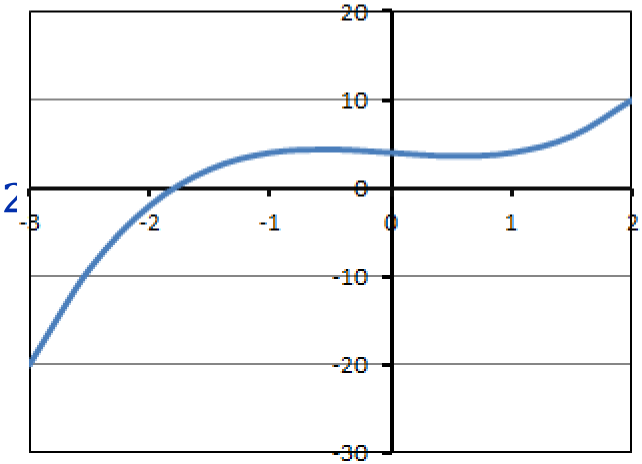
с точностью $\varepsilon = 0{,}01 f'(x) = 3x^2$

$f(-2) < 0 \;\; f(-1) > 0$

$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$

$n = 3$

$x^* \approx 1{,}79611$



№ итерации	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-2,00000	-1,00000	-1.66667	-2,00000	4,00000	1.03704	-
1	-2,00000	-1.66667	-1.78049	-2,00000	1.03704	0.13610	0.11382
2	-2,00000	-1.78049	-1.79447	-2,00000	0.13610	0.01603	0.01399
3	-2,00000	-1.79447	-1.79611	-0,71680	0.01603	0.00186	0.00163

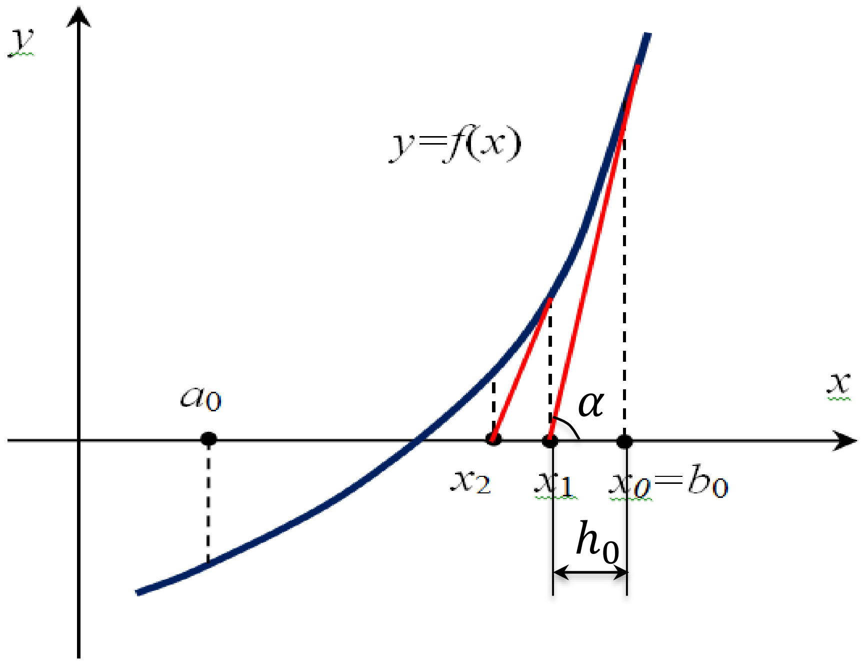
Метод Ньютона (касательных)

Идея метода: функция *y=f(x)* на отрезке [a, b] заменяется касательной и в качестве приближенного значения корня $x^*=x_n$ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

$$x_1 = x_0 - h_0$$

$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\tan\alpha} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}}$$

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $\left|\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Условия сходимости метода Ньютона

Достаточное условие сходимости метода Ньютона:

Метод Ньютона применяется в том случае, если выполняются условия:

- функция *y= f(x)* определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (на концах отрезка $[a;b]$функция имеет разные знаки);
- производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[a;b]$;
- производная $f'(x) \neq 0$

Выбор начального приближения $x_0 \in [a; b]$:

Метод обеспечивает быструю *сходимость*, если выполняется условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

(тот конец интервала, для которого знаки функции и второй производной совпадают)

Достоинства и недостатки метода Ньютона

Достоинства:

- квадратичная сходимость .

Недостатки:

- необходимость вычисления производной на каждой итерации.
- выбор начального приближения.

Пример 3. Метод Ньютона

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

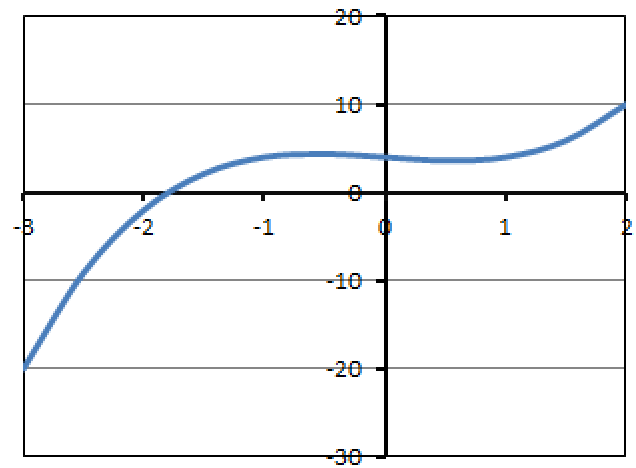
$f'(x) = 3x^2 - 1 \;\; f''(x) = 6x$

$f(-2) < 0 \;\; f(-1) > 0$

$f''(-2) < 0 \rightarrow x_0 = -2$

$n = 2$

$x^* \approx 1{,}79632$



№ итерации	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	-2,00000	-2,00000	11.00000	-1.81818	-
1	-1.81818	-0.19234	8.91736	-1.79661	0.02157
2	-1.79661	-0.00253	8.68345	-1.79632	0.00029

Метод секущих

Упростим метод Ньютона, заменив $f'(x)$ разностным приближением:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Рабочая формула метода:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)} \qquad i = 1,2 \ldots$$

Метод секущих является ***двухшаговым***, т.е.новое приближение x_{i+1} определяется двумя предыдущими итерациями x_i и x_{i-1}.

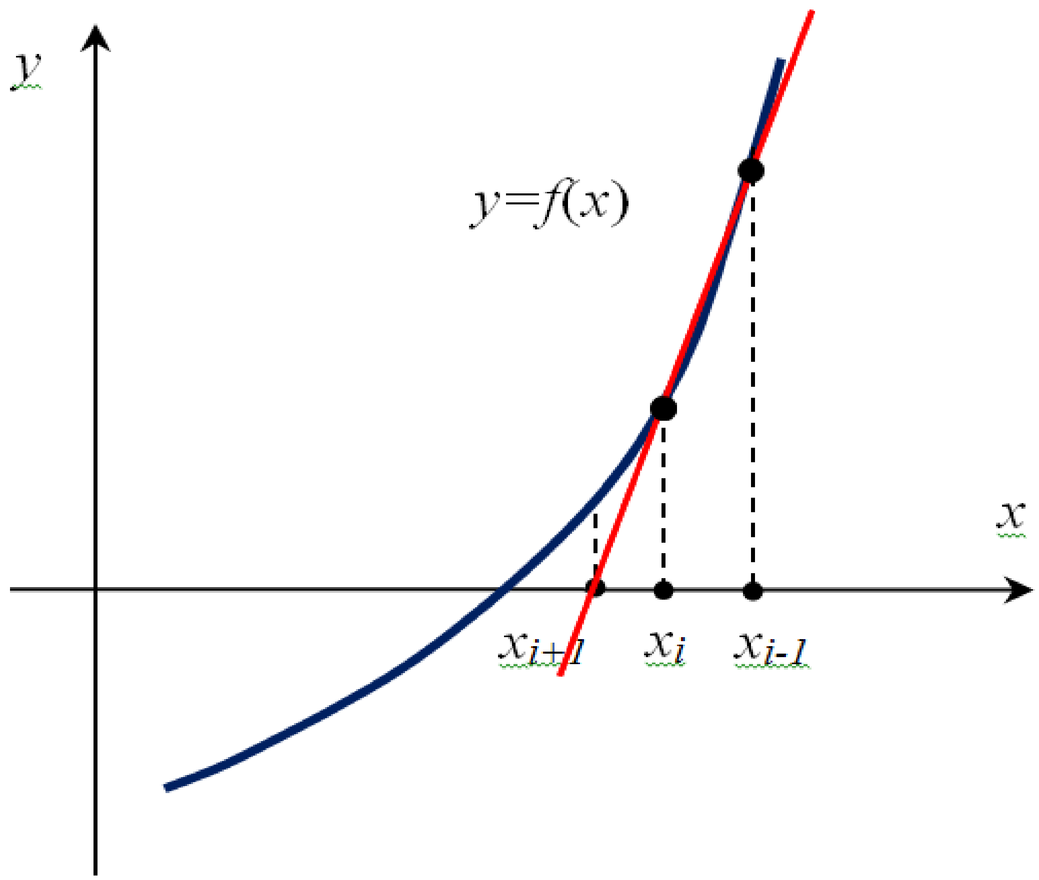
Выбор x_0 определяется как и в методе Ньютона, x_1- выбирается рядом с начальным самостоятельно.

Критерий окончания итерационного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ или } |f(x_n)| \leq \varepsilon.$$

Приближенное значение корня: $x^* = x_n$

Визуализация метода секущих



Достоинства и недостатки метода секущих

Достоинства:

Меньший объем вычислений по сравнению с методом Ньютона, т.к. не требуется вычислять производную.

Недостатки:

Порядок сходимости метода секущих ниже, чем у метода касательных и равен золотому сечению ≈1,618 (сверхлинейная).

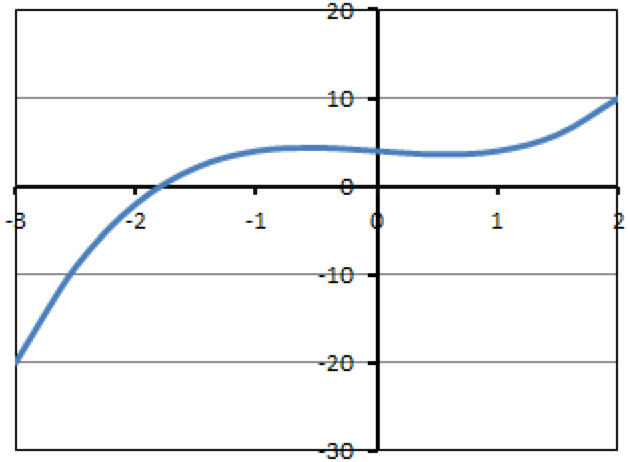
Пример 4. Метод секущих

Найти корень уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

с точностью $\varepsilon = 0{,}01$

$x_0 = -2 \quad x_1 = -1{,}5$



$n = 2$

$x^* \approx 1{,}79612$

№ итерации	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$	$\|x_{i+1} - x_i\|$
0	-2,00000	-1.50000	-1.75758	2.12500	0.25758
1	-1.50000	-1.75758	-1.80464	0.32830	0.04706
2	-1.75758	-1.80464	-1.79612	-.07258	0.00852

Метод простой итерации

Уравнение $f(x) = 0$ приведем к эквивалентному виду: $x = \varphi(x)$

Выбор начального приближения: $x_0 \in [a, b]$

$$x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow x_2 = \varphi(x_1) \ldots$$

Рабочая формула метода: $\boldsymbol{x_{i+1} = \varphi(x_i)}$

Условия сходимости метода простой итерации определяются следующей теоремой.

Теорема. Если в некоторой σ - окрестности корня x^* уравнения $f(x) = 0$ функция $x = \varphi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| < q$, где $0 \leq q < 1$ - постоянная, то независимо от выбора начального приближения x_0 из указанной σ - окрестности

итерационная последовательность x_n не выходит из этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

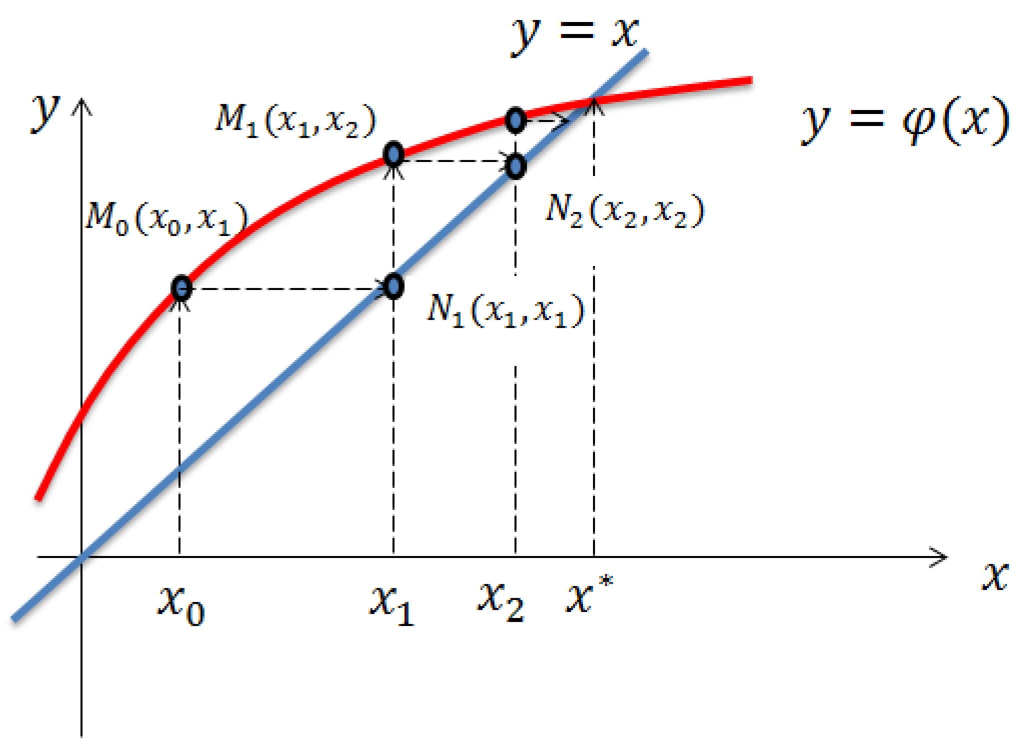
Достаточное условие сходимости метода:

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$, где q – некоторая константа

Критерий окончания итерационного процесса:

$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

Метод простой итерации



При итерационном процессе получается ломаная линия $M_0N_1M_1N_2M_{2....}$, где абсциссы M_n- последовательные приближения x_n к решению x^*

Достоинства и недостатки метода простой итерации

Достоинства:

Простота реализации

Недостатки:

Сходимость метода в малой окрестности корня и вытекающая отсюда необходимость выбора начального приближения к корню из этой малой окрестности. В противном случае итерационный процесс расходится или сходится к другому корню этого уравнения.

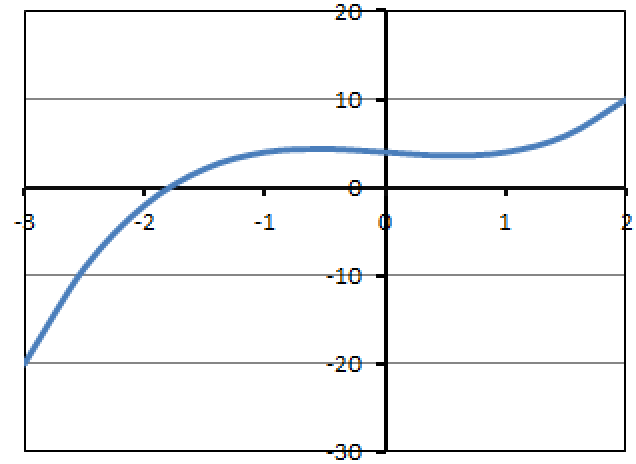
Если $|\varphi'(x)| \approx 1$, то сходимость может быть очень медленной.

Метод простой итерации

Способы преобразования уравнения:

$x^3 - x + 4 = 0$

Преобразуем уравнение к виду x =φ (x)



$\boldsymbol{1.\ \varphi(x) = x^3 + 4 = 0}$

$\varphi'(x) = 3x^2$

$\varphi'(-2) = 12 > 1$

$\varphi'(-1) = 3 > 1$

$\boldsymbol{2.\ \varphi(x) = \sqrt[3]{x-4}}$

$\varphi'(x) = 1/3(x-4)^{-2/3}|\varphi'(-2)| < 1|\varphi'(-1)| < 1$

3. Умножим исходное уравнение на коэффициент $\lambda \to \lambda \mathrm{f(x)} = 0$

Прибавим к обеим частям x и обозначим $\varphi(x) = x + \lambda \mathrm{f(x)}$,

тогда: $|1 + \lambda \mathrm{f}'(\mathrm{x})| < 1 \quad \lambda \to \ -2 < \lambda \mathrm{f}'^{(\mathrm{x})} < 0 \quad \to \quad |\lambda| \le |\frac{2}{\max\{f'(x)\}}|$

Обычно принимают: $\lambda = -\frac{1}{\max\{f'(x)\}}$

Метод простой итерации

$$x^3 - x + 4 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \quad f'(-2) = 11 \quad f'(-1) = 2$$

$$\lambda = -\frac{1}{\max\{f'(x)\}} = -\frac{1}{11}$$

$$x = x + \lambda(x^3 - x + 4)$$

$$x_{i+1} = \frac{12}{11}x_i - \frac{1}{11}x_i^3 - \frac{4}{11}$$

$$n = 2$$

$$x^* \approx 1,79651$$

№ итерации	x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	-2,00000	-2,00000	-1.81818	0.08182
1	-1.81818	-0.19232	-1.79723	0.01750
2	-1.79723	-0.03793	-1.79651	0.00345