Университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №5
по «Вычислительной математике»
Интерполяция функции
Вариант 9

Выполнил: Кривошейкин Сергей

Группа Р3214

Преподаватель: Малышева Т. А.

г. Санкт-Петербург

2020

Цель работы: решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек

Для исследования использовать:

- линейную и квадратичную интерполяцию
- многочлен Лагранжа
- многочлен Ньютона

Методика проведения исследования:

- С помощью линейной и квадратичной интерполяции найти приближенное значение функции при x= X_1
- Найти приближенное значение функции при x= X_1 с помощью многочлена Лагранжа
- Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции при данных значениях аргумента (для значения X_2 и X_3)
- Вычислить значения функции, используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов (для x=X_4). При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления произвести дважды, используя различные узлы

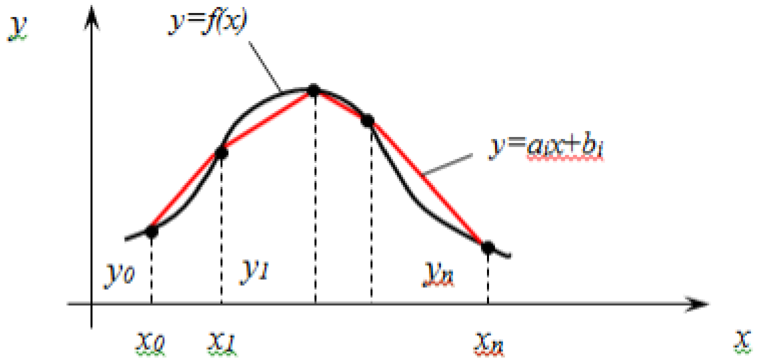
Программная реализация задачи:

- Предусмотреть ввод исходных данных (исходные таблицы) из файла
- Предусмотреть ввод значения аргумента, для которого вычисляется приближенное значение функции, с клавиатуры
- Реализовать численные методы интерполирования, каждый метод в отдельной функции/классе
- Предусмотреть вывод результатов на экран

Ход работы:

Линейная интерполяция:

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является линейная интерполяция. Она состоит в том, что заданные точки $(x_i\ , y_i), i = 0{,}1 \dots n$, соединяются прямолинейными отрезками, и функция $f(x)$ приближается к ломаной с вершинами в данных точках.



Уравнения каждого отрезка ломаной линии в общем случае разные. Поскольку имеется n интервалов $(x_{i-1}\ , x_i)$, то для каждого из них в качестве уравнения интерполяционного полинома используется уравнение прямой, проходящей через две точки. В частности, для i — го интервала можно написать уравнение прямой, проходящей через точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и $(x_i\ , y_i)$, в виде:

$$\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Отсюда:

$$y = a_i x + b_i, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i \qquad (2)$$

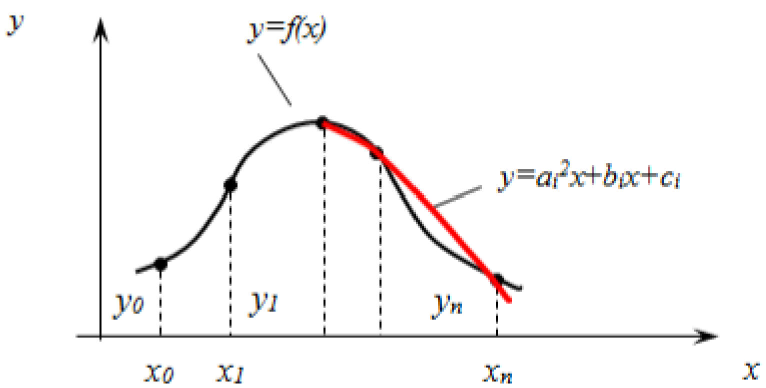
$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Следовательно, при использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение аргумента x, а затем подставить его в формулу (2) и найти приближенное значение функций в этой точке.

Квадратичная интерполяция:

В случае квадратичной интерполяции в качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен. Уравнения квадратного трехчлена имеет вид:

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i x_{i-1} \le x \le x_{i+1} \qquad (3)$$



Для определения неизвестных коэффициента необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (3) через три точки (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) (x_{i+1}, y_{i+1}). Эти условия можно записать в виде:

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}$$

$$a_i x_i^z + b_i x_i + c_i = y_i$$

$$a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}$$

Интерполяция для любой точки $x \in [x_0, x_n]$ проводится по трем ближайшим ней узлам.

Многочлен Лагранжа:

При глобальной интерполяции на всем интервале $[a,b]$ строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

где $l_i(x)$ – базисные многочлены степени *n*:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Многочлен $l_i(x)$ удовлетворяет условию

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Это условие означает, что многочлен равен нулю при каждом x_j кроме x_i, то есть

$x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ – корни этого многочлена.

Таким образом, степень многочлена $L_n(x)$ равна *n* и при $x \neq x_i$ обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером $i = j$, равного y_i.

Выражение применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции $f(x)$, от расположения узлов интерполяции и точки *x*. Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях *n* (*n* <20). При больших *n* погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом *n*).

Многочлен Ньютона:

Другая форма записи интерполяционного многочлена – интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями. Пусть функция $f(x)$ задана с произвольным шагом, и точки таблицы значений пронумерованы в произвольном порядке.

Разделенные разности нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Разделенные разности *k*-го порядка определяются через разделенные разности порядка $k-1$:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

Интерполяционный полином Ньютона для равноотстоящих узлов:

Узлы интерполирования x_0, x_1, ..., x_n называются равноотстоящими, если:

$x_i - x_i = h = const$, где *h* - шаг интерполирования, $x_i = x_0 + ih$.

Конечные разности являются рабочим аппаратом при изучении функций, заданных таблицей значений в равноотстоящих узлах.

Конечными разностями первого порядка называют величины:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1$$

Конечными разностями второго порядка называют величины:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$

Конечными разностями k-го порядка называют величины:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

$$Nn(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Введем обозначение: $t = (x - x_0)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется *первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед*:

$$Nn(x) = y_i + t\Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_i + \cdots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_i$$

Полученное выражение может аппроксимировать функцию на левом половине отрезка.

Для правой половины отрезка разности вычисляют справа налево: $t = (x - x_n)/h$. Тогда получим формулу Ньютона, которая называется **второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад:**

$$Nn(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

При **экстраполировании** для отыскания значений функции для $x < x_0$ используется первый интерполяционный многочлен Ньютона. В этом случае *t = <0* и говорят, что первая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования назад**.

При отыскании значений функции для $x > x_n$ используется второй интерполяционный многочлен Ньютона.

В этом случае *t => 0* и говорят, что вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для **экстраполирования вперед**.

Вычисления:

Исходные данные:

Таблица 1	
$X_1 = 0{,}325$ $X_4 = 0{,}302$	
x	**y**
0,298	3,2557
0,303	3,1764
0,310	3,1218
0,317	3,0482
0,323	2,9875
0,330	2,9195
0,339	2,8359

Таблица 5	
$X_2 = 0{,}255$ $X_3 = 0{,}523$	
x	**y**
0,25	1,2557
0,30	2,1764
0,35	3,1218
0,40	4,0482
0,45	5,9875
0,50	6,9195
0,55	7,8359

1. Найти приближенное значение функции y=f(x) при x=0,325 для таблицы 1.

Решение: используем линейную интерполяцию. Значение x=0,325 находится между узлами $x_{i-1} = 0{,}323$ и $x_i = 0{,}330$. Тогда:

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{2.9195 - 2.9875}{0.330 - 0.323} = -9.714285$$

$$b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1} = 2.9875 - (-9.714285) \cdot 0.323 = 6.1252$$

$$y \approx -9.714285x + 6.1252 = -9.714285 * 0.325 + 6.1252 = 2.968057$$

Решение: используем квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений для ближайших узлов к точке x=0,325: $x_{i-1} = 0{,}317, x_i = 0{,}323$ и $x_{i+1} = 0{,}330$, соответственно $y_{i-1} = 3{,}0482, y_i = 2{,}9875$ и $y_{i+1} = 2{,}9195$.

$$0.317^2 a_i + 0.317 b_i + c_i = 3.0482$$

$$0.323^2 a_i + 0.323 b_i + c_i = 2.9875$$

$$0.330^2 a_i + 0.330 b_i + c_i = 2.9195$$

В результате решения системы получим: $a_i \approx 30.9524, b_i \approx -29.9262, c_i \approx 9.42443$

$$y \approx 30.9524 * 0.325^2 - 29.9262 * 0.325 + 9.42443 = 2.96776$$

2. Найти приближенное значение функции y=f(x) при x=0,325 для таблицы 1 с помощью многочлена Лагранжа.

Решение: найдем:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)(x_0-x_5)(x_0-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.303)(0.325-0.310)(0.325-0.317)(0.325-0.323)(0.325-0.330)(0.325-0.339)}{(0.298-0.303)(0.298-0.310)(0.298-0.317)(0.298-0.323)(0.298-0.330)(0.298-0.339)}$$
$$= 0.0098844672657253 * y_0 = 0.0098844672657253 * 3.2557 = 0.032180860077022$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_1-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.310)(0.325-0.317)(0.325-0.323)(0.325-0.330)(0.325-0.339)}{(0.303-0.298)(0.303-0.310)(0.303-0.317)(0.303-0.323)(0.303-0.330)(0.303-0.339)}$$
$$= -0.047619047619048 * y_1 = -0.047619047619048 * 3.1764 = -0.15125714285714$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_2-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.303)(0.325-0.317)(0.325-0.323)(0.325-0.330)(0.325-0.339)}{(0.310-0.298)(0.310-0.303)(0.310-0.317)(0.310-0.323)(0.310-0.330)(0.310-0.339)}$$
$$= 0.15005683971201 * y_2 = 0.15005683971201 * 3.1218 = 0.46844744221295$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_3-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.303)(0.325-0.310)(0.325-0.323)(0.325-0.330)(0.325-0.339)}{(0.317-0.298)(0.317-0.303)(0.317-0.310)(0.317-0.323)(0.317-0.330)(0.317-0.339)}$$
$$= -0.3903990746096 * y_3 = -0.3903990746096 * 3.0482 = -1.190014459225$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)(x-x_6)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_4-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.303)(0.325-0.310)(0.325-0.317)(0.325-0.330)(0.325-0.339)}{(0.323-0.298)(0.323-0.303)(0.323-0.310)(0.323-0.317)(0.323-0.330)(0.323-0.339)}$$
$$= 1.1423076923077 * y_4 = 1.1423076923077 * 2.9875 = 3.4126442307693$$

$$l_5(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_6)}{(x_5-x_0)(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_5-x_6)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.303)(0.325-0.310)(0.325-0.317)(0.325-0.323)(0.325-0.339)}{(0.330-0.298)(0.330-0.303)(0.330-0.310)(0.330-0.317)(0.330-0.323)(0.330-0.339)}$$
$$= 0.14102564102564 * y_5 = 0.14102564102564 * 2.9195 = 0.41172435897436$$

$$l_6(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_6-x_0)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)}$$
$$= \frac{(0.325-0.298)(0.325-0.303)(0.325-0.310)(0.325-0.317)(0.325-0.323)(0.325-0.330)}{(0.339-0.298)(0.339-0.303)(0.339-0.310)(0.339-0.317)(0.339-0.323)(0.339-0.330)}$$
$$= -0.0052565180824222 * y_6 = -0.0052565180824222 * 2.8359 = -0.014906959629941$$

$$\boldsymbol{Ln(0.325) = l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) + l_3(x) + l_4(x) + l_5(x) + l_6(x) = 2.9688183303216}$$

3. Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона найти приближенное значение функции для $x_2 = 0.255$ и $x_3 = 0.523$, для таблицы 5.

Решение: для вычисления значение функции при $x = 0.255$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед, т. к. x лежит в левой половине отрезка.

Поскольку $x_0 \le x \le x_1$, то при использовании первой интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед необходимо вычислить:

$$\Delta y_i, i = 0,..5, \qquad \Delta^2 y_i, i = 0,..4, \qquad \Delta^3 y_i, i = 0,..3, \qquad \Delta^4 y_i, i = 0,..2,$$
$$\Delta^5 y_i, i = 0,1, \qquad \Delta^6 y_i, i = 0$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \qquad \Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

$$Nn(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Примем $x_0 = 0.25$. Тогда $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.255 - 0.25}{0.05} = 0.1$

Конечные разности первого порядка: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;

Тогда: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 2.1764 - 1.2557 = 0.9207$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 3.1218 - 2.1764 = 0.9454$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 4.0482 - 3.1218 = 0.9264$

$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 5.9875 - 4.0482 = 1.9393$

$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 6.9195 - 5.9875 = 0.932$

$\Delta y_5 = y_6 - y_5 = 7.8359 - 6.9195 = 0.9164$

Конечные разности второго порядка: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$;

Тогда: $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 0.9454 - 0.9207 = 0.0247$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 0.9264 - 0.9454 = -0.019$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 1.9393 - 0.9264 = 1.0129$

$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 0.932 - 1.9393 = -1.0073$

$\Delta^2 y_4 = \Delta y_5 - \Delta y_4 = 0.9164 - 0.932 = -0.0156$

Конечные разности третьего порядка: $\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$;

Тогда: $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = -0.019 - 0.0247 = -0.0437$

$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 1.0129 + 0.019 = 1.0319$

$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = -1.0073 - 1.0129 = -2.0202$

$\Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = -0.0156 + 1.0073 = 0.9917$

Конечные разности четвертого порядка: $\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$;

Тогда: $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 1.0319 + 0.0437 = 1.0756$

$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 = -2.0202 - 1.0319 = -3.0521$

$\Delta^4 y_2 = \Delta^3 y_3 - \Delta^3 y_2 = 0.9917 + 2.0202 = 3.0119$

Конечные разности пятого порядка: $\Delta^5 y_i = \Delta^4 y_{i+1} - \Delta^4 y_i$;

Тогда: $\Delta^5 y_0 = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0 = -3.0521 - 1.0756 = -4.1277$

$\Delta^5 y_1 = \Delta^4 y_2 - \Delta^4 y_1 = 3.0119 + 3.0521 = 6.064$

Конечные разности шестого порядка: $\Delta^6 y_i = \Delta^5 y_{i+1} - \Delta^5 y_i$;

Тогда: $\Delta^6 y_0 = \Delta^5 y_1 - \Delta^5 y_0 = 6.064 + 4.1277 = 10.1917$

Получаем:

$$y(0.255) \approx 1.2557 + 0.1 * 0.9207 + \frac{0.1*(0.1-1)}{2!} * 0.0247 + \frac{0.1*(0.1-1)*(0.1-2)}{3!} * (-0.0437) + \frac{0.1*(0.1-1)*(0.1-2)*(0.1-3)}{4!} * 1.0756 + \frac{0.1*(0.1-1)*(0.1-2)*(0.1-3)*(0.1-4)}{5!} * (-4.1277) + \frac{0.1*(0.1-1)*(0.1-2)*(0.1-3)*(0.1-4)*(0.1-5)}{6!} * 10.1917 = 1.1225200732287$$

Решение: для вычисления значение функции при $x = 0.523$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад, т. к. x лежит в правой половине отрезка.

$$Nn(x) = y_6 + t\Delta y_5 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_4 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_3 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{4!}\Delta^4 y_2 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}{5!}\Delta^5 y_1 + \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}{6!}\Delta^6 y_0$$

Тогда $t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0.523 - 0.55}{0.05} = -0.54$

Конечные разности остаются те же, что и в первой формуле.

Получаем:

$$\mathrm{y}(0.523) \approx 7.8359 - 0.54 * 0.9164 + \frac{-0.54 * (-0.54+1)}{2!} * (-0.0156) + \frac{-0.54 * (-0.54+1) * (-0.54+2)}{3!} * 0.9917 + \frac{-0.54 * (-0.54+1) * (-0.54+2) * (-0.54+3)}{4!} * 3.0119 + \frac{-0.54 * (-0.54+1) * (-0.54+2) * (-0.54+3) * (-0.54+4)}{5!} * 6.064 + \frac{-0.54 * (-0.54+1) * (-0.54+2) * (-0.54+3) * (-0.54+4) * (-0.54+5)}{6!} * 10.1917 = 6.8202099776774$$

4. Используя интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов найти приближенное значение функции для x=0,302 для таблицы 1. При вычислениях учитывать только разделенные разности первого и второго порядков. Вычисления провести дважды, используя различные узлы.

Решение: вычисления произведем по формуле:

$$Nn(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) * (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) * (x - x_0) * (x - x_1)$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \;; \quad f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Для вычисления значения функции при $x = 0.302$ за x_0 возьмем сначала 0.298, затем 0.303

$$f(x_0, x_1) = \frac{3.1764 - 3.2557}{0.303 - 0.298} = -15.86$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{3.1218 - 3.1764}{0.310 - 0.303} = -7.8$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{-7.8 + 15.86}{0.310 - 0.298} = 671.66666666667$$

$$y(0.302) = 3.2557 + (-15.86) * (0.302 - 0.298) + 671.66666666667 * (0.302 - 0.298) * (0.302 - 0.303) = 3.1895733333333$$

Для $x_0 = 0.303$:

$$f(x_0, x_1) = \frac{3.1218 - 3.1764}{0.310 - 0.303} = -7.8$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{3.0482 - 3.1218}{0.317 - 0.310} = -10.514285714286$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{-10.514285714286 + 7.8}{0.317 - 0.303} = -193.87755102043$$

$$y(0.302) = 3.1764 + (-7.8) * (0.302 - 0.303) - 193.87755102043 * (0.302 - 0.303) * (0.302 - 0.310) = 3.1826489795918$$

Принимаем $y(0.302) = \frac{3.1895733333333 + 3.1826489795918}{2} = 3.1861111564625$

Листинг программы:

Main.java

```java
public class Main {

    static double[] x = new double[7];
    static double[] y = new double[7];
    static double arg = 0;

    public static void main(String[] args) throws FileNotFoundException {
        Scanner in = new Scanner(System.in);
        input();
        System.out.print("Введите значение аргумента для метода Лагранжа: ");
        arg = in.nextDouble();
        System.out.println("Ответ: " + Lagrange.solve(x, y, arg));

        System.out.println("Введите значение аргумента для метода Ньютона для неравноотстоящих
узлов: ");
        arg = in.nextDouble();
        System.out.println("Ответ: " + NewtonUnequal.solve(x, y, arg));

        input();
        System.out.println("Введите значение аргумента для метода Ньютона для равноотстоящих
узлов: ");
        arg = in.nextDouble();
        NewtonEqual neweq = new NewtonEqual(x, y, arg);
        System.out.println("Ответ : " + neweq.solve());
    }

    public static void input() throws FileNotFoundException {
        Scanner in = new Scanner(System.in);
        System.out.println("Введите имя файла с исходной таблицей: ");
        String filename = in.nextLine();
        Scanner scanner = new Scanner(new File(filename));
        for (int i = 0; i < x.length; i++) {
            x[i] = scanner.nextDouble();
            y[i] = scanner.nextDouble();
        }
    }
}
```

Lagrange.java

```java
public class Lagrange {
    public static double solve(double[] x, double[] y, double arg) {
        double ans = 0, numerator, denominator;
        for (int i = 0; i < x.length; i++) {
            numerator = 1;
            denominator = 1;
            for (int j = 0; j < x.length; j++) {
                if (i != j) {
                    numerator *= (arg - x[j]);
                    denominator *= (x[i] - x[j]);
                }
            }
            ans += (numerator / denominator * y[i]);
        }
        return ans;
    }
}
```

NewtonUnequal.java

```java
public class NewtonUnequal {

    static double[] xTrio;
    static double[] yTrio;

    static double solve(double[] x, double[] y, double arg) {
        int size = x.length;
        double ans = 0;

        if (arg > x[size - 2]) {
            for (int j = 1; j >= 0; j--) {
                xTrio = new double[]{x[size - 3 - j], x[size - 2 - j], x[size - 1 - j]};
                yTrio = new double[]{y[size - 3 - j], y[size - 2 - j], y[size - 1 - j]};
                ans += yTrio[0] + f1(0, 1) * (arg - xTrio[0]) + f2(0, 1, 2) * (arg - xTrio[0])
* (arg - xTrio[1]);
            }
        } else if (arg < x[1]) {
            for (int j = 0; j <= 1; j++) {
                xTrio = new double[]{x[j], x[j + 1], x[j + 2]};
                yTrio = new double[]{y[j], y[j + 1], y[j + 2]};
                ans += yTrio[0] + f1(0, 1) * (arg - xTrio[0]) + f2(0, 1, 2) * (arg - xTrio[0])
* (arg - xTrio[1]);
            }
        } else {
            int i = 1;
            while (arg > x[i] && (size - 1 - i) >= 2) {
                ans = 0;
                for (int j = 0; j <= 1; j++) {
                    xTrio = new double[]{x[i + j - 1], x[i + j], x[i + j + 1]};
                    yTrio = new double[]{y[i + j - 1], y[i + j], y[i + j + 1]};
                    ans += yTrio[0] + f1(0, 1) * (arg - xTrio[0]) + f2(0, 1, 2) * (arg -
xTrio[0]) * (arg - xTrio[1]);
                }
                i++;
            }
        }
        return ans / 2;
    }

    static double f1(int a, int b) {
        return (yTrio[b] - yTrio[a]) / (xTrio[b] - xTrio[a]);
    }

    static double f2(int a, int b, int c) {
        return (f1(b, c) - f1(a, b)) / (xTrio[c] - xTrio[a]);
    }
}
```

NewtonEqual.java

```java
public class NewtonEqual {
    double[] x;
    double[] y;
    double arg;
    int size;
    double t;
    static int k;
    double res;

    public NewtonEqual(double[] x, double[] y, double arg) {
        this.x = x;
        this.y = y;
```

```java
        this.arg = arg;
        this.size = x.length;
    }

    public double solve() {
        if (arg < x[0]) {
            t = (arg - x[0]) / (x[1] - x[0]);
            backward(t);
        } else if (arg > x[size - 1]) {
            t = (arg - x[size - 1]) / (x[1] - x[0]);
            forward(t);
        } else if (arg <= x[size / 2]) {
            while (arg > x[k])
                k++;
            k--;
            t = (arg - x[k]) / (x[1] - x[0]);
            forward(t);
        } else {
            t = (arg - x[size - 1]) / (x[1] - x[0]);
            backward(t);
        }
        return res;
    }

    private void forward(double t) {
        double res = y[k] + t * delta(1);
        double numerator = t;
        int iter = k;
        for (int i = 1; iter < size - 2; i++) {
            numerator *= (t - i);
            res += numerator / fact(i + 1) * delta(i + 1);
            iter++;
        }
        this.res = res;
    }

    private void backward(double t) {
        double res = y[size - 1] + t * delta(1, size - 2);
        double numerator = t;
        for (int i = 1; i < size - 1; i++) {
            numerator *= (t + i);
            res += numerator / fact(i + 1) * delta(i + 1, size - i - 2);
        }
        this.res = res;
    }

    private double delta(int q) {
        return calcCurrentDelta(q)[k];
    }

    private double delta(int q, int p) {
        return calcCurrentDelta(q)[p];
    }

    private double[] calcCurrentDelta(int q) {
        double[] res = new double[size];
        if (q == 1) {
            res = new double[size];
            for (int i = 0; i < size - 1; i++) {
                res[i] = y[1 + i] - y[i];
            }
        } else {
            for (int i = 0; i < size - 1; i++) {
                double a = calcCurrentDelta(q - 1)[i + 1];
                double b = calcCurrentDelta(q - 1)[i];
```

```
                res[i] = a - b;
            }
        }
        return res;
    }

    int fact(int n) {
        if (n <= 1)
            return 1;
        else
            return n * fact(n - 1);
    }
}
```

Результаты работы программы:

Введите имя файла с исходной таблицей: table1 Введите значение аргумента для метода Лагранжа: 0,325 Ответ: 2.968818330321502 Введите значение аргумента для метода Ньютона для неравноотстоящих узлов: 0,302 Ответ: 3.1861111564625855 Введите имя файла с исходной таблицей: table2 Введите значение аргумента для метода Ньютона для равноотстоящих узлов: 0,255 Ответ: 1.12252007322875	Введите имя файла с исходной таблицей: table1 Введите значение аргумента для метода Лагранжа: 0,325 Ответ: 2.968818330321502 Введите значение аргумента для метода Ньютона для неравноотстоящих узлов: 0,302 Ответ: 3.1861111564625855 Введите имя файла с исходной таблицей: table2 Введите значение аргумента для метода Ньютона для равноотстоящих узлов: 0,523 Ответ: 6.820209977677393

Вывод: в ходе данной лабораторной работы была реализована программа на языке Java для интерполирования функции тремя методами, ответы, полученные путем вычисления вручную сошлись с программой.