Метод прямоугольников

Использует непосредственную замену определенного интеграла интегральной суммой.

На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс. Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

Площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *n*- прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *n*- элементарных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

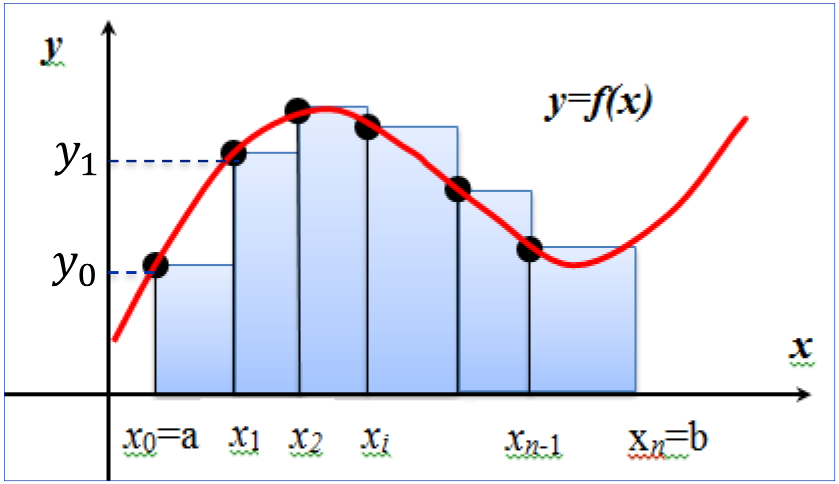
В качестве точек ξ_i могут выбираться левые ($\xi_i = x_{i-1}$) или правые ($\xi_i = x_i$) границы отрезков, получим формулы левых и правых прямоугольников.

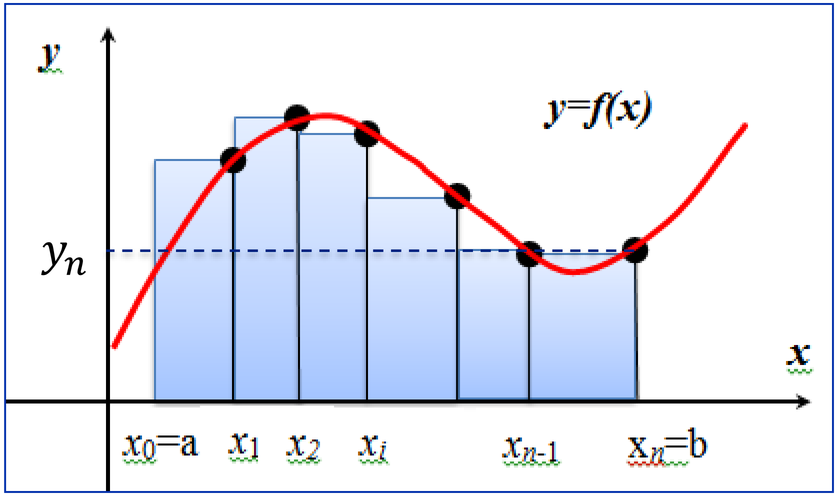
Метод прямоугольников

Обозначим:

$$f(x_i) = y_i \ , \ f(a) = y_0, \ \ f(b) = y_n$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = h_i$$





Метод прямоугольников

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_0 + h_2 y_1 + \cdots + h_n y_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} h_i\, y_{i-1}$ - левые прямоугольники

$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 y_1 + h_2 y_2 + \cdots + h_n y_n = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i$ - правые прямоугольники

При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

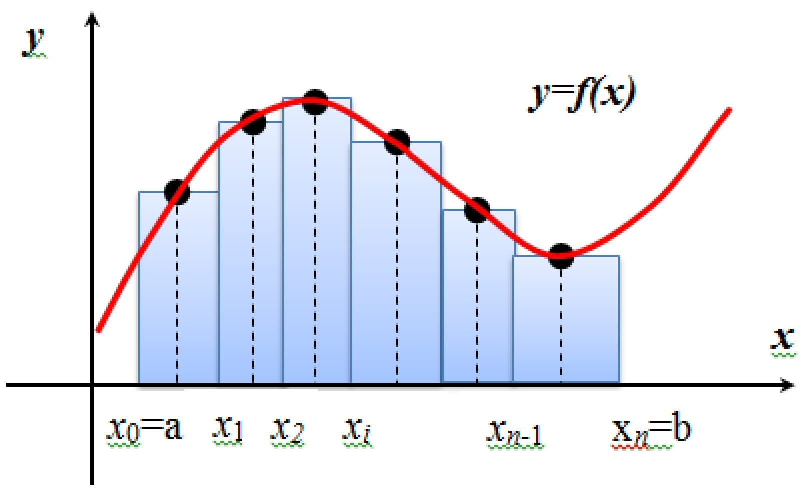
$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод прямоугольников. Метод средних

Для аналитически заданных функций более точным является использование значений в средних точках элементарных отрезков (полуцелых узлах):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i f(x_{i-1/2})$$

$$x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, i = 1, 2, \dots n$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$:

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2})$$

Метод прямоугольников

Пример 1. Найти значение интеграла методами прямоугольников:

$$I = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \approx 2{,}33 \ldots$$

Разобьем отрезок интегрирования на 5 равных частей: $n = 5,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}2.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}64$ $\quad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}040$ $\quad I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3300$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3300 = 0{,}0033\ (\approx 0{,}14\%)$$

$$\Delta I_{\text{лев}} = I - I_{\text{лев}} = 2{,}3333 - 2{,}040 = 0{,}2933\ (\approx 12{,}5\%)$$

$$\Delta I_{\text{прав}} = I - I_{\text{прав}} = 2{,}3333 - 2{,}64 = 0{,}3067 (\approx 13{,}1\%)$$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i	1	1,44	1,96	2,56	3,24	4
$x_{i-1/2}$		1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
$y_{i-1/2}$		1,21	1,69	2,25	2,89	3,61

Метод прямоугольников

Пример 2. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей: $\mathrm{n} = 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

По формулам левых, правых и средних прямоугольников получим:

$I_{\text{прав}} = h\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}485 \qquad I_{\text{лев}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} = 2{,}185$

$$I_{\text{сред}} = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2} = 2{,}3325$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I_{\text{сред}} = I - I_{\text{сред}} = 2{,}3333 - 2{,}3325 = 0{,}0008\ (\approx 0{,}034\%)$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
$x_{i-1/2}$		1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
$y_{i-1/2}$		1,1025	1,3225	1,5625	1,8225	2,1025	2,4025	2,7225	3,0625	3,4225	3,8025

Метод трапеций

Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x + b$$

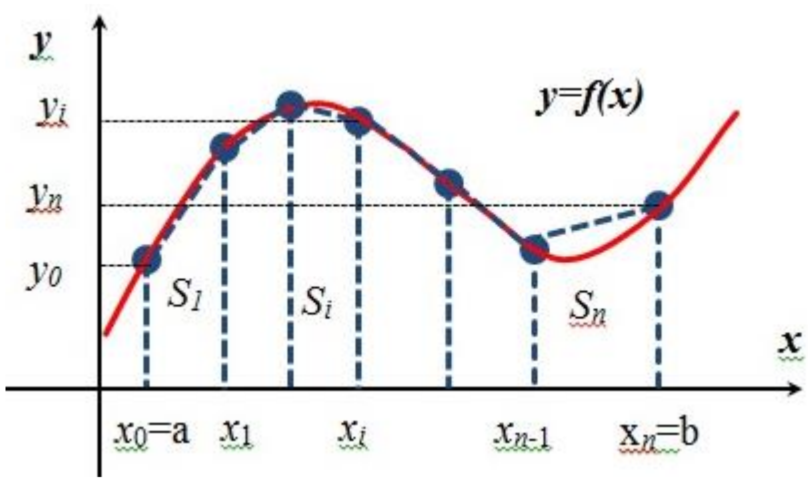
Используют линейную интерполяцию, т.е. график функции $y = f(x)$ представляется в виде ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) . Площадь всей фигуры (криволинейной трапеции):

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h_1 + \frac{y_1 + y_2}{2} h_2 + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h_n$$

$$y_0 = f(a), \qquad y_n = f(b), \qquad y_i = f(x_i), \qquad h_i = x_i - x_{i-1}$$

Складывая все эти равенства, получаем формулу трапеций для численного интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i (y_{i-1} + y_i)$$



При $h_i = h = \frac{b-a}{n} = const$ формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод трапеций

Пример 3. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей: n $= 10,\ h = \frac{b-a}{n} = 0{,}1.$

$$I_{\text{трап}} = \int_1^2 x^2 dx = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) = 0{,}1 \cdot \left(\frac{1+4}{2} + (1{,}21 + 1{,}44 + \dots + 3{,}61) \right) = 2{,}3350$$

Погрешность в вычислении интеграла составляет :

$$\Delta I = I - I_{\text{трап}} = 2{,}3333 - 2{,}3350 = 0{,}0017\ (\approx 0{,}073\%).$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

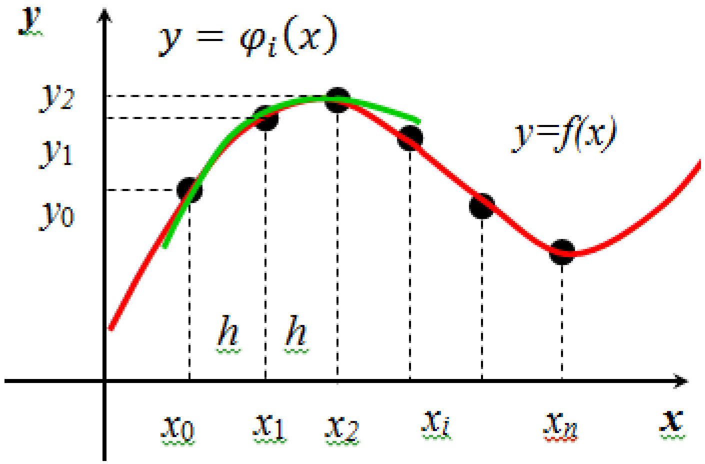
Метод Симпсона (**Симпсон Томас**(20.8.1710–14.5.1751) – английский математик)

Разобьем отрезок интегрирования [*a, b*] на четное число *n* равных частей с шагом *h.* На каждом отрезке $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{i-1}, x_{i+1}], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ подынтегральную функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:

$$f(x) \approx \varphi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$$

Коэффициенты этих квадратных трехчленов могут быть найдены из условий равенства многочлена и подынтегральной функции в узловых точках.

В качестве $\varphi_i(x)$ можно принять интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, проходящий через точки $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$.



Метод Симпсона

Для точек x_0, x_1, x_2:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

При $x_0=0$; $x_1=h$; $x_2=2h$, получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-h)(x-2h)}{h\cdot 2h} y_0 + \frac{x(x-2h)}{-h\cdot h} y_1 + \frac{x(x-h)}{2h\cdot h} y_2 = \frac{x^2 - x\cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h\cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h\cdot x}{2h^2} y_2$$

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_0+2h} \varphi_1(x)dx = \int_0^{2h} \left(\frac{x^2 - x\cdot 3h + 2h^2}{2h^2} y_0 + \frac{x^2 - 2h\cdot x}{-h^2} y_1 + \frac{x^2 - h\cdot x}{2h^2} y_2\right) dx =$$

$$= \frac{y_0}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - 3h\frac{x^2}{2} + 2h^2 x\right)\Bigg|_0^{2h} - \frac{y_1}{h^2}\left(\frac{x^3}{3} - 2h\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2h} + \frac{y_2}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - h\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2h} = \frac{y_0 h}{3} + \frac{4y_1 h}{3} + \frac{y_2 h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$: $S_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$

$$S_{общ} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + 2y_n)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\,[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)]$$

Пример 4. Найти значение интеграла методом Симпсона: $I = \int_1^2 x^2 dx \approx 2{,}33$

При $n = 4$, $h = 0{,}25$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,25	1,5	1,75	2
y_i	1	1,5625	2,25	3,0625	4

$$I = \frac{0,25}{3}\,[(1 + 4(1,5625 + 3,0625) + 2 \cdot 2,25)) + 4)] = 2,3333$$

Погрешность численного интегрирования

Выше рассмотренные методы объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования многочленом Лагранжа. Семейство методов, основанных на замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа называется **методами Ньютона-Котеса**. Точность решения растет с увеличением степени интерполяционного многочлена.

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i$$

где y_i – значения функции в узлах интерполяции; α_i – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от используемого метода численного интегрирования.

Для оценки погрешности R приближенного интегрирования:

1) Формулы средних прямоугольников: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$: второй порядок точности $O(h^2)$
2) Формула трапеций: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$: $O(h^2)$
3) Формула Симпсона: $|R| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}$: $O(h^4)$

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

В основном встречаются две разновидности заданий:

- либо вычислить определенный интеграл численным методом для заданного числа разбиения отрезка *n* (см. примеры 1,2,3,4)
- либо найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью.

Пример 4. Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)dx$ методом трапеций с точностью до *0.01*.

Решение: найдем количество точек разбиения отрезка интегрирования *n*, используя неравенство для оценки абсолютной погрешности $|R| \le \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

$f'(x) = (\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7)' = \frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x, \quad f''(x) = (\frac{4}{10}x^3 + \frac{2}{5}x)'' = 1{,}2x^2 + 0{,}4$

$\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(2)| = 1{,}2 \cdot 4 + 0{,}4 = 5{,}2$

Подставим полученное значение в неравенство $\max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \ge 0{,}01 \rightarrow 5{,}2\frac{(2-1)^3}{12n^2} \ge 0{,}01$

Тогда $n^2 \ge \frac{520}{12} \rightarrow |n| \ge 6{,}58$. Возьмем *n=8*

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = 0{,}125$

Занесем в таблицу результаты расчетов:

Примеры приближенного вычисления определенных интегралов

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,125	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,875	2
$f(x_i)$	-6,7	-6,58669	-6,44336	-6,26443	-6,04375	-5,77458	-5,44961	-5,06091	-4,6

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7\right)dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = 0{,}125(-5{,}65 - 41{,}6233) = -5{,}9092$$

Найдем интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 7\right)dx = \left(\frac{x^5}{50} + \frac{x^3}{15} - 7x\right)\Bigg|_1^2 = -12{,}8267 + 6{,}9133 = -5{,}9134$$

$|R| = |I - I_{\text{тр}}| = 0{,}0042,$ точность достигнута.

Погрешность численного интегрирования

Т.к. нахождение *n* из неравенства для оценки абсолютной погрешности для подынтегральных функций сложного вида является не очень простой процедурой, используется правило Рунге.

Правило Рунге - это эмпирический способ оценки погрешности, основанный на сравнении результатов вычислений, проводимых с разными шагами *h:*

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

I – точное значение интеграла;

$I_{h/2}, I_h$ - приближенные значения интеграла, вычисленные с различными шагами *h;*

k - порядок точности квадратурной формулы,

(k=2 - для формул средних прямоугольников и трапеций, k=4 - для формулы Симпсона).

Алгоритм вычисления интеграла