

Piattaforma di Gough-Stewart

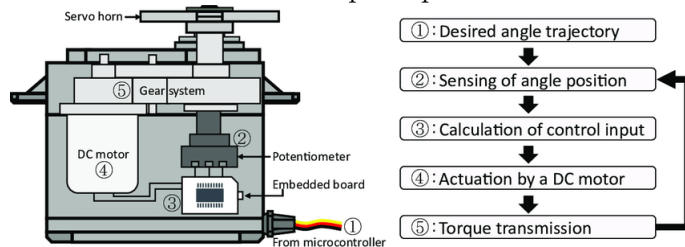
Daniele Facco

Sommario

Studio della piattaforma di Stewart e dei suoi componenti.

1 Servomotori

I servomotori sono l'elemento principale nella realizzazione della piattaforma di Stewart.



Questi motori sono controllati in modalità PWM dalla scheda Arduino tramite un'apposita libreria. Il segnale inviato ai servomotori è periodico, di periodo 20ms, e presenta uno stato on/off a livello logico per un tempo prefissato a seconda della posizione richiesta. Ad esempio la posizione 0° prevede un livello logico alto di 1ms, 90° di 1,5ms e 180° di 2ms.

Il controllo di questi elementi è gestito dalla scheda Arduino tramite uno shield che ne facilita l'installazione. Una nota particolare va fatta in merito alla potenza richiesta dai servomotori, nonostante il loro consumo in stato 'idle' sia di circa 10mW, durante il movimento questo può raggiungere oltre 300mW. É quindi necessaria una alimentazione esterna che sia in grado di fornire almeno 2A a 5V in quanto la scheda alimentata tramite usb dalla presa del computer può rivedere al massimo 1A.

2 Piattaforma di Stewart

La piattaforma di Stewart è un particolare sistema meccanico costituito da una base su cui sono posizionati 6 attuatori di vario tipo collegati alla piattaforma superiore mediante giunti snodabili. Un esempio comune sono gli attuatori prismatici, questi sono ad esempio pistoncini lineari che presentano un solo grado di libertà. Nel progetto vengono invece impiegati servomotori, questi presentano il vantaggio di essere certamente più economici rispetto agli attuatori prismatici ma il sistema risultante assume un grado di complessità superiore. Tramite opportune osservazioni matematiche è però possibile risalire ad un modello equivalente che ci garantisce un range di movimento ottimale.

3 Robot seriali e paralleli

È utile enunciare la differenza tra robot di tipo seriale e parallelo per comprendere le successive implicazioni a livello matematico:

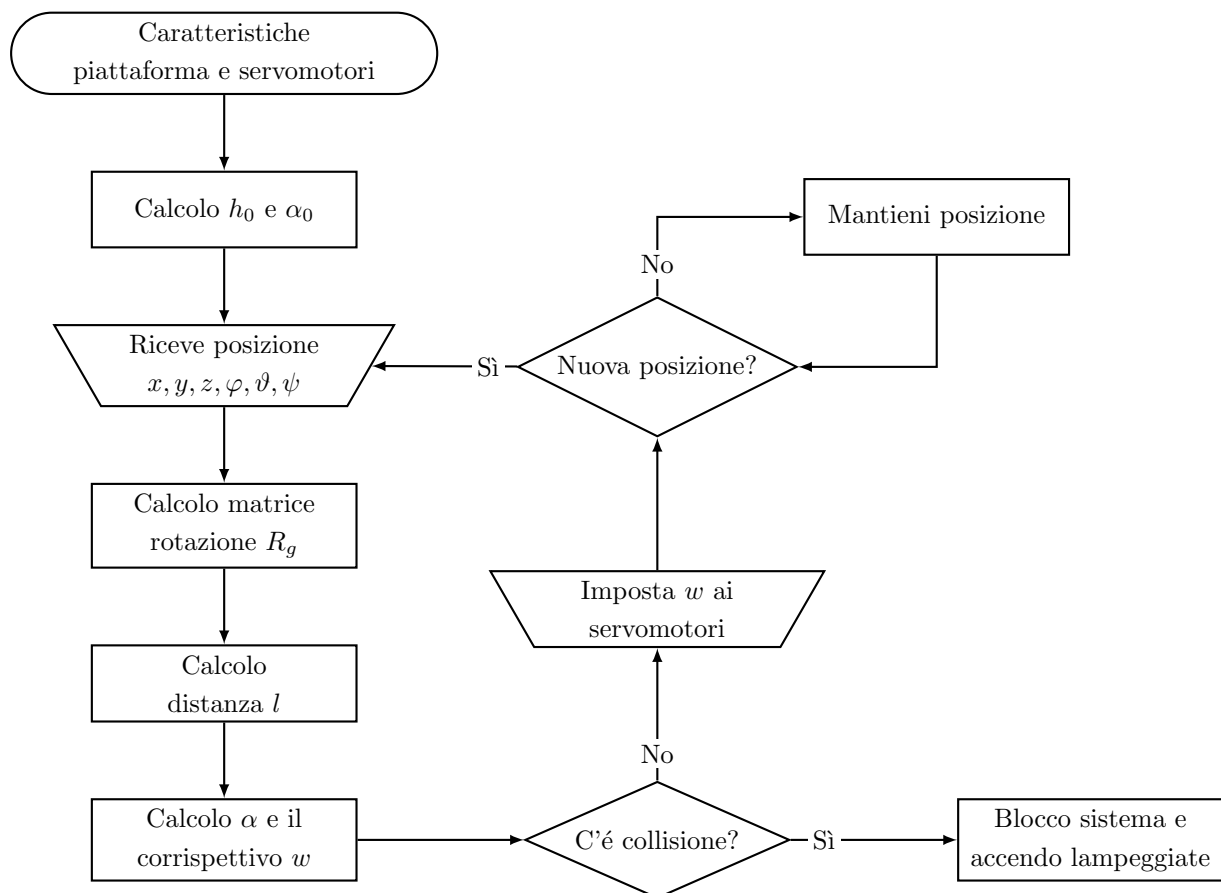
I robot seriali prevedono una serie di giunti snodabili controllati da attuatori che spesso assumono le caratteristiche di un arto antropomorfo, questi tipi di robot prendono spesso il nome di braccio meccanico e sono vastamente impiegati nell'industria meccanica.

Nei robot paralleli invece gli attuatori agiscono tutti sullo stesso elemento tramite giunti indipendenti, la piattaforma di Stewart ne è il principale esempio e le sue applicazioni sono principalmente incentrate nella realizzazione di simulatori avanzati di volo o per case automobilistiche.

Entrambi i sistemi presentano 6 gradi di libertà, indicati anche come 6DOF ma il problema matematico che li caratterizza è fondamentalmente opposto.

4 Cinematica diretta e inversa

5 Schema logico funzionamento



6 Analisi della piattaforma di Stewart con attuatori rotativi

Il problema della piattaforma di Stewart controllata da attuatori rotativi è fondamentalmente costituito da due sottoproblemi: uno relativo alla determinazione delle lunghezze dei vettori che collegano la base alla piattaforma per ogni possibile posizione e l'altro relativo all'implementazione stessa dei servomotori per via della complessità di descrizione del sistema biella manovella impiegato.

6.1 Analisi problema piattaforma

Si definiscono due sistemi di riferimento cartesiani che caratterizzano il sistema, uno fisso per la base centrato in O di versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ e uno variabile per la piattaforma centrato in O' di versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$. Sono note le coordinate in tre dimensioni dei punti degli assi di rotazione dei servomotori (B_i) e dei giunti della piattaforma (P_i) quando questa è in posizione orizzontale a riposo rispetto al sistema di riferimento centrato nella base. Il problema consiste nel definire la posizione dei giunti della piattaforma nello spazio in al variare di un set di valori $(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)$ rispetto al riferimento fisso della base. I valori $(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)$ precedentemente enunciati si riferiscono alla posizione e rotazione nello spazio della piattaforma rispetto alla base; (x, y, z) sono i valori del centro della piattaforma mentre $(\varphi, \vartheta, \psi)$ sono le rotazioni, rispettivamente roll, pitch e yaw (rollio, beccheggio e imbardata).

Nell'analisi consideriamo separatamente gli effetti traslativi e rotativi.

6.1.1 Analisi (x, y, z)

Le variazioni in (x, y, z) comportano una semplice traslazione dei punti del piano, questa viene indicata con un vettore \hat{T} che andrà poi a sommarsi alla variazione dovuta a $(\varphi, \vartheta, \psi)$.

6.1.2 Analisi $(\varphi, \vartheta, \psi)$

Per semplificare l'analisi consideriamo separatamente gli effetti dovuti a queste tre componenti, si studia il caso di solo rollio $(\varphi, 0, 0)$. Vogliamo risalire alla coordinate di un punto P rispetto alla base in seguito a una rotazione di φ gradi, per farlo è necessario ottenere un'applicazione lineare che ci permetta di passare dal sistema di coordinate della piattaforma al sistema di coordinate della base.

Dallo studio della variazione troviamo che:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = OA - CB = y' \cos(\varphi) - z' \sin(\varphi) \\ z = AB + CP = y' \sin(\varphi) + z' \cos(\varphi) \end{cases} \quad (1)$$

Per comodità di calcolo nei successivi passaggi il sistema (1) viene riscritto in forma matriciale.

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_x(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2)$$

Risultati analoghi si ottengono per ϑ e ψ :

$$R_y(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Le singole matrici possono essere viste come applicazioni lineari, procediamo nella moltiplicazione di (2), (3) e (4) per ottenere una singola applicazione lineare composta. Si nota che nel prodotto tra matrici non vale la proprietà commutativa, bisogna quindi valutare attentamente l'ordine di moltiplicazione altrimenti si otterrà una rotazione erranea. I passaggi sono ommessi in quanto si ripete tre volte una semplice operazione di moltiplicazione tra matrici.

$$R_g = R_z(\psi) \cdot R_y(\vartheta) \cdot R_x(\varphi) \quad (5)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\psi) & -\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\psi) & \sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\psi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\psi) & \cos(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\varphi)\sin(\vartheta)\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta)\sin(\psi) \\ -\sin(\vartheta) & \sin(\varphi)\cos(\vartheta) & \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Moltiplicando il vettore \hat{p}_i per la matrice di rotazione (5) si ottengono quindi le coordinate del punto P_i nel sistema di riferimento della base.

6.1.3 Conclusione problema piattaforma

Grazie ai risultati ottenuti nelle sezioni 6.1.1 e 6.1.2 possiamo definire i vettori \hat{q}_i che descrivono la posizione dei punti P_i rispetto al centro del sistema di riferimento della base O per ogni operazione rototraslativa.

$$\hat{q}_i = \hat{T} + R_g \cdot \hat{p}_i \quad (7)$$

Una volta ottenuto questo vettore, con una semplice operazione vettoriale, possiamo risalire a \hat{l}_i vettore che descrive la distanza tra l'asse del servomotore e il corrispettivo giunto sulla piattaforma.

$$\hat{l}_i = \hat{T} + R_g \cdot \hat{p}_i - \hat{b}_i \quad (8)$$

Nel caso della piattaforma di Stewart, sei equazioni (8) ci permettono di descrivere perfettamente la posizione della piattaforma al variare di $(x, y, z, \varphi, \vartheta, \psi)$. Si nota come con l'impiego di attuatori lineari il problema è risolto in quanto è sufficiente assegnare queste lunghezze per ottenere la posizione desiderata.

6.2 Analisi problema attuatori rotativi

L'impiego di servomotori complica ulteriormente le equazioni, è infatti necessario un numero di variabili superiore per descrivere in modo appropriato il sistema. Ogni servomotore controlla un giunto biella manovella collegato alla piattaforma, è fondamentale trovare una relazione tra l'angolo del servomotore e il vettore \hat{l}_i . Anche in questo caso il problema può essere separato in due parti, la determinazione della posizione del giunto biella manovella e la ricerca dell'angolo di rotazione α .

6.2.1 Posizione del giunto biella manovella

Sono note le lunghezze della biella b e della manovella m , si valuta l'angolo di inclinazione dei servomotori rispetto all'asse x e si indica con β . Si nota come i servomotori siano a due a due specchiati, saranno quindi necessari due set di equazioni per descrivere i motori pari e dispari al variare di α .

$$\begin{cases} x_{bm} = m \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_b \\ y_{bm} = m \cdot \cos(\alpha) \sin(\beta) + y_b \\ z_{bm} = m \cdot \sin(\alpha) + z_b \end{cases} \quad \text{pari} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_{bm} = m \cdot \cos(\alpha) \cos(\pi + \beta) + x_b \\ y_{bm} = m \cdot \cos(\alpha) \sin(\pi + \beta) + y_b \\ z_{bm} = m \cdot \sin(\alpha) + z_b \end{cases} \quad \text{dispari} \quad (10)$$

Applicando le nozioni trigonometriche:

$$\cos(\alpha) = -\cos(\alpha) \quad \cos(\pi + \beta) = -\cos(\beta) \quad \sin(\pi + \beta) = -\sin(\beta)$$

ai sistemi (9) e eqrefbmdispari risulta evidente che questi due sono equivalenti.

6.2.2 Determinazione angolo α

Per la determinazione dell'angolo α ottimale esistono due tecniche principali. La prima consiste in una ricerca binaria (o dicotomica) del valore che meglio soddisfa le equazioni della posizione. La seconda prevede un approccio matematico più estensivo per determinare il valore **esatto** di α in base ad una l fornita. Il primo approccio risulta più semplice dal punto di vista realizzativo ma a suo discapito è poco efficiente in quanto richiede un numero arbitrario di iterazioni per raggiungere una determinata precisione di α . Il secondo è invece più difficile da ottenere per via dei calcoli non del tutto intuitivi ma ci garantisce di raggiungere la soluzione ottimale con una sola computazione. Per lo svolgimento del progetto è stata impiegata la seconda opzione.

Per il teorema di Pitagora in tre dimensioni abbiamo che:

$$m^2 = (x_{mb} - x_b)^2 + (y_{mb} - y_b)^2 + (z_{mb} - z_b)^2 \quad (11)$$

$$= (x_{mb}^2 + y_{mb}^2 + z_{mb}^2) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_{mb}x_b + y_{mb}y_b + z_{mb}z_b) \quad (12)$$

$$l^2 = (x_q - x_b)^2 + (y_q - y_b)^2 + (z_q - z_b)^2 \quad (13)$$

$$= (x_q^2 + y_q^2 + z_q^2) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_q x_b + y_q y_b + z_q z_b) \quad (14)$$

$$b^2 = (x_q - x_m b)^2 + (y_q - y_m b)^2 + (z_q - z_m b)^2 \quad (15)$$

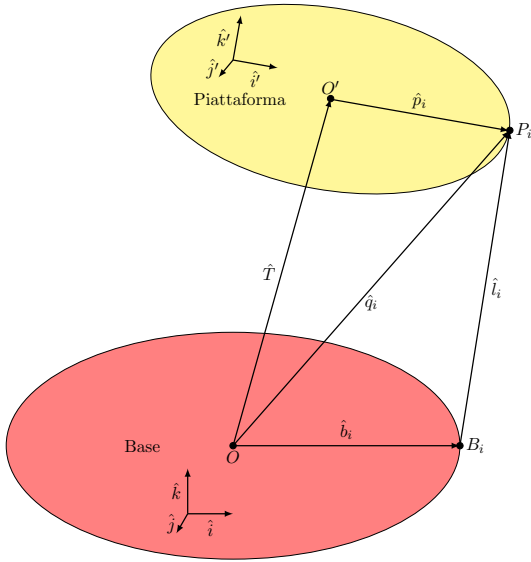
$$= (x_q^2 + y_q^2 + z_q^2) + (x_{mb}^2 + y_{mb}^2 + z_{mb}^2) - 2(x_q x_m b + y_q y_m b + z_q z_m b) \quad (16)$$

I valori di m^2 , l^2 e b^2 sono noti, si sostituiscono le equazioni (11) e (13) in (15), si ottiene:

$$l^2 - (b^2 - m^2) = (x_q - x_b)^2 + (y_q - y_b)^2 + (z_q - z_b)^2 \quad (17)$$

$$= (x_q^2 + y_q^2 + z_q^2) + (x_b^2 + y_b^2 + z_b^2) - 2(x_q x_b + y_q y_b + z_q z_b) \quad (18)$$

7 Modellizzazione problema piattaforma



8 Modellizzazione problema servomotori

