Motivazione

La distribuzione dell'energia elettrica avviene utilizzando tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale.
Grazie all'analisi di Fourier, qualunque segnale variabile nel tempo può essere scomposto in una somma si contributi sinusoidali
(serie di Fourier o integrale di Fourier)

Nomenclatura

Un segnale sinusoidale ha la forma della funzione seno o coseno.
Una corrente (tensione) sinusoidale è anche detta corrente (tensione) alternata
(o ac dall’inglese *alternate current* che si contrappone a dc *direct current*)

Segnali sinusoidali

Data la funzione $$v(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

è sempre possibile scrivere $$v(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$$

Dimostrazione:

$$v(t) = C\cos(\omega t + \varphi) = C\cos\omega t\cos\varphi - C\sin\omega t\sin\varphi$$

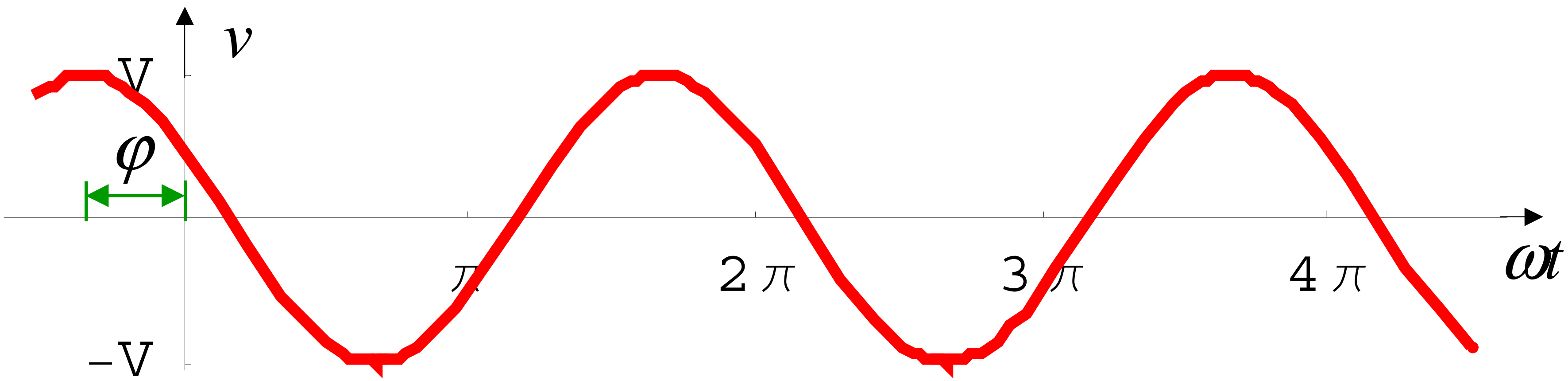
da cui

$$\begin{cases} C\cos\varphi = A \\ C\sin\varphi = -B \end{cases} \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \varphi = -\mathrm{arctg}\frac{B}{A}$$

Segnali sinusoidali

$$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$$

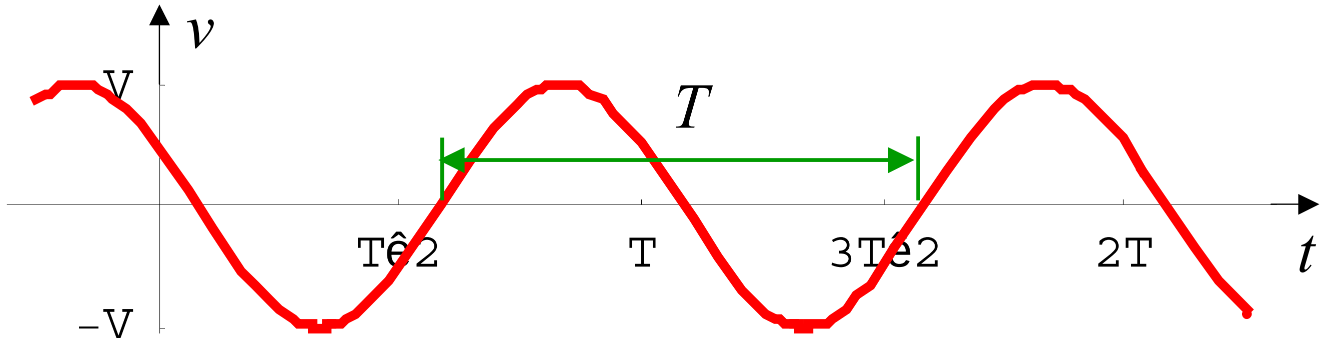
V ampiezza della sinusoide
ω frequenza angolare o pulsazione (rad/s)
ωt argomento della sinusoide
φ fase della sinusoide



Segnali sinusoidali

Il periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ è tempo impiegato per compiere un ciclo

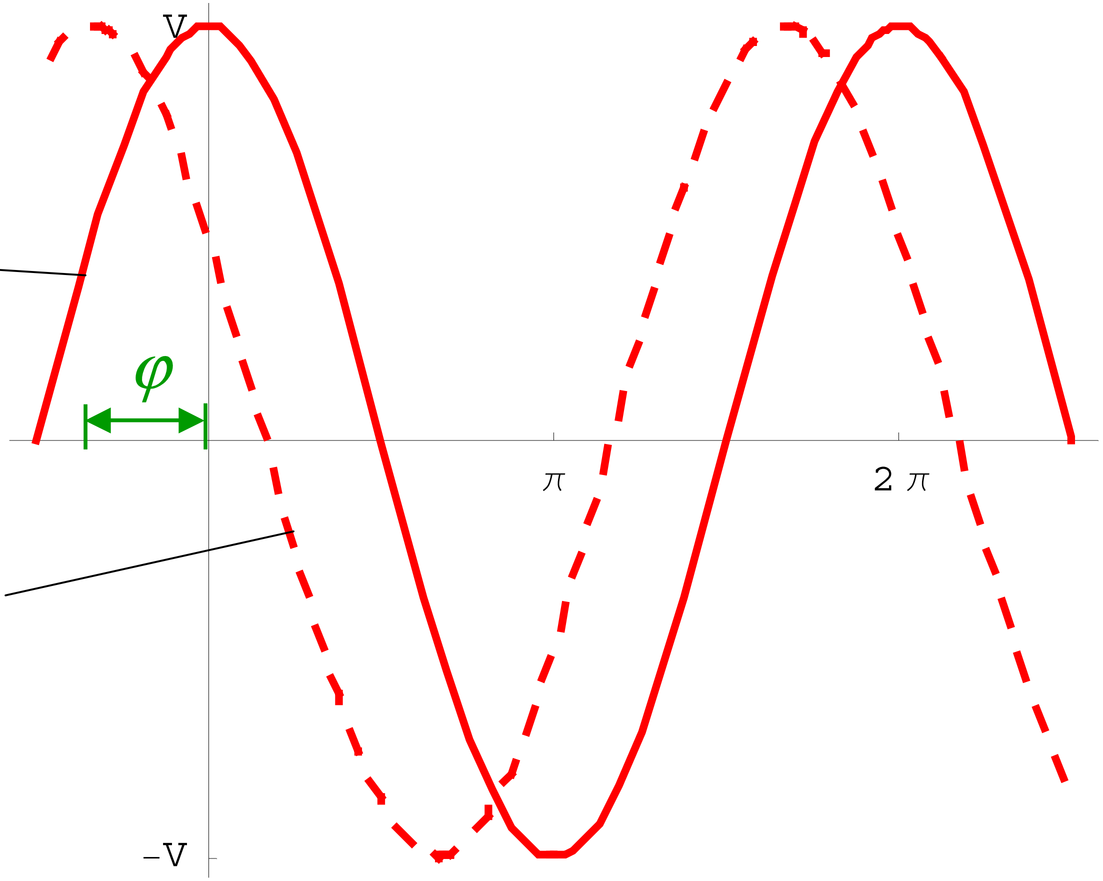
$$v(t) = V\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \Rightarrow \qquad v(t + nT) = v(t)$$



La frequenza $f = \dfrac{1}{T}$ è il numero di cicli per secondo e si misura in Hertz ($1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$). Si ha $\omega = 2\pi f$.

Segnali sinusoidali

$$v_1(t) = V\cos\omega t$$



$$v_2(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$$

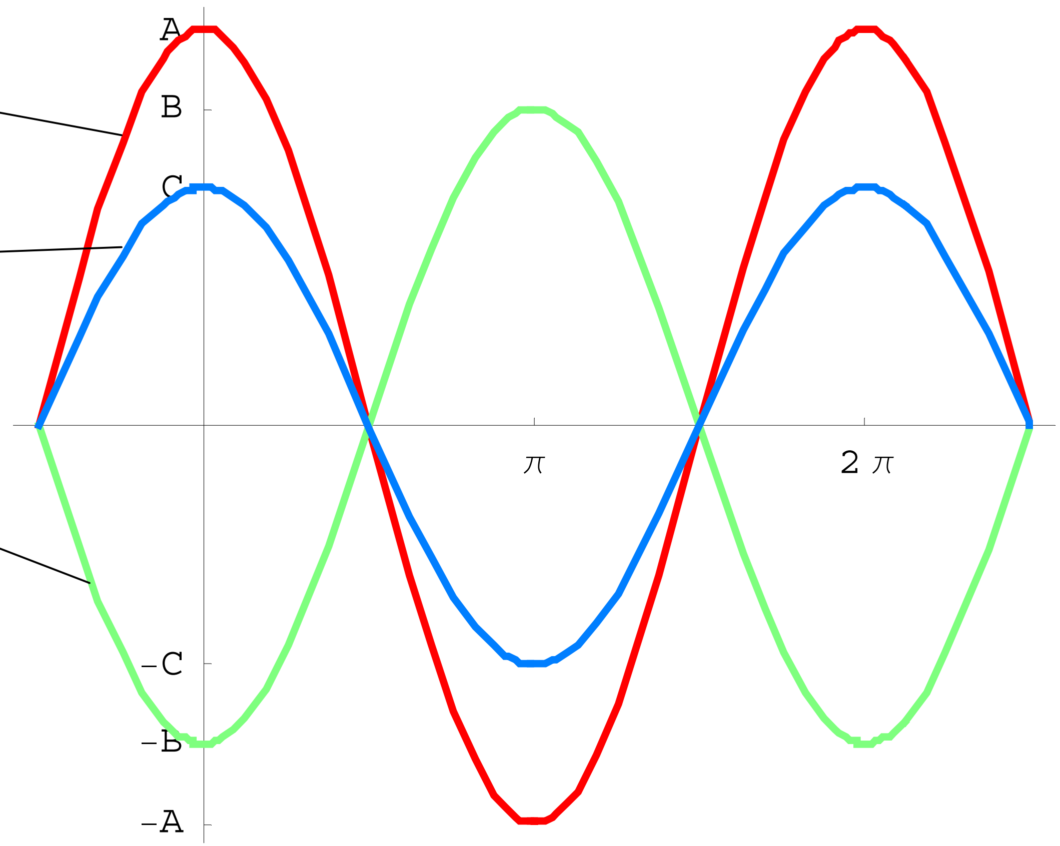
v_2 è in anticipo su v_1

Segnali sinusoidali

$$v_1(t) = A\cos\omega t$$

$$v_2(t) = C\cos\omega t$$

$$v_3(t) = B\cos(\omega t \pm \pi)$$



v_1 e v_2 sono in fase, v_1 e v_3 sono in controfase

Numeri complessi

Unità immaginaria: $j = \sqrt{-1}$

$z = x + j\,y$ forma rettangolare o cartesiana

$z = r\,\mathrm{e}^{j\theta}$ forma esponenziale

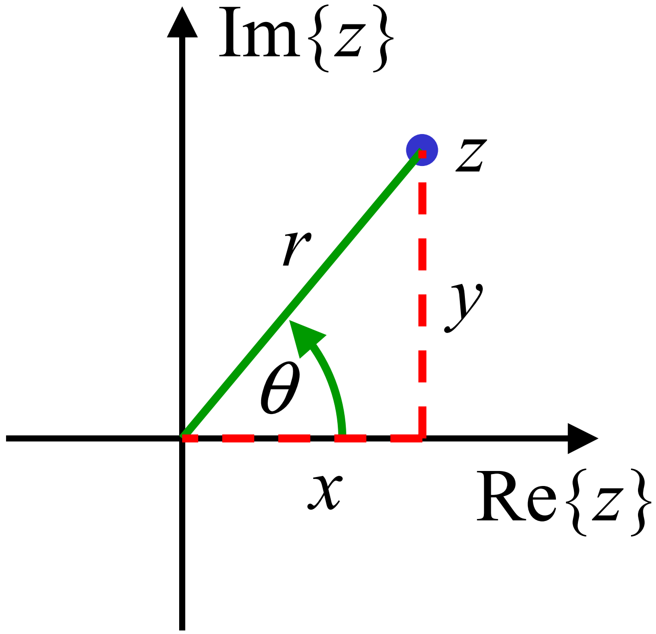
$z = r\,\angle\theta$ forma polare

x parte reale di z

y parte immaginaria di z

r modulo di z

θ argomento di z



$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \theta = \mathrm{arctg}(y/x)$$

Proprietà dei numeri complessi

Dati $z = x + j\, y = r\, \mathrm{e}^{j\theta}$, $z_1 = x_1 + j\, y_1 = r_1\, \mathrm{e}^{j\theta_1}$, $z_2 = x_2 + j\, y_2 = r_2\, \mathrm{e}^{j\theta_2}$ si ha:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j\,(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j\,(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2)$$

$$z_1/z_2 = r_1/r_2 \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

$$1/z = 1/r \angle{-\theta}$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \theta / 2$$

$$z^* = x - j\, y = r \angle{-\theta} = r\, \mathrm{e}^{-j\theta}$$

$$1/j = -j$$

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2| = r_1/r_2$$

$$\mathrm{Re}\{1/z\} = x/(x^2 + y^2) \neq 1/x$$

$$\mathrm{Re}\{1/z\} \neq 1/\mathrm{Re}\{z\}$$

Fasori

Poiché $\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$ (identità di Eulero) si ha:

$$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi) = V\ \mathrm{Re}\left\{e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{V\,e^{j\varphi}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{V}e^{j\omega t}\right\}$$

Il numero complesso $\mathbf{V} = V\,e^{j\varphi}$ è il fasore che corrisponde alla funzione $v(t)$ alla pulsazione ω ($\mathbf{V}$ è indipendente da t)

Fasori

Il modulo e l’argomento del fasore rappresentano l’ampiezza e la fase della funzione sinusoidale:

funzione

$$v(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$$

fasore

$$\mathbf{V} = V\,\mathrm{e}^{j\varphi}$$

$$|\mathbf{V}| = V$$

$$\arg\{\mathbf{V}\} = \varphi$$

Proprietà dei fasori: linearità

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1}$
$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$	$\mathbf{V}_2 = V_2 \mathrm{e}^{j\varphi_2}$
$v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$	$\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2$
a_1, a_2 costanti reali	

dimostrazione

$$v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t) = a_1 \cdot V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cdot V_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= \mathrm{Re}\left\{a_1 \cdot V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{a_2 \cdot V_2 \mathrm{e}^{j\varphi_2} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\left(a_1 \cdot V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} + a_2 \cdot V_2 \mathrm{e}^{j\varphi_2}\right) \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\left(a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2\right) \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

Proprietà dei fasori: derivazione

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1}$
$v(t) = \dfrac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$

dimostrazione

$$v(t) = \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)\right) = \frac{d}{dt} \mathrm{Re}\left\{V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}\left(V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega \mathbf{V}_1 \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

Proprietà dei fasori: integrazione

funzione	fasore
$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1}$
$v(t) = \int v_1(t)\, dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$

dimostrazione

$$v(t) = \int v_1(t)\, dt = \int V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)\, dt = \int \mathrm{Re}\left\{V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} dt$$

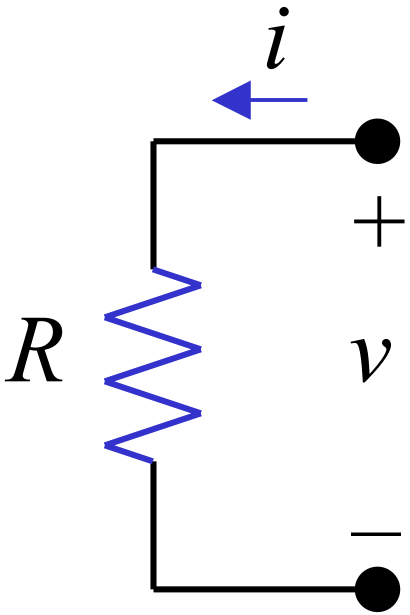
$$= \mathrm{Re}\left\{\int V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}\, dt\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_1 \mathrm{e}^{j\varphi_1} \mathrm{e}^{j\omega t}}{j\omega}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_1}{j\omega} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

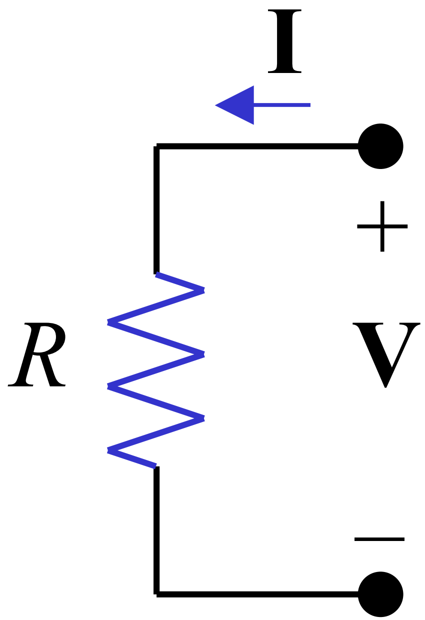
Quando è possibile usare i fasori?

Un circuito può essere analizzato nel dominio dei fasori quando tutti i segnali (tensioni e correnti) sono sinusoidi alla stessa pulsazione ω.

Tutti i generatori indipendenti funzionano alla pulsazione ω e il circuito include solo elementi lineari

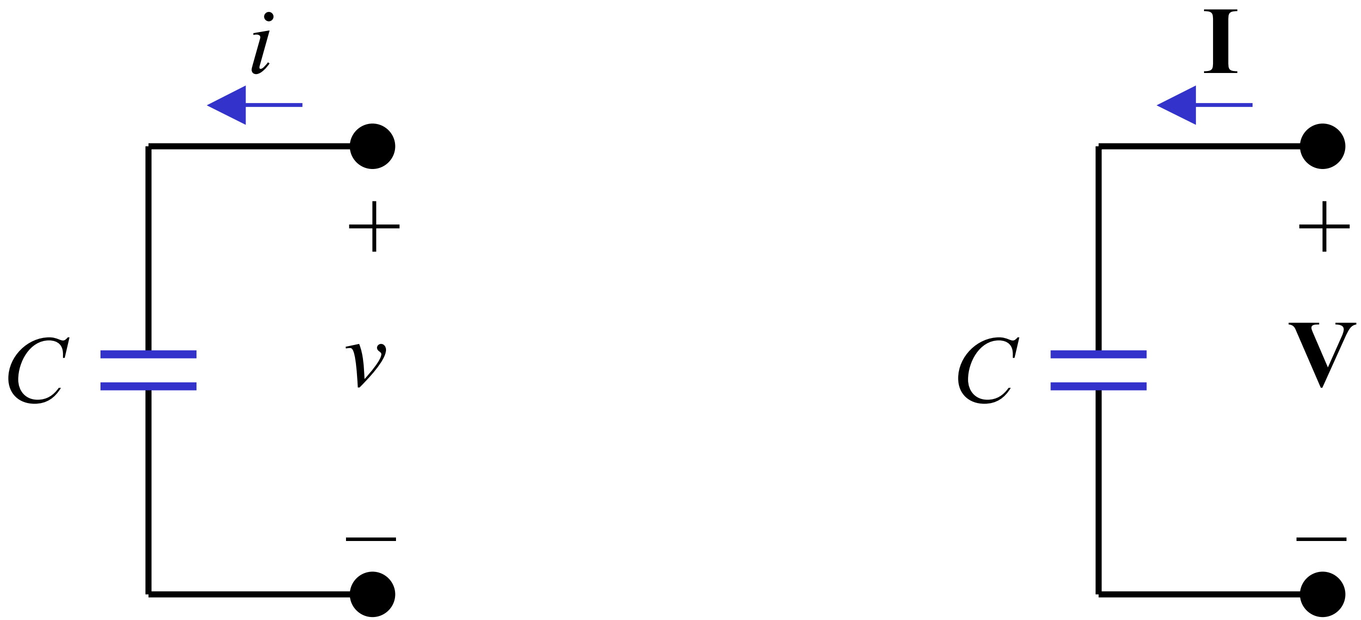
Relazioni tra fasori di tensione e corrente





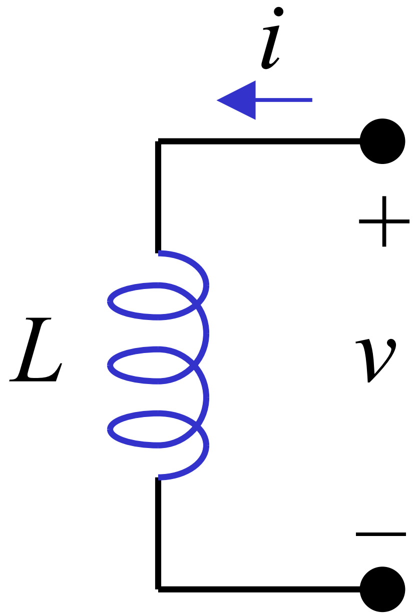
$$v = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = R \cdot \mathbf{I}$$

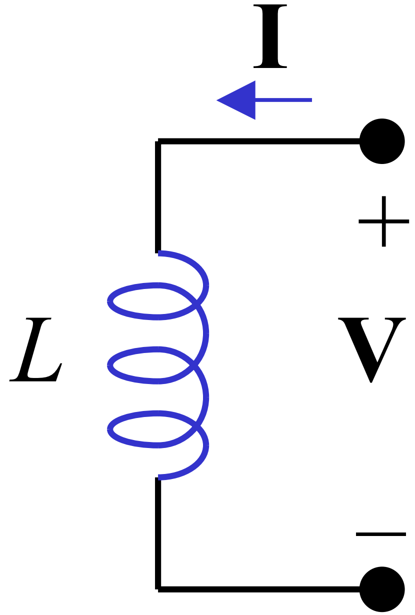
Relazioni tra fasori di tensione e corrente



$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = j\omega C \cdot \mathbf{V}$$

Relazioni tra fasori di tensione e corrente





$$v = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = j\omega L \cdot \mathbf{I}$$

Impedenza

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX = |\mathbf{Z}| \angle \theta_Z$$

$$R = \mathrm{Re}\{\mathbf{Z}\}$$ resistenza

$$X = \mathrm{Im}\{\mathbf{Z}\}$$ reattanza

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_Z = \mathrm{arctg}\,\frac{X}{R}$$

Ammettenza

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = G + jB = |\mathbf{Y}| \angle \theta_Y$$

$G = \mathrm{Re}\{\mathbf{Y}\}$ conduttanza

$B = \mathrm{Im}\{\mathbf{Y}\}$ suscettanza

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|}$$

$$\theta_Y = \mathrm{arctg}\frac{B}{G} = -\theta_Z$$

Relazioni fra impedenza e ammettenza

$$G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

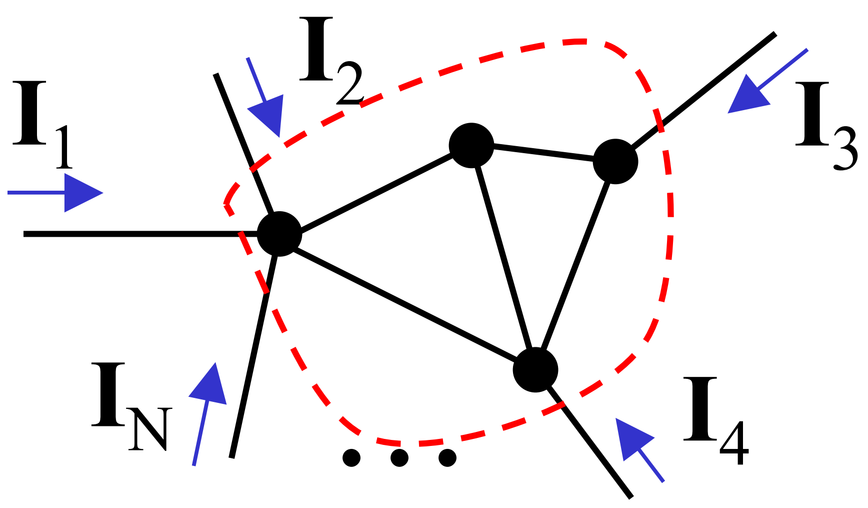
$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

Impedenza e ammettenza per R, L, C.

	impedenza	ammettenza
resistenza R	$\mathbf{Z} = R$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{R}$
capacità C	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\mathbf{Y} = j\omega C$
induttanza L	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega L}$

KCL per i fasori

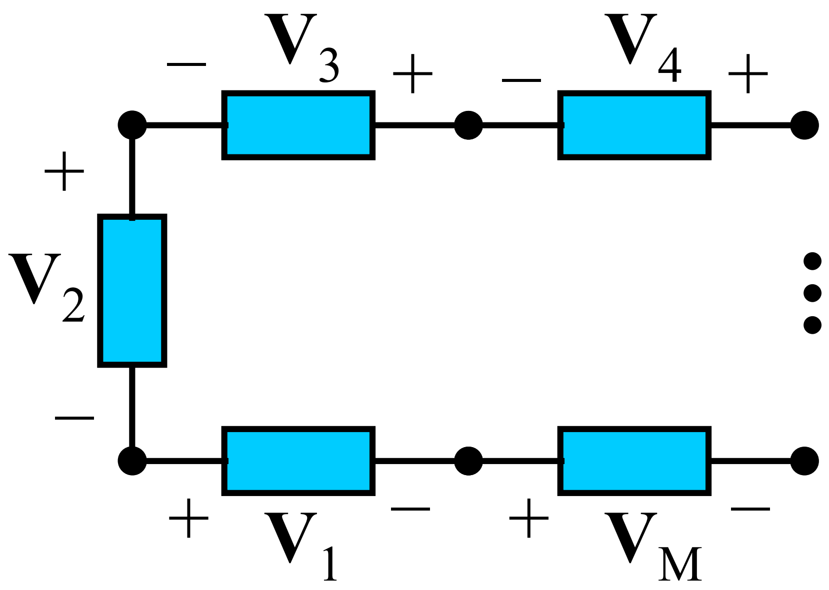
La somma algebrica dei fasori delle correnti che entrano in una superficie chiusa è zero



$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{I}_n = 0$$

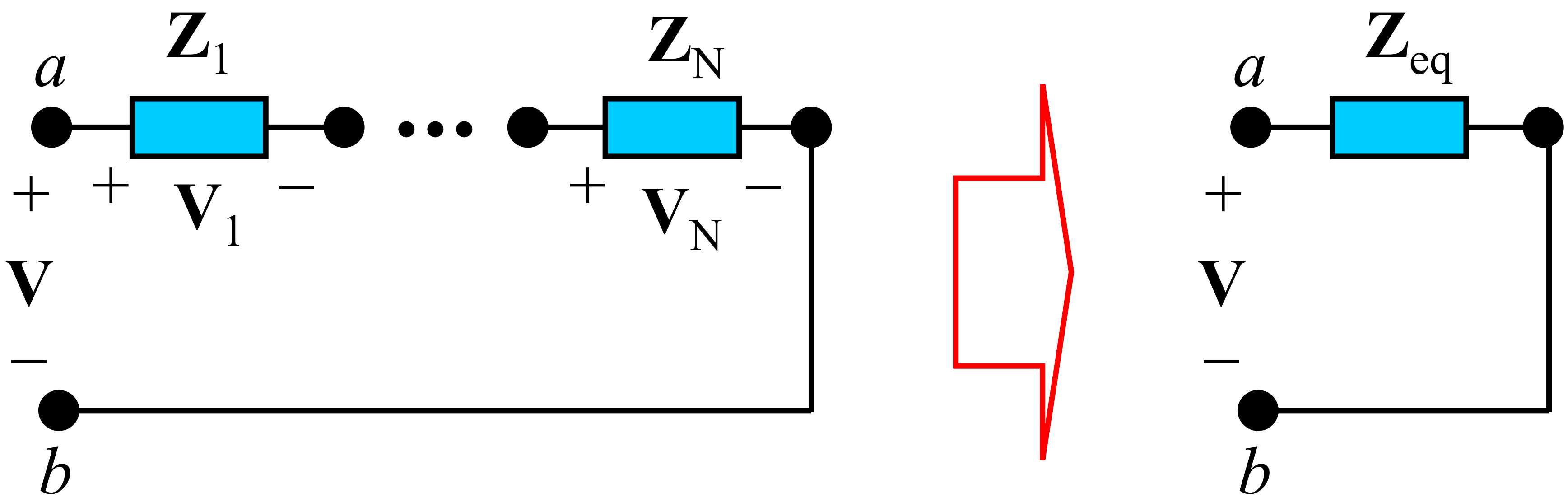
KVL per i fasori

La somma algebrica dei fasori delle tensioni lungo una maglia è zero



$$\sum_{m=1}^{M} \mathbf{V}_m = 0$$

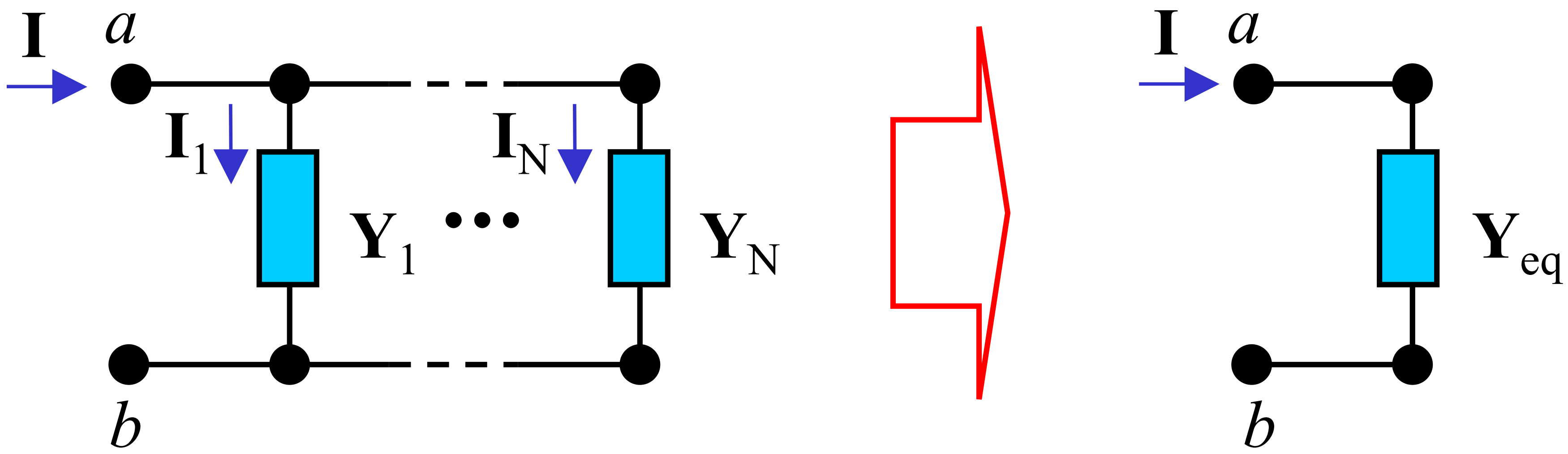
Impedenze in serie



$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \ldots + \mathbf{Z}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Z}_n$$

$$\mathbf{V}_n = \frac{\mathbf{Z}_n}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \ldots + \mathbf{Z}_N} \mathbf{V}$$

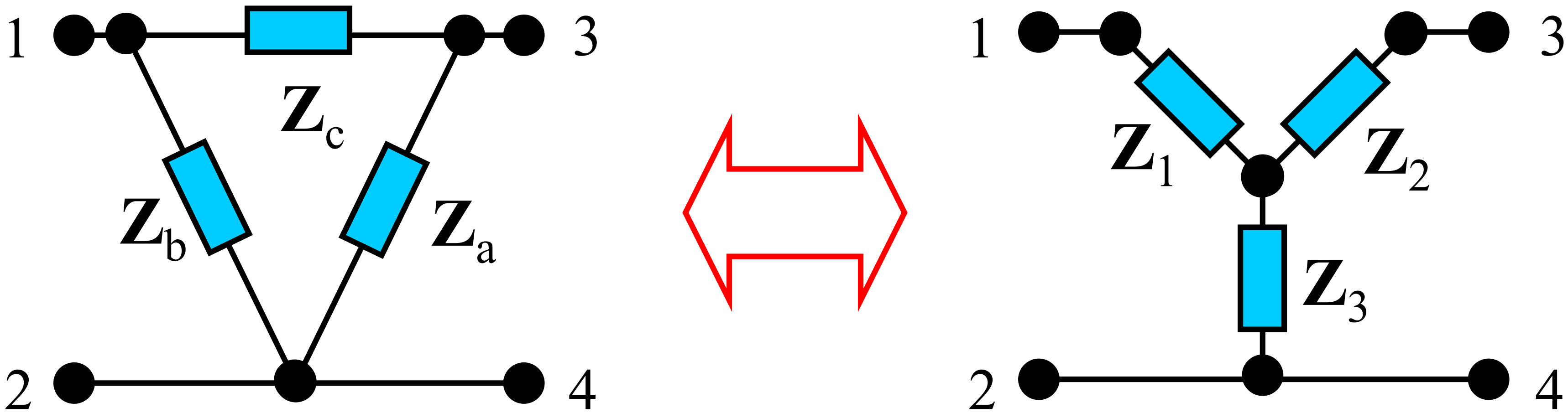
Impedenze in parallelo



$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \ldots + \mathbf{Y}_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{Y}_n$$

$$\mathbf{I}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \ldots + \mathbf{Y}_N}\mathbf{I}$$

Trasformazioni impedenze stella/triangolo



triangolo $\Rightarrow$ stella

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \qquad \mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_c \cdot \mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \qquad \mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_a \cdot \mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

stella $\Rightarrow$ triangolo

$$\mathbf{Z}_a = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \qquad \mathbf{Z}_b = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \qquad \mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3}$$