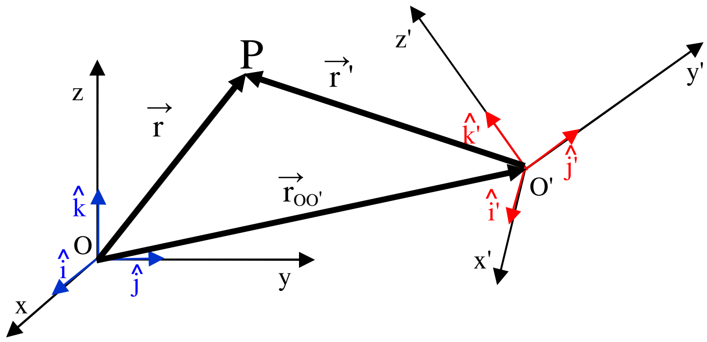
TRASFORMAZIONI TRA SISTEMI DI RIFERIMENTO

Consideriamo un sistema di riferimento (SdR) fisso XYZ (con origine O e versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) ed un sistema di riferimento mobile X'Y'Z' (con origine O' e versori $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$) che può compiere qualsiasi movimento sia traslatorio che rotatorio.



La relazione tra i vettori Posizione nei due SdR è la seguente

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{oo'}$

dove:

$\vec{r}$ è il vettore posizione del punto P rispetto al SdR fisso
$\vec{r}'$ è il vettore posizione del punto P rispetto al SdR mobile
$\vec{r}_{oo'}$ è il vettore posizione dell'origine O' rispetto al SdR fisso

In coordinate cartesiane i vettori $\vec{r}$, $\vec{r}'$ e $\vec{r}_{oo'}$ sono dati da: $\begin{cases} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \\ \vec{r}_{OO'} = x_{OO'}\hat{i} + y_{OO'}\hat{j} + z_{OO'}\hat{k} \end{cases}$

La relazione tra le velocità è determinata derivando rispetto al tempo la relazione tra le posizioni:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}' + \frac{d}{dt}\vec{r}_{oo'}$$

Vediamo i singoli termini:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + z\frac{d\hat{k}}{dt} \quad = \quad \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} =$$
$$v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \vec{v}$$

Per ottenere l'espressione finale abbiamo sfruttato la definizione della velocità $\vec{v}$ in coordinate cartesiane $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ ed il fatto che i termini contenenti le derivate rispetto al tempo dei versori $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ sono nulli in quanto questi sono fissi nello spazio.

Secondo termine

$$\frac{d}{dt}\vec{r}' = \frac{d}{dt}(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} =$$

$$= \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{v}' + x'\vec{\omega}\wedge i' + y'\vec{\omega}\wedge\hat{j}' + z'\vec{\omega}\wedge\hat{k}' =$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge x'i' + \vec{\omega}\wedge y'\hat{j}' + \vec{\omega}\wedge z'\hat{k}' = \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\left(x'i' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) = \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$$

Come nel caso precedente, l'espressione finale è stata ottenuta sfruttando la definizione della velocità $\vec{v}'$ rispetto al SdR mobile in coordinate cartesiane $\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$.

Ovviamente in questo caso la derivata rispetto al tempo dei versori $\hat{i}'\ \hat{j}'\ \hat{k}'$ non è nulla in quanto questi versori possono ruotare (la traslazione è contenuta nel prossimo termine $\vec{r}_{oo'}$) e fanno nascere il termine $\vec{\omega}\wedge\vec{r}'$ dove $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare (dovuta alla rotazione del SdR mobile) diretto perpendicolarmente al piano di rotazione.

Terzo termine:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{OO'} = \frac{d}{dt}(x_{OO'}\hat{i} + y_{OO'}\hat{j} + z_{OO'}\hat{k}) = \frac{dx_{OO'}}{dt}\hat{i} + x_{OO'}\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy_{OO'}}{dt}\hat{j} + y_{OO'}\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dz_{OO'}}{dt}\hat{k} + z_{OO'}\frac{d\hat{k}}{dt} =$$

$$= \frac{dx_{OO'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{OO'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{OO'}}{dt}\hat{k} = \vec{v}_{OO'}$$

L'espressione finale è stata ottenuta sfruttando la definizione della velocità $\vec{v}_{oo'}$ dell'origine O' del sistema mobile rispetto al fisso in coordinate cartesiane $\vec{v}_{OO'} = \frac{dx_{OO'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{OO'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{OO'}}{dt}\hat{k}$.

Questo termine tiene conto della traslazione del SdR mobile rispetto al fisso e ovviamente anche in questo caso i termini contenenti le derivate rispetto al tempo dei versori $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ sono nulli in quanto fissi nello spazio.

Mettendo insieme tutti i termini si ottiene la relazione tra le velocità per i due SdR:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}' + \frac{d}{dt}\vec{r}_{oo'} \qquad \rightarrow \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}' + \vec{v}_{oo'}$$

dove:

- $\vec{v}$ è il vettore velocità del punto P rispetto al SdR fisso
- $\vec{v}'$ è il vettore velocità del punto P rispetto al SdR mobile
- $\vec{v}_{oo'}$ è il vettore velocità dell'origine O' rispetto al SdR fisso
- $\vec{\omega}\wedge\vec{r}'$ è il prodotto vettoriale tra la velocità angolare $\vec{\omega}$ dovuta alla rotazione del SdR mobile rispetto al fisso ed il vettore posizione $\vec{r}'$ del punto P rispetto al SdR mobile

In coordinate cartesiane i vettori $\vec{v}$, $\vec{v}'$ e $\vec{v}_{oo'}$ sono

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \\ \vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' = v'_x\hat{i}' + v'_y\hat{j}' + v'_z\hat{k}' \\ \vec{v}_{OO'} = \frac{dx_{OO'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{OO'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{OO'}}{dt}\hat{k} = v_{x,OO'}\hat{i} + v_{y,OO'}\hat{j} + v_{z,OO'}\hat{k} \end{cases}$$

Per trovare la relazione tra le accelerazioni deriviamo rispetto al tempo la relazione tra le velocità

→ $\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \omega \wedge \vec{r}' + \vec{v}_{oo'}\right)$

Vediamo i singoli termini.

Primo termine:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + v_x\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + v_y\frac{d\hat{j}}{dt} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} + v_z\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} =$$
$$a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \vec{a}$$

dove abbiamo sfruttato la definizione dell'accelerazione $\vec{a}$ in coordinate cartesiane $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ ed il fatto che i termini contenenti le derivate rispetto al tempo dei versori $\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}$ sono nulle in quanto questi sono fissi nello spazio.

Secondo termine:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v'_x\hat{i}' + v'_y\hat{j}' + v'_z\hat{k}'\right) = \frac{dv'_x}{dt}\hat{i}' + v'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dv'_y}{dt}\hat{j}' + v'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}' + v'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} =$$
$$= \frac{dv'_x}{dt}\hat{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\hat{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}' + v'_x\frac{d\hat{i}'}{dt} + v'_y\frac{d\hat{j}'}{dt} + v'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} = a'_x\hat{i}' + a'_y\hat{j}' + a'_z\hat{k}' + v'_x\vec{\omega}\wedge\hat{i}' + v'_y\vec{\omega}\wedge\hat{j}' + v'_z\vec{\omega}\wedge\hat{k}' =$$
$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge v'_x\hat{i}' + \vec{\omega}\wedge v'_y\hat{j}' + \vec{\omega}\wedge v'_z\hat{k}' = \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge\left(v'_x\hat{i}' + v'_y\hat{j}' + v'_z\hat{k}'\right) = \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge\vec{v}'$$

L'espressione finale è stata ottenuta sfruttando la definizione della velocità $\vec{a}'$ rispetto al SdR mobile in coordinate cartesiane $\vec{a}' = \frac{dv'_x}{dt}\hat{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\hat{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}'$. Come già ampiamente sottolineato, la derivata rispetto al tempo dei versori $\hat{i}'\ \hat{j}'\ \hat{k}'$ non è nulla in quanto questi versori possono ruotare.

Si poteva arrivare subito al risultato $\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega}\wedge\vec{v}'$ notando quello che era stato ottenuto nel caso precedente $\frac{d}{dt}\vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$: si vede che la derivata rispetto al tempo di un vettore rispetto ad un SdR mobile è uguale alla sua derivata rispetto al tempo più un termine dato dal prodotto vettoriale del vettore $\vec{\omega}$ per il vettore stesso.

Terzo termine

$$\frac{d}{dt}\vec{\omega}\wedge\vec{r}'=\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{r}'}{dt}=\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}'+\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)=\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)$$

Dove è stata usata la notazione $\dot{\vec{\omega}}$ (accelerazione angolare) per indicare la derivata rispetto al tempo

$$\dot{\vec{\omega}}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Quarto termine

$$\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v_{x,OO'}\hat{i}+v_{y,OO'}\hat{j}+v_{z,OO'}\hat{k}\right)=\frac{dv_{x,OO'}}{dt}\hat{i}+v_{x,OO'}\frac{d\hat{i}}{dt}+\frac{dv_{y,OO'}}{dt}\hat{j}+v_{y,OO'}\frac{d\hat{j}}{dt}+\frac{dv_{z,OO'}}{dt}\hat{k}+v_{z,OO'}\frac{d\hat{k}}{dt}=$$

$$=\frac{dv_{x,OO'}}{dt}\hat{i}+\frac{dv_{y,OO'}}{dt}\hat{j}+\frac{dv_{z,OO'}}{dt}\hat{k}=a_{x,OO'}\hat{i}+a_{y,OO'}\hat{j}+a_{z,OO'}\hat{k}=\vec{a}_{OO'}$$

Mettendo insieme tutti i pezzi si ottiene:

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'+\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\vec{v}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)+\vec{a}_{oo'}=\vec{a}'+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'+\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)+\vec{a}_{oo'}$$

dove:

$\vec{a}$ accelerazione rispetto al sistema fisso

$\vec{a}'$ accelerazione rispetto al sistema mobile

$2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'$ accelerazione di Coriolis: nasce quando il SdR fa una rotazione (determinata da $\vec{\omega}$) ed il corpo ha una velocità $\vec{v}'$ non nulla rispetto al sistema mobile

$\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'$ accelerazione che si origina se il SdR ruota con velocità angolare variabile nel tempo ($\dot{\vec{\omega}}$ è l'accelerazione angolare) ed il corpo non si trova nell'origine.

$\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)$ accelerazione centrifuga che si origina se il SdR ruota e se il corpo non si trova nell'origine.

$\vec{a}_{oo'}$ accelerazione traslazionale dell'origine del SdR mobile rispetto al fisso.

Dunque invertendo l'espressione dell'accelerazione

$$\vec{a}'=\vec{a}-2\vec{\omega}\wedge\vec{v}'-\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}'-\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)-\vec{a}_{oo'}$$

si può dire che in un sistema di riferimento mobile l'accelerazione è uguale a quella rispetto al SdR fisso a cui vanno sottratti (vettorialmente) alcuni termini derivanti dall'accelerazione del SdR mobile.

Moltiplicando l'ultima espressione per la massa del corpo si ottiene la relazione tra la forza presente in un SdR mobile (non inerziale) e quella presente in un SdR fisso (inerziale).