MATHS Tle

COMPLÉMENTAIRES

Le numérique avec Sésamath

MAGNARD

MATHS T^{le}

COMPLÉMENTAIRES

Auteurs
Delphine ARNAUD
Thibault FOURNET-FAYAS
Muriel GOARIN
Hélène GRINGOZ
François GUIADER
Marie HASCOËT
Didier KRIEGER
Christine LADEIRA
Laura MAGANA
Paul MILAN
Frédéric WEYERMANN

Les auteurs et les éditions MAGNARD remercient vivement :
Les relectrices et relecteurs du manuel pour leurs remarques et leurs suggestions.
L'ensemble des enseignant•e•s pour leur participation aux études menées sur ce manuel.

MAGNARD

Sommaire

Partie 2 PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

7 Lois discrètes

8 Lois de probabilité à densité

9 Statistiques à deux variables

TP et problèmes thématiques

Dicomaths

Corrigés

Les corrigés des exercices dont le numéro est sur fond blanc 1

Parcours Thématiques

Thème 1 Modèles définis par une fonction d'une variable

Thème 2 Modèles d'évolution

Thème 3 Approche historique de la fonction logarithme

Thème 4 Calculs d'aires

Thème 5 Répartition des richesses, inégalités

Thème 6 Inférence bayésienne

Thème 7 Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Thème 8 Temps d'attente

Thème 9 Corrélation et causalité

Tous les pictos pour se repérer dans le manuel

Algo Pour tester un programme avec un ordinateur ou une calculatrice

Algo Pour compléter un programme ou se référer à son utilisation.

Pour la programmation en langage **Python**.

TICE Utilisation de logiciels (tableur, GeoGebra, géométrie dynamique…)

Calculatrice autorisée — Calculatrice non autorisée

Pour faire le lien entre les maths et les autres disciplines

Histoire des sciences | Histoire des maths | SVT | Physique | Chimie | SES | EPS

Pour faire le lien entre les maths et les filières de l'enseignement supérieur :

MPSI | Économie | Sciences | PCSI | Médical | Droit

Programme

Thèmes d'étude

▪ Modèles définis par une fonction d'une variable	Dans le manuel
Problèmes possibles – Modèles issus de contextes géométriques (expression de distance, d'aires, de volumes en fonction d'un paramètre), physiques, biologiques, économiques (fonctions de coût, coût marginal, coût moyen). – Études de variations, résolutions d'équation, optimisation dans des configurations géométriques, physiques, économiques, etc. **Contenus associés** – Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. – Fonction dérivée. Sens de variation. Extremums. – Fonctions de référence. – Convexité. – Statistique à deux variables. **Exemple d'algorithme** – Résolution d'équations par balayage, par dichotomie.	Thème 1

▪ Modèles d'évolution	Dans le manuel
Problèmes possibles – Évolution d'un capital, amortissement d'une dette. – Loi de décroissance radioactive : modèle discret, modèle continu. – Décharge, charge d'un condensateur, à partir de l'équation différentielle. – Loi de refroidissement de Newton (modèle discret). – Chute d'un corps dans un fluide visqueux. – Dynamique des populations : modèle de Malthus (géométrique), modèle de Verhulst (logistique) discret $N_{t+1} = N_t + rN_t(k - N_t)$, ou continu : $y' = ay(b - y)$. – Modèle proie prédateur discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes. **Contenus associés** – Suites récurrentes. – Suites géométriques. Fonction exponentielle. – Suites arithmético-géométriques. Équation différentielle $y' = ay + b$. – Limites. **Exemples d'algorithme** – Calcul des termes d'une suite. – Recherche de seuils. – Méthode d'Euler.	Thème 2

▪ Approche historique de la fonction logarithme	Dans le manuel
Problèmes possibles – Le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine. Influence des tables trigonométriques. – Lien entre suites arithmétiques et géométriques (depuis Archimède). Construction de tables d'intérêts. – Les travaux de Neper. Le passage du discret au continu. – Vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$ plus tardive. – Quadrature de l'hyperbole, problème des sous-tangentes constantes. **Contenus associés** – Suites arithmétiques, suites géométriques. – Fonction logarithme. – Calcul intégral. **Exemples d'algorithme** – Algorithme de Briggs. – Approximation de $\ln 2$ par dichotomie selon l'algorithme de Brouncker.	Thème 3

▪ Calculs d'aires	Dans le manuel
Problèmes possibles – Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède. – Quadrature de l'hyperbole par une ou deux méthodes (Brouncker, Grégoire de Saint-Vincent). – Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle sur $[0\,,1]$ par la méthode des rectangles. – Estimation de l'aire sous une courbe par la méthode de Monte-Carlo. – Approximation de π et aire d'un disque. **Contenus associés** – Limites de suites. – Intégrale d'une fonction continue et positive. – Primitives. – Continuité et dérivation. – Probabilités. **Exemples d'algorithme** – Calcul d'un terme de rang donné d'une suite. – Recherche d'une valeur approchée de précision donnée.	Thème 4

Thèmes d'étude

▪ Répartition des richesses, inégalités	Dans le manuel
Problèmes possibles – Courbe de Lorenz : sur des données réelles, présentation, définition, lecture, construction d'une ligne polygonale à partir des quantiles, interprétation. Modélisation par la courbe représentative d'une fonction continue, croissante, convexe de [0 , 1] dans [0 , 1] et ayant 0 et 1 comme points fixes. Position par rapport à la première bissectrice. – Indice de Gini : définition, calcul, interprétation comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition. Comparaison de plusieurs répartitions. Évolution de l'indice sur une période. **Contenus associés** – Statistique descriptive : caractéristiques de dispersion (médiane, quartiles, déciles, rapport interdécile). – Fonctions d'une variable. – Convexité. – Calcul intégral.	Thème 5

▪ Inférence bayésienne	Dans le manuel
Problèmes possibles – Tests binaires pour le diagnostic médical. Notion de vrais/faux positifs et négatifs, sensibilité, spécificité, valeurs prédictives positive (diagnostique) et négative, lien avec les probabilités conditionnelles. Tests de dépistage de sensibilité et de spécificité données : étude des valeurs prédictives en fonction de la proportion de malades et interprétation. – Exemples de problèmes du type : « De quelle urne vient la boule ? ». **Contenus associés** – Probabilités conditionnelles, inversion du conditionnement, formule de Bayes. – Étude de fonction.	Thème 6

▪ Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage	Dans le manuel
Problèmes possibles – Tirages aléatoires avec remise d'une boule dans une urne contenant des boules de deux couleurs différentes. Simulations. Calculs de probabilité. – Test d'une pièce, par construction d'un intervalle I centré en $n/2$ tel que $P(X \in \mathrm{I}) \geqslant 1-\alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. – Surréservation. Construction d'un intervalle I de la forme $[0, k]$ tel que $\mathrm{P}(X \in \mathrm{I}) \geqslant 1-\alpha$ où X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. – Sondages par échantillonnage aléatoire simple. Fourchette de sondage. Réflexion sur la réalisation effective d'un sondage et les biais possibles (représentativité, sincérité des réponses, etc.). – Démarche des tests d'hypothèse et de l'estimation. Les observations étant vues comme un échantillon aléatoire d'expériences régies par une loi inconnue (à découvrir), il s'agit de confronter une modélisation théorique proposée avec les résultats mesurés. Une bonne adéquation peut permettre de valider *a priori* le modèle (avec un certain degré de confiance), tandis que l'observation d'évènements donnés avec une probabilité très faible dans le modèle peut conduire à rejeter le modèle et à en chercher un autre. **Contenus associés** – Épreuve et loi de Bernoulli. – Schéma de Bernoulli et loi binomiale. – Lois uniformes discrètes et continues sur [0 , 1] **Exemples d'algorithme** – Dans le cadre de la loi binomiale : calcul de coefficients binomiaux (triangle de Pascal), de probabilités ; détermination d'un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in \mathrm{I})$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1-\alpha$. – Simulation avec Python d'une variable aléatoire (de la loi de Bernoulli, d'une loi uniforme discrète, etc.) d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire. Fonction Python renvoyant une moyenne pour un échantillon. Série des moyennes pour N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ. Calcul de l'écart-type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Calcul de la proportion des cas où l'écart entre la moyenne m et μ est inférieur ou égal à $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ ou à ks, pour $k=2$ ou $k=3$.	Thème 7

▪ Temps d'attente	Dans le manuel
Problèmes possibles – Durée de vie d'un atome radioactif. Discrétisation d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle. – Exemples de modélisation par une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou exponentielle : durée entre deux appels téléphoniques, durée de vie d'un composant électronique, période de retour de crue, etc. – Utilisation de la loi uniforme. Temps d'attente à un arrêt de bus, paradoxe de l'inspection. **Contenus associés** – Lois à densité. – Loi géométrique, loi exponentielle. – Absence de mémoire, discrète ou continue. **Exemples d'algorithme** – Simulation d'une variable aléatoire de loi géométrique à partir du schéma de Bernoulli. – Simulation d'une loi exponentielle à partir d'une loi uniforme. – Demi-vie d'un échantillon de grande taille d'atomes radioactifs.	Thème 8

Programme

Thèmes d'étude

▪ Corrélation et causalité	Dans le manuel
Problèmes possibles – Établissement de la loi d'Ohm. – Loi de désintégration radioactive. – Évolution de la température et des émissions de gaz à effet de serre dans le cadre du réchauffement climatique. – Loi de Moore. **Contenus associés** – Fonctions usuelles. – Représentations graphiques. – Minimum d'une fonction trinôme. – Séries statistiques à deux variables.	Thème 9

Analyse

▪ Suites numériques, modèles discrets	Dans le manuel
Contenus – Approche intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite, des opérations sur les limites, du passage à la limite dans les inégalités et du théorème des gendarmes. – Limite d'une suite géométrique de raison positive. – Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1. – Suites arithmético-géométriques. **Capacités attendues** – Modéliser un problème par une suite donnée par une formule explicite ou une relation de récurrence. – Calculer une limite de suite géométrique, de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1. – Représenter graphiquement une suite donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue d'un intervalle I dans lui-même. Conjecturer le comportement global ou asymptotique d'une telle suite. – Pour une récurrence arithmético-géométrique : recherche d'une suite constante solution particulière ; utilisation de cette suite pour déterminer toutes les solutions. **Démonstrations possible** – Limite des sommes des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1. **Exemples d'algorithme** – Recherche de seuils. – Pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, calcul des termes successifs. – Recherche de valeurs approchées de constantes mathématiques, par exemple π, $\ln 2$, $\sqrt{2}$.	1

▪ Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique	Dans le manuel
Contenus – Notion de limite. Lien avec la continuité et les asymptotes horizontales ou verticales. Limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle, logarithme). – Théorème des valeurs intermédiaires (admis). Cas des fonctions strictement monotones. – Réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle, représentation graphique. – Fonction logarithme népérien : réciproque de la fonction exponentielle. Limites, représentation graphique. Équation fonctionnelle. Fonction dérivée. – Fonction dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, $x \mapsto e^{u(x)}$, $x \mapsto \ln u(x)$, $x \mapsto u(x)^2$. **Capacités attendues** – Calculer une fonction dérivée, calculer des limites. Dresser un tableau de variation. – Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser le calcul des limites, l'allure des courbes représentatives des fonctions inverse, carré, cube, racine carrée, exponentielle et logarithme. – Exploiter le tableau de variation pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, pour résoudre une inéquation du type $f(x) \leqslant k$. – Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$. – Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation. – Utiliser la relation $\ln q^n = n \ln q$ pour déterminer un seuil. **Démonstrations possibles** – Relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$. – Calcul de la fonction dérivée du logarithme, en admettant sa dérivabilité. – Calcul de la fonction dérivée de $\ln u$, de $\exp u$. **Exemples d'algorithme** – Méthodes de recherche de valeurs approchées d'une solution d'équation du type $f(x) = k$: balayage, dichotomie, méthode de Newton. – Algorithme de Briggs pour le calcul de logarithmes.	2 4

Analyse

▪ Primitives et équations différentielles

Dans le manuel : 5

Contenus
– Sur des exemples, notion d'une solution d'équation différentielle.
– Notion de primitive, en liaison avec l'équation différentielle $y' = f$. Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. Exemples.
– Équation différentielle $y' = ay + b$, où a et b sont des réels ; allure des courbes.

Capacités attendues
– Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
– Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2uu'$ $e^u u'$ ou $\frac{u'}{u}$.
– Résoudre une équation différentielle $y' = ay$. Pour une équation différentielle $y' = ay + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.

Démonstrations possibles
– Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.
– Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Exemples d'algorithme
– Sur des exemples, résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler.

▪ Fonctions convexes

Dans le manuel : 3

Contenus
– Dérivée seconde d'une fonction.
– Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes, équivalence admise, lorsque f est dérivable, avec la position par rapport aux tangentes.
– Caractérisation admise par la croissance de f' la positivité de f''.
– Point d'inflexion.

Capacités attendues
– Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion.
– Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivable sur un intervalle.

▪ Intégration

Dans le manuel : 6

Contenus
– Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a\,,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)\,dx$. Relation de Chasles.
– Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a\,,b]$. Approche graphique et numérique. La valeur moyenne est comprise entre les bornes de la fonction.
– Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.
– Présentation de l'intégrale des fonctions continues de signe quelconque.
– Théorème : si f est continue sur $[a\,,b]$, la fonction F définie sur $[a\,,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,,b]$ et a pour dérivée f.
– Calcul d'intégrales à l'aide de primitives : si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Capacités attendues
– Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne.
– Calculer une intégrale, une valeur moyenne.
– Calculer l'aire sous une courbe ou entre deux courbes.
– Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.

Démonstration possible
– Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ lorsque f est une fonction continue positive croissante.

Exemples d'algorithme
– Méthode des rectangles, des trapèzes.
– Méthode de Monte-Carlo pour un calcul d'aire.

Programme

Probabilités et statistique

▪ Lois discrètes	Dans le manuel
Contenus – Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Espérance. – Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli : définition, espérance et écart-type. – Schéma de Bernoulli. Représentation par un arbre. – Coefficients binomiaux : définition (nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n), triangle de Pascal, symétrie. – Variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès dans le schéma de Bernoulli. Expression, espérance et écart-type (admis). Représentation graphique. – Loi géométrique : définition, expression, espérance (admise), représentation graphique et propriété caractéristique (loi sans mémoire). **Capacités attendues** – Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique. – Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal. – Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type $P(X = k)$ ou $P(X \leqslant k)$, etc. Calculer explicitement ces probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique. – Dans le cas où X suit une loi binomiale, déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in \text{I})$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$. – Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance des lois précédentes. – Utiliser en situation la caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire. – Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles, des répétitions d'expériences aléatoires. **Démonstrations possibles** – Espérance et écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. – Espérance d'une variable aléatoire uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. – Espérance d'une variable aléatoire suivant une binomiale ($n \leqslant 3$). – Caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.	7
▪ Lois à densité	**Dans le manuel**
Contenus – Notion de loi à densité à partir d'exemples. Représentation d'une probabilité comme une aire. Fonction de répartition $x \mapsto P(X \leqslant x)$ – Espérance et variance d'une loi à densité, expressions sous forme d'intégrales. – Loi uniforme sur $[0, 1]$ puis sur $[a, b]$. Fonction de densité, fonction de répartition. Espérance et variance. – Loi exponentielle. Fonction densité, fonction de répartition. Espérance, propriété d'absence de mémoire. **Capacités attendues** – Déterminer si une fonction est une densité de probabilité. Calculer des probabilités. – Calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité. **Exemples d'algorithme** – Simulation d'une variable de Bernoulli ou d'un lancer de dé (ou d'une variable uniforme sur un ensemble fini) à partir d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. – Simulation du comportement de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi.	8
▪ Statistique à deux variables quantitatives	**Dans le manuel**
Contenus – Nuage de points. Point moyen. – Ajustement affine. Droite des moindres carrés. Coefficient de corrélation. – Ajustement se ramenant par changement de variable à un ajustement affine. – Application des ajustements à des interpolations ou extrapolations. **Capacités** – Représenter un nuage de points. – Calculer les coordonnées d'un point moyen. – Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul. – Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler. **Démonstration possible** – Droite des moindres carrés.	9

Algorithmique et programmation

	Dans le manuel
La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique. Au collège, en mathématiques et en technologie, les élèves ont appris à écrire, mettre au point et exécuter un programme simple. Les classes de seconde et de première ont permis de consolider les acquis du collège (notion de variable, type, de variables, affectation, instruction conditionnelle, boucle notamment), d'introduire et d'utiliser la notion de fonction informatique et de liste. En algorithmique et programmation, le programme de mathématiques complémentaires reprend les programmes des classes de seconde et de première sans introduire de notion nouvelle, afin de consolider le travail des classes précédentes. Les algorithmes peuvent être écrits en langage naturel ou utiliser le langage Python. On utilise le symbole « ← » pour désigner l'affection dans un algorithme écrit en langage naturel. L'accent est mis sur la programmation modulaire qui permet de découper une tâche complexe en tâches plus simples. L'algorithmique trouve naturellement sa place dans toutes les parties du programme et aide à la compréhension et à la construction des notions mathématiques.	**Tous les chapitres**

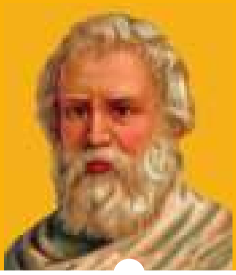
Vocabulaire ensembliste et logique

	Dans le manuel
L'apprentissage des notations mathématiques et de la logique est transversal à tous les chapitres du programme. Aussi, il importe d'y travailler d'abord dans des contextes où ils se présentent naturellement, puis de prévoir des temps où les concepts et types de raisonnement sont étudiés, après avoir été rencontrés plusieurs fois en situation. Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils connaissent également la notion de couple. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$, ou la notation $E \setminus A$.	**Dicomaths**
Les élèves apprennent en situation à : – reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ; – lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ; – formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ; – mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ; – formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ; – formuler la réciproque d'une implication ; – lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas exigibles). Le symbole de somme Σ est utilisé pour écrire concisément certaines expressions, mais son emploi comme outil de calcul n'est pas un objectif du programme.	**Tous les chapitres**

PARTIE 1

Analyse

Archimède de Syracuse (287-212 av. J .-C.)



Bonaventure Cavalieri (1598-1647)

Grégoire de St Vincent (1584-1667)

Au IIIe siècle avant J.-C., Archimède s'intéresse à différents problèmes de mesures : longueur du cercle (problème de rectification), quadrature de la parabole, cubature des solides. Au cours des Xe et XIe siècles, Ibn al-Haytham énonce les lois de la démarche scientifiques et calcule le volume d'un paraboloïde.

↳ Dicomaths p. 294

Au XVIIe siècle, Cavalieri invente une méthode de calcul d'aire et de volume portant son nom, ou méthode des indivisibles (déjà énoncée par Liu-Hui en 263 pour le calcul du volume d'un cylindre) et très utilisée par la suite par Roberval, Torricelli et Pascal.

↳ Dicomaths p. 294

En 1647, Grégoire de Saint-Vincent utilise la méthode d'exhaustion pour tenter de résoudre le problème de la quadrature du cercle. À la même époque des scientifiques tels que Fermat, Huygens, Pascal

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes

- J'ai étudié des fonctions de références (polynomiales, homographiques, exponentielles et trigonométriques), le concept de dérivée et ses applications quand aux variations d'une fonction.

En Terminale générale

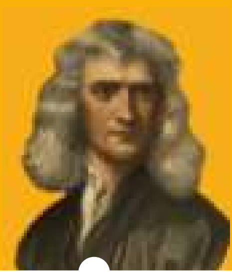
- Je vais étudier la limite d'une suite numérique et approfondir mes connaissances sur les fonctions : limites, continuité, compléments sur la dérivation, convexité.
- Je vais découvrir la fonction logarithme ainsi que le lien entre primitives et intégrales.

Isaac Barrow (1630-1677)

et Barrow montrent que les problèmes des aires et des tangentes sont inverses l'un de l'autre. En cela, ils montrent le lien entre calcul intégral et dérivation.

↪ Dicomaths p. 294 p. 297

Isaac Newton (1703-1727)



Au début du XVIII^{e} siècle, la querelle entre Newton et Leibniz concernant la découverte du calcul infinitésimal fait rage.

↪ Dicomaths p. 297

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

En 1797, Lagrange publie sa *Théorie des fonctions analytiques* dans laquelle il présente le calcul des variations d'Euler et les ajouts effectués par Legendre et lui-même.

↪ Dicomaths p. 296

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

En 1821, Cauchy définit dans son *Cours d'Analyse* la notion de limite et propose un cadre plus rigoureux du calcul différentiel.

↪ Dicomaths p. 294

Domaines professionnels

- Un·e **économiste** utilisera la convexité afin de déterminer le moment où il y a accélération d'une production. Il résoudra également des équations différentielles pour étudier la loi de l'offre et de la demande concernant un produit.
- Un·e **concepteur·trice de manèges à sensations fortes** utilisera dérivation et convexité pour prévoir la vitesse et l'accélération de la cabine en différents endroits du parcours.
- Un·e **conseiller·ère) bancaire** utilisera les suites numériques pour calculer les intérêts d'un prêt, d'une épargne.
- Un·e **épidémiologiste** modélisera l'évolution de certaines maladies par des fonctions.
- Un·e **physicien·ne** utilisera également les primitives et les intégrales pour déterminer des équations horaires de mouvement à partir de l'accélération d'un solide.

1

Suites et modèles discrets

Dans un étang, la population de poissons fluctue au cours du temps.
Plusieurs facteurs interviennent, comme la reproduction des poissons ou l'homme à travers notamment la pêche.

Comment le nombre de poissons dans l'étang évolue-t-il ?

↪ Exercice 80 p. 35

VIDÉO WEB

80 % de poissons en moins dans la baie de Somme
lienmini.fr/maths-c01-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c01-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser des pourcentages

1. Un article coûte 30 €. Son prix subit une augmentation de 10 %.
Quel est le nouveau prix de l'article ?

2. On s'intéresse à l'évolution de la population d'un village.

Année	2020	2021
Nombre d'habitants	3 500	4 025

Quel est le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'habitants entre 2020 et 2021 ?

2 Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 1$.

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_5.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

a) Calculer v_0.

b) Calculer v_{10}.

3 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + n$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

4 Utiliser les suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$

a) Déterminer la nature de la suite (u_n).

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer u_{10}.

5 Utiliser les suites géométriques

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$

a) Déterminer la nature de la suite (v_n).

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

c) Calculer v_{10}.

6 Calculer des sommes

1. Calculer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$

b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{12}$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 2$.
Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

Activités

20 min — Thème 2

1 Introduire la notion de limite d'une suite

A ▸ Première étude de cas

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique en France. En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme.
Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.

2. On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en 2020 + n.

a) Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de u_{20}, u_{30}, u_{40} et u_{50}.

c) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice.

d) Que se passe-t-il pour les termes u_n quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

B ▸ Deuxième étude de cas

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singes dans une réserve naturelle. En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

1. Déterminer le nombre de singes en 2021 et 2022.

2. On note v_n le nombre de singes en 2020 + n.

a) Donner la valeur de v_0, v_1 et v_2.

b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de v_{20}, v_{30}, v_{40} et v_{50}.

c) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice.

d) Que se passe-t-il pour les termes v_n quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

3. Que peut-on penser de cette évolution ?

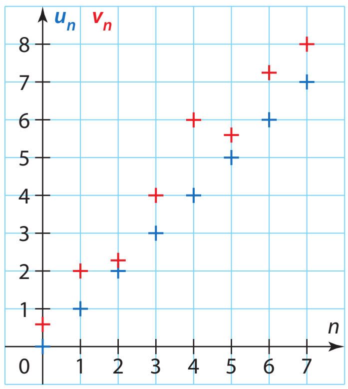
↪ Cours 2 p. 20

20 min

2 Découvrir des propriétés sur les limites

A ▸ Théorème de comparaison

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n$.
Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. On a représenté graphiquement ci-contre la suite (u_n) en bleu et la suite (v_n) en rouge.



1. Donner la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Conjecturer la limite de la suite (v_n).

B ▸ Théorème des gendarmes

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On veut étudier le comportement de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (w_n).

2. En donnant un encadrement de $(-1)^n$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $-\dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. Représenter sur un même graphique les suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et (w_n).

4. Donner la limite des suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

5. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

↪ Cours 3 p. 22

TICE 30 min

3 Étudier des suites géométriques

Dans la cuisine de Diane se trouve un fromage posé sur un plateau. Le fromage est réservé pour Diane. Le premier jour, elle mange la moitié du fromage.
Puis, le deuxième jour, elle mange la moitié de ce qu'il reste. Et ainsi de suite.
On note u_n la part du fromage qu'elle mange le n-ième jour. Ainsi $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur de u_2 et u_3.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. On s'intéresse maintenant à la part totale du fromage mangée par Diane.
On note S_n la part totale mangée par Diane entre le 1er jour et la fin du n-ième jour.
Déterminer la valeur de S_1, S_2 et S_3.

4. On veut modéliser le problème à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	Jour	u_n	S_n
2	1		
3	2		

a) Recopier le tableau ci-contre dans un tableur et compléter les cellules B2 et C2 avec leurs valeurs.
b) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ?
Et dans la cellule C3 ?
c) En étirant vers le bas, compléter les colonnes B et C.
d) Pour des grandes valeurs de n, de quelle valeur semblent se rapprocher les termes u_n ? Et les termes S_n ?
Comparer cette valeur avec $\frac{u_1}{1-q}$ où q est la raison de la suite (u_n).
e) Diane peut-elle donner du fromage à sa sœur sans être lésée par rapport à ce qu'elle prévoyait de manger ?

↪ Cours 4 p.24

TICE 30 min Thème 2

4 Découvrir les suites arithmético-géométriques

Un nouveau magazine arrive sur le marché en 2020. La première année (en 2020), 500 personnes s'abonnent au magazine. On prévoit que chaque année, 80 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.

2. On note u_n le nombre d'abonnés en $2020 + n$.
a) Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.
b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.
c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Résoudre l'équation $x = 0{,}8x + 200$. On notera x_0 la solution de l'équation.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - x_0$.
a) Calculer v_0, v_1, v_2.
b) En calculant $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$, conjecturer la nature de la suite (v_n).

5. On veut démontrer la conjecture de la question précédente.
a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n et enfin en fonction de v_n.
b) En déduire la nature de la suite (v_n).
c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

6. Quel sera le nombre d'abonnés en 2050 ?

↪ Cours 4 p. 24

Cours

1 Définition et représentation graphique d'une suite

Définition **Suite définie par une formule explicite**

Définir une suite (u_n) par une formule explicite, c'est donner l'expression de u_n en fonction de n.

Remarque

On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.

Exemple

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 1$.
On a alors $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$; $u_{20} = 3 \times 20 + 1 = 61$

Définition **Suite définie par une relation de récurrence**

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un (ou plusieurs) premier(s) terme(s) et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Exemple

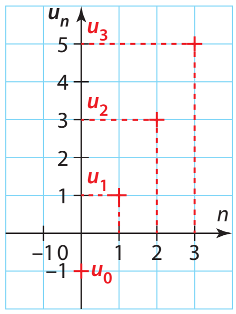
La suite (u_n) est définie par $u_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On a $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times (-4) + 1 = -11$.
Et $u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times (-11) + 1 = -32$.

Règle **Représentation graphique**

Pour représenter graphiquement une suite dans un repère, on place les points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.
On la représente graphiquement comme ci-contre.

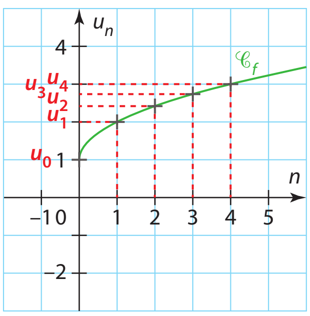


Règle **Représentation graphique d'une suite avec une formule explicite ou une relation de récurrence**

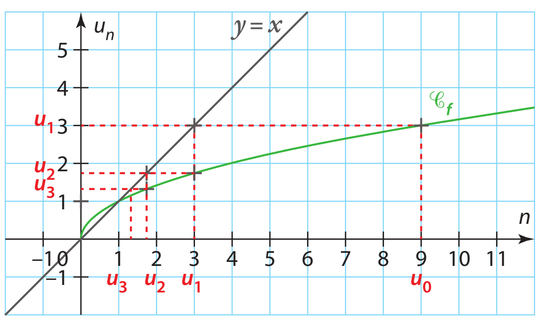
• Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.
• Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.

Exemples

① Si $u_n = f(n)$



② Si $u_{n+1} = f(u_n)$



Exercices résolus

Méthode 1 Modéliser avec une suite

Énoncé

Un lycée a 1 500 élèves inscrits le 1er septembre 2020. Chaque année, 30 % des anciens élèves ne se réinscrivent pas et il y a 500 nouveaux élèves.

1. **Combien y aura-t-il d'élèves inscrits au lycée le 1er septembre 2021 ?**

2. **Modéliser la situation à l'aide d'une suite.**

Solution

1. $1500 \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) + 500 = 1550$ **1**

Il y aura donc 1 550 élèves inscrits le 1er septembre 2021.

2. Soit (u_n) la suite correspondant au nombre d'élèves inscrits le 1er septembre de l'année $(2020 + n)$ **2**

$u_0 = 1\,500$ **3** et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) + 1500 = 0{,}7u_n + 1500$ **4**

Conseils & Méthodes

1 30 % des élèves ne se réinscrivent pas. Cela correspond à une baisse de 30 %. On multiplie donc par $\left(1 - \dfrac{30}{100}\right)$.

2 Il faut d'abord identifier ce que l'on veut modéliser : ici le nombre d'élèves inscrits chaque année.

3 u_0 est le nombre d'élèves inscrits en $2020 + 0$, soit en 2020.

4 u_n est le nombre d'élèves inscrits en $2020 + n$ et u_{n+1} le nombre en $2020 + (n + 1)$, c'est-à-dire l'année suivante.

À vous de jouer !

1 Nawal s'entraîne pour un marathon. Le premier jour d'entraînement, elle court 1 km. Puis, chaque jour, elle décide d'augmenter sa distance de course de 10 % par rapport au jour précédent. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

2 Le 1er janvier 2020, Mirunan place 5 000 € sur un compte épargne. Chaque année, il dépose 2 000 € supplémentaires sur le compte en juin. Et le 31 décembre, la banque lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

→ Exercices 32 à 34 p. 30

Méthode 2 Représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 2$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$. **1**

On commence par tracer la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Puis, on place u_0 sur l'axe des abscisses.

Pour obtenir la valeur de u_1, on cherche l'image de u_0 par la fonction f.

On obtient donc la valeur de u_1 sur l'axe des ordonnées.

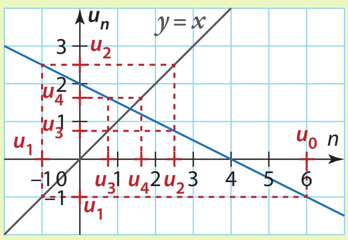
Pour continuer la représentation graphique, il faut avoir la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses.

Pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$.

Puis pour obtenir u_2, on cherche l'image de u_1 par la fonction f. Et ainsi de suite.

Conseils & Méthodes

1 Pour représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$) on trace la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Il faut ensuite représenter les termes de la suite un par un.



À vous de jouer !

3 Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = -8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 1$.

4 Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + 5$.

→ Exercices 35 à 37 p. 30

Cours

2 Limite d'une suite

Définition Suite ayant pour limite un nombre réel

Une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de ℓ que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Définition Suite ayant pour limite l'infini

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi grands (respectivement petits) que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Remarque Certaines suites n'ont pas de limite, comme la suite $(-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs -1 et 1.

Propriété Limite des suites de référence

- **Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.**
- **Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.**

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ **indéterminée** si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ **indéterminée** si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée**	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	**indéterminée**	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
$\ell \neq 0$	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**
0	0	**indéterminée**

Remarques
Dans les deux tableaux précédents :
1. **indéterminée** signifie que c'est une forme indéterminée, et qu'il n'y a pas de propriété pour déterminer la limite.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 | Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer la limite d'une suite

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ **b)** (v_n) **définie par** $v_n = -5\sqrt{n} - n^3$ **c)** (w_n) **définie par** $w_n = \dfrac{2}{3n+5}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme) 1

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$ (par produit) 2

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (par somme) 1

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+5 = +\infty$ (par produit et somme) 1 2.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par quotient) 3

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme somme de suites de référence.

2 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme produit de suites de référence.

3 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme quotient de suites de référence.

À vous de jouer !

5 Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) $u_n = n^2 + n - 5$ **b)** $v_n = n^2\sqrt{n} + 2$ **c)** $w_n = -\dfrac{1}{2n-5}$

6 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} - 10\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \square \dfrac{1}{n}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n}}\right)$

↪ Exercices 38 à 40 p. 30

Méthode 4 Lever une forme indéterminée

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 - n$ **b)** (v_n) **définie par** $v_n = \dfrac{4n^2}{n+1}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc on obtient une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times (n-1)$ 1

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par produit)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ (par produit) et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

Donc on obtient une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^2 \times 4}{n \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}$ donc $v_n = \dfrac{n \times 4}{1 + \dfrac{1}{n}}$ 2

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \square 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par quotient)

Conseils & Méthodes

1 Pour lever une indéterminée, on peut factoriser ou développer.

2 Pour lever une indéterminée dans un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

À vous de jouer !

7 Pour chaque suite suivante, montrer que l'on a une forme indéterminée et lever la forme indéterminée à l'aide d'une factorisation.

a) $u_n = -n^3 + 2n^2$ **b)** $v_n = n^2 - 3n + 1$

8 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{5n-2}$ **b)** $v_n = \dfrac{2n}{1-n^2}$

↪ Exercices 41 à 44 p. 30

3 Limite et comparaison

Théorème — Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

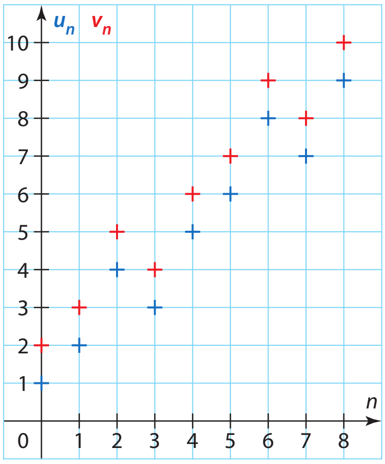
On suppose qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

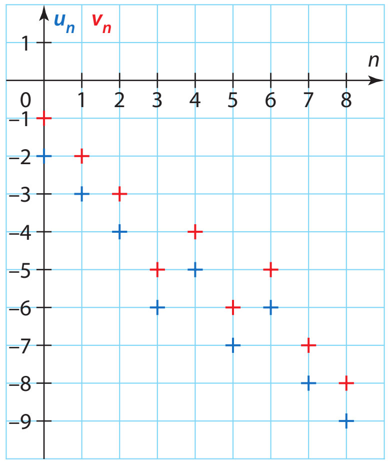
Exemples

Sur les schémas suivants, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge avec $u_n \leqslant v_n$.

① Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.



② Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$.



Théorème — Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.

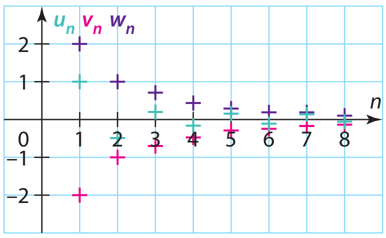
On suppose que :

- il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$.

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté la suite (u_n) en turquoise, la suite (v_n) en rose et la suite (w_n) en violet.



Propriété — Inégalités et limites

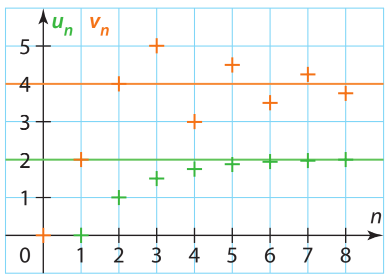
Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté la suite (u_n) en vert et la suite (v_n) en orange.



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser le théorème de comparaison

Énoncé

1. **Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2 \times \sin(n)$**
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$
b) En déduire la limite de la suite (u_n)

2. **Soit v_n la suite définie par $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$.**
Déterminer la limite de la suite (v_n).

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ **1**

Donc $-2 \leqslant 2 \times \sin(n) \leqslant 2$ et donc $n - 2 \leqslant n + 2 \times \sin(n) \leqslant n + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$. **2**

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **3**. Donc $-n^2 - n - 1 \leqslant -n^2 - n + (-1)^n \leqslant -n^2 - n + 1$.

Donc $v_n \leqslant -n^2 - n + 1$ **4**. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 - n + 1 = -\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $(\sin(n))$ n'a pas de limite.

3 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (v_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

4 Après avoir encadré v_n, on détermine la limite des deux suites de l'encadrement pour choisir quelle inégalité sera utilisée.

À vous de jouer !

9 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 5 \times (-1)^n$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2 - 5$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n).

10 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\sqrt{n} - \cos(2n)$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant -\sqrt{n} + 1$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).

↪ Exercices 45 à 46 p. 31

Méthode 6 Utiliser le théorème des gendarmes

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **1**. Donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ **2**,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Conseils & Méthodes

1 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
On essaye donc d'abord d'encadrer la suite (u_n).

2 On détermine ensuite la limite des deux suites de l'encadrement.

À vous de jouer !

11 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -5 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

12 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 42 - \dfrac{5 \times (-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

↪ Exercices 47 à 50 p. 31

4 Cas particuliers

Propriété **Limite de q^n**

Soit q un réel positif ou nul.

- **Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$**
- **Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$**
- **Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$**

Exemple $0 \leqslant \frac{1}{2} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Propriété **Limite d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geqslant 0$ et de premier terme u_p avec $p \in \mathbb{N}$.

- **Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$**
- **Si $q > 1$ et $u_p > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$**
- **Si $q > 1$ et $u_p < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$**
- **Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_p$**

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3}$.
(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Or $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Propriété **Limite de la somme des termes d'une suite géométrique**

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) et de raison q, avec $0 \leqslant q < 1$.
Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n). On a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_p}{1-q}$

Démonstration

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n-1} = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \ldots + u_p \times q^{n-1}$$
$$= u_p \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = u_p \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$0 \leqslant q < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - q^n = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} S_n = u_p \times \frac{1}{1-q} = \frac{u_p}{1-q}$$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c01-04

Exemple En reprenant l'exemple précédent, le somme des n premiers termes de (u_n) a pour limite $\frac{5}{1-\frac{1}{3}}$ soit 7,5 quand n tend vers $+\infty$.

Définition **Suite arithmético-géométrique**

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques

① Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante. ② Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique. ③ Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Propriété **Suite arithmético-géométrique et suite géométrique**

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) et telle que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant p$, par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - \ell$.

Remarque À l'aide de la suite (v_n), on peut déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
En effet, on a alors pour tout entier $n \geqslant p$, $v_n = v_p \times a^{n-p}$. Or $v_n = u_n - \ell$. Donc $u_n = v_n + \ell = v_p \times a^{n-p} + \ell$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Étudier une suite géométrique

Énoncé

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 5$. Déterminer la limite de la suite (u_n), l'expression de la somme de ses n premiers termes en fonction de n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Solution

$0 < \frac{1}{4} < 1$ **1**. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ **2**

$S_n = u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^{n-1}$ **3**

$S_n = u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ **4**

$$S_n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{20}{3}$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer la limite d'une suite géométrique, il faut regarder la valeur de la raison de la suite.

2 Le premier terme est u_0, donc le n-ième terme est u_{n-1}.

3 On exprime les termes de la somme en fonction du premier terme (ici u_0), puis on factorise.

4 $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

À vous de jouer !

13 Pour chaque suite ci-dessous, déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1 = -2$.

b) (u_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$.

14 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = 4$.

Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

1. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

2. Déterminer la limite S_n quand n tend vers $+\infty$.

↪ Exercices 51 à 55 p. 31

Méthode 8 Étudier une suite arithmético-géométrique (1)

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction n.

Solution

(u_n) est une suite arithmético-géométrique. On suppose que (u_n) est convergente de limite x. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} (3u_n - 4)$ donc $x = 3x - 4$

$x = 3x - 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$ **1**

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$ **2**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ **3** $= 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3 \times (u_n - 2) = 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 6 - 2 = 4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 \times 3^n$ **4**

Or $v_n = u_n - 2$. Donc $u_n = v_n + 2$ et donc $u_n = 4 \times 3^n + 2$.

Conseils & Méthodes

1 On reconnaît une suite arithmético-géométrique avec $u_{n+1} = au_n + b$. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$.

2 On étudie ensuite la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ où ℓ est la solution de l'équation $x = ax + b$.

3 Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$ avec q un réel fixé.

4 On exprime ensuite v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

À vous de jouer !

15 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$. Donner l'expression de u_n en fonction n.

16 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -4v_n + 10$. Donner l'expression de v_n en fonction n.

↪ Exercices 56 à 59 p. 31

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Étudier une suite arithmético-géométrique (2)

Cours 2 p. 20 et Cours 4 p. 24

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n - 4$.

1. **Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.**

2. **Étudier les variations de la suite (u_n).**

3. **Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).**

4. **Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).**

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et en déduire la limite de (S_n).

D'après bac

Solution

1. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. 1

$x = 0{,}8x - 4 \Leftrightarrow 0{,}2x = -4 \Leftrightarrow x = -20$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - (-20) = u_n + 20$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 20 = 0{,}8u_n - 4 + 20$

$= 0{,}8u_n + 16 = 0{,}8 \times (u_n + 20) = 0{,}8 \times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 + 20 = 4 + 20 = 24$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 24 \times 0{,}8^n$.

Or $v_n = u_n + 20$. Donc $u_n = v_n - 20 = 24 \times 0{,}8^n - 20$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 24 \times 0{,}8^{n+1} - 20 - (24 \times 0{,}8^n - 20)$ 2

$= 24 \times 0{,}8^{n+1} - 24 \times 0{,}8^n$

$= 24 \times 0{,}8^n \times (0{,}8 - 1)$ 3

$= 24 \times 0{,}8^n \times (-0{,}2)$

$= -4{,}8 \times 0{,}8^n$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ 4. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 24 \times 0{,}8^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 24 \times 0{,}8^n - 20 = -20$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -20$

4. $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ 5

$= 24 \times 0{,}8^0 - 20 + (24 \times 0{,}8^1 - 20) + (24 \times 0{,}8^2 - 20) + \ldots + (24 \times 0{,}8^{n-1} - 20)$

$= -20 \times n + (24 \times 0{,}8^0 + 24 \times 0{,}8^1 + 24 \times 0{,}8^2 + \ldots + 24 \times 0{,}8^{n-1})$ 6

$= -20 \times n + 24 \times (1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1})$

Donc $S_n = -20n + 24 \times \dfrac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} = -20n + 24 \times \dfrac{1 - 0{,}8^n}{0{,}2} = -20n + 120(1 - 0{,}8^n)$

Or $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}8^n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 120 \times (1 - 0{,}8^n) = 120$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -20 \times n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique : Méthode 8 p. 25

2 Pour étudier les variations d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.

3 Pour simplifier l'expression, on factorise. Ici le facteur commun est $24 \times 0{,}8^n$.
De plus, $0{,}8^{n+1} = 0{,}8^n \times 0{,}8^1$.

4 Pour déterminer la limite d'une suite arithmético-géométrique, on utilise les propriétés du cours pour les limites de (q^n) et les opérations sur les limites.

5 Le n-ième terme est u_{n-1}.

6 On regroupe les termes « -20 » ensemble et les termes de la forme $24 \times 0{,}8^k$ ensemble.

À vous de jouer !

17 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 8$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étudier les sens de variations de la suite (u_n).

18 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}6v_n + 2$.

1. Déterminer l'expression de v_n en fonction n.

2. Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercices 67 à 77 p. 33

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 10 Étudier deux suites croisées

Cours 4 p. 24

Énoncé

On veut étudier l'évolution du nombre d'habitants entre deux villes A et B. On suppose que la population totale des villes A et B est constante. En 2020, il y a 17 500 habitants dans chaque ville.

Puis d'une année sur l'autre, on suppose que 15 % des habitants de la ville A partent pour habiter dans la ville B et 20 % des habitants de la ville B partent pour habiter dans la ville A.

On note u_n le nombre d'habitants de la ville A en 2020 + n et v_n le nombre d'habitants de la ville B en 2020 + n.

1. Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 0{,}2v_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 7\,000$

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Solution

1. La population totale des villes A et B est constante.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 17\,500 + 17\,500 = 35\,000$ 1

2. 15 % des habitants de la ville A partent pour habiter dans la ville B et 20 % des habitants de la ville B partent pour habiter dans la ville A.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{15}{100}\right)u_n + \dfrac{20}{100}v_n$ 2 $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 0{,}2v_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + \dfrac{20}{100}(35\,000 - u_n)$ 3

$= 0{,}85u_n + 7\,000 - 0{,}2u_n$

Donc $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 7\,000$

3. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. 4

$x = 0{,}65x + 7\,000 \Leftrightarrow 0{,}35x = 7\,000 \Leftrightarrow x = \dfrac{7\,000}{0{,}35} \Leftrightarrow x = 20\,000.$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 20\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 20\,000 = 0{,}65u_n + 7\,000 - 20\,000 = 0{,}65u_n - 13\,000 = 0{,}65(u_n - 20\,000) = 0{,}65w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,65 et de premier terme $w_0 = u_0 - 20\,000 = -2\,500$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -2\,500 \times 0{,}65^n$. Or $w_n = u_n - 20\,000$ donc $u_n = w_n + 20\,000$ et donc $u_n = -2\,500 \times 0{,}65^n + 20\,000$.

$u_n + v_n = 35\,000$. Donc $v_n = 35\,000 - u_n = 35\,000 - (-2\,500 \times 0{,}65^n + 20\,000)$. Donc $v_n = 15\,000 + 2\,500 \times 0{,}65^n$

Conseils & Méthodes

1 La population totale des villes A et B est constante. Donc $u_n + v_n$ est constant.

2 15 % des habitants de la ville A partent pour la ville B, cela correspond à une diminution de 15 %. Il faut donc multiplier par $\left(1 - \dfrac{15}{100}\right)$.

3 $u_n + v_n = 35\,000$, donc $v_n = 35\,000 - u_n$

4 Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique : Méthode 8 p. 25

À vous de jouer !

19 On s'intéresse au nombre d'abonnés dans un club de sport dans une ville qui contient 5 000 habitants. On suppose que le nombre d'habitants dans la ville est constant. La première année, il y a 600 abonnés. Puis, chaque année, 60 % des abonnés se réinscrivent, et 10 % des personnes qui n'étaient pas abonnés s'abonnent. On note u_n le nombre d'habitants de la ville abonnés au club n années après l'ouverture du club et v_n le nombre d'habitants de la ville non abonnés au club n années après l'ouverture du club

1. Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1v_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 500$
4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

20 *RougeTel* et *BleuMobile* sont deux opérateurs de téléphonie dans une ville de 10 000 habitants. La population est constante et tous les habitants sont abonnés à l'un des deux opérateurs. En 2020, 2 000 habitants souscrivent à *RougeTel*. Chaque année, 80 % des abonnés de *RougeTel* se réabonnent à *RougeTel*, et 30 % des abonnés de *BleuMobile* changent d'opérateur et partent chez *RougeTel*. On note u_n le nombre d'habitants abonnés à *RougeTel* en 2021 + n, et v_n le nombre d'habitants abonnés à *BleuMobile* en 2021 + n.

1. Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}3v_n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3\,000$.
4. Déterminer les expression de u_n et v_n en fonction de n.

↪ Exercices 78 à 79 p. 35

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer

La suite auxiliaire d'une suite arithmético-géométrique est géométrique.

On traitera la démonstration de la façon suivante.

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.

Soit ℓ la solution de l'équation $x = ax + b$. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$.

Alors la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Comprendre avant de rédiger

- Soit, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

$x = 2x - 1 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$. La suite auxiliaire est donc la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$.

On a $u_0 = 5$, $u_1 = 2 \times 5 - 1 = 9$, $u_2 = 2 \times 9 - 1 = 17$, $u_3 = 2 \times 17 - 1 = 33$

On a donc $v_0 = u_0 - 1 = 4$; $v_1 = u_1 - 1 = 8$; $v_2 = u_2 - 1 = 16$ et $v_3 = u_3 - 1 = 32$.

La suite (v_n) semble géométrique de raison 2.

- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$, avec q un réel donné.

Rédiger

Étape 1

On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a \times v_n$.
On sait que $v_n = u_n - \ell$,
donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$.

On peut remplacer n par la valeur que l'on veut. Ici, on a choisi $n + 1$, pour pouvoir faire apparaître v_{n+1}.

Étape 2

On utilise une autre relation de l'énoncé : $u_{n+1} = au_n + b$.

Étape 3

On cherche à exprimer ℓ en fonction de a et b.

On isole l'inconnue dans l'équation.

Étape 4

On remplace ℓ dans l'expression de v_{n+1}, et on simplifie l'expression.

On rappelle que pour soustraire deux fractions, il faut qu'elles soient réduites au même dénominateur.

Étape 5

On veut montrer que pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a \times v_n$.
On factorise donc par a dans l'expression de v_{n+1}.

$a \times b - a \times c = a \times (b - c)$

La démonstration rédigée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

$v_{n+1} = au_n + b - \ell$

Or ℓ est solution de l'équation $x = ax + b$.

Et $x = ax + b \Leftrightarrow x - ax = b \Leftrightarrow x \times (1 - a) = b$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$ Donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$

Donc :

$$v_{n+1} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a}$$

$$= au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a}$$

Donc :

$$v_{n+1} = a \times \left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a \times (u_n - \ell) = a \times v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

Pour s'entraîner

Utiliser la méthode de la démonstration précédente dans l'exemple suivant.

Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Déterminer la suite auxiliaire et démontrer qu'elle est géométrique.

Exercices calculs et automatismes

21 Calculer les termes d'une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (v_n).

22 Calculer les termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer u_1.

b) Calculer u_4.

23 Calculer les termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_1 = 4$.

a) Calculer u_2.

b) Calculer u_{11}.

24 Déterminer la raison d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$.

Déterminer la valeur de q.

25 Déterminer la raison d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$. Déterminer la valeur de r.

26 Donner des exemples de suites de limite donnée

Donner un exemple de suite :

a) ayant pour limite $+\infty$.

b) ayant pour limite -2.

c) ayant pour limite $-\infty$.

d) n'ayant pas de limite.

27 Donner la limite de suites définies de façon explicite

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** 2.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{5+\sqrt{n}}$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $\dfrac{1}{5}$.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = -n + \dfrac{1}{n}$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $-\dfrac{1}{2}$.

28 Limite de suites géométriques

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

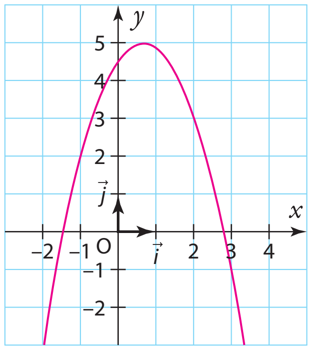
	V	F
1. La suite géométrique de raison 10 et de premier terme -1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
2. La suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
3. La suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2 a pour limite 2.	☐	☐
4. La suite géométrique de raison 0,25 et de premier terme -1 a pour limite 0.	☐	☐

29 Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction représentée ci-contre.

a) Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

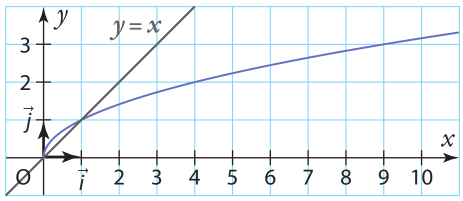
b) Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?



30 Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On a représenté ci-dessous la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).



1. u_1 est égale à :

a 0 **b** 1 **c** 3 **d** 9

2. La limite de la suite (u_n) :

a semble être 0. **b** semble être 1.

c semble être $+\infty$. **d** n'existe pas.

31 Déterminer l'expression d'une suite en fonction de n

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$. Comment faire pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n ?

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5v_n - 16$. Comment faire pour déterminer l'expression de v_n en fonction de n ?

Exercices d'application

Modéliser avec une suite

Méthode 1 p. 19

32 Pour prendre le train, Sofia achète un abonnement mensuel qui coûte 400 €.
Avec cet abonnement, chaque billet de train qu'elle achète est au prix de 2 €.
1. Combien Sofia paiera-t-elle au total si elle achète 10 billets de train ?
2. On note u_n le prix que paye Sofia par mois pour l'abonnement et n billets de train.
a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Sofia a payé 434 €.
Combien de billets de train a-t-elle achetés ?

33 Un téléphone est en vente à 400 € en 2019. Chaque année, son prix baisse de 10 % par rapport à l'année précédente. On note u_n le prix du téléphone en 2019 + n.
1. Donner la valeur de u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
En déduire la nature de la suite (u_n).
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

34 Un festival de musique accueille 100 000 festivaliers en 2020.
L'équipe d'organisation prévoit que chaque année, 80 % des personnes venues l'année précédente reviendront et qu'il y aura 30 000 nouveaux festivaliers.
1. Combien de festivaliers l'organisation prévoit-elle en 2021 ?
2. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

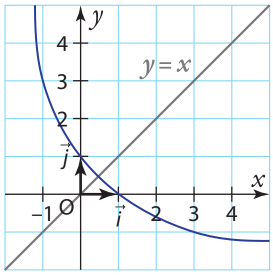
Représenter graphiquement une suite

Méthode 2 p. 19

35 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1. Tracer la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ dans un repère orthonormé.
2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

36 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$.
1. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

37 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction dont la représentation graphique est ci-contre en bleu.



1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Que peut-on dire sur les variations de la suite (u_n) et sur la limite de la suite (u_n) ?

Limite d'une suite

Méthode 3 et Méthode 4 p. 21

38 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2n - 4$.
b) (v_n) définie par $v_n = -n^3 + 5$.
c) (w_n) définie par $w_n = \dfrac{2}{7+\sqrt{n}}$.
d) (a_n) définie par $a_n = n \times \sqrt{n}$.

Coup de pouce
Utiliser les règles des opérations sur les limites.

39 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.
b) (v_n) définie par $v_n = -3 + \dfrac{5}{n-1}$.

40 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^4} - 5\right)$.
b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3+n}{2+\dfrac{1}{n}}$.

41 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = n^2 - 2n$.
b) (v_n) définie par $v_n = n - n^3$.

Coup de pouce
Commencer par factoriser les expressions de u_n et de v_n.

42 Déterminer la limite des suites définies par :
a) $u_n = 3n - n^3 + 2$ **b)** $v_n = \dfrac{n-5}{2n+4}$.

43 Déterminer la limite des suites définies par :
a) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$ **b)** $v_n = \dfrac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$

44 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n} \square (n^2 - 2)$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. En développant, déterminer la limite de la suite (u_n).

Limites et comparaison

Méthode 5 et Méthode 6 p. 23

45 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{3n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

46 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n - \sin(n)$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -n+1$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

47 Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{4}{n+1}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

48 Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-3 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant -3 + \frac{1}{n^2+1}$.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

49 Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -5 + \frac{\cos(n)}{n^2}$. En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de la suite (v_n).

50 Soit (w_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 4 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Déterminer la limite de la suite (w_n).

Suites géométriques

Méthode 7 p. 25

51 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 2.
b) (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme -3.
c) (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{3}$.

52 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 0{,}5a_n$.
1. Déterminer la nature de la suite (a_n) en justifiant.
2. Déterminer la limite de la suite (a_n).

53 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 9$.
1. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n.
a) $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
b) $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$.
2. Déterminer la limite de S_1 quand n tend vers $+\infty$.

54 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -10$.
1. Calculer une valeur approchée de la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n).
2. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
a) Donner l'expression de S_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

55 Soit (v_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = 4$.
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
1. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Suites arithmético-géométrique

Méthode 8 p. 25

56 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 9$.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
d) Calculer u_{10}.

57 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 10$.
1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_6.

58 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 14$.
1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_8.

59 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 12$.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) et justifier que ce n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{20}.

Exercices d'entraînement

Limite d'une suite

60 En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) est définie par $u_n = n^3 + n^2 - 4$.

b) (v_n) est définie par $v_n = n^3 - n^2 - 4$.

c) (w_n) est définie par $w_n = \dfrac{n^3}{n^2 - 4}$.

d) (a_n) est définie par $a_n = n^3 + \dfrac{\cos(n)}{n^2 - 4}$.

61 Démo

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.

2. Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.

62 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sqrt{n+1}$.

a) Montrer que $v_n > \sqrt{n}$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

63 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^3 - 4$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Déterminer le plus petit entier n tel que :

a) $u_n > 100$.

b) $u_n > 1\,000$.

c) $u_n > 10\,000$.

64 Algo

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. On veut déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n > 1\,000$.

a) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde au problème.

```
n = …
u = …
while  …:
      u = …
      n = …
print (…)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

65 Dans cet exercice Algo Histoire des maths

nous allons utiliser la méthode de Héron d'Alexandrie pour approximer $\sqrt{2}$.

Soient a et b deux réels tels que $b > \sqrt{a}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

Héron d'Alexandrie

On admet que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

1. On choisit $a = 2$ et $b = 10$.

a) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n). On arrondira à 10^{-4} près si besoin.

b) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il calcule u_{100}.

```
u = …
for i in range (…):
      u = …
print (…)
```

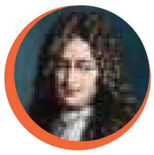
2. Reprendre les mêmes questions que précédemment avec $a = 2$ et $b = 5$.

66 Dans cet exercice Algo Histoire des maths

nous allons utiliser la série de Leibniz pour approximer π.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

On note S_n la somme des n premiers termes de (u_n).



Gottfried Leibniz

On admet que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$, mais la convergence est très lente.

Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il calcule et affiche S_{100}, puis qu'il affiche $4 \times S_{100}$.

```
s = 0
u = 0
for i in range (…):
      u = …
      s = …
print (…)
print (…)
```

Suites géométriques et suites arithmético-géométriques

Méthode 9 p. 26

67 Une ville contient 15 000 habitants en 2020.

La maire prévoit que chaque année, 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouvelles personnes s'installeront.

1. Déterminer le nombre d'habitants en 2021.

2. Modéliser le problème à l'aide d'une suite (u_n).

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter avec le contexte.

68 Soit q un réel positif ou nul. Démo

1. Rappeler selon les valeurs de q, la limite de la suite (q^n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n

b) En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, déterminer, en différenciant les cas, la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

69 Adama décide de faire creuser un tunnel dans une mine de sel. Il fait appel à une entreprise.

On note u_n le prix facturé par l'entreprise pour le n-ième mètre creusé. Le premier mètre creusé coûte 50 €.

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n \times 1{,}1 - 3$.

On a $u_1 = 50$.

1. Déterminer la valeur de u_2.

2. Un tunnel de longueur 2 mètres coûte alors $(u_1 + u_2)$€. En déduire le coût d'un tunnel de 2 mètres de longueur.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer le coût correspondant à un tunnel de longueur 50 mètres.

70 On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve naturelle. Thème 2

En 2020, il y a 100 tigres.

Puis, chaque année, 10 % de la population de tigres meurt et 5 nouveaux tigres sont recueillis dans la réserve.

On note u_n le nombre de tigres en 2020 + n.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2021.

2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 5$.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

71 Soit S_n la somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n$.

1. Exprimer S_n en fonction de n.

2. Déterminer limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ en justifiant.

72 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 4$. Algo

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre, afin qu'il calcule u_{20}.

```python
u = ...
for i in range (...) :
    u = ...
print (...)
```

3. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de u_{20}.

73 Au 1er janvier 2018, Hélène dispose d'un capital de 16 000 €. Algo Thème 2

Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances.

1. On note u_n le montant du capital d'Hélène disponible le 1er janvier 2018 + n.

On a $u_0 = 16\,000$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

2. On souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel le capital d'Hélène devient inférieur ou égal à 2 000 €.

a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```python
u = ...
n = 0
while ... :
    n = ...
    u = ...
```

b) Quelle est la valeur numérique contenue par la variable **n** à la fin de l'exécution de ce programme ?

3. Hélène décide finalement d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.

On note v_n la valeur du capital le 1er janvier 2018 + n. On a $v_0 = 16\,000$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 300$.

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

D'après Bac ES 2018

74 Présenter le travail suivant. Oral

1. Trouver un exemple de situation pouvant être modélisée par une suite arithmético-géométrique.

2. Déterminer l'expression de la suite.

3. À l'aide de la suite, interpréter les résultats dans le contexte (valeur de certains termes, limite,…).

Exercices d'entraînement

75 Un site Internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %. Algo

1. On note u_n le nombre de films proposés n mois après l'ouverture du site. On a $u_0 = 500$.

a) Calculer u_1 et u_2 (on arrondira à l'unité).

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

a) Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
u = 500
n = 0
while  …:
      n = …
      u = …
print (…)
```

b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme, puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des personnes abonnées au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15\,000$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 2\,500$.

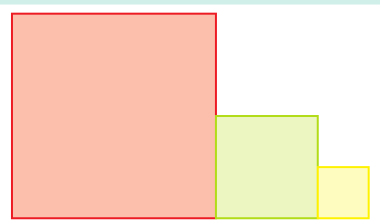
b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Si oui, à combien d'abonnés ? Justifier.

D'après Bac ES 2016

76 On considère un carré de côté 3 cm. Thème 4

À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.



On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du n-ième carré.

1. Donner la valeur de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

2. Exprimer $\mathcal{A}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{A}_n$ et en déduire la nature de la suite $(\mathcal{A}_n)$.

3. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

4. Déterminer l'expression de l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés, en fonction de n.

5. En déduire l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés si on continue indéfiniment cette construction.

77 Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.

En 2020, elle estime qu'il y a 1 000 singes sur l'île.

A ▶ Premier modèle

La biologiste suppose que la population de singes augmente de 4 % chaque année.

On note u_n le nombre de singes en milliers sur l'île en 2020 + n.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n), puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Que peut-on penser de ce modèle ?

B ▶ Second modèle

La biologiste suppose finalement que la population de singes est modélisée par une suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 0{,}15$.

1. Avec ce modèle, combien peut-on prévoir de singes en 2021 ?

2. a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

b) Déterminer les variations de la suite (v_n) et interpréter avec le contexte.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) et interpréter avec le contexte.

3. On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 1 400 individus.

a) Recopier et compléter le programme suivant en Python pour qu'il réponde au problème.

```
n=0
v=1
while …:
  n=…
  v=…
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année correspondante.

Suites croisées

Méthode 10 p. 37

78 On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un entretien annuel doit être réalisé. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce travail. En 2017, la société A entretient 30 % des ascenseurs. On estime que, chaque année :
- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante,
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante,
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année $(2017 + n)$. De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année $(2017 + n)$. On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.
1. Calculer a_1. Interpréter le résultat.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a
$a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$ puis en déduire que
$a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (a_n) et l'interpréter avec le contexte.

D'après BAC 2018

79 Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier.
Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier en $2010 + n$ et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010 + n$.
1. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}06b_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}84a_n + 0{,}06$.
3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

D'après BAC 2016

Étude d'évolution

80 TICE Thème 2
Des chercheuses et des chercheurs veulent étudier le nombre de poissons dans l'étang Lagoon. Pour cela, ils commencent une étude et comptent 9 000 poissons dans l'étang.

A ▶ Lagoon est un bassin artificiel, ce qui permet de contrôler les conditions de vie et le nombre de poissons pêchés. D'une année sur l'autre, a % de poissons meurent (de manière naturelle et par la pêche) et b % de poissons naissent, avec a et b deux réels fixes.
On note u_n le nombre de poissons, n années après le début de l'étude.
1. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{b-a}{100}\right)$.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Selon les valeurs de a et b, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.
4. Selon les valeurs de a et b, déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

B ▶ Les chercheurs constatent empiriquement que le nombre de poissons dans Lagoon diminue chaque année de 20 % par rapport à l'année précédente.
Lorsqu'ils commencent leur deuxième étude, ils comptent 3 000 poissons dans l'étang.
Et pour leur deuxième étude, ils décident, pour compenser la baisse naturelle, de rajouter chaque année 2 150 poissons dans l'étang.
On note v_n le nombre de poissons dans l'étang n années après le début de la deuxième étude.
1. Justifier que $v_0 = 3\,000$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}8v_n + 2150$.
2. On veut modéliser l'évolution du nombre de poissons sur un tableur.
a) Recopier le tableau ci-contre dans un tableur.
b) Compléter la cellule B2.
c) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ?
d) Compléter la colonne B en étirant vers le bas.

	A	B
1	n	v_n
2	0	
3	1	
4	2	

e) Combien de poissons peut-on prévoir 10 années après le début de l'étude ?
f) Conjecturer la limite de la suite (v_n).
3. On souhaite démontrer les résultats de la question précédente.
a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercices bilan

81 Représentation graphique et étude d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$

1. a) Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$

b) Représenter sur le même graphique les quatre premiers termes de la suite (u_n)

c) Conjecturer les variations et la limite de la suite.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

3. Démontrer les conjectures de la question **1. c)**.

82 Limite d'une suite

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) (u_n) est la suite définie par $u_n = n + \sqrt{n} - 10$

b) (v_n) est la suite définie par $v_n = n^3 - 5n$

c) (w_n) est définie par $w_n = n^2 + (-1)^n$

d) (a_n) est définie par $a_n = 25 + \dfrac{\cos(n)}{n}$

e) (b_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $b_0 = -2$

f) (c_n) est définie par $c_0 = -10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2}$

83 Gagnante au loto

Lucille gagne 1 000 000 € au loto le 1er janvier 2020. Elle dépose la somme sur un compte en banque, et elle décide de dépenser chaque année un quart de la somme qui lui reste.

1. On note u_n la somme restante sur le compte le 1er janvier 2020 + n.

a) Quelle somme reste-t-il sur son compte le 1er janvier 2021 ?

b) Donner la valeur de u_0 et u_1.

c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n).

d) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. On note S_n la somme dépensée les n premières années.

a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

84 Étude du nombre d'arbres dans une forêt

Algo

On s'intéresse au nombre d'arbres dans une forêt. En 2020, il y a 2 500 arbres dans la forêt. Mais on prévoit que chaque année, 10 % des arbres soient coupés et 100 arbres soient replantés. On note u_n le nombre d'arbres en 2020 + n.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$

3. a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il détermine le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1\,000$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.

c) Déterminer les variations et la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

85 Suites croisées

Dans un pays, deux fournisseurs d'électricité ont le monopole du marché : *Electic* et *Energo*.
On s'intéresse à la répartition des parts de marché de ces deux fournisseurs.
En 2020, *Electic* a 55 % des parts du marché.
Chaque année, on prévoit que *Electic* perde 5 % de ses clients, mais qu'il récupère 15 % des clients de *Energo*.
On note a_n le pourcentage des parts de marché de *Electic* et b_n celui de *Energo* en 2020 + n

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}15b_n$

3. En déduire que $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}15$

4. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

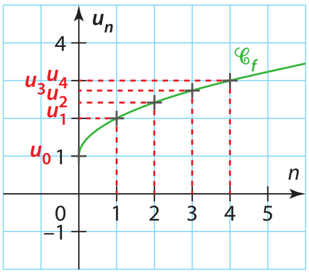
5. Déterminer la limite de la suite (a_n), et interpréter avec le contexte.

Préparer le BAC L'essentiel

CONTRÔLE CONTINU

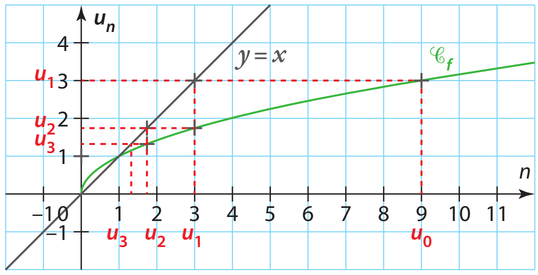
Suite définie par une formule explicite

- $u_n = f(n)$
- u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe de $\mathscr{C}_f$



Suite définie par une relation de récurrence

- Par exemple u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$
- On construit les termes à l'aide de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.



Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.

- Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q > 1$ et $u_p > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_p < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_p$
- Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n),

  si $0 \leqslant q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_p}{1-q}$.

Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$ et soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$.

Alors (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a.

Théorème des gendarmes

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ avec ℓ un réel alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Formes indéterminées

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$

Limites de suites de référence

- (n), $(\sqrt{n})$, (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$
- $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0.

Inégalités et limites

Si $u_n \leqslant v_n$ et (u_n) et (v_n) convergent,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème de comparaison

- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...

Parcours d'exercices

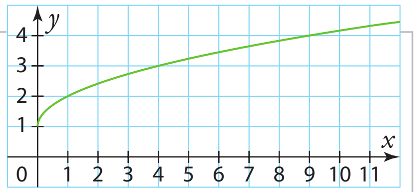
Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Modéliser un problème par une suite	Méthode 1	1, 2, 32, 33
▶ Représenter graphiquement une suite	Méthode 2	3, 4, 35, 36
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée	Méthode 3, Méthode 4	5,6,7,8,38, 39,41,42
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes	Méthode 5, Méthode 6	9, 10, 11, 12, 45, 46, 47, 48
▶ Calculer une limite de suite géométrique et de la somme des termes d'une suite géométrique	Méthode 7	13, 14, 51, 52
▶ Étudier une suite arithmético-géométrique	Méthode 8, Méthode 9, Méthode 10	15, 16, 17, 18, 19, 20, 56, 57, 67, 68, 78, 79

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c01-06

QCM

Pour les QCM suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 86 à 87 on a représenté graphiquement une fonction f ci-contre.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.



	A	B	C	D
86 La suite (u_n) semble :	croissante.	décroissante.	pas monotone.	constante.
87 La limite de la suite (u_n) semble être :	$+\infty$	0	$-\infty$	environ 2,5
88 La suite (u_n) définie par $u_n = n + 5n^2$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
89 La suite (v_n) définie par $v_n = n - 5n^2$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
90 La suite (a_n) définie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} < a_n < \frac{2}{n^2}$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
91 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 5$. Quand n tend vers $+\infty$, la somme des n premiers termes de la suite tend vers :	$+\infty$	$-\infty$	0	6,25

Pour les exercices 92 à 93 on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 12$.

	A	B	C	D
92 La suite (v_n) définie par :	$v_n = u_n + 4$ est géométrique.	$v_n = u_n - 4$ est géométrique.	$v_n = u_n + 4$ est arithmétique.	$v_n = u_n - 4$ est arithmétique.
93 La suite (u_n) est définie par:	$u_n = 6 \times 4^n + 4$	$u_n = 6 \times 4^n - 4$	$u_n = 10 \times 4^n + 4$	$u_n = 10 \times 4^n - 4$

CONTRÔLE CONTINU

Préparer le BAC Je m'exerce

94 Représentation graphique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$

1. Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$.

2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

3. Conjecturer les variations et la limite de la suite.

4. Reprendre les questions précédentes avec $u_0 = 0$.

Méthode 2 p. 19

95 Limite d'une suite

Déterminer les limites des suites suivantes.

1. (u_n) définie par $u_n = (2n+n^2)\,\square\,\sqrt{n}$

2. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n^2+5}{2n^2-4}$

3. (w_n) définie par $w_n = n^2 + (-1)^n$

4. (a_n) définie par $a_n = 3 + \dfrac{\cos(3n+1)}{n^3}$

5. (b_n), suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $b_0 = 10$.

Méthode 3 Méthode 4 p. 21

6. (c_n) définie par $c_n = -4 \times 2^n$

Méthode 5 Méthode 6 p. 23

96 Bouts de ficelles

On considère une ficelle d'une longueur de 20 m.
Camille commence par couper un morceau mesurant le quart de la longueur de la ficelle.

Puis à chaque étape suivante, elle coupe un morceau mesurant le quart de la longueur du morceau coupé à l'étape précédente.

1. On note u_n la longueur coupée à la n-ième étape.

a) Donner la valeur de u_1 et u_2.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Camille décide de recoller tous les morceaux coupés. On note L_n la longueur totale des n premiers morceaux recollés.

a) Donner la valeur de L_1 et de L_2.

b) Donner l'expression de L_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (L_n).

Méthode 7 p. 25

97 Évolution d'un salaire

Thomas travaille dans une entreprise et gagne 1 500 € nets le 1er janvier 2020. Chaque année, son salaire augmente de 4 %.
On note u_n le salaire de Thomas en 2020 + n.

1. Déterminer le salaire de Thomas en 2021.

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer la somme totale que Thomas aura gagnée en 10 ans.

Méthode 7 p. 25

98 Compte en banque — Algo

Maud dépose 5 000 € sur un compte en banque le 1er janvier 2020. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, le dernier jour de chaque mois, elle dépose 2 000 € supplémentaires sur le compte. On note u_n la somme sur le compte le 1er jour du mois, n mois après janvier 2020.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2\,000$.

2. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1er janvier 2021.

a) Compléter le programme en **Python** pour qu'il réponde à la question

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la somme sur le compte le 1er janvier 2021.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de la suite (u_n) et donner sa limite. Interpréter avec le contexte.

Méthode 8 p. 25 Méthode 9 p. 26

99 Bénévoles dans une association

Une association d'un village de 3 000 habitants (nombre constant) étudie le nombre de ses bénévoles.
L'année de création de l'association, il y avait 20 bénévoles. Puis chaque année, on estime que 25 % d'entre eux quitteront l'association et 5 % des habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente le deviendront. On note u_n le nombre d'habitants bénévoles et v_n le nombre d'habitants non-bénévoles, n années après la création de l'association.

1. Donner la valeur de u_0 et v_0.

2. Donner la valeur de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}05v_n$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 150$.

5. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

6. Déterminer la limite de la suite (u_n), et interpréter avec le contexte.

Méthode 10 p. 27

2

Limites et continuité

Le théorème des valeurs intermédiaires est lié à la continuité. C'est un théorème d'existence c'est-à-dire qu'il permet d'affirmer qu'une équation possède des solutions sans en donner l'expression exacte. Une fois l'existence de solution(s) démontrée, on approche la ou les solutions par encadrements successifs, c'est-à-dire par dichotomie.

Comment résoudre une équation avec le théorème des valeurs intermédiaires ?

↪ Activité 4 p. 43

VIDÉO WEB

Théorème des valeurs intermédiaires
lienmini.fr/maths-c02-01

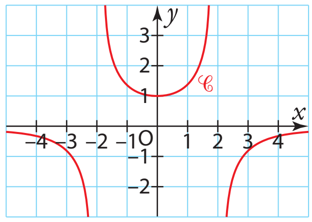
Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis
lienmini.fr/maths-c02-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Conjecturer une limite

On donne la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



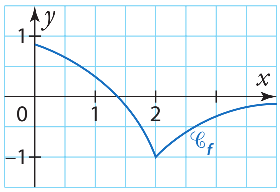
a) Lorsque x prend des valeurs proches de $+\infty$ que font les valeurs de $f(x)$? Pourquoi ? Même question quand x prend des valeurs proche de $-\infty$.

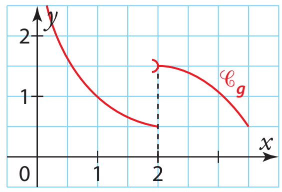
b) Lorsque x s'approche de 2 en valeurs supérieures, que font les valeurs de $f(x)$?
Et lorsque x s'approche de 2 en valeurs inférieures ?

c) Mêmes questions que **b)** lorsque x s'approche de la valeur –2.

2 Interpréter une courbe

On donne les représentations des fonctions f et g.





a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Pourquoi ?

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite en 2 ?

3 Tracer la courbe d'une fonction de référence

a) Tracer la courbe de la fonction carrée $x \mapsto x^2$. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et $-\infty$?

b) Tracer la courbe de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et $-\infty$? Et de sa limite en 0 ? Que représentent les axes de coordonnées pour la courbe de la fonction inverse ?

4 Utiliser un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f sur l''intervalle [–5 ; 5].

a) Pourquoi l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution ?

b) Combien de solution l'équation $f(x) = -2$ possède-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles ?

x	-5		-1		2		5
f	-4	↗	-1	↘	-2	↗	6

5 Comprendre une fonction en langage Python

Qu'affiche cet algorithme pour $f(1)$, $f(0.9)$ et $f(1.1)$?

En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

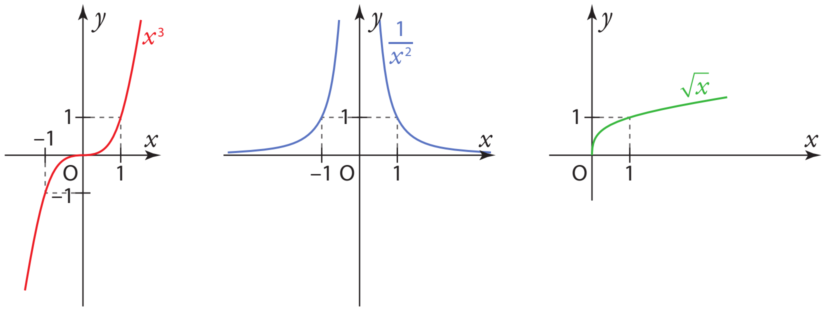
```python
def f(x):
    if x<1:
        return x+1
    elif x>1:
        return -x**2+4*x+1
    else:
        return 3
```

Activités

15 min

1 Se rapprocher des limites, notion d'asymptote

On donne les représentation des fonctions cube $x \mapsto x^3$, inverse au carré $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.



1. a) En lisant les courbes, donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$.

b) Existe-t-il un réel x tel que,$x^3 > 10^3$? et pour $x^3 > 10^9$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$.

c) Existe-t-il un réel x tel que,$x^3 < -10^3$? et pour$x^3 < -10^9$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$.

2. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

b) Existe-t-il un réel x tel que, $\dfrac{1}{x^2} < 10^{-6}$? et pour $\dfrac{1}{x^2} > 10^{-12}$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

c) Comment se comporte la courbe en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des abscisses ?

On dit alors que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

3. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

b) Existe-t-il un réel x tel que, $\dfrac{1}{x^2} > 10^6$? et pour $\dfrac{1}{x^2} \leqslant 10^{12}$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

c) Comment se comporte la courbe en 0 de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des ordonnées ?

On dit alors que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

4. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

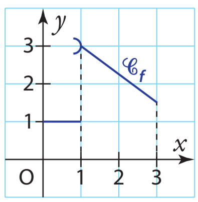
b) Existe-t-il un réel x tel que, $\sqrt{x} < 10^2$? et pour $\sqrt{x} > 10^3$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

↪ Cours 1 p. 44

10 min

2 Appréhender la continuité

On donne la représentation d'une fonction sur [0 ; 2].



1. a) Que vaut $f(1)$?

b) Vers quelle valeur tend $f(x)$ lorsque x tend vers 1 en valeur inférieure ? En valeur supérieure ?

c) La limite de $f(x)$ existe-t-elle ? On dit alors que la fonction f n'est pas continue en 1.

2. Peut-on dire que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$? Pourquoi ? On dit alors que la fonction f est continue en 2.

En quelles valeurs de x la fonction f est-elle continue ?

↪ Cours 1 p. 44

20 min

3 Faire des opérations sur les limites

A ▸ Un polynôme

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Donner les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 3$. Pourquoi peut-on affirmer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

2. Donner les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 3$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

3. Vérifier que pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$. Donner la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

B ▸ Une fonction rationnelle

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $g(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$.

1. Donner les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2$. Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$?

2. Montrer que pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \dfrac{3 + \dfrac{2}{x}}{1 - \dfrac{2}{x}}$. Peut-on maintenant en déduire la limite de g en $+\infty$?

3. Donner les limites $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} x - 2$. Quel est le signe de $(x - 2)$ si $x > 2$? En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x)$.
Quel est le signe de $(x - 2)$ si $x < 2$? En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g(x)$

↪ Cours 1 p. 44

15 min

Thème 1

4 Résoudre une équation

1. On donne les tableaux de variations de deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	-1

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	$\frac{3}{2}$	↘	-2

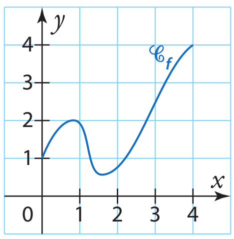
On considère les équations suivantes avec $k \in \mathbb{R}$, $(E_1) : f(x) = k$ et $(E_2) : g(x) = k$.

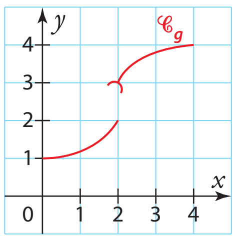
a) On prend $k = 0$. Combien de solutions possèdent les équations (E_1) et (E_2) ? Pourquoi ?

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_1).

c) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_2).

2. On donne les représentations de deux nouvelles fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$.





On considère les équations suivantes avec $k \in [1 ; 4]$, $(E_1) : f(x) = k$ et $(E_2) : g(x) = k$.

a) La fonction g est-elle continue en $x = 2$? Pourquoi ?
Quelle est l'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par la fonction g ?

b) Discuter le nombre de solutions des équations (E_1) et (E_2) suivant les valeurs de k.

↪ Cours 2b p. 52

Cours

1 Limites

a Limite en l'infini

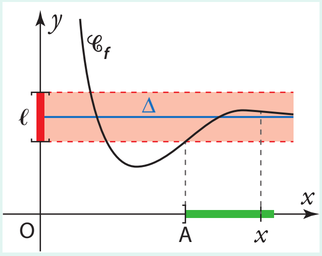
Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est définie sur les intervalles considérés. La courbe représentative de la fonction f est notée $\mathscr{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

Définition Limite finie et asymptote horizontale

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle $]A\,;+\infty[$. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

La droite Δ d'équation $y = \ell$ est alors asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

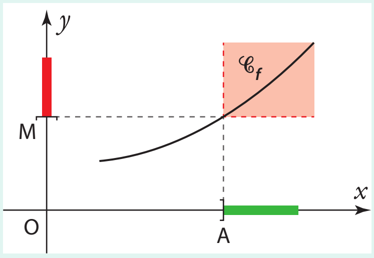


Remarque On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Définition Limite infinie

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle $]A\,;+\infty[$.
On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Remarque On définit de façon analogue :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,;\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Propriétés Limites des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	e^{ax}
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	0	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ $a > 0$ 0 $a < 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	0	0	0	non définie	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non définie	0	0 $a > 0$ $-\infty$ $a < 0$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Conjecturer la limite d'une fonction en l'infini

Algo

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x} + 1$ et la droite d d'équation $y = 1$.

1. **Tracer sur la calculatrice la fonction f et la droite d pour $x \in [-3\,;3]$ et $y \in [-3\,;4]$.**
Que peut-on conjecturer pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

2. **Que représente la droite d pour la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$? Pourquoi ?**

3. **On donne l'algorithme en Python suivant.**

```
from math import*
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)+1
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-1)>=a:
        x+=1
    return x
```

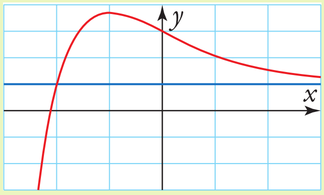
a) Que représente `abs(1-f(x))` ?

b) Que renvoie la fonction `dist(a)` ?

c) À l'exécution, on voit que `dist(10**(-3))` renvoie 10 et `dist(10**(-6))` renvoie 17. En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

Solution

1. On obtient la courbe suivante. 1



D'après la représentation de fonction f et de la droite d on peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. 2

2. La droite d représente une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

En effet la courbe se « rapproche » de plus en plus de la droite d lorsque x augmente. 3

3. a) `abs(1 -f(x))` $= |f(x) - 1|$ représente la distance entre la droite d et la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) La fonction `dist(a)` renvoie l'entier naturel le plus petit tel que la distance entre la droite d et la courbe $\mathscr{C}_f$ est plus petite que la réel a. 4

c) La valeur de $f(x)$ se trouve à moins de 10^3 de sa limite à partir de $x = 10$ et à moins de 10^{-6} à partir de $x = 17$.

Cela signifie que l'on peut prendre un intervalle aussi petit autour de la limite $\ell = 1$ de la fonction f en $+\infty$, on peut trouver un x à partir duquel $f(x)$ se trouve dans cet intervalle. 5

Conseils & Méthodes

1 Bien respecter les indications pour la fenêtre pour obtenir un visuel exploitable.

2 On suppose que la tendance de la courbe ne varie pas en dehors de la fenêtre.

3 C'est la définition d'une asymptote à une courbe.

4 Attention la condition sur une boucle conditionnelle est l'opposé de ce que l'on veut obtenir $|f(x) - 1| < a$.

5 C'est la définition d'une limite finie en $+\infty$.

À vous de jouer !

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{4x^2 + 1}.$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Comment peut-on le vérifier ?

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}15x - 1{,}8x - 0{,}7.$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Comment peut-on le vérifier ?

↪ Exercices 25 à 30 p. 58

b Limite en un point

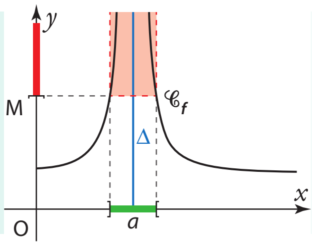
Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est définie sur les intervalles considérés. Le réel a considéré appartient ou est une borne de l'ensemble de définition de f. La courbe représentative de la fonction f est notée $\mathscr{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

Définition Limite infinie et asymptote verticale

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en un réel a signifie que tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a.
On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

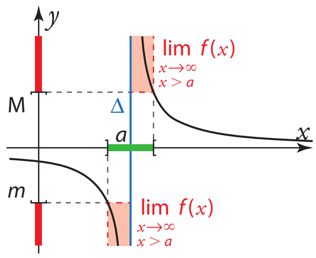
La droite Δ d'équation $x = a$ est alors asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Remarques

- On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- Lorsque la limite en a n'existe pas, on peut définir une limite à droite ou à gauche de a que l'on note respectivement

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$



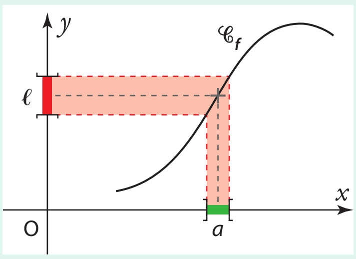
Propriétés Limites infinies des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non définie

Définition Limite finie

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en un réel a, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$



Remarque On peut de même définir une limite à droite et à gauche de a.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Conjecturer la limite infinie d'une fonction en un point

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{0{,}5x^2-1{,}5x+2}{x-2}$.

1. a) Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre $x \in [-1\,;5]$ et $y \in [-5\,;5]$.

b) Que peut-on conjecturer pour les limites de la fonction f lorsque x tend vers 2, en valeurs supérieures et en valeurs inférieures ?

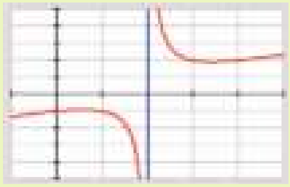
Peut-on conjecturer qu'il existe une limite de la fonction f en 2 ?

2. Tracer sur le même graphique la droite d d'équation $x = 2$.

Que représente la droite d pour la courbe $\mathscr{C}_f$ en 2 ?

Solution

1. a) On obtient la courbe ci-contre .



b) On peut conjecturer :

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty$. 1

f n'a pas de limite en 2 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

2. La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en 2 car plus x se rapproche de 2 plus la courbe s'en rapproche.

Conseils & Méthodes

1 Lorsque x se rapproche de 2
- en valeurs supérieures, limite à droite, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes.
- en valeurs inférieures, limite à gauche, es valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes en négatif.

À vous de jouer !

3 1. Tracer la courbe de $f(x)=\dfrac{x+1}{2(1-x)}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x \in [-2\,;4]$ et $y \in [-5\,;5]$.

2. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

3. Conjecturer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

4 1. Tracer la courbe de $f(x)=\dfrac{1}{(e^x-1)^2}$

2. La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Interpréter géométriquement ce résultat.

↪ Exercices 31 à 36 p. 58

Méthode 3 Conjecturer la limite finie d'une fonction en un point

Énoncé

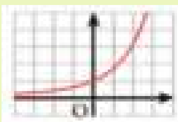
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

1. Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre $x \in [-4\,;4]$ et $y \in [-1\,;5]$.

2. La fonction f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

Solution

1. On obtient la courbe ci-contre.



2. La fonction n'est pas définie en 0, car le dénominateur est alors nul.

Par contre d'après la représentation, la fonction f admet une limite en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$. 1

Conseils & Méthodes

1 Pour tracer une fonction, la calculatrice utilise des points qu'elle relie ensuite. Le point en $x = 0$ étant singulier, la calculatrice n'en tient pas compte.

À vous de jouer !

5 1. Tracer la courbe $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x \in [-1\,;8]$ et $y \in [-1\,;2]$.

2. La fonction f est-elle définie en 4 ? Admet-elle une limite en 1 ? Si oui laquelle ?

6 1. Tracer la courbe $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x \in [-5\,;5]$ et $y \in [-5\,;5]$.

2. La fonction f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

↪ Exercices 31 à 36 p. 58

Cours

C Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit f et g désignent deux fonctions et ℓ une valeur réelle ou $+\infty$ ou $-\infty$.
« indéterminée » désigne une forme que l'on ne peut pas calculer par l'opération concernée.

Théorème Limite de la somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\dfrac{1}{x}=+\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x$ indéterminée

on ne peut rien conclure

Théorème Limite du produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	**0**	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$*	**indéterminée**	$\pm\infty$*

*** On applique la règle des signes pour déterminer le signe devant ∞.**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} \sin x=0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}\sin x$ indéterminée

on ne peut rien conclure

Théorème Limite du quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	**0**	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	**0****	**0**	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$*	**indéterminée**	**0**	$\pm\infty$*	**indéterminée**

*** On applique la règle des signes pour déterminer le signe devant ∞.**

**** signe constant, on écrira 0^+ pour un nombre positif et 0^- pour un nombre négatif.**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} 2x+1=-5 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x+2=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+1}{x+2}=-\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+1}{x+2}$ indéterminée

on ne peut rien conclure.

Exercices résolus

Méthode 4 Déterminer une limite en l'infini

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = 4x - 3 + \dfrac{3}{x-1}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - x + 3$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Déterminer le signe de $(x - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire les limites de f en 1 en valeur supérieures et inférieures.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

Solution

1. On détermine la limite la fonction f par somme en $+\infty$ en étudiant les limites de $(4x - 3)$ et $\dfrac{3}{x-1}$. **1**

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x - 3 = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\end{array}}\right\}\begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2. a) On a le tableau de signes de $(x - 1)$ suivant.

x	$-\infty$	1^- 1 1^+	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$

b) On détermine la limite en 1 de la fonction f par somme en étudiant les limites de $(4x - 3)$ et $\dfrac{3}{x-1}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to1} 4x - 3 = 1$ et **2**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 3 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} x - 1 = 0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty\end{array} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^-} x - 1 = 0^-\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty\end{array}$$

Par somme on déduit la limite en 1 : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

3. On ne peut pas déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$ par somme car on obtient une forme indéterminée. On change alors la forme de la fonction g. **3**

Pour $x \neq 0$ on a $g(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$ on peut alors déterminer la limite de g par produit.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 1\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

Conseils & Méthodes

1 Avant de déterminer une limite par somme, il faut vérifier rapidement que l'on n'obtient pas une forme indéterminée.

2 Suivant que x se rapproche de 1 en valeurs supérieures ou inférieures, $(x - 1)$ change de signe.

3 En effet en $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$ et la fonction $x \mapsto -x + 3$ vers $-\infty$.

À vous de jouer !

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en 0.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 6.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas déterminer la limite de f en $\pm\infty$ par somme ?
2. Changer la forme de la fonction f puis déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

↪ Exercices 37 à 40 p. 59

d Déterminer une limite par encadrement et par comparaison

Théorème Limite par encadrement ou théorème des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $\mathrm{I} =]a\,;+\infty[$ et ℓ un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathrm{I},\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell \end{cases} \text{ alors } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque On a des énoncés équivalents en $-\infty$, avec $\mathrm{I} =]-\infty\,; a[$ et en a, avec un intervalle ouvert contenant a.

Théorème Limite par comparaison

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $\mathrm{I} =]a\,;+\infty[$.

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant g(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Remarque On a des énoncés équivalents en $-\infty$, avec $\mathrm{I} =]-\infty\,; a[$ et en a, avec un intervalle ouvert contenant a.

2 Continuité d'une fonction

a Définitions

Définition Continuité en un point

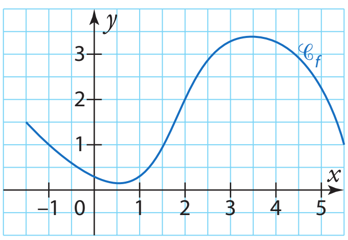
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a. On dit que la fonction f est continue en un point a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition Continuité sur un intervalle

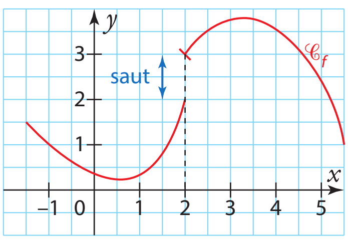
La fonction f est continue sur un intervalle I si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarques

- Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.
- On définit la continuité sur un intervalle fermé en prenant la limite à droite de la borne inférieure et la limite à gauche de la borne supérieure.



Fonction continue sur son intervalle de définition



La fonction f n'a pas de limite en 2. f est discontinue en 2 donc non continue sur son intervalle de définition

- Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. C'est le cas par exemple des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et exponentielles.

Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison

Énoncé

Soit les fonctions f et g définies sur I = [1 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x} \text{ et } g(x)=x+\cos(x).$$

1. Pourquoi ne peut-on pas déterminer directement les limites des fonction f et g en $+\infty$?

2. À l'aide d'un encadrement sur I déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. À l'aide d'une inégalité sur I, déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

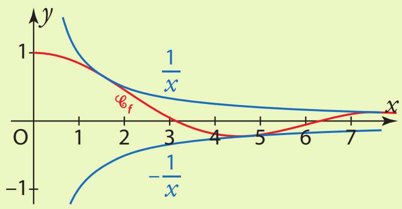
Solution

1. Les fonctions sin et cos sont des fonctions périodiques de valeurs comprises entre −1 et 1. Elles n'ont donc pas de limites en $+\infty$.

2. Comme la fonction sin est bornée dans [−1 ;1], on a pour $x \geqslant 1$:

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \overset{[\div x]}{\Rightarrow} -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x} \quad \boxed{1}$$

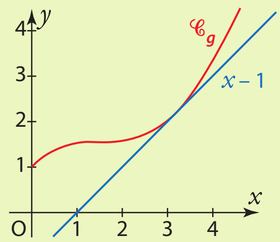
$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'après le théorème d'encadrement ou des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



3. On minore cos pour montrer que la fonction g tend vers $+\infty$. $\boxed{2}$

$$\cos(x) \geqslant -1 \overset{+x}{\Rightarrow} x+\cos(x) \geqslant x-1 \quad \boxed{3}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$, d'après le théorème par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.



Conseils & Méthodes

1 On ne change pas une inégalité si l'on multiplie ou divise par un nombre strictement positif.

2 Un rapide aperçu de la fonction g montre qu'elle tend vers $+\infty$ le terme prépondérant étant x.

3 On ne change pas une inégalité lorsqu'on ajoute ou retranche un même terme de chaque côte de l'inégalité.

À vous de jouer !

9 Soit la fonction f définie sur]1 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{\cos(x)}{x+1}.$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

10 Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x)=x^2+x\sin(x).$$

1. Factoriser $f(x)$.

2. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

11 Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{x+1}{2-\cos(x)}.$$

1. Montrer l'encadrement suivant, pour tout réel x.

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2-\cos(x)} \leqslant 1$$

2. En déduire la limite de f en $-\infty$.

↪ Exercices 41 à 42 p. 59

b Propriétés de la continuité

Théorème Continuité et dérivabilité

Si une fonction *f* est dérivable en un point *a* alors *f* est continue en *a*

Si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle I alors *f* est continue sur I.

Remarques

- La réciproque de ce théorème est fausse.

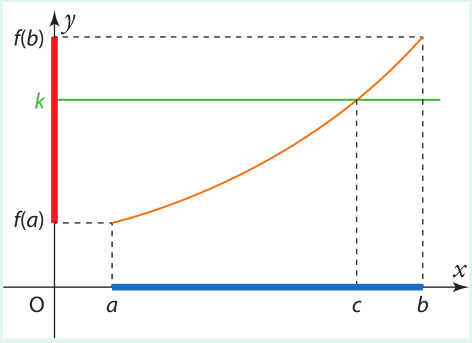
Une fonction peut être continue en *a* mais pas dérivable en *a*.
Cela se caractérise sur une courbe sans saut mais qui n'admet pas une tangente au point a comme la fonction valeur absolue en 0.

- L'intérêt de ce théorème est de pouvoir affirmer qu'une fonction est continue sachant que la fonction est dérivable.

Théorème Valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*].

Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'équation *f*(*x*) = *k* admet une unique solution *c* dans l'intervalle [*a* ; *b*].



Remarques

- Pour un réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'existence d'une solution est déterminée par la continuité et l'unicité par la stricte monotonie.
- Ce théorème s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires car le réel *k* est une valeur intermédiaire entre *f*(*a*) et *f*(*b*).
- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert I =]*a* ; *b*[où *a* et *b* peuvent être réels ou $\pm\infty$.

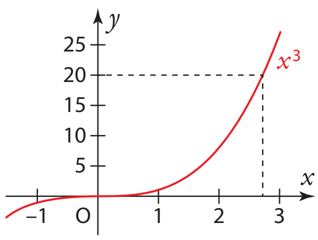
k doit alors être compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.

- Lorsque $k = 0$, il suffira de montrer que la fonction *f* change de signe sur I.
- Un tableau de variations pourra être suffisant pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction.

En effet les flèches « montantes » ou « descendantes » d'un tableau de variations indique la continuité et la monotonie.
Il est cependant important de rappeler ces deux hypothèses dans la rédaction.

Exemple

L'équation $x^3 = 20$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;+\infty[$ car la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et 20 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 6 Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $I = [-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solutions dans l'intervalle $[0\,;2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2\,;+\infty[$.

Donner un encadrement au dixième près de α.

Solution

1. Étudions les variations de la fonction f sur $[-2\,;+\infty[$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme.

On calcule $f(0) = 3$, $f(2) = -1$ et $f(-2) = -17$

x	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Sur l'intervalle $[0\,;2]$, la fonction f est continue, strictement monotone (décroissante) et 1 est compris entre $f(0) = 3$ et $f(2) = -1$, d'après le théorème des valeur intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution. **1**

b) Sur l'intervalle $[-2\,;2[$, $f(x)$ est majorée par 3 donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution. **2**

Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement monotone. 5 est compris entre $f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[2\,;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

Par le balayage d'une calculatrice avec un pas de 0,1, on trouve $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$. **3**

X	Y1
3	3
3.1	3.961
3.2	5.048
3.3	6.267

Conseils & Méthodes

1 Il est important de rappeler les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires pour la rigueur du raisonnement.

2 Lorsqu'une équation n'a pas de solution, une simple majoration est suffisante pour conclure.

3 Pour déterminer un encadrement d'une solution, la méthode la plus simple consiste en un balayage d'un tableau de valeurs avec un pas adapté.

À vous de jouer !

12 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

b) Contrôler en traçant la fonction f sur une calculatrice la véracité des résultats.

13 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 2.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [2\,;3]$.

b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

↪ Exercices 43 à 46 p. 59

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Déterminer les limites d'une fonction rationnelle

Énoncé

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-4 ; 4]$ et $y \in [-10 ; 10]$ puis conjecturer les limites en $\pm\infty$ et ± 1.

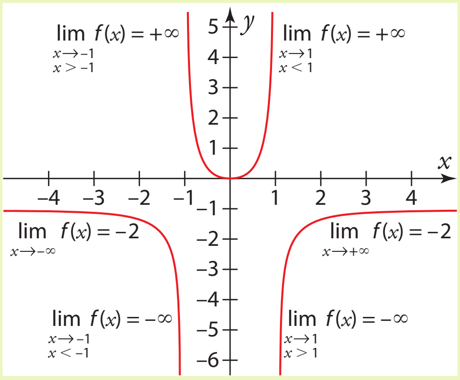
2. a) Pour $x \neq 0$, factoriser par x^2 le dénominateur $(1 - x^2)$ puis confirmer les limites de la fonction f en $\pm\infty$ trouvées à la question 1.

b) Déterminer le signe de $(1 - x^2)$ suivant les valeurs de x.

c) Confirmer alors les limites de la fonction f en ± 1 trouvées à la question 1.

Solution

1. On obtient la courbe et les conjectures suivantes.



2. a) Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x^2}-1}$ **1** :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} - 1 = -1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2\end{array}$$

Par un même raisonnement, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

b) $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

on obtient alors le tableau de signes suivant. **2**

x	$-\infty$		-1		1^- 1 1^+		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) En séparant limite à gauche et limite à droite, on trouve : **3**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 2x^2 = 2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 1-x^2 = 0^+\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty\end{array} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 2x^2 = 2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 1-x^2 = 0^-\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty\end{array}$$

Par un même raisonnement, on obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$.

Conseils & Méthodes

1 Pour ne pas trouver une formes indéterminées en l'infini, on change la forme de $f(x)$.

2 Comme le dénominateur de $f(x)$ s'annule en ± 1 , il faut donc déterminer le signe autour de ces valeurs.

3 Attention, les limites en ± 1 ne sont pas des formes indéterminées. Ne pas changer la forme de $f(x)$ comme en $\pm\infty$.

À vous de jouer !

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-6 ; 6]$ et $y \in [-1 ; 6]$ puis conjecturer les limites en $\pm\infty$.

2. a) Pour $x \neq 0$, factoriser par x^2 le numérateur et le dénominateur de $f(x)$.

b) Confirmer alors les limites en $\pm\infty$ trouvées à la question 1.

15 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-5 ; 5]$. Conjecturer les limites en $\pm\infty$ et en ± 2.

2. a) Confirmer les limites en $\pm\infty$ en levant l'indétermination.

b) En étudiant le signe de $(x^2 - 4)$, confirmer les limites en ± 2.

↪ Exercices 50 à 54 p. 60

Méthode 8 Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Énoncé

Soit la fonction f définie et dérivable sur I = $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{10x}{e^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I que : $f'(x)=\dfrac{10}{(e^x+1)^2}\times g(x)$ où g est une fonction définie sur I par $g(x)=e^x-xe^x+1$.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha)=0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Solution

1. $f'(x)=\dfrac{10(e^x+1)-10xe^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{10(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{10}{(e^x+1)^2}\times g(x)$

avec $g(x)=e^x-xe^x+1$.

2. a) • On étudie les variations de g et sa limite en $+\infty$. **1**

$g'(x)=e^x-(1e^x+xe^x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$

Pour $x\geqslant 0$, $-xe^x\leqslant 0$ donc $g'(x)\leqslant 0$. La fonction g est décroissante sur I.

• Limite en $+\infty$: on a $g(x)=e^x(1-x)+1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty\end{array}\right\}\ \text{par produit}\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x)=-\infty$$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$. On calcule $g(0)=2$. **2**

Sur I la fonction g est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et change de signe car $g(0)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)<0$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Par le balayage d'une calculatrice, on trouve : $g(1{,}27)\approx 0{,}039$ et $g(1{,}28)\approx -0{,}007$. **3** On en déduit que $1{,}27<\alpha<1{,}28$.

c) Comme la fonction g est décroissante sur I, si $x<\alpha$, $g(x)>0$ et si $x>\alpha$, $g(x)<0$.

3. Comme, $\dfrac{10}{e^x+1}>0$ pour tout x de I, le signe de $f'(x)=\dfrac{10}{(e^x+1)^2}\times g(x)$ est du signe de $g(x)$, on obtient le tableau de variations ci-contre.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Conseils & Méthodes

1 L'unicité de la solution est obtenue par le théorème des valeurs intermédiaires. Il est nécessaire de connaître les variations de la fonction f.

2 Le changement de signe de la fonction g sur I est alors établi.

3 On programme le tableau de valeurs avec comme valeur initiale 0 et un pas de 0,01.

À vous de jouer !

16 Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3x^4+4x^3+12x^2+12x-5.$$

1. Démontrer que pour tout réel que : $f'(x)=12g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha)=0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

17 Soit la fonction f définie et dérivable sur I = $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha)=0$.

b) Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I.

↪ Exercices 55 à 57 p. 61

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer

Sachant que pour tout réel x, $e^x > x$, en déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0.$$

On souhaite démontrer la première limite par comparaison, puis en déduire la seconde par un changement de variable.

Comprendre avant de rédiger

- On peut résumer le résultat de ces limites en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction identité $x \mapsto x$ ».
- On utilise l'inégalité donnée $e^x > x$ pour montrer l'inégalité $\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{4}$.
- Pour la deuxième limite, on utilise le changement de variable $X = -x$ pour établir la limite.

Rédiger

Étape 1
Si l'inégalité donnée est valable pour x elle est aussi valable pour $\dfrac{x}{2}$.

Étape 2
La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $(e^a)^2 = e^{2a}$.

Étape 3
Comme $x > 0$, on ne change pas l'inégalité en divisant par x.

Étape 4
Il ne reste plus qu'à passer à la limite avant de conclure.

Étape 5
Si x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$.

Si $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ alors par quotient $0 \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$.

La démonstration rédigée

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} > \dfrac{x}{2}$

On élève au carré pour $x > 0$

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow e^x > \frac{x^2}{4}$$

En divisant par x, on obtient :
$\dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{4}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

On pose $X = -x \Leftrightarrow x = -X$, on a alors :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{X \to +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$$

Pour s'entraîner

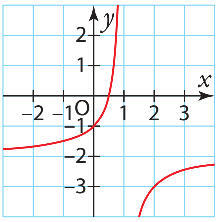
À l'aide d'un changement de variable astucieux, déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \to +\infty} 20e^{-0,2x} \text{ et } \lim_{x \to -\infty} 20e^{-0,2x}$$

Exercices calculs et automatismes

18 Limites et asymptotes

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ suivante représentant une fonction f.



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation :

a $x=-2$ b $y=-2$ c $x=1$ d $y=1$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale :

a $x=-2$ b $y=-2$ c $x=1$ d $y=1$

3. D'après la courbe $\mathscr{C}_f$, peut-on dire que :

a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

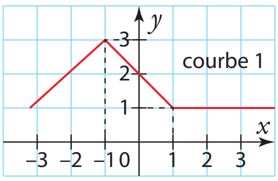
c $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$ d $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f=+\infty$

19 Continuité en un point

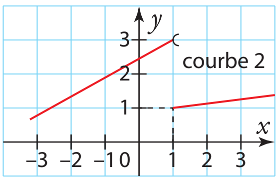
Méthode Comment reconnaître la continuité sur une courbe ?

On donne les courbes suivantes.

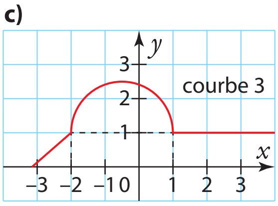
a)



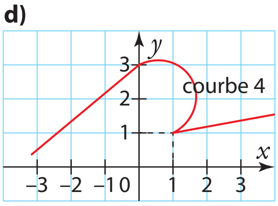
b)



c)



d)



Parmi ces courbes quelles sont celles qui représentent une fonction continue en 1 ?

20 Opération sur les limites (1)

On donne les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

On peut conclure que :

a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=0$ b $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=-\infty$

c $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g=+\infty$ d $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$

21 Opération sur les limites (2)

On donne les limites suivantes.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x)=0^-$$

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

On peut conclure que :

a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty$

b $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x)=-\infty$

c $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

d $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)}=0$

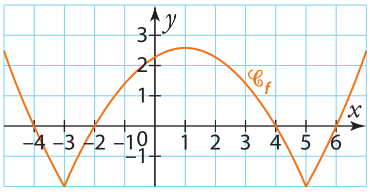
22 Continuité

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

	V	F
a) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{x-5}{2-x}=+\infty$	☐	☐
b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{2x^2+1}{1-x}=-\infty$	☐	☐
c) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}=+\infty$	☐	☐

23 Théorème des valeurs intermédiaires

On donne la représentation d'une fonction f sur $I=[-5\,;7]$.



1. Justifier que la fonction f est continue sur I.

2. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$:

a) dans $[1\,;5]$.

b) dans $[-1\,;1]$.

c) dans I.

24 Tableau de variations et équation

Méthode Comment montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$?

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Exercices d'application

Conjecturer une limite

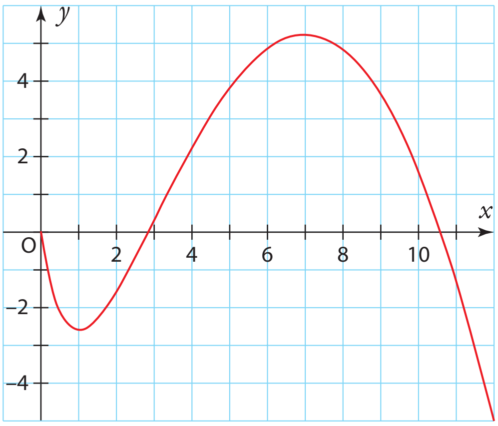
Méthode 1 p. 45

25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-5\,;5]$ et $y \in [-2\,;2]$.
2. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$?
3. Comment peut-on le vérifier ?

26 On donne la représentation d'une fonction f suivante définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



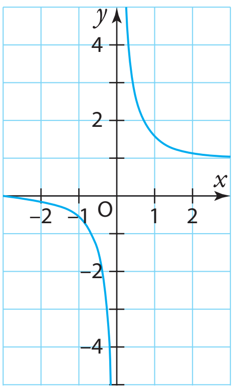
1. Que conjecturer pour la limite de la fonction f en $+\infty$?
2. Si l'on continue la courbe, est-possible d'avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -6$? Justifier.

27 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice.
2. a) Que peut-on conjecturer sur la limite de f en 1 ?
b) Interpréter graphiquement cette limite ?

28 On donne la représentation d'une fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.



1. Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
Que peut-on déduire géométriquement ?
2. a) Conjecturer les limites de la fonction f en 1 en valeurs supérieures et en valeurs inférieures.
b) Que peut-on déduire géométriquement ?
c) La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Pourquoi ?

29 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x\,e^x}{e^x - 1}.$$

1. Tracer la fonction f sur votre calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [-5\,;5]$ et $y \in [-1\,;6]$.
2. a) Conjecturer la limite en 0.
b) La fonction f est-elle définie en 0 ?

30 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

1. Tracer la fonction f sur votre calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [-5\,;5]$ et $y \in [-2\,;2]$.
2. a) Conjecturer la limite en 0.
b) La fonction f est-elle définie en 0 ?

Déterminer une limite en un point

Méthode 2 Méthode 3 p. 47

31 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2 - x} \text{ et } a = 2.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

32 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{(x+3)^2} \text{ et } a = -3.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

33 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ et } a = 0.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

34 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 1}{x + 1} \text{ et } a = -1.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

35 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \text{ et } a = 0.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

36 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x^3 + 1}{x + 1} \text{ et } a = -1.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

Déterminer une limite en l'infini

Méthode 4 p. 49

37 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2$

2. $f(x) = 1 - x + \dfrac{2}{x+1}$

3. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 5}$

4. $f(x) = e^x - 2$

38 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x+1}$

39 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 1$

2. $f(x) = \dfrac{-2}{1-\sqrt{x}}$

3. $f(x) = e^x + x - 4$

4. $f(x) = (2x-1)e^x$

40 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = \dfrac{-x^3 + x}{x-1}$

2. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+x}$

3. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + x + 2}$

Utiliser un théorème d'encadrement

Méthode 5 p. 51

41 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}\cos(x).$$

1. a) Tracer la fonction f et les fonctions $x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ et $x \mapsto -e^{-\frac{x}{4}}$ sur une calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [0\,;10]$ et $y \in [-1\,;2]$

b) Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Encadrer la fonction sur $[0\,;+\infty[$

b) Confirmer la conjecture de la question **1. b)**

42 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - \sin x$$

À l'aide d'une inégalité déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

Méthode 6 p. 53

43 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	-2	↗	1	↘	$-\infty$

1. Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Dénombrer le nombre de solution $f(x) = 0$

44 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

45 Une fonction f définie et dérivable sur $[1\,;13]$ a pour tableau de variations le tableau suivant.

x	1		4		10		13
f	2	↗	7	↘	3	↗	4

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $[1\,;13]$.

2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x)=5$. Justifier.

3. Justifier que l'équation $f(x) = \dfrac{5}{2}$ admet une unique solution α.

46 Une fonction f définie et dérivable sur $[-5\,;5[$ a pour tableau de variations le tableau suivant.

x	-5		-2		0		3		5
f	2	↘	-1	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $I = [-5\,;5[$.

2. Discuter, en vous justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k.

Exercices d'entraînement

Fonction définie par un tableau de variations

47 On donne le tableau de variations d'une fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	2

1. À partir du tableau de variations, donner les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. La fonction *f* admet-elle une limite en –1 ? Pourquoi ?
3. Que peut-on déduire géométriquement de ces limites ?
4. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f*. On fera figurer les éléments caractéristiques du tableau de variations sur la courbe.

48 On donne le tableau de variations d'une fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

1. Déterminer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Combien de solutions, l'équation *f*(*x*) = 0, possède-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles se trouvent-elles ?
3. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f*. On fera figurer les asymtotes à la courbe.

49 Soit *f* une fonction définie et dérivable sur ℝ. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de *f*. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction *f* sur ℝ.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	1	↘	-1	↗	$+\infty$

On donne *f*(–2) = *f*(5) = 0 et *f*(10) = 3.
1. Dresser sans justification le tableau donnant le signe de *f*(*x*) suivant les valeurs du nombre réel *x*.
2. a) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.
b) Justifier que l'équation *f*(*x*) = 2 admet une unique solution sur ℝ.

Limite d'une fonction rationnelle

Méthode 7 p. 54

50 Soit la fonction *f* définie sur I = ℝ\{–2} par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition I.
2. Interpréter géométriquement les limites obtenues.

51 Soit la fonction *f* définie sur *I* = ℝ\{1}par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{1-x}.$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition I.
2. Interpréter géométriquement les limites obtenues.
3. Vérifier sur une calculatrice la véracité des résultats obtenus. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-4 ; 6]$ et $y \in [-5 ; 5]$.

52 Soit la fonction *f* par :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+2x+1}.$$

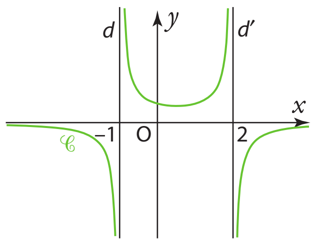
1. a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.
b) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition *I*.
c). La fonction *f* admet-elle une limite en –1 ? Pourquoi ?
2. Vérifier sur une calculatrice la véracité des résultats obtenus. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-6 ; 6]$ et $y \in [-3 ; 8]$.

53 On donne trois fonctions et une représentation graphique $\mathscr{C}$ de l'une d'elle. Retrouver la fonction qui est représentée en expliquant ce qui permet d'éliminer les deux autres.

$$f_1(x) = \frac{-1}{(x-1)(x+2)}$$

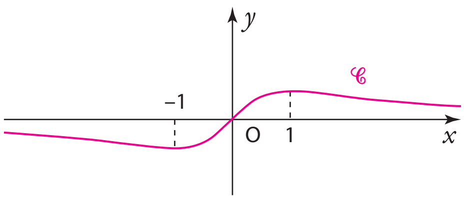
$$f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

$$f_3(x) = \frac{-1}{(x+1)(x-2)}$$



54 On donne trois fonctions et une représentation graphique $\mathscr{C}$ de l'une d'elle. Retrouver la fonction qui est représentée en expliquant ce qui permet d'éléminer les deux autres.

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad f_2(x) = xe^{-x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$



Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Méthode 8 p. 55

55 On considère la fonction f définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

A ▸ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction g

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$.

3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B ▸ On admet que sur I :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 1.

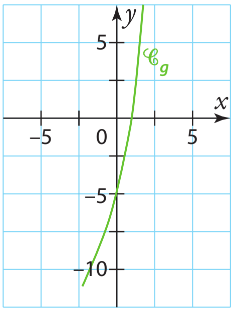
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur I puis dresser le tableau de variations de f.

56 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

A ▸ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7.$$



1. Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.

2. Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\alpha \in [0\,;1]$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B ▸ 1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2. On admet que $f'(x) = g(x)e^{-x}$

Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer la fonction f sur une calculatrice.

On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-2\,;5]$ et $y \in [-3 : 5]$.

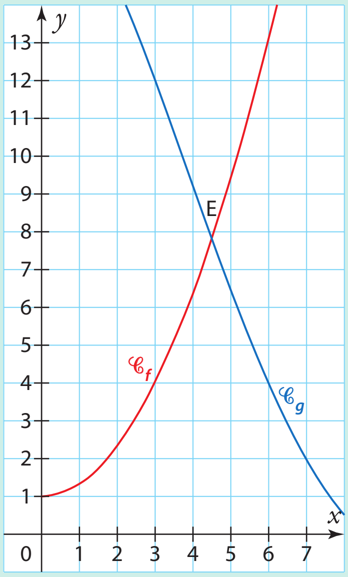
4. Résoudre graphiquement sur la calculatrice l'inéquation $f(x) > 2$ sur $\mathbb{R}$.

On donnera la solution avec une précision à 10^{-2} près.

57 On considère les fonctions f et g définies et dérivables sur l'intervalle $[0\,;8]$ par : **Thème 2**

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + 1 \text{ et } g(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18.$$

A ▸ 1. On donne les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Lire avec la précision du graphique une valeur approchée des coordonnées du point E.

2. Pour déterminer de façon plus précise les coordonnées du point E, on pose la fonction h définie sur $[0\,;8]$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a) Montrer que le problème consiste à résoudre $h(x) = 0$.

b) On admet que la fonction h est croissante sur $[0\,,8]$. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;8]$.

c) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur de α au centième.

B ▸ Les fonctions f et g modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

• $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles que les producteurs sont prêts à ventdre au prix unitaire de x centaines d'euros ;

• $g(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé à l'euro près, arrondi à la centaine d'articles près, le prix unitaire d'équilibre du marché ?

2. Quel est le nombre d'articles correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercices d'entraînement

58 Économie Thème 1

La fonction de demande d'un produit électronique de type oreillette bluetooth est modélisée sur $[0\,;+\infty[$ par la fonction f définie par : $f(x) = 1\,000(x+5)\,e^{-0{,}2x}$,
où $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est de x €.

En dessous de quel prix unitaire, arrondi au au centième, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ? Exposer la réponse à cette question à l'oral.

Méthode de dichotomie

59 Algo Thème 1

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$.

3. On veut obtenir un encadrement de α. On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[1,3]$ en deux intervalles $I_1 = [1\,;2]$ et $I_2 = [2\,;3]$.

a) Calculer $f(2)$. Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.

b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $I_3 = \left[2\,;\frac{5}{2}\right]$ et $I_4 = \left[\frac{5}{2}\,;3\right]$. Calculer $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

4. On décide d'automatiser ce procédé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieur à 10^{-3}.

On donne le programme en **Python** incomplet suivant.

```
def f(x):
    return ...
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=...
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=...
        else:
            ...=c
        n=n+1
    return a,b,n
```

a) Compléter l'algorithme pour qu'il calcule la valeur de $f(x)$ et qu'il réitère le procédé.

b) Que représente la variable `n` ?

c) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α. En combien d'itérations est-il obtenu ?

60 Algo Thème 1

Il s'agit de déterminer une valeur approchée de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ par une méthode de dichotomie.

1. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [0\,;1]$.

2. On veut obtenir un encadrement de α.

On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[0\,;1]$ en deux intervalles $I_1 = \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

a) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.

b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $I_3 = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right]$ et $I_4 = \left[\frac{3}{4}\,;1\right]$.

Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

3. On décide d'automatiser ce procédé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

On donne le programme en **Python** suivant.

```
1   def f(x):
2       return x**3+x-1
3   def dicho(a,b):
4       n=0
5       while b-a>=10**(-3):
6           c=(a+b)/2
7           if f(a)*f(c)<0:
8               b=c
9           else:
10              a=c
11          n=n+1
12      return a,b,n
```

a) Que représentent les paramètres `a` et `b` de la fonction dicho ?

b) Quelles valeurs doit-on utiliser pour `a` et pour `b` lorsqu'on demande à exécuter la fonction dicho pour résoudre $f(x) = 0$.

c) Que représente la variable `n` ?

d) Expliquer les lignes 7, 8, 9, 10 du programme.

e) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α.

En combien d'itérations est-il obtenu ?

f) Que faut-il modifier pour avoir un encadrement à 10^{-6} ?
Donner alors cet encadrement ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

61 Production

Économie

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires.
La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par les fonctions f, pour le produit A, et g, pour le produit B, définies sur $I = [0\,;14]$

$$f(x) = 2000e^{-0,2x} \text{ et } g(x) = 15x^2 + 50x$$

où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.
Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.

1. Sur le graphe, qu'a-t-on représenté en abscisses ? En ordonnées ?
Par lecture graphique et avec la précision permise par le graphique, déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle I on pose :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

On admet que la fonction h est dérivable sur I.

a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

b) Montrer que, pour $x \in I$:

$$h'(x) = -400e^{-0,2x} - 30x - 50.$$

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur I.

d) On donne $h(0) = 2\,000$ et $h(14) \approx -3\,518$.
Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

e) Résoudre alors $g(x) > f(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.

62 Taux d'alcoolémie

Thème 1

A ▶ Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;12]$ par :

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

1. Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle .

2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions dans I. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

B ▶ Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :
- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$représente le taux d'alcoolémie (exprimé en $g \cdot L^{-1}$) de cette personne.

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0{,}5\ g \cdot L^{-1}$.
Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

63 Chute libre

Thème 1

La vitesse d'une parachutiste en chute libre, avant qu'il (elle) actionne son parachute est modélisée par :

$$v(t) = 50(1-e^{-0,2t}),$$

où $v(t)$ est la vitesse, en $m \cdot s^{-1}$, du (de la) parachutiste en fonction du temps en seconde.

1. Quelle est la vitesse du (de la) parachutiste à $t = 0$?

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

3. Calculer $v'(t)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.

4. Interpréter ce tableau de variations du point de vue du (de la) parachutiste.

5. Dans un article consacré à la découverte du saut en parachute, on peut lire : « Dès la sortie de l'avion et au début du saut, la vitesse de chute augmente très rapidement. puis la vitesse se stabilise aux alentours de 200 km/h. »
Justifier le propos de cet article.

Exercices bilan

64 Bénéfice

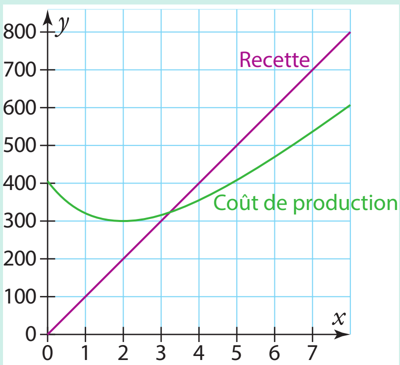
Économie — Thème 1

Une entreprise est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable.
La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres.
Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

1. Le graphique ci-dessous modélise les recettes et les coûts de production de l'entreprise.

a) Que représentent les abscisses sur le graphe ?

b) Que représentent les ordonnées ?



2. À l'aide du graphique, déterminer à partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise un bénéfice.

3. Le bénéfice en dizaine d'euros correspondant à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$f(x)=25x-150\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$$

a) Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(8)$, puis en donner les valeurs arrondies au centième.

b) Montrer que la dérivée f' de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ est :

$$f'(x)=25+75\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}.$$

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[0\,;8]$.

d) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;8]$ puis en donner la valeur arrondie au centième.

e) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur de α à 10^{-3} près. On expliquera la méthode utilisée.

f) En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.

65 Plant de maïs

Algo — Thème 2

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t)=\frac{a}{1+b\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}}$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t, en jours.
Les constantes a et b sont des réels positifs.
On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

1. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

2. On suppose que la fonction h est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation $h(t)=1{,}5$ admet une unique solution t_0.

b) À l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

D'après Bac Pondichéry 2013

66 Population de grenouilles

Thème 2

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ où t est le temps écoulé en années depuis 2018 :

$$P(t)=\frac{1\,000}{0{,}4+3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

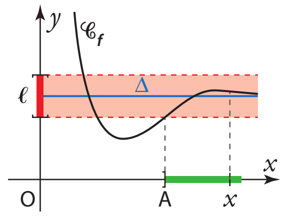
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0\in[0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0)=2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.

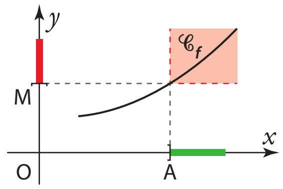
Préparer le BAC L'essentiel

CONTRÔLE CONTINU

Limite en l'infini

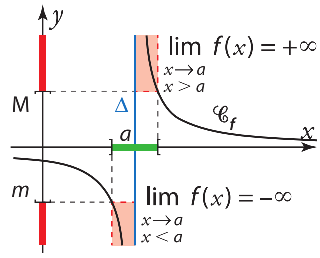


- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$



- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite en un point



Limites des fonctions élémentaires

- **Limites en l'infini**

$f(x)$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^{ax}
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ $a > 0$ 0 $a < 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	**Non définie**	0 $a > 0$ $-\infty$ $a < 0$

- **Limites en zéro**

$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	**Non définie**

Calculs avec les limites

Par somme, produit et quotient sauf dans les cas de forme indéterminée :

Cas n° 1 « $+\infty - \infty$ », alors mettre la fonction sous la forme d'un produit.

Cas n° 2 « $0 \times \infty$ », alors mettre la fonction sous la forme d'une somme.

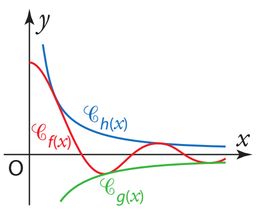
Cas n° 3 « $\frac{0}{0}$ », alors simplifier la fonction ou passer par le nombre dérivé.

Cas n° 4 « $\frac{\infty}{\infty}$ », alors mettre en facteur le terme prépondérant.

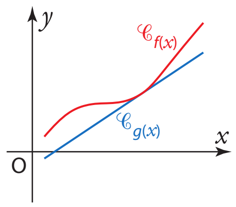
Théorème des valeurs intermediaires

f continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a ; b]$.

Limites par comparaison

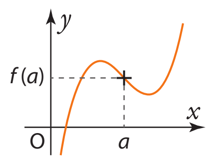


- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

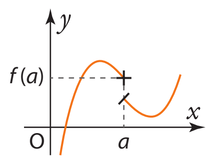


- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Continuité



- f continue en a



- f discontinue en a
- f dérivable sur I $\Rightarrow$ f est continue sur I.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Conjecturer et vérifier une limite	Méthode 1, Méthode 2, Méthode 3	1, 2, 25, 26, 3, 4, 31, 32, 5, 6
▶ Déterminer une limite	Méthode 4, Méthode 5, Méthode 7	7, 8, 37, 38, 9, 10, 41, 42, 14, 15, 50, 51
▶ Résoudre une équation à l'aide d'une fonction	Méthode 6	12, 13, 43, 44
▶ Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire	Méthode 8	16, 17, 55, 56

EXOS QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c02-05

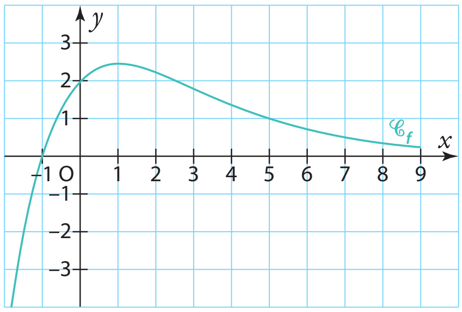
QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
67 Si la fonction *f* admet comme limite 2 en $-\infty$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation :	$x=2$	$y=2x$	$y=2$	$y=-2$
68 Soit $f(x)=2-\frac{1}{x}$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation	$x=0$	$y=2$	$y=0$	$x=2$
69 $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+3x+5=$	$+\infty$	5	$\frac{3}{2}$	$-\infty$
70 $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1-2x}{x-1}=$	$-\infty$	0	-2	$+\infty$
71 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2x}=$	0	$-\infty$	$+\infty$	$\mathrm{e}^{0{,}2}$
72 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{1-x^2}=$	$+\infty$	$-\infty$	-2	2
73 Soit *f* définie par le tableau suivant. L'équation $f(x)=1$: $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.	admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.	admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.	admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.
74 Soit *f* définie par le tableau suivant. L'équation $f(x)=0$: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f & +\infty & \searrow & -1 & \nearrow & 3 & \searrow & 1 \end{array}$	n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.	admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.	admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.	admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.
75 Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution de l'équation $x^3+2x-1=0$.	0,3	0,4	0,5	0,6

76 Asymptote

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



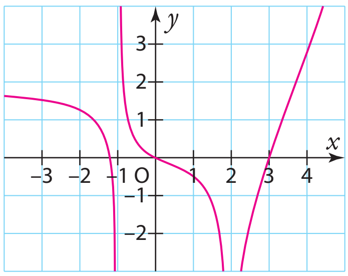
1. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui où et quelle est son équation ?

Méthode 1 p. 45

77 Limites

On donne le graphe représentant la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



Répondre aux questions à l'aide du graphique.

1. a) Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Donner $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$.

c) Donner $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

2. Donner les asymptotes éventuelles aux endroits de $\mathscr{C}_f$.

Méthode 1 p. 45

78 Ensemble de définition et limites

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x-4}{1-x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

79 Calcul de limites (1)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{2x-5}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x+4}{x^2-4}$

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

80 Calcul de limites (2)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-2x+5$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x+1}{x^2+5x-2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{3x+5}{x^2+x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+2}$

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

81 Calcul de limites (3)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x\, e^x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{e^x}$

Méthode 4 p. 49

82 Solution d'une équation

Soit la fonction f définie sur $I=[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=e^x-x-3.$$

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

1. Déterminer les variations de la fonction f sur I puis dresser son tableau de variations.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur I.

b) Vérifier que $\alpha \in [2\,;3]$ puis déterminer par balayage d'une calculatrice un encadrement de α au dixième.

Méthode 4 p. 49

83 Étudier une fonction

Soit la fonction f définie sur $I=[0\,;5]$ par :

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x^3}.$$

Soit la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. a) Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur I.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans I.

c) Vérifier que $\alpha \in [1\,;2]$ puis déterminer par balayage d'une calculatrice un encadrement de α au dixième.

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. a) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x^3)^2}.$$

b) Déterminer le signe de f' sur I puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

Méthode 6 p. 53

3

Convexité

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster est une des plus populaires aux États-Unis, qui présente 22 virages et une pente maximale de 60°.

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

↪ Exercice 72 p. 85

VIDÉO WEB

Courbes et vitesse

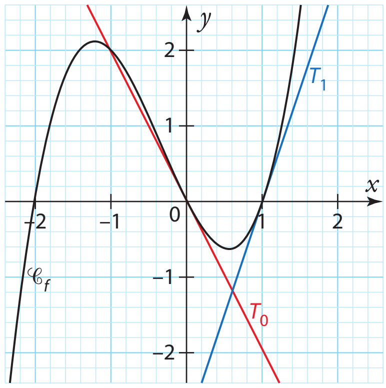
lienmini.fr/maths-c03-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c03-02 — Les rendez-vous Sésamath

1 Déterminer un nombre dérivé

1. On considère une fonction dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.



a) Graphiquement, déterminer $f'(0)$, $f(0)$, $f'(1)$ et $f(1)$.

b) Graphiquement, déterminer la ou les abscisses pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

a) Calculer $g'(3)$ et $g'(-3)$.
Que remarquez-vous ? Justifier.

b) Déterminer l'abscisse positive a pour laquelle $g'(a) = 12$.

2 Déterminer une équation de tangente

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $f'(2)$ et $f(2)$.

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, notée T_2.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0, notée T_0.

3 Calculer des dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$

b) $g(x) = 4x - \frac{7}{x}$

c) $h(x) = x\mathrm{e}^x$

d) $i(x) = \frac{x^2\mathrm{e}^x + 3}{x+5}$

4 Étudier des tableaux de signes

1. On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont on donne les tableaux de signe.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Dresser le tableau de signes de $f \times g$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2-9)(3x+4)$.
Dresser le tableau de signes de la fonction h.

5 Calculer la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{-2x+1+1}$. Calculer $g'(x)$.

Activités

TICE 15 min

1 Différencier courbes, sécantes et tangentes

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

2. Placer deux points A et B d'abscisses négatives et tracer le segment [AB] (aussi appelé sécante). Comment est situé ce segment par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$?

3. Même question que précédemment avec deux points C et D d'abscisses positives puis avec le point E d'abscisse –2 et le point F d'abscisse 2.

4. Pour tout point M de $\mathscr{C}_f$, on note T_M la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M. Tracer T_A, T_B, T_C, T_D, T_E et T_F.
Donner la position de chaque tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.

5. On dit que M est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si T_M traverse $\mathscr{C}_f$ en ce point. Existe-t-il un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ ici ? Si oui lequel ?

6. Faire une synthèse des résultats obtenus.

Coup de pouce
- Pour chaque question, bien distinguer les intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$.
- Pour la dernière question, s'aider d'un tableau à deux colonnes présentant les résultats pour chaque intervalle.

↪ Cours 1 p. 72 et 3 p. 76

20 min — Thème 1

2 Étudier une fonction de production

Jeff est couturier. Il crée sa propre entreprise et, après avoir fait faire des études de marché, il décide de produire au maximum 100 pièces par an. L'entreprise en étant à ses débuts, il projette d'augmenter sa production au fur et à mesure, mais se fixe un objectif d'au moins 50 pièces pour la 1e année. On modélise la production semestrielle de cet artisan par une fonction f de la variable t où t est le temps hebdomadaire en heures qu'il consacre à produire des pièces, f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. On considère que f est définie par la relation $f(t) = 20\sqrt{t}$.

a) Au 1er semestre, Jeff se consacre entièrement aux papiers administratifs et ne produit rien. Au 2nd semestre il décide de rattraper ce retard en consacrant 20 heures hebdomadaires à la production. Calculer la production obtenue en fin d'année. Cette stratégie semble-t-elle efficace ?

b) Même question que précédemment en considérant 10 heures de travail consacrées à la production pour le 1er semestre et 10 heures de travail consacrées à la production pour le 2nd semestre.

c) Soit t un réel de [0 ; 1]. Établir une inégalité entre $tf(4)$, $(1-t)f(16)$ et $f(t \times 4 + (1-t) \times 16)$.

d) Tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en différents points. Quelle est leur position par rapport à $\mathscr{C}_f$?

Coup de pouce
- Calculer $f(0)$ puis $f(20)$ et faire la moyenne des deux résultats obtenus.
- La stratégie est efficace si la production moyenne obtenue est supérieure à 50.

2. Reprendre la question **1.** en considérant que f est définie par la relation $f(t) = \dfrac{4}{25}t^2$.

3. D'après **1.** et **2.** quelle stratégie devrait adopter Jeff ? Quelle(s) différence(s) existe-t-il entre les fonctions des questions **1.** et **2.** ?

↪ Cours 1 p. 72

TICE 10 min

3 Manipuler dérivées première et seconde

1. On considère la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

2. a) Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Dresser les tableaux de variations et de signe de la fonction f' en utilisant vos connaissances sur $x \mapsto x^2$.

3. On note f'' (et on lit « f seconde ») la fonction dérivée de la fonction f'.

Déterminer le signe de f''.

4. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

5. On dit que M est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si $f''(x)$ change de signe en ce point.
Existe-t-il un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ ici ? Si oui lequel ?

x appartient à l'intervalle	$]-\infty\,;0]$	$[0\,;+\infty[$
Sécantes	en dessous de $\mathscr{C}$	au-dessus de $\mathscr{C}$
Tangentes	au-dessus de $\mathscr{C}$	en dessous de $\mathscr{C}$
Variations de f'		
Signe de $f''(x)$		
Fonction f…	concave	convexe

↪ Cours 2 p. 74 et 3 p. 76

25 min — Thème 5

4 Reconnaître une courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie et croissante sur [0 ; 1],
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$,
- pour tout x de [0 ; 1], $L(x) \leqslant x$.

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

a) Déterminer la dérivée de f notée f'.

b) Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 1].

c) Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur [0 ; 1]. Démontrer que $f(x) \leqslant x$ sur [0 ; 1].

2. Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e} - 2)x + 1.$$

a) Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur [0 ; 1].

b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

c) On pose $h(x) = x - g(x)$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $h'(x)$.

x	0		$\ln(\mathrm{e}-1)$		1
Signe de $h'(x)$		+	0	−	

En déduire le tableau de variations de h (on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(\mathrm{e}-1))$) puis que pour tout x de [0 ; 1], $g(x) \leqslant x$.

3. En déduire que les courbes représentatives de f et de g sont toutes deux des courbes de Lorenz.

D'après Bac ES Métropole 2003

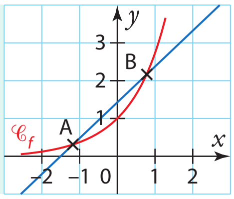
↪ Cours 2 p. 74

Cours

1 Convexité d'une fonction

Définition Sécante

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ alors la droite (AB) est appelée sécante de $\mathscr{C}_f$.



Définitions Convexité et concavité

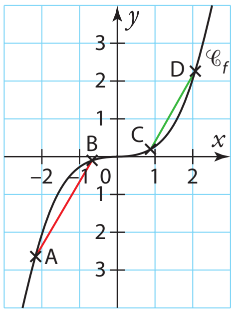
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dit que :
① f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.
② f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.

Propriété Fonctions usuelles

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.
La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-contre.
Alors le segment [CD] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x positif donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et le segment [AB] est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x négatif donc f est concave sur $\mathbb{R}_-$.



Propriété Position par rapport aux sécantes

• Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a :

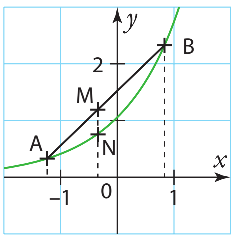
$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

• Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Démonstration

Soit deux réels x et y et soit t un réel de [0 ; 1]. Soit $A(x\,; f(x))$ et $B(y\,; f(y))$. Alors le point $M(tx + (1-t)y\,; tf(x) + (1-t)f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de $\mathscr{C}_f$.
f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$.
M est donc situé au-dessus du point $N(tx + (1-t)y\,; f(tx + (1-t)y))$.
D'où $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.



Remarque Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est une fonction strictement convexe ou strictement concave sur I.

Propriété Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc $f = x \mapsto -e^x$ est concave.

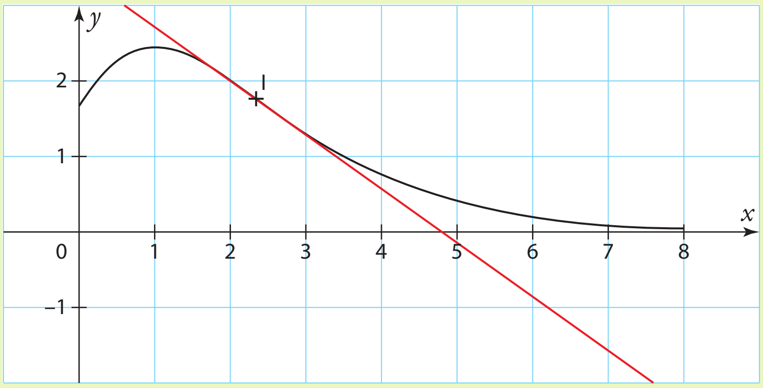
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Lire les intervalles où f est convexe ou concave sur sa représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur $[0 ; 8]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.



Solution

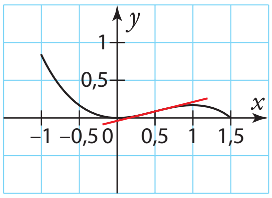
Sur $[0 ; 2{,}4]$, la courbe de f est au-dessus de ses sécantes donc f est concave sur cet intervalle.
De même sur $[2{,}4 ; 8]$, la courbe de f est en dessous de ses sécantes donc f est convexe sur cet intervalle. 1

Conseils & Méthodes

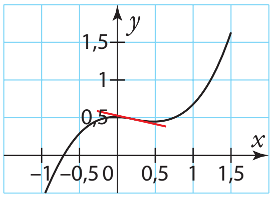
1 Repérer la position des sécantes par rapport à la courbe. Si elles ne sont pas apparentes, se servir d'une règle et la déplacer le long de la courbe.

À vous de jouer !

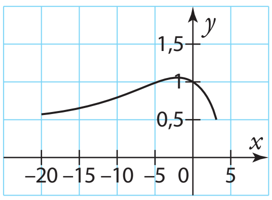
1 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



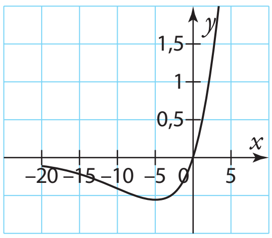
2 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



3 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



4 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



Exercices 31 à 34 p. 82

Cours

2 Fonction convexe et dérivées première et seconde

Théorème — Fonction convexe, fonction concave

Soit I un intervalle réel.

Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- ***f* est convexe sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est croissante.**
- ***f* est concave sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est décroissante.**

Exemple

Soit *f* la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a dressé le tableau de variations de la fonction f'.

Alors *f* est concave sur $]-\infty\,;3]$ et convexe sur $[3\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de f'	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Propriété — Dérivée première de fonctions usuelles

Soit u la fonction dérivable sur I, alors u^2 et e^u sont deux fonctions dérivables sur I, et :

$$[u^2]' = 2u'u$$

$$\text{et } e^u = u'e^u.$$

Exemples

① $(2x^3 - x^3 + 3x - 2)^2)' = 2(6x^2 - 2x + 3)(2x^3 - x^2 + 3x - 2)$

② $(e^{5x^4})' = 20x^3e^{5x^4}$ ③ $(e^{5x^7})' = e^{5x-7}$

Définition — Dérivée seconde

Soit *f* une fonction supposée deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.
On appelle dérivée seconde de la fonction *f*, notée f'', la dérivée de f'.

Exemple

Soit *f* la fonction définie (et dérivable deux fois) sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$.

Alors $f'(x) = 3x^2 + 4 \times (2x) + 5 = 3x^2 + 8x + 5$ et $f''(x) = 6x + 8$.

Remarques

① La dérivée seconde d'une fonction affine est toujours nulle.

② La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, donc à sa dérivée seconde également.

Théorème — Convexité et dérivée seconde

Soit *f* une fonction supposée deux fois dérivable et f' sa fonction dérivée.

- ***f* est convexe sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' est positive.**
- ***f* est concave sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' est négative.**

Démonstration

f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Donc *f* est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Énoncé

Soit f une fonction deux fois dérivables et f' sa dérivée dont on donne le tableau de variations ci-contre.

1. Déterminer les intervalles pour lesquels f est convexe puis ceux pour lesquels f est concave.

2. En déduire le signe de la fonction f'', dérivée seconde de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Variations de f'		↗	88	↘	-162	↗	

Solution

1. f' est décroissante sur $[-2 ; 3]$ donc f est concave sur cet intervalle. De même f' est croissante sur $]-\infty ; -2]\cup[3 ; +\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle. 1

2. $f''(x) \leqslant 0$ sur $[-2 ; 3]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; -2]\cup[3 ; +\infty[$. 2

Conseils & Méthodes

1 Identifier si le tableau concerne f, f' ou f'' pour adopter la bonne stratégie.

2 f' est croissante ssi f'' est positive.

À vous de jouer !

5 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f'		↘	0	↗	$\frac{1}{6}$	↘	

6 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		↘	$-\frac{1}{8}$	↗	

↪ Exercices 35 à 41 p. 82

Méthode 3 Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1$.

Déterminer le (ou les) intervalle(s) où f est convexe, puis celui (ou ceux) où f est concave.

Solution

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = x^2 - 3x + 2$ et $f''(x) = 2x - 3$. 1

2. 2

- $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$ donc f est convexe sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$. 3
- $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ donc f est concave sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$. 3

Conseils & Méthodes

1 Calculer $f''(x)$.

2 Déterminer son signe.

3 En déduire la convexité de f.

À vous de jouer !

7 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

8 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\sqrt{x}-3e^{x+2}$.

↪ Exercices 42 à 46 p. 82

Cours

3 Tangente et point d'inflexion

Propriété **Dérivée seconde et tangente**

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f''.
Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c03-04

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)$

Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :

si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.

si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.

De plus, $\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0) = 0$.

On obtient le tableau de variations.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ autrement dit, la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Conclusion : si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Remarques

① Si f'' est négative sur I, alors la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes.

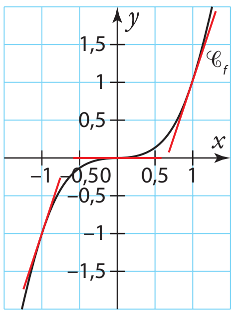
② Attention à la réciproque, une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivables.

Définition **Point d'inflexion**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur cet intervalle dans un repère orthonormé.
Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.

Exemple

Soit f la fonction cube et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Alors l'origine du repère O(0 ; 0) est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$. En revanche les tangentes en -1 et en 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées (-1 ; $f(-1)$) et (1 ; $f(1)$) ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriété **Point d'inflexion**

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut que f'' change de signe donc que f' change de variation.

Exemple

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 0$.

Il y a changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité, il y a donc en O(0 ; 0) un point d'inflexion.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

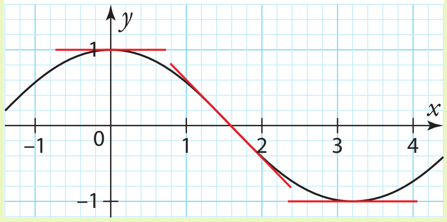
Méthode 4 Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur $[-1{,}4\,;\,4{,}45]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. **Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.**

2. **En déduire le (ou les) point(s) d'inflexion éventuel(s).**



Solution

1. Sur $[-1{,}4\,;\,1{,}6]$, la courbe est en dessous de ses tangentes : f est concave.

Sur $[1{,}6\,;\,4{,}45]$, la courbe est au-dessus de ses tangentes : f est convexe. **1**

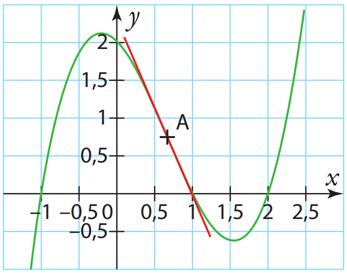
2. La courbe change de convexité pour $x = 1{,}6$ (la tangente traverse la courbe en ce point) et $f(1{,}6) = 0$. Donc le point d'inflexion de la courbe a pour coordonnées $(1{,}6\,;\,0)$.

Conseils & Méthodes

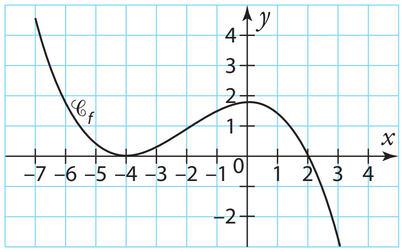
1 Repérer la position des tangentes par rapport à la courbe. Si elles ne sont pas apparentes, se servir d'une règle et la déplacer le long de la courbe.

À vous de jouer !

9 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



10 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



↪ Exercices 47 à 49 p. 83

Méthode 5 Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$. Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) éventuel(s) de la courbe représentative de la fonction f notée $\mathscr{C}_f$.

Solution

Par calcul, on trouve $f'(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$
et $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x = (x - 1)(x - 3)e^x$. **1**

En étudiant le signe de $f''(x)$, on trouve que les points d'inflexion sont atteints pour $x = 1$ et $x = 3$. **2**

Comme $f(1) = 10e$ et $f(3) = 2e^3$, les coordonnées des points d'inflexion sont $(1\,;\,10e)$ et $(3\,;\,2e^3)$.

Conseils & Méthodes

1 Dériver deux fois la fonction puis étudier le signe de la dérivée seconde.

2 Le point d'inflexion se trouve au moment d'un changement de signe pour f''.

À vous de jouer !

11 Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.
Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

↪ Exercices 50 à 54 p. 83

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 6 — Reconnaître une fonction convexe, concave, un point d'inflexion, sur une représentation graphique

↪ Cours 1 p. 72 et 3 p. 76

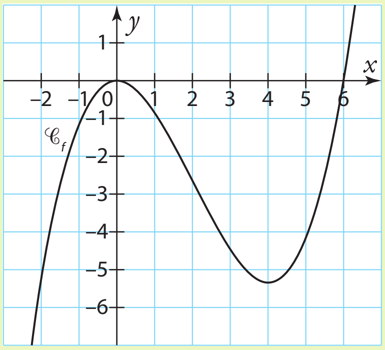
Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-contre.
Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels f est convexe,

b) les intervalles sur lesquels f est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.



Solution

Méthode par les sécantes :

• Placer un point A sur la courbe puis un point B « proche de A » sur la courbe.

• Faire varier la position de B jusqu'à ce que le segment [AB] traverse la courbe.

• Faire varier le point A jusqu'à trouver une position pour laquelle, quelle que soit la sécante [AB] partant de A, la corde [AB] ne traverse plus $\mathscr{C}_f$. 1

Méthode par les tangentes :

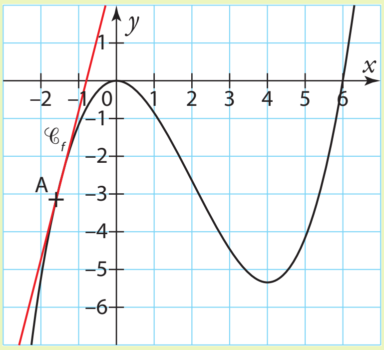
• Placer un point A sur la courbe et à l'aide d'une règle, tracer la tangente T_A à $\mathscr{C}_f$ au point A.

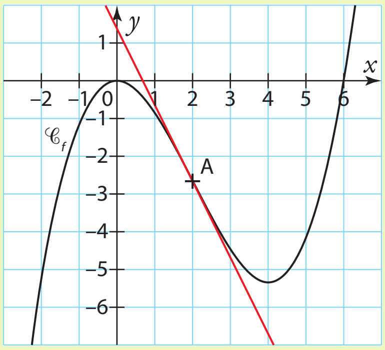
• Faire varier la position de A jusqu'à ce que la tangente T_A traverse la courbe. 2

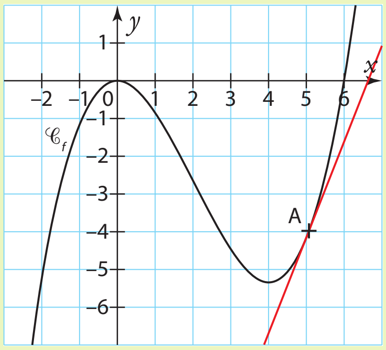
Conseils & Méthodes

1 La méthode par les sécantes est beaucoup plus longue que celle par les tangentes et demande de faire varier deux paramètres : les positions de A et de B.

2 Placer la règle « le long de la courbe » pour obtenir une bonne approximation de la tangente.







Graphiquement, on observe que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes sur $]-\infty\,;2]$ puis au-dessus de ses tangentes sur $[2\,;+\infty[$.
Donc : **a)** f est convexe sur $[2\,;+\infty[$, **b)** f est concave sur $]-\infty\,;2]$, **c)** $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x = 2$.

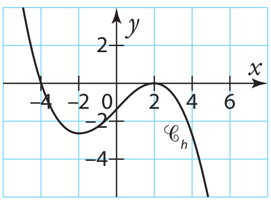
À vous de jouer !

13 Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels h est convexe,

b) les intervalles sur lesquels h est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_h$.

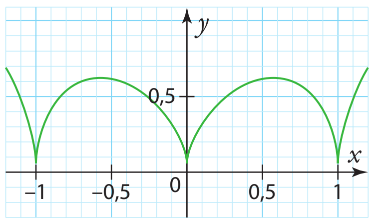


14 Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels g est convexe,

b) les intervalles sur lesquels g est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.



↪ Exercices 55 à 56 p. 84

Exercices résolus

Méthode 7 Étudier la convexité d'une fonction

↪ Cours 2 p. 74 et 3 p. 76

Énoncé

Dans une usine, on modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, d'un objet par la fonction convexe C_T définie sur [0 ; 18[par $C_T(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,2x}$ où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines.

On admet que C_T est dérivable sur [0 ; 18[et on note C_T' sa dérivée.

1. Quel est le coût total de production pour 500 objets ?

2. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C_M dérivée de la fonction C_T autrement dit $C_M(x) = C_T'(x)$.

a) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

b) Calculer le coût marginal pour une production de 500 objets puis de 1500 objets. On arrondira les résultats à l'euro.

3. Soit C_M' la fonction dérivée de C_M. On a donc $C_M' = C_T''$.

a) Exprimer $C_M'(x)$ en fonction de x puis étudier son signe sur [0 ; 18[.

b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle [0 ; 10] » ?

c) Que pensez-vous de l'affirmation : « il y a accélération du coût total de production sur [0 ; 10] » ?

D'après Bac ES Polynésie 2014 et ES Liban 2015.

Solution

1. $f(5) = 25\mathrm{e}^{-1} \approx 9{,}20$ milliers d'euros. 1

2. **a)** $C_M(x) = C_T'(x) = 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x(-0{,}2)\mathrm{e}^{-0,2x} = \mathrm{e}^{-0,2x}(5-x)$

b) $C_M(5) = \mathrm{e}^{-0,2\times 5}(5-5) = 0$
et $C_M(15) = \mathrm{e}^{-0,2\times 15}(5-15) = -10^{\mathrm{e}-3} \approx 0{,}498 \approx 498$ euros. 1

3. **a)** $C_M'(x) = -0{,}2\mathrm{e}^{-0,2x}(5-x) + \mathrm{e}^{-0,2x}(-1) = -\mathrm{e}^{-0,2x}(1-0{,}2x+1)$ 2
$= -\mathrm{e}^{-0,2x}(2-0{,}2x) = \mathrm{e}^{-0,2x}(0{,}2x-2)$.

Pour tout $x \in [0\,;18[$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$. De plus $0{,}2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{2}{0{,}2} = 10$.

Donc $C_M'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 10$ et $C'_M(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 10$.

b) La dérivée du coût marginal étant négative sur [0 ; 10] alors le coût marginal est décroissant sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 3

c) La dérivée du coût marginal est négative sur [0 ; 10] et correspond à la dérivée seconde du coût total de production. Donc il y a décélération du coût total de production sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 4

Conseils & Méthodes

1. Faire attention aux unités de x et de $f(x)$.
2. Pour factoriser, souligner les facteurs communs.
3. Faire le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.
4. Faire le lien entre fonction, dérivée et dérivée seconde et leurs interprétations.

À vous de jouer !

15 On modélise le rythme de croissance d'un PIB (en milliard) par la dérivée de la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020.
Déterminer le moment où la croissance commence à ralentir.

16 On modélise la vitesse de production d'un objet par la dérivée de la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020.
Déterminer le moment où la vitesse diminue.

↪ Exercices 57 à 72 p. 84

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c03-04

La propriété à démontrer

Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

On souhaite démontrer cette propriété en utilisant une fonction ϕ qui représenterait l'écart entre la courbe et la tangente en x_0.

Comprendre avant de rédiger

Que peut-on conclure du fait que f'' soit positive ? → f'' est positive si et seulement si f est croissante.
Quelle est l'équation d'une tangente au point x_0 ? → $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Comment traduire mathématiquement l'expression « la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes » ?
→ Cela revient à dire que $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Pour montrer une inégalité telle que $A \geqslant B$, il faut montrer que le signe de la différence $A - B$ est positif.

Rédiger

La démonstration rédigée

Étape 1 Noter les éléments de l'énoncé et les hypothèses faites au départ.
→ Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde. On admet que f'' est positive sur un intervalle I.

Étape 2 Étudier le signe de la différence entre l'équation de la courbe et celle de la tangente en x_0 : $f(x) - y$.
→ Soit ϕ la fonction définie sur I par :
$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$
$\quad = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$.

Étape 3 Repérer les éléments constants et ceux qui dépendent de x.
→ Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :
$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Étape 4 Rappeler le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. En déduire le signe de $\phi'(x)$.
→ Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :
si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.
si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.

Étape 5 Évaluer ϕ en son minimum x_0.
→ De plus, $\phi(x_0) = f(x0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$.

Étape 6 Créer un tableau de variations de ϕ pour avoir le valeur de son minimum.
→

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	↘	0	↗

Étape 7 Avec le signe de $\phi(x)$ on déduit l'inégalité.
→ Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Étape 8 Rédiger une conclusion.
→ Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Pour s'entraîner

Montrer que si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

17 Dérivée seconde

1. Dériver deux fois la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x+2}.$$

2. Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1).$$

18 Dérivée seconde d'une racine

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{7}\,;+\infty\right[$ par :

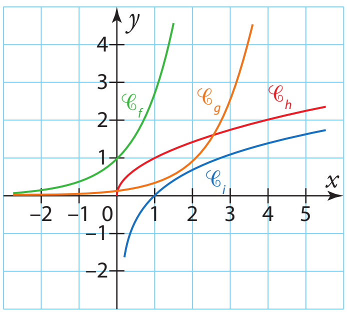
$$(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-1}}.$$

2. Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

19 Convexité (1)

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives de fonctions convexes ?



20 Somme de deux fonctions convexes

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
La somme de deux fonctions convexes est convexe.	☐	☐

21 Convexité (2)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Si f est convexe alors $-f$ est concave.	☐	☐

22 Fonctions

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Les fonctions affines sont des fonctions convexes et concaves.	☐	☐

23 Exemples de fonctions convexes et concaves

Donner un exemple de fonction convexe et un exemple de fonction concave.

24 Exemple de point d'inflexion

Donner un exemple de courbe présentant un point d'inflexion.

25 Cube

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto x^3 + 2$ est :

a croissante sur $]-\infty\,;0]$.
b décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
c convexe sur $]-\infty\,;0]$.
d concave sur $]-\infty\,;0]$.

26 Racine carrée

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est :

a croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
c convexe sur $[0\,;+\infty[$.
d concave sur $[0\,;+\infty[$.

27 Puissance

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto -2x^5$ est :

a croissante sur $]0\,;+\infty[$.
b décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
c convexe sur $]0\,;+\infty[$.
d concave sur $]0\,;+\infty[$.

28 Point d'inflexion

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-2)^3$ admet un point d'inflexion pour :

a $x = 2$.
b $x = -2$.
c $x = 0$.
d $x = 1$.

29 Graphiquement

Méthode Comment faire pour déterminer graphiquement la convexité d'une fonction ? ses points d'inflexion ?

30 Algébriquement

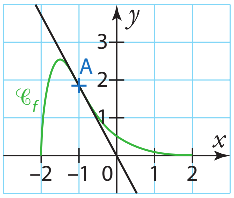
Méthode Comment faire pour déterminer algébriquement la convexité d'une fonction ? ses points d'inflexion ?

Exercices d'application

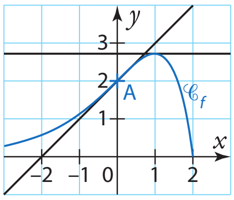
Lire les intervalles où f est convexe ou concave

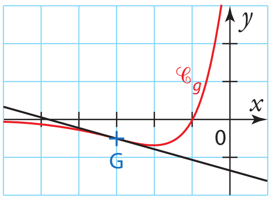
Méthode 1 p. 73

31 Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

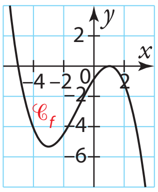


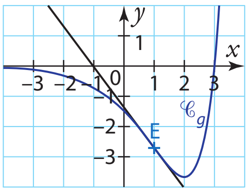
32 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.



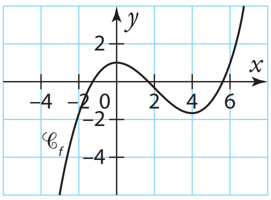


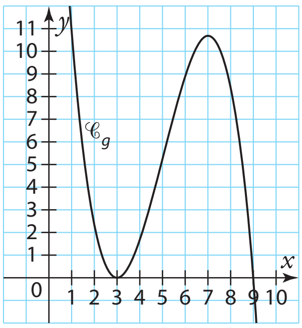
33 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.





34 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.





Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Méthode 2 p. 75

35 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de variations de f' ci-dessous.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

36 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f'		↘	-1	↗	

1. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
2. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

37 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

x	$-\infty$		$2-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$2+\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$

38 On assimile le rythme de croissance d'une production, où x est le nombre d'objets produits par heure, à la dérivée de f définie par $f(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2\,400x + 8\,000$
1. Montrer que $f'(x) = -24(x - 10)^2$.
2. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
3. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

39 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = (3x - 7)^2$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(x) = \sqrt{-2x + 7}$ sur $\mathbb{R}_-$
c) $f(x) = e^{7x-2}$ sur $\mathbb{R}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{(-x+2)^2}$ sur $]-\infty\,; 2]$

40 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = (5x^2 - 4x + 2)^2$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x-2}\right)^2$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\,; +\infty\right[$
c) $f(x) = (4 - x^2)^2$ sur $\mathbb{R}$
d) $f(x) = e^{5x^2 - 4x + 2}$ sur $\mathbb{R}$
e) $f(x) = e^{\frac{1}{3x-2}}$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\,; +\infty\right[$
f) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$

41 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = 4x + 5 + e^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(x) = \dfrac{(x^3+1)^2}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
c) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
d) $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Méthode 3 p. 75

42 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 6x^2$. Montrer que $f''(x) = 6x + 12$. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

43 Soit la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$. Montrer que $f''(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

44 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par :

$$f(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

2. En déduire la convexité de f.

45 Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Le tableau ci-dessous présente le signe de f''.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Sur quel(s) intervalle(s) f'' est-elle positive ? Négative ?

2. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

46 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\sqrt{x}.$$

1. On admet que f est deux fois dérivables et on note f'' sa dérivée seconde. Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de $f''(x)$.

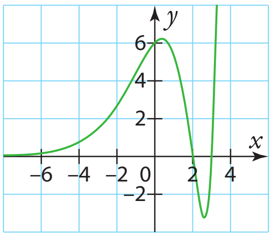
2. a) Déduire de la question précédente que f est concave.

b) Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

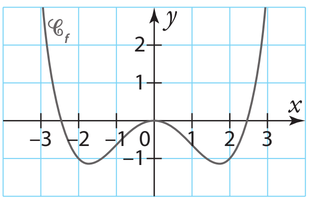
Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

Méthode 4 p. 77

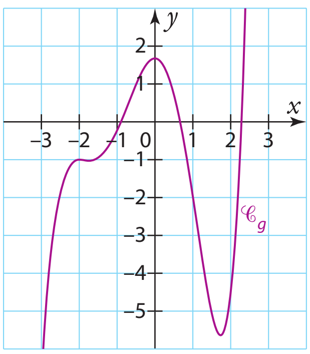
47 On considère la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



48 On considère la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



49 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Méthode 5 p. 77

50 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=6+(6-x)*exp(x-5) ;`
	`x ->6+(6-x)*exp(x-5)`
2	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`(-x+4)*exp(x-5)`

À l'aide de cet affichage :

1. Dresser le tableau de signes de $f''(x)$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

51 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7xe^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. Calculer $f''(x)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

52 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. Calculer $f''(x)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

53 On considère les fonctions f et g définies et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 7x + 8)e^{-x}, \text{ et } g(x) = \sqrt{x^3 + 2}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ et en déduire les variations de f et de g.

2. a) Calculer $f''(x)$ et $g''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et de $g''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion des courbes représentatives des fonctions f et g.

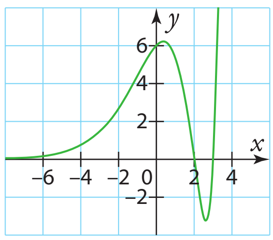
54 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1.$$

1. Calculer $f''(x)$.

2. Montrer que :
$f''(x) = 20(x-1)(x+2)(x+4)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

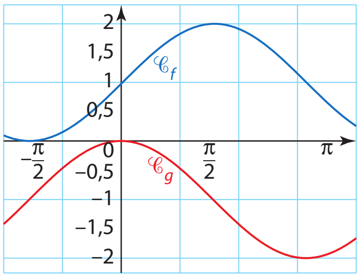


Exercices d'entraînement

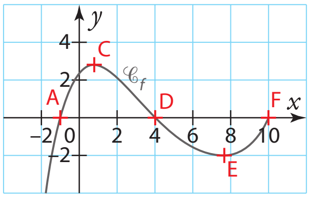
Reconnaître une fonction convexe, concave, un point d'inflexion sur une représentation graphique

Méthode 6 p. 78

55 Pour chacune des courbes suivantes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, déterminer les intervalles où la fonction est convexe et ceux où elle est concave.



56 Soit f une fonction définie sur $[-1{,}8\,;10]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Sur quel intervalle la fonction semble convexe ? Concave ?

2. En déduire le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Étudier la convexité de f à partir de f''

Méthode 7 p. 79

57 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $[-5\,;7]$ définie par :

$$f(x) = (x - 2{,}5)e^{0{,}4x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = 0{,}4xe^{0{,}4x}$.

2. En déduire que $f''(x) = \frac{2}{25}(2x+5)e^{0{,}4x}$.

3. Étudier la convexité de f sur $[-5\,;7]$.

58 On considère la fonction g deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

1. Calculer $g''(x)$.

2. En déduire la concavité de g sur $]0\,;+\infty[$.

59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{3}{e^x - 3}.$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$.

2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion, s'il existe, de $\mathscr{C}_f$.

60 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 5xe^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = 5(x-2)e^{-x}$.

2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est concave.

61 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par :

$$f(x) = x + (8x^2 + 52x + 88)e^{(-0{,}5x)}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

1	`f(x) :=x+(8*x^2+52*x+88)*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$

	`// Interprète f`
	`// Succès`
	`// lors de la compilation f`

	`x ->x+(8*x²+52*x+88)*exp` $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)*x\right)$
2	`simplifier(deriver(f(x),x))`
	`-4*x²*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `-10*x*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `+8*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `+1`
3	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`(x+2)*(2*x-7)*exp` $\left(-\frac{x}{2}\right)$

1. Retrouver par le calcul les résultats affichés par le logiciel.

2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

62 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2(x+2)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = -2xe^{-x}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

63 On considère la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = xe^x.$$

1. Montrer que $g''(x) = (x+2)e^x$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

64 On considère la fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

1. Montrer que $h''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2-1)}(x^2-1)}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$, s'ils existent.

65 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 11x^2 + 24x - 26)e^x.$$

Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. S'ils existent, en déduire les coordonnées des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

66 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 4\sqrt{x} + 3x.$$

1. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g n'admet pas de point d'inflexion.

67 On donne le tableau de variations de f', fonction dérivée d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;\,1]$.

x	-3		-2		0		1
Variations de f'	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

68 On donne ci-dessous le tableau de signes de f'', fonction dérivée seconde d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

69 Étudier, selon les valeurs de m, la convexité de la fonction f définie par $f(x) = e^{mx}$.

70 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

```
1  f(x) :=x+exp(-x+1)
            x ->x+*exp(-x+1)
2  deriver(f(x),x)
            -exp(-x+1)+1
3  (deriver(deriver(f(x),x),x))
            exp(-x+1)
```

1. En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

71 On considère la fonction g définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

```
1  g(x) :=sqrt(x)-1/x ;
```

$$x \to \sqrt{x}-\frac{1}{x}$$

```
2  factoriser(deriver(deriver(g(x),x),x))
```

$$\frac{-8*\sqrt{x}-x^2}{4*x^3*(\sqrt{x})}$$

1. En déduire que g est concave sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

72

Pour déterminer le lieu de vitesse maximale de la montagne russe, on modélise la portion du trajet la plus inclinée des montagnes russes. Soit x l'abscisse d'un wagon, alors la portion du trajet la plus inclinée est la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,27]$ dont la dérivée est égale à :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\left(x-\frac{27}{2}\right)\right)^2+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne l'affichage ci-dessous.

```
1  f(x):=156/10+15*atan(-sqrt(3)/15*(x-135/10))
   // Interprète f
   // Succès
   // lors de la compilation f
```

$$x \to \frac{156}{10}+15*\mathrm{atan}\left(\frac{-(\sqrt{3})}{15}*\left(x-\frac{135}{10}\right)\right)$$

```
2  (deriver(f(x),x))
```

$$-\frac{\sqrt{3}}{\left((\sqrt{3})*\frac{1}{15}*\left(x-\frac{27}{2}\right)\right)^2+1}$$

```
3  factoriser(deriver(deriver(f(x),x)))
```

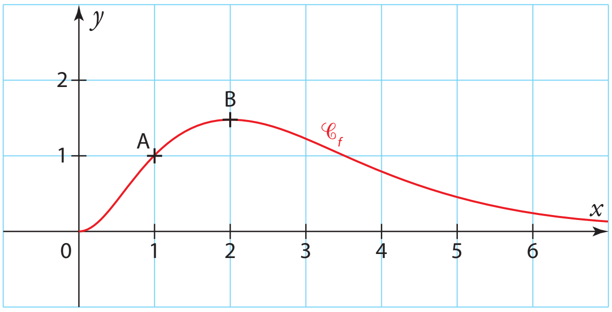
$$\frac{1200*(\sqrt{3})*(2*x-27)}{(4*x^2-108*x+1029)^2}$$

1. À l'aide de cet affichage, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
3. Quelle est la valeur de la pente en ce point d'inflexion ? Montrer que cette valeur correspond à un angle de 60 °.
4. Conclure quant à l'endroit où la vitesse est maximale au niveau de ce trajet.

Exercices bilan

73 Composition de fonctions et limites

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On admet que $\mathscr{C}_f$ passe par les points O(0 ; 0), A(1 ; 1) et $B\left(2 ; \frac{4}{e}\right)$ et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



A ▶ Analyse de *f*

1. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.

2. On admet que $f(x) = x^2 e^{-x+1}$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

3. a) Calculer $f''(x)$.

b) En déduire l'étude de la convexité de f.

c) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

B ▶ En utilisant la fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{-f(x)}$.

1. Calculer $g'(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de g.

3. Montrer que :

$$g''(x) = -2e^{-f(x)-x+1}(x^2 - x + 1).$$

4. En déduire la concavité de g et ses éventuels points d'inflexion.

C ▶ Avec la racine carrée

On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)}.$$

1. Calculer $h'(x)$.

2. En déduire le tableau de variations de h.

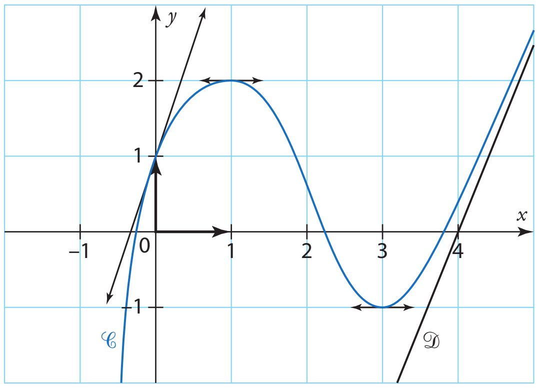
3. Calculer $h''(x)$.

4. En déduire les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

D'après Bac ES Métropole-La Réunion sept 2006

74 Exponentielle de fonctions

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ dont la courbe est donnée dans le graphe ci-dessous.



1. a) Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

b) Donner les intervalles où f semble concave et ceux où f semble convexe.

c) Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de f.

2. On note g la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

b) Étudier les variations de g sur $]-1 ; +\infty[$ et en dresser le tableau de variations.

c) Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.

D'après Bac ES Liban 2006

75 Convexité d'une fonction

Thème 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}.$$

b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. a) Soit T_a tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation de T_a en fonction de a.

b) Retrouver le résultat de la question **2**.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x - f(x).$$

a) Montrer que $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$.

b) On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 1]$.

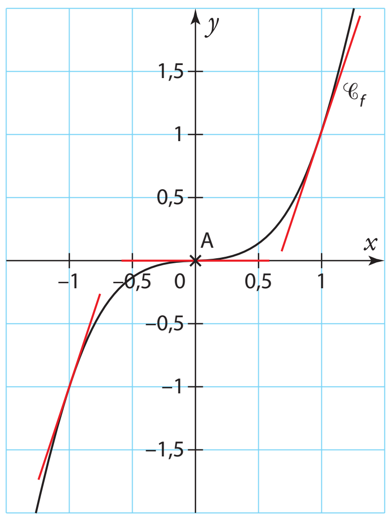
Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1 ; 1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur $[-1 ; 1]$.

c) Conclure que $\mathscr{C}_h$ est une courbe de Lorentz.

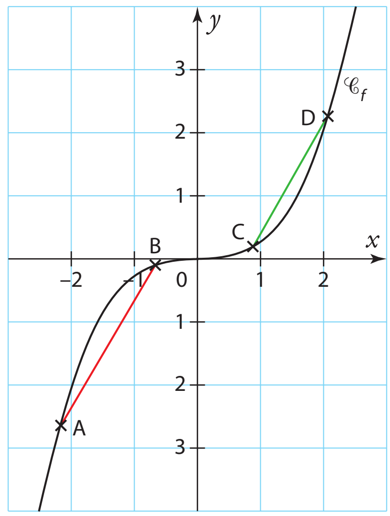
D'après Bac Centres Étrangers 2014

Convexité et concavité

- f est **convexe** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' **est positive**.
- f est **concave** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' **est négative**.



- f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.
- f est **concave** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.



Preuve de la convexité d'une fonction

La preuve peut être faite par :

- les sécantes,
- les tangentes,
- la croissance de la dérivée,
- la positivité de la dérivée seconde.

Point d'inflexion

On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.

Préparer le BAC Je me teste

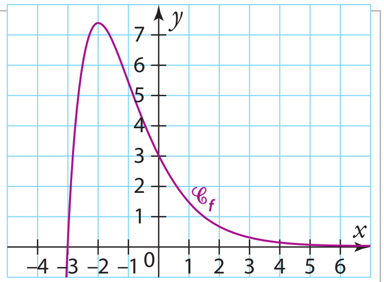
Je dois être capable de...

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion	Méthode 1, 4, 6	1, 2, 57, 58, 31, 32, 9, 10, 47, 48, 13, 14, 55, 56
▶ Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivables sur un intervalle	Méthode 2, 3, 5, 7	5, 6, 35, 36, 7, 8, 42, 43, 11, 12, 50, 51, 15, 16

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-c03-06

QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 76 à 80, on considère la fonction f définie sur $[-4\,;+\infty[$ dont voici la courbe représentative dans un repère.



	A	B	C	D
76 Sur $[-4\,;-1]$, $\mathscr{C}_f$ est :	au-dessus de ses tangentes.	au-dessus de ses sécantes.	en-dessous de ses tangentes.	en-dessous de ses sécantes.
77 $f'(-1)$ est :	égal à 5,5.	positif.	égal à 0.	négatif.
78 $f''(-1)$ est égal à :	1.	e^3.	$3e^3$.	0.
79 On pose $h(x)=\sqrt{-f(x)+10}$. Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, h est :	convexe.	concave.	ni convexe ni concave.	convexe et concave.
80 Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $g(x)=e^{f(x)}$ est :	convexe.	concave.	ni convexe ni concave.	convexe et concave.

Pour les exercices 81 à 85, on considère la fonction f deux fois dérivables sur $[-10\,;10]$ par : $f(x)=1+(x-5)e^{0,2x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

	A	B	C	D
81 La dérivée f'' est définie par :	$\dfrac{(x+5)e^{0,2x}}{25}$.	$\dfrac{xe^{0,2x}}{5}$.	$(x-5)e^{0,2x}$.	0.
82 Alors f' est :	décroissante sur $[-5\,;0]$.	décroissante sur $[-10\,;0]$.	croissante sur $[-10\,;5]$.	croissante sur $[-5\,;5]$.
83 Alors f est :	concave sur $[-5\,;0]$.	concave sur $[-10\,;0]$.	convexe sur $[-10\,;5]$.	convexe sur $[-5\,;5]$.
84 Sur $[0\,;5]$, on peut affirmer que $\mathscr{C}_f$ est située :	au-dessus de ses tangents.	au-dessus de ses sécantes.	en dessous de ses tangentes.	en dessous de ses sécantes.
85 $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour x égal à :	5.	0.	10.	–5.

86 Concavité

On considère la fonction g dont la dérivée g' est telle que $g'(x) = \frac{1}{x} + 3$. On admet que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est deux fois dérivable de dérivée seconde g''.

1. Déterminer l'ensemble I des valeurs de x pour lesquelles g' est définie.

2. Exprimer $g''(x)$ en fonction de x. Donner le signe de $g''(x)$.

3. En déduire la concavité de g sur I.

Méthode 3 p. 75

87 Convexité

On considère la fonction f définie par $f(x) = (-x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{-x+1}}$. On appellera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On admet que f est deux fois dérivable de dérivée seconde f''.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f.

2. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{(-x+1)^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{-x+1}}$ et étudier son signe.

3. Étudier la convexité de f sur D_f.

Méthode 3 p. 75

88 Étudier une fonction

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil.

On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par $f(x) = 70 + (14x+42)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;60]$, $f'(x) = \frac{1}{5}(-14x+28)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;60]$.

3. Un logiciel de calcul formel affiche la ligne suivante.

```
1  factoriser(deriver(deriver(70+(14x+42)
   *exp(-x/5))))
```

$$\frac{14*(x-7)*\exp\left(-\frac{x}{5}\right)}{25}$$

a) Déterminer $f''(7)$. Que représente le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 pour $\mathscr{C}_f$?

b) Etudier la convexité de f.

c) En déduire l'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extrema.

Coup de pouce Étudier le signe de la dérivée seconde.

Méthode 2, Méthode 3 p. 75 Méthode 5 p. 77 et Méthode 7 p. 79

D'après BAC ES Métropole La Réunion juin 2019

89 Déterminer les coordonnées des points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2+5)\mathrm{e}^x$$

1. Montrer que $f''(x) = -(5x^2+20x+5)\mathrm{e}^x$.

2. Étudier le signe du polynôme $5x^2+20x+5$ puis celui de $f''(x)$.

3. En déduire les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

4. Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question précédente.

Méthode 3 p. 75 Méthode 5 p. 77

D'après Bac ES Nouvelle-Calédonie novembre 2019

90 Étudier la convexité de deux fonctions

On considère la fonction g définie par :

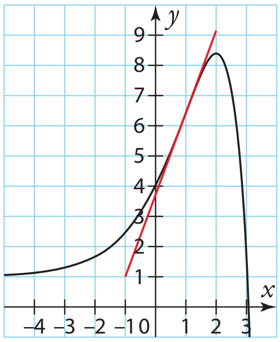
$$g(x) = (3-x)\mathrm{e}^x + 1.$$

On appellera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé. On admet que g est deux fois dérivable de dérivée seconde g''.

A ▸ Lecture graphique

1. À l'aide du graphique ci-contre, déterminer les intervalles où g est convexe, et ceux où g est concave.

2. Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



B ▸ Analyse

1. Montrer que $g'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ et $g''(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.

2. a) Étudier le signe de $g''(x)$ et en déduire la convexité ou la concavité de g sur cet intervalle.

b) Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3. Donner l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a = 1$.

4. Soit h la fonction définie par $h(x) = (\mathrm{e}x + \mathrm{e} + 1) - g(x)$.

a) Montrer que $h'(x) = \mathrm{e} - (2-x)\mathrm{e}^x = (x-2)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}$ puis que $h''(x) = -g''(x)$.

b) En déduire que h' est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

c) Calculer $h'(1)$, en déduire que $h'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) Calculer $h(1)$. En déduire le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

f) Retrouver le résultat de la question **B 2.**.

Méthode 6 p. 78 Méthode 7 p. 79

D'après BAC ES Nouvelle-Calédonie mars 2014

4

Fonction logarithme népérien

Pour rendre compte de la perception humaine des sons, une échelle des décibels est utilisée : l'intensité allant de 0 dB, seuil de l'audition humaine, à environ 120 dB, limite supérieure des bruits usuels. Il s'agit d'une échelle logarithmique.

Pourquoi les voix de quatre chanteurs enrichissent-elles l'harmonie sans quadrupler l'intensité sonore ?

↪ Exercices 65 p. 107

VIDEO WEB
Intensité sonore
lienmini.fr/maths-c04-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c04-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{-4x} \times e^{2x}$ **b)** $\dfrac{e^{x}}{e^{-2x}}$

c) $\dfrac{(e^{2x})^3}{e^{x+1}}$ **d)** $\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x}}$

2 Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$?

2. Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $e^x = 0$ **b)** $e^x = 1$

c) $e^x = e$ **d)** $e^x = \dfrac{1}{e}$

3 Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{3x+1} \times e^{x} = 1$ **b)** $\dfrac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e$ **c)** $e^{5x+1} = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $e^{-x} \leqslant e$ **b)** $e^{x+1} > e^{3-2x}$ **c)** $\dfrac{1}{e^{2x}} < e^{x-3}$

4 Calculer des fonctions dérivées

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = e^{-5x+3}$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3xe^{x}$; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{e^{x} - 1}$; $I = \mathbb{R}_{-}^{*}$

5 Savoir déterminer une équation de tangente

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe en a.

a) $f : x \mapsto (x - 1)e^{x} - 3$ en $a = 1$

b) $f : x \mapsto e^{5x} + 2x - 1$ en $a = 0$

6 Déterminer des réels vérifiant des conditions

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant les conditions données.

a) $2x - 1 > 0$ et $-3x + 5 > 0$

b) $1 - x > 0$ et $x^2 + 3x - 4 < 0$

Activités

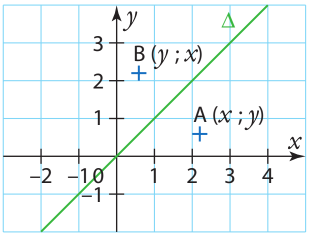
TICE 35 min

1 Approcher graphiquement une nouvelle fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A ▸ Transformation du plan

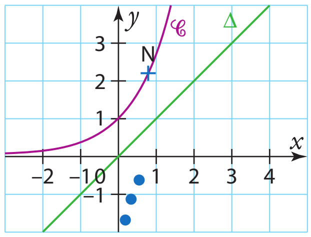
1. On considère le graphique ci-dessous.



Quelle conjecture peut-on faire quant aux points A et B de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(y\,;x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$?

2. Démontrer la conjecture.

B ▸ Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle et y placer un point N.

2. Construire le symétrique N′ de N par rapport à la droite Δ.
Activer la trace de N′ et déplacer le point N.

3. Afficher la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction ln, en saisissant $y = \ln(x)$.

L'ensemble des points N′ constitue la courbe représentative de la fonction logarithme népérien notée ln, fonction réciproque de la fonction exponentielle.

C ▸ Conséquences et conjectures

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (↪ chapitre 2), on peut démontrer que l'équation $e^x = k$ admet une unique solution s dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On admet que $s = \ln(k)$.

1. En s'appuyant sur cette notion de fonction réciproque entre $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ et les caractéristiques des coordonnées des points appartenant à ces courbes (*cf.* partie **A**), en déduire les valeurs de $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

2. Que peut-on en déduire quant à $e^{\ln(x)}$ et $\ln(e^x)$?

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ?

4. Conjecturer pour la fonction logarithme népérien :

a) les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) le sens de variation.

c) le signe de la fonction.

5. a) Reprendre la construction effectuée sur le logiciel de géométrie dynamique et y tracer la tangente au point N′ à la courbe $\mathscr{C}'$. Afficher la valeur de son coefficient directeur.
b) Après avoir déplacé plusieurs fois le point N, émettre une conjecture quant au lien qui semble exister entre l'abscisse du point N′ et le coefficient directeur.

6. Quelle conjecture peut-on émettre sur la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$?

↪ Cours 1 p. 94

2 Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVI^e siècle : les logarithmes

C'est avec John Napier, dit **Neper** (1550-1617), qu'apparaissent les logarithmes à la fin du XVI^e siècle. Ce mathématicien et astronome écossais a cherché à faciliter les calculs qui pouvaient devenir longs et pénibles liés à l'astronomie, la navigation… en mettant au point une correspondance entre les termes d'une suite géométrique $(1 ; a ; a^2 ;\ldots ; a^p ; \ldots ; a^q ; \ldots)$ et ceux d'une suite arithmétique $(0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; p ; \ldots ; q ; \ldots)$ à l'aide de la formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$.
Il met alors au point une table numérique à deux colonnes, appelée **table des logarithmes**.

Principe : Tout produit de deux nombres m et n de la première colonne est associé à l'addition de deux autres nombres x et y de la deuxième colonne.

m	x
n	y
$m \times n$	$x + y$

3^{-1}	
0,2	
1	
1,5	
2	**0,6931**
3	**1,0986**
4	1,3863
5	**1,6094**
6	**1,7918**
7	1,9459
8	
9	2,1972
10	**2,3026**
11	2,3979
12	
16	2,7726
27	3,2958
81	4,3944
91	4,5109
2 455	7,8059
2 456	7,8063
2 457	7,8067
2 458	7,8071
3^{10}	

Les questions suivantes utilisent l'extrait ci-contre d'une table de logarithmes (les nombres de la colonne de droite sont arrondis au dix-millième près).

1. a) En prenant $m = 2$ et $n = 3$, peut-on constater que cette table vérifie le principe mentionné ci-dessus ?

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 8 ? de 12 ?

c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

d) Sans effectuer la multiplication 27×91, comment obtenir le résultat à l'aide de cette table ?

2. a) En remarquant que $10 \div 5 = 2$, quel calcul doit-on effectuer avec les nombres de la colonne de droite respectivement associés aux nombres 10 et 5 afin de retrouver celui qui est associé au nombre 2 ?
Vérifier cette conjecture sur d'autres nombres.

b) En déduire le nombre à inscrire en face de 0,2, puis en face de 1,5.

3. a) Dans la colonne de gauche, 3 ; 9 ; 27 ; 81 représentent les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.
Quelle semble être la nature de la suite dont les premiers termes sont les nombres correspondants dans la colonne de droite ?

b) En déduire les nombres à écrire en face de 3^{-1} et 3^{10}.

4. Pour la suite des questions, on notera a les nombres de la colonne de gauche et $\ln(a)$ ceux de la colonne de droite (logarithme népérien de a).

a) En prenant $m = n = a$, en déduire $\ln(a^2)$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 3$.

b) En prenant $m = n = \sqrt{a}$, en déduire $\ln\left(\sqrt{a}\right)$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 16$.

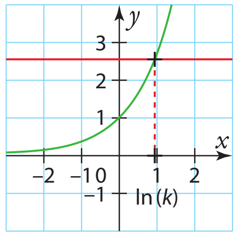
Remarque Cette table fait une correspondance entre les multiplications et les additions, entre les divisions et les soustractions, entre les extractions de racines carrées et les divisions par 2.

↪ Cours 2 p. 96

Cours

1 Fonction logarithme népérien, fonction inverse de la fonction exponentielle

Préambule Fonction exponentielle



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'équation $e^x = k$, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$, admet alors une unique solution dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition Fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On définit ainsi $y = \ln(x)$.

Exemple

À l'aide de la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, on peut vérifier que $\ln(2) \approx 0{,}693$.

Remarque Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Propriétés Fonction logarithme népérien

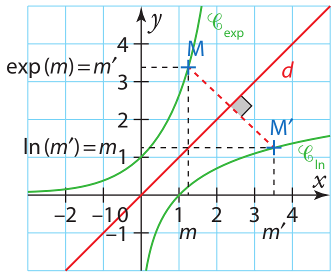
- **Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$ $\quad \ln(e^x) = x$**
- **$\ln(1) = 0$ $\quad \ln(e) = 1$ $\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = 1$**

Démonstration

↪ Activité 1 p. 92.

Exemple

$\ln(e^3) = 3$ et $e^{\ln(3)} = 3$



Propriété Courbes des fonctions ln et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

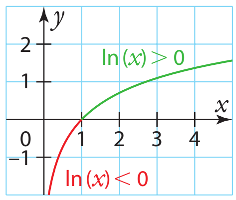
Propriété Sens de variation de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

a et $b \in \mathbb{R}_+^*$; $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$

On en déduit $\ln(a) < \ln(b)$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété Conséquences liées au sens de variation de ln

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Démonstrations

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a = b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a < b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = a$ ou $\ln(u(x)) < a$

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\ln(x) = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1 - x) \leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$

Solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ **[1]**, $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$, d'où $S = \{e^5\}$. **[2]**

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ **[1]**, $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, d'où $S = \{\ln(3)\}$. **[3]**

c) Pour tout $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 1[$ **[1]**

$\ln(1 - x) \leqslant -1 \Leftrightarrow 1 - x \leqslant e^{-1}$ c'est-à-dire $x \geqslant 1 - e^{-1}$

d'où $S = [1 - e^{-1} ; +\infty[\cap]-\infty ; 1[$ soit $S = [1 - e^{-1} ; 1[$ **[2]**.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ **[1]**, $e^{2x-3} > 4 \Leftrightarrow 2x - 3 > \ln(4)$ **[3]** $\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(4)+3}{2}$ d'où $S = \left]\dfrac{\ln(4)+3}{2} ; +\infty\right[$.

Conseils & Méthodes

1 Commencer par déterminer les conditions d'existence, à savoir l'ensemble (E) des réels x tels que $u(x) > 0$ dans l'expression $\ln(u(x))$.

2 Simplifier un logarithme en appliquant la fonction exponentielle.

3 Simplifier en appliquant la fonction logarithme.

À vous de jouer !

1 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(x) = -1$ **b)** $e^{2x} = -1$

c) $\ln(4 - 2x) > 1$ **d)** $e^{x+1} \geqslant 2$

2 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(5x - 1) = 2$ **b)** $e^{-x} = 5$

c) $\ln(3x - 1) < 0$ **d)** $e^{5-x} \leqslant 2$

↪ Exercices 25 à 29 p. 104

Méthode 2 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Énoncé

1. Résoudre l'équation $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x)$.

2. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2)$.

Solution

1. Conditions d'existence : $4x - 1 > 0$ et $2 - x > 0$, **[1]**
soit $x > \dfrac{1}{4}$ et $x < 2$ d'où $x \in I = \left]\dfrac{1}{4} ; 2\right[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x) \Leftrightarrow 4x - 1 = 2 - x$ c'est-à-dire $x = \dfrac{3}{5}$.

Or $\dfrac{3}{5} \in I$, donc $S = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$. **[2]**

2. Conditions d'existence : $x^2 + 2x - 3 > 0$ **[1]**

$\Delta = 16$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -3$, d'où $I =]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geqslant 2$ **[3]** $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 \geqslant 0$;

$\Delta = 24$; $x_1 = -1 - \sqrt{6} \approx -3{,}45$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6} \approx 1{,}45$

x_1 et x_2 appartiennent à I, d'où $x \in]-\infty ; -1-\sqrt{6}] \cup [-1+\sqrt{6} ; +\infty[$ et $x \in I$, d'où $S =]-\infty ; -1-\sqrt{6}] \cup [-1+\sqrt{6} ; +\infty[$. **[4]**

Conseils & Méthodes

1 Déterminer les conditions d'existence, soit l'ensemble (E) des réels x : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

2 Puis résoudre dans I $u(x) = v(x)$.

3 Puis résoudre $u(x) < v(x)$.

4 S'assurer que les solutions trouvées appartiennent bien à l'ensemble correspondant aux conditions d'existence.

À vous de jouer !

3 Résoudre.

a) $\ln(x + 1) = \ln(-x)$ **b)** $\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5)$

4 Résoudre.

a) $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(2)$ **b)** $\ln(2x) > \ln(x^2 - 2x + 1)$

↪ Exercices 30 à 33 p. 104

Cours

2 Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriété Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$,
soit $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.
On a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

Remarques

- On retrouve la particularité de l'activité 2, à savoir que cette fonction transforme les produits en sommes.
- Cette formule se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

Exemples

- $\ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$
- $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)$

Propriété Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstrations

① Pour $a > 0$, $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

② Pour $b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

Propriété Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstrations

① $e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$
On a alors $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln(a)}$, soit $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

② $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = \ln(a)$ et $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln(a) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemples

- $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$
- $\ln(16) - 2\ln(2) + \ln(8) = \ln(2^4) - 2\ln(2) + \ln(2^3) = 4\ln(2) - 2\ln(2) + 3\ln(2) = 5\ln(2)$
- $\ln\left(\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\ln(6)$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Utiliser les propriétés algébriques de ln

Énoncé

Exprimer en fonction de $\ln 2$ chacun des nombres suivants.

a) $\ln\dfrac{1}{4}$ **b)** $\ln 8 + 5\ln 2$ **c)** $\ln\sqrt{32}$ **d)** $\ln 10 - \ln 20$

Solution

a) $\ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4 = -\ln(2^2) + -2\ln 2$ 1

b) $\ln(2^3) + 5\ln 2 = 3\ln 2 + 5\ln 2 = 8\ln 2$ 2

c) $\ln(\sqrt{32}) = \dfrac{1}{2}\ln 32 = \dfrac{1}{2}\ln(2^5) = \dfrac{5}{2}\ln 2$ 3

d) $\ln 10 - \ln 20 = \ln\left(\dfrac{10}{20}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ 2

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$ ainsi que $\ln a^n = n\ln a$.

2 Avec une somme/différence $\ln a + \ln b$ on peut penser à utiliser $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$; $\ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

3 Chercher à écrire $\ln a$ sous la forme $\ln(c^n)$, soit $n\ln c$.

À vous de jouer !

5 Exprimer en fonction de $\ln 5$.

a) $\ln 25 + \ln\sqrt{125}$ **b)** $\ln 35 - \ln 175$

c) $\ln\dfrac{e^4}{25}$ **d)** $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

6 Exprimer en fonction de $\ln 3$.

a) $4\ln 12 - 4\ln 36$ **b)** $\ln\dfrac{1}{9} + \ln 81$

c) $\ln\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27$ **d)** $e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2)$

↪ Exercices 34 à 37 p. 104

Méthode 4 Résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

donc l'inéquation $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ est équivalente à $\ln\left(\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) < \ln(10^{-3})$ 1

$\Leftrightarrow n\ln\left(\dfrac{2}{5}\right) < \ln(10^{-3})$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)}$ 2

Or $\dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)} \approx 7{,}5$; par conséquent, $n \geqslant 8$. 3

Conseils & Méthodes

1 Pour se « débarrasser » de l'inconnue en exposant, il faut penser à appliquer la fonction ln dans chaque membre de l'inéquation.

2 Lorsqu'il s'agit de diviser les membres d'une inéquation par $\ln a$, il faut être vigilant quant au signe de $\ln a$.

Pour $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: le sens de l'inégalité change. En revanche, si $a > 1$, $\ln a > 0$ et le sens de l'inégalité reste alors le même.

3 Ne pas oublier de conclure en tenant compte du fait que n est un entier naturel.

À vous de jouer !

7 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$ avec $n \in \mathbb{N}$

b) $2^n - 7 \times 2^{n-1} > -3$

8 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $3^{2n} > 10^8$

b) $5^n \times 9^{-n-1} \leqslant 10^{-4}$

↪ Exercices 38 à 42 p. 104

Cours

3 Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété Dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^{\ln(x)}$.
La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.
Sachant que $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, en posant $v(x) = e^x$ et $u(x) = \ln(x)$, on a alors :
$f'(x) = e^{\ln(x)} \times \ln'(x) = x \times \ln'(x)$.
On a également $f(x) = x$ or $x' = 1$.
Par conséquent, on a $x \times \ln'(x) = 1 \Leftrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-05

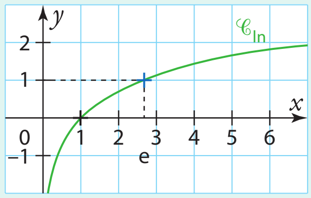
Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

Remarque Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$ sous entend $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x)$.

Propriété Tableau de variations de ln et courbe représentative

x	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



4 Fonction ln(u)

Propriété Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstrations

① Soit u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I.
Sachant que $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, en posant $v(x) = \ln x$, on a alors :
$(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ puisque $v'(X) = \dfrac{1}{X}$.
② Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sachant que $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, en posant $v(x) = \ln x$, on a alors $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \times u'(x)$ puisque $(e^X)' = e^X$.

Propriété Sens de variation de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

Démonstration

u étant strictement positive, le signe de $\dfrac{u'}{u}$ est le même que celui de u'. Or $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ ce qui signifie que le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u', c'est-à-dire que u et $\ln u$ ont même sens de variation.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Étudier une fonction avec ln

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Solution

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. 1

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ or, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$ 2 :

la fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x + x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x + x = +\infty$.

x	0	α	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Conseils & Méthodes

1 Penser à utiliser les opérations sur les limites.

2 Pour dresser le tableau de variations d'une fonction, déterminer au préalable le signe de la dérivée.

À vous de jouer !

9 1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{x} + \ln x$, déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de f, en déduire son sens de variation sur $]0\,;+\infty[$ et son signe.

10 1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x - \ln x$. Vérifier que $f(x) = x\left(x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ et déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ en utilisant $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

2. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe.

Exercices 43 à 47 p. 105

Méthode 6 Calculer la dérivée d'une fonction du type ln u

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$. Calculer $f'(x)$.

Solution

$u(x) = 3x^2 + 1$, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. 1 $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+1}$ 2

Conseils & Méthodes

1 Vérifier que u est dérivable et strictement positive sur I.

2 Puis utiliser $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

À vous de jouer !

11 Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x^2}\right)$.
Calculer $f'(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$.

12 Soit $f(x) = (x^2 - 4)\ln\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.
Calculer $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercices 48 et 49 p. 105

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 — Étudier une fonction contenant $\ln x$ à l'aide d'une fonction auxiliaire

Cours 3 p. 98

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$.

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\phi(x)=x^2-1+3\ln x$.

a) Calculer $\phi(1)$ et la limite de ϕ en 0.

b) Étudier les variations de ϕ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire le signe de $\phi(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\phi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.

Déterminer avec la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

D'après Bac S, Amérique du Sud, 2017.

Solution

1. a) $\phi(1)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln x=-\infty$, donc, par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=-\infty$.

b) $\phi'(x)=2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{2x^2+3}{x}$ donc, pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, $\phi'(x)>0$, donc ϕ est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Or $\phi(1)=0$, par conséquent, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $\phi(x)<0$ et, pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, $\phi(x)>0$. 1 2

2. a) $f'(x)=\dfrac{\left(2x-2-\dfrac{3}{x}\right)x-(x^2-2x-2-3\ln x)\times 1}{x^2}$

$=\dfrac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2-1+3\ln x}{x^2}=\dfrac{\phi(x)}{x^2}$

Puisque $x^2>0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\phi(x)$. 3

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

b) Pour tout $x\in\,]0\,;1]$, $f(x)\in[-3\,;+\infty[$; f est continue et strictement décroissante sur $]0\,;1]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires 4, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 0{,}41$.

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier le signe d'une fonction à partir des variations de celle-ci, il faut utiliser des images en particulier.

2 Afin de mieux visualiser le signe de ϕ, dresser le tableau de variations de ϕ en y incluant la valeur de $\phi(1)$.

3 Il est usuel d'utiliser une fonction auxiliaire pour étudier le signe d'une dérivée.

4 Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une équation admet une unique solution sur I, il faut penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

À vous de jouer !

13 **1.** Soit $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$ définie sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ avec $u(x)=\ln(x)+x-3$.

b) Étudier les variations de u sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ et en déduire son signe.

c) En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

14 **1.** Soit $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $[1\,;+\infty[$.

Montrer que $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x)=x^2-1+\ln(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

Coup de pouce Penser à étudier les variations de g pour en déduire le signe de g.

2. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y=x$.

Exercices 50 et 51 p. 105

Méthode 8 Étudier une fonction avec ln *u*

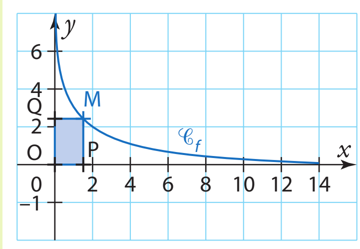
Cours 3 et 4 p. 98

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14[$ par $f(x)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.

À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle OPMQ.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;14[$.

En déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

D'après Bac S, Pondichéry, 2016.

Solution

1. $\mathscr{A}_{\text{OPMQ}} = \text{OP}\times\text{MP} = x\times f(x)$ **1** $= x\left(2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

2. $g'(x) = 2-\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = 2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-1 = 1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$ **2** $\Leftrightarrow \ln e \geqslant \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow e \geqslant \frac{x}{2}$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$. On a alors $g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 2e$.

x	0		2e		14
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variations de g	0	↗	2e	↘	28 − 14 ln 7

D'après le tableau de variations, on en déduit que l'aire de OPMQ est maximale pour M(2e ; 2e). **3**

Conseils & Méthodes

1 Un point $M\in\mathscr{C}_f$ équivaut à dire que ses coordonnées sont du type $(x\,;f(x))$.

2 Pour résoudre une inéquation avec ln, on peut notamment chercher à transformer l'inéquation sous la forme $\ln a \geqslant \ln b$.

3 Pour résoudre un problème d'optimisation, penser à étudier les variations de la fonction qui modélise le problème.

À vous de jouer !

15 Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln(-2x^2+13{,}5)$ sur l'intervalle $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

1. Dériver f, puis dresser son tableau de variations sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

2. Calculer $f(-2{,}5)$ et $f(2{,}5)$.

3. En déduire le signe de f sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

D'après Bac S, Pondichéry, 2017.

16 **1.** Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$. Déterminer la limite de f en -1.

2. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe sur $]-\infty\,;-1[$.

17 Soit la fonction $g(x)=\ln[1+(e-1)x]-x$ définie sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que $g'(x)=\dfrac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$.

2. Déterminer les variations de g sur $[0\,;1]$ et en déduire que g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$ dont on donnera une valeur arrondie à 10^{-2} près.

3. Établir que l'équation $g(x)=0{,}05$ admet deux solutions sur $[0\,;1]$.

D'après Bac S, centres étrangers, 2014.

Exercices 52 à 55 p. 105

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

La propriété à démontrer

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

Pour démontrer cette propriété il faudra utiliser le pré-requis suivant : pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Comprendre avant de rédiger

Quand un pré-requis est donné pour une démonstration, il faut chercher à relier la question posée à ce pré-requis.

Rédiger

Étape 1
Puisqu'il s'agit de faire le lien entre la propriété qui est à démontrer et le pré-requis donné, il faut chercher à mettre en relation a, $\frac{1}{a}$ et un éventuel produit.

Astuce
$a \times \frac{1}{a} = 1$

Étape 2
Il s'agit d'utiliser le pré-requis donné et $\ln 1 = 0$.

Étape 3
Puis on transforme l'égalité obtenue en l'égalité souhaitée.

La démonstration rédigée

Puisque $a \times \frac{1}{a} = 1$,

on a alors $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$

$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$

or $\ln 1 = 0$ on a alors :

$$\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

Pour s'entraîner

1. En utilisant le même pré-requis, montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2. En utilisant le pré-requis suivant :
$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, avec u et v deux fonctions dérivables respectivement sur I et J.

montrer que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I.

Exercices calculs et automatismes

18 Propriétés algébriques

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. $\ln\sqrt{2} + \ln 8 - 5\ln 4 =$

a $-5\ln 2$ b $-9\ln 2$ c $-\frac{11}{2}\ln 2$ d $-\frac{13}{2}\ln 2$

2. Soit la fonction f définie sur D_f par :
$$f(x) = \ln(6x+2) + \ln(6x-2) - 2\ln 2.$$
Alors $f(x) =$

a $2\ln(6x) - 2\ln 2$ b $\ln(12x-4)$
c $\ln(9x^2-1)$ d $\ln(36x^2-1)$

3. Soit l'équation $\ln(4x) = \ln(x-1)$:

a $-\frac{1}{3}$ est la solution.
b $\ln\left(\frac{4x}{x-1}\right) = 0$ est une équation équivalente
c L'équation n'a pas de solution.
d $4x = x-1$ est une équation équivalente.

4. L'inéquation $\ln(-x) \leqslant 1$ a pour ensemble de solutions :

a $[-e\,;+\infty[$ b $[-e\,;0[$
c $\varnothing$ d $[-1\,;0[$

19 Dérivées

1. Soit $f(x) = 3\ln x - x^2$ définie sur $]0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit $g(x) = \ln(4-2x)$ définie sur $]-\infty\,;2[$. Calculer $g'(x)$.

20 Python

Algo

1. Que représente la valeur envoyée par la fonction **Python** suivante ?

```
from math import*
def f(x) :
    if 4-2*x<=0 :
        return "Ce nombre n'a pas
                d'image par f"
    else :
        return log(4-2*x)
```

Remarque Sur Python, une fois la bibliothèque `math` importée, `log(x)` donne $\ln(x)$.

2. Compléter la fonction **Python** qui :
– prend en entrée un nombre ;
– renvoie si le nombre est solution ou non de l'inéquation $\ln(x) + x - 5 < 0$.

```
def solution_equa(x) :
    if x<=0 :
        return
    else... :
        if... :
            return "Ce nombre est
         solution de l'équation."
        else :
            return "Ce nombre
   n'est pas solution de l'équation."
```

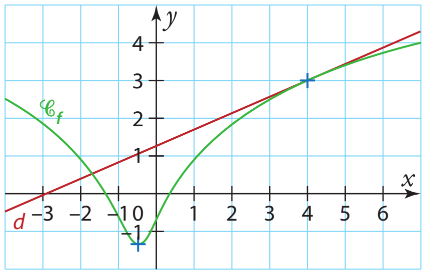
21 Fonction ln

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) L'expression $\ln(x^2)$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) $\ln(12) = \ln(10) \times \ln(2)$
c) La fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
d) La suite $u_n = \ln(3^n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique de raison 3.
e) $\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - e^{-\ln x} = 0$
f) La fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 4\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ est toujours en dessous de sa tangente T_1 (tangente au point d'abscisse 1) sur $]0\,;+\infty[$.

22 Lectures graphiques

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction du type $f(x) = \ln(ax^2+bx+c)$ avec a, b et c trois réels et la tangente d à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $f'(4) \approx 3$
b) Sur $[-4\,;6]$, il existe deux valeurs de x pour lesquelles la tangente à la courbe a un coefficient directeur nul.
c) Sur $[-4\,;6]$, $f'(x) > 0$ pour $x > -\frac{1}{2}$.
d) Sur $[0\,;6]$, $f''(x) < 0$.

23 Équations, inéquations

1. Soit l'équation $\ln(2x+1) - \ln(4-x) = \ln(2x)$, quelles sont les étapes nécessaires à la résolution d'une telle équation ?

2. Pour résoudre une équation contenant $(\ln x)^2$ et $\ln x$, comme par exemple l'équation $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$, quelles sont les étapes nécessaires ?

3. Soit $f(x) = 2\ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(4x+4)$.
Comment étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$?

24 Tangente

1. Soit la fonction $f : x \mapsto 2x\ln x - 3$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$.
a) Pourquoi g est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Exercices d'application

Équations/inéquations du type $\ln u \leqslant a$ ou $e^u \leqslant a$

Méthode 1 p. 95

25 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=0$ **b)** $\ln(x-e)=1$

c) $2\ln(x)+1=-3$ **d)** $e^{5-2x}=2$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(1-x)>0$ **b)** $\ln(3-2x)\leqslant 1$

c) $3e^x-1<8$ **d)** $e^{2x}-3e^x\geqslant 0$

26 Résoudre les équations suivantes.

a) $5-\ln x=2$ **b)** $e^{4x+1}=5$

c) $\ln(2x+e)=1$ **d)** $\ln(x^2+x-6)=0$

27 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right)\leqslant 0$ **b)** $\ln(x^2+2x)-1>0$

c) $6e^x-1\geqslant 3-4e^x$ **d)** $3e^{2x}-9e^x<0$

28 On veut résoudre l'équation :

$$\ln(x)^2+4\ln\left(\frac{1}{x}\right)-5=0 \text{ (E).}$$

1. On pose $X=\ln x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E').

2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions de (E).

29 On veut résoudre l'équation $e^{2x}-2e^x=8$ (E).

1. On pose $X=e^x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E').

2. Résoudre (E').

3. En déduire les solutions de (E).

Équations/inéquations avec $\ln u$

Méthode 2 p. 95

30 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(3x-6)=\ln(4-x)$

b) $\ln(x)+\ln(8-x)=\ln(12)$

c) $\ln(2x)-\ln(x+1)=\ln(x-5)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(4x-2)+\ln(5)<1-\ln 2$

b) $\ln(5-x)\geqslant \ln(x-1)$

c) $\ln(x-2)+\ln(x+2)\geqslant 0$

31 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=2\ln x$ **b)** $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(4-2x)$

32 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x^2-4x+4)-\ln(x-2)<\ln(8-x)$

b) $\ln(2x+4)+\ln(1-x)-\ln 2\geqslant \ln(e^{-x})-1$

33 Soit les fonctions f et g définies sur $]2\,;4[$ par $f: x\mapsto \ln(3x-6)$ et $g: x\mapsto 2\ln(4-x)$.

1. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent-elles ?

2. Quelle est la position relative de ces deux courbes ?

Propriétés algébriques de ln

Méthode 3 p. 97

34 **1.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif.

a) $2\ln 5-\ln 15$

b) $-\ln 3+4\ln 2-\ln 5$

2. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

a) $4\ln 5+\ln 25-3\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

b) $\ln 125-\dfrac{1}{2}\ln 25+\ln\left(\dfrac{1}{25}\right)-4\ln\sqrt{5}$

35 **1.** Exprimer sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif, le nombre $3\ln 2-\ln 9+\ln 5$.

2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ le nombre $\ln 8-3\ln 4+\ln\sqrt{2}$.

36 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{2\ln 3+\ln 4}$ **b)** $e^{3\ln 2-\ln 4}$

c) $\dfrac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}$ **d)** $\dfrac{e^{2\ln 5+\ln 3}}{e^{2\ln 3}}$

37 Justifier les égalités suivantes.

a) $e^{3\ln 3}+e^{2\ln 7}=76$

b) $e^{5\ln 3}\times e^{4\ln 9}=3^{13}$

c) $\ln(1+e^5)+\ln\left(\dfrac{1}{1+e^{-5}}\right)=5$

Inéquations du type $q^n < a$

Méthode 4 p. 97

38 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<10^{-4}$ **b)** $\left(\dfrac{9}{7}\right)^n\geqslant 10^6$

c) $1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999$ **d)** $0{,}004>\left(\dfrac{8}{9}\right)^{2n}$

39 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001$ **b)** $1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999999$

c) $1{,}2^{2n}>10^5$ **d)** $0{,}02>\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$

40 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=\dfrac{3}{2}$.

À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils strictement supérieurs à 1 million ?

41 On tire successivement, et avec remise, n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999 ?

42 On place 2 500 € à intérêts composés à un taux annuel de 1,75 %. Combien d'années faudra-t-il pour doubler son capital ?

Étude de fonction avec ln

Méthode 5 p. 99

43 Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de définition ou de dérivabilité.

a) $f(x) = (\ln x + 3)(x - 2)$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{3\ln x + 1}$

c) $f(x) = (\ln(x) - 2x + 1)^3$ **d)** $f(x) = \sqrt{3x - x\ln(x)}$

44 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + 1$.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
3. a) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ en 1.
b) Montrer que $f(x) - (2x - 1) = 2u(x)$ avec $u(x) = \ln x - x + 1$.
c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_1.

45 Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = -3\ln x + 2x - 4.$$
1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. En $+\infty$, on vérifiera que $g(x) = x\left(-\dfrac{3\ln x}{x} + 2\right) - 4$ et on utilisera $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. Déterminer le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_e à $\mathscr{C}_g$ en e, puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_e.

46 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \dfrac{4}{x}$.
1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

47 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x + e^{-1}$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Justifier alors que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ $x\ln x \geqslant -\dfrac{1}{e}$.

Dérivées de fonctions du type ln *u*

Méthode 6 p. 99

48 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln(8x - 4)$ **b)** $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ **d)** $f(x) = \ln(e^x - 1)$

49 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln\sqrt{4 - x}$ **b)** $f(x) = \ln(\ln 2x)$

c) $f(x) = x^2\ln(e^x + 1)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \ln\left((4x - 1)^2\right)$ **f)** $f(x) = \left(\ln(x^2 - 1)\right)^2$

ln *x* et fonctions auxiliaires

Méthode 7 p. 100

50 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$
1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
b) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

51 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = (x + 1)\ln x.$$
1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\ln x + x + 1$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire le signe de h sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$.
b) En déduire le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de g en y incluant les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que la valeur en laquelle la fonction g s'annule.

Étude de fonctions avec ln *u*

Méthode 8 p. 101

52 Pour chacune des fonctions ci-dessous :
1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier le sens de variation de f.

a) $f(x) = \ln(3 - 4x)$; $I = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)$; $I =]-1\,;2[$

53 Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(-x^2 + 2x + 15)$.
1. Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de g.
2. Étudier le sens de variation de g sur son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g au point d'abscisse 0.

54 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(4 - x)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;4\right[$.

55 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ et $g(x) = \ln(-3x + 15)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $]-1\,;5[$.

Exercices d'entraînement

La fonction ln

56 Soit la fonction g définie sur $]0\,;\mathrm{e}[\ \cup\ ]\mathrm{e}\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}.$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition de g.

2. a) Montrer que $g'(x)=-\dfrac{2}{x(\ln x-1)^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de g sur son ensemble de définition.

57 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2(\ln(x))^2-\ln x-1.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

2. a) Résoudre l'équation $2X^2-X-1=0$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions qui sont e et $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

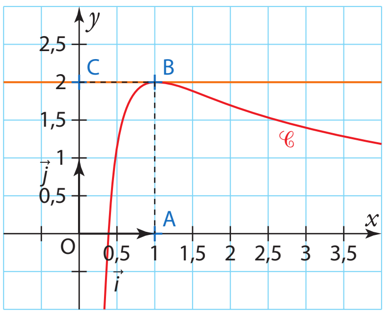
3. a) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\mathrm{e}\right]$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=-1$ admet exactement deux solutions α et β sur cet intervalle.

c) Déterminer les valeurs exactes de α et β en résolvant directement l'équation $f(x)=-1$.

4. Justifier que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, au point d'abscisse e est T_e : $y=\dfrac{3}{\mathrm{e}}x-3$.

58 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. **Algo**



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(1\,;2)$, $(0\,;2)$;

– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire que $f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}$.

2. a) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un réel β de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$.
Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous écrit en langage **Python**.

```
from math import*
def f(x):
      image=2/x+2*math.log(x)/x
      return image
a=1
b=1
while b-a>0.1:
      m=1/2*(a+b)
      if f(m)<1 :
            a=m
      else :
            b=m
print(a,b)
```

a) Quel est le rôle de la fonction Python f ?

b) Quel est le rôle de ce programme ?

c) Quelle instruction Python faudrait-il modifier afin que ce programme affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ?

D'après Bac S, 2013.

59 On peut lire sur le site France-inflation.com un tableau de l'inflation des prix en France. **SES**

2011	2,1 %
2010	1,5 %
2009	0,1 %
2008	2,8 %
2007	1,5 %
2006	1,6 %
2005	1,9 %
2004	2,1 %
2003	2,1 %
2002	2 %

1. Le passage à l'Euro a eu lieu en 2002. À partir de 2002, quel est le pourcentage d'augmentation totale des prix sur 10 ans ?

2. On appelle t le pourcentage d'augmentation par année qui conduirait sur 10 ans à la même augmentation totale. Déterminer t à 10^{-2} près.

60 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative.

A ▶ Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = -2\ln x - xe + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que dans $[0{,}5\,;1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B ▶ Étude de la fonction *f*

1. Vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

3. Donner le tableau de variations de f.

4. Tracer Γ.

Fonctions du type ln *u*

61 Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1-2\ln(x+1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

2. Montrer qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente.

3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

62 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a, b, et c sont trois réels.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$-$		0		$+$		
Variations de f	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↘	$\ln\left(\frac{7}{8}\right)$	↗	0	↗	$+\infty$

1. En utilisant les données du tableau, montrer que $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que les variations et les informations portées sur le tableau ci-dessus sont exactes.

Modélisations

63 SVT Dans un bouillon de culture, on observe, au temps $t = 0$, la présence de 10 000 bactéries.

Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures. On modélise la situation à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec u_n représentant le nombre de bactéries présentes dans le bouillon de culture n heures après la première observation.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme u_0 et la raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. En déduire au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million.

64 Un capital de 1 200 € est placé à un taux annuel composé de 2 % au 1er janvier 2020.

On modélise la situation par une suite (u_n) telle que u_n représente le capital à l'année $2020 + n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le 1er terme et la raison.

2. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il triplé ?

65 L'**intensité sonore** totale I de plusieurs ondes d'intensités I_1 et I_2 correspond à la somme de chacune des intensités sonores : $I = I_1 + I_2$. L'amplitude de l'intervalle de l'intensité sonore perceptible étant de l'ordre de 10^{13} (le seuil d'audibilité étant de $10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$), on utilise plutôt une échelle de grandeur plus simple et plus significative qui est le **niveau d'intensité sonore**.

Cette grandeur, notée L, s'exprime en décibels (dB) et est définie par $L=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$ avec I l'intensité en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

Remarque La notation log correspond au logarithme décimal. Cette fonction possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien (ln).

1. On veut chercher à montrer que si on quadruple l'intensité sonore, le niveau sonore quant à lui n'est pas quadruplé.

On pose $I=5\times10^{-6}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$; $L=10\times\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)\mathrm{dB}$ le niveau sonore associé, k le coefficient par lequel on multiplie l'intensité sonore et L' le niveau sonore associé à l'intensité $k\times I$. On suppose que l'intensité sonore associée à chaque chanteur est la même et vaut I, que le niveau d'intensité sonore associé à chacun d'entre eux est L et on pose L' le niveau sonore associé à l'ensemble du groupe.

a) Vérifier que $L' = 10$ □ $\log\dfrac{4I}{I_0}$.

b) Montrer que $L' \approx 6 + L$.

Remarque Quadrupler l'intensité sonore revient à augmenter de 6 dB le niveau sonore et non à le multiplier par 4.

2. Démontrer de la même façon que si l'on divise par 5 l'intensité sonore, cela revient à baisser de 7 dB le niveau sonore.

66 Étude d'une fonction ln

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

3. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

4. Construire $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

67 Avec une fonction auxiliaire

A ▶ Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x)=\ln(x)+x-3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

B ▶ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

C ▶ Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction g définie par $g(x)=\ln(x)$.

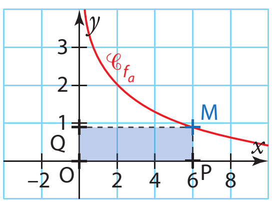
1. Montrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'après Bac S, Amérique du Nord, 2015.

68 Calcul d'aire et étude de ln

Soit f_a la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_a(x)=a-\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\mathscr{C}_{f_a}$ la courbe représentative de f_a, tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

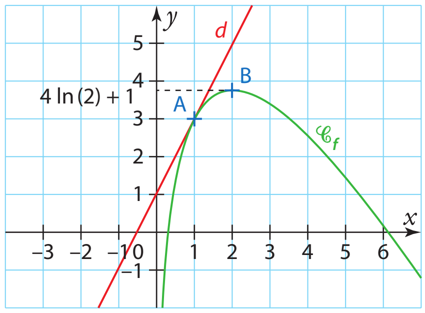


1. À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_{f_a}$ on associe le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q, projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées de M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

2. Existe-t-il plusieurs valeurs de a pour lesquelles cette aire maximale soit atteinte en M ayant pour abscisse a ?

69 Paramètres et fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous et d la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



L'expression de f est du type $f(x)=a\ln x+bx+c$ avec a, b, c trois réels.

A ▶ 1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$; $f'(1)$ et $f(2)$.

2. En déduire l'expression de f.

3. Résoudre graphiquement $f(x)\geqslant 3$.

B ▶ On admettra pour la suite de l'exercice que :

$$f(x)=4\ln x-2x+5.$$

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2\ln x-x+1$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2. En déduire le tableau de variations de g.

3. Vérifier que 1 est solution de l'équation $g(x)=0$.

4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de g.

6. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant 3$.

70 ln u et tangente

f est une fonction définie sur $]-5\,;5[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{5-x}{5+x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout réel $x\in\,]-5\,;5[$, montrer que $f(-x)=-f(x)$. Que peut-on en déduire quant aux éléments de symétrie de $\mathscr{C}$?

2. a) Déterminer la limite de f en -5. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-5\,;0]$.

c) Montrer que la droite d d'équation $y=-0{,}4x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d ont été tracées à l'aide de la calculatrice.

a) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente d ?

b) Démontrer cette conjecture.

Préparer le BAC L'essentiel

CONTRÔLE CONTINU

Propriétés immédiates

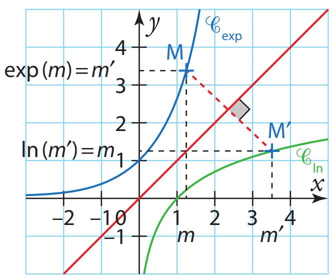
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
- $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

Propriétés algébriques

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ avec $a \neq 0$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ avec $b \neq 0$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$ avec $a \geqslant 0$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$

Fonction logarithme népérien

$f(x) = \ln(x)$



Dérivées

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$
- $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Variations

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Signes

- Pour tout $0 < x < 1$: $\ln x < 0$.
- Pour tout $x > 1$: $\ln x > 0$.

Équations

- $\ln x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^a$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $a^n = b$ avec a et b positifs différents de 1 $\Leftrightarrow n = \frac{\ln b}{\ln a}$

Inéquations

- $\ln x \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^a$
- $\ln x \geqslant \ln y \Leftrightarrow x \geqslant y$
- $a^n \geqslant b$ avec a et b positifs $\Leftrightarrow n\ln a \geqslant \ln b$

Préparer le BAC **Je me teste**

Je dois être capable de…		**Parcours d'exercices**
▶ Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u \leqslant a$ ou $e^u \leqslant a$	Méthode 1	→ 1, 2, 25, 26
▶ Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u = \ln v$ et $\ln u \leqslant \ln v$	Méthode 2	→ 3, 4, 30, 31
▶ Manipuler les propriétés algébriques de ln	Méthode 3	→ 5, 6, 34, 35
▶ Résoudre des inéquations du type $q^n < a$	Méthode 4	→ 7, 8, 38, 39
▶ Étudier des fonctions utilisant ln	Méthode 5	→ 9, 10, 43, 44
▶ Dériver et étudier des fonctions avec $\ln u$	Méthode 6, Méthode 8	→ 11, 12, 15, 16, 48, 49, 52, 53
▶ Étudier des fonctions contenant $\ln x$ à l'aide de fonctions auxiliaires	Méthode 7	→ 13, 14, 50, 51

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c04-07

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonnes réponse(s).

	A	B	C	D
71 L'écriture $\ln\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ se simplifie sous la forme :	$\ln\left(2\sqrt{5}\right)$	$2\ln\left(\sqrt{5}\right)$	$\ln 3$	$\dfrac{\ln\left(\sqrt{5}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}+\ln\left(\sqrt{5}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)$
72 L'équation $\ln(x-1)-\ln(2-x)=\ln 2+\ln x$:	est équivalente à l'équation $\dfrac{x-1}{2-x}=2x$	n'admet aucune solution	admet une seule solution	admet deux solutions
73 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x)=\ln((2x+4)^2)$. $f'(x)=$	$\dfrac{2}{x+4}$	$\dfrac{2}{x+2}$	$\ln(4(2x+4))$	$\dfrac{1}{(x+2)\ln(2x+4)}$
74 Soit la fonction g définie par $g(x)=\ln(\ln(1-x))$ et D_g son ensemble de définition.	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln(1-x)}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$
75 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5x\ln x-5x$ et T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.
76 La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$ est :	toujours croissante sur $]0\,;+\infty[$	décroissante sur $]0\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$	croissante sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$	toujours décroissante sur $]0\,;+\infty[$

77 Positions relatives de courbes

Soit les fonctions f, g et h définies sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=2\ln x+3$; $g(x)=(\ln x)^2$ et $h(x)=2(\ln x)^2-\ln x$.

1. Pour quelles valeurs de x les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ sont-ils au-dessus de l'axe des abscisses ?

2. Montrer que $g(x)-f(x)=(\ln(x)+1)(\ln(x)-3)$ et en déduire les valeurs de x pour lesquelles les points de $\mathscr{C}_g$ sont au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

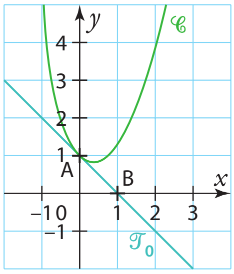
3. a) Étudier le sens de variation de h.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses.

Méthode 3 p. 97 Méthode 5 p. 99

78 Retrouver l'expression de la fonction

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx+c-\ln(x+1)$ avec a, b et c des réels. La droite $\mathscr{T}_0$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A(0 ; 1) et passe par B(1 ; 0).



1. À partir des informations données, et sachant que $f'(1)=\dfrac{3}{2}$, montrer que $f(x)=x^2+1-\ln(x+1)$.

2. Déterminer le sens de variation de f et la limite en -1. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui soient perpendiculaires à $\mathscr{T}_0$? Justifier la réponse par un calcul.

4. Soit la fonction h définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $h(x)=x^2+1-\ln(x^2+6x+5)$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

Méthode 2 p. 95 Méthode 6 p. 99 Méthode 8 p. 101

79 Pourcentages, ln et suites

La responsable d'un aquarium public constate qu'en absence d'action particulière la population d'une espèce de poissons augmente de 20 % par an. Pour démarrer un nouveau bassin, elle décide de prélever 28 poissons à la fin de chaque année. La situation est modélisée par une suite (u_n) de terme initial $u_0=150$, le terme u_n donnant une estimation du nombre de poissons le 1er janvier de l'année 2018 + n.

1. Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1{,}2u_n-28$.

2. On définit la suite (w_n) par $w_n=u_n-140$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Après avoir montré que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,2, en déduire que $u_n=10\times1{,}2^n+140$.

b) Sachant que l'aquarium ne peut contenir plus de 200 poissons, la responsable doit-elle prévoir l'achat d'un autre aquarium dans les années à venir ? Si oui, en quelle année ?

Méthode 4 p. 97

80 Probabilités et ln

Algo

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits en verre, qu'il demande de rapporter une fois vide. On suppose que le nombre de clients reste constant. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

– à l'issue de la 1re semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;

– si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,95 ;

– si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier n on nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ». On note $r_n=P(R_n)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1}=0{,}75r_n+0{,}2$.

Coup de pouce Penser à utiliser un arbre pondéré.

2. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $r_n=0{,}1\times0{,}75^{n-1}+0{,}8$.

a) Écrire un algorithme qui permet de déterminer le plus petit rang n à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à 0,80001.

b) Retrouver ce résultat par le calcul et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Méthode 4 p. 97

81 Avec une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{5x^2-2\ln x}{2x}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{5x^2-2+2\ln x}{2x^2}.$$

a) Calculer la limite de g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur $]0\ ;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x)=0$ et que $\alpha\in\,]0{,}5\ ;1[$.

d) En déduire le signe de g selon les valeurs de x.

2. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. On utilisera $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=0$.

b) Montrer que, sur $]0\ ;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire les variations de f.

c) Montrer que f admet un minimum en α et que ce minimum vaut $\dfrac{5\alpha^2-1}{\alpha}$.

d) En déduire le signe de f sur $]0\ ;+\infty[$.

Méthode 7 p. 100

5

Primitives et équations différentielles

Le carbone possède plusieurs formes – ou « isotopes » – parmi lesquelles le carbone 14, ou ^{14}C. Cet élément est radioactif, et sa radioactivité décroît au fil du temps à un rythme parfaitement régulier. Les scientifiques s'en servent donc comme « chronomètre » pour estimer l'âge d'objets très variés : œuvres d'art, roches, fossiles…

On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. Des mesures montrent qu'ils ont perdu 30 % de leur teneur en carbone 14.
Quel est l'âge de ces fragments d'os ? ↪ Exercice 90 p. 133

VIDÉO
Carbone 14
lienmini.fr/maths-c05-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c05-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des dérivées de fonctions usuelles

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = \ln(x)$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = x^5$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

2 Calculer des dérivées de fonctions de la forme $u \times v$, $\dfrac{u}{v}$ ou $\dfrac{1}{v}$

On considère u et v des fonctions dérivables (v est non nulle quand elle est en dénominateur).
Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ **b)** $f(x) = (x+1)e^x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

d) $f(x) = x\ln(x)$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+5)^2}$ **f)** $f(x) = x\sqrt{x}$

3 Calculer des dérivées de fonctions composées

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = e^{-x+1}$ **b)** $f(x) = \ln(x^2+3)$ **c)** $f(x) = \sqrt{3x+1}$

d) $f(x) = (4x+1)^3$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

4 Calculer des dérivées de la forme $f(ax+b)$, $e^{u(x)}$, $\ln(u(x))$

Calculer la dérivée des fonctions f, g et h suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$, avec $x \in \left]-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$;

b) $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 5)$, avec $x \in \mathbb{R}$

c) $h(x) = e^{x^2+2x-5}$, avec $x \in \mathbb{R}$

5 Identifier si deux fonctions ont la même dérivée

Pour chaque cas, indiquer si les deux fonctions f et g ont la même dérivée sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+5) + \ln(2)$
et $g(x) = \ln(x^2 + 6x + 5)$, $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$.

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - x$ et $g(x) = 1 - x - \dfrac{1}{e^x+1}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

6 Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes.

a) $10e^{-3t} = 5$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b)** $-4e^{5t} = 12$ avec $t \in \mathbb{R}$

c) $\dfrac{7}{2}e^x = 50$ avec $x \in \mathbb{R}$ **d)** $8e^{-\frac{t}{2}} = 40$ avec $t \in \mathbb{R}$

Activités

Physique · Maths & Histoire · 10 min

1 Découvrir la notion d'équation différentielle

On a étudié une population de rongeurs dans une région soumise à un prédateur. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs (en milliers) vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région. On admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions $u'(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{12}(u(t))^2$ avec $u(0) = 1$.

1. Vérifier que la fonction u définie par $u(t) = \dfrac{3}{1+2e^{\frac{-t}{4}}}$ est une solution.

2. Pourquoi peut-on affirmer que, tant qu'il y a moins de 3 000 rongeurs, la population est croissante ?

Une équation qui relie une fonction à sa dérivée ou à ses dérivées successives est appelée une **équation différentielle**.

Il existe des notations différentes pour désigner une dérivée d'une fonction f ou y, par exemple $\dot{y}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (lorsque la variable est x), $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (lorsque la variable est t).

La notation $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ fut utilisée par Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716), la présence de $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}x$ définit la dérivée comme étant le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ quand ces variations deviennent infiniment petites.

La notation $\dot{y}$ est due à Sir Isaac Newton (1642-1727) qui parlait de fluxions.

La notation f' a été amenée par le comte Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813).

Wilhelm Gottfried Leibniz

↪ Cours 1 p. 116

30 min

2 Découvrir la notion de primitive

A ▸ Équation $y' = f$

1. a) Déterminer une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y'(x) = e^x + 3$.

b) Déterminer une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

La fonction F est-elle unique ?

2. On cherche à déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $g(x) = (x+2)\,e^x$.

a) Peut-on déterminer G de la même manière que dans les situations précédentes ?

b) En supposant que $G(x)$ est de la forme $(ax+b)e^x$, déterminer les valeurs a et b convenables. Conclure.

3. On cherche à déterminer une fonction H dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et dont la dérivée est $h(x) = \ln(x)$.
Un logiciel de calcul formel propose cette expression pour $H(x)$.
Démontrer que la fonction H a bien pour dérivée h.
On dit alors que H est une **primitive** de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

```
int(ln(x),x)
                                        x*ln(x)-x
```

B ▸ Affirmations équivalentes

1. Peut-on affirmer que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont la même dérivée ?

2. Démontrer l'équivalence suivante : deux fonctions f et g ont la même dérivée sur un intervalle I si et seulement si la fonction $f - g$ est constante sur I.

↪ Cours 2 p. 118

3 Introduire l'étude des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

TICE — 30 min

A ▶ L'équation $y' = y$

1. Quelle fonction usuelle et non nulle est solution de l'équation $y' = y$?

2. Si une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = y$, la fonction Kf, où K est un réel quelconque, est-elle aussi solution de l'équation $y' = y$?

3. En déduire d'autres solutions de $y' = y$.

B ▶ L'équation $y' = ay$ et les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K et a réels

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$.
En déduire d'autres solutions de l'équation.

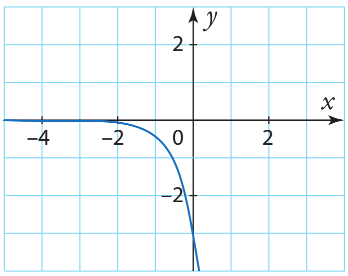
2. Proposer des solutions des équations $y' = 5y$ et $y' = -y$.

3. À l'aide de GeoGebra, en créant des curseurs a et K, étudier les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$.

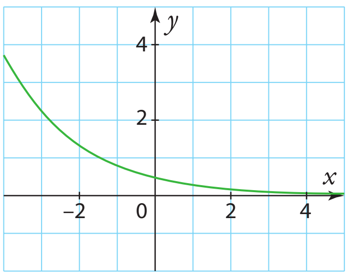
4. Associer chaque fonction f ci-dessous à sa courbe représentative et donner l'équation différentielle dont elle est solution.

a) $f(x) = -3e^{2x}$ **b)** $f(x) = 0{,}5e^{x}$ **c)** $f(x) = 0{,}5e^{-2x}$ **d)** $f(x) = -3e^{-2x}$ **e)** $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}1x}$

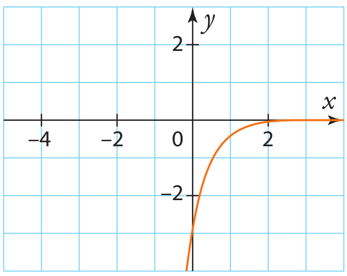
①



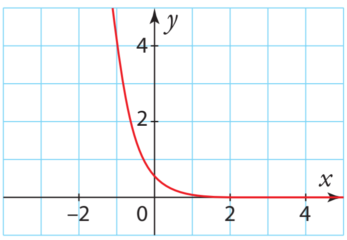
②



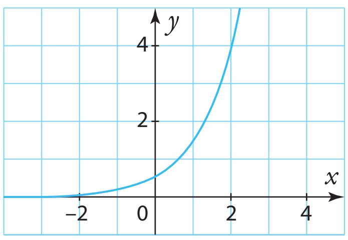
③



④



⑤



C ▶ L'équation $y' = ay + b$

1. En remarquant que l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ se ramène à l'équation différentielle (E) : $\left(y + \frac{5}{3}\right)' = 3\left(y + \frac{5}{3}\right)$, montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f + \frac{5}{3}$ est solution de $y' = 3y$.
Donner alors des solutions de cette équation.

2. On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et b étant des réels non nuls.
Quelles solutions peut-on donner à cette équation ?

↪ Cours 3 p. 120

Cours

1 Équations différentielles et primitives

Définition Équation différentielle

• Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'',…. et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f…).

• On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemples

• La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$ car, pour $y(x) = e^{-x}$, on a $y''(x) = e^{-x}$, donc $y''(x) - y(x) = 0$.

• La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est solution de l'équation $y'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarques

① La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x, d'où le terme *différentiel*.

② On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ou $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

Exemples

• $2y' + 3y = 0$ • $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$ • $\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ • $\dfrac{dy}{dx} = 2y(x) + x^2$

Définition Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I réel.

On appelle primitive de la fonction f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Ainsi, une fonction F est une primitive de f sur I lorsque, pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de $f : x \mapsto 2x$.

Propriétés Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle de définition	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$, avec k réel
$f(x) = x^n$, n entier relatif différent de -1	$\mathbb{R}$ si n entier naturel $]-\infty\,;+0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si n entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$, avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$, avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = \ln x + k$, avec k réel

Remarque

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles.

Exercices résolus

Méthode 1 Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle

Énoncé

Dans chacun des cas, montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I.

a) $y(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$; $f(x) = 15x^4 - 2x + 5$, avec $I = \mathbb{R}$

b) $y(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$; $f(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, avec $I =]0\,;+\infty[$

Solution

a) La fonction y est bien dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables sur I : **1**

$y'(x) = 15x^4 - 2x + 5 = f(x)$. **2**

b) La fonction y est dérivable sur I et $y'(x) = \dfrac{-1}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$, $I =]0\,;+\infty[$.

Conseils & Méthodes

1 Ne pas oublier de justifier la dérivabilité. Pour justifier de la dérivabilité, penser à utiliser les opérations sur les fonctions dérivables. Ici la fonction y est la somme de fonctions dérivables sur I, donc elle est dérivable sur I.

2 Calculer la dérivée et retrouver f.

À vous de jouer !

1 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I.

a) $y(x) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$; $f(x) = 5x^2 + 3x$; $I = \mathbb{R}$

b) $y(x) = \dfrac{1}{3x^3} + 5$; $f(x) = \dfrac{-1}{x^4}$; $I =]0\,;+\infty[$

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur un intervalle I à préciser.

a) $y(x) = \dfrac{e^x}{x}$; $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $y(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$; $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

↪ Exercices 27 à 35 p. 126

Méthode 2 Déterminer la primitive d'une fonction usuelle

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive F sur $I =]0\,;+\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^3$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$

Solution

a) **1** $F(x) = \ln(x)$

b) **2** $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$

c) $F(x) = x^{-4}$

L'entier n est négatif, égal à -4. **3**

$F(x) = \dfrac{1}{-4+1}x^{-4+1} = \dfrac{-1}{3}x^{-3} = \dfrac{-1}{3x^3}$.

Conseils & Méthodes

1 D'après le tableau du cours une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est la fonction $\ln(x)$.

2 Appliquer la formule du tableau des primitives des fonctions usuelles.

3 Attention dans le tableau du cours, lorsque l'entier n est négatif avec $n \neq -1$, dans la formule $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ le nombre $n+1$ est aussi négatif.

À vous de jouer !

3 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{5}{3}x^3$; $I = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-1}{x^5}$; $I =]0\,;+\infty[$

4 Déterminer une primitive de la fonction f sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

↪ Exercices 36 et 37 p. 127

Cours

2 Existence et calcul de primitives

Théorème Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème Ensemble des primitives et conditions initiales

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et admettant une primitive F. Alors l'ensemble des primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F+k$, avec k réel. Pour tous réels x_0 de I et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique primitive qui prend en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire une unique primitive F telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration

Soit f une fonction continue admettant une primitive F sur un intervalle I.

La dérivée de la fonction $x \mapsto F(x)+k$ est $x \mapsto F'(x)+0=f(x)$, d'après les opérations sur les dérivées : $x \mapsto F(x)+k$ est donc une primitive de f sur I.

Réciproquement, si G est une primitive de f sur I alors, pour tout x de I, $G'(x)=F'(x)=f(x)$, c'est-à-dire $(F-G)'(x)=0$.

Ainsi il existe un réel k tel que $F(x)-G(x)=k$ c'est-à-dire $F(x)=G(x)+k$.

Si, de plus, $F(x_0)=y_0$, alors $F(x_0)=y_0$ équivaut à $G(x_0)+k=y_0$, soit $k=y_0-G(x_0)$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c05-04

Remarque

On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Exemple

- Soit $f : x \mapsto e^{2x}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Alors toutes les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}+k$, avec k réel. La primitive qui en 1 prend la valeur 0 est $G(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$ telle que $G(1)=\frac{1}{2}e^{2}+k=0$, donc $k=-\frac{1}{2}e^{2}$ et $G(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2}$.

Théorème Primitive et somme. Primitive et multiplication par un scalaire

Soit f et g deux fonctions admettant respectivement les primitives F et G sur un intervalle I.

La fonction $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive de λf sur I.

Exemple

La fonction $x \mapsto 5e^{x}+2\ln x$ est une primitive de $x \mapsto 5e^{x}+\frac{2}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés Primitives de fonctions composées

Les théorèmes opératoires sur le calcul de dérivées permettent d'établir le tableau suivant sur les primitives. On considère que u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$2u'u$	u^2	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u(x)\neq 0$ pour tout x de I.
$u'e^{u}$	e^{u}	

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction, ou une primitive avec conditions initiales

Énoncé

1. Soit $f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x}$. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x^3 + \ln(x)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer l'unique primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ qui prend en e la valeur 0.

Solution

1. F est bien dérivable sur I et $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$.

2. L'ensemble des primitives de f sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto G(x) = x^3 + \ln(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$. 1

3. $G(\mathrm{e}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^3 + \ln(\mathrm{e}) + k = 0 \Leftrightarrow k = -1 - \mathrm{e}^3$. 2

La primitive cherchée est donc la fonction G définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $G(x) = x^3 + \ln(x) - 1 - \mathrm{e}^3$.

Conseils & Méthodes

1 Se rappeler que deux primitives diffèrent d'une constante.

2 Pour trouver la constante qui convient lorsque des conditions initiales sont imposées, on résout une équation.

À vous de jouer !

5 **1.** Montrer que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de ln sur $]0\,;+\infty[$.

6 **1.** Montrer que $F : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'unique primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H(0) = 5$.

↪ Exercices 38 à 41 p. 127

Méthode 4 Déterminer une primitive

Énoncé

Pour chacune des fonctions f proposées, déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ ou $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = 2(3x^2 + 2)(x^3 + 2x)$ **b)** $f(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{x^2+x+2}$ **c)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Solution

a) 1 On reconnaît la forme $2u'u$ avec $u(x) = x^3 + 2x$.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ sera $F : x \mapsto (x^3 + 2x)^2$.

b) On reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 + x + 2$ 2.
Une primitive sur $\mathbb{R}$ sera donc $F : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+x+2}$.

c) 3 On reconnait la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$.
Une primitive sera donc $F : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

Conseils & Méthodes

1 On reconnaît la forme $2uu'$ du cours. Penser à bien vérifier les trois facteurs : 2 ; u et u'.

2 Bien vérifier la dérivée de u.

3 Penser à vérifier le signe de u.

À vous de jouer !

7 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f suivantes sur l'intervalle I.

a) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$; I = $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{3x^2}{x^3+5}$; I = $]0\,;+\infty[$.

c) $f(x) = 2(2x + 1)(x^2 + x - 7)$; I = $\mathbb{R}$.

8 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f suivantes sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 2(4x^3 + 3)(x^4 + 3x)$; I = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{3x-1}$; I = $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

c) $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x+1}$; I = $\mathbb{R}$

↪ Exercices 42 à 47 p. 127

Cours

3 Résolution des équations différentielles

Théorème **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

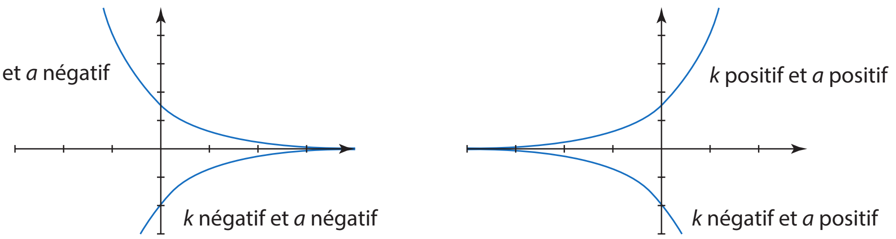
Démonstration

On vérifie facilement que toute fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, où $K \in \mathbb{R}$, est solution.
Réciproquement, il faut prouver que toute solution est de cette forme.
Considérons g une solution de l'équation $y' = ay$.
On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$.
Définissons une fonction t par $t(x) = g(x) \times e^{-ax}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
$t'(x) = g'(x) \times e^{-ax} - ag(x)\, e^{-ax} = e^{-ax}\,(g'(x) - ag(x)) = 0$.
La fonction t est donc une fonction constante. Il existe un réel K tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $t(x) = K$, et ainsi $g(x) = Ke^{ax}$.

VIDÉO **Démonstration** lienmini.fr/maths-c05-05

Allures des courbes des fonctions Ke^{ax}

Obtenues pour K positif puis pour K négatif et en faisant varier le coefficient a.



Exemple

L'équation différentielle (E) : $y' = 3y$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{3x}$.
L'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction $x \mapsto 2e^{3x}$.

Théorème **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec K réel. Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

Remarques • La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation.
• Ce théorème est admis.

Exemples

• La fonction constante égale à 1 est solution de l'équation $y' = y - 1$.
Ainsi toute fonction solution est de la forme $x \mapsto 1 + Ke^{x}$, avec K réel.
L'unique solution qui prend en 0 la valeur 0 est $x \mapsto 1 - e^{x}$.
• L'équation $y' = 2y + 5$ a pour solution particulière la fonction constante $x \mapsto -\frac{5}{2}$.
Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \frac{-5}{2} + Ke^{2x}$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c05-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Résoudre l'équation $y' = ay$

Énoncé

1. **Résoudre l'équation $3y' = 2y$.**

2. **Donner l'allure des courbes solutions.**

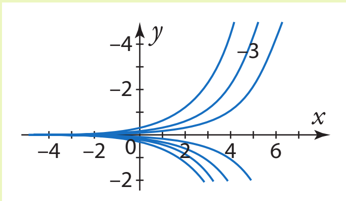
3. **Déterminer ensuite l'unique solution f telle que $f(1) = \text{e}$.**

Solution

1. 1 L'équation $3y' = 2y$ correspond à la forme $y' = \frac{2}{3}y$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $x \mapsto K\text{e}^{\frac{2}{3}x}$.

2. Si K est positif, les courbes sont au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif elles sont en dessous.



3. 2 La solution cherchée est telle que $K\text{e}^{\frac{2}{3}} = \text{e}$,

soit $K = \text{e}^{\frac{-2}{3}} \times \text{e} = \text{e}^{\frac{1}{3}}$.

C'est la fonction $x \mapsto \text{e}^{\frac{1}{3}} \times \text{e}^{\frac{2}{3}x} = \text{e}^{\frac{1+2x}{3}}$.

Conseils & Méthodes

1 Retrouver la forme d'équation $y' = ay$.

2 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, résoudre l'équation $K\text{e}^{ax_0} = y_0$ d'inconnue K.

À vous de jouer !

9 **1.** Résoudre les équations différentielles.

a) $y' = 2y$ **b)** $y' = -5y$

2. Donner l'allure des fonctions $x \mapsto K\text{e}^{-5x}$ en discutant selon le signe de K.

10 **1.** Résoudre les équations différentielles.

a) $y' + \frac{1}{3}y = 0$ **b)** $4y' + 5y = 0$

2. Déterminer la solution f de l'équation $4y' + 5y = 0$, telle que $f(1) = 2$.

↪ **Exercices 55 à 61** p. 128-129

Méthode 6 Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1.

Solution

1 L'équation $2y' = 8y - 10$ correspond à la forme $y' = 4y - 5$.

La fonction constante $\frac{5}{4}$ est solution. 2

L'ensemble des solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{5}{4} + K\text{e}^{4x}$.

3 La solution cherchée est telle que $\frac{5}{4} + K\text{e}^{4} = 0$, soit $K = \text{e}^{-4} \times \frac{-5}{4} = \frac{-5}{4\text{e}^{4}}$.

Conseils & Méthodes

1 Retrouver la forme $y' = ay + b$.

2 Déterminer la fonction constante solution. En déduire alors la forme de toutes les solutions.

3 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, ici $f(1) = 0$, il faut résoudre l'équation d'inconnue K.

À vous de jouer !

11 Résoudre les équations différentielles.

a) $y' = 2y + 1$ **b)** $y' = -5y + 2$

c) $y' + y = 3$ **d)** $4y' + y - 5 = 0$

12 Résoudre l'équation différentielle $y' = 0{,}5(y + 20)$. Donner la solution qui prend la valeur -30 en 4.

↪ **Exercices 62 à 66** p. 129

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c05-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$ Algo

Cours 3 p. 120

Énoncé

On considère l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. **Résoudre cette équation différentielle.**

2. **Déterminer la solution f telle que $f(1) = e$.**

3. **Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.**

4. **Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.**

5. **Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 20$.**

6. **Résoudre l'inéquation $f(x) > 40$.**

7. **Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) > 10\,000$.**

Solution

1. [1] $2y' - 5y = 0$ est de la forme $y' = \frac{5}{2}y$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{5}{2}x}$.

2. [2] $f(1) = e$ donne $f(1) = Ce^{\frac{5}{2}} = e \Leftrightarrow C = \dfrac{e}{e^{\frac{5}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}}$, donc $f(x) = e^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{5x}{2}} = e^{\frac{5x-3}{2}}$.

3. [3] D'après l'équation $f'(x) = \frac{5}{2}f(x) = \frac{5}{2}e^{\frac{5x-3}{2}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. [4] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x-3}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

5. [5] $f(x) = 20$ équivaut à $e^{\frac{5x-3}{2}} = 20 \Leftrightarrow 5x - 3 = 2\ln 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + 2\ln(20)}{5}$

6. $f(x) > 40$ équivaut à $e^{\frac{5x-3}{2}} > 40$, ce qui donne $x > \dfrac{3 + 2\ln(40)}{5}$.

$S = \left]\dfrac{3 + 2\ln(40)}{5}\,; +\infty\right[$.

7. [6] En langage naturel, l'algorithme est :

```
x ← 0
Tant que exp((5x − 3)/2) ≤ 10 000
    x ← x + 1
Fin tant que
```

Conseils & Méthodes

[1] Voir la méthode 5 pour la résolution de l'équation $y' = ay$.

[2] Connaissant $f(x)$, calculer $f(1)$ puis résoudre l'équation pour trouver C.

[3] C'est le signe de la dérivée qui donnera les variations.

[4] Il faut étudier la limite d'une fonction composée.

[5] Penser à l'équivalence $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.

[6] C'est une boucle non bornée qu'il faut dans l'algorithme.

À vous de jouer !

13 Soit l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = e$.

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 5$.

14 Algo Soit l'équation différentielle $y' - 5y = 3$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = \dfrac{-6}{5}$.

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = -10$.

6. Résoudre l'inéquation $f(x) < -100$.

7. Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) < -10\,000$.

Exercices 79 à 81 p. 131

Exercices résolus

Méthode 8 Modéliser des phénomènes

↪ Cours 3 p. 120

Énoncé

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps *t*, mesuré en secondes.
On modélise par *f*(*t*) la puissance du son émis, exprimée en watt, *t* secondes après le pincement de la corde. Le son s'affaiblit à une vitesse proportionnelle à sa puissance, il a été établi que le coefficient de proportionnalité est de – 0,12.

1. **Écrire l'équation différentielle traduisant la diminution de son.**

2. **Déterminer la fonction *f* solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 100$.**

3. **Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? Arrondir au watt près.**

4. **Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 80$, on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-3}. Interpréter ce résultat.**

Solution

1. [1] $y' = -0{,}12y$.

2. [2] Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies pour tout réel t par $t \mapsto ke^{-0{,}12t}$, où k est une constante réelle quelconque.
La condition $f(0) = 100$ équivaut à $ke^{-0{,}12\times 0} = 100$, d'où $k = 100$.
Ainsi, la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 100e^{-0{,}12t}$.

3. Il suffit de calculer $f(2) = 100e^{-0{,}12\times 2} \approx 79$.
Arrondie au watt près, la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde est de 79 watts.

4. [3] Il suffit de résoudre l'équation $f(t) = 80 \Leftrightarrow 100e^{-0{,}12t} = 80 \Leftrightarrow e^{-0{,}12t} = \dfrac{80}{100}$

$\Leftrightarrow \ln(e^{-0{,}12t}) = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow -0{,}12t = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow t = \dfrac{-\ln(0{,}8)}{0{,}12} \approx 1{,}86$.

La puissance du son émis 1,86 seconde après le pincement de la corde sera égale à 80 watts.

Conseils & Méthodes

[1] Si *f* est la fonction puissance, alors la vitesse d'évolution de cette puissance est *f′*. On traduit ensuite l'énoncé.

[2] On retrouve le modèle $y' = ay$ avec une condition initiale qui assure l'unicité de la solution.

[3] Interpréter la fonction *f* dans le contexte de l'exercice.

À vous de jouer !

15 Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données. La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation, exprimée en km. On admet que la fonction puissance g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$. **Physique**

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

2. Sachant que $g(0) = 7$, déterminer $g(x)$.

3. Pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW. Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

16 Le sel se dissout dans l'eau en ions Na^+ et Cl^- à une vitesse proportionnelle à sa masse. Il y avait au départ 25 kg de sel. On note α le coefficient de proportionnalité traduisant l'évolution de cette dissolution.

1. En notant $f(t)$ la quantité de sel (en kg) à l'instant t ($t \geqslant 0$), écrire, en fonction de α, l'équation différentielle qui traduit le problème de la dissolution du sel. À l'aide de la condition initiale, déterminer la fonction solution exprimée à l'aide de α.

2. On sait de plus qu'il ne reste que 15 kg de sel après 10 h écoulées.
En déduire la valeur de α puis l'expression de la solution $f(t)$.

3. Quelle masse de sel reste-t-il après 4 h ?

4. Au bout de combien d'heures ne reste-t-il plus que 0,5 kg de sel ?

↪ Exercices 67 et 68 p. 129

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c05-05

La propriété à démontrer

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto Ke^{ax}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

Comprendre avant de rédiger

Il s'agit de prouver l'équivalence suivante : une fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ est solution et réciproquement toute solution est de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$.

Rédiger

Étape 1

On vérifie que toute fonction y de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$, est solution.

Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Étape 2

En considérant une fonction g solution, on définit une fonction auxiliaire t dérivable et dont la dérivée est nulle.

Étape 3

Toute fonction dont la dérivée est nulle est une fonction constante, donc t est constante.

La démonstration rédigée

Considérons une fonction $y : x \mapsto Ke^{ax}$
On a alors, pour tout x réel, est $y'(x) = Kae^{ax}$, ainsi
$ay(x) = a(Ke^{ax}) = Kae^{ax} = y'(x)$.

Réciproquement, nous devons montrer que toute fonction solution est de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$.

Considérons g une solution de l'équation $y' = ay$.
On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = ag(x).$$

Définissons une fonction t par :

$$t(x) = g(x) \times e^{-ax}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$t'(x) = g'(x) \times e^{-ax} - ag(x)\, e^{-ax}$

$t'(x) = e^{-ax}\,(g'(x) - ag(x))$

$t'(x) = 0$

La fonction t est donc une fonction constante.

Il existe un réel K tel que $t(x) = K$ et ainsi $g(x) = Ke^{ax}$.

Pour s'entraîner

De la même façon, montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = -ay$, avec a non nul, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-ax}$, avec K réel.

Exercices calculs et automatismes

17 Existence de primitives

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ admet des primitives sur $]2\,;+\infty[$.

b) Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

18 Primitives de x^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive sur $I =]0\,;+\infty[$.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^7$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **d)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ **e)** $x \mapsto x^{-5}$

19 Logique

Compléter les phrases ci-dessous.

a) Si F est une primitive d'une fonction f sur I, alors toute fonction de la forme **…** est aussi primitive de f sur I.

b) Considérant deux fonctions F et G dérivables sur I, on a : $(F - G)' = 0$ équivaut à **…** .

c) Si deux fonctions f et g continues sur I sont égales, alors leurs primitives **…**

20 Primitives de fonctions usuelles

Choisir la bonne réponse.

1. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ est :

a $x \mapsto \sqrt{x}$ **b** $x \mapsto 2\sqrt{x}$ **c** $x \mapsto -\sqrt{x}$ **c** $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est :

a $x \mapsto x^3 + x^2 + x$ **b** $x \mapsto x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

c $x \mapsto 3\,x^3 + x^2 + x$ **d** $x \mapsto 3x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

3. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

a $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ **b** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **c** $x \mapsto \ln(x)$ **d** $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

21 Primitives et opérations

Recopier et compléter le tableau en proposant une fonction f et une primitive F.

Forme (u fonction dérivable)	$f(x)$	Primitive $F(x)$
$2u'u$		
$\dfrac{u'}{u}$		
$u'e^u$		

22 Équations différentielles

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La fonction $x \mapsto e^{3x}$ est solution de l'équation $y' + 3y = 0$.

b) La fonction $x \mapsto 2 - e^x$ est solution de l'équation $y' - y = 2$.

c) La fonction $x \mapsto 2 + e^{-x}$ est solution de l'équation $y' + y = 2$.

23 Équations différentielles du type $y' = ay$

Choisir la bonne réponse.

1. La fonction $x \mapsto 3e^x$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' = 3y$ **b** $y' = -3y$ **c** $y' = -y$ **d** $y' = y$

2. La fonction $x \mapsto 5e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' = 2y$ **b** $y' = -2y$ **c** $y' = 5y$ **d** $y' = -5y$

24 Équations différentielles $y' = ay + b$

Choisir la bonne réponse.

1. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2}y = 10$ est la fonction constante égale à :

a 20 **b** –20 **c** 10 **d** –10

2. Une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 2$ est :

a $x \mapsto e^{-2x} + 1$ **b** $x \mapsto e^{-2x} - 1$

c $x \mapsto e^{2x} + 1$ **d** $x \mapsto e^{2x} - 1$

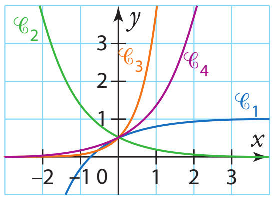
3. La fonction $x \mapsto 2 - e^{-4x}$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' - 4y = 8$ **b** $y' - 2y = 8$

c $y' - 8y = 4$ **d** $y' + 4y = 8$

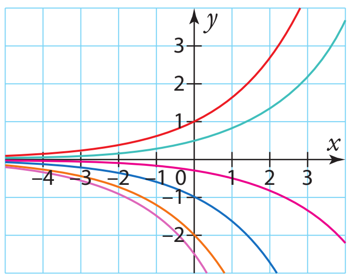
25 Lecture graphique (1)

Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ et qui prend en 0 la valeur $\dfrac{1}{2}$.



26 Lecture graphique (2)

On a représenté ci-dessous certaines solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$.



On considère dans les questions ci-dessous toutes les solutions de l'équation.

1. Soit un point M_0 donné de coordonnées $M_0(x_0\,;\,y_0)$. Combien de courbes passent par M_0 ?

2. Montrer que les tangentes à toutes les courbes au point d'ordonnée 2 sont parallèles à la droite $y = x$.

Exercices d'application

Montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Méthode 1 p. 117

27 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3x + 1$ et $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + e^x$ et $F(x) = \frac{-1}{3}x^3 + e^x + 1$

c) $f(x) = x^4 + x^3 + x$ et $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

28 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$ et $F(x) = -x^2 + x - 8\ln(x-4)$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ et $F(x) = 2\sqrt{x} + x - 1$

29 **1.** Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = xe^x$

b) $f(x) = \frac{(x^2-2x+1)e^x}{(x^2+1)^2}$ et $F(x) = \frac{e^x}{(x^2+1)}$

2. Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = e^x\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)$ et $F(x) = \sqrt{x}e^x$

b) $f(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$ et $F(x) = (x+1)\ln(x) - 1$

30 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = (x+1)^2$ et $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ et $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}$ et $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+3x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

31 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = (3{,}6x + 2{,}4)e^{-0{,}6x} - 1{,}4$ et $F(x) = (-6x - 14)e^{-0{,}6x} - 1{,}4x$

b) $f(x) = (-x^2 + 20x - 2)e^{-0{,}1x}$ et $F(x) = 10(x^2+2)e^{-0{,}1x}$

c) $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ et $F(x) = \frac{e^x}{x}$

d) $f(x) = \frac{-x}{e^x}$ et $F(x) = \frac{1+x}{e^x}$

32 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ et $F(x) = \frac{x}{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{-3 + \ln x}{x^2}$ et $F(x) = \frac{x + 2 - \ln x}{x}$

c) $f(x) = x(2\ln x + 1)$ et $F(x) = x^2\ln x - 1$

d) $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$ et $F(x) = (\ln x)^2 + 5$

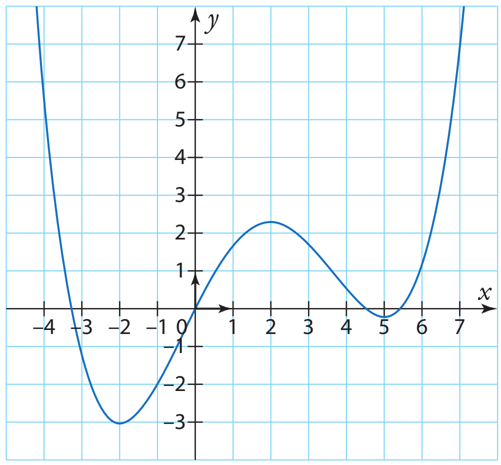
33 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = -4xe^{-2x}$ et $F(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3$

b) $f(x) = \ln x$ et $F(x) = x\ln x - x$

c) $f(x) = 2\,000e^{-0{,}2x} + 15x^2 + 50x$ et $F(x) = -10\,000e^{-0{,}2x} + 5x^3 + 25x^2$

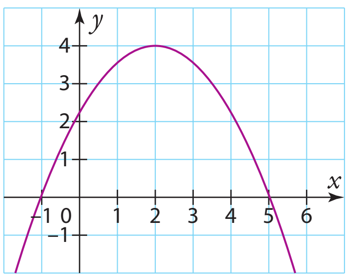
34 La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de f et F une primitive de f.



Choisir la bonne réponse.

a f' est positive sur $[2\,;4]$.
b f' est négative sur $[-3\,;-1]$.
c F est décroissante sur $[2\,;4]$.
d F est décroissante sur $[-3\,;-1]$.

35 La courbe ci-dessous représente une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On note G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.



Choisir la bonne réponse.
La fonction G est :

a convexe sur l'intervalle $[-1\,;5]$
b concave sur l'intervalle $[-1\,;5]$
c croissante sur $[2\,;5]$ **d** décroissante sur $[2\,;5]$

Primitive d'une fonction usuelle

Méthode 2 p. 117

36 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = e^x$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0\,;+\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $I =]0\,;+\infty[$

37 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{5}{3}x^3$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2$; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{-1}{x^4}$; $I =]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; $I =]0\,;+\infty[$

Ensemble des primitives d'une fonction usuelle, primitive avec conditions initiales

Méthode 3 p. 119

38 Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f admet des primitives, puis donner l'ensemble des primitives F de f.

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = x^7$

39 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

a) $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = -e$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$ et $y_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = -5$

d) $f(x) = x^2$; $x_0 = -1$ et $y_0 = 2$

40 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$ et $y_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$; $x_0 = 1$ et $y_0 = \dfrac{5}{6}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et $y_0 = 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$; $x_0 = -1$ et $y_0 = 0$

41 La pente de la tangente en tout point $(x\,;y)$ d'une courbe est égale à $\dfrac{2}{x^2}$. Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point P(–1 ; –2).

Déterminer une primitive

Méthode 4 p. 119

42 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1$

b) $f(x) = x^4 + x^2 + 5$

c) $f(x) = e^x + x^3$

d) $f(x) = 2e^x + 3x^2 + 5$

43 Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions f sur $I =]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x + 2$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + 1$

44 Choisir la bonne réponse.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -3e^{-3x}$ est :

a $x \mapsto -3e^{-3x}$ **b** $x \mapsto e^{-3x} + e^2$

c $x \mapsto -e^{-3x} + 2e$ **d** $x \mapsto 3e^{-3x}$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2xe^{x^2-1}$ est :

a $x \mapsto e^{x^2-1} + e^2$ **b** $x \mapsto 2e^{x^2-1} + e^2$

c $x \mapsto 2xe^{x^2-1} + e^2$ **d** $x \mapsto -e^{x^2-1} + e^2$

3. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x+5)e^{-0{,}2x}$ est :

a $x \mapsto -5(x+5)e^{-0{,}2x}$ **b** $x \mapsto 5(x+5)e^{-0{,}2x}$

c $x \mapsto 5(x+10)e^{-0{,}2x}$ **d** $x \mapsto -5(x+10)e^{-0{,}2x}$

45 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f sur $I = \mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-2x}$

b) $f(x) = -2xe^{-x^2}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)e^{x^3+x}$

d) $f(x) = x^4\,e^{x^5+1}$

46 Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

c) $f(x) = 2(x+1)(x^2+2x)$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x)$

47 Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = 3x\,e^{x^2+1}$ **b)** $f(x) = (5x+1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{x}{3x^2+1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{(3x^2+1)^2}$

Exercices d'application

Déterminer une primitive avec conditions initiales

Méthode 3 et Méthode 4 p. 119

48 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x-2}$; $x_0 = \sqrt{2}$ et $y_0 = 1$

b) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-1)$; $x_0 = -1$ et $y_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x) + x$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 3$

49 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = \dfrac{6x+1}{3x^2+x+1}$; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$; $x_0 = \mathrm{e}$ et $y_0 = 2$

c) $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x+1}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$

50 **1.** Justifier pourquoi la fonction TICE

$\ln(x) \times \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

2. À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, déterminer la primitive qui s'annule en 1.

```
deriver(exp(x)*ln(x))
```

$$\ln(x)*\exp(x) + \frac{\exp(x)}{x}$$

51 On considère la primitive F de la fonction

$f(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 1$.

1. Montrer que F est croissante sur $[-2\ln 4\,;+\infty[$.

2. Déterminer les réels a et b tels que $F(x) = ax + b + \mathrm{e}^{\frac{-1}{2}x}$.

52 Choisir la bonne réponse.

La primitive de la fonction $f : x \mapsto -7x\mathrm{e}^x$ qui prend en 0 la valeur 7 est :

a $F(x) = (-7-7x)\mathrm{e}^x + 14$

b $F(x) = 14 - 7\mathrm{e}^x$

c $F(x) = 14 - 7x\,\mathrm{e}^x$

d $F(x) = (7-7x)\mathrm{e}^x$

53 On considère la fonction f telle que :

$$f : x \mapsto (14x+42)\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}.$$

1. Déterminer les réels a et b de sorte que la fonction $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\frac{-x}{5}}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la primitive qui s'annule en 0.

54 On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - 1 + \mathrm{e}^{\frac{-x}{2}}$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(-1) = 3$.

Équation différentielle $y' = ay$

Méthode 5 p. 121

55 Choisir la bonne réponse.

1. Une solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est :

a $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$ **b** $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ **c** $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ **d** $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$

2. La solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ qui prend la valeur 1 en 0 est :

a $x \mapsto \mathrm{e}^{5x}$ **b** $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-5x}$ **c** $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ **d** $x \mapsto \mathrm{e}^{-5x}$

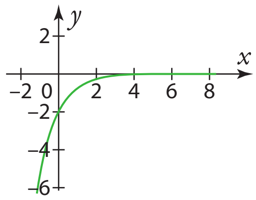
3. La courbe ci-dessous représente :

a une fonction solution de l'équation $y' = -y$

b une fonction solution de l'équation $y' = y$

c une fonction solution de l'équation $y'' = 0$

d une fonction solution de l'équation $y'' = x$



56 **1.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 4y$ **b)** $y' = \dfrac{3}{2}y$

c) $y' + 2y = 0$ **d)** $3y' - y = 0$

57 **1.** Résoudre l'équation $y' - 10y = 0$.

2. Déterminer la solution qui prend en $-0{,}1$ la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

58 **1. a)** Résoudre $2y' + 5y = 0$.

b) Déterminer la solution qui prend en 2 la valeur 1.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{-5}{2}x+5}$.

a) Vérifier que f est la solution trouvée à la question **1. b)**.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

59 Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telles que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids P du moment. Pour certaines espèces de coton, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}21P$.

1. Déterminer la forme de la fonction P.

2. Évaluer le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois .

60 On considère l'équation différentielle **Algo**
$100y' + 12y = 0$ avec pour condition initiale $y(0) = 100$.
1. Résoudre cette équation différentielle.
2. On considère l'algorithme suivant, en langage Python. Indiquer à quoi correspondent les valeurs de a et de b obtenues en sortie de cet algorithme ?

```
from math import*
def f(x):
    return(100*exp(-0.12*x))
a=0
b=5
while(abs(b-a)>0.01):
    m=(a+b)/2
    if f(m)>80:
        a=m
    else:
        b=m
print(a,b)
```

61 **SES** **Thème 1** Ce tableau donne l'évolution des ventes d'un produit commercialisé depuis 2000.

Rang de l'année à partir de 2000	0	5	10	15	19
Montant des ventes en milliers d'euros	0,8	1,3	2,17	3,59	5,34

1. Ces résultats incitent à ajuster ces ventes par une fonction $f: x \mapsto ae^{bx}$, avec a et b réels. Déterminer les valeurs de a et de b telles que $f(0) = 0{,}8$ et $f(10) = 2{,}17$.
On donnera une valeur arrondie de b au millième.
2. Écrire l'équation différentielle dont f est solution.
3. Estimer, en milliers d'euros, le montant des ventes en 2023.

Équation différentielle $y' = ay + b$

Méthode 6 p. 121

62 Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 2y - 1$ **b)** $y' = \dfrac{-1}{4}y + 1$

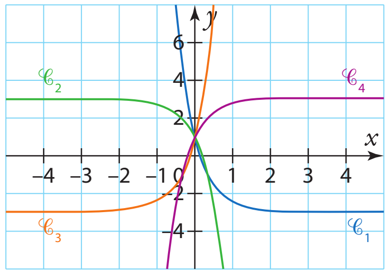
c) $y' + 2y = 3$ **d)** $2y' - 5y = 1$

63 Choisir la bonne réponse.
1. Une solution de l'équation différentielle $y' + 7y = 21$ est :
a $x \mapsto e^{-7x} + 3$ **b** $x \mapsto e^{7x} - 3$
c $x \mapsto e^{-7x} - 3$ **d** $x \mapsto e^{7x} + 3$

2. La solution de l'équation différentielle $y' = -y + 5$ qui prend la valeur 1 en 0 est :
a $x \mapsto 5 - 4e^{-x}$ **b** $x \mapsto 1 - e^{-5x}$
c $x \mapsto e^{x}$ **d** $x \mapsto 5 - 4e^{-5x}$

64 **1.** Résoudre $y' - 2y = 5$.
2. Déterminer la solution qui prend en 0 la valeur 0.

65 Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ et qui prend en 0 la valeur 1.



66 **1. a)** Résoudre l'équation $5y' - y = 4$.
b) Déterminer la solution qui prend en 5 la valeur −5.
2. On considère la fonction $f: x \mapsto -4 - e^{\frac{1}{5}x - 1}$.
a) Vérifier que f est la solution trouvée à la question **1. b)**.
b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Modélisation par une équation différentielle

Méthode 8 p. 123

67 **Thème 2** Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en minutes).
On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $Q'(t) = 0{,}1 - kQ(t)$.
1. Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et t.
2. La limite de $Q(t)$ en $+\infty$ dépend-elle de k ?
Interpréter dans le contexte.
3. Calculer k sachant qu'au bout de 3 heures Q est égale à la moitié de la valeur limite.

68 Dans un environnement où la température est maintenue à zéro degré Celsius, la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Dans une pièce où la température est maintenue à 0 °C, un objet chauffé à 100 °C voit sa température chuter à 45 °C en dix minutes.
On note $T(t)$ la température (en °C) de l'objet après t minutes.
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T.
Déterminer la fonction T solution.
2. En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25 °C ? On arrondira à la minute.

Exercices d'entraînement

Déterminer des primitives

69 On considère la fonction $x \mapsto f(x) = (x-5)e^{\frac{x}{5}} + 5$.

1. Déterminer les réels a et b de sorte que la fonction $x \mapsto F(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{5}}$ soit une primitive de $x \mapsto (x-5)e^{\frac{x}{5}}$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

70 Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ?

Pour les questions **1.** et **2.**, on admet que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. On considère la fonction $x \mapsto u(x) = 3\ln x - 2x + 1$.

Proposition 1 : la fonction $x \mapsto 3x\ln x - x^2 + x$ est une primitive de u sur $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{e^2}\ln x$.

Proposition 2 : Toute primitive F de f est telle que $F(e^2) - F(e) = 1$.

3. On considère la fonction $x \mapsto g(x) = 6e^{-2x+1}$.

Proposition 3 : La fonction $x \mapsto G(x) = 3(1 - e^{-2x+1})$ est la primitive de g qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

71 En remarquant que $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui prend la valeur 1 en e.

72 À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, **TICE**

déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ qui s'annule en 1.

```
deriver(ln(sqrt(x^2+1)))
```

$$\frac{x}{x^2+1}$$

73 On considère une fonction F de la forme $F(x) = axe^{1-x}$.

1. Déterminer le réel a de sorte que F soit une primitive de la fonction $f(x) = (2-2x)e^{1-x}$.

2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$. En particulier, donner la primitive qui prend en 0 la valeur 2,75.

Étude complète d'une fonction primitive

74 On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F dans le repère (O, I, J).

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, F est une primitive de la fonction $f(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de F sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Bac S, France métropolitaine, 2015.

75 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = te^{t-1} + 1.$$

1. Montrer que, pour tout réel t, f est une primitive de $(t+1)e^{t-1}$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

76 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{e^x+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + 2 + \ln(4) - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

b) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

D'après Bac S, France métropolitaine, 2015.

77 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x^2 + x + 2)e^x.$$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F' désigne la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.

1. a) Déterminer $F'(-1)$ et $F'(2)$.

b) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

2. On admet qu'il est possible de trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $F(x) = (ax^2 + bx - 1)e^x$.

a) Exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de a et b.

b) En utilisant les résultats trouvés à la question **1. a)**, démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x$.

c) Étudier les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

78 Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaines de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures. **SES**

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1\,;5]$, la recette mensuelle est modélisée par $r(x) = 6 + x + 2\ln(x)$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [1\,;5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

b) Étudier les variations de r sur l'intervalle $[1\,;5]$.

3. a) Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;5]$, puis donner une valeur approchée de α au millième.

b) Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

4. a) Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1\,;5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$. Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1\,;5]$ par $G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$ est une primitive de la fonction g.

b) En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle $[1\,;5]$.

D'après Bac ES, France métropolitaine, septembre 2018.

Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Méthode 7 p. 122

79 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 10$.

Proposition 1 : Les fonctions $x \mapsto e^{2x} + 5$ et $x \mapsto 5$ sont les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E).

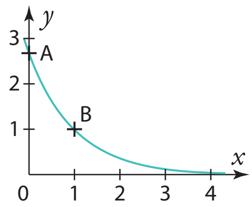
Proposition 2 : Les solutions sont de la forme $x \mapsto e^{2x} + 5k$, avec k réel.

2. Considérons l'équation (F) : $y = y' + x^2$.

Proposition 3 : La fonction $x \mapsto e^x - x^2$ est solution.

Proposition 4 : Si un polynôme P est solution alors il est du second degré.

80 On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$. Algo



1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.

2. Soit c un réel donné de l'intervalle $[1 ; e]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = c$ d'inconnue x.

3. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^{1-x}$.

4. On considère l'algorithme suivant écrit en langage **Python**.

```
from math import*
def fonction_solution(x):
      return(e**(1-x))
p=int(input( "p=", ))
x=0
while fonction_solution(x)>10**(-p):
      x=x+1
print(x)
```

Pourquoi est-on certain que, pour n'importe quel entier naturel p rentré, l'algorithme va s'arrêter ?

81 Choisir la bonne réponse.

1. Soit G la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $G(x) = x\ln x - x + 2$.
G est une primitive de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

a $g(x) = x\ln x - 1$ **b** $g(x) = \ln x + 2x$

c $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ **d** $g(x) = \ln x$

2. On considère la fonction H, définie pour tout réel x, par

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1).$$

H est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

a $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ **b** $h(x) = \dfrac{-e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

c $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$ **c** $h(x) = 1 - \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

3. On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 3$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution f de cette équation telle que $f(0) = 0$ est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a $f(x) = 0{,}6e^{5x} + 0{,}6$ **b** $f(x) = -0{,}6e^{-5x} + 0{,}6$

c $f(x) = 0$ **d** $f(x) = -3e^{-5x} + 3$

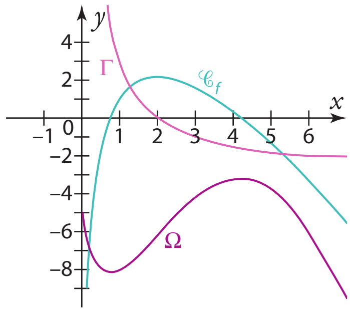
4. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ ainsi que les courbes Γ et Ω. L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.

a Les courbes représentant respectivement f' et F sont Γ et Ω.

c Les courbes représentant respectivement f' et F sont Ω et Γ.

b On ne peut pas savoir quelles sont les bonnes courbes.

d La courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse 2.



Équations différentielles dans un contexte

82 SES Thème 9

1. On considère l'équation différentielle $y' = -0{,}7y$. La solution f de cette équation telle que $f(0) = e^{2,1}$ représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix. Donner l'expression de $f(x)$.

2. La fonction g définie par $g(x) = 0{,}5x + 0{,}7$ est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.
On appelle h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

b) Étudier le signe de $h'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$. En déduire que la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.

c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note p_0 le prix d'équilibre et q_0 la quantité échangée sur le marché à ce prix. Dans la situation étudiée, on a donc $f(q_0) = g(q_0)$.
Déduire des questions précédentes la valeur de q_0, puis calculer p_0.

Exercices d'entraînement

83 En biologie, un modèle proposé pour la croissance d'êtres vivants est le suivant : tout individu de taille maximale M admet une vitesse de croissance proportionnelle à la taille manquante. Autrement dit, si on note $C(t)$ la taille à l'instant t, cette fonction est solution de l'équation différentielle $C'(t) = k(M - C(t))$. SVT Thème 2

1. Résoudre cette équation différentielle en supposant que $C(0) = 0$.

2. Vérifier que C est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.

3. Une espèce de maïs a une taille maximum de 180 cm et met 15 jours pour atteindre la moitié de celle-ci. Au bout de combien de jours sera-t-elle à moins de 10 cm de sa taille maximale ?

84 Dans une économie keynésienne simple, la consommation C s'exprime par l'égalité $C = 360 + 0{,}8Y$ et $I = 120$, où Y est le revenu et I l'investissement. SES Thème 2

Lorsque le marché est hors de l'équilibre on peut supposer que le taux d'ajustement du revenu Y vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0{,}25(C + I - Y).$$

À la période initiale, le revenu Y_0 est égal à 2 000.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction Y.

2. Déterminer la fonction Y.

3. Étudier la limite de la fonction Y en $+\infty$ et en déduire une conclusion sur la stabilité de l'équilibre de cette économie.

85 On considère une fonction f qui modélise sur l'intervalle [0 ; 14] la fonction coût total de production, en euros, d'un produit. Les lois de la logistique ont permis d'établir que la fonction $P = \frac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle SES Thème 1

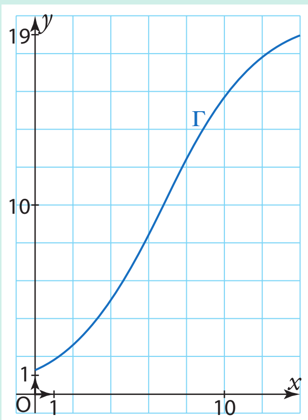
$P' = -0{,}4P + 0{,}02$ avec $P(0) = \frac{4}{5}$.

1. Déterminer la fonction P puis vérifier que la fonction f s'écrit $f(q) = \frac{20}{1 + 15\mathrm{e}^{-0{,}4q}}$.

Préciser la valeur de $f(0)$.

2. Étudier les variations de f sur [0 ; 14].

On donne ci-contre la représentation graphique Γ de la fonction f.



3. Pour tout q dans l'intervalle [0 ; 14], le quotient $\frac{f(q)}{q}$ est appelé coût moyen de production de q tonnes de produit.

a) Pour q dans l'intervalle [0 ; 14], soit Q le point d'abscisse q de la représentation graphique Γ de la fonction f. Montrer que le coefficient directeur de la droite (OQ) est égal au coût moyen $\frac{f(q)}{q}$.

b) L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production. Par lecture graphique, indiquer la valeur de q qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

86 Soit l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Algo

Grâce à l'équation de la tangente à une courbe en un point, on sait que, pour une fonction f dérivable en x_0 et pour un réel h assez petit $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

La méthode d'Euler utilise cette approximation et l'égalité $f'(x) = 3f(x) + 5$, pour tout x réel, pour reproduire des couples $(x_n\,;y_n)$ représentant des points tels que $y_n \approx f(x_n)$.

On choisit un pas h fixe et petit, les abscisses $x_1, x_2, ..., x_n$ se calculent pour tout i compris entre 0 et $n - 1$ par $x_{i+1} = x_i + h$.

Pour obtenir les valeurs successives $y_1, y_2, ..., y_n$, les calculs s'enchaînent de la manière suivante :

Conditions initiales $y(0) = 1$.
- On calcule $y'(0)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(0) = 3y(0) + 5$.
- On calcule $y(1)$ en utilisant l'approximation affine $y(1) = y(0) + y'(0) \times h$.
- On calcule $y'(1)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(1) = 3y(1) + 5$.
- On calcule $y(2)$ en utilisant l'approximation affine $y(2) = y(1) + y'(1) \times h$.
- Et ainsi de suite …

1. Justifier que, pour i compris entre 0 et $n - 1$, on a $y(i + 1) = (3h + 1)y(i) + 5h$.

L'ensemble des points $A_i(x_i\,; y_i)$ donne une courbe représentant la fonction $y(t)$, avec une bonne approximation lorsque h est petit.

2. Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en **Python**

PYTHON Lien mini lienmini.fr/maths-c05-07

```
from lycee import*
from math import*
from pylab import*
def methode_euler(x,y,h,n) :
      X_liste=[x]
      Y_liste=[y]
      xlim(-1,1)
      ylim(0,10)
      for i in range :
            x=x+...
            y=...
            X_liste.append(x)
            Y_liste.append(y)
      return X_liste , Y_liste

method_euler(0,1,0.1,100)
X,Y=methode_euler(0,1,0.1,100)
plot(X,Y,"r+")
show( )
```

87 Temps de refroidissement

Algo

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C. Théo lui rétorque que quand il sera à 37 °C il pourra le toucher sans risque et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela. La température du plat est donnée par une fonction g dépendant du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}04y = 0{,}8.$$

1. a) Trouver une fonction constante solution de (E).
b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
c) Donner sa solution g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, répondre aux questions suivantes.
a) La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 °C ?
b) Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.
c) Écrire un algorithme qui permet de trouver la minute à partir de laquelle le plat est à une température de 30 °C. Programmer cet algorithme sur la calculatrice.

Bac STI2D, Polynésie, 2013.

88 Croissance de bactéries

Algo SVT

Le nombre de bactéries B d'une culture passe de 600 (à l'instant 0) à 1 800 en 2 heures. On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes.
1. Trouver :
a) une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
b) une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ au temps t.
c) le nombre de bactéries après 4 heures.
d) le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.
2. Compléter cet algorithme afin qu'il donne le résultat attendu à la question **1. d)** (à la demi-heure près).

```
t ← 0
B ← 600
Tant que …
   12 000
t ← …
Fin tant que
```

89 Un modèle de bénéfice

SES

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 2009. Chaque année est identifiée par son rang. À l'année 2009, est attribué le rang 0 et à l'année $2009 + n$ le rang n. Ainsi, 2011 a le rang 2. Le tableau suivant indique pour chaque rang d'année x_i le bénéfice ou la perte réalisé(e), exprimé(e) en milliers d'euros et noté(e) y_i.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	– 25,000	– 3,111	9,892	17,788	22,598	25,566

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction.
On fait l'hypothèse que la fonction f solution de l'équation $2y' + y = 30$ permettra une bonne modélisation.
1. Déterminer la fonction f.
2. On considère que l'approximation des bénéfices par f est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées x_i est inférieure à 0,5. L'approximation par f est-elle satisfaisante ? (Le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question.)
3. En considérant toujours ce modèle :
a) En quelle année le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera-t-il 29 800 euros ?
b) Ce bénéfice atteindra-t-il 30 000 euros ? Justifier.

90 Carbone 14

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).

A ▶ On admet que f est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}124y$ (E).
1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15{,}3$.

B ▶ On admet que la fonction f est définie par $f(t) = 15{,}3\mathrm{e}^{-0{,}124t}$ sur $[0 ; +\infty[$.
1. Déterminer les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f au voisinage de l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

C ▶ On rappelle que la fonction f donnée dans la partie **B** donne la concentration en carbone 14 dans un organisme après sa mort en fonction de t (en milliers d'années).
1. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à 7,27 unités. Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.
2. Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté à l'aide du carbone 14.

Exercices bilan

91 Décharge d'un condensateur physique

Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ohms. En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de t secondes aux bornes du condensateur, u est alors une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{RC}y = 0$.

1. Résoudre l'équation et en déduire la fonction u.
2. Dans cette question $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$. Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-t-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

92 Loi de refroidissement de Newton Chimie

Un corps est placé dans une enceinte dont on maintient la température constante égale à 20 °C. À l'instant initial $t = 0$ sa température est égale à 70 °C et, après 5 minutes, elle n'est plus que de 60 °C. La température du corps (exprimée en degré Celsius) est une fonction T du temps (exprimé en minutes) définie sur $[0\,;+\infty[$; la loi de refroidissement de Newton énonce que T' est proportionnelle à $T - 20$.

1. Justifier que la fonction $t \mapsto T(t) - 20$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ky$, puis déterminer la fonction T.
2. Au degré près, à quelle température sera le corps après une demi-heure ? À la minute près, au bout de combien de temps aura-t-il une température de 40 °C ?

93 Écran plat

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.
Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{1}{20}y(10 - y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.
a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E_1) : $z' = \dfrac{-1}{2}z + \dfrac{1}{20}$.
b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{\frac{-1}{2}x} + 1}$.
3. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Bac S, Pondichery, novembre 2008.

94 Épidémie Algo

On étudie la progression d'une épidémie de grippe dans une population pendant 30 jours. Au début, on constate que 0,01 % de la population est contaminé. Pour t appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0{,}01$. On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie (E) : $y' = 0{,}05y(10 - y)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par $f = \dfrac{1}{y}$.
Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si f satisfait aux conditions $f(0) = 100$ et $f' = -0{,}5f + 0{,}05$.
2. a) Déterminer une expression de f, puis en déduire celle de la fonction y.
b) À quoi sert l'algorithme suivant dans le contexte de cette étude ?

```
from math import*
def epi(x) :
    return(1/(99.9*exp(-0.5*x)+0.1))
x=0
while epi(x)<5 :
    x=x+1
print(x)
```

3. a) Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.
b) Étudier la limite de y en $+\infty$ et l'interpréter.

95 Équation $y' = ay + \varphi$ où φ est une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

A ▸ Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.
1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

B ▸ On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.
1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $(x) = 3e^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - e^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

Déterminer la primitive d'une fonction

Fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F avec k réel
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n$, n entier négatif non nul sauf -1	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + k$

Fonctions composées

Forme de la fonction	Primitive à une constante près
$u'u$	$\frac{u^2}{2}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u \neq 0$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u

Résoudre une équation différentielle

$y' = f$

Trouver une solution revient à trouver une primitive de f.

$y' = ay$

Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

$y' = ay + b$

- Une solution particulière constante est de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a}$.
- Les solutions générales sont de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a} + Ke^{ax}$, avec K réel.

Préparer le BAC **Je me teste**

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle	Méthode 1	1, 2, 27, 28
▶ Déterminer une primitive	Méthode 2, Méthode 3, Méthode 4	3, 5, 7, 36, 38, 42, 48
▶ Résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$	Méthode 5, Méthode 6	9 à 12, 55, 62
▶ Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$	Méthode 7	13, 14, 79, 80
▶ Modéliser des phénomènes	Méthode 8	15, 16, 67, 68

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c05-08

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
96 La fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln(x)$ est une primitive de :	$x(1+2\ln(x))$	$x(1+\ln(x))$	$x - 2x\ln(x)$	$2x\ln(x)$
97 La solution f de l'équation différentielle $y' = 2y - 6$ et qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est :	$f(x) = -2e^{-2x} + 3$	$f(x) = -2e^{2x} + 3$	$f(x) = -2e^{-2x} - 3$	$f(x) = -2e^{2x} - 3$
98 La fonction $x \mapsto -3e^{-x}$ est solution de l'équation différentielle :	$y' = y$	$y' + y = 0$	$y' = 3y$	$y' + 3y = 0$
99 On considère l'équation (E1) : $y' = 2 - 2y$. On appelle u la fonction solution de (E1) telle que $u(0) = 0$. On a alors $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ égal à :	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	-1
Pour les exercices **100** et **101**, on considère l'équation (E2) : $y' = -y + 2$. On appelle f la fonction solution de (E2) telle que $f(\ln 2) = 1$.				
100 La limite de f en $+\infty$ est égale à :	$+\infty$	$-\infty$	0	2
101 La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur :	2	-2	0	$\frac{1}{2}$
Pour les exercices **102** et **103**, on considère l'équation (E3) : $2y' + y = 10$. On appelle g la fonction solution de (E3) telle que $g(2) = 11$.				
102 La limite de g en $-\infty$ est égale à :	$+\infty$	$-\infty$	0	10
103 La courbe représentative de g admet au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation :	$y = -x$	$y = x$	$y = \frac{1}{2}x$	$y = \frac{-1}{2}x$

104 Culture de microbes

SVT

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.
La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer, en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

Méthode 5 p. 121

105 Primitives et équation $y' = ay + b$

Choisir la bonne réponse.

1. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 5$.
La valeur de $f(2)$ est :

a $2e^{-4} + 3$ **b** $2e^{4} + 3$
c $5e^{-4} + 3$ **d** $5e^{4} + 3$

2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$. La primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :

a $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$ **b** $F(x) = \dfrac{3}{x}$
c $F(x) = x\ln(x) + 3$ **d** $F(x) = x\ln(x) - x + 4$

3. On considère l'équation différentielle $y' + 7y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels.
La solution f de cette équation telle que $f(0) = 9$ est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a $f(x) = 9e^{7x}$ **b** $f(x) = 9e^{-7x}$
c $f(x) = -9e^{7x}$ **d** $f(x) = -9e^{-7x}$

4. On considère la fonction $f(x) = 80 - 20e^{0,025x}$.
La primitive de f qui s'annule en 0 est :

a $F(x) = 800(1 + x - e^{0,025x})$

b $F(x) = 800(1 - x - e^{0,025x})$

c $F(x) = 800\left(1 + \dfrac{x}{10} - e^{0,025x}\right)$

d $F(x) = 800\left(1 - \dfrac{x}{10} - e^{0,025x}\right)$

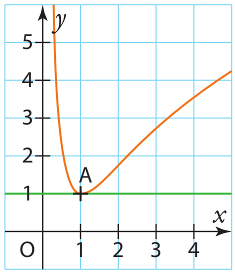
Méthode 6 p. 121

D'après Bac STI2D, France métropolitaine, 2018.

106 Lecture graphique

On considère une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par
$f(x) = \dfrac{a}{x} + b + 4\ln x$ où a et b sont des réels à déterminer.

On donne ci-contre sa courbe représentative dans un repère orthonormé ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

2. Vérifier que le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.

3. Soit la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$F(x) = (4x + 4)\ln(x) - 7x.$$
Montrer que F est une primitive de f.

Méthode 6 p. 121

107 Loi de Newton

La loi de Newton dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la différence entre sa température T et la température ambiante T_0 (supposée constante), ce qui se traduit par l'équation $T' = \alpha(T - T_0)$, où α est appelé constante de proportionnalité et est déterminée par des expériences en laboratoire. Les températures sont exprimées en dégrés Celsius. Si la température initiale est 100 °C, alors on établit que $\alpha = -0,1$.
La pièce est supposée maintenue à une température de 20 °C.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction T dans cette situation.

2. a) Vérifier que la fonction constante égale à 20 est solution de l'équation.
b) En déduire la solution T.

Méthode 6 p. 121

108 Équation logistique

Un biologiste observe la croissante d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1 000 bactéries.
Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures).
Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :
$$N'(t) = 0,07N(t)(1 - 10^{-3}\,N(t)).$$
On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul.

On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

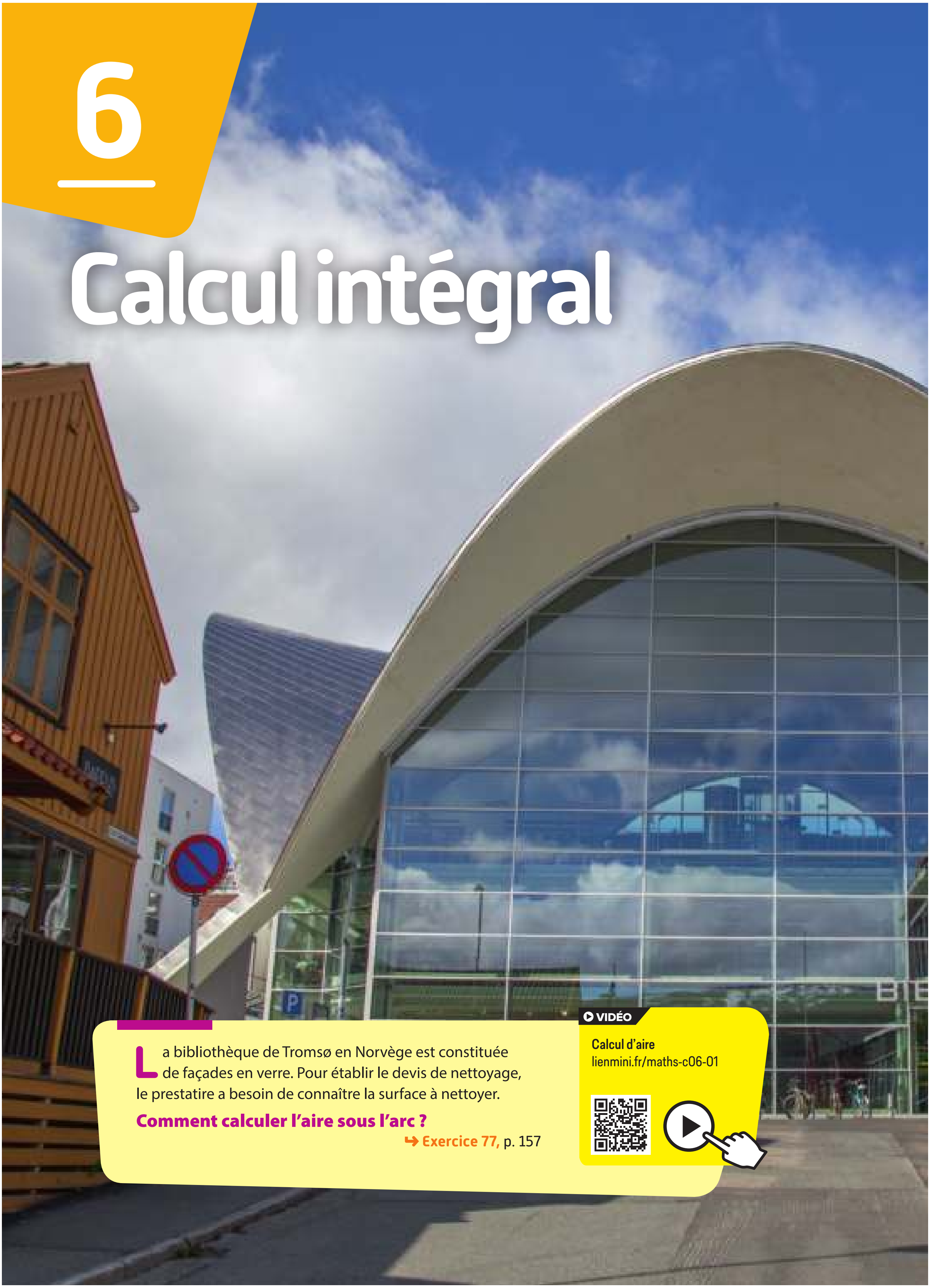
1. Montrer que P est solution de l'équation différentielle $y' = -0,07y + 7 \times 10^{-5}$.

2. En déduire l'expression de $P(t)$ puis celle de $N(t)$.

Méthode 8 p. 123

6

Calcul intégral



La bibliothèque de Tromsø en Norvège est constituée de façades en verre. Pour établir le devis de nettoyage, le prestataire a besoin de connaître la surface à nettoyer.

Comment calculer l'aire sous l'arc ?

↪ Exercice 77, p. 157

VIDÉO

Calcul d'aire

lienmini.fr/maths-c06-01

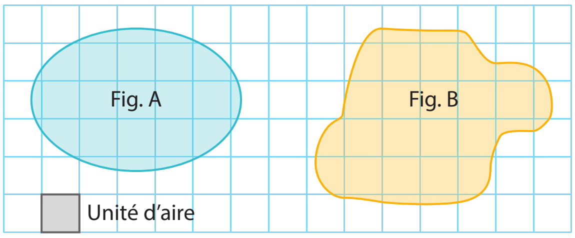
Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c06-02

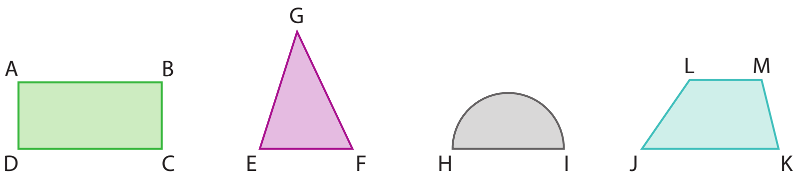
Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des aires

a) Déterminer un encadrement de l'aire exprimée en unités d'aire pour chaque figure ci-dessous.



b) Écrire les formules des aires des figures suivantes.



2 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

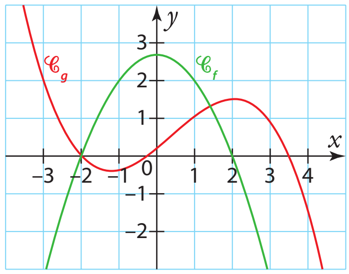
On considère les fonctions f et g dont une représentation graphique est tracée ci-contre.

Déterminer graphiquement :

a) le signe de la fonction f sur $[-3 ; 4]$,

b) le signe de la fonction g sur $[-3 ; 4]$,

c) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur $[-3 ; 4]$.



3 Déterminer le signe d'une fonction

On considère les fonctions $f : x$ $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et $g : x \mapsto x - 1$ définies sur l'ensemble des réels.

1. Étudier le signe des fonctions f et g sur l'ensemble des réels.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble des réels.

4 Déterminer une primitive

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto 5x^4 - x^3 + x$

b) $g : x \mapsto \dfrac{2x}{(3 + x^2)^3}$

c) $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$

d) $h(x) = x^2 e^{x^3 + 1}$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

f) $k(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Activités

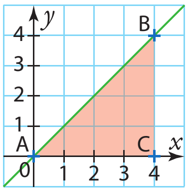
Algo 55 min Thème 4

1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive

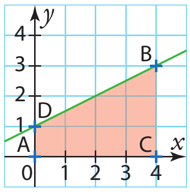
A ▸ Aire sous la courbe d'une fonction

Dans chacun des cas, donner la valeur de l'aire sous chacune des courbes entre les abscisses 0 et 4, en unités d'aire.

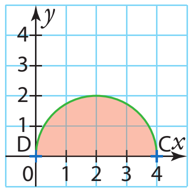
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = 0{,}5x + 1$

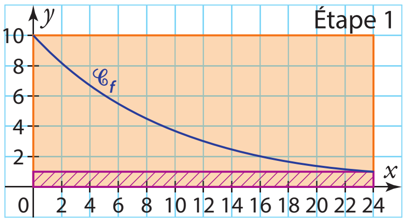


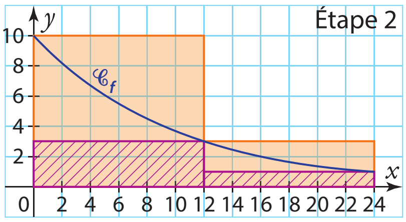
c) $f(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2}$

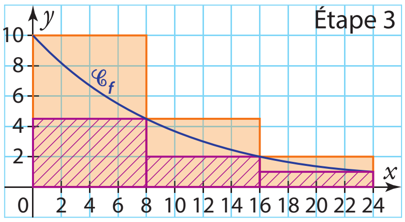


B ▸ Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

On considère la fonction f définie sur $[0\,;24]$ par $-x\ln\left(\dfrac{9}{24}\right) + \ln(10)$ représentée en bleu ci-dessous. Pour estimer l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe de f entre 0 et 24, on découpe l'aire de deux manières différentes.







1. Proposer un schéma de l'étape 4 puis décrire la construction des rectangles.

2. On note U_n la somme des aires des rectangles hachurés et V_n la somme des aires des rectangles colorés à l'étape n. On a donc $U_1 = 24 \times f(24)$ et $V_1 = 24 \times f(0)$. Exprimer U_2 et V_2 en fonction de f, puis U_3 et V_3.

3. L'intervalle $[0\,;24]$ est maintenant découpé en 12. Comment pensez-vous que les deux suites (U_n) et (V_n) évoluent ? Et si le découpage augmente, que se passe-t-il ?

4. Proposer un programme **Python** permettant de déterminer U_n et V_n. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x\mapsto\infty} V_n$?

Remarque Ce nombre, correspondant à l'aire $\mathcal{A}$, se note $\displaystyle\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C ▸ Déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles

On considère la fonction $g(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$ et les suites (U_n) et (V_n) représentant les suites des sommes des rectangles définis comme précédemment.

1. Modifier le programme **Python** pour proposer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer U_1 et V_1 en fonction de g, puis U_2 et V_2 et enfin U_3 et V_3.

b) Démontrer que $U_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$. En déduire que $U_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

c) Démontrer que $V_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$. En déduire que $V_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

3. Justifier l'encadrement $U_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant V_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ en appliquant l'encadrement avec n très grand.

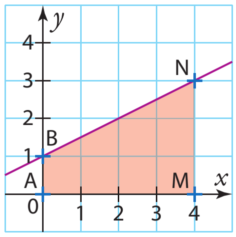
↪ Cours 1 p. 142

20 min

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

A ▸ Intégrale d'une fonction affine

On considère la fonction $f(t) = \frac{2}{3}t + 2$ sur $\mathbb{R}^+$. M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(t\,;0)$ et N le point de la courbe de f d'abscisse t.



1. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(t)$ du trapèze AMNB est égale à $\mathscr{A}(t) = \frac{1}{3}t^2 + 3t$.

2. Exprimer à l'aide d'une intégrale cette aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et t.

3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathscr{A}$. Quel lien peut-on faire entre la fonction f et $\mathscr{A}$?

B ▸ Intégrale de la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \sqrt{t}$ et dont la courbe représentative est notée $\mathscr{C}$. Soit un réel $x > 0$, on désigne par $\mathscr{S}_x$ la surface sous $\mathscr{C}$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la surface $\mathscr{S}_x$.

1. Justifier la notation $\mathscr{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit h un nombre réel tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$.

a) Si $h > 0$, représenter l'allure de $\mathscr{C}$ ainsi que la surface d'aire $\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)$.

b) En encadrant cette aire, démontrer que $\sqrt{x} \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant \sqrt{x+h}$.

c) Déterminer de même un encadrement de $\frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ lorsque $h < 0$.

3. Démontrer que $x \mapsto \mathscr{A}(x)$ est dérivable pour tout $x > 0$ et en donner la fonction dérivée.

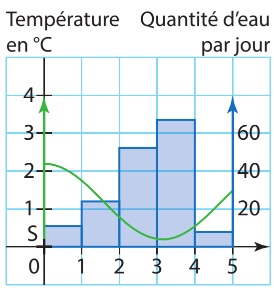
Que peut-on alors dire de la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$?

↪ Cours 2 p. 144

15 min

3 Valeurs moyenne d'une fonction

Pendant ses vacances dans une station de ski, Sam relève la quantité d'eau qui est tombée ainsi que les températures grâce à une station météo qui affiche le graphique suivant.



1. Voici le relevé des quantités d'eau de pluie par jour.

Jour	1	2	3	4	5
Quantité d'eau en mm	12	24	52	64	8

a) Quelle est la valeur moyenne de cette série ?

b) Donner l'interprétation géométrique de la valeur moyenne.

2. La courbe des températures est modélisée par la fonction f définie par $1{,}2 + \cos(x)$ sur $[0\,;5]$.

a) Exprimer l'aire sous la courbe.

b) Quelle est la hauteur du rectangle de longueur 5 qui a la même aire que celle sous la courbe ? Par extension, ce nombre est la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;5]$.

↪ Cours 2 c p. 146

Cours

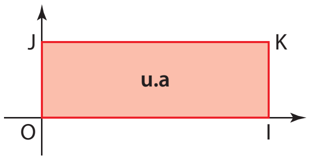
1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$,
l'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle ayant pour côté [OI] et [OJ]

Exemple

Dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ. Si OI = 3 cm et OJ = 1 cm alors 1 u.a. = 3 cm^2.

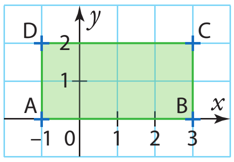


Définition Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire de la surface (aussi appelée domaine sous la courbe de f sur $[a\,;b]$) délimitée par :
• la courbe, • l'axe des abscisses, • les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire.
On la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple

Soit f la fonction constante définie par $f(x)=2$.
Alors $\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Aire(ABCD)} = 2\times 4 = 8$ u.a.



Remarques

① $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel positif.

② $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car cette intégrale est l'aire d'un segment.

③ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que des valeurs de a, b et f. La variable x est dite « muette » on peut la remplacer par une autre lettre : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u\ldots$

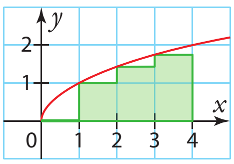
Propriété Méthode des rectangles inférieurs et supérieurs

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de même amplitude et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ». On note $\mathscr{A}_i$, resp. $\mathscr{A}_s$, l'aire des rectangles inférieurs (resp. supérieurs). Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_s = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

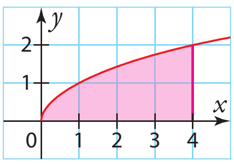
De plus, si la fonction est monotone : $\mathscr{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A}_s$.

Exemple Pour $n = 4$

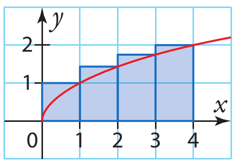
$\mathscr{A}_i$



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



$\mathscr{A}_s$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer une intégrale par calcul d'aire

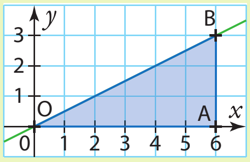
Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x$

Solution

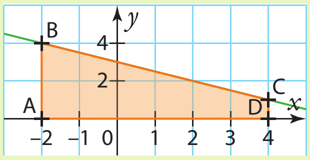
a) On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 0{,}5x$ 1 sur $[0\ ;6]$ et f est une fonction linéaire continue et positive sur $[0\ ;5]$. 2



$\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle OAB. 3

D'où $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$.

b) On trace la courbe représentative de g définie par $g(x) = 3 - 0{,}5x$ sur $[-2\ ;4]$ et on identifie le domaine sous la courbe. 1



g est continue et positive sur $[-2\ ;4]$ et $\int_{-2}^4 3-0{,}5x\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze ABCD. 2

D'où $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{AD \times (AB+DC)}{2} = \dfrac{6 \times (4+1)}{2} = 15$. 3

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f dans un repère orthogonal et identifier le domaine sous la courbe.

2 Vérifier que la fonction est continue et positive sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.

3 Déterminer l'aire du domaine sous la courbe

À vous de jouer !

1 Calculer $\int_2^5 2x\ \mathrm{d}x$.

2 Calculer $\int_{-4}^{-1} -2u-1\mathrm{d}u$.

↪ Exercices 29 à 34 p. 152

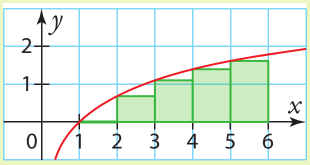
Méthode 2 Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

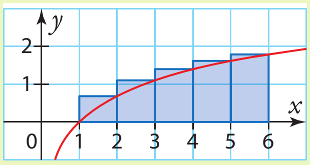
Énoncé

En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\mathrm{d}x$.

Solution

1





$\mathscr{A}_i = 0 + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5)$

$\mathscr{A}_i = \ln(120)$

$\mathscr{A}_s = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) + \ln(6)$

$\mathscr{A}_s = \ln(720)$

2 On en déduit $\ln(120) \leqslant \int_1^6 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \ln(720)$.

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f et tracer les rectangles inférieurs et supérieurs.

2 Calculer l'aire des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

À vous de jouer !

3 En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 10 intervalles égaux, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\mathrm{d}x$.

4 Soit $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2x+1)}{6}$.

Diviser [–2 ; 2] en 10 intervalles égaux, estimer $\int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

↪ Exercices 35 à 37 p. 152

Cours

2 Intégrale et primitive

a Fonction positive

Théorème Existence d'une primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c06-04

Remarque La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Théorème Condition suffisante d'existence d'une primitive d'une fonction

Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque Ce théorème ne donne pas directement une expression explicite de $F(x)$.

Exemple

La fonction ln est continue sur $[1\,;20]$, donc ln admet des primitives sur $[1\,;20]$.
La fonction F définie sur $[1\,;20]$ par $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Propriété Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Toute Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On notera communément $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration

Pour tout élément $a \in [a\,;b]$, les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ et $x \mapsto F(x) - F(a)$ sont deux primitives de f qui s'annulent en a. Elles sont égales et le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

b Fonction continue

Définition Généralisation de la définition de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque La méthode des rectangles s'applique à toute fonction continue.

Propriété Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$. Soit $b \in [a\,;c]$. On a $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^c = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque Si f est continue et positive et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents.

$\mathcal{A}_{totale} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ ou $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

Solution

a) La fonction $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ admet pour primitive la fonction

$F: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x$. **1** $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}=\frac{269}{6}$. **2**

b) Soit h définie sur $[1\ ;\mathrm{e}]$ par $h(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$. On reconnaît une expression ressemblant à $\frac{v'}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 2x$ et $v'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$.Donc une primitive est

$H: H(x)=\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)$ est une primitive de h. **3**

$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)\right]_{1}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\times\ln(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e})-\frac{1}{2}\times\ln(2)=1+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\ln 2$ **4**

Conseils & Méthodes

1 Chercher une primitive de f notée F.

2 Calculer l'intégrale c'est calculer $F(4) - F(-1)$.

3 Un candidat primitive est $\ln(v)$. $(\ln(v(x)))'=\frac{2x+2}{x^2+2x}$ d'où une primitive de g.

4 Calculer $H(\mathrm{e}) - H(1)$.

À vous de jouer !

5 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{2}^{3}\frac{3x^2-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$

6 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{2}\frac{1}{(2x-3)^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{1}2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

↪ Exercices 38 à 41 p. 152

Méthode 4 Utiliser la relation de Chasles

Énoncé

Soit la fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<0\\ e^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$. Déterminer $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Solution

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc intégrable. $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x$ **1**

$\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}(-x+1)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{0}=7{,}5$ **2**

$\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{5}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^5=\mathrm{e}^5-1$ **2**. On en déduit $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=6{,}5+\mathrm{e}^5$.

Conseils & Méthodes

1 Décomposer l'intervalle d'intégration $[-3\ ;5]$ en intervalles sur lesquels la fonction ne change pas d'expression.

2 Calculer chaque intégrale séparément.

À vous de jouer !

7 Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ avec $f(x)$ définie par :

$x \mapsto x+1$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$ et par $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8 Soit f définie sur $\mathrm{I} = [-1\ ;1]$ par :

$f(x)=\begin{cases}0{,}25x+3 & \text{si } x<0\\ 2x+3 & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur I.

↪ Exercices 42 à 44 p. 153

Cours

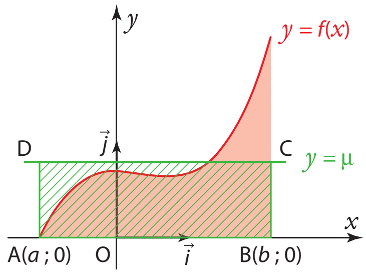
C Valeur moyenne d'une fonction

Définition Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Remarque Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

Lorsque f est une fonction positive, on peut dire que l'aire sous la courbe de la fonction f entre a et b est donc égale à l'aire du rectangle ABCD de « largeur » $b - a$ et de « hauteur » μ.



Propriété Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et μ la valeur moyenne de f sur$[a\,;b]$.
Alors $a \leqslant \mu \leqslant b$.

3 Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriété Aire sous la courbe d'une fonction continue et négative

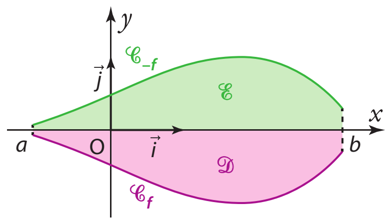
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (exprimée en unités d'aire).

Démonstration

Par symétrie, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine E, c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par $g(x) = -f(x)$. g étant continue et positive, l'aire de $\mathscr{D}$ est donc égale à : $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (exprimée en u.a.).

La primitive de g, G, est égale à l'opposé de la primitive de F : $G = -F$.

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = -F(b) + F(a) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Propriétés Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$.
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

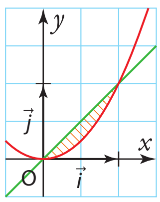
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

exprimée en unités d'aire.

Exemple

Soit f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Comme pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $x < x^2$, l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à :

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ \text{u.a}$$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer la valeur moyenne m de la fonction f sur [2 ; 5].

2. Donner une interprétation géométrique.

Solution

1. f est continue, $m = \frac{1}{5-2} \int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. **1** Or $\int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_2^5 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ donc $m = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$.

2. La fonction f est positive. **2** La valeur moyenne calculée est la longueur d'un rectangle de largeur 3 qui a la même aire que le domaine sous la courbe sur [2 ; 5].

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule de la moyenne.

2 Vérifier que la fonction f est positive pour interpréter la valeur moyenne.

À vous de jouer !

9 Déterminer la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-10t}$ sur [0 ; 2].

10 Calculer $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur [1 ; 4] est égale à 2.

↪ Exercices 45 à 49 p. 153

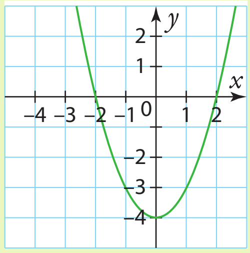
Méthode 6 Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Énoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer :

a) l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

b) l'aire $\mathscr{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = 1$.



Solution

a) f est négative entre −2 et 2. **1** $\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x$ **2**

Une primitive de $x^2 - 4$ est $\frac{x^3}{3} - 4x$ donc

$$\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = -\left(-8+\frac{8}{3}\right)+\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

b) f est positive sur [−5 ; −2] et négative sur [−2 ; 1]. **1**

$$\mathscr{B} = \int_{-5}^{-2}(x^2-4)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1}(x^2-4)\mathrm{d}x$$ **3** $$\mathscr{B} = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-5}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{1} \; 3 = 36.$$

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x)$ entre −2 et 2.

2 Écrire l'égalité entre aire et intégrale. f étant négative, c'est l'opposé de l'intégrale de f qui est égale à l'aire

3 Décomposer l'intervalle [−5 ; 1] en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant, puis calculer l'intégrale ou son opposé sur chacun des intervalles.

À vous de jouer !

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -5$ *et* $x = -3$.

12 Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^3 + 1$.

1. Montrer que la solution de $g(x) = 0$ est $x = 2$.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -3$ et $x = 4$.

↪ Exercices 50 à 52 p. 153

Exercices résolus

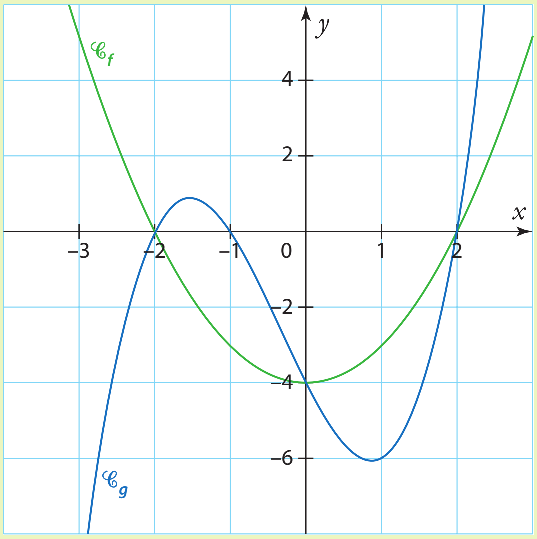
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Calculer une aire entre deux courbes

Cours 3 p. 146

Énoncé

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



Solution

$f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x^2 - 4)(x + 1)$ **1**

$f(x) - g(x) = (x^2 - 4)(1 - x - x)$

$f(x) - g(x) = -x(x^2 - 4)$

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	-2		0		2
$x^2 - 4$	0	−	−4	−	0
$-x$		+	0	−	
$f(x) - g(x)$	0	−	0	+	0

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0 ; 2]$ et en dessous sur $[-2 ; 0]$. **1**

$\mathscr{A} = \int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$ **2**

$\mathscr{A} = \int_{-2}^{0} x(x^2 - 4) + \int_{0}^{2} -x(x^2 - 4)\mathrm{d}x$ **3**

$\mathscr{A} = \left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$

$\mathscr{A} = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4}$

$\mathscr{A} = 8$ u.a.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.

2 Écrire une égalité entre intégrales et aire en décomposant l'intervalle initial suivant le signe de $f - g$.

3 Calculer les intégrales.

Thème 4

À vous de jouer !

13 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 1$
et $g(x) = x + 1$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

14 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 0{,}25x^2 - x - 3$
$g(x) = -0{,}5x^2 - x + 9$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

Exercices 69 à 73 p. 155

Exercices résolus

Méthode 8 Interpréter une intégrale

↪ Cours 3 p. 146

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $f(x) = 4\ln(3x+1) - x + 3$.

1. On note F la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $F(x) = \dfrac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \dfrac{x^2}{2} - x$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

2. On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

D'après Bac ES 2012

Solution

1. a) $F(x) = \dfrac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \dfrac{x^2}{2} - x$ est dérivable sur [0,5 ; 18] et

$$F'(x) = \frac{4}{3}(3x+1) \Box \frac{3}{3x+1} + 4\ln(3x+1) - \frac{2x}{2} - 1 \quad \mathbf{1}$$

$F'(x) = 4 + 4\ln(3x+1) - x - 1$

$F'(x) = f(x)$

F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) $\displaystyle\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = F(8) - F(1) = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{64}{2} - 8 - \frac{16}{3}\ln(4) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5.$

$\displaystyle\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x \approx 61{,}4$ à 10^{-1} près.

2. x est exprimé en centaines de pièces donc une production entre 100 et 800 pièces correspond à $1 \leqslant x \leqslant 8$. **2**

La valeur moyenne de la fonction f est égale à $\mu = \dfrac{1}{8-1}\displaystyle\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\mu = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{100}{3}\ln(25) - \dfrac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5\right)$

f s'exprime en milliers d'euros donc $\mu \approx 8{,}772\,755$ milliers d'euros ou $\mu \approx 8\,772{,}755$ euros. **2**

Une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près est 8 700 euros.

Conseils & Méthodes

1 On calcule la dérivée de F

2 On étudie les unités du problème.

↪ Thème 1

À vous de jouer !

15 L'entreprise NVIDIO, spécialisée dans la fabrication de cartes graphiques, contrôle la qualité des condensateurs. D'après le cahier des charges, un condensateur est supposé conforme si l'énergie consommée est inférieure à 20 J. Cette énergie (en Joules) correspond à l'aire de la surface sous la courbe de la puissance instantanée p (exprimée en Watts) entre 0 et 10 secondes. Expérimentalement, on établit que la puissance instantanée d'un condensateur est donnée par la fonction :

$$f(t) = 20te^{-t}.$$

1. Montrer que $F(t) = (-20x - 20)e^{-x}$ est une primitive de f.

2. Les condensateurs ainsi fabriqués correspondent-ils au cahier des charges ?

16 On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)e^{-0{,}5x}.$$

La fonction f modélise la demande d'un produit informatique. $f(x)$ représente la quantité, en milliers, d'objets lorsque le prix unitaire est de x centaines d'euros.

1. Étudier les variations de f

2. Montrer que F définie par :

$$F(x) = (-2x - 20)e^{-0{,}5x}$$

est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Calculer la demande pour un un prix unitaire de 200 euros à un produit près.

4. Déterminer la valeur moyenne de la demande, à 10 produits près, pour un prix compris entre 200 et 400 euros.

D'après bac ES Liban juin 2008

↪ Exercices 74 à 78 p. 154

Exercices apprendre à démontrer

▶ VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c06-04

La propriété à démontrer

Soit f une fonction continue positive et croissante sur $[a\,;b]$.

Déterminer la dérivée de la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.

▶ On souhaite démontrer la propriété.

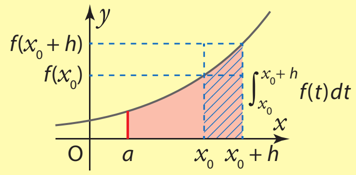
▶ Comprendre avant de rédiger

On ne peut pas utiliser les théorèmes de dérivation classique. On revient donc à la définition de la fonction dérivée. On détermine $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}$. Cette limite est obtenue en calculant la limite à gauche puis à droite. Cela signifie que la fonction F_a est une primitive de f.

▶ Rédiger

Étape 1 On s'intéresse à la limite à droite.

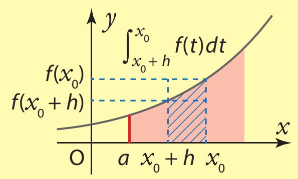
$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ correspond à l'aire de la surface hachurée en bleu.



Par croissance de f, l'aire de la surface sous la courbe de f entre x_0 et x_0+h est encadrée par l'aire du rectangle de dimensions h et $f(x_0)$ et celle du rectangle de dimensions h et $f(x_0+h)$.

Étape 2 On s'intéresse à la limite à gauche.

Cette fois $x_0+h < x_0$, on obtient un encadrement de $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ par une aire de rectangle.



Étape 3 On conclut.

$F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, F_a est la primitive de f qui s'annule en a.

La démonstration rédigée

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in [a\,;b]$.

Si $h > 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$F_a(x_0+h)-F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \int - \int^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$

f est croissante, on a l'encadrement suivant:

$hf(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant hf(x_0+h)$

D'où : $f(x_0) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

f est continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Ainsi,

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Si $h < 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$F_a(x_0)-F_a(x_0+h) = -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$

f est croissante, on a l'encadrement suivant :

$-hf(x_0+h) \leqslant -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leqslant -hf(x_0)$

$f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0$ et donc

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

La limite à gauche est égale à la limite à droite de 0 donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. F_a est dérivable sur $[a\,;b]$ et $F_a' = f$.

▶ Pour s'entraîner

Démontrer le théorème d'existence d'une primitive dans le cas où la fonction est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.

DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c06-05

Exercices calculs et automatismes

17 Primitive
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{1}(3x^2+4x+3)\mathrm{d}x$ est égale à :

a $[x^3+2x^2+3]_{-1}^{1}$. b $[x^3+2x^2+3x-8]_{-1}^{1}$.
c $[6x+1]_{-1}^{1}$. d 8.

18 Calcul d'intégrale (1)
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{0}^{3} t\,\mathrm{d}t$ est égale à :

a 3. b 9.
b 1,5. b 4,5.

19 Calcul d'intégrale (2)
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{1}(2t+1)\mathrm{d}t$ est égale à :

a l'aire sous la courbe entre –1 et 1. b 2.
c $\int_{0}^{1}(2t+1)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(2t+1)\mathrm{d}t$. d 0.

20 Calcul d'intégrale (3)
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ est égale à $[\ln(1-x)]_{-2}^{0}$. ☐ ☐

21 Valeurs moyennes (1)
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

La valeur moyenne de la fonction carré sur $[-2\,;0]$ est $\frac{4}{3}$. ☐ ☐

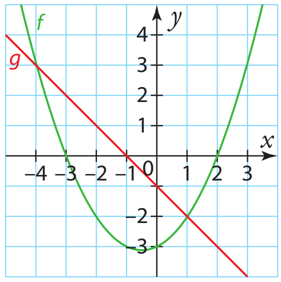
22 Valeurs moyennes (2)
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
1,5 est la valeur moyenne sur $[0\,;3]$ de la fonction :

a $f(x)=4-x^2$. b $f(x)=x$.
c $f(x)=2x+1$. d $\frac{1}{3}[x]_{-2}^{4}$.

23 Calcul d'intégrale (3)
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

$\int_{0}^{\ln(3)}\frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}x$ est égale à $-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$. ☐ ☐

Pour les exercices 24 à 28, on considère les fonctions *f* et *g* définies sur ℝ par :
$f(x)=0{,}5(x-2)(x+3)$
et $g(x)=-x-1$



24 Calcul d'intégrale (5)
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

a 4,5. b l'aire d'un demi-carré de côté 3.
c $\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}$. d $\int_{-4}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x$.

25 Aire sous la courbe
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
L'aire de la surface entre la courbe de *f* et l'axe des abscisses entre $x=-4$ et $x=3$ est :

a $\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x$. b 2□ $\int_{-4}^{-0{,}5} f(x)\mathrm{d}x$. c $\frac{47}{4}$ u.a.

d 2□ $\int_{-4}^{-3}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{2}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x$

26 Estimer une intégrale
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? V F

a) $\int_{-1}^{1} f(x)x\,\mathrm{d}x$ < à $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x$. ☐ ☐

b) $\int_{1}^{2} f(x)x\,\mathrm{d}x$ > à $\int_{1}^{2} g(x)\mathrm{d}x$. ☐ ☐

27 Aire entre deux courbes
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
L'aire comprise entre la courbe de *f* et de *g* entre $x=-4$ et 0 est égale à :

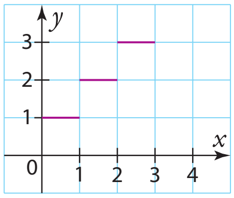
a $\int_{-4}^{0}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$. b $\int_{-4}^{0}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$.
c $[-0{,}5x^2-1{,}5x-0{,}5]_{-4}^{0}$. d $\frac{2}{3}$ u.a.

Exercices d'application

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

Méthode 1 p. 143

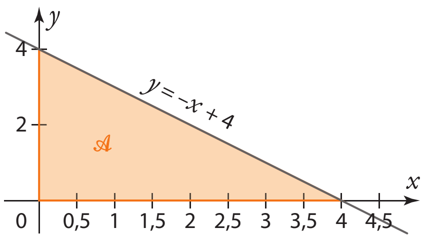
28 On considère la fonction *f* affine par morceaux représentée ci-dessous.



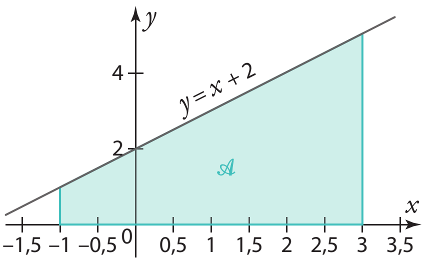
1. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 3.
2. On considère la fonction g définie sur [0,3] par $g(x) = f(x) + 2$. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction g entre 0 et 3.

29 Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le point A sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et d'abscisse 2 ainsi que le point B sur la droite d'équation $y = 2x$ et d'abscisse 3.
Déterminer l'aire du triangle OAB.

30 Calculer $\int_0^4 (-x+4)\,dx$.



31 Calculer $\int_{-1}^3 (x+2)\,dx$.



32 Calculer les intégrales suivantes.

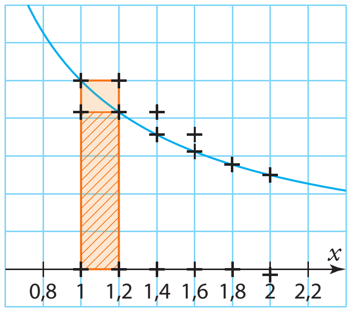
a) $\int_0^1 x\,dx$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,dt$ **c)** $\int_2^4 (-y+3)\,dy$

33 Calculer l'aire sous la courbe des fonctions suivantes sur [0 ; 3].
a) $x \mapsto x$. **b)** $x \mapsto 2$. **c)** $x \mapsto -x+3$.

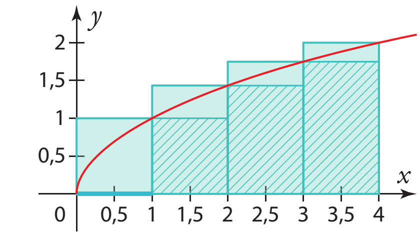
Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

Méthode 2 p. 143

34 On considère la fonction inverse sur [1 ; 2].
1. On partage l'intervalle [1 ; 2] en cinq intervalles de même amplitude. Quelle est la longueur d'un intervalle ?
2. Quelle est l'aire du rectangle coloré en rouge ? Quelle est l'aire du rectangle hachuré ?
3. En considérant deux séries de rectangles, déterminer un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur [1 ; 2].



35 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ a été encadré par deux séries de quatre rectangles de base 1 comme sur le graphique ci-dessous.



Estimer $\int_0^4 f(x)\,dx$.

36 **1.** Tracer l'allure de la courbe de la fonction logarithme sur l'intervalle [5 ; 10].
2. En partageant [5 ; 10] en dix intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de $\int_5^{10} \ln(t)\,dt$.

Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Méthode 3 p. 145

37 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\int_0^4 (t-3)\,dx$ **b)** $\int_0^{11} (1-x)\,dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$ **d)** $\int_{-1}^4 (2t^3 - 3t^2 - 4t + 2)\,dt$

38 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-2x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$

39 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 x(2-x^2)^3\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} t(t^2-1)\,\mathrm{d}t$ **d)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x$

40 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_4^{15} \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$

Utiliser la relation de Chasles

Méthode 4 p. 145

41 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1;2] \\ -t+3 & \text{si } t \in]2;3] \\ t+3 & \text{si } t \in]3;4] \end{cases}$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{-1}^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

42 On considère la fonction g définie sur $[-6\,;6]$ de période égale à 2. Sur $[-1\,;1]$, la fonction g est égale à $|x|$.

1. Construire la courbe représentative de g sur $[-5\,;5]$.

2. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_{-6}^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

43 Soit f définie sur $[0\,;3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{1} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur son intervalle de définition.

Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Méthode 5 p. 147

44 Soit la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f : x \mapsto x^2 + 3$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur l'intervalle de définition.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

45 Soit la fonction définie sur $[\mathrm{e}\,;4]$ par :

$$g : x \mapsto \frac{x}{(x^2-3)}.$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur $[\mathrm{e}\,;4]$.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

46 Calculer $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de g sur $[1\,;3]$ est égale à $\ln(2)$.

47 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ est égale à $\dfrac{2}{\pi}$ et que la fonction f est paire.

48 Donner l'expression de la valeur moyenne de toute fonction linéaire sur un segment $[a\,;b]$.

Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Méthode 6 p. 147

49 **1.** Représenter dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$.

2. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. **b)** $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Déterminer le signe de f sur $[-2\,;3]$.

4. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 1.

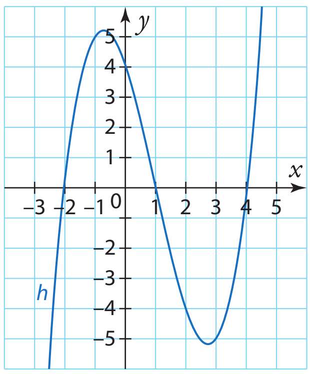
5. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 3.

50 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 0{,}5(x+2)(x-1)(x-4)$ dont une représentation est donnée ci-contre.

1. Déterminer le signe de h sur $[-2\,;4]$.

2. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre 1 et 4.

3. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre -3 et 4.



51 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}.$$

1. Déterminer le signe de f sur $[-5\,;6]$.

2. Déterminer l'aire sous la courbe de f et l'axe des abscisses entre -5 et 6.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-5}^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Comparer les résultats des questions **2.** et **3.**.

Exercices d'entraînement

Calculs d'intégrales

52 Soit f et g les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x) \quad \text{et } g(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer $g'(x)$. déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\int_1^e f(x)\,dx$.

53 **1.** En remarquant que $x = x + 1 - 1$, déterminer deux réels a et b tel que $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.

2. Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = 1 - \ln(2)$.

54 **1.** Montrer que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

55 On considère la fonction f définie sur $]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

2. Calculer $\int_4^5 f(x)\,dx$.

56 On définit sur $[0 ; 1]$ la fonction C par :

$$C(x) = \sqrt{2x - x^2} + 1.$$

On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de C et on considère le point I(1 ;1).
1. Justifier que C est positive sur $[0 ; 1]$.
2. Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$. Démontrer que la distance IM est constante et égale à 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 C(t)\,dt$.

Aire sous la courbe

57 On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0 ; 1] \\ \frac{1}{t} \text{ si } t \in [1,3] \end{cases}$$

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses entre 0 et 3.

58 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$.
a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
b) Déterminer u_n en fonction de n.

59 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + x - 2$.
Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et $1{,}5$.

60 On considère la fonction : $x \mapsto \frac{-4}{(x+2)^2}$.
Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et 1.

61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

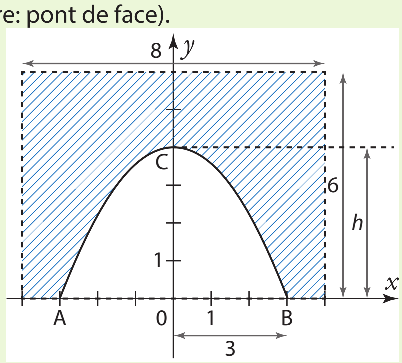
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} \text{ si } x \leqslant 2 \\ e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

1. Vérifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.

62 On considère la fonction $f : x \mapsto |x^2 + x - 2|$.
1. Déterminer le signe de $x^2 + x - 2$ en fonction de x.
2. En déduire une expression de $I = \int_{-3}^2 f(x)\,dx$ comme somme de trois intégrales.
3. Calculer I et $J = \int_{-3}^2 (x^2 + x - 2)\,dx$. Comparer I et J.

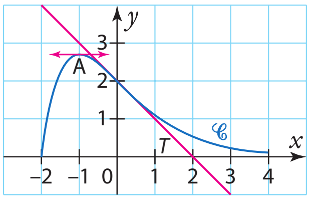
63 **Démo** Une autoroute doit traverser une voie ferrée. Une entreprise est chargée de construire un pont par-dessus la voie ferrée pour laisser passer l'autoroute.
La longueur totale du pont est de 8 m; sa hauteur de 6 m (voir figure: pont de face).



L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur $h = 4$ m et d'axe de symétrie (Oy).
Les points A et B sont tels que OA = OB = 3 m.
Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieure ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.
1. On considère le repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) où 1 cm représente 1 m.
Une équation de la parabole dans ce repère est de la forme: $y = ax^2 + c$.
Déterminer c, puis a.
2. Déterminer l'aire de l'ouverture déterminée par l'arc de parabole.
3. Vérifier que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges exposées dans l'énoncé.

D'après Bac pro Travaux publics 1993

64 On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$. On nomme A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.



- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;4]$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ au point A est horizontale.
- La droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et a pour équation $y=-x+2$.

A ▶ 1. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
b) Déterminer le signe de $f'(2)$.
c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.
2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ exprimée en unité d'aire.

B ▶ La fonction f de la partie **A** a pour expression :

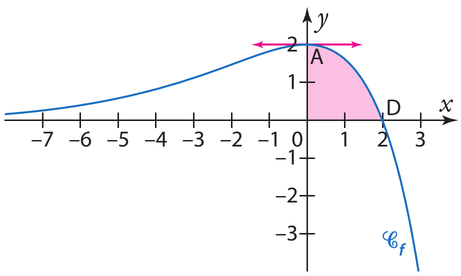
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $F(x)=(-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.
4. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.
b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question **2.** de la partie **A**.

65 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. À l'aide de la figure, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}$ est comprise entre 2 et 4.
2. a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer la valeur exacte de $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

D'après Bac ES Amérique du Nord 2013

Fonction définie par une intégrale

66 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \int_{0}^{x} (1-\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier le signe de la fonction en fonction de x sur cet intervalle.

67 Déterminer les variations de F, définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(x) = \int_{0}^{x} (1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\ .$$

Aire d'un domaine entre deux courbes

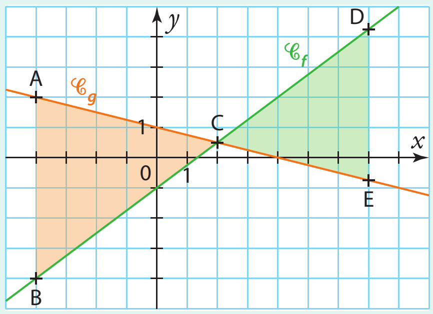
Méthode 7 p. 148

Thème 4

68 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x-1 \text{ et } g(x) = -\frac{1}{4}x+1.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.

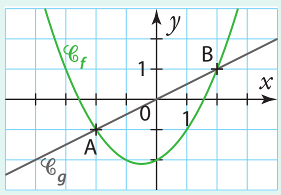


1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer l'aire entre les deux droites représentant les deux fonctions entre 2 et 7.

69 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2 \text{ et } g(x) = 0{,}5x.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.



1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.
2. Résoudre $f(x) < g(x)$.
2. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

Exercices d'entraînement

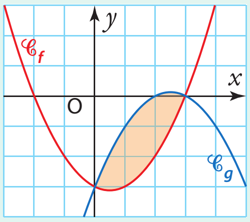
70 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

Thème 4

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3 \text{ et}$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont été tracées ci-dessous.

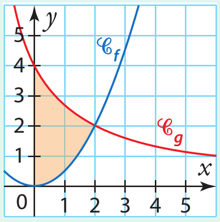


1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.
2. Sur quel intervalle la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$?
3. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

71 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2} \quad \text{et } g(x)=\frac{8}{x+2}.$$

On s'intéresse au domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=a$ ($a>0$).



1. a) Montrer que 2 est racine du polynôme $N(x)=x^3+2x^2-16$.
b) Déterminer 3 réels b, c et d tels que
$N(x)=(x-2)(bx^2+cx+d)$.
c) En déduire le signe de $f(x)-g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. On suppose que $a<2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
3. On suppose que $a \geqslant 2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

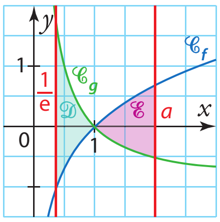
72 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

TICE

$$f(x)=\ln(x) \text{ et } g(x)=\frac{1}{x}-1.$$

On définit :
- le domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, la droite $x=\mathrm{e}^{-1}$ et la droite d'équation $x=1$.
- le domaine $\mathscr{E}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, la droite $x=1$ et la droite $x=a$ ($a>1$).

On cherche a tel que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.



1. a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et proposer une une valeur possible de a.
b) Donner le tableau de signes de $f(x)-g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Soit $h(x)=x\ln(x)+x-1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
a) Calculer $h'(x)$. Que peut-on dire de h ?
b) Étudier les variations de la fonction h.
c) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
4. a) Montrer que l'aire du domaine $\mathscr{E}$ est égale à $(a-1)\ln(a)$.
b) Étudier les variations de la fonction $k(x)=(x-1)\ln(x)$.
c) Déterminer a telle que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.

Interpréter une intégrale

Méthode 8 p. 149

Thème 1

73
Une usine produit des pièces métalliques. On note x la production en dizaine de pièces et le bénéfice obtenu par la vente de ces pièces est donné par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x)=-0{,}04\mathrm{e}^x+x-1$$

1. Établir les variations de la fonction f.
2. Tracer la courbe et donner sans justifier une valeur approchée a 10^{-1} par excès du réel α tel que $f(\alpha)=0$ avec $\alpha>2$.
3. Calculer $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Déterminer la quantité q_0 de pièces à produire et à vendre pour un bénéfice maximal, et calculer une valeur approchée de ce bénéfice maximal arrondie à 10 euros près.
5. Déterminer la quantité q_1 , supérieure à q_0, à partir de laquelle l'entreprise travaille à perte.
6. À 1 euro près par défaut, calculer le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise quand elle produit et vend entre 20 et 40 pièces.

D'après Bac

74
Une machine-outil achetée neuve coûte 10 milliers d'euros. Au bout d'un an, son prix de revente a diminué de 18 % et on admet qu'il en est ainsi chaque année.
1. Quel est le prix de revente en milliers d'euros au bout de trois années ?
2. On note V_n le prix de revente de la machine au bout de n années, en milliers d'euros.
a) Exprimer V_n en fonction de n.
b) Déterminer par le calcul le nombre d'années à partir duquel le prix de revente de la machine sera inférieur ou égal à 1,5 millier d'euros.
3. Soit k la fonction définie sur $[0\,;8]$ par : $k(x)=10\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}$. On admet que $k(n)$ est une bonne approximation de V_n pendant les 8 premières années. On note I, l'intégrale : $I=\int_0^5 k(x)\,\mathrm{d}x$.
a) Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée arrondie à l'unité la plus proche.
b) Estimer la valeur moyenne du prix de revente de la machine sur cinq années d'utilisation, puis en donner une valeur approchée

D'après Bac

75 Un supermarché souhaite acheter des fruits à un paysan. Thème 1

Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés. Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$en euros du kilogramme de fruits est donné pour $x \in [100\,;+\infty[$ par la formule : $P(x)=\dfrac{x+300}{x+100}$

Par exemple si le supermarché achète 300 kg de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300)=\dfrac{600}{400}=1{,}50$ € le kg.

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300\times 1{,}5=450$ euros au fournisseur pour cette commande.

A ▶ Étude du prix proposé par le fournisseur

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$.

2. Montrer que $P'(x)=\dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction P.

B ▶ Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme). Pour $x\in[100\,;+\infty[$, cette somme est donc égale à : $S(x)=xP(x)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S'(x)=\frac{x^2+200x+30\,000}{(x+100)^2}$$

3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$:

$$S(x)=x+200-20\,000\times\frac{1}{x+100}.$$

4. En déduire une primitive T de S sur $[100\,;+\infty[$.

C ▶ Étude de différentes situations

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits. Préciser, au kg près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.

2. Le supermarché estime acheter régulièrement, selon les saisons, entre 400 et 600 kg de fruits à ce fournisseur. Déterminer la valeur moyenne de S sur [400 ; 600] et donner le résultat arrondi à l'unité.

D'après Bac ES Amérique du Nord 2011

76 Thème 1 **1.** On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=10e^{t\ln(0,9)}$

a) Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$

b) Représenter f sur l'intervalle [0 ; 10]. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chaque axe.

2. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n=10e^{n\ln(0,9)}$.

a) Démontrer que la suite v est géométrique. Est-elle monotone ?

b) Représenter la suite v par un diagramme en bâtons dans le même repère que f.

c) Calculer $S=v_0+v_1+\ldots+v_9$ et $S'=v_1+v_2+\ldots+v_{10}$.

3. On appelle I l'intégrale $\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) En interprétant I, S et S' comme des aires, démontrer graphiquement que $S'<I<S$.

b) Calculer la valeur exacte de I.

c) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0 ; 10].

4. Une voiture a une valeur d'achat de 10 000 €. On estime que sa valeur marchande (en euros constants) diminue de 10 % par an.

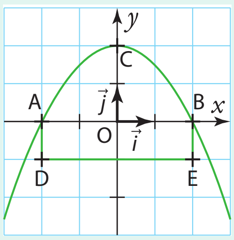
a) Démontrer que sa valeur au bout de n années, exprimée en milliers d'euros, est v_n.

b) Au bout de combien d'années sa valeur est-elle inférieure à 4 000 € ?

c) Évaluer sa valeur moyenne sur 10 ans d'utilisation.

D'après Bac ES 2012

77 Pour établir le devis de nettoyage de la façade de la bibliothèque de Tromsø, le prestataire de service doit établir la surface à nettoyer. On cherche donc à calculer l'aire qui se compose d'un rectangle surmonté par une surface délimitée par une courbe parabolique. On définit un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ orthonormé d'unité 10 mètres. La hauteur [OC] de la parabole est égale à 20 mètres et sa largeur [AB] vaut 40 m.



1. La parabole est la courbe représentative d'une fonction f de la forme $f(x)=b-ax^2$ avec a et b deux réels positifs. Déterminer a et b.

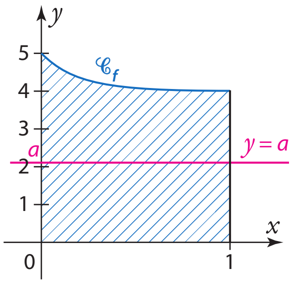
2. Déterminer l'aire de la façade en u.a., puis en m^2.

Exercices bilan

78 Égalité des aires

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = 4 + e^{-5x}.$$



On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessus la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessus.

1. Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.
2. Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.

D'après Bac ES 2017

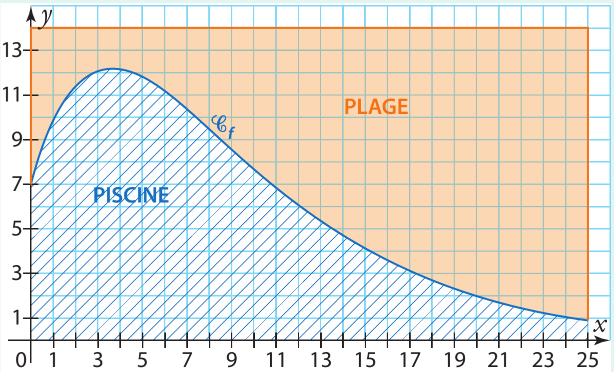
79 Quelle forme de plage pour la piscine

Thème 4

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable.
Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

La bordure est modélisée par la fonction f définie par :

$$f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}.$$



1. Montrer que $F(x) = (-25x - 160)e^{-0,2x}$ est une primitive de f.

2. Quelle est l'aire en m² de la zone hachurée représentant la piscine ?

3. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie. Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?

D'après Bac ES 2018

80 Vendre des voitures

Économie

Thème 1

Une entreprise vend des voitures télécommandées.
La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

b) Étudier les variations de r sur l'intervalle [1 ; 5].

3. a) Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $G(x) = 2x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction g.

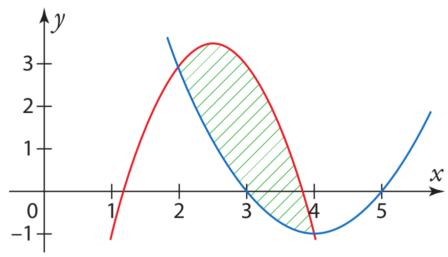
b) En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle [1 ; 5].

c) Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

D'après Bac ES 2018

81 Aire entre deux courbes

Soit $f : x \mapsto x^2 - 8x + 15$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 10x - 9$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont une représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Calculer l'aire du domaine hachuré.

CONTRÔLE CONTINU

Préparer le BAC L'essentiel

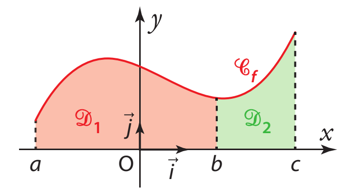
Définition de l'intégrale

- **Définition**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

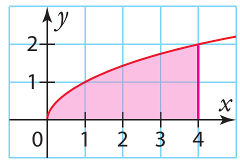
- **Relation de Chasles**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



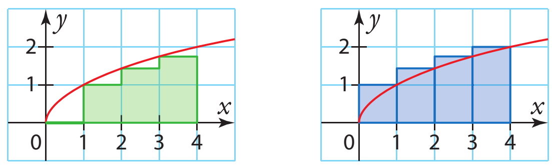
Aire sous la courbe d'une fonction positive

- **Calcul exact**



$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

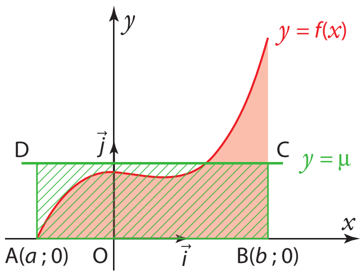
- **Estimation : méthode de rectangles**



$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_i = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_s = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

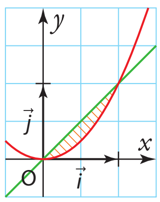
Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



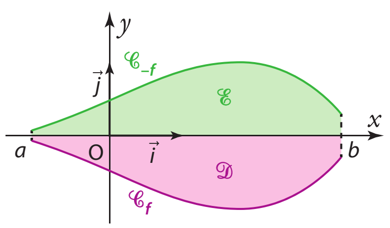
Aire entre deux courbes

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$



Aire sous la courbe d'une fonction négative

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



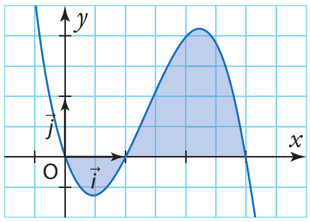
Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de …		Parcours d'exercices
▶ Estimer une intégrale par calcul d'aire	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 29, 30, 3, 4, 35, 36
▶ Calculs d'intégrales en utilisant les primitives et la relation de Chasles	Méthode 3, Méthode 4	5, 6, 38, 39, 7, 8, 42, 43
▶ Déterminer la valeur moyenne d'une fonction	Méthode 5	9, 10, 45, 46
▶ Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale	Méthode 6, Méthode 8	11, 12, 50, 51, 15, 16, 74, 75
▶ Calculer une aire entre deux courbes	Méthode 7	13, 14, 69, 70

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c06-06

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-contre.



	A	B	C	D
82 L'unité d'aire est la surface de	1 carreau.	2 carreaux.	3 carreaux.	4 carreaux.
83 Soit $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$:	$I \geqslant 0$	$I \leqslant 0$	I est l'aire sous la courbe, entre 0 et 1.	$1 \leqslant -I \leqslant 2$
84 L'aire colorié en bleu est égale à :	$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 -f(x)\,\mathrm{d}x$
85 La valeur moyenne μ de f sur $[1\,;3]$ est égale à :	la longueur d'un rectangle de largeur 3 et d'aire la surface sous la courbe de f entre 0 et 3.	$\frac{1}{2} \times \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$	$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$	$1 \leqslant \mu \leqslant 3$
86 Soit $I = \int_0^{\ln(2)} 3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, alors :	$I = 3$	$I = 6$	$I = -3$	$I = 3\ln(2)$
87 Une primitive F de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, est :	$F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$.	$F(x) = -(1 + x)\mathrm{e}^{-x}$.	$F(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$.	$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
88 $\int_0^1 (x\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x$ est	positive.	négative.	égale à $0{,}5(\mathrm{e} - 1)$.	égale à $0{,}5(1 - \mathrm{e})$.

CONTRÔLE CONTINU

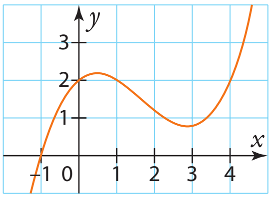
89 Estimer une intégrale

Estimer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,\mathrm{d}t$ **c)** $\int_{-2}^1 (-y+3)\,\mathrm{d}y$ Méthode 1 p. 143

90 Estimer une intégrale

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on s'intéresse à la courbe représentative d'une fonction f. D'après ce graphique, dire quel encadrement de $I = \int_{-1}^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ on peut donner :



a $0 \leqslant I \leqslant 5$, **b** $7 \leqslant I \leqslant 12$, **c** $5 \leqslant I \leqslant 7$. Méthode 2 p. 143

91 Calcul d'intégrale

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 6x - 4$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 4x$ est une primitive de f.

2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ Méthode 3 p. 145

92 Estimer une intégrale

Donner une interprétation géométrique de l'intégrale

$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ puis en calculer une valeur exacte.

Méthode 1 p. 143

93 Calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;0]$ par :

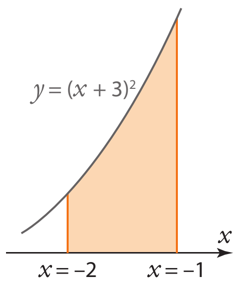
$$f(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

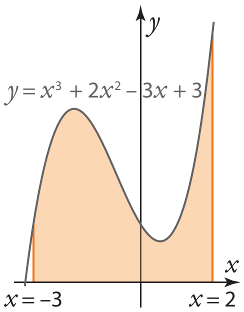
1. Vérifier le signe de $f(x)$ sur $[-2\,;0]$.

2. En déduire l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction sur cet intervalle. Méthode 6 p. 147

94 Calcul d'intégrale

Déterminer l'aire de chaque surface proposée.



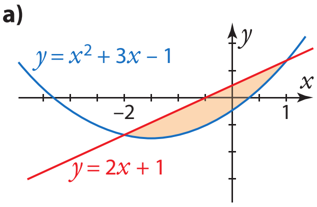


Méthode 3 p. 145

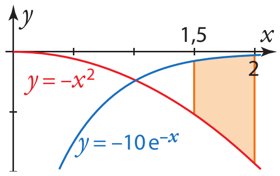
95 Calcul d'aire

Calculer l'aire de chaque surface colorée. Méthode 7 p. 148

a)



b)



96 Calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;0]$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^x.$$

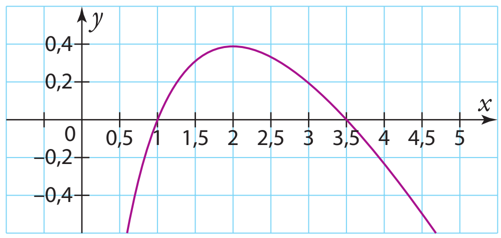
1. Déterminer la dérivée de f sur $[-1\,;0]$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^0 (2x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

3. Justifier pourquoi I correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto (2x+2)\mathrm{e}^x$ sur $[-1\,;0]$. Méthode 6 p. 147

97 Résoudre un problème

On désigne par f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 1 - x + 2\ln(x)$. La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).



1. Calculer la limite de f en 0.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.

3. a) Calculer $f(1)$.

b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.

c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;5]$ par :

$$g(x) = x\left(-\frac{1}{2}x + 2\ \ln(x) - 1\right).$$

a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;5]$.

b) Sur le graphique ci-dessus, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.

c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm². (On utilisera la valeur approchée de α trouvée au **3. b)**.

D'après bac ES 2006

Méthode 6 p. 147

PARTIE 2

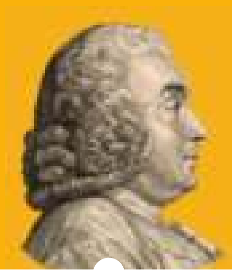
Probabilités et statistiques

Jacques Bernoulli (1654-1705)

En 1713, Jacques Bernoulli publie son *Ars Conjectandi* où il approfondit des travaux de Huygens. Il y étudie pour la première fois la distribution binomiale et la loi des grands nombres.

↳ Dicomaths p. 294

Antoine Deparcieux (1703-1768)



En 1746, Deparcieux présente son *Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine* où on trouve certaines des premières tables de mortalité, servant aux compagnies d'assurance-vie.

↳ Dicomaths p. 295

Au début du XIXe siècle, la statistique inférentielle émerge du fait, notamment, de l'approche probabiliste de la théorie des erreurs de Lagrange et Laplace et de la méthode des moindres carrés imaginée par Legendre puis par Gauss, qui l'applique à la prédiction de la position d'un astéroïde.

↳ Dicomaths p. 296

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes

- J'ai calculé des probabilités dans des cas simples, des probabilités conditionnelles et des probabilités de deux événements indépendants.
- J'ai étudié la notion de variable aléatoire ainsi que ses paramètres : espérance, variance et écart-type.

En Terminale générale

- Je vais étudier le schéma de Bernoulli, la loi binomiale ainsi que la loi géométrique. Je vais découvrir les lois uniforme et exponentielle.
- Je vais également modéliser des situations par un nuage de points et appliquer la méthode de la régression linéaire.

Adolphe Quételet (1796-1874)

Irénée Jules Bienaymé (1796-1878)

Pafnouti Tchebychev (1821-1894)

Karl Pearson (1857-1936)

William Gosset (1876-1937)

Dans les années 1830, Quételet introduit des méthodes statistiques en sociologie et étudie la distribution de données autour de la moyenne.

En 1867, Bienaymé et Tchebychev démontrent l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et parlent de fréquences d'échantillons.

↪ Dicomaths p. 294, p. 297

Au début du XX^{e} siècle, Pearson s'intéresse à la notion de corrélation entre variable (coefficient de corrélation), développe le test du χ^2 et applique les méthodes statistiques à la biomédecine. Le travail de Pearson sera poursuivi par Student (de son vrai nom Gosset) et Fisher, à l'origine du test de Student-Fisher.

↪ Dicomaths p. 296, p. 297

Domaines professionnels

- Un·e **créateur·trice de jeux** se servira de la loi binomiale pour déterminer la probabilité qu'un joueur gagne un certain nombre de parties parmi parties jouées.
- Un·e **ingénieur·e** concevra des tests pour vérifier la fiabilité d'une machine automatique.
- Un·e **contrôleur·se de qualité** utilisera le test de Student afin de vérifier la production de son entreprise.
- Un·e **géologue** datera un échantillon radioactif au moyen de la loi exponentielle.
- Un **médecin** étudiera la pertinence d'un protocole de traitement.
- Un·e **statisticien·ne** dans une cabinet d'études fera des prévisions concernant le chiffre d'affaires d'un établissement.

7

Lois discrètes

Dans cet extrait de l'émission *Défis Cobayes* les candidats sont interrogés sur la répartition des billes dans cet étrange instrument qu'est la planche de Galton !

Comment expliquer la répartition des billes dans les réceptacles ?

↳ Exercice 101 p. 190

VIDÉO

La planche de Galton
lienmini.fr/maths-c07-01

Pour prendre un bon départ

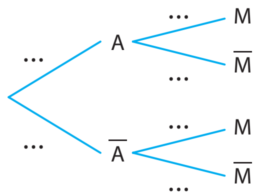
EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c07-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser un arbre pondéré

Dans un supermarché, 22 % des paiements se font à la caisse automatique dont 74 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour les paiements en caisse non automatique, 11 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour un paiement effectué dans ce magasin, on considère les événements :

• A : « Le paiement a été fait en caisse automatique ».
• M : « Le paiement correspond à des courses de moins de dix articles ».



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.
2. a) Calculer $p(A \cap M)$ puis $p(M)$.
b) En déduire $p_M(A)$.

2 Représenter une succession de deux épreuves indépendantes

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 puis une pièce équilibrée à PILE ou FACE .
1. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.
2. Déterminer la probabilité que le résultat du dé soit inférieur ou égal à 3 et que la pièce tombe sur PILE .

3 Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coûtant 1 € rapporte :
• 100 € avec une probabilité 0,005,
• 20 € avec une probabilité 0,01,
• 5 € avec une probabilité 0,02,
• 1 € avec une probabilité 0,1.
• 0 € avec une probabilité 0,865.

On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique à ce jeu (en tenant compte du prix du ticket).
1. Donner la loi de probabilité de G sous forme de tableau.
2. a) Calculer « à la main » E(G), l'espérance de G.
b) Déterminer à la calculatrice σ(G), l'écart-type de G.
c) Ce jeu est-il équitable ?
3. Calculer $p(G \geqslant 15)$.

4 Interpréter une espérance

Le gain algébrique (en euros) à un jeu est modélisé par une variable aléatoire X dont l'espérance est $E(X) = -0{,}01$.
Quelle somme d'argent peut-on approximativement s'attendre à perdre :
a) si on joue 100 fois à ce jeu ? **b)** si on joue 1000 fois à ce jeu ?

Activités

20 min

1 Loi uniforme discrète

1. On considère la variable aléatoire Q donnant le nombre obtenu lorsque l'on lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de Q puis déterminer l'espérance de Q.

2. Reprendre la question précédente avec la variable aléatoire H donnant le nombre obtenu lorsque l'on lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ si X prend pour valeurs les n entiers $1, 2, \dots, n$ de manière équiprobable.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $X = k$ pour k entier entre 1 et n ?

b) D'après les questions **1.** et **2.**, que peut-on conjecturer pour expression de $E(X)$ en fonction de n ?

c) Démontrer cette conjecture.

Coup de pouce Rappeler la formule de Première permettant de calculer $1 + 2 + \dots + n$.

↪ Cours 1 p. 170

25 min — Thème 7

2 Découvrir les schémas de Bernoulli

Le basketteur Lebron James a les taux de réussite suivants :
- 54,8 % au tir à deux points,
- 34,3 % au tir à trois points.

1. Lors d'un match, le temps restant ne laisse que quatre possessions du ballon à son équipe. Lebron James compte tirer quatre fois.
Intuitivement, quel type de tir doit-il choisir pour maximiser ses chances de marquer au moins 6 points en quatre tirs du même type (à deux ou trois points) ?

2. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à deux points.

a) Justifier que chacun de ces tirs est une épreuve de Bernoulli.
Préciser la probabilité d'un succès.

b) On suppose les quatre tirs indépendants.
Représenter la situation par un arbre.

c) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins trois paniers sur ces quatre tirs.

3. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à trois points.

a) Reprendre les questions **2. a)** et **b)** pour cette nouvelle succession d'épreuves.

b) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins deux paniers sur ses quatre tirs.

4. Reprendre la question **1.** à l'aide des questions **2.** et **3.**

↪ Cours 3 p. 172

20 min

3 Découvrir les *k* parmi *n*

1. Représenter un schéma de Bernoulli correspondant à 3 répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

2. Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre $\binom{n}{k}$, se lit « ***k* parmi *n*** », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n (correspondant à n répétitions).

a) En utilisant l'arbre précédent, déterminer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

b) Vérifier avec la calculatrice sachant que $\binom{n}{k}$ s'écrit :

- **n C k** avec la **TI-83 Premium CE** où **C** s'obtient avec la touche math puis menu **PROB** puis **Combinaison**,
- **n C k** avec la **CASIO GRAPH90+E** où **C** s'obtient avec la touche OPTN puis le menu **PROB**,
- **binomial(n,k)** avec la **NUMWORKS** où **binomial** s'obtient avec la touche puis le menu **Dénombrement**.

↪ Cours 4 p. 172

20 min

4 Découvrir le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1						
2						
3						
4						
5						

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$.

Coup de pouce Revenir à la définition de « n parmi n » et « 0 parmi n ».

2. On souhaite compléter le tableau ci-contre appelé **triangle de Pascal** dans lequel on inscrit les $\binom{n}{k}$. Par exemple, la case jaune, correspondant à $n = 3$ et $k = 2$, contiendra la valeur de $\binom{3}{2}$.

Recopier le triangle de Pascal vide puis, en utilisant la question **1.**, compléter sa première colonne et sa diagonale.

3. On admet que pour tout entier k entre 1 et n, on a la formule $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

a) Exprimer $\binom{2}{1}$ en fonction de $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$ puis inscrire la valeur de $\binom{2}{1}$ à sa place dans le triangle.

b) Calculer $\binom{3}{1}$ puis l'inscrire à sa place dans le triangle.

c) Finir de compléter le triangle de Pascal pour n entier entre 3 et 5.

↪ Cours 4 p. 172

Problème ouvert 10 min Thème 7

5 Travailler avec la loi binomiale

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de 1 obtenus lorsque l'on lance 8 fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.

Déterminer $p(X = 2)$.

Coup de pouce Combien de branches de l'arbre associé à cette répétition d'expériences correspondent à 2 succès et quelles sont les pondérations présentes sur chaque branche ?

↪ Cours 5 p. 174

TICE 5 min Thème 7

6 Déterminer directement $p(X = k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$

1. On souhaite calculer la probabilité $p(X = 3)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(11\ ;\ 0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon votre modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE

Étape 1

On accède au menu **distrib** en appuyant successivement sur les touches 2nde puis var.

Étape 2

On sélectionne **A:binomFdp(** dans le menu suivant.

```
DISTR DESSIN
9↑FFdp(
0:FFRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(
```

Étape 3

On obtient le menu suivant.

```
binomFdp
nbreEssais:11
p:0.4
valeur de x:3
Coller
```

dans lequel, on rentre dans l'ordre n (ici 11), p (ici 0.4) et k (ici 3) puis on valide en sélectionnant **Coller**.

Étape4

binomFdp(11,0.4,3) est affiché à l'écran, on le valide avec la touche entrer pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

CASIO GRAPH 90+E

Étape 1

Dans le menu de base **Exe-Mat**, on appuie sur la touche OPTN puis on sélectionne **STAT** avec **F5** puis **DIST** avec **F3** puis **BINOMIAL** avec **F5**.

Étape 2

On sélectionne alors **Bpd** ce qui engendre l'affichage de **BinomialPD(** à l'écran.

Étape 3

On complète cette ligne avec dans l'ordre k (ici 3), n (ici 11) et p (ici 0.4) séparés par des virgules (obtenues avec la touche ,) puis on ferme la parenthèse de sorte que l'on obtienne **BinomialPD(3,11,0.4)** puis on valide avec la touche EXE pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

NUMWORKS

Étape 1

On appuie sur la touche d'accueil et on choisit **Probabilités**.

Étape 2

On sélectionne ensuite **Binomiale** :

```
Choisir le type de loi
Binomiale
```

Étape 3

On règle les valeurs de n (ici 11) et p (ici 0.4) puis on valide **Suivant** :

```
n        11
p       0.4
   Suivant
```

Étape 4

Avec les flèches, on se déplace sur la courbe à gauche et on fait apparaître le menu déroulant avec EXE :

puis on sélectionne le dernier pictogramme et on valide.

Étape 5

On saisit k (ici 3) après le = de sorte d'obtenir :

```
P(X= 3 )= 0.1773674
```

2. Calculer les probabilités $p(Y = 10)$ et $p(Z = 17)$ pour Y suivant la loi $\mathcal{B}(53\ ;\ 0{,}2)$ et Z suivant la loi $\mathcal{B}(40\ ;\ 0{,}32)$.

↪ Cours 5 p. 174

TICE 5 min

7 Déterminer directement $p(X \leqslant k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$

1. On souhaite calculer la probabilité $p(X \leqslant 5)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(11\ ;\ 0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon le modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE	CASIO GRAPH 90 +E	NUMWORKS
Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **B:binomFRép** plutôt que **A:binomFdp.** On obtient donc **binomFRép(11,0.4,5)** à l'**étape 4** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **Bcd** plutôt que **Bpd**. On obtient donc **BinomialCD(5,11,0.4)** à l'**étape 3** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 4** où l'on choisit (icône) plutôt que (icône). On obtient donc P(X≤ 5)= 0.7534981

2. Calculer les probabilités $p(Y \leqslant 22)$ et $p(Z \leqslant 56)$ pour Y suivant la loi $\mathcal{B}(30\ ;\ 0{,}85)$ et Z suivant la loi $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}5)$.

Remarque La calculatrice **NUMWORKS**, permet de calculer des probabilités d'autres types que $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (par exemple $p(a \leqslant X \leqslant b)$).
Pour les calculatrices **TI** et **CASIO**, se reporter à Méthode 5 p.175 pour voir comment faire dans les autres cas.

↪ Cours 5 p. 174

Algo 30 min Thème 7

8 Découvrir la loi géométrique

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On appelle L la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués jusqu'à ce que l'on obtienne 6.

1. a) Essayer de tracer un arbre représentant cette succession d'expériences.
Pourquoi n'est-ce pas possible ?

b) Tracer le début de cet arbre pour les quatre premiers lancers.

2. a) Déterminer $p(L = 1)$, $p(L = 2)$, $p(L = 3)$ et $p(L = 4)$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de $p(L = k)$ en fonction de k.

3. a) Compléter les pointillés dans l'instruction `K=[k for k in range(...)]` afin que la liste `K` contienne les entiers k entre 1 à 25.

b) Compléter les pointillés dans l'instruction `P=[(1/6)*(5/6)**... for k ...]` afin que la liste `P` contienne $p(L = k)$ pour tous les entiers k entre 1 à 25 (dans l'ordre des k croissants).

c) Écrire un programme **Python** dans lequel on définit les listes `K` et `P` précédentes sur les deux premières lignes puis on écrit les trois lignes ci-dessous :

```
import matplotlib.pylot as plt
plt.bar(K,P)
plot.show()
```

Ce programme affiche le diagramme en barres associé à la variable aléatoire L.

d) Exécuter ensuite le programme et dire à quelle fonction l'allure de ce diagramme fait penser.

↪ Cours 7 p. 178

Cours

1 Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

Définition Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ si elle prend pour valeurs les entiers de 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $p(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout k entier entre 1 et n.

Remarque Dans ce cas, X prend des valeurs isolées (ici des entiers), on dit que X suit une **loi discrète**. Les autres lois étudiées dans ce chapitre (loi de Bernoulli, binomiale et géométrique) sont également des lois discrètes.

Propriété Espérance et variance de la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

Pour X suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, on a : • $E(X) = \frac{n+1}{2}$ • $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ • $\sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

Exemple On lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8 et on considère la variable aléatoire X donnant le résultat obtenu. X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.
Son espérance est $E(X) = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$ et sa variance est $V(X) = \frac{8^2-1}{12} = \frac{21}{4}$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-03

↪ Activité 1 p. 166

2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite épreuve de Bernoulli.

Exemple Une urne contient des tickets gagnants ou perdants.
L'expérience consistant à tirer un ticket dans l'urne et à regarder s'il est gagnant ou non est une épreuve de Bernoulli (un ticket gagnant correspondant à un succès) car il y a deux issues.

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0 ; 1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathcal{B}(p)$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété Espérance, variance et écart-type suivant la loi de Bernoulli

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, on a : • $E(X) = p$ • $V(X) = p(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-04

↪ Exercice 43 p. 184

Exemple On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,1 et on regarde le nombre de PILE obtenus (0 ou 1). X suit la loi donnée dans le tableau ci-contre, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre 0,1.
Son espérance est donc $E(X) = 0{,}1$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{0{,}1 \times 0{,}9} = 0{,}3$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	0,9	0,1

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Identifier et utiliser la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

Énoncé

Lorsqu'il emprunte des livres à la bibliothèque, Mathieu en emprunte 1, 2, 3, 4 ou 5 avec la même probabilité. On appelle L la variable aléatoire donnant le nombre de livres empruntés par Mathieu quand il va à la bibliothèque.

1. Quelle loi suit L ? **2. En déduire $E(L)$.** **3. Déterminer $p(L \geqslant 4)$.**

Solution

1. L prend de manière équiprobable toutes les valeurs entières entre 1 et 5 donc L suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. 1

2. $E(L) = \frac{1+5}{2} = 3$ 2

3. $p(L \geqslant 4) = p(L = 4) + p(L = 5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. 3

Conseils & Méthodes

1 Les valeurs possibles sont de la forme $\{1 ; 2 ; \dots ; 5\}$ et sont équiprobables.

2 On applique la formule de l'espérance.

3 $p(L = k) = \frac{1}{5}$ pour tout entier k entre 1 et 5.

À vous de jouer !

1 Dans un groupe de six amies, deux ont 1 frère, deux ont 2 frères et deux ont 3 frères.

On choisit une de ces amies au hasard et on considère la variable aléatoire F donnant son nombre de frère(s).

1. Justifier que F suit une loi uniforme.
2. Calculer $p(F \leqslant 2)$.

2 Pour son jeu de rôle, Gani utilise un dé équilibré à vingt faces numérotées de 1 à 20.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire D donnant le résultat d'un lancer ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir une réussite critique, c'est-à-dire un 20, lors d'un lancer.

↪ Exercices 34 à 37 p. 184

Méthode 2 Identifier et utiliser la loi de Bernoulli

Énoncé

Dans un lycée, il y a 11 professeurs de mathématiques parmi les 100 professeurs. On tire au sort un professeur parmi ces 100 et on considère la variable aléatoire M donnant le nombre de professeurs de mathématiques obtenu (0 ou 1).

1. Justifier que M suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre p.

2. Donner l'espérance de M.

Solution

1. M peut être égal à 1 avec une probabilité $\frac{11}{100} = 0{,}11$ ou à 0 avec une probabilité 0,89 donc M suit une loi de Bernoulli et son paramètre est $p = 0{,}11$. 1

2. $E(M) = p = 0{,}11$. 2

Conseils & Méthodes

1 On énonce que M prend comme valeurs 0 ou 1 et $p = p(M = 1)$.

2 On applique la formule du cours.

À vous de jouer !

3 Soit la variable aléatoire R donnant le nombre de boules roses obtenues (0 ou 1) lorsque l'on tire une boule dans une urne contenant 10 boules roses et 5 boules vertes.

1. Justifier que R suit la loi $\mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Combien faut-il ajouter de boules vertes dans l'urne pour que R suive la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$?

4 X suit la loi $\mathscr{B}(0{,}2)$.

1. Donner $p(X = 0)$ et $p(X = 2)$.
2. Déterminer $E(X)$.

↪ Exercices 41 à 42 p. 184

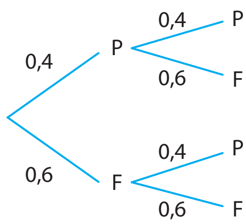
Cours

3 Schéma de Bernoulli

Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un schéma de Bernoulli de taille n.

Exemple On lance deux fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité d'un succès « tomber sur PILE » est 0,4.



• Les lancers sont indépendants et on réalise bien une succession de 2 épreuves de Bernoulli identiques donc cette succession d'épreuves est un schéma de Bernoulli que l'on peut représenter par l'arbre ci-contre.

• La probabilité d'obtenir un PILE sur ces deux lancers est donc $0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.

4 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition Coefficients binomiaux

Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille $n \neq 0$ et par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

Exemple Dans le schéma de Bernoulli de taille $n = 2$ de l'exemple précédent, il y a 2 façons d'obtenir 1 succès (« tomber sur PILE ») : PILE-FACE ou FACE-PILE. Ainsi, $\binom{2}{1} = 2$.

Remarque Concrètement, k parmi n s'obtient à l'aide de la calculatrice ou du triangle de Pascal (voir la propriété et l'exemple ci-dessous) dès que l'on ne peut plus faire d'arbre (à partir de $n > 4$).

Propriété (admise) Propriétés des coefficients binomiaux

Pour n et k entiers naturels avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : • $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Exemple Ces propriétés permettent de tracer le **triangle de Pascal**.

• $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1,

• $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1,

• $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n = 5$ et $k = 2$, on a $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété (admise) Propriété de symétrie des coefficients binomiaux

Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Exemple Pour $n = 4$ et $k = 3$, on constate bien que $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4-3} = \binom{4}{1} = 4$ également.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 | Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

Énoncé

Gloria a remarqué que quand une personne entre dans sa librairie, la probabilité qu'elle achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres. Quatre personnes entrent de façon successive dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'elles achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera *n*, le nombre de répétitions, et *p*, la probabilité d'un succès.

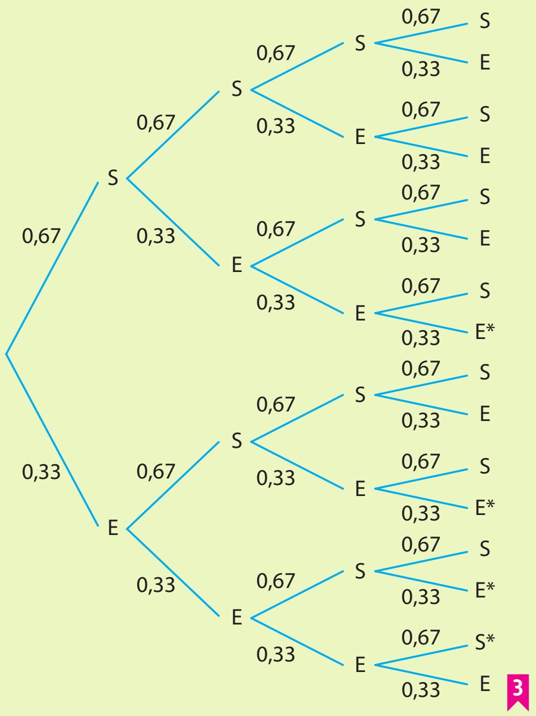
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité qu'une seule des quatre personnes achète un livre.

Solution

1. En considérant que l'achat d'un livre par le client est un succès **1**, on réalise $n = 4$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli **2** pour laquelle la probabilité d'un succès (S) est $p = 0,67$ donc cette situation correspond bien à un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0,67$.

2.



Conseils & Méthodes

1 On associe le succès à l'événement qui nous intéresse (ici, « le client achète ») de sorte que l'on ait affaire à une expérience à deux issues, succès S et échec E (ou $\overline{S}$).

2 Pour justifier qu'une succession d'expériences est un schéma de Bernoulli, il y a trois arguments à donner :

1. toutes les réalisations sont indépendantes.
2. l'expérience réalisée est la même.
3. c'est une épreuve de Bernoulli.

3 Dans l'arbre, les sous-arbres partant d'un même nœud sont identiques et correspondent à l'arbre représentant l'épreuve de Bernoulli (avec les pondérations 0,67 et 0,33 ici).

4 Identifier les chemins associés au nombre de succès souhaité et appliquer les méthodes de calculs de Première dans l'arbre.

3. On cherche $p(X = 1) = 0,67 \times 0,33^3 + 0,33 \times 0,67 \times 0,33^2 + 0,33^2 \times 0,67 \times 0,33 + 0,33^3 \times 0,67 \approx 0,096$. **4**

À vous de jouer !

5 On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera *n* le nombre de répétitions et *p*, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

6 Sylvain joue 3 fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est 0,1.

1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces 3 parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces 3 parties ?

↪ Exercices 44 à 46 p. 185

Cours

5 Loi binomiale

Définition **Loi binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès. La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée loi binomiale de paramètres n et p et se note $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Exemple On reprend l'exemple de la page précédente où l'on lance deux fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4.
- On a vu que cette répétition d'épreuves est un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X donnant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de PILE obtenus, suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}4$. On peut noter plus simplement « X suit la loi $\mathcal{B}(2\,;0{,}4)$ ».
- Par exemple, la probabilité d'obtenir 1 PILE est $p(X = 1) = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.

Propriété (admise) **Probabilités et loi binomiale**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.
Pour tout entier k dans entre 0 et n, on a $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Exemple Dans l'exemple précédent, on retrouve $p(X = 1) = \binom{2}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^{2-1} = 2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

Remarque Pour calculer des probabilités avec la loi binomiale, on peut utiliser la formule précédente ou utiliser les fonctions avancées de la calculatrice.

Propriété admise **Espérance, variance et écart-type suivant la loi binomiale**

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, on a : • $E(X) = np$ • $V(X) = np(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple La variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}6)$ a pour espérance $E(X) = 20 \times 0{,}6 = 12$, pour variance $V(X) = 20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8$ et pour écart-type $\sigma(X) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

Démonstration

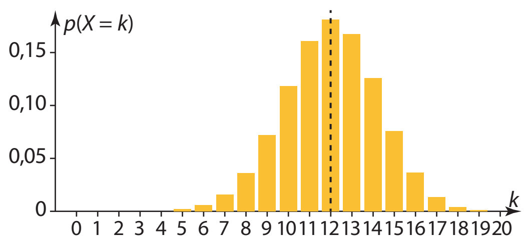
VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-06

Apprendre à démontrer p. 182

Propriété **Forme du diagramme en barres associé**

Pour X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, le diagramme en barres associé à X est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

Exemple On donne ci-contre le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}6)$ d'espérance 12.
Par exemple, pour $k = 10$, la hauteur de la barre est $p(X = 10) \approx 0{,}12$.
On constate bien que le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré par rapport à la droite d'équation $x = 12$ tracée en pointillés.



Exercices résolus

Méthode 4 Reconnaître la loi binomiale et calculer une probabilité de la forme $p(X = k)$

Énoncé

Une urne contient 9 boules rouges et 1 boule verte. On y tire 11 boules avec remise et on considère la variable aléatoire *V* donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de *V*.

2. Calculer $p(V = 2)$.

Solution

1. En considérant que l'obtention d'une boule verte est un succès, *V* donne le nombre de succès quand on réalise $n = 11$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli 1 dont la probabilité d'un succès est $p = 0,1$ 2 donc *V* suit la loi $\mathcal{B}(11\,;0,1)$.

2. $p(V = 2) = \binom{11}{2} \times 0,1^2 \times (1 - 0,1)^{11-2} = 55 \times 0,1^2 \times 0,9^9 \approx 0,21.$ 3

Conseils & Méthodes

1 La justification est la même que pour un schéma de Bernoulli en précisant que *V* donne le nombre de succès.

2 La probabilité d'un succès est $p = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

3 On utilise la formule du cours ou la calculatrice.

↪ Activités 6 p. 168 et 7 p. 169

À vous de jouer !

7 On lance 20 fois une pièce équilibrée et on considère la variable aléatoire *X* qui donne le nombre de FACE obtenus.
1. Justifier que *X* suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(X = 11)$.

8 On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire *T* qui donne le nombre de « trèfle » obtenus.
1. Justifier que *T* suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

↪ Exercices 51 à 52 p. 185

Méthode 5 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Énoncé

Pour la variable aléatoire *X* qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,23$, calculer :

a) $p(X < 12)$ b) $p(X \geqslant 4)$ c) $p(5 < X \leqslant 8)$

Remarque Les calculatrices de lycée permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la **NUMWORKS**) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

Solution

a) $p(X < 12) = p(X \leqslant 11) \approx 0,512.$ 1

b) $p(X \geqslant 4) = p(\overline{X \leqslant 3}) = 1 - p(X \leqslant 3) \approx 0,999.$ 2

c) $p(5 < X \leqslant 8) = p(6 \leqslant X \leqslant 8) = p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5) \approx 0,14.$ 3

On peut aussi remarquer que
$p(5 < X \leqslant 8) = p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) \approx 0,14.$

Conseils & Méthodes

1 *X* prend des valeurs entières : les événements $X < 12$ et $X \leqslant 11$ sont donc identiques.

2 $X \geqslant 4$ est l'événement contraire de $X \leqslant 3$.

3 On a $\underbrace{0\,;\ldots;4\,;5}_{X \leqslant 5}\,;\underbrace{6\,;7\,;8}_{5 < X \leqslant 8}\,;9\,;\ldots;50$
donc $p(5 < X \leqslant 8)$ est égal à $p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5)$.

À vous de jouer !

9 On considère la variable aléatoire *X* qui suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0,36)$.
1. Calculer $p(X > 6)$.
2. Calculer $p(3 \leqslant X < 12)$.

10 On considère la variable aléatoire *Y* qui suit la loi $\mathcal{B}(30\,;0,85)$.
1. Calculer $p(Y < 24)$.
2. Calculer $p(21 < Y < 25)$.

↪ Exercices 53 à 56 p. 185

Cours

6 Intervalles de fluctuation et loi binomiale

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale et un réel $a \in]0\,;1[$.

Un intervalle $[a\,;b]$ (avec a et b réels) tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Propriétés Intervalle de fluctuation « à gauche », « à droite » et « centré »

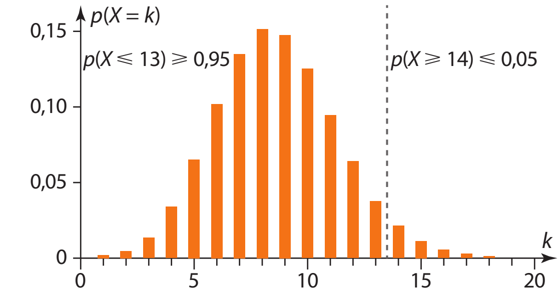
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale et un réel $\alpha \in]0\,;1[$.

1. L'intervalle $[0\,;b]$ où b est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est un **intervalle de fluctuation « à gauche »** au seuil de $1-\alpha$ associé à X.
2. L'intervalle $[a\,;n]$ où a est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > \alpha$ et où n est le nombre de répétitions associé à X est un intervalle de fluctuation « **à droite** » au seuil de $1-\alpha$ associé à X.
3. L'intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont les plus petits entiers vérifiant respectivement $p(X \leqslant a) > \frac{\alpha}{2}$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 1-\frac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré** (ou bilatéral) au seuil de $1-\alpha$.

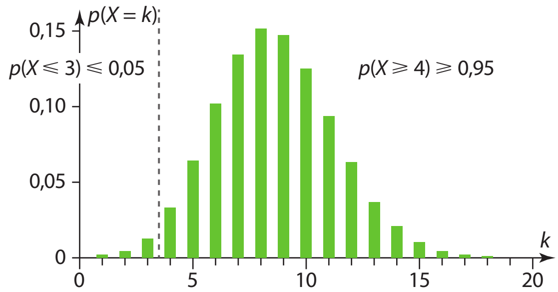
Remarque Les propriétés 1 et 2 précédentes donnent les plus petits intervalles de fluctuation associés à X respectivement de la forme $[0\,;b]$ et $[a\,;n]$.

Exemples

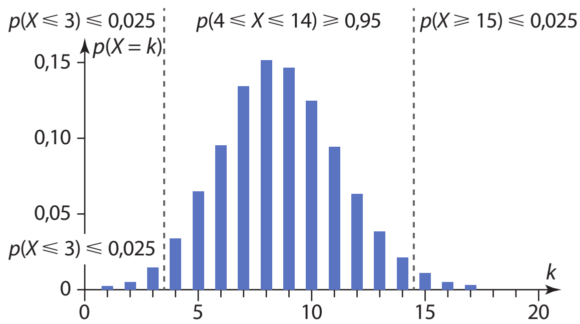
On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(43\,;0{,}2)$ et $\alpha = 0{,}05$ (donc $1-\alpha = 0{,}95$).



1. On a :
$p(X \leqslant 12) \approx 0{,}927$ donc $p(X \leqslant 12) < 0{,}95$
et $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}964$ donc $p(X \leqslant 13) \geqslant 0{,}95$.
Ainsi $[0\,;13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, qu'il n'y aura pas plus de 13 succès sur les 43 répétitions.



2. On a :
$p(X \leqslant 3) \approx 0{,}018$ donc $p(X \leqslant 3) \leqslant 0{,}05$
et $p(X \leqslant 4) \approx 0{,}051$ donc $p(X \leqslant 4) > 0{,}05$.
Ainsi $[4\,;43]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, qu'il n'y aura pas moins de 4 succès sur les 43 répétitions.



3. Notons que $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ et $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$.
On a :
• $p(X \leqslant 3) \approx 0{,}018 \leqslant 0{,}025$
et $p(X \leqslant 4) \approx 0{,}051 > 0{,}025$.
• $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}964 < 0{,}975$
et $p(X \leqslant 14) \approx 0{,}984 \geqslant 0{,}975$
Ainsi $[4\,;14]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, d'avoir entre 4 et 14 succès sur les 43 répétitions.

Méthode 6 Déterminer un intervalle de fluctuation avec la calculatrice

Énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,63$.

1. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à X de la forme $[0\,;b]$.

2. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X.

Solution

1. D'après le cours, il s'agit de trouver le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - 0,05 = 0,95$. 1

TI-83 Premium CE

On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en appuyant sur [touche] puis en tapant Y1=binomFRép(50,0.63,X) 2.
Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9825

Casio GRAPH 90+E

On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans le menu **7:Table** du menu principal en tapant **Y1=BinomialCD(x,50,0.63)** 3.
Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9824

NUMWORKS

Dans le menu **Fonctions**, on tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en écrivant [formule] 4 où **binomcdf** s'obtient avec la touche [touche] puis le menu **Probabilités>Loi binomiale**. Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

34	0.8093511
35	0.8805196
36	0.9318187
37	0.9635405
38	0.9824891

Conclusion : on a $p(X \leqslant 36) < 0,95$ et $p(X \leqslant 37) \geqslant 0,95$ donc l'intervalle cherché est $[0\,;37]$.

2. Il s'agit de trouver les plus petits entiers a et b tels que $p(X \leqslant a) > 0,025$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans la calculatrice et on obtient le tableau suivant

k	…	24	25	…	37	38	…
$p(X \leqslant k)$		0,0216	0,0411		0,9635	0,9825	

Donc l'intervalle $[25\,;38]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé à X.

Conseils & Méthodes

1 On utilise les propriétés du cours pour savoir quel(s) nombre(s) on cherche.

2 X s'obtient avec [touche].

3 x s'obtient avec [touche].

4 x s'obtient avec la touche [touche]

À vous de jouer !

11 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,51$.
Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 90 % associé à Y de la forme $[a\,;100]$.

12 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,81$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 % associé à Z.

↪ Exercices 62 à 67 p. 186

7 Loi géométrique

Définition Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

La variable aléatoire X donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir ce succès suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$.

Exemple On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 jusqu'à l'obtention d'un 2.
La variable aléatoire D donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 2 suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}25$. En effet, D donne le nombre de succès « obtenir 2 » lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Propriété Probabilités et espérance associées à la loi géométrique

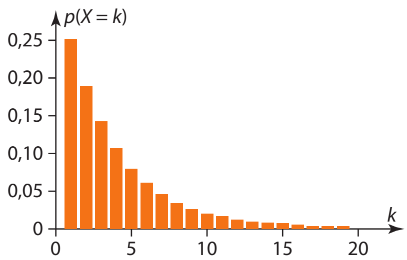
Soit X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

- **$p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$**
- **$p(X \leqslant k) = 1 - (1-p)^k$**
- **$p(X > k) = (1-p)^k$**
- **$E(X) = \frac{1}{p}$**

Exemple Dans l'exemple précédent, D suit la loi $\mathcal{G}(0{,}25)$ donc la probabilité qu'il faille cinq essais pour obtenir un 2 est $p(D = 5) = (1 - 0{,}25)^{5-1} \times 0{,}25 = 0{,}75^4 \times 0{,}25 \approx 0{,}08$.
L'espérance de D est $E(D) = \frac{1}{0{,}25} = 4$. Concrètement, cela veut dire que si l'on recommence un grand nombre fois cette succession d'épreuves alors le nombre moyen d'essais à réaliser afin d'obtenir un 2 est proche de quatre.

Propriété Aspect graphique de la loi géométrique

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, son diagramme en barres associé correspond à une décroissance exponentielle et $p = p(X = 1)$ est la hauteur de la première barre.



Propriété Non vieillissement ou absence de mémoire de la loi géométrique

- **Pour X suivant une loi géométrique, on a $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$ pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$.**
- **Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$, on ait $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$ alors X suit une loi géométrique.**

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-07

↪ Exercice 95 p. 189

Exemple

Dans l'exemple précédent, la probabilité qu'il faille plus de dix essais pour obtenir un 2 sachant qu'après sept essais, on n'en a pas encore obtenu est :
$p_{D>7}(D > 10) = p_{D>7}(D > 7 + 3) = p(D > 3) = (1 - 0{,}25)^3 = 0{,}75^3 \approx 0{,}42$.
On a bien utilisé le fait que la probabilité de réussir en plus de dix essais sachant qu'on en a raté sept, c'est-à-dire en plus de trois essais supplémentaires, est la même que la probabilité de réussir en plus de trois essais au départ : les sept premiers essais ont été « oubliés ».

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Identifier et utiliser la loi géométrique

Énoncé

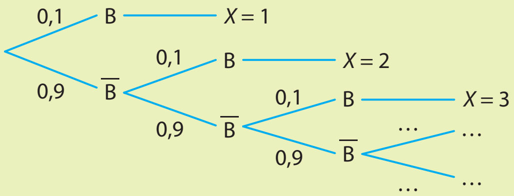
Dans un étang, il y a 100 poissons : 90 carpes et 10 brochets.
Elsa souhaite pêcher un brochet de sorte que si elle pêche une carpe, elle la remet à l'eau et continue à pêcher jusqu'à obtenir un brochet.
On appelle *X* la variable aléatoire donnant le nombre de prises réalisées par Elsa pour avoir un brochet.

1. **Justifier que *X* suit une loi géométrique et en donner le paramètre.**
2. **Représenter la situation par un arbre pour les 3 premières répétitions.**
3. **Quelle est la probabilité qu'elle doive prendre exactement 5 poissons pour obtenir un brochet ?**
4. **Déterminer $p(X \geqslant 10)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.**
5. **Calculer $E(X)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.**

Solution

1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour d'obtenir un succès (« prendre un brochet ») lorsque l'on réalise de manière indépendante (tirage avec remise des poissons) une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est $\frac{10}{100} = 0{,}1$ donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}1$. **1**

2. On appelle B l'événement « obtenir un brochet » :



2

3. On cherche $p(X = 5)$ **3** $= (1 - 0{,}1)^{5-1} \times 0{,}1 = 0{,}9^4 \times 0{,}1 \approx 0{,}07$.

4. $p(X \geqslant 10) = p(X > 9) = (1 - 0{,}1)^9 = 0{,}9^9 \approx 0{,}39$.
Cela veut dire que la probabilité qu'elle ait besoin de dix prises ou plus pour pêcher un brochet est environ 0,39. **4**

5. $E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10$ donc, en moyenne, sur un grand nombre de parties de pêche, il faudra à Elsa 10 prises pour avoir un brochet. **5**

Conseils & Méthodes

1 Pour justifier que X suit une loi géométrique, il faut donner tous les arguments suivants :
① X donne le nombre d'essais pour avoir un succès.
② les répétitions sont indépendantes.
③ ce sont des épreuves de Bernoulli identiques.

2 On s'arrête à chaque succès. On peut faire apparaître le nombre d'essais nécessaires : $X = \ldots$.

3 On traduit en termes de probabilités puis on applique la formule du cours.

4 Le cours donne une formule pour $p(X > n)$ donc on calcule $p(X \geqslant 10)$ en utilisant $p(X \geqslant 10) = p(X > 9)$ puisque X prend des valeurs entières.

5 L'espérance peut s'interpréter comme une moyenne.

À vous de jouer !

13 On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
1. Justifier que F suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir FACE.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir FACE.
4. Combien de lancers peut-on « espérer » faire pour obtenir FACE ?

14 La machine à café ne fonctionne pas au travail de Walid ce matin. Ses collègues lui ont dit d'insister car une fois sur 10, elle donne du café.
En supposant tous les essais indépendants, on appelle C la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un café.
1. Justifier que C suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que Walid ait besoin de 6 essais ou moins pour avoir un café.

↪ Exercices 68 à 73 p. 187

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 8 Utiliser le triangle de Pascal

↪ Cours 4 p. 172

Énoncé

On considère le triangle de Pascal ci-contre dans lequel apparaissent les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour n entier entre 0 et 5 et k entier entre 0 et n.

1. Lire $\binom{5}{3}$ dans le triangle de Pascal.
2. Déterminer $\binom{6}{3}$ à l'aide du triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Solution

1. Ici, $k = 3$ et $n = 5$ donc $\binom{5}{3} = 10$. 1

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

2. D'après le cours on a : $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$ 2.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
6				20		

Conseils & Méthodes

1 On repère les valeurs de k (en vert) et n (en rouge) en on lit $\binom{5}{3}$ à l'intersection.

2 Pour compléter le triangle, on utilise la propriété du cours $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
Pour $n = 6$ et $k = 3$:
$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ et on utilise le point 1 pour trouver $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$.

À vous de jouer !

15 1. Lire $\binom{4}{2}$ dans le triangle de Pascal.

2. Déterminer $\binom{6}{2}$ à l'aide du triangle de Pascal.

16 Donner la ligne du triangle de Pascal correspondant aux $\binom{6}{k}$ pour k entier entre 0 et 6.

↪ Exercices 82 à 83 p. 188

Exercices résolus

Méthode 9 Utiliser l'absence de mémoire de la loi géométrique

Cours 7 p. 178

Énoncé

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un nombre strictement supérieur à 3 lorsque l'on lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12.

On admet que X suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{9}{12}=0{,}75$.

Si on n'a pas obtenu de nombre strictement supérieur à 3 après cinq essais, quelle est la probabilité qu'il faille plus de sept essais pour en obtenir un ?

Solution

On cherche $p_{X>5}(X>7)$ **1** $= p_{X>5}(X>5+2) = p(X>2)$ **2** $= (1-0{,}75)^2 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$ d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique.

Conseils & Méthodes

1 On traduit l'énoncé en faisant apparaître $p_{X>s}(X>s+t)$.

2 On applique $p_{X>s}(X>s+t)=p(X>t)$.

À vous de jouer !

17 Avec l'énoncé de l'exercice résolu ci-dessus, donner la probabilité qu'il faille au moins 8 essais sachant qu'il en faut plus de 4.

18 Avec l'énoncé de l'exercice résolu ci-dessus, calculer $p_{X\geqslant 5}(X>10)$.

Exercices 92 à 94 p. 189

Méthode 10 Utiliser l'espérance pour résoudre un problème

Énoncé

Dans un jeu, on doit choisir entre deux possibilités.

- **Choix 1 : lancer un dé équilibré à faces numérotées de 1 à 6. Le gain en € est le résultat obtenu.**
- **Choix 2 : lancer 6 fois de suite une pièce équilibrée. Le gain en euros est le nombre de FACE obtenus.**

Si l'on compte jouer un grand nombre de fois à ce jeu, lequel des deux choix faut-il faire ?

Solution

- **Pour le choix 1** : la variable aléatoire G donnant le gain pour le choix 1 suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ **1** donc $E(G)=\frac{1+6}{2}=3{,}50$ € **2** : si l'on joue un grand nombre de fois on gagne en moyenne 3,50 € par partie.
- **Pour le choix 2** : la variable aléatoire G' donnant le gain pour le choix 2 donne le nombre de succès lorsque l'on réalise 6 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli de probabilité d'un succès (« obtenir FACE ») $p=0{,}5$ donc G' suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=0{,}5$.

On a donc $E(G')=n\times p=6\times 0{,}5=3$ € **3** : si l'on joue un grand nombre de fois on gagne en moyenne 3 € par partie.

On doit donc faire le choix 1.

Conseils & Méthodes

1 On identifie la loi associée au gain avec le choix 1.

2 On calcule l'espérance associée au premier gain.

3 On fait de même pour le choix 2.

À vous de jouer !

19 On considère les expériences « lancer une pièce équilibrée » et « lancer deux fois de suite une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 ».
Si l'on réalise ces deux expériences un grand nombre de fois, laquelle choisir pour obtenir en moyenne le plus de fois FACE ?

20 Pour un concours n°1, on le réussit la X-ième fois où X suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;3\,;4\}$.
Pour un concours n°2, on le réussit la Y-ième fois où Y suit la loi $\mathcal{G}(0{,}25)$.
En moyenne, lequel de ces deux concours est le « plus facile » à obtenir ?

Exercices 96 à 97 p. 189

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-06

La propriété à démontrer

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ alors $E(X) = np$.

On souhaite démontrer cette propriété pour $n \leqslant 3$.
On pourra utiliser en prérequis l'espérance associée à la loi de Bernoulli et la formule donnant $p(X = k)$.

Comprendre avant de rédiger

- On ne demande pas de démontrer le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) mais uniquement pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$: on peut donc traiter ces trois cas indépendamment.
- Le cas $n = 1$, revient à considérer que X suit la loi de Bernoulli, pour les deux autres cas, on peut dresser le tableau donnant leur loi puis appliquer la formule générale de l'espérance d'une variable aléatoire.

Rédiger

Étape 1
On commence par constater que, pour $n = 1$, X suit la loi de Bernoulli.

Étape 2
Pour $n = 2$, on dresse le tableau donnant la loi de X en calculant $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Étape 3
On applique la formule de l'espérance d'une variable aléatoire pour ce cas $n = 2$.

Étape 4
Pour $n = 3$, on procède comme pour le cas $n = 2$.

La démonstration rédigée

Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule épreuve donc X suit la loi de Bernoulli d'où $E(X) = p = np$ pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

car :

- $p(X = 0) = \binom{2}{0} \times p^0 \times (1-p)^{2-0} = (1-p)^2$
- $p(X = 1) = \binom{2}{1} \times p^1 \times (1-p)^{2-1} = 2p(1-p)$
- $p(X = 2) = \binom{2}{2} \times p^2 \times (1-p)^{2-2} = p^2$

$$E(X) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2$$
$$= 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p = np \text{ pour } n = 2.$$

Pour $n = 3$, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

$$E(X) = 0 \times (1-p)^3 + 1 \times 3p(1-p)^2 + 2 \times 3p^2(1-p) + 3 \times p^3$$
$$= 3p(1 - 2p + p^2) + 6(p^2 - p^3) + 3p^3$$
$$= 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3 = 3p = np \text{ pour } n = 3.$$

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante en utilisant pour prérequis la formule donnant $p(X = k)$ pour k entier entre 0 et 2 et $E(X) = 2p$.

Si X suit la loi $\mathscr{B}(2\,;p)$ alors $V(X) = 2 \times p \times (1-p)$

Exercices calculs et automatismes

21 Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

La variable aléatoire donnant le produit des résultats de deux dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4 suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; 16\}$. ☐ ☐

22 Épreuve de Bernoulli

On tire au sort une boule dans une urne et on note sa couleur.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Cette expérience aléatoire est une expérience de Bernoulli quand l'urne contient :

a 10 boules : 3 jaunes, 2 vertes et 5 orange.
b 20 boules : 13 jaunes et 7 orange.
c 20 boules rouges numérotées : 10 avec des nombres pairs et 10 avec des nombres impairs.
d une seule boule.

23 Loi de Bernoulli (1)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

Toute variable aléatoire ne prenant que deux valeurs suit une loi de Bernoulli. ☐ ☐

24 Loi de Bernoulli (2)

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

On considère une variable aléatoire Y suivant une loi de Bernoulli et vérifiant $V(Y) = 0{,}16$.

Les valeurs possibles pour $p(Y = 1)$ sont :

a 0,2 b 0,8
c 0,4 d 0,016

25 Schéma de Bernoulli

Comment faire pour justifier qu'une succession d'épreuves est un schéma de Bernoulli ?

26 Loi binomiale (1)

On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse.

La variable aléatoire de E donnant le nombre d'**échecs** :

a ne suit pas une loi binomiale.
b suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$.
c suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
d suit la loi binomiale de paramètres $n = 0{,}2$ et $p = 10$.

27 Loi binomiale (2)

On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$.

Calculer $p(Y = 1)$.

28 Espérance de la loi binomiale (1)

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}63$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

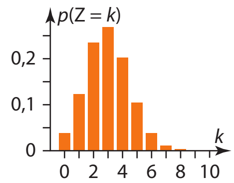
Quelle est l'espérance de X ?

a 63 b 126
c 200 d 630

29 Espérance de la loi binomiale (2)

Choisir la bonne réponse.

On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Quelle est son espérance ?

a 8 b 3
c 0,26 d 6

30 Intervalle de fluctuation

En tabulant $p(X \leqslant k)$ pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale, on obtient le tableau.

k	$p(X \leqslant k)$
0	0,0016
1	0,0142
2	0,0617
3	0,1727
4	0,3519
5	0,5643
6	0,7549
7	0,8868
8	0,9578
9	0,9876
10	0,9972

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

L'intervalle $[0 ; 8]$ est le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la forme $[0 ; b]$. ☐ ☐

31 Loi géométrique (1)

Soit X suivant une loi géométrique de paramètre 0,4.

Calculer $p(X = 5)$.

32 Loi géométrique (2)

Soit X suivant une loi géométrique de paramètre 0,3.

Choisir la bonne réponse.

La valeur de $p_{X > 10}(X > 15)$ est :

a $0{,}3^5$ b $0{,}7^5$
c $0{,}3^{15}$ d $0{,}7^{15}$

33 Loi géométrique (3)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

La variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier échec lorsque l'on réalise successivement et de manière indépendante la même expérience de Bernoulli suit une loi géométrique. ☐ ☐

Exercices d'application

Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ Méthode 1 p. 171

34 Benoît reçoit entre 1 et 15 courriels par jour et les probabilités de ces différents nombres sont égales.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire C donnant le nombre de courriels reçus par Benoît pendant un jour ?
2. En déduire $E(C)$ et $V(C)$.
3. Quelle est la probabilité qu'il reçoive plus de 4 courriels ?

35 On tire un nombre au hasard entre 10 et 99 et on considère la variable aléatoire D donnant son chiffre des dizaines.
1. Justifier que D suit une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ en précisant la valeur de n.
2. Pour ce tirage, la variable aléatoire U donnant le chiffre des unités suit elle une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$?

36 Érika boit équiprobablement entre 1 et 4 cafés par jour.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire C donnant le nombre de cafés bus par Érika en un jour.
2. Expliquer pourquoi sur 100 jours, on peut s'attendre à ce qu'elle ait bu environ 250 cafés.

37 On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ et dont l'espérance est 11,5. Déterminer n.

Épreuve de Bernoulli

38 Dans un lycée, 27 % des élèves de Terminale ont choisi l'option « Mathématiques complémentaires ».
On tire au sort un élève de Terminale dans ce lycée et on regarde s'il a opté pour l'option « Mathématiques complémentaires » ou non.
Expliquer en quoi cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli, préciser à quoi peut correspondre un succès puis donner la probabilité p d'un succès.

39 D'après la SNCF, 91,4 % des TGV arrivent à l'heure.
1. Elie prend un TGV.
Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à regarder s'il est à l'heure ou non est une épreuve de Bernoulli.
2. Préciser la probabilité p d'un succès.

40 Fiona joue à « pierre-feuille-ciseaux ».
Expliquer pourquoi le choix de son adversaire (pierre, feuille ou ciseaux) à ce jeu n'est pas assimilable à une épreuve de Bernoulli.

Loi de Bernoulli Méthode 2 p. 171

41 On considère une pièce truquée de sorte qu'elle ait deux chances sur trois de tomber sur PILE.
On lance une seule fois cette pièce et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de FACE obtenus.
1. Justifier que X suit la loi de Bernoulli et préciser la valeur de p.
2. Donner l'écart-type de X.

42 **1.** On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on considère la variable aléatoire X donnant le chiffre des dizaines du résultat obtenu.
Justifier que X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p.
2. On lance deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à huit faces numérotées de 1 à 8.
On considère la variable aléatoire Y donnant le chiffre des dizaines de la somme des deux nombres obtenus.
Préciser la loi de Y.

Démo

43 Soit X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
1. Démontrer la formule du cours $E(X) = p$.
2. Démontrer la formule du cours $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Schéma de Bernoulli

Méthode 3 p. 173

44 Quand elle joue avec son bilboquet, Samira arrive à planter la boule sur le socle avec une probabilité 0,78.
1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 3 « lancers » de bilboquet à un schéma de Bernoulli ?
2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité :
a) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.
b) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

45 La probabilité qu'un appel aux pompiers soit injustifié est 0,19.
1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 4 appels aux pompiers, selon qu'ils sont injustifiés ou non, à un schéma de Bernoulli ?
2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité :
a) qu'exactement deux des quatre appels soient injustifiés.
b) qu'au moins un appel soit justifié.

46 Lorsqu'il fait ses devoirs, Ismaël n'éteint jamais son téléphone.
Quand il reçoit un message, il y a deux chances sur trois qu'il le regarde, indépendamment du fait qu'il ait regardé ou non les messages précédents.
Pendant tout le temps qu'il a consacré à ses devoirs, il a reçu 3 messages.
1. Justifier que cette situation est assimilable à un schéma de Bernoulli en spécifiant à quel événement correspond un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité qu'il ait regardé au moins 2 messages.

Coefficients binomiaux sans triangle de Pascal

47 Sans calculatrice, donner $\binom{10}{10}$ et $\binom{100}{0}$.

48 **1.** Avec la calculatrice, donner $\binom{12}{5}$ et $\binom{12}{6}$.
2. En déduire sans calculatrice :
a) $\binom{12}{7}$ **b)** $\binom{13}{6}$ **c)** $\binom{13}{7}$

49 **1.** Avec la calculatrice, donner $\binom{15}{4}$ et $\binom{15}{5}$.
2. En déduire sans calculatrice :
a) $\binom{15}{11}$ **b)** $\binom{15}{10}$ **c)** $\binom{16}{5}$ **d)** $\binom{16}{11}$

Loi binomiale, définition et calcul de $p(X = k)$

Méthode 4 p. 175

50 On donne le tableau ci-contre dans lequel les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}42$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}58$.

k	$\binom{4}{k}$	$0{,}42^k$	$0{,}58^k$
0	1	1	1
1	4	0,42	0,58
2	6	0,176	0,336
3	4	0,074	0,195
4	1	0,031	0,113

À l'aide de ce tableau, donner des valeurs approchées de :
a) $p(X = 1)$ **b)** $p(X = 2)$ **c)** $p(Y = 1)$ **d)** $p(Y = 2)$

51 À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est $\frac{18}{37}$.
On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.
1. Quelle loi suit X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité de gagner 9 parties.

52 On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.
1. Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.
2. Calculer $p(M = 10)$, $p(M = 11)$ et $p(M = 12)$.
3. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année scolaire.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

Méthode 5 p. 175

53 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}78$.
Calculer avec la calculatrice :
a) $p(X < 75)$ **b)** $p(X > 79)$ **c)** $p(X \geqslant 74)$ **d)** $p(73 < X \leqslant 81)$

54 On considère une variable aléatoire T qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 789$ et $p = 0{,}04$.
Calculer avec la calculatrice :
a) $p(T \in [27 ; 32])$ **b)** $p(T \in [30 ; 789])$
c) $p(T \in [0 ; 40[)$ **d)** $p(T \in]19 ; 41])$

Exercices d'application

55 La probabilité de gagner à un jeu de grattage est 0,1. On considère 1 000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats (« Gagné » ou « Perdu ») sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1 000 joueurs.
Déterminer la probabilité qu'il y ait :
a) plus de 100 gagnants.
b) moins de 85 gagnants.
c) entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants.
d) entre 90 (exclu) et 110 (exclu) gagnants.

56 Dans une population, la proportion de végétariens est de 12 %. On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 250 repas à des personnes issues de cette population prévoit 32 repas végétariens.
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?

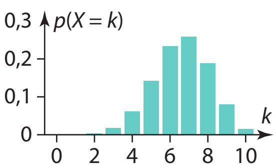
Loi binomiale : espérance et aspect graphique

57 **1.** On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,83$.
Calculer l'espérance de X.
2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,79$.

58 Écrire une fonction **Python** que l'on nommera `param_binom` de paramètres `n` et `p` et qui renvoie $E(X)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

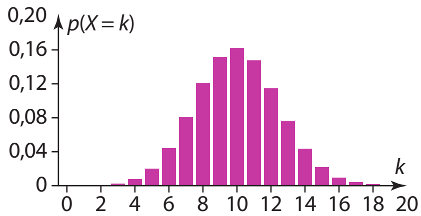
59 On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(Z) = 2$ et $0,15 \leqslant p \leqslant 0,16$.
1. Donner un encadrement de n puis en déduire sa valeur.
2. En déduire p.

60 On donne ci-contre le diagramme en barres associé à une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p inconnu.
Parmi les trois réels ci-dessous, lequel est susceptible d'être la valeur de p ?

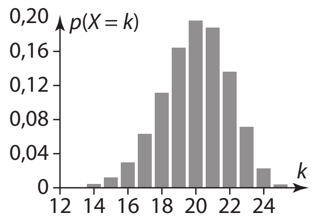


a) 0,66 **b)** 0,16 **c)** 0,87

61 On considère un entier n inconnu et on donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;0,4)$.



1. a) On admet que $E(X) \in \mathbb{N}$.
Donner une valeur possible pour $E(X)$.
b) En déduire une valeur possible pour n.
2. On donne ci-contre le diagramme en barres associé à une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ où p est inconnu et où n est le nombre trouvé à la question **1. b)**.



Proposer une valeur possible de p associé à cette loi.

Intervalles de fluctuation

Méthode 6 p. 177

62 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 54$ et $p = 0,45$. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation associé à X de la forme $[0\,;b]$:
a) au seuil de 0,95. **b)** au seuil de 99 %.

63 Soit Y qui suit la loi $\mathscr{B}(50\,;0,12)$. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de Y de la forme $[a\,;50]$:
a) au seuil de 0,90. **b)** au risque de 5 %.

64 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0,71$. Déterminer :
a) un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à Z.
b) un intervalle de fluctuation centré au risque de 0,01 associé à Z.

65 Soit F la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus lorsque l'on lance 20 fois la même pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,36.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[0\,;k]$ avec k entier tel que $p(F \in [0\,;k]) \geqslant 0,95$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire.

On peut être sûr au seuil de 95 % que la **fréquence** de FACE obtenus sera inférieure ou égale à … %.

66 Soit J la variable aléatoire donnant le nombre de boules jaunes obtenues lorsque l'on tire 40 fois avec remise une boule dans une urne en contenant 7 jaunes et 13 vertes.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[k\,;40]$ avec k entier tel que $p(J \in [k\,;40]) \geqslant 0,99$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire.

On peut être sûr au seuil de 99 % que la **fréquence** de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à … %.

67 Soit P la variable aléatoire donnant le nombre de nombres pairs obtenus lorsque l'on lance 25 fois `random.randint(1,11)` avec **Python**.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à P.
2. En déduire un encadrement de la fréquence de nombres pairs obtenus au risque de 5 %.

Loi géométrique

Méthode 7 p. 179

68 On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}12$.
Calculer :
a) $p(X = 5)$ **b)** $p(X > 4)$ **c)** $p(X \leqslant 6)$
d) $p(X \geqslant 10)$ **e)** $p(X < 8)$ **f)** $p(4 < X < 10)$

69 On considère une variable aléatoire Y suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}03$.
Calculer :
a) $p(Y = 3)$ **b)** $E(Y)$ **c)** $p(10 < Y < 20)$
d) $p(24 \leqslant Y < 33)$ **e)** $p(33 < Y \leqslant 40)$ **f)** $p(17 \leqslant Y \leqslant 45)$

70 Léa commence une séance d'entraînement de pétanque et on considère que la probabilité qu'elle réussisse un « carreau » est 0,2. On suppose tous les essais indépendants.On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier carreau réussi.
1. Donner la loi suivie par X.
2. Représenter la situation par un arbre pour les trois premiers essais et y lire $p(X = 2)$.
3. Calculer $p(X = 5)$ puis l'interpréter.
4. Calculer $p(X \leqslant 3)$ puis l'interpréter.

71 On suppose que la probabilité de gagner une partie à une machine à sous est 0,001.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes et on appelle X la variable aléatoire donnant le rang de la première partie gagnée quand on joue plusieurs parties de suite.
1. Donner la loi suivie par X.
2. En combien de parties en moyenne peut-on espérer gagner la première fois avec cette machine à sous ?
3. Calculer $p(X > 500)$ puis l'interpréter.
4. La mise à cette machine à sous est de 2€.
Quelle est la probabilité que l'on gagne avant de ne plus avoir d'argent s'il on dispose de 2000€ ?

72 Sur sa calculatrice, Intissar tire des nombres au hasard avec `EntAlea(1,15)` (générant un entier au hasard entre 1 et 15) jusqu'à ce qu'elle obtienne le nombre 10. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
1. Justifier que X suit une loi géométrique.
2. Quelle est la probabilité qu'il lui faille entre 5 et 12 essais ?

73 Elsa a une pièce truquée qu'elle lance jusqu'à obtenir PILE. Après de nombreux essais, elle a remarqué qu'en moyenne, il lui fallait 6 lancers afin d'obtenir son premier PILE.
Déterminer la probabilité d'obtenir PILE lançant cette pièce.

Probabilités conditionnelles et successions d'épreuves

74 Thème 6 Une urne contient 20 boules de quatre couleurs différentes : 7 rouges, 10 vertes, 2 jaunes et 1 bleue. On tire deux boules sans remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.
1. Cette succession de deux épreuves est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. La représenter par un arbre.
3. a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule jaune (sans tenir compte de l'ordre du tirage).
c) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.
d) Déterminer la probabilité que la première boule soit verte sachant que la deuxième est bleue.

75 Le programme des cours collectifs de la salle de sport d'Audrey est le suivant aux heures où elle peut s'y rendre.
• **Lundi :** pilate une semaine sur quatre et musculation trois semaines sur quatre.
• **Mardi :** zumba deux semaines sur cinq et *cycling* trois semaines sur cinq.
• **Mercredi :** fitness une semaine sur six, yoga deux semaines sur six et tai chi trois semaines sur six.
On admet que les activités sont indépendantes d'un jour sur l'autre. Audrey se rend à la salle de sport trois jours de suite du lundi au mercredi.
1. Représenter la situation par un arbre.
2. Calculer la probabilité qu'elle fasse ses trois activités préférées : pilate, *cycling* et yoga.

76 Suite à des problèmes de production, un fabricant de tablettes de chocolat met en place une nouvelle chaîne de production : l'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40 % de la production.
Un contrôle qualité montre que :
• parmi les tablettes produites par l'ancienne chaîne, 68 % sont commercialisables,
• parmi les tablettes produites par la nouvelle chaîne, 90 % sont commercialisables.
On choisit une tablette au hasard dans la production.
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Coup de pouce On introduira des événements correctement choisis.

2. Calculer la probabilité que la tablette provienne de la nouvelle chaîne de production et soit commercialisable.
3. La tablette tirée au sort n'est pas commercialisable. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la nouvelle chaîne ?

D'après bac

Exercices d'entraînement

Approfondir sur les lois

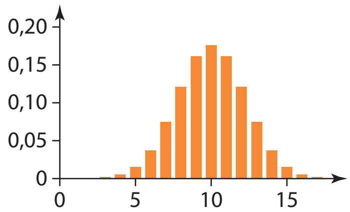
77 On considère une variable X suivant une loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ telle que $V(X)=24$.
Déterminer n.

78 À un guichet, le temps d'attente exprimé en secondes est 1, 2, …, 600, ces six cents temps d'attente étant équiprobables. On appelle T la variable aléatoire donnant le temps d'attente à ce guichet en seconde.
1. Quelle est la loi suivie par T ?
2. Calculer la probabilité qu'on attende 3 minutes ou plus ?
3. Sachant qu'elle a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité que Fatou attende moins de 4 minutes ?

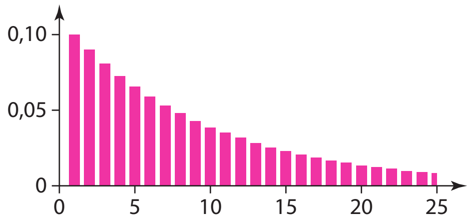
79 Thème 7 La directrice d'une société de location de véhicules affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
Sous cette hypothèse, on considère les 600 premiers contrats signés l'année précédente et on appelle C le nombre de contrats de courte durée parmi tous ces contrats supposés indépendants.
1. Décrire la loi de la variable aléatoire C.
2. En déduire un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à C.
3. 550 des 600 contrats étaient de courte durée.
a) Faire le lien avec la réponse à la question **2.**.
b) Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?
D'après bac

80 **1.** Un des graphiques ci-dessous correspond à une loi géométrique, l'autre à une loi binomiale.
Associer chaque graphique à sa loi.

1



2



2. Donner une approximation de l'espérance associée à chacune de ces lois.

81 Démo On considère X suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.
1. Montrer $p(X=k)=(1-p)^{k-1}\times p$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.
2. En déduire $p(X\leqslant k)$ puis $p(X>k)$.

Triangle de Pascal

Méthode 8 p. 180

Pour les exercices 82 à 83 on donne le triangle de Pascal ci-contre.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

82 Déterminer $\binom{7}{2}$, $\binom{6}{5}$, $\binom{7}{6}$, $\binom{5}{4}$ et $\binom{7}{3}$.

83 Compléter les lignes correspondant à $n=8$ puis $n=9$ du triangle de Pascal.

84 Démo **1.** Conjecturer une expression de $\binom{n}{1}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Justifier cette conjecture à l'aide de la définition des k parmi n.

Intervalles de fluctuation en contexte

85 Thème 7 Quand Munir va faire ses courses, il prévoit toujours la même liste de 30 articles. Malheureusement, pour chaque article indépendamment les uns des autres, il a remarqué que la probabilité que l'article soit en rayon est 0,8.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre d'articles qu'il trouvera sur les 30.
2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de la forme $[a\,;30]$ au seuil de 99 % puis interpréter cet intervalle dans les termes de l'énoncé.

86 Une athlète de haut niveau finit toujours ses entraînements quotidiens par un « 100 m ». Elle a remarqué que la probabilité qu'elle le coure en moins de 13 s est 0,74 indépendamment de son temps les autres jours.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre de fois où elle courra en moins de 13 s sur 70 entraînements.
2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de la forme $[0\,;b]$ au seuil de 95 % du nombre de fois où elle courra en moins de 13 s sur 100 entraînements.

Simulation de lois

87 1. Quelle loi la commande **Python** `random.randint(1,10)` permet-elle de simuler ?

2. Donner une commande **Python** permettant de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 100\}$.

88 On considère la fonction **Python** ci-contre.

```
def bernoulli1():
    if random.random() <= 0.63:
        X=1
    else:
        X=0
    return X
```

Justifier que la variable aléatoire **x** donnant la valeur renvoyée par la fonction `bernoulli1` suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre.

89 Écrire une fonction en **Python** `bernoulli` de paramètre `p` flottant entre `0` et `1` et renvoyant `0` ou `1` de sorte que la fonction simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et renvoie sa valeur.

90 On considère le programme **Python** ci-contre.

```
a=random.random()
n=1
while a > 0.3 :
      a=random.random()
      n=n+1
print n
```

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire donnant la valeur `n` affichée par le programme ?

Propriété de non vieillissement

Méthode 9 p. 181

91 Soit X suivant une loi géométrique.
Écrire sans probabilité conditionnelle :

a) $p_{X>9}(X > 12)$ **b)** $p_{X>6}(X \geqslant 10)$

c) $p_{X>5}(X \leqslant 8)$ **d)** $p_{X>2}(X < 20)$

Coup de pouce
Pour les questions **c)** et **d)**, on rappelle que $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

92 On considère que la probabilité d'être contrôlé lors d'un trajet de bus suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,05$. Depuis le début du mois, Flore a pris 15 fois le bus et n'a pas été contrôlée.
Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas contrôlée avant le 30^{e} trajet ?

93 Thème 7
En 10 lancers successifs d'un dé équilibré à six faces, on n'a pas obtenu de 6.
1. Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne pas de 6 avant le 14^{e} lancer ?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne un 6 avant le 16^{e} lancer ?

94 L'entraînement hebdomadaire de natation de Sabrine est parfois annulé avec une probabilité 0,1 (indépendamment des autres fois). Cela fait 5 semaines que l'entraînement a bien eu lieu.
1. Quelle est la probabilité que l'entraînement ait bien lieu lors des 10 semaines suivantes ?
2. Quelle est la probabilité qu'un entraînement soit annulé avant le 13^{e} ?

95 Démo
On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$, on ait $p_{X>s}(X > s+t) = p(X > t)$. On appelle $p = p(X = 1)$.
1. Justifier que $p((X > s+t) \cap (X > s)) = p(X > s+t)$.
2. Montrer que,
$p(X > n+1) = p(X > n) \times p(X > 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = p(X > n)$ est géométrique de premier terme $u_1 = 1 - p$ et de raison $1 - p$.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. En remarquant que $p(X = n) = p(X > n-1) - p(X > n)$, en déduire une expression de $p(X = n)$ puis en déduire la loi suivie par X.

Résolution de problèmes avec l'espérance

Méthode 10 p. 181

96 On considère deux jeux dans lesquels soit on perd, soit on gagne 4 €. Précisément :
- le jeu n° 1 coûte 2 € et la probabilité de gagner est 0,09.
- le jeu n° 2 coûte 1 € et la probabilité de gagner est 0,05.

Comme elle dispose de 20 €, Sineha prévoit d'acheter soit 10 tickets du jeu n° 1 (option 1) soit 20 tickets du jeu n° 2 (option 2) et on appelle X le nombre de tickets gagnants avec l'option 1 et Y avec l'option 2.
1. Donner sans justification les lois de X et Y (on supposera tous les tickets indépendants).
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Laquelle des deux options permet d'obtenir en moyenne le plus de tickets gagnants ?

97 Dans un jeu, la mise est de 1 € et on gagne 9 € avec la probabilité 0,1 (on ne gagne rien le reste du temps). On considère deux stratégies. Précisément :
- **Stratégie 1 :** on joue 20 parties.
- **Stratégie 2 :** on joue jusqu'à gagner une partie et on s'arrête (on suppose que l'on dispose d'argent « infini »).

1. Dire combien de parties on peut « espérer » gagner avec la stratégie 1.
Sans tenir compte de la mise, en déduire quelle somme on peut « espérer » gagner avec la stratégie 1 ?
2. Quelle somme gagne-t-on avec la stratégie 2 ?
3. **a)** Quelle somme dépense-t-on avec la stratégie 1.
b) Dire combien de parties on peut « espérer » jouer puis quelle somme on peut « espérer » miser avec la stratégie 2.
4. Avec laquelle des deux stratégies peut-on espérer perdre le moins possible ?

Exercices bilan

98 Partie de pêche

A ▶ Calcul de probabilités

Le week-end, Michaela va souvent à la pêche.
La probabilité qu'elle y aille le samedi est 0,7 et la probabilité qu'elle y aille le dimanche est :
- 0,3 si elle y est allée le samedi.
- 0,9 s'il n'y est pas allée le samedi.

1. Expliquer pourquoi les deux épreuves consistant à regarder si Michaela va à la pêche le samedi et le dimanche ne sont pas indépendantes.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré puis déterminer la probabilité qu'elle aille au moins une fois à la pêche le week-end.
3. Sachant qu'elle est allée à la pêche ce week-end, quelle est la probabilité qu'elle y soit allée samedi ?

B ▶ Loi géométrique

On considère que la probabilité que Michaela rentre de la pêche après 17 h est de 0,4, indépendamment d'une fois à l'autre.
On appelle X la variable aléatoire donnant le rang de la première fois où elle rentre après 17 h depuis l'ouverture de la pêche.
1. Quelle loi suit X ?
Justifier.
2. Calculer $p(X < 4)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.
3. Déterminer la probabilité qu'il faille attendre la 3^{e} session de pêche pour qu'elle rentre après 17 h.
4. Michaela est allé pêcher 4 fois et est toujours rentrée avant 17 h.
Quelle est la probabilité qu'elle rentre avant 17 h pendant ses 9 premières sessions (les 4 premières comprises) ?

99 Comparaison de lois

Choisir la bonne réponse.

Quand on réalise un grand nombre de fois les expériences aléatoires suivantes, en moyenne, obtient-on un nombre plus élevé en :
a regardant le nombre obtenu quand on lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8 ?
b regardant le nombre de PILE obtenus quand on lance 8 fois une pièce de monnaie équilibrée ?

100 Loi uniforme

Démo

Sans utiliser la formule de l'espérance de la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ est 3.

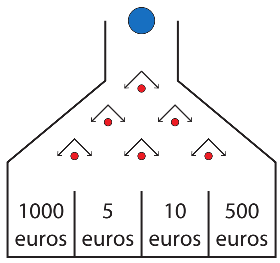
Coup de pouce Voir la définition de la loi uniforme et la formule générale de l'espérance d'une variable aléatoire.

101 La planche de Galton

Algo

A ▶ Avec 3 étages

Dans un jeu télévisé , on fait glisser un palet le long d'une planche cloutée comme ci-contre (le palet est en bleu et les clous en rouge).



À chaque étage, le palet rencontre un clou et va à gauche ou à droite puis, après 3 étages, il arrive dans un des quatre réceptacles et indique le gain du joueur.
1. a) Quel serait le gain du joueur si le palet allait à gauche puis à droite puis à gauche sur le dessin ?
À droite puis à droite puis à gauche ?
b) Quel serait le gain du joueur si le palet allait une fois à gauche et deux fois à droite (indépendamment de l'étage) ?
2. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où le palet va à gauche sur le dessin.
a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en donner les paramètres n et p.
b) Déterminer $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$ et $p(X=3)$.
c) Écrire et compléter le programme Python ci-contre afin qu'il simule le lancer d'un palet et affiche le gain correspondant.

```
import random

gauche = 0
for i in range(3):
    if random.random()<=0.5:
            gauche = gauche+1
if gauche == 0:
   print("…euros")
…
```

d) Recopier et compléter le tableau ci-contre donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire G donnant le gain à ce jeu.

g_i	1 000	5	10	500
$p(G=g_i)$	…	…	…	…

B ▶ Avec 11 étages

On considère le même dispositif appelé « planche de Galton » mais cette fois-ci avec 11 étages : c'est le dispositif utilisé par le présentateur dans la vidéo de début de chapitre p. 164.
1. Sans justifier, combien de réceptacles y aura-t-il dans ce cas ?
2. a) On considère que les réceptacles sont numérotés de 0 pour le plus à gauche à 11 pour le plus à droite.
Quand on considère une bille, expliquer pourquoi la variable aléatoire R donnant le numéro du réceptacle dans lequel elle finit suit une loi binomiale puis donner les paramètres n et p de cette loi binomiale.
b) Tracer le diagramme en barres associé à cette loi binomiale c'est-à-dire le diagramme en barres pour lequel les barres sont centrées sur les valeurs entières k entre 0 et n et dont la hauteur des barres est donnée par $p(X=k)$.
c) Faire le lien avec la vidéo de début de chapitre.

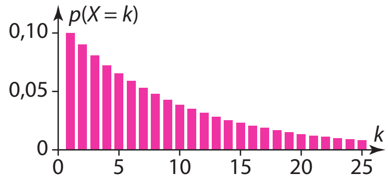
Préparer le BAC L'essentiel

Propriétés de X suivant une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$

- X prenant les valeurs entières de 1 à n avec la même probabilité suit la loi uniforme $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$.
- $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$
- $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Propriétés de X suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

- X donnant le rang du premier succès quand on réalise successivement et indépendamment la même épreuve de Bernoulli suit une loi géométrique.
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$
- $p(X \leqslant k) = 1 - (1 - p)^k$
- $p(X > k) = (1 - p)^k$
- Représentation graphique typique de la décroissance exponentielle.



- Loi sans vieillissement : $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$.

Épreuve de Bernoulli

Épreuve à deux issues : succès et échec.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

X suit une loi $\mathcal{B}(p)$ si $p(X = 1) = p$ et $p(X = 0) = 1 - p$.

Schéma de Bernoulli

Successions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli.

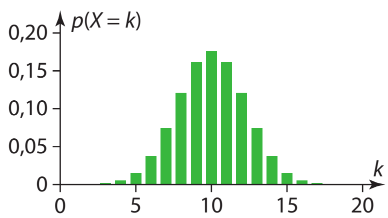
Coefficients binomiaux

- $\dbinom{n}{k}$: nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n
- $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$
- $\dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n}{k}$
- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

Propriétés de X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$

- X donnant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$
- $p(X = k) = \dbinom{n}{k} \times p \times (1 - p)^{n-k}$
- Représentation graphique en forme de cloche centrée sur l'espérance



Intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$

- $[0 ; b]$ avec b le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha$
- $[a ; n]$ avec a le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > \alpha$
- $[a ; b]$ avec a et b les plus petits entiers tels que :
  $p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$
  et $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de…	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Identifier et travailler avec la loi uniforme	Méthode 1	1, 34 ,35
▶ Identifier et travailler avec une expérience ou une loi de Bernouilli ou un schéma de Bernouilli	Méthode 2, Méthode 3	38, 3, 41, 42, 5, 44, 45
▶ Travailler avec la loi binomiale	Méthode 4, Méthode 5, Méthode 6	7, 51, 9, 53, 55, 11, 62, 63, 64, 85
▶ Identifier et travailler avec la loi géométrique	Méthode 7, Méthode 9	68, 13, 70, 17, 91, 92
▶ Manipuler les coefficients binomiaux	Méthode 8	15, 82, 83
▶ Comparer des situations avec l'espérance	Méthode 10	19, 96, 97
▶ Travailler avec des arbres et des probabilités conditionnelles		74, 75, 76

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-c07-09

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 102 à 106, une urne contient 200 boules dont 50 sont roses. On tire successivement 10 fois avec remise dans cette urne et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de boules roses obtenues.

	A	B	C	D
102 Ces 10 épreuves indépendantes forment :	un schéma binomial	un schéma de Bernoulli	une loi binomiale	une loi de Bernoulli
103 X suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ avec :	$n = 200$ et $p=50$	$n = 50$ et $p=200$	$n = 200$ et $p = 0{,}25$	$n = 10$ et $p = 0{,}25$
104 $p(X = 3)$ vaut environ :	0,474	0,25	0,776	0,251
105 La probabilité d'obtenir entre 1 et 4 boules roses (inclus) est environ :	0,678	0,532	0,866	0,72
106 La représentation graphique associée à X est :	en forme de cloche centrée sur 2,5	en forme de cloche centrée sur 10	en forme de cloche centrée sur 50	d'une autre forme
107 Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la variable aléatoire donnant le résultat 0 si le résultat est pair et 1 sinon suit une loi :	de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$	de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$	binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{6}$	binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$
108 X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; 20\}$ $E(X)$ vaut :	10	10,5	11	21
109 Soit X suivant la loi $\mathcal{G}(0{,}02)$. $p(X > 51)$ vaut environ :	0	0,35	0,357	0,364
110 $p_{X>5}(X > 20)$ vaut :	$p(X > 5)$	$p(X > 15)$	$p(X > 20)$	$p(X > 25)$

111 Intervalle de fluctuation

Dans la cantine d'un lycée, 237 élèves ont réservé un repas. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, la probabilité qu'il mange finalement à la cantine est 0,93.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves supposés indépendants qui mangeront effectivement à la cantine parmi les 237 ayant réservé.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
Justifier.

2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 95 %.

3. Interpréter cet intervalle dans les termes de l'énoncé.

Méthode 4 p. 175 Méthode 6 p. 177

112 Succession d'épreuves

Dans son téléphone, Naïm a 457 titres classés en deux catégories : 261 titres « métal » et 196 titres « électro ».
Il met son téléphone en mode aléatoire et on considère l'épreuve consistant à jouer un titre et à regarder s'il est « métal » (M) ou « électro » (E).
Dans tout l'exercice, on donnera les probabilités arrondies au millième.
On suppose que le mode aléatoire joue les titres aléatoirement en faisant simplement en sorte de ne pas rejouer deux fois de suite le même titre.

1. La succession de deux de ces titres joués est-elle un schéma de Bernoulli de taille 2 ?

2. Représenter cette succession de deux épreuves par un arbre.

3. a) Calculer la probabilité que le téléphone joue exactement un titre « électro ».
b) Le deuxième titre est « électro ».
Quelle est la probabilité que le premier le soit aussi ?

> **Coup de pouce** Utiliser la définition d'uneprobabilité conditionnelle.

Méthode 3 p. 173

113 Triangle de Pascal

Dresser le triangle de Pascal pour n allant de 0 à 4 et pour tout k entier entre 0 et n.

Méthode 8 p. 180

114 Comparaison de lois

On considère les deux expériences aléatoires ci-dessous :
• on lance une fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 : un succès correspond à un 4 obtenu ;
• on lance quatre fois un dé équilibré à douze faces numérotées de 1 à 12 : un succès correspond à un 12 obtenu.
Sur un grand nombre de répétition de ces expériences en moyenne, laquelle de ces deux expériences aléatoires assure d'obtenir le plus de succès ?

Méthode 10 p. 181

115 Loi géométrique, aspect graphique

Soit X suivant la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}2$.
Sans calcul, tracer l'allure du diagramme en barres des $p(X = k)$ pour k entre 1 et 10 sachant que $p(X = 10) \approx 0{,}027$.

> **Coup de pouce** Voir la propriété du cours sur la représentation graphique d'une loi géométrique.

116 Intervalle de fluctuation centré et loi géométrique

Un grossiste en appareils électroniques assure que seulement 2 % des appareils qu'il vend ont des défauts.
La responsable d'une grande surface tire au sort des appareils parmi ceux livrés par ce grossiste afin de les tester, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise.

1. a) Si l'affirmation du grossiste est vraie, quelle est la probabilité que l'on trouve le premier appareil avec défaut dans les 30 premiers testés ?

> **Coup de pouce** Introduire une variable aléatoire donnant le rang du premier appareil testé ayant un défaut.

b) Au bout de combien d'appareils peut-on « s'attendre » à en trouver un avec défaut ?
c) Si l'on n'a aucun appareil avec défaut dans les 50 premiers testés, quelle est la probabilité que l'on n'en ait pas dans les 75 premiers testés ?
d) Si l'on n'a aucun appareil avec défaut dans les 25 premiers testés, quelle est la probabilité que l'on en ait un avant le 50^{e} ?

> **Coup de pouce** Utiliser l'événement contraire.

2. La responsable prélève en tout 1500 appareils parmi ceux livrés par ce grossiste.
On appelle D la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils avec défaut parmi eux.
a) Dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte, déterminer $p(D < 35)$ et $p(D \geqslant 30)$.
b) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à D dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte.

> **Coup de pouce** Voir la propriété sur les intervalles de fluctuation centrés.

c) Il y a 40 appareils avec défaut parmi les 1500.
Cela remet-il en cause l'affirmation du grossiste ?

> **Coup de pouce**
> Comparer l'effectif obtenu aux effectifs attendus.

Méthode 4 Méthode 5 p. 175 Méthode 6 p. 177 Méthode 7 p. 179 Méthode 9 p. 181

8

Lois de probabilité à densité

La question de la durée de vie des objets électriques ou électroniques s'est posée depuis leur existence. L'ampoule centenaire de Livermore, en Californie est, par exemple, la plus ancienne ampoule à incandescence du monde encore en fonctionnement.

Peut-on estimer la probabilité qu'un appareil électronique dure encore 2 ans sachant qu'il est toujours en état de fonctionnement 10 ans après son achat ?

↪ Activité 3 p. 197

VIDÉO WEB

Une très ancienne ampoule
lienmini.fr/maths-c08-01

Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-c08-02
Les rendez-vous Sésamath

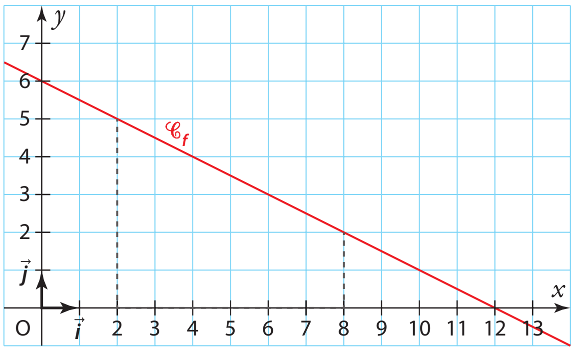
1 Calculer l'espérance et la variance.

Une variable aléatoire X suit la loi de probabilité suivante.

Valeurs de k	-5	0	2	12
$p(X=k)$	0,4	0,2	0,3	0,1

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2 Déterminer graphiquement une intégrale



Déterminer $\displaystyle\int_2^8 f(x)\mathrm{d}x$.

3 Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 10$.

Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

4 Calculer une probabilité conditionnelle

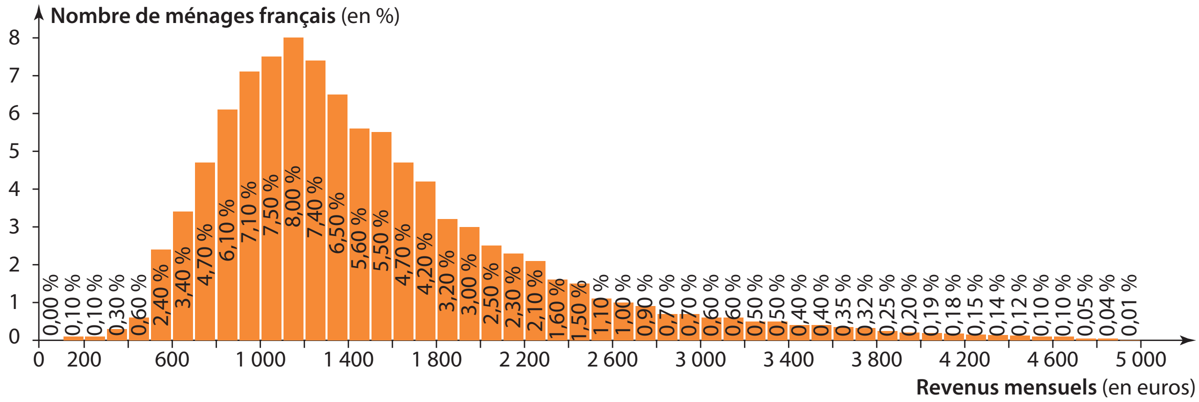
Dans une classe, trois langues sont enseignées : l'anglais, l'espagnol et l'allemand.
Tous les élèves suivent les cours d'anglais, 55 % des élèves suivent les cours d'allemand et 57 % des élèves suivent les cours d'espagnol.
Tout le monde suit au moins deux langues et certains en suivent trois.
On choisit un élève au hasard.
Soit l'événement A : « L'élève apprend l'allemand » et l'événement E : « L'élève apprend l'espagnol »
Déterminer $p(A \cap E)$, puis $p_A(E)$.

Activités

SES 15 min

1 Passage du discret au continu

A ▸ L'histogramme suivant indique la distribution des ménages français en 2014 en fonction de leurs revenus.
L'aire de chaque rectangle est exprimée en pourcentage d'unité d'aire (u.a).
L'aire totale est donc de 100 % soit 1 u.a



Remarque les niveaux de vie supérieurs à 5000 € représentant une proportion très faible de la population (environ 0,001 %) ils ne figurent pas dans l'histogramme.

On choisit un ménage au hasard dans la population française.

1. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit compris entre 800 € et 900 € ?

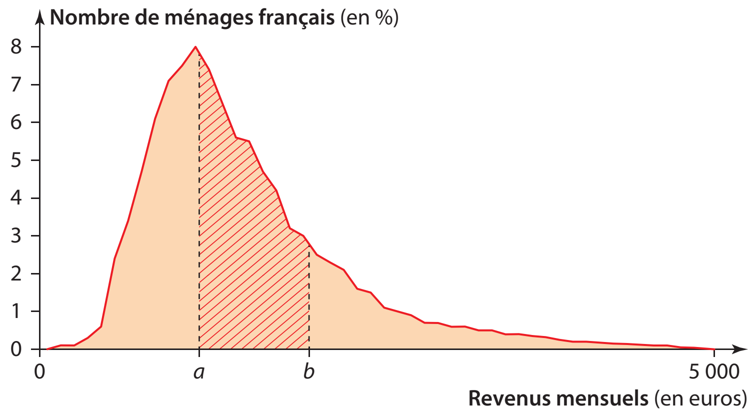
2. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit compris entre 1 200 € et 2 000 € ?

3. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit supérieur ou égal à 1 000 € ?

B ▸ Dans l'histogramme précédent en reliant les milieux des côtés supérieurs de chaque colonne rectangulaire on a fait apparaître une courbe rouge, qui représente une fonction numérique f continue et positive sur [0 ; 5 000]

1. Soient a et b deux nombres de l'intervalle [0 ; 5 000].
À l'aide de fonction f, comment s'écrit mathématiquement l'aire, en unité d'aire, du domaine hachuré situé entre la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$?

2. Le domaine « total » $\mathscr{D}$ situé entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle [0 ; 5 000] a une aire très voisine de celle constituée par l'ensemble des rectangles de l'histogramme précédent. On peut alors considérer que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ tout orange (hachuré et non hachuré) est égale à 1 u. a.



En vous aidant de la partie précédente, donner une valeur approchée de $\int_{1200}^{2000} f(x)\mathrm{d}x$ (aire du domaine orange hachuré avec $a = 1\ 200$ et $b = 2\ 000$).

↪ Cours 1 p. 198

TICE 15 min **Thème 7**

2 Choix d'un nombre aléatoire dans [0 ; 1]

1. a) On considère une variable aléatoire D qui prend pour valeurs tous les nombres décimaux comportant au plus 4 décimales, et appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Soit d l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(D = d)$?

b) On considère une variable aléatoire Y qui prend pour valeurs tous les nombres décimaux comportant au plus 10 décimales, et appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Soit y l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(Y = y)$?

c) On considère une variable aléatoire X qui prend pour valeurs tous les nombres réels de l'intervalle [0 ; 1]. Soit x l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(X = x)$?
On dit alors que la variable aléatoire X est **continue.**

2. Sur un ordinateur avec un tableur on peut utiliser la fonction **ALEA()** qui renvoie un nombre entre 0 et 1.

a) Simuler dans la colonne A d'un tableur 10 000 tirages aléatoires d'un nombre x entre 0 et 1.

b) Calculer la fréquence de l'événement : « $x \in [0{,}25 ; 0{,}5]$ ».

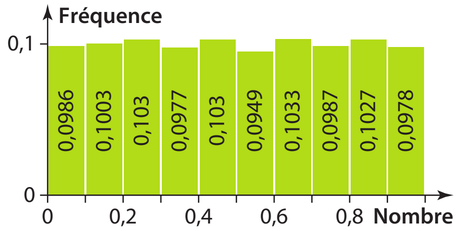
Coup de pouce On pourra utiliser l'instruction **NB.SI.ENS(A1:A10000;">=0 1/4";A1:A10000;"<=0 1/2")** pour compter le nombre de cellules dans la « plage A1 : A10000 » qui affichent un résultat compris entre 0,25 et 0,5).

c) Recommencer plusieurs fois la simulation en appuyant sur la touche F9 du clavier.
Si on admet que la fréquence de cet événement est proche de la probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 0,25 et 0,5 conjecturer la valeur exacte de $p\left(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}5\right)$.

d) Déterminer de même la fréquence des événements : « $X \in \left[0 ; 0{,}25\right]$ » et « $X \in \left[0{,}85 ; 0{,}9\right]$ » puis conjecturer ainsi la valeur exacte de $p\left(0 \leqslant X \leqslant 0{,}25\right)$ et de $p(0{,}85 \leqslant X \leqslant 0{,}9)$.

3. Quels que soient les réels c et d de l'intervalle [0 ; 1] quelle formule permet de calculer directement $p(c \leqslant X \leqslant d)$?

4. À l'aide du tableur on peut obtenir la distribution ci-contre. Quelle fonction f paraît-il pertinent de choisir comme densité de probabilité de X ?



↪ Cours 3 p. 200

Physique 30 min **Thème 8**

3 Loi de probabilité sans mémoire

Au 1er juillet 2020, un nouveau théâtre dispose d'un grand nombre de dispositifs d'éclairage nécessitant, en tout, l'utilisation de 10 000 ampoules. Un an après, le 1er juillet 2021, l'éclairagiste a remarqué que le nombre d'ampoules en état de fonctionnement diminuait de 1 % chaque mois.
On choisit au hasard une ampoule et on note T la variable aléatoire qui associe à chaque ampoule sa durée de vie, en mois. On considère que la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie de n mois ou plus, est égale à la proportion d'ampoules restantes après n mois.

1. Quelle est la probabilité que l'ampoule ait une durée de vie :
a) supérieure ou égale à 1 mois ? **b)** égale à 2 mois?

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p(T \geqslant n) = 0{,}99^n$.

3. On admet que, pour tout réel x, $p(T \geqslant x) = e^{x\ln(0{,}99)}$. Quelle est la probabilité que l'ampoule dure :
a) plus de trois mois et demi ? **b)** moins de huit mois et demi ?

4. Sachant que l'ampoule est en état de fonctionnement le 15 mars 2020, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au 1er juillet 2020 ? On notera cette probabilité $p_{T \geqslant 8{,}5}(T \geqslant 12)$.
Comparer avec la probabilité $p(T \geqslant 3{,}5)$ calculée à la question **3.**

Démontrer que, quels que soient les réels t et h, $p_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = p(T \geqslant h)$

Remarque On dit alors que la variable aléatoire T suit une loi de probabilité **sans mémoire.** Car la probabilité qu'une ampoule dure un temps h supplémentaire après avoir déjà duré un certain temps t ne dépend justement pas de ce temps t déjà écoulé.

↪ Cours 5 p. 204

Cours

1 Loi à densité

Le temps d'attente, en minutes, à un service d'assistance téléphonique, ou la taille d'un bébé, en cm, à la naissance sont des variables aléatoires qui peuvent prendre pour valeur un nombre réel quelconque d'un intervalle. L'ensemble des valeurs possibles est donc un intervalle de réels. On dit alors que la variable aléatoire est **continue**. On introduit une nouvelle notion : la densité de probabilité.

Définition — Densité de probabilité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

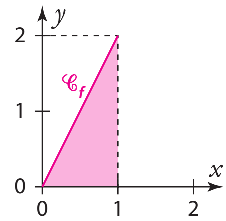
On dit que f est une densité de probabilité (ou une fonction de densité) sur I si et seulement si f est continue et positive sur I, et si l'aire (en unité d'aire) du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1 (autrement dit, l'intégrale de f sur I est égale à 1, ce que l'on notera $\int_I f = 1$ ou encore $\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1$).

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 2x$ est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;1]$. En effet, on sait que f est une fonction affine, elle est donc **continue** sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, et pour tout réel x compris entre 0 et 1, il est clair que $f(x)$ est **positif**.

De plus : $\int_0^1 2x\mathrm{d}x = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$.

Ainsi la fonction f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;1]$.

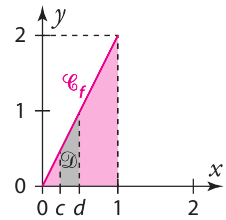


Définition — Variable aléatoire à densité

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I.
Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f sur I signifie que, pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans I, la probabilité $p(X \in [c\,;d])$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$.

C'est-à-dire : $p(X \in [c\,;d]) = p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

On dit alors que X est une variable aléatoire à densité.



Remarque Quel que soit le nombre réel c de l'intervalle I on a $p(X = c) = \int_c^c f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Autrement dit, la probabilité que X prenne une valeur donnée à l'avance parmi l'infinité de valeurs de l'intervalle I est nulle.

Par conséquent les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges : par exemple $p(5 < X < 12) = p(5 \leqslant X \leqslant 12)$.

Définition — Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur I.

On appelle fonction de répartition de la variable X, la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = p(X \leqslant x)$.

Remarque Soit a la borne inférieure de l'intervalle I (a est un nombre réel) alors, pour tout x de I, $p(X \leqslant x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. La fonction de répartition F est donc la primitive, qui s'annule en a, de la densité de probabilité f. Si la borne inférieure de l'intervalle I est $-\infty$ alors : $p(X \leqslant x) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple

Si X suit la loi de densité $f : x \mapsto 2x$ sur $[0\,;1]$ alors la fonction de répartition F est la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $F : x \mapsto x^2$ et alors on a $p(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}3) = 0{,}3^2 - 0{,}2^2 = 0{,}05$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Fonction de densité et calcul de probabilité

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $I = [1\ ;\ 3]$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur [1 ; 3].

a) Déterminer $p(X \geqslant 2)$ et $p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

c) Calculer $F(2)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés de continuité des fonctions usuelles.

2 La fonction f est définie sur I, donc $x \in$ I, ce qui signifie, ici, que x est compris entre 1 et 3.

3 Pour calculer l'intégrale de f sur I, on utilise une primitive de f.

4 En calculant l'intégrale de f on a déjà trouvé une primitive de f mais elle est légèrement différente de la fonction de répartition F car elle ne s'annule pas en 1.

5 On doit donc chercher la constante c qui permet d'avoir $F(1)=0$.

Solution

1. f est une fonction affine 1 continue sur ℝ, donc sur I. De plus 2 :

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \times 1 \geqslant -\frac{1}{4}x \geqslant -\frac{1}{4} \times 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}+1 \geqslant -\frac{1}{4}x+1 \geqslant -\frac{3}{4}+1$$

$\Leftrightarrow 0{,}75 \geqslant f(x) \geqslant 0{,}25$. Donc f est bien positive sur I.

Et on a : $\displaystyle\int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_1^3 = \left(-\frac{3^2}{8}+3\right)-\left(-\frac{1^2}{8}+1\right) = \frac{15}{8}-\frac{7}{8} = \frac{8}{8} = 1.$ 3

Ainsi, la fonction f est bien une densité de probabilité sur I.

2. a) $\displaystyle p(x \geqslant 2) = p(X \in [2\ ;3]) = \int_2^3 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_2^3 = \left(-\frac{3^2}{8}+3\right)-\left(-\frac{2^2}{8}+2\right) = \frac{15}{8}-\frac{12}{8} = \frac{3}{8}$ 2

$$p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5) = \int_{1{,}5}^{2{,}5}\left(-\frac{1}{4}x+1\right)dx = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_{1{,}5}^{2{,}5} = \left(-\frac{2{,}5^2}{8}+2{,}5\right)-\left(-\frac{1{,}5^2}{8}+1{,}5\right) = \frac{55}{32}-\frac{39}{32} = \frac{1}{2}$$

b) La fonction de répartition F est la primitive 4 de f sur l'intervalle [1 ; 3] qui s'annule en 1.

Les primitives de f sont de la forme :

$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} + x + c = -\frac{x^2}{8} + x + c$ (où c est une constante réelle). 5 Or $F(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1^2}{8}+1+c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{7}{8}$.

Donc l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire X sur [1 ; 3] est $F(x) = -\frac{x^2}{8} + x - \frac{7}{8}$.

c) $F(2) = \left(-\frac{2^2}{8}+2-\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8}$. Cela signifie que la probabilité $p(X \leqslant 2)$ est égale à $\frac{5}{8}$.

À vous de jouer !

1 On considère la fonction g définie sur I = [0 ; 1] par $g(x) = 3x^2$.

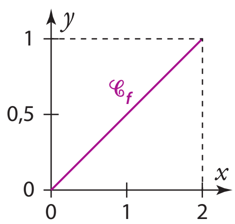
1. Démontrer que g est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité g sur [0 ; 1]. Déterminer $p(X \geqslant 0{,}25)$ et $p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.

2 Soit f la fonction linéaire dont la courbe est représentée ci-contre dans un repère orthonormal.

1. Justifier que f est une densité de probabilité sur I = [0 ; 2].

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur [0 ; 2]. Déterminer $p(X < 1)$ et $p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$.



3 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$ sur l'intervalle [0 ; 2].

1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

2. Calculer $F(1{,}5) - F(0{,}5)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

4 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité $f : x \mapsto 3x^2$ sur l'intervalle [– 1 ; 0].

1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

2. Calculer $F(0)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

3. Calculer $F(-0{,}5) - F(-0{,}2)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

↪ Exercices 39 à 50 p. 210

Cours

2 Espérance et variance d'une loi à densité

Définition Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur un intervalle I.
L'espérance de X est $E(X)=\int_{\mathrm{I}} xf(x)\mathrm{d}x$ et la variance de X est $V(X)=\int_{\mathrm{I}}(x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque La variance peut aussi se calculer à l'aide de la formule de Koenig-Huygens :
$V(X)=\int_{\mathrm{I}} x^2 f(x)\mathrm{d}x-(E(X))^2$

Exemple Si X suit la loi de densité $f: x \mapsto 2x$ sur [0 ; 1] alors :

$$E(X)=\int_0^1 x \times 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\times\frac{1^3}{3}-2\times\frac{0^3}{3}=\frac{2}{3}$$

Et donc $V(X)=\int_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\times 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)\times 2x\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x\right)\mathrm{d}x$.

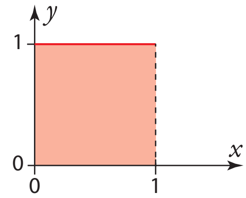
Soit $V(X)=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{8x^3}{9}+\frac{4}{9}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}-0=\frac{1}{18}$

3 Loi uniforme sur [0 ; 1]

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).
Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante

Définition Loi uniforme sur [0;1]

On appelle loi uniforme sur I = [0 ; 1] la loi de densité de probabilité f,
où f est la fonction constante égale à 1 pour tout x de I.



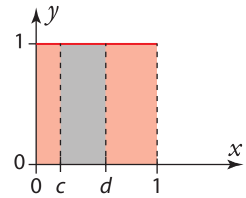
Démonstration

La fonction f ainsi définie est bien une densité de probabilité sur [0 ; 1] car elle est continue, positive et l'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe est égal à 1 u.a. sur [0 ; 1] car c'est un carré de côté 1.

Propriété Probabilité dans le cas d'une loi uniforme sur [0 ; 1]

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [0 ; 1] alors, pour tous réels c et d compris entre 0 et 1, on a :

$$p(c \leqslant X \leqslant d)=d-c$$



Démonstration

On peut le voir graphiquement : l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x=c$ et $x=d$ correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $d-c$ et de longueur 1.
Donc l'aire est égale à longueur × largeur = $d-c$.

Exemple Dans un cabinet médical, on a établi, après étude statistique, que le temps d'attente était complètement aléatoire et variait de façon uniforme jusqu'à 1 heure maximum. Si on appelle X la variable aléatoire qui correspond au temps d'attente, alors on peut dire que X suit la loi uniforme sur [0 ; 1].
Et donc la probabilité qu'un patient attende plus d'un quart d'heure est égale à $p\left(\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant 1\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
Un patient a donc $\frac{3}{4}$ ou 75 % de chances d'attendre plus d'un quart d'heure.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi à densité

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle I = [1 ; 2].
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Solution

$$E(X) = \int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{12} = \frac{19}{12}.$$ **1**

Et, on a donc, en utilisant la formule de König-Huygens : $V(X) = \int_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x - \left(\frac{19}{12}\right)^2$

Or $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = 3$. Donc $V(X) = 3 - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{71}{144}$. **2**

Conseils & Méthodes

1 Il n'existe pas de formule pour déterminer la primitive du produit de fonctions $x \times f(x)$. Il faut donc développer ce produit.

2 On procède de même pour le produit $x^2 \times f(x)$.

À vous de jouer !

5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto 0{,}5x$ sur l'intervalle $I = [0 ; 2]$.
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

6 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto 3x^2$ sur l'intervalle I = [0 ; 1].
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

↪ Exercices 51 à 52 p. 211

Méthode 3 Calculer des probabilités dans le cas d'une loi uniforme sur [0 ; 1]

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0 ; 1]. Calculer les probabilités suivantes.

a) $p(X \in [0{,}125 ; 0{,}387])$ **b)** $p\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right)$ **c)** $p(X \geqslant \sqrt{3} - 1)$

Solution

a) $p(X \in [0{,}125 ; 0{,}387]) = 0{,}387 - 0{,}125 = 0{,}262$

b) $p\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right) = p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

c) $p(X \geqslant \sqrt{3} - 1) = P(\sqrt{3} - 1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$ **1**

Conseils & Méthodes

1 Lorsqu'on utilise la loi uniforme sur [0 ; 1], l'événement : « $X \geqslant \sqrt{3} - 1$ » signifie de façon implicite « $1 \geqslant X \geqslant \sqrt{3} - 1$ » car X est forcément inférieur ou égal à 1.

À vous de jouer !

7 Un technicien de la société qui fournit l'énergie doit passer chez Sarah pour relever les compteurs de gaz. Il a prévenu qu'il passait entre 8h00 et 9h00. Sarah l'attend. Son temps d'attente, en heures, est une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme sur [0 ; 1].
1. Quelle est la probabilité que Sarah attende moins de 20 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que Sarah attende plus de trois quart d'heure ?

8 Wassim et Lilia utilisent la fonction **random()** de la calculatrice qui affiche un nombre au hasard entre 0 et 1. Le plus grand nombre obtenu gagne.
1. À la première partie, Wassim commence et obtient 0,2797356, puis Lilia s'apprête à jouer. Quelle est la probabilité que Lilia gagne la partie ?
2. À la deuxième partie, Lilia commence et obtient 0,9969427. Quelle est la probabilité qu'elle gagne encore la partie ?

↪ Exercices 53 à 54 p. 211

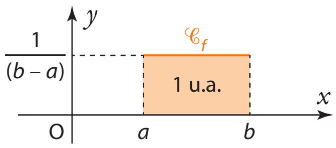
Cours

4 Loi uniforme sur [a ; b]

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).
On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

Définition Loi uniforme sur [a ; b]

Soit a et b deux nombres réels.
On appelle loi uniforme sur I = [a ; b] la loi de densité de probabilité f,
où f est la fonction constante $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ pour tout x de I.



Remarque La loi uniforme sur [a ; b] peut être notée $U([a\,;b])$. Cette définition est aussi une propriété qui peut être démontrée.

Démonstration

Sur [a ; b], f est continue car c'est une fonction constante et est positive car $b > a$.
L'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1 u.a. sur [a ; b] car ce domaine est un rectangle de longueur b-a et de largeur $\dfrac{1}{b-a}$. On a aire = longueur × largeur $= \dfrac{1}{b-a} \times (b-a) = 1$.

Propriété Probabilité dans le cas d'une loi uniforme sur [a ; b]

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a ; b] alors,
pour tous réels c et d dans [a ; b], on a :

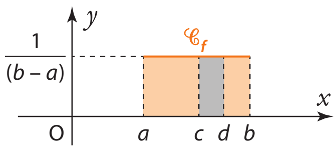
$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration

On peut le voir graphiquement : l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x = c$ et $x = d$ correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $d - c$ et de longueur $\dfrac{1}{b-a}$.
Donc l'aire est égale à longueur × largeur $= \dfrac{1}{b-a} \times (d-c)$

On peut aussi le démontrer avec une intégrale :

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a}.$$



Propriété Fonction de répartition d'une loi uniforme sur [a ; b]

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [a ; b]
alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur [a ; b]
par :

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Propriété Espérance et variance d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [a ; b].
L'espérance de X est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Démonstration

$$E(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 4 Calculer des probabilités dans le cas d'une loi uniforme sur $[a ; b]$

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

1. Calculer $p(X \leqslant 2)$ et $p(2 < X < 4)$.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Solution

1. [1] $p(X \leqslant 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \dfrac{2-1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$ et $p(2 < X < 4) = \dfrac{4-2}{5-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

2. $E(X) = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $V(X) = \dfrac{(5-1)^2}{12} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

Conseils & Méthodes

[1] Lorsqu'on utilise la loi uniforme sur $[1 ; 5]$, l'évènement : « $X \leqslant 2$ » signifie de façon implicite « $1 \leqslant X \leqslant 2$ » car X est forcément supérieur ou égal à 1.

À vous de jouer !

9 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
1. Calculer $p(X > 3)$ et $p(X \in [2 ; 7])$
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

10 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.
1. Calculer $p(X \geqslant -1)$ et $p(X \in [-3 ; 3])$
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

↪ Exercices 55 à 56 p. 211

Méthode 5 Modéliser avec la loi uniforme

Énoncé

On considère que le temps d'attente, en minutes, au service d'assistance téléphonique d'un opérateur de téléphone mobile est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi à densité. De plus l'opérateur assure que le temps d'attente avant d'obtenir un conseiller n'excédera pas 15 min.

1. Quelle densité de probabilité permet de modéliser ce problème ?

2. Déterminer la probabilité que le temps d'attente soit :

a) inférieur à 3 min. **b) supérieur à 10 min.**

Solution

1. Aucune valeur n'est privilégiée donc on peut modéliser à l'aide d'une loi uniforme. Comme la variable aléatoire prend ses valeurs dans $[0 ; 15]$ [1], on prend la loi uniforme sur $[0 ; 15]$ dont la densité de probabilité est la fonction constante $f : x \mapsto \dfrac{1}{15}$.

2. a) $p(X < 3) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$ b) $p(X > 10) = p(10 < X \leqslant 15) = \dfrac{15-10}{15} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Conseils & Méthodes

[1] Si l'énoncé ne précise pas le temps minimal d'attente c'est qu'il s'agit de 0 minutes !

À vous de jouer !

11 Émilie achète un pull sur un site de vente en ligne et paie une livraison « express » comprise entre 24 h et 72 h. On admet que ce délai de livraison D suit une loi uniforme.
1. Quelle est la probabilité qu'Émilie reçoive son pull :
a) dans moins de 24 h ? b) dans plus de deux jours ?
2. En moyenne, dans ce type de livraison « express », quel est le délai de livraison ?

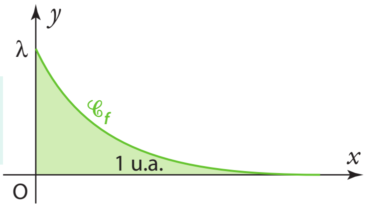
12 Un programme informatique fait varier la couleur de l'écran de veille d'un ordinateur toutes les 10 s en choisissant aléatoirement une longueur d'onde comprise entre 400 nm et 670 nm.
Quelle est la probabilité qu'au prochain changement de couleur, l'écran de veille prenne :
a) la couleur violette (moins de 462 nm) ?
b) la couleur orange (de 600 nm à 625 nm environ) ?

↪ Exercices 57 à 58 p. 211

5 Loi exponentielle

Propriété Densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$

Soit λ un nombre réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est une **densité de probabilité** sur $[0\,;+\infty[$.



Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c08-04

↪ Apprendre à démontrer p. 208

Définition Loi exponentielle de paramètre λ

On appelle **loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$**, notée $E(\lambda)$, la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

Remarque $f(0)=\lambda e^{-\lambda\times 0}=\lambda e^0=\lambda$. Donc l'ordonnée à l'origine de la courbe représentative de f est égale à λ.

Propriété Calcul de probabilités

Pour tous nombres positifs a, c et d : • $p(X\leqslant a)=1-e^{-\lambda a}$ • $p(X\geqslant a)=e^{-\lambda a}$ • $p(c\leqslant X\leqslant d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$

Démonstration

$$p(X\leqslant a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a=-e^{-\lambda a}-(-e^{-\lambda\times 0})=-e^{-\lambda a}+e^0=1-e^{-\lambda a}$$

$$p(X\geqslant a)=1-p(X<a)=1-p(X\leqslant a)=1-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}$$

$$p(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d=-e^{-\lambda d}+e^{-\lambda c}=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}.$$

Propriété Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $E(\lambda)$ alors **la fonction de répartition de la loi exponentielle** de paramètre λ est la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

Propriété (admise) Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Propriété Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Pour tous nombres strictement positifs t et h, on a : $p_{(X>t)}(X>t+h)=p(X>h)$

Démonstration $p_{(X>t)}(X>t+h)$ est une probabilité conditionnelle, donc :

$$p_{(X>t)}(X>t+h)=\frac{p((X>t)\cap(X>t+h))}{p(X>t)}=\frac{p(X>t+h)}{p(X>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda(t+h)+\lambda t}=e^{-\lambda h}=p(X>h)$$

Exemple Soit un appareil dont la durée de vie en années est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}1$. On a alors $p_{X>3}(X>5)=p_{X>3}(X>3+2)=p(X>2)$. Donc si l'appareil a déjà fonctionné pendant plus de 3 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 2 ans de plus (soit plus de 5 ans en tout) est la même que la probabilité (non conditionnelle) de fonctionner pendant plus de 2 ans.

Remarque On dit alors que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

Exercices résolus

Méthode 6 Calculer une probabilité avec la loi exponentielle de paramètre λ

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Déterminer : a) $p(X \leqslant 2)$, $p(X > 1)$ et $p_{X>1}(X > 3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près. b) $E(X)$

Solution

a) $p(X \leqslant 2) = 1 - e^{-2\times 2} = 1 - e^{-4} \approx 0{,}9817$ **1** et $p(X > 1) = e^{-2\times 1} = e^{-2} \approx 0{,}135\,3$

D'après la propriété « d'absence de mémoire » on a :

$p_{X>1}(X > 3) = p_{X>1}(X > 1 + 2) = p(X > 2) = e^{-2\times 2} = e^{-4} \approx 0{,}0183$ **2**

b) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{2}$

Conseils & Méthodes

1 $p(X > 1) = p(X \geqslant 1)$

2 On décompose 3 en 1 + 2 pour montrer la propriété d'absence de mémoire : $p_{(X>t)}(X > t + h) = p(X > h)$ avec, ici, t qui vaut 1 et h qui vaut 2.

À vous de jouer !

13 X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$. Déterminer :
a) $p(X \leqslant 5)$ **b)** $p(10 < X < 20)$ **c)** $p_{X>6}(X \geqslant 16)$ **d)** $E(X)$.

14 X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$. Déterminer :
a) $p(X > 50)$ **b)** $p(X \in [15\,;75])$ **c)** $p_{X>50}(X \geqslant 80)$ **d)** $E(X)$.

➜ Exercices 59 à 60 p. 211

Méthode 7 Modéliser avec la loi exponentielle

Énoncé

La durée de vie d'un appareil photo numérique avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre λ. Janek vient d'en acheter un. Les utilisateurs de cet appareil ont signalé une première panne au bout de 4 ans d'utilisation.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la durée de vie D de cet appareil photo.

2. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne 10 ans sans avoir de panne ?

3. Trois ans plus tard Janek n'a pas eu de panne. Quelle est la probabilité que son appareil fonctionne encore 2 ans sans avoir de panne ?

Solution

1. $E(D) = 4$. **1** Or D suit une loi exponentielle, donc $E(D) = \dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi $\dfrac{1}{\lambda} = 4$. Et donc $\lambda = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

2. $p(D \geqslant 10) = e^{-0{,}25\times 10} = e^{-2{,}5} \approx 0\,{,}082$.
La probabilité qu'il fonctionne 10 ans est d'environ 8,2 %.

3. $p_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3 + 2) = p(D \geqslant 2) = e^{-0{,}25\times 2} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$. **2** Sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans, la probabilité qu'il dure encore 2 ans sans avoir de panne est d'environ 60,7 %.

Conseils & Méthodes

1 Le terme « moyenne » indique que l'on parle de l'espérance de la variable D c'est-à-dire 4 ans.

2 On pense à une probabilité conditionnelle car on sait que $D > 3$.

À vous de jouer !

15 Un appareil photo numérique a une durée de vie moyenne de 10 ans.
1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par cet appareil photo.
2. Sachant que cet appareil a fonctionné pendant 10 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans sans avoir de panne ?

16 Dans un pays, la répartition de la population en fonction de l'âge pouvait être modélisée par la densité de probabilité $f : x \mapsto \dfrac{1}{16}e^{-\frac{1}{16}x}$.
On interroge une personne au hasard dans cette population.
1. Quelle est la probabilité que cette personne ait :
a) moins de 18 ans ? **b)** plus de 60 ans ?
2. Quel est l'âge moyen de la population de ce pays ?

➜ Exercice 61 p. 211

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 8 Étudier une densité de probabilité sur un intervalle I = $[a\,;+\infty[$ ou I = $]-\infty\,;a]$

Énoncé

f est la fonction définie sur I = $[2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{8}{x^3}$.

1. Justifier que la fonction f est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire à densité f sur I. Déterminer l'espérance de X.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle, elle est continue en chaque point où elle est définie **1**. Ainsi f étant définie sur $[2\,;+\infty[$, elle est aussi continue sur $[2\,;+\infty[$. Si $x\in[2\,;+\infty[$ alors x est positif, et donc x^3 est aussi positif. 8 étant un nombre positif, le quotient $\dfrac{8}{x^3}$ est donc positif sur $[2\,;+\infty[$.

On en conclut que f est continue et positive sur I. **2**

Étudions maintenant, pour tout réel b supérieur à 2, l'intégrale de f de 2 à b : $\int_2^b f(x)\mathrm{d}x$.

f est continue sur $[2\,;b[$ et est telle que $f(x)=8\times\dfrac{1}{x^3}$.

f admet donc une primitive F sur $[2\,;b[$ telle que $F(x)=8\times\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\dfrac{4}{x^2}$.

Donc : $\int_2^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_2^b=F(b)-F(2)=-\dfrac{4}{b^2}-\left(-\dfrac{4}{2^2}\right)=-\dfrac{4}{b^2}+1$.

Si b tend vers $+\infty$, alors $-\dfrac{4}{b^2}$ tend vers 0 **3**.

Ainsi, par addition des limites on en déduit : $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}-\dfrac{4}{b^2}+1=1$.

Cela signifie que l'intégrale de f sur l'intervalle I = $[2\,;+\infty[$ est égale à 1.

2. Comme l'intervalle I a une borne infinie on va devoir encore utiliser une limite pour déterminer l'espérance :

$E(X)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b xf(x)\mathrm{d}x$.

Or, $\int_2^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_2^b x\times\dfrac{8}{x^3}\mathrm{d}x=\int_2^b\dfrac{8}{x^2}\mathrm{d}x=\left[-\dfrac{8}{x}\right]_2^b=-\dfrac{8}{b}-\left(-\dfrac{8}{2}\right)=-\dfrac{8}{b}+4$.

Si b tend vers $+\infty$, alors $-\dfrac{8}{b}$ tend vers 0.

Ainsi, par addition des limites on en déduit : $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b xf(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}-\dfrac{8}{b}+4=4$. Donc $E(X)=4$.

Conseils & Méthodes

1 On utilise les propriétés de continuité des fonctions usuelles.

2 L'intégrale de f sur $[2\,;+\infty[$ se traduit par $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_2^b f(x)\mathrm{d}x$. Dans ce cas on calcule d'abord l'intégrale $\int_2^b f(x)\mathrm{d}x$ puis on étudie ensuite la limite lorsque b tend vers $+\infty$

3 D'après la propriété de quotient des limites : « $\dfrac{-4}{+\infty}=0$ »

À vous de jouer !

17 Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;0]$ par $g(t)=\mathrm{e}^t$.

1. Soit x un nombre réel strictement négatif.

Démontrer que $\int_x^0 g(t)\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^x$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}1-\mathrm{e}^x$.

3. En déduire que g est une densité de probabilité sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

4. Soit X la variable aléatoire à densité g sur $]-\infty\,;0]$. Déterminer la probabilité que X soit supérieur à -4.

18 h est la fonction définie sur I = $[1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{x^2}.$$

1. Justifier que la fonction h est une densité de probabilité sur I.

2. Soit Y la variable aléatoire à densité h sur I.

a) Déterminer $p(Y\geqslant 5)$

b) Que peut-on dire de $E(Y)$?

➜ Exercices 68 à 70 p. 212

Exercices résolus

Méthode 9 Déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle

Cours 5 p. 204

Énoncé

Une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est telle que la probabilité $p(x < 5) = \frac{1}{4}$.

Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et une valeur approchée à 10^{-2} près.

Solution

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout réel a positif, on a 1 : $p(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

Donc pour $a = 5$, cela donne : $p(X < 5) = 1 - e^{-5\lambda}$.

Or, d'après l'énoncé $p(X < 5) = \frac{1}{4}$. Donc on a : $1 - e^{-5\lambda} = \frac{1}{4}$.

Résolvons cette équation : $1 - e^{-5\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = e^{-5\lambda} \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{5} \approx 0{,}06$.

Conseils & Méthodes

1 On traduit l'égalité $p(X < 5) = \frac{1}{4}$ en une équation mettant en jeu la fonction exponentielle à l'aide des formules.

À vous de jouer !

19 Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Sachant que $p(Y \geqslant 10) = \frac{2}{5}$, déterminer λ.

20 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Sachant que $p(X \leqslant 2) = 0{,}75$ déterminer λ.

21 La durée de vie, en années, d'une calculatrice est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On sait que 10 % des calculatrices tombent en panne durant la première année.

1. Déterminer la valeur, arrondie à 10^{-2} près de λ.

2. En déduire la durée de vie, en moyenne, d'une calculatrice.

Exercices 82 à 84 p. 214

Méthode 10 Déterminer une loi uniforme $U([a\,;b])$

Cours 4 p. 202

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On sait que $E(X) = 5$ et $V(X) = 3$. Déterminer les réels a et b.

Solution

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. 1

On obtient le système $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 5 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 10 \\ (b-a)^2 = 36 \end{cases}$.

On peut résoudre ce système en utilisant la méthode « par substitution » 2 :

$\begin{cases} a = 10 - b \\ (b-(10-b))^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 - b \\ (2b-10)^2 = 36 \end{cases}$ Résolvons la deuxième équation 3 :

$(2b-10)^2 = 36 \Leftrightarrow 2b - 10 = 6$ ou $2b - 10 = -6 \Leftrightarrow b = 8$ ou $b = 2$.

Comme $a = 10 - b$ alors $a = 2$ ou $a = 8$. Sachant que $a < b$, on en déduit que $a = 2$ et $b = 8$

Conseils & Méthodes

1 C'est un problème à deux inconnues a et b, donc pour le résoudre il s'agit de trouver deux équations, qui vont nous être données grâce aux formules de $E(X)$ et $V(X)$.

2 On isole d'abord a dans la première équation puis on remplace a dans la deuxième équation par l'expression trouvée dans la première. On obtient ainsi une équation à une seule inconnue b.

3 C'est une équation de la forme $x^2 = c$, où c est un nombre réel positif, qui a deux solutions $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

À vous de jouer !

22 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;b]$ où b est un nombre réel supérieur à 1.
Sachant que $V(X) = \frac{1}{3}$, déterminer b.

23 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme de densité $f : x \mapsto \frac{1}{10}$ sur $[a\,;b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Sachant que $E(X) = 2$. Déterminer a et b.

Exercices 76 à 78 p. 213

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c08-04

La propriété à démontrer

Soit λ un nombre réel strictement positif. La fonction f définie sur I = [0 ; +∞[par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur I.

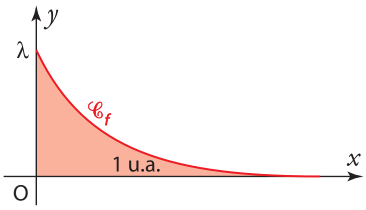
On utilisera la définition de la densité de probabilité.

Comprendre avant de rédiger

- Pour montrer que f est une densité de probabilité sur I, il faut vérifier que f possède trois caractéristiques :

① continue sur I. ② positive sur I. ③ son intégrale sur I est égale à 1.

- La difficulté principale est que l'intervalle I sur lequel on étudie la densité de la fonction f possède ici une borne infinie. Donc pour calculer l'intégrale de f sur I et montrer qu'elle est égale à 1, on doit étudier une limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt$.



Rédiger

Étape 1

On montre que f est continue sur I.

On peut utiliser le fait qu'une fonction dérivable est obligatoirement continue. Donc montrer que la fonction est dérivable puis en déduire qu'elle est continue.

Étape 2

On montre que f est positive sur I.

Penser à utiliser la condition sur λ donnée dans la propriété.

Étape 3

On montre que l'intégrale de f sur I est égale à 1.

Le calcul de cette intégrale se fait en deux temps :

- On commence par calculer l'intégrale de f de 0 à x, $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$, où x est un réel positif.
- On étudie ensuite la limite de cette intégrale lorsque x tend vers +∞.

La démonstration rédigée

La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est de la forme e^u où u est la fonction affine $u : t \mapsto -\lambda t$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I inclus dans $\mathbb{R}$. Or, on sait que si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I. La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est donc dérivable sur I. Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I et λ étant une constante, on en déduit que la fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est continue sur I.

D'une part, on sait que λ est un nombre strictement positif sur I. D'autre part, on sait que, quel que soit le nombre réel X, e^X est strictement positif ; donc $e^{-\lambda t} > 0$.

Le produit $\lambda e^{-\lambda t}$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, sur l'intervalle I.

Si on pose $u(t) = -\lambda t$, on a alors $u'(t) = -\lambda$. La fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est donc de la forme $-u'(t)e^{u(t)}$ qui admet pour primitive $-e^{u(t)}$. Donc f admet pour primitive la fonction $F : t \mapsto -e^{-\lambda t}$.

Ainsi on a : $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^{-\lambda \times 0} = 1 - e^{-\lambda x}$

Comme $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$. On sait que $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition des limites, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$.

Donc par soustraction des limites, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante.

Soit λ un nombre réel strictement positif.
La fonction f définie sur I =]–∞ ; 0] par $f(t) = \lambda e^{\lambda t}$ est une densité de probabilité sur I.

DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c08-05

Exercices calculs et automatismes

24 Calculer des probabilités (1)

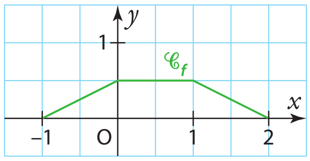
X est une variable aléatoire à densité sur $[0\,;10]$.
On sait que $p(X \geqslant 8) = 0{,}1$ et $p(X < 3) = 0{,}2$.
Déterminer les probabilités suivantes.
a) $p(X \geqslant 0)$ **b)** $p(X = 2)$ **c)** $p(X < 8)$ **d)** $p(3 \leqslant X \leqslant 8)$.

25 Calculer des probabilités (2)

X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité à densité f sur $[1\,;9]$.
On sait que $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 0{,}14$ et $\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x = 0{,}48$.
Déterminer les probabilités suivantes.
a) $p(X \leqslant 7)$ **b)** $p(3 < X \leqslant 9)$

26 Densité de probabilité

Soit f la fonction dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-contre.



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?

	V	F
f est une densité de probabilité sur $[-1\,;2]$.	☐	☐

27 Densité sur un intervalle

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + 2$.
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
f est une densité de probabilité sur :
a $[0\,;1]$ **b** $[-1\,;0]$ **c** $[-1\,;1]$ **d** $[0\,;2]$.

28 Identifier une probabilité

Soit X la variable aléatoire à densité $f : x \mapsto 8x$ sur $[0\,;0{,}5]$.
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
La probabilité $p(X \in [0{,}1\,;0{,}2])$ est égale à :
a 0,12 **b** 0,8 **c** 1,2 **d** 0,04

29 Loi uniforme et simulation TICE

Sur un tableur, l'instruction **=ALEA()** renvoie un nombre réel pris au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$.
La variable aléatoire X prend pour valeur le résultat donné par cette instruction.
1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Déterminer la probabilité que X prenne une valeur comprise entre 0,584 et 0,992
3. Quelle est l'espérance de X ?

30 Loi uniforme

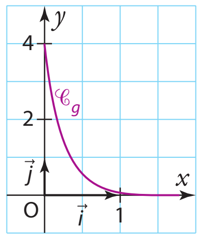
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\,;10]$.
1. Quelle est la fonction de densité associée à X ?
2. Déterminer les probabilités suivantes .
a) $p(X > 9)$ **b)** $p(X \in [1\,;4])$ **c)** $p(X \leqslant 2)$

31 Loi uniforme et coût

Loïc mange tous les midis à la cafétéria.
Son repas lui coûte à chaque fois entre 7 € et 9,50 €.
On considère que le prix du repas de Loïc est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.
Aujourd'hui il, part manger à la cafétéria.
1. Quelle est la probabilité que son repas lui coûte moins de 8,20 € ?
2. Quelle est la probabilité que le prix de son repas dépasse les 9 € ?
3. En moyenne, quelle somme dépense-t-il à chaque repas ?

32 Loi exponentielle (1)

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, dont la fonction de densité est représentée ci-contre.
1. Que vaut λ ?
2. Déterminer l'espérance de X.



33 Loi exponentielle(2)

Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que l'espérance de Y est égale à 20.
1. Que vaut λ ?
2. Déterminer les probabilités suivantes.
a) $p(Y > 25)$ **b)** $p(Y \in [5\,;15])$ **c)** $p(Y \leqslant 20)$

34 Durée de vie d'un composant électronique

La durée de vie D d'un composant électronique, en année, suit une loi exponentielle.
On sait que la probabilité qu'il tombe en panne au cours de la première année est égale à 0,1.
Déterminer les probabilités suivantes.
a) $p(D > 1)$ **b)** $p_{D>5}(D > 6)$

35 Loi exponentielle (3)

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}05$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?

	V	F
1. La fonction de densité associée à cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 0{,}05\mathrm{e}^{0{,}05t}$	☐	☐
2. L'espérance de X est 20.	☐	☐
3. La probabilité que X soit supérieure à 100 est égale à $\frac{1}{\mathrm{e}^5}$.	☐	☐

Exercices d'application

Densité de probabilité et calcul de probabilité

Méthode 1 p. 199

36 **1.** Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = [5\,;5{,}5]$ par $f(x) = 2$. Démontrer que f est une densité de probabilité sur l'intervalle I.
2. Soit X une variable à densité f sur I.
Déterminer $p(X \in [5{,}1\,;5{,}3])$.

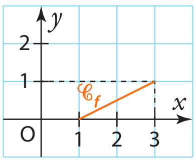
37 **1.** Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;\sqrt{2}]$ par $g(x) = x$. Démontrer que g est une densité de probabilité sur l'intervalle I.
2. Soit X une variable à densité g sur I. Déterminer $p(X \leqslant 1)$.

38 **1.** Soit h la fonction définie sur $\mathrm{I} = [1\,;\mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
Démontrer que h est une densité de probabilité sur l'intervalle I.
2. Soit X une variable à densité h sur I. Déterminer $p(X > 2)$.

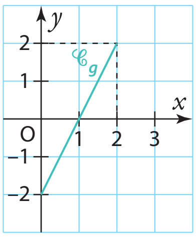
39 Soit f la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $(x) = \dfrac{3}{7}x^2$.
f est-elle une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;2]$?

40 Soit g la fonction définie sur $[0\,;3]$ par $g(x) = x - 1$.
1. Calculer $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. g est-elle une densité de probabilité sur $[0\,;3]$?

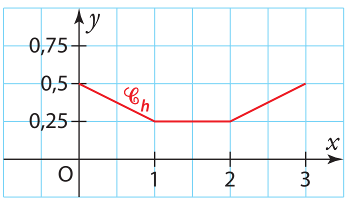
41 Soit f une fonction définie sur $[1\,;3]$ dont la courbe est représentée dans le repère ci- contre.
f est-elle une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;3]$?



42 Soit g une fonction définie sur $[0\,;2]$ dont la courbe est représentée dans le repère ci-contre.
1. g est-elle une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;1]$?
2. g est-elle une densité de probabilité sur $[1\,;2]$?



43 On considère une fonction h définie sur $[0\,;3]$, dont la courbe est représentée dans le repère suivant.



1. Démontrer que h est une densité de probabilité sur $[0\,;3]$.
2. Soit X la variable aléatoire à densité h sur $[0\,;3]$.
Déterminer $p(X \leqslant 2)$.

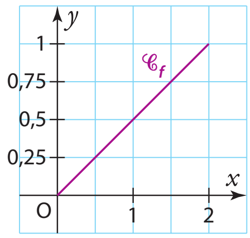
44 La fonction f définie par $f(x) = 0{,}1$ est une densité de probabilité sur $[2\,;12]$. Soit X la variable aléatoire à densité f sur $[2\,;12]$. Calculer les probabilités suivantes.
a) $p(X \geqslant 6)$ **b)** $p(X \in [3\,;10])$

45 La fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$ est une densité de probabilité sur $[0\,;1]$.
Soit X la variable aléatoire à densité f sur $[0\,;1]$.
1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
2. Calculer $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Interpréter le résultat en termes de probabilités.

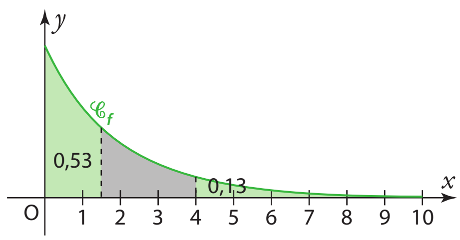
46 La fonction g définie par $f(x) = \dfrac{3}{2}(x^2 - x)$ est une densité de probabilité sur $[0\,;2]$.
Soit X la variable aléatoire à densité f sur $[0\,;2]$.
1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
2. Calculer $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Interpréter le résultat en termes de probabilités.

47 La fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est une densité de probabilité sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;2\right]$. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi à densité h sur $\left[\dfrac{2}{3}\,;2\right]$.
Calculer les probabilités suivantes.
a) $p(X \leqslant 1)$ **b)** $p\left(1 < X \leqslant \dfrac{5}{3}\right)$

48 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[0\,;2]$ où f est la fonction dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-contre.
1. Déterminer $p(X \in [0\,;1])$.
2. En déduire $p(X \in [1\,;2])$.
3. Déterminer $p(X \in [0{,}5\,;1{,}5])$



49 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[0\,;10]$ où f est la fonction dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous. Déterminer :
a) $p(X > 1{,}5)$ **b)** $p(X \leqslant 4)$ **c)** $p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 4)$



50 On considère la fonction h de l'exercice **43**.
Soit X la variable aléatoire qui suit la loi à densité h sur $[0\,;3]$.
Calculer les probabilités suivantes.
a) $p(X \in [0\,;1])$ **b)** $p(X \in [1\,;2])$ **c)** $p(X \in [2\,;3])$

Espérance et variance d'une variable aléatoire

Méthode 2 p. 201

51 Dans chaque cas suivant, calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.
a) X suit la loi de densité f définie par $f(x) = 2$ sur $I = [5\,;5{,}5]$.
b) X suit la loi de densité g définie par $g(x) = x$ sur $I = [0\,;\sqrt{2}]$.
c) X suit la loi de densité h définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $I = [1\,;\mathrm{e}]$.

52 On considère la densité de probabilité $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
X est la variable aléatoire à densité f sur I.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Loi uniforme

Méthode 3 p. 201 Méthode 4 et Méthode 5 p. 203

53 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$.
1. Quelle est la probabilité de l'évènement : « $X > 0{,}2$ » ?
2. Calculer $p\left(\dfrac{1}{3} \leqslant X \leqslant \dfrac{4}{7}\right)$.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

54 Sur le chemin du retour du lycée, Wissam a perdu un gant qui se trouvait dans sa poche.
Arrivé chez lui, il s'en rend compte et refait le chemin inverse pour le retrouver. La distance qui sépare sa maison de son lycée fait 1 km et on suppose que personne n'a ramassé son gant entre-temps. Quelle est la probabilité qu'il retrouve son gant :
a) avant d'avoir parcouru 0,5 km ?
b) à plus de 0,25 km de chez lui ?

55 On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[120\,;175]$. Déterminer la probabilité que ce nombre soit :
a) égal à 150.
b) compris entre 120 et 125.
c) inférieur à 170.

56 T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{9}\,;\dfrac{8}{9}\right]$.
1. Calculer les probabilités des événements suivants.
a) $T = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ **b)** $T \in \left[\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right]$
c) $T < \dfrac{1}{2}$ **d)** $T \geqslant \dfrac{8}{9}$
2. Déterminer l'espérance et la variance de T.

57 Julie rend visite à sa mère tous les dimanches après-midi. Son heure d'arrivée est aléatoire mais uniformément comprise entre 14 h 00 et 15 h 00.
Sa mère, impatiente, est dans l'attente dès que la pendule sonne 14h00.
1. Quelle est la probabilité qu'elle l'attende moins de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle l'attende plus de quinze minutes ?
3. En moyenne pendant combien de temps sa mère l'attend-elle ?

58 Pierre fait des courses tous les samedis matin dans un supermarché. Le temps qu'il met pour faire ses courses est toujours compris entre 1 h 10 min et 1 h 45 min.
Ce samedi matin il arrive dans le magasin à 11 h 25.
Quelle est la probabilité qu'il ait fini ses courses avant 13 h 00 ?

Loi exponentielle

Méthode 6 et Méthode 7 p. 205

59 Y est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}4$.
1. Déterminer les valeurs exactes des probabilités des évènements suivants, puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près.
a) $Y \in [0\,;6]$ **b)** $Y \in [3\,;+\infty[$
c) $Y \in]1\,;2[$ **d)** $Y \in]1\,;2[\cup [3\,;+\infty[$
2. Déterminer $p_{(Y>5)}(Y > 15)$ et donner une valeur approchée à 10^{-4} près.
3. Déterminer l'espérance de Y.

60 X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1. Sachant que l'espérance de X est égale à $\dfrac{1}{2}$, déterminer la valeur du paramètre λ.
2. Déterminer les probabilités suivantes, à 10^{-2} près.
a) $p(X \leqslant 0{,}8)$ **b)** $p(X > 1)$ **c)** $p(0{,}1 < X < 0{,}2)$
3. Déterminer $p_{(X>0{,}5)}(X \geqslant 2)$ et donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

61 La durée de vie, en années, d'un appareil est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}09$.
1. Déterminer la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
2. Sachant que l'appareil a déjà fonctionné pendant 5 ans sans panne, quelle est la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
3. Quelle est la durée de vie moyenne d'un appareil ?

Exercices d'entraînement

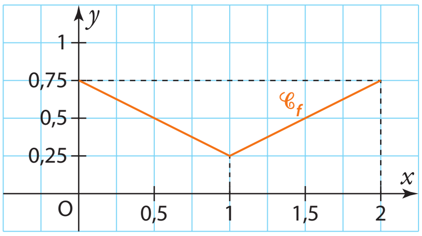
Loi à densité

62 **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.**

	V	F
a) La fonction h définie sur $\mathrm{I} = [-2\,;-1]$ par $h(x) = \dfrac{2}{x^2}$ est une densité de probabilité sur I.	☐	☐
b) La fonction g définie sur $\mathrm{J} = [0\,;\ln(2)]$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ est une densité de probabilité sur J.	☐	☐

63 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.
1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. En déduire que la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.

64 Soit f une fonction définie sur $[0\,;2]$ dont la courbe est représentée dans le repère ci-contre.



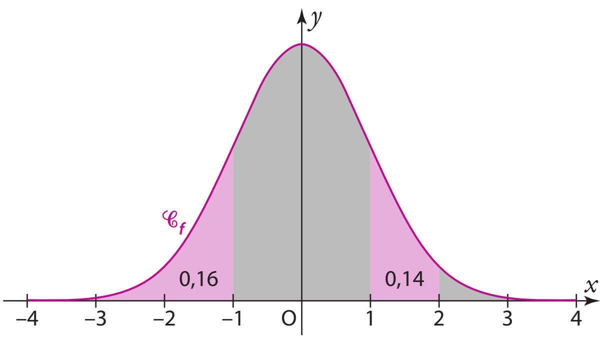
1. Reproduire la figure.
2. Montrer que f est une densité de probabilité sur $[0\,;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire à densité f.
Représenter, sur le graphique, le domaine correspondant à :

a) $p\left(X \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{2}\right]\right)$ **b)** $p\left(X \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$

4. Déterminer les probabilités précédentes.

65 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = [2\,;5]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{39}$.
1. Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.
2. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi à densité f sur $[2\,;5]$
a) Calculer $p(X > 3)$ **b)** Calculer $p(3 \leqslant X \leqslant 4)$
3. Déterminer l'espérance de X.

66 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[-4\,;4]$ où f est la fonction dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous.
1. Sachant que f est paire, que peut-on dire de $p(X \leqslant 0)$ et $p(X \geqslant 0)$? En déduire $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$.
2. Déterminer $p(-1 \leqslant X \leqslant 2)$



67 **1.** Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;4]$ par $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x}}$.
Montrer que f est une densité de probabilité sur I.
2. Dans une certaine population on a pu établir que le temps passé par jour sur les réseaux sociaux était une variable aléatoire X qui suivait la loi de densité f. On choisit au hasard une personne dans la population.

a) Quelle est la probabilité qu'elle passe quotidiennement plus de deux heures sur les réseaux sociaux ?
b) Quelle est la probabilité qu'elle passe quotidiennement moins d'une heure sur les réseaux sociaux ?
3. a) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{4\sqrt{x}}$ définie sur I.
Montrer que la fonction $G : x \mapsto \dfrac{1}{6}x\sqrt{x}$ est une primitive de g sur I.
b) Déterminer le temps moyen passé quotidiennement sur les réseaux sociaux par une personne de cette population.

Loi de probabilité sur $[a\,;+\infty[$ ou sur $]-\infty\,;a]$

Méthode 8 p. 206

68 g est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [1\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3}{x^4}$.
1. Justifier que la fonction g est une densité de probabilité sur I.
2. Soit X la variable aléatoire à densité g sur I.
Déterminer l'espérance de X.

69 **1.** Soit $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-0,1x}$ une fonction définie sur un intervalle I de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel.
Déterminer la valeur exacte du réel a telle que h soit une densité de probabilité sur I.
2. Soit X la variable aléatoire à densité h sur I.
a) On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = x\mathrm{e}^{-0,1x}$.
Montrer que la fonction $G : x \mapsto (-10x - 100)\mathrm{e}^{-0,1x}$ est une primitive sur I de la fonction g.
b) En déduire l'espérance $E(X)$.

70 f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{-9}{2x^3}$.
1. Justifier que la fonction f est une densité de probabilité sur I.
2. Soit X la variable aléatoire à densité f sur I.
Déterminer l'espérance de X.

Loi uniforme

71 Tous les jours à 16 h 00, Paul joue à un jeu en ligne avec deux amis. La durée D, en minutes, pour réunir les trois joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[10 ; 80]$.

1. Déterminer la probabilité que les trois joueurs soient réunis avant 16h30.
2. Calculer l'espérance de D. Interpréter ce résultat.

72 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
1. Quelle est la fonction de densité associée à cette variable aléatoire ?
2. Calculer $p(X \leqslant 0)$ et $p\left(X \in \left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{4}\right]\right)$
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

73 TICE Sur un tableur, on utilise l'instruction **=5*ALEA()–1**. La variable aléatoire X prend pour valeur le résultat donné par cette instruction.
1. Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par X est l'intervalle $[-1 ; 4]$. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?
2. Calculer la probabilité que la valeur prise par X soit :
a) inférieure à 3. **b)** comprise entre 0 et 2.

74 Le temps d'attente T, en minutes, à un guichet de banque suit une loi uniforme sur $[10 ; 30]$.
1. Une personne attend depuis un quart d'heure. Quelle est la probabilité qu'elle doive encore attendre plus de 10 minutes ?
2. a) Soit t un réel compris entre 10 et 30. Exprimer $p(X \leqslant t)$ en fonction de t.
b) Pour quelle valeur de t la probabilité d'attendre moins de t minutes est supérieure ou égale à 90 % ?

75 Thème 8 Deux amis, Adam et Maël, ont rendez-vous le même jour avec un conseiller d'orientation après les cours.
Adam arrive à 16 h 30 tandis que Maël arrive au hasard entre 16 h 00 et 17 h 00.
Soit H la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée de Maël.
1. Quelle loi suit la variable aléatoire H ?
2. Déterminer la probabilité pour qu'Adam attende Maël plus de dix minutes.
3. Sachant que Maël est arrivé avant Adam, quelle est la probabilité que Maël attende Adam plus de dix minutes ?

Paramètres a et b d'une loi uniforme

Méthode 10 p. 207

76 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1 ; b]$ où b est un réel supérieur à 1.
On sait que $p(X \leqslant 2) = \frac{2}{5}$. Déterminer le réel b.

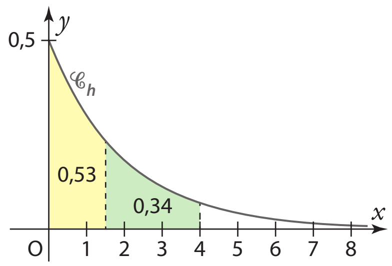
77 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.
On sait que $E(X) = V(X) = 12$.
Déterminer les réels a et b.

78 X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) Si $a = -6$ et $b = 6$ alors $V(X) = 12$.	☐	☐
b) Si $E(X) = 10$ alors $a = 5$ et $b = 15$.	☐	☐
c) Si $a = 3$ et $b = 4$ alors $E(X) = \frac{1}{2}$.	☐	☐
d) Si $E(X) = 10$ et $V(X) = \frac{4}{3}$ alors $a = 8$ et $b = 12$.	☐	☐

Loi exponentielle

79 On considère la fonction h définie sur $\mathrm{I} = [0 ; +\infty[$ par $h(t) = 0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ dont la courbe est représentée sur le graphique suivant.

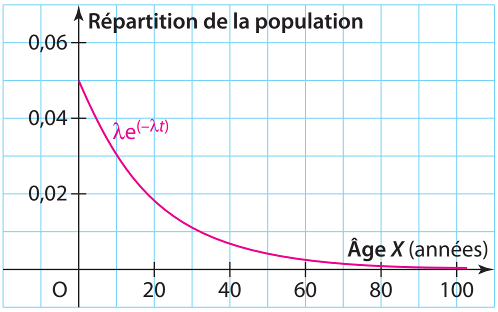


Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité h sur $[0 ; +\infty[$.
a) Déterminer la valeur exacte de $p(X \leqslant 1{,}5)$ et vérifier qu'elle correspond à la valeur approchée indiquée sur le graphique.
b) Même question pour $p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 4)$.
c) En déduire la valeur exacte et une valeur approchée de $p(X > 4)$.

80 Thème 8 La durée de vie D, en années, d'un appareil électronique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. La probabilité que cet appareil fonctionne encore après 4 ans est de 0,8. Calculer la durée de vie x pour laquelle la probabilité qu'il fonctionne encore soit de 0,5. On arrondira le résultat au dixième.

Exercices d'entraînement

81 La répartition de la population d'un pays suivant l'âge de ses habitants a été approchée par la courbe suivante. Soit X la variable aléatoire représentant l'âge d'un habitant choisi au hasard dans cette population. En considérant que la population de ce pays est très grande, on admet que la loi de probabilité suivie par X peut être approchée assez précisément par une loi à densité.



1. D'après les indications du graphique et sachant que l'aire totale sous la courbe est égale à 1, conjecturer la loi de probabilité suivie par X.

2. En déduire une valeur approchée de l'âge moyen de cette population.

3. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un âge compris entre 20 et 30 ans ?

Paramètre λ d'une loi exponentielle

Méthode 9 p. 207

82 Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle (de paramètre $\lambda > 0$), telle que $p(X \geqslant 10) = 0,1$ déterminer le paramètre λ de la loi.

83 Thème 8

La durée de vie, en années, d'un atome de carbone 14 peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On appelle demi-vie de cet atome le réel t tel que la probabilité qu'il se désintègre avant t années soit égale à $\frac{1}{2}$.

On sait que la demi-vie du carbone 14 est égale à 5 730 ans.

1. Calculer le paramètre λ de la loi modélisant la durée de vie X du carbone 14.

2. Dans la suite on prendra $\lambda = 12 \times 10^{-5}$.

Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre avant 2000 ans

3. Quelle est la probabilité que la durée de vie du carbone 14 soit supérieure à deux demi-vies ?

4. Déterminer la valeur de x telle que $p(X > x) = 0,01$. Interpréter ce résultat.

84 **1.** Résoudre l'équation $e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = 0,16$.

Coup de pouce On pourra utiliser le changement de variable $X = e^{-\lambda}$.

2. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ tel que $0 < \lambda < 1$. Sachant que $p(1 < X < 2) = 0,16$, déterminer la valeur exacte de $p(X \leqslant 1)$.

Simulation avec les lois continues

85 Algo Thème 7

Dans un programme **Python**, on utilise l'instruction `3*random.random()+6` afin de générer un nombre aléatoire. On considère la variable aléatoire Q qui prend pour valeur le résultat donné par cette instruction.

1. Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par Q est l'intervalle $[6 ; 9]$. Quelle loi de probabilité suit la variable Q ?

2. Calculer la probabilité que la valeur prise par Q soit :

a) inférieure à 6,54. **b)** comprise entre 7,251 et 8,641.

86 Algo

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

1. Déterminer l'espérance de X.

2. On considère l'algorithme suivant en **Python**.

Décrire ce que fait cet algorithme.

```
import random
s=0
for i in range(10000):
   x=5*random.random()
   s=s+x
print (s/10000)
```

3. Peut-on prévoir approximativement le résultat qui s'affichera en sortie de cet algorithme ?

4. Programmer cet algorithme sur une calculatrice ou un ordinateur, puis le faire fonctionner.

Cela confirme-t-il la réponse à la question précédente ?

87 Algo

Voici un programme **Python**

```
import math

def exponF(k,x):
   return (1-math.exp(-k/x))

def loiexpo(k):
   l= []
   for i in range(1,10):
      l.append(exponF(k,i))
      return l
```

1. À quelle fonction du cours correspond la fonction `exponF(k,x)` définie dans le programme ?

2. Que fait la fonction `loiexpo(k)` ?

3. Tester ce programme sur la calculatrice ou sur l'ordinateur. Comparer `loiexpo(0,5)` et `loiexpo(0,2)`.

Que peut-on dire?

Utiliser plusieurs lois de probabilité

88 Un gérant de laverie automatique achète et installe cinq sèche-linge. La durée de vie d'un sèche-linge, en années, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle d'espérance $E(T) = 4$

1. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'un sèche-linge ait une durée de vie de moins d'un an.

2. On appelle X le nombre de sèche-linge qui tombent en panne la première année.
On considère que la durée de vie d'un sèche-linge est indépendante des autres sèche-linge.

a) Quelle loi de probabilité est suivie par X ?

b) Quelle est la probabilité qu'il y ait un sèche-linge, et un seul, qui tombe en panne la première année ?

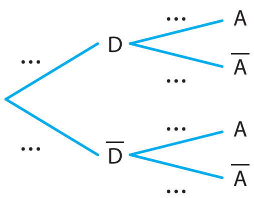
c) Quelle est la probabilité qu'au moins deux sèche-linge tombent en panne la première année ?

3. Le vendeur de sèche-linge prétend que la probabilité d'avoir au moins un sèche-linge en état de fonctionnement à la fin de la première année est supérieure à 99 %.
Que pensez-vous de cette affirmation ?

Thème 8

89 La durée de vie, en heure, d'une ampoule halogène est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.
On met en service 8 ampoules en même temps.
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre d'ampoules qui fonctionnent encore après 300 heures d'utilisation.
Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'au moins 6 ampoules fonctionnent encore après 300 heures d'utilisation.

90 Une usine fabrique des composants d'ordinateurs. Parmi eux, 5% présentent un défaut.
La durée de vie X_1, en heures, d'un composant sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}0001$ tandis que celle, notée X_2, d'un composant présentant un défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0{,}0004$.
On choisit au hasard un composant dans la production de l'usine.
Soit D l'événement : « Le composant présente un défaut. »
Soit A l'événement :
« Le composant a une durée de vie supérieure à 2 000 h ».



1. Calculer $p_D(A)$ et $p_{\overline{D}}(A)$.

2. Compléter l'arbre ci-contre.

3. Déterminer $p(A)$.

4. On récupère dans un ordinateur l'un des composants fabriqués dans l'usine, ce composant fonctionne toujours, après 2 000 heures d'utilisation.
Quelle est la probabilité qu'il présente un défaut ?

91 **A ▶** Un artisan peintre travaille sur un chantier situé à la périphérie d'une grande ville.
Il arrête de peindre à 16h00 mais il doit toujours prévoir un temps de rangement avant de repartir en voiture pour rentrer chez lui.
Ce temps dure en moyenne une demi-heure, et peut être considéré comme une variable aléatoire T, exprimée en heures, qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Justifier que le paramètre λ de la loi exponentielle est égal à 2.

2. Calculer la probabilité qu'il quitte le chantier avant 16h30 ?

3. Calculer la probabilité qu'il parte après 17h00 ?

B ▶ Si l'artisan part avant 16h30, il évite les embouteillages sur sa route de retour et peut rentrer sans encombre chez lui. Sinon il doit changer d'itinéraire de retour pour ne pas perdre trop de temps et emprunter une autoroute à péage.

1. Quelle est la probabilité qu'il emprunte l'autoroute payante ?

2. Son chantier doit durer 30 jours au total.
Le nombre de jours où il doit emprunter l'autoroute payante est une variable aléatoire que l'on appellera N.

a) Quelle loi de probabilité est associée à N ? Justifier.

b) Déterminer l'espérance de N.

C ▶ Le coût d'un trajet sans péage est égal à 17 €, et un trajet par l'autoroute payante coûte 26 €.
Le coût total de ces 30 trajets-retours jusqu'à la fin du chantier est une variable aléatoire que l'on notera C.

1. Exprimer C en fonction de N.

2. Dans le devis présenté au client, l'artisan a prévu de facturer 600 € pour l'ensemble des 30 trajets-retours. Peut-il espérer dépenser moins que ce qu'il va facturer ? Justifier.

92 Sur une portion d'autoroute de 200 km sont placées des bornes d'appel d'urgence tous les 2 km. Des pannes ou accidents peuvent survenir au hasard en tout point de ce tronçon. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le kilométrage précis du lieu de la panne suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;200]$.
Max roule sur cette portion d'autoroute.

1. a) Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne à exactement 1 km d'une borne d'appel d'urgence ?

b) Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne à moins d'un kilomètre d'une borne d'appel d'urgence ?

c) Déterminer la probabilité $p(120 \leqslant X \leqslant 160)$.
Décrire ce résultat dans le contexte.

2. Finalement, Max tombe en panne pile devant la borne SOS située au kilomètre 160 et il appelle les secours. Le temps d'attente, en secondes, avant de joindre un correspondant est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

a) Au bout de combien de secondes Max peut-il espérer obtenir son correspondant ?

b) Calculer la probabilité qu'il attende moins de 10 secondes.

c) Calculer la probabilité qu'il attende plus d'une minute.

Exercices bilan

93 Probabilité sur le poids des cartables

1. Soit f la fonction définie sur $I = [2 ; 6]$ par $f(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$.

Montrer que f est une densité de probabilité sur l'intervalle I.

2. Soit P la variable aléatoire qui, à chaque enfant en CP, associe le poids de son cartable, en kilogrammes. On admet que P suit une loi de probabilité continue sur I dont la fonction de densité est la fonction f définie dans la question précédente.

a) On choisit au hasard un enfant.
Déterminer la probabilité que le poids de son cartable soit compris entre 3 kg et 4 kg.

b) Déterminer le poids moyen du cartable d'un enfant de CP.

94 Temps d'attente pour accorder un piano

Antoine un accordeur de piano devant gérer des déplacements, ainsi que des temps de travail, trèsaléatoires, préfère donner une plage horaire indicative de deux heures à chacun de ses clients. Ainsi il a prévenu sa cliente, Isolde, qu'il arriverait entre 13h00 et 15h00. On note H la variable aléatoire correspondant au temps d'attente d'Isolde.
On admet que H suit une loi uniforme.

1. Déterminer la fonction de densité de la loi uniforme suivie par H.

2. Déterminer la probabilité qu'Isolde attende plus d'une demi-heure ?

3. Quelle est la probabilité qu'Isolde arrive :

a) à 14h00 ? **b)** avant 13h15 ?
c) entre 13h30 et 14h00 ? **d)** après 14h20 ?

4. A 14h15, Antoine n'est toujours pas arrivé. Quelle est la probabilité qu'il arrive dans plus de 5 minutes ?

5. Il est maintenant 14h30 et Isolde doit impérativement partir à son travail à 14h50. Quelle est la probabilité qu'Antoine arrive avant le départ d'Isolde?

6. Quel est le temps d'attente moyen d'un client d'Antoine ?

95 Durée de vie d'un spectomètre Physique

La responsable du laboratoire de Physique d'un lycée a acheté un spectromètre en septembre 2012.
On admet que la durée de vie d'un spectromètre peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité qu'un spectromètre fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,42.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-2} près est égale à 0,11. On utilisera cette valeur dans la suite de l'exercice.

2. Calculer $p(X \leqslant 10)$ et interpréter le résultat.

3. Quelle est la probabilité que le spectromètre fonctionne encore en septembre 2020 ?

4. Quelle est la probabilité que la durée de vie du spectromètre soit comprise entre 10 ans et 12 ans ?

5. Au mois de septembre 2020, le spectromètre fonctionne toujours. Mais, inquiète des risques de dysfonctionnement de cet appareil durant l'année scolaire, la responsable du labo calcule la probabilité qu'il fonctionne encore au mois de mars 2021. Quel résultat trouve t-elle ? Est-ce rassurant ?

6. Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un spectromètre.

96 Utilisation et durée de vie d'une console

A. Gaby, pour ses 10 ans, a reçu une console. Elle ne peut y jouer que le dimanche. En étudiant les statistiques de connexion données par la console, sa mère a remarqué que Gaby y joue en moyenne pendant 2 heures et au minimum 30 minutes. On admet que son temps de jeu T, en heures, chaque dimanche, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U([a ; b])$.

1. Déterminer l'intervalle $[a ; b]$ qui correspond à la situation étudiée.

2. Un dimanche sa mère la chronomètre au moment où elle commence à jouer.

a) Calculer la probabilité que Gaby joue pendant plus de trois heures.

b) Trouver un intervalle de la forme $[2 - x ; 2 + x]$ où x est un réel tel que $p(T \in [2 - x ; 2 + x]) = 0{,}90$ et interpréter le résultat dans la situation de l'énoncé.

B. On considère que la durée de vie D, en années, de la console de Gaby est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle $E(\lambda)$.

1. On sait qu'en moyenne ce type de consoles tombent en panne au bout de 5 ans et demi. En déduire la valeur exacte du paramètre λ.

2. Calculer $p(D \leqslant 4)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

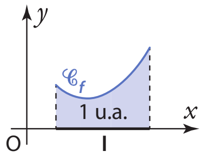
3. Le jour de ses 12 ans, Gaby décide de donner sa console à son petit frère Léo. Calculer la probabilité pour que Léo puisse y jouer encore pendant au moins 1 an avant qu'elle ne fonctionne plus. Arrondir le résultat au millième.

Préparer le BAC L'essentiel

Densité de probabilité

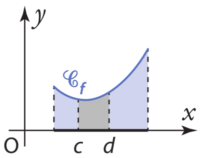
La densité de probabilité est une fonction f définie sur un intervalle I telle que :

- f est **continue** sur I.
- f est **positive** sur I.
- $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.



Variable aléatoire X et calcul de probabilité

$p(X \in [c\,;d]) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$

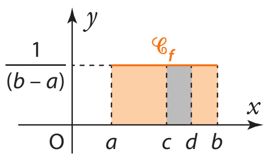


Espérance et variance

- Espérance : $E(X) = \int_I x f(x)\,\mathrm{d}x$
- Variance : $V(X) = \int_I (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Loi uniforme sur $[a\,;b]$

- Densité : $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
- Probabilité : $p(X \in [c\,;d]) = \dfrac{d-c}{b-a}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

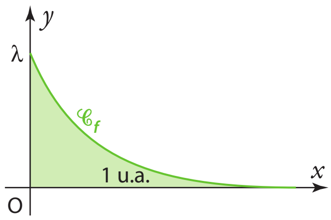


Loi uniforme sur $[0\,;1]$

- Probabilité : $p(X \in [c\,;d]) = d - c$
- Espérance : $E(X) = 1$
- Variance : $V(X) = \dfrac{1}{12}$

Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

- Densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0\,;+\infty[$
- Probabilités :
  - $p(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$
  - $p(X \leqslant d) = 1 - e^{-\lambda d}$
  - $p(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$



Loi sans mémoire

$p_{X>t}(X > t + h) = p(X > h)$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de		Parcours d'entrainement
▶ Démontrer qu'une fonction f donnée est une densité de probabilité sur I	Méthode 1	1, 2, 17, 18, 36, 37, 38, 39, 40
▶ Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi à densité (quelconque, uniforme ou exponentielle)	Méthode 1, 2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 44, 45, 54, 55, 59, 60
▶ Calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi à densité	Méthode 2, 3	5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 51, 52, 65
▶ Déterminer les paramètres d'une loi uniforme ou exponentielle	Méthode 5, 6, 7, 9	15, 19, 20, 21, 22, 23, 78,82
▶ Appliquer la propriété d'absence de mémoire pour la loi exponentielle		15, 59, 60, 61

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c08-06

QCM

Pour les QCM suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
97 La fonction $f : x \mapsto a(x-3)$ est une densité de probabilité sur [3 ; 4] lorsque :	$a=\frac{1}{2}$	$a=2$	$a=-2$	$a=-\frac{1}{2}$
Pour les exercices 98 et 99 on considère une variable aléatoire X suivant la loi à densité $f : x \mapsto \frac{1}{12}x$ sur [1 ; 5].				
98 $p(X \in [2 ; 3])$, est égale à :	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
99 $E(X)$ est égale à :	2	$\frac{31}{6}$	$\frac{31}{9}$	3
Pour les exercices 100 à 102 on considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur [10 ; 40].				
100 La fonction de densité associée à cette loi est la fonction f définie sur [10 ; 40] par :	$f(x)=\frac{1}{30}$	$f(x)=30$	$f(x)=\frac{x}{30}$	$f(x)=\frac{1}{3}$
101 $p(15 < X < 25)$, est égale à :	0,25	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0,3
102 $E(X)$ est égale à :	20	25	30	35
Pour les exercices 103 à 106 on considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=2$.				
103 La fonction f de densité associée à cette loi est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :	$f(x)=2e^{2t}$	$f(x)=0{,}5e^{-0{,}5t}$	$f(x)=2e^{-2t}$	$f(x)=\frac{e^{2t}}{2}$
104 $p(X \leqslant 1)$ est égale à :	e^{-2}	$1-e^{1}$	$2e^{2}$	$1-e^{-2}$
105 $p_{X>1}(X>3)$ est environ égale à :	0,14	0,31	0,02	0,95
106 $E(X)$ est égale à :	2	1	0,5	0,2
107 Une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ est telle que $p(T \geqslant 10)=0{,}5$. Alors λ est égal à :	$\frac{\ln(0{,}5)}{10}$	$\frac{\ln(2)}{10}$	$-\frac{\ln(2)}{10}$	$\frac{-10}{\ln(0{,}5)}$

108 Probabilité et astronomie

Une astronome a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes et a estimé que ce temps d'attente, exprimé en minutes, pouvait être modélisé par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.
Elle emmène un groupe de son club pour observer des étoiles filantes.

1. Déterminer la probabilité que le temps d'attente entre deux étoiles filantes soit inférieur à 3 minutes.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ?
Arrondir ce temps à la minute près.

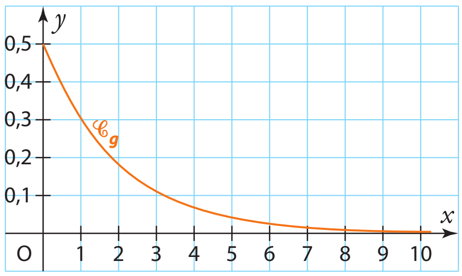
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures.
Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

D'après bac

Méthode 6 et Méthode 7 p. 205

109 Représentation graphique d'une loi à densité

A ▸ Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{e^{-0,5t}}{2}$ dont la courbe est représentée sur le graphique ci-dessous.
Démontrer que la fonction g est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



B ▸ On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que $E(X) = 2$, démontrer qu'alors la loi exponentielle suivie par X a pour densité de probabilité la fonction g définie dans la partie **A**.

2. a) Reproduire l'allure de la courbe sur une feuille quadrillée et représenter graphiquement la probabilité $p(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

b) Vérifier graphiquement la valeur de λ trouvée à la question précédente en indiquant votre méthode.

3. Calculer : **a)** $p(1 \leqslant X \leqslant 3)$. **b)** $p_{X>3}(X \geqslant 4)$.

D'après Bac

Méthode 6 et Méthode 7 p. 205 Méthode 9 p. 207

110 Démontrer une propriété

A ▸ Soit λ un réel strictement positif. X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Sachant que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, démontrer la propriété du cours suivante.
Pour tout réel a positif, $p(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

2. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $p(X < 2)$ soit égale à 0,05.

3. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

B ▸ Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}025$.

1. Calculer $p(30 \leqslant X \leqslant 50)$.

2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 60)$.

D'après Bac

Méthode 9 p. 207

111 De la bonne utilisation d'un vélo

A ▸ Loïse utilise son vélo pour se rendre au lycée tous les jours.
La durée de son trajet est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[12\,;28]$.
Elle part de chez elle à 7h35 et les cours commencent à 8h00.

1. En moyenne, combien de temps dure son trajet ?

2. Quelle probabilité a-t-elle d'arriver en retard au lycée ?

3. Loïse a rendez-vous avec sa copine Martha à 7h50 devant le lycée.

a) Quelle est la probabilité qu'elle ne fasse pas attendre Martha ?

b) Sachant que Loïse est arrivée avant Martha, quelle est la probabilité qu'elle attende Martha plus de deux minutes ?

B ▸ En hiver, Loïse fait ses trajets de nuit. Son vélo est visible grâce à un écalairage à LED dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).
On sait que la probabilité que l'éclairage fonctionne encore après 100 heures d'utilisation est égale à 0,8.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, puis donner une valeur approchée à 10^{-3}.

2. Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'éclairage soit supérieure à 300 heures sachant qu'il a déjà fonctionné 150 heures.

D'après Bac

Méthode 4 et Méthode 5 p. 203 Méthode 6 et Méthode 7 p. 205

9

Statistiques à deux variables

Le prix du paquet de cigarettes et le nombre de paquets de cigarettes vendus font régulièrement l'objet de statistiques qui peuvent aider à lutter contre le tabagisme.

Existe-t-il un lien de corrélation entre le prix d'un paquet de cigarettes et le nombre de paquet vendus ?

↪ Exercice 33 p. 238

VIDÉO

Lutter contre le tabagisme
lienmini.fr/maths-c09-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c09-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer les caractéristiques d'une série statistique à une variable (1)

1. Calculer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de la série statistique suivante.

Valeurs de x_i	25	37	54	62	71	78

2. Vérifier les résultats à l'aide du menu **Stats** de la calculatrice.

2 Calculer les caractéristiques d'une série statistique à une variable (2)

Dans le tableau suivant on a noté la pointure des élèves d'une classe de 3e

Pointures x_i	36	37	38	39	40	41	43	44	45
Effectifs n_i	1	3	6	6	6	4	3	2	1

À l'aide de la calculatrice déterminer la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de la série statistique.

3 Tracer une droite

On considère un repère orthogonal dont les axes sont gradués de telle sorte qu'une unité sur l'axe des abscisses correspond à 4 unités sur l'axe des ordonnées.

1. Dans ce repère, tracer la droite d d'équation $y = 4x + 12$.

2. Le point M(11 ; 66) appartient-il à d ?

3. Quelle est l'ordonnée du point de d d'abscisse 25 ?

4. Quelle est l'abscisse du point de d d'ordonnée 204 ?

4 Déterminer l'équation d'une droite donnée

Dans un repère orthogonal du plan, on considère les points A et B de coordonnées respectives (– 2 ; 11) et (5 ; 1).

Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

5 Étudier une fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{0,5x+6}$.

Et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Représenter $\mathscr{C}_f$ à l'aide de la calculatrice graphique.

2. Calculer $f(2)$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 2\,500$.

Activités

Physique 30 min Thème 9

1 Nuage de points, point moyen

A ▸ Loi d'ohm

Lors d'un TP de Physique le professeur a demandé à une élève de mesurer conjointement, la tension *U* aux bornes d'un conducteur ohmique et, l'intensité *I* du courant qui le traverse. Elle a trouvé les valeurs ci-contre.

I (en mA)	0	4	7	15	25	30
U (en V)	0	1	2	4	6	7

Ces valeurs conjointes forment **une série statistique double à deux variables** *I* et *U*.

1. Dans un repère orthogonal du plan, placer les points $M_1(0\,;0)$, $M_2(4\,;1)$, $M_3(7\,;2)$, $M_4(15\,;4)$, $M_5(25\,;6)$ et $M_6(30\,;7)$ associés à cette série statistique. (Attention, il ne faut pas les relier !)

Cet ensemble de points est appelé **nuage de points** de la série statistique.

2. Calculer la moyenne $\overline{x}$ des valeurs de la variable *X*, puis la moyenne $\overline{y}$ des valeurs de la variable *Y*. Placer dans le repère le point G de coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$. Ce point est appelé **point moyen** du nuage.

3. Les points du nuage forment-ils un dessin particulier (droite, arc de cercle, parabole, ou autre courbe caractérisant une fonction usuelle) ?

B ▸ D'autres statistiques à deux variables

Faire de même avec chacune des séries statistiques à deux variables suivantes.

1. Un élève a obtenu chaque mois lors du premier semestre les notes x_i en mathématiques et les notes y_i en anglais.

Notes x_i en maths	13	8	14	10	7	6
Notes y_i en anglais	17	20	14	6	11	10

2. Une entreprise étudie l'évolution conjointe des quantités produites x_i (en tonnes) et du coût moyen y_i de fabrication d'une tonne de produit (en milliers d'euros).

Quantité x_i (en tonnes)	0,1	0,5	1	1,5	2	3	3,5	4
Coût moyen y_i (en milliers d'euros)	8	5	3	1,5	1	2	4	7

▶ **Remarque :** L'étude de séries statistiques à deux variables peut mener, lorsque cela a du sens, à réfléchir à un éventuel lien de corrélation ou de cause à effet entre les deux variables.

↪ Cours 1 p. 224

TICE 10 min

2 Ajustement affine avec un tableur

Le tableau ci-contre présente l'évolution du budget publicitaire et du chiffre d'affaires d'une société au cours des 9 dernières années.

Budget publicitaire x_i (en millions d'euros)	2,5	3	3,4	3,9	4	5	5,5	6,2	7
Chiffre d'affaire y_i (en millions d'euros)	13	18	17	19	19	24	25	31	36

1. a) Ouvrir un tableur et entrer les valeurs du tableau ci-dessus dans les colonnes A et B.
b) Insérer un graphique **Nuage de points**.

2. Que peut-on dire de ces points ?

3. Effectuer un clic droit sur un point du nuage. Sélectionner **Ajouter une courbe de tendance** dans le menu contextuel. Dans la fenêtre qui s'affiche ensuite, sélectionner **linéaire.**

Coup de pouce (On pourra aussi éventuellement activer les cases **Afficher l'équation** et **Afficher le coefficient de détermination** qui donnent des informations utiles sur la droite et la série statistique.)

▶ **Remarque :** La droite obtenue ajuste au mieux ce type de nuage.
On dit qu'on vient de réaliser un **ajustement affine** du nuage.

↪ Cours 2 p. 226

TICE 15 min

3 Ajustement affine avec GeoGebra

Une youtubeuse a lancé sa chaîne de décoration en septembre 2019. Depuis cette date, elle a essayé de noter, de temps en temps, le nombre d'abonnés à sa chaîne. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous dans lequel chaque mois, où elle a relevé le nombre d'abonnés, est numéroté par son rang depuis le mois de septembre, considéré comme rang initial 0.

Mois	Novembre	Décembre	Janvier	Mars	Mai	Juin	Juillet	Septembre
Rang du mois x_i	2	3	4	6	8	9	10	12
Nombre d'abonnés n_i	56	61	72	95	150	207	312	560

TICE
Ajustement affine
lienmini.fr/maths-c09-03

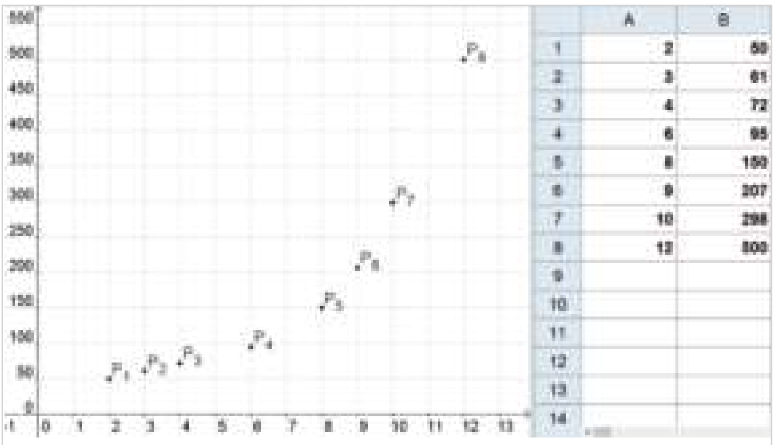
1. Télécharger le fichier **GeoGebra**.

2. Que pouvez-vous dire du nuage de points de cette série statistique double ?

3. Dans la colonne C du tableur, calculer le logarithme népérien de chaque valeur n_i de la série du nombre d'abonnés (colonne B)

4. Sélectionner les colonnes A et C puis créer le nuage de points associé à l'aide d'un clic droit **Créer une liste de points.**

Coup de pouce **Remarque :** Ces points étant placés beaucoup plus bas dans le repère, il faut changer l'échelle à l'aide d'un clic droit au milieu du graphique, et sélectionner **axeX : axeY,** puis, **1 : 1.**



Qu'observe-t-on?

5. Utiliser alors l'icone , puis sélectionner tous les points du nuage pour obtenir la droite de régression.

6. Lire dans la fenêtre **Algèbre** l'équation réduite de la droite. On obtient ainsi une relation (ou fonction) qui lie (approximativement) les valeurs de la colonne C que l'on nommera y_i avec les valeurs x_i de la colonne A.

7. Sachant que $y_i = \ln(n_i)$, en déduire une relation (ou fonction) qui lie (approximativement) les valeurs y_i avec les valeurs x_i.

8. Représenter la courbe de cette fonction sur le graphique en utilisant la barre de saisie : « f(x)=……

↪ Cours 2 p. 226

05 min

4 Interpolation et extrapolation

Dans l'activité précédente, on a vu que le nombre d'abonnés n d'une youtubeuse, après x mois en partant de septembre 2019, pouvait être ajusté par la relation $n = e^{0,23x+3,36}$.

1. Elle n'a pas relevé le nombre d'abonnés sur sa chaîne au mois d'août, 11 mois après son lancement. À l'aide de l'ajustement obtenu, donner une estimation du nombre d'abonnés au mois d'août.

2. Si la tendance se poursuit, combien d'abonnés peut-elle espérer avoir en janvier 2025 ?

↪ Cours 4 p. 230

Cours

1 Généralités

Définition Série statistique à deux variables quantitatives

Lorsque l'on étudie conjointement deux caractères (ou variables) x et y sur une même population de taille n, on associe à chaque individu de la population un couple $(x_i\,;y_i)$, où x_i et y_i sont les valeurs respectives des variables x et y prises par l'individu « numéro i » (où i est un nombre entier entre 1 et n, ou parfois entre 0 et $n-1$).
On appelle série statistique double (x,y) l'ensemble des couples $(x_i\,;y_i)$ associés à chaque individu de la population.
On la présente en général dans un tableau.

Valeurs x_i de la variable x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_i	...	x_n
Valeurs y_i de la variable y	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_i	...	y_n

Remarque La liste de valeurs associées à la variable x est une série statistique simple dont on peut calculer la moyenne $\overline{x}$. Il en va de même pour les valeurs de y dont la moyenne est $\overline{y}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots\dots\dots + y_n}{n}$$

Exemple

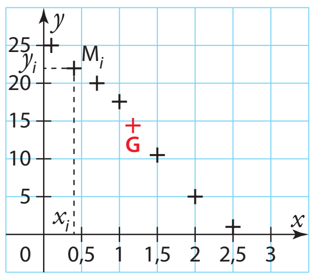
Une équipe de météorologues envoie un ballon sonde à partir du sol de leur station située à environ 100 m d'altitude. Le ballon est équipé d'un thermomètre et d'un altimètre afin de relever simultanément la température atmosphérique et l'altitude atteinte.

Altitude x (en km)	0,1	0,4	0,7	1	1,5	2	2,5
Température y (en °C)	25	22	20	17,5	10,5	5	1

Les données relevées forment une série statistique double (x,y).
Ici, $x_1 = 0{,}1$ et $y_1 = 25$; $x_2 = 0{,}4$ et $y_2 = 22$; etc…

Définition Nuage de points

À chaque couple $(x_i\,;y_i)$ de la série statistique double (x,y) on peut associer le point M_i de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ dans un repère.
L'ensemble de ces points est appelé nuage de points associé à la série statistique double (x,y).



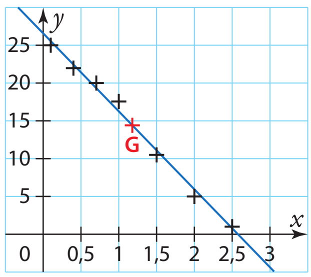
Définition Point moyen

On appelle point moyen du nuage, le point G de coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$

Exemple

Le point moyen de la série à deux variables (altitude et température) précédente est G(1,2 ; 14,4) car :

$$\overline{x} = \frac{0{,}1 + 0{,}4 + \dots + 2{,}5}{7} \approx 1{,}2 \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{25 + 22 + \dots + 1}{7} \approx 14{,}4$$



On cherche s'il existe un lien entre ces deux variables, l'altitude et la température. On va donc essayer de trouver une courbe qui « approche au mieux » le nuage, c'est-à-dire une courbe qui passe au plus près des points du nuage.
On dit que l'on a effectué un **ajustement**.
Cette courbe d'ajustement, si elle existe, représente alors une fonction f qui permet quasiment d'exprimer la variable y en fonction de la variable x sous la forme $y = f(x)$.
Ici, les points sont presqu'alignés donc on peut ajuster le nuage par une droite : on a donc quasiment une relation du type $y = ax + b$ entre les deux variables x et y de la série statistique.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c09-04 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Représenter une série statistique double

Énoncé

Chaque année une association organise une tombola. Elle achète un certain nombre de lots puis vend des billets de tombola par carnets de 10. Le nombre de lots achetés et le nombre de carnets vendus lors des 9 dernières tombolas est donné dans le tableau ci-contre

Nombre de lots x_i	38	26	20	13	8	34	32	41
Nombre de carnets y_i	69	64	60	59	55	67	68	70

1. Représenter cette série sous la forme d'un nuage de points dans un repère orthonormé.
2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage et le placer dans le repère.
3. Quelle forme présente le nuage de points ?
4. Tracer « au jugé » la courbe associée.

Conseils & Méthodes

1 Étant donné les valeurs de la série y, il est plus pratique de commencer à graduer l'axe des ordonnées à partir de 50, afin de garder une échelle (1 carreau pour 2 unités) suffisamment précise.

2 Pour tracer la droite, on place sa règle sur le point moyen et on « ajuste » au mieux la « pente » de façon à passer, en moyenne, le plus proche possible de tous les points.

Solution

1. 1 On obtient la représentation graphique ci-dessous.

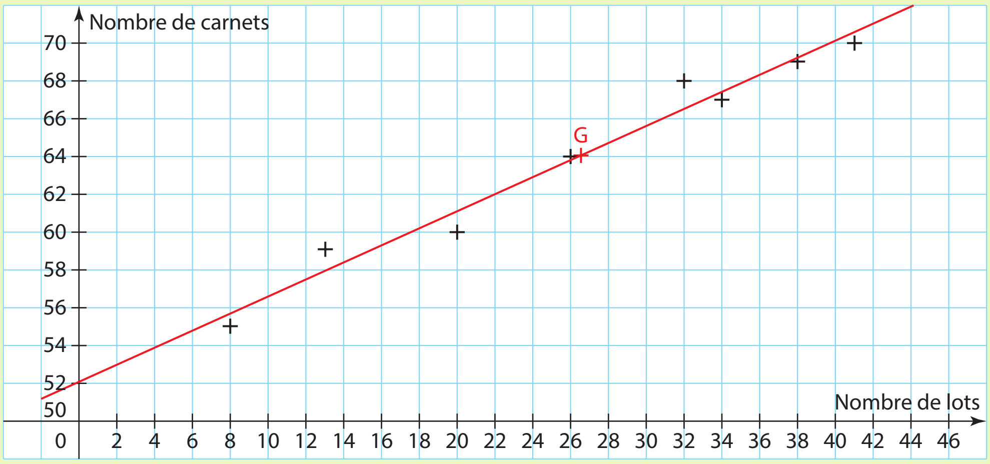
2. $\overline{x} = \dfrac{38+26+20+13+8+34+32+41}{8} = 26{,}5$

et $\overline{y} = \dfrac{69+64+60+59+55+67+68+70}{8} = 64$

Le point moyen a donc pour coordonnées G (26,5 ; 64).

3. Le nuage de points a une forme « allongée, rectiligne, montante ».

4. La courbe usuelle qui se rapproche le plus de sa forme globale est une droite. 2



À vous de jouer !

1 Soit la série statistique suivante à deux variables x et y.

Valeurs de x	5	7	9	12	13	16
Valeurs de y	27	23	18	13	13	6

1. Représenter cette série sous la forme d'un nuage de points dans un repère orthogonal.
2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage et le placer dans le repère.
3. Quelle forme présente le nuage de points ?
4. Tracer « au jugé » la courbe associée.

2 Le tableau présente le chiffre d'affaires annuel (en millions d'euros) d'un fabricant de micro-processeurs entre 2002 (année de rang 0) et 2005 (année de rang 3).

Valeurs x_i	0	1	2	3
Valeurs y_i	12	19	31	58

1. Représenter cette série sous la forme d'un nuage de points dans un repère orthogonal.
2. Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage et le placer dans le repère.
3. Quelle forme présente le nuage de points ?
4. Tracer « au jugé » la courbe associée.

↪ Exercices 20 à 21 p. 236

Cours

2 Ajustement affine

Définition **Droite d'ajustement, ajustement affine**

Lorsque les points du nuage sont sensiblement alignés, on appelle droite d'ajustement une droite qui passe au plus près des points du nuage. On dit que cette droite réalise un ajustement affine du nuage de points.

Remarques

① La variable y peut alors s'exprimer de façon approchée sous la forme $y = ax + b$ (équation de la droite d'ajustement). Ainsi on estime qu'il existe un lien affine entre x et y.

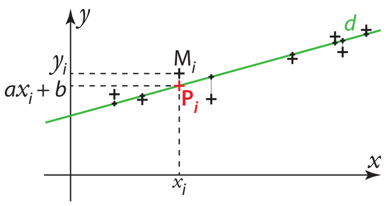
② Il est généralement admis que la droite d'ajustement passe par le point moyen G du nuage.

③ Pour obtenir cette droite il existe différentes méthodes l'une d'elles est présentée ci-après.

Propriété **Méthode des moindres carrés**

Soit un nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, une droite d d'équation $y = ax + b$ qui ajuste le nuage, et les points $P_i(x_i\,;ax_i + b)$ sur la droite d. Il existe un réel a et un réel b tels que la somme $M_1P_1{}^2 + M_2P_2{}^2 + \ldots + M_nP_n{}^2$ est minimale.

Pour ces valeurs de a et de b, la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée droite des moindres carrés associée au nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (ou droite de régression de y en x).



Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c09-05

Apprendre à démontrer p. 236

Remarque L'idée de la méthode des moindres carrés est de trouver une droite d passant « en moyenne » au plus près des points du nuage. $M_iP_i = y_i - (ax_i + b)$ représente l'écart entre le point M_i du nuage et la droite. Lorsqu'on fait la somme des carrés de ces écarts, on cherche à ce que le résultat soit le plus petit possible.
Il s'agit donc de trouver les nombres a et b qui minimisent cette quantité.

Propriété **Droite des moindres carrés et covariance**

La droite des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

$\text{cov}(x, y)$ est la covariance des séries statistiques x et y et se calcule de la façon suivante :

$$\text{cov}(x, y) = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + \ldots\ldots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})}{n}$$

Remarques

① On peut obtenir les coefficients a et b de la droite des moindres carrés directement avec la calculatrice.

② La covariance $\text{cov}(x, y)$ peut-être positive ou négative. On peut la noter aussi σ_{xy} et pour les calculs on pourra aussi utiliser :

$$\text{cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{n} - \overline{xy}$$

Définition **Coefficient de corrélation linéaire**

Le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique de variables x et y est le nombre r défini par :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Propriété **Modèle de corrélation et ajustement affine**

Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie : $-1 \leqslant r \leqslant 1$:

- **plus $|r|$ est proche de 1, plus l'ajustement affine est un bon modèle de corrélation entre les variables x et y.**
- **plus $|r|$ est proche de 0, moins l'ajustement n'a de sens.**
- **Si $|r| = 1$, c'est que la droite de régression passe par tous les points du nuage.**

Exercices résolus

Méthode 2 Obtenir la droite de régression et le coefficient de corrélation linéaire à la calculatrice

Énoncé

x_i	38	26	20	13	8	34	32	41
y_i	69	64	60	59	55	67	68	70

On considère le nuage de points associé à la série statistique de la Méthode 1 p.225 À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement du nuage par la méthode des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire. (Les valeurs seront arrondies à 10^{-3}).

Conseils & Méthodes

Sur la calculatrice on peut aussi représenter le nuage de points. Cela permet de s'assurer qu'un ajustement affine a du sens.

Solution

TI-83 Premium CE

Appuyer sur la touche stats de la calculatrice Sélectionner le menu **ÉDIT 1:Modifier** puis entrer les valeurs de la série statistique dans les colonnes L1 et L2.
Appuyer de nouveau sur la touche stats et sélectionner le menu **CALC 4 :RégLin(ax+b)**.
S'assurer qu'on a **Xliste : L1** et **Yliste : L2.** On obtient alors l'équation de la droite de régression de y en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r.

NUMWORKS

Appuyer sur la touche de la calculatrice. Sélectionner le menu Régression puis entrer les valeurs de la série statistique dans les colonnes X1 et Y1. Appuyer sur la touche . Puis sélectionner le menu **Stats** en vous déplaçant avec la flèche . On obtient alors toutes les caractéristiques de la série statistique, et notamment, en se déplaçant vers le bas , l'équation de la droite de régression, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r.

CASIO GRAPH 90+E

Appuyez sur la touche MENU de la calculatrice Sélectionner le menu Statistique EXE puis entrer les valeurs de la série statistique dans les colonnes.
List1 et **List2** et appuyer sur F2
Vérifier les réglages SET : **2varXliste : list1 et 2var Yliste : list2.**
Appuyer sur la touche REG puis sur F1 X puis sur F1 de nouveau : on obtient alors l'équation de la droite de régression de y en x, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r .

À vous de jouer !

3 On considère le nuage de points associé à la série statistique de l'exercice 1 p. 225

Valeurs de x	5	7	9	12	13	16
Valeurs de y	27	23	18	13	13	6

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement du nuage par la méthode des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.

4 Dans un pays, on a relevé tous les dix ans le PIB et la consommation d'électricité par habitant.

PIB par habitant (en milliers d'euros)	5	10	16	24	31
Consommation électrique par habitant (en MWh)	1	2,3	4	7	8,9

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement du nuage par la méthode des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.

Exercices 22 à 25 p. 237

3 Ajustement exponentiel

Parfois le nuage de points de la série statistiques (x, y) a une forme générale qui ressemble à la **courbe d'une fonction exponentielle** $x \mapsto e^{ax+b}$

Pour déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative approche au mieux le nuage de points on effectue un **changement de variable, en posant** $y' = \ln(y)$.

Le nuage de points de la série statistique (x, y') présente alors une **forme rectiligne** que l'on peut ajuster par la **droite de régression de** y' en x, d'équation $y' = ax + b$.

On a alors $\ln(y) = ax + b$ ce qui équivaut à $y = e^{ax+b}$.

Cette équation représente une courbe exponentielle qui ajuste au mieux le nuage.

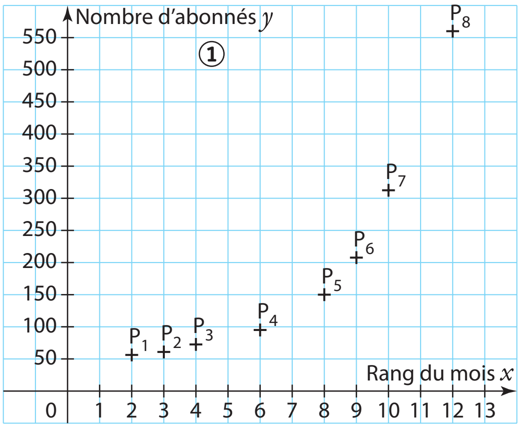
On dit alors qu'on a réalisé un **ajustement exponentiel**.

Exemple

On a étudié l'évolution presque tous les mois du nombre d'abonnés à la chaîne d'une youtubeuse depuis l'ouverture de celle-ci en septembre 2019.

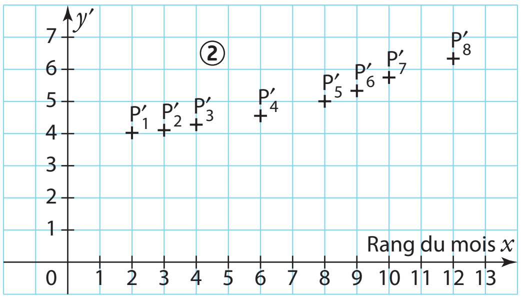
Mois	Nov.	Déc.	Janv.	Mars	Mai	Juin	Juillet	Sept.
Rang du mois x_i	2	3	4	6	8	9	10	12
Nombre d'abonnés y_i	56	61	72	95	150	207	312	560

• Les points $P_i(x_i ; y_i)$ de la série statistique (x, y) ne présentent pas une forme rectiligne.
Un ajustement affine du nuage n'est donc pas pertinent.
En revanche, on observe une forme de nuage caractéristique d'une évolution exponentielle (graphe ①).



• Si on considère maintenant les variables x et $y' = \ln(y)$, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous et le nuage suivant (graphe ②).

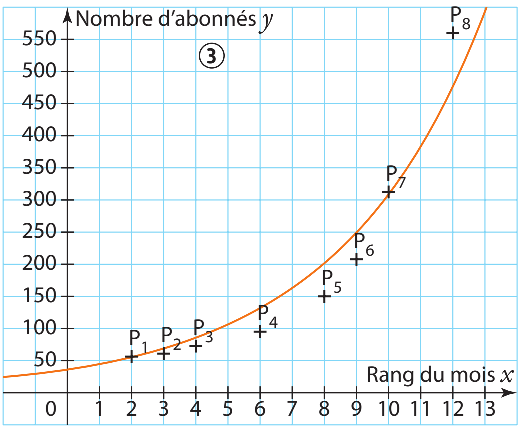
x_i	2	3	4	6	8	9	10	12
$y'_i = \ln(y_i)$	4	4,1	4,3	4,6	5	5,3	5,7	6,3



• Les points semblent quasi alignés : on peut donc effectuer un ajustement affine de la série statistique (x, y').
La méthode des moindres carrés donne :

$$y' = 0{,}23x + 3{,}38$$

On a alors :
$\ln(y) = 0{,}23x + 3{,}38 \Leftrightarrow y = e^{0{,}23x + 3{,}38}$
La courbe d'équation : $y = e^{0{,}23x + 3{,}38}$ ainsi obtenue ajuste au mieux le nuage de points P_i de la série statistique (x, y) initiale (graphe ③).



Remarque Cette méthode d'ajustement ne fonctionne que si la variable y ne prend que des valeurs positives.
Dans les autres cas il faudra réaliser un changement de variable un peu différent.

Méthode 3 Effectuer un ajustement exponentiel

Énoncé

On a relevé, pendant un an, sur différents parcours de même longueur, la vitesse moyenne x_i des véhicules et le nombre d'accidents mortels y_i au total sur l'année, pour i entier variant de 1 à 5.

Vitesse x_i (en km · h^{-1})	30	50	80	90	100
Nombre d'accidents y_i	1	6	41	66	102

1. **Représenter ces données dans un repère orthogonal d'unités bien choisies.**

2. **On pose $y'_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 5. Calculer les valeurs de y'_i arrondies au dixième.**

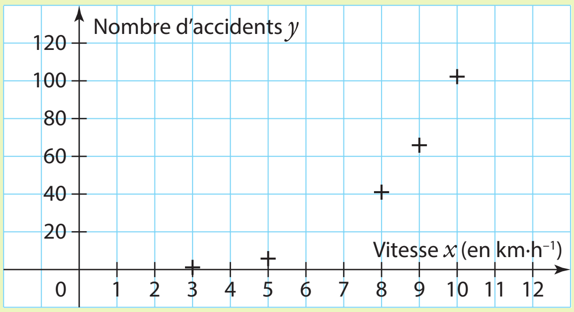
3. **Représenter le nuage de points $(x_i ; y'_i)$ dans un autre repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.**

4. **Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x. (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).**

5. **En déduire une expression de y en fonction de x.**

Solution

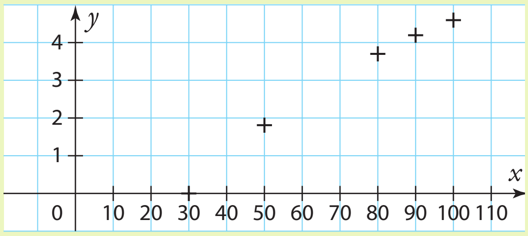
1. On obtient le nuage suivant. **1**



2. On obtient le tableau suivant.

x_i	30	50	80	90	100
y'_i	0	1,8	3,7	4,2	4,6

3. On obtient la représentation graphique ci-contre **2**
On remarque que les points $(x_i ; y'_i)$ sont presqu'alignés.



4. Avec la calculatrice, on trouve $y' = 0{,}066x - 1{,}745$ et $r \approx 0{,}993$

5. Comme $y' = \ln(y)$, on en déduit que $\ln(y) = 0{,}066x - 1{,}745$ et donc $y = e^{0{,}066x - 1{,}7425}$ **3**

Conseils & Méthodes

1 La forme du nuage obtenu invite à chercher un ajustement exponentiel.

2 Les valeurs y'_i étant beaucoup plus petites que les valeurs y_i, on sera la plupart du temps obligé de changer l'échelle de l'axe des ordonnées et donc d'utiliser un autre repère orthogonal.

3 On pourra éventuellement utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour écrire : $y = e^{0{,}066x} \times e^{-1{,}745}$. Puis, avec $e^{1{,}745} \approx 0{,}175$, on a : $y = 0{,}175e^{0{,}066x}$

À vous de jouer !

5 On considère la série statistique à deux variables suivante.

Valeurs x_i	0	1	2	3
Valeurs y_i	12	19	31	58

1. On pose $y'_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 0 à 3. Calculer les valeurs y'_i.
2. Représenter le nuage de points $(x_i ; y'_i)$ dans un repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près)
4. En déduire une expression de y en fonction de x.

6 On mesure l'évolution au cours de temps x, en heures, du taux de saturation y de monoxyde de carbone d'un patient intoxiqué qui reçoit un traitement à base d'oxygène.

Temps x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Taux de saturation y_i (en %)	50	38	27	16	8	5	3

1. Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités bien choisies.
2. On pose $z_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 6. Calculer les valeurs z_i.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
4. En déduire une expression de y en fonction de x.

↪ Exercices 26 à 28 p. 237

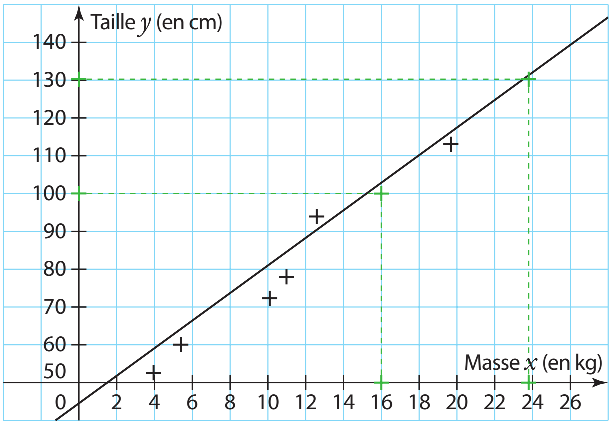
Cours

4 Interpolations et extrapolations

Lorsqu'on a pu réaliser un ajustement (affine ou exponentiel) satisfaisant pour le nuage de points d'une série statistique à deux variables x et y, alors on peut considérer, si cela a du sens dans la situation étudiée, que les quantités x et y ne sont pas complètement indépendantes l'une de l'autre et ont un lien qui peut être modélisé par une fonction f (affine ou exponentielle), qui correspond à l'ajustement trouvé, et telle que $y = f(x)$.
Cela permet d'estimer (graphiquement ou algébriquement) une valeur de la quantité y qui pourrait correspondre à une valeur théorique de la quantité x, non relevée initialement dans l'étude statistique. Et réciproquement on peut aussi estimer une valeur de x qui pourrait correspondre à une valeur donnée de y. Dans le cas où les valeurs choisies restent dans le « domaine d'étude » défini par l'échantillon, on dit que l'on réalise une **interpolation**. Dans le cas contraire, il s'agit alors d'une **extrapolation**.

Exemples

① Le nuage de points ci-contre représente la masse x (en kg) et la taille y (en cm) d'un enfant, relevés par son médecin traitant lors des 6 dernières visites médicales.
La forme du nuage a permis de réaliser un ajustement affine.
La droite d'ajustement obtenue permet de modéliser de façon approchée le lien entre les deux variables.
Ainsi on peut estimer graphiquement que si l'enfant avait été voir son médecin, entre la 5e et la 6e visite, au moment où il mesurait environ 100 cm, la pesée aurait probablement donné une valeur autour de 16 kg.

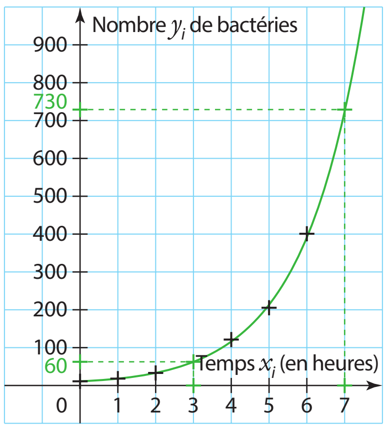


Les deux valeurs $y \approx 100$ et $x \approx 16$ font partie du domaine d'étude qui va de $y_{min} \approx 53$ à $y_{max} \approx 113$ d'une part, et de $x_{min} \approx 4$ à $x_{max} \approx 20$.
Alors l'estimation que nous venons de faire s'appelle une **interpolation**. Nous avons interpolé la valeur 16 kg à partir de la valeur 100 cm (on aurait tout aussi bien pu interpoler la valeur 100 cm à partir de la valeur 16 kg).
Si l'on souhaite faire une estimation en dehors du domaine d'étude (par exemple pour $y \approx 130$ on estime $x \approx 24$) on réalise une **extrapolation**.
Nous pouvons extrapoler (imaginer) la masse d'environ 24 kg de l'enfant lorsqu'il mesurera 130 cm.

② Dans un laboratoire, on étudie l'évolution d'une population de bactéries anaérobies.
Le nombre y_i de bactéries est relevé à différents instants x_i en heures.

Temps x_i (en heures)	0	1	2	4	5	6
Nombres y_i de bactéries	10	18	33	121	205	400

Après avoir représenté le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ et constaté qu'il présentait une forme « ajustable » par une courbe « exponentielle », on a réalisé un ajustement exponentiel avec la méthode de la page précédente et on a tracé la courbe de la fonction obtenue. Cette courbe permet de modéliser de façon approchée le lien entre les deux variables. Ainsi, graphiquement, on peut estimer le nombre de bactéries qu'il y avait au bout de 3 heures : soit environ 60 (interpolation).
En supposant que l'évolution observée se prolongera d'heures en heures on peut estimer le nombre de bactéries qu'il y aura au bout de 7 heures : environ 730 (extrapolation).



Exercices résolus

Méthode 4 Effectuer des interpolations et des extrapolations

Énoncé

Pour l'achat d'une grosse quantité de ballons de handball, un fabricant propose un tarif dégressif selon la quantité d'articles commandés.
Le tableau ci-contre présente un relevé des prix proposés.

Nombre de ballons x_i	100	500	1000	2000
Prix unitaire y_i (en €)	19,90	19	17,90	15,50

1. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation r.
2. D'après le coefficient r, l'ajustement affine de cette série statistique semble-t-il un bon choix ?
3. Déterminer le prix unitaire que devrait proposer le fabricant pour un achat de 1500 ballons.
4. Quelle quantité de ballons faudrait-il acheter pour obtenir un prix unitaire de 12 € ?

Solution

1. et **2.** Avec la calculatrice on obtient : $y = -0{,}0023x + 20{,}16$. Et le coefficient de corrélation $r \approx -0{,}99978$. **1** Ce coefficient de corrélation est très proche de – 1, ce qui signifie que les points sont presque tous alignés et que l'ajustement affine de cette série statistique est donc particulièrement recommandé et très précis.

3. On peut effectuer une interpolation en utilisant l'équation de la droite d'ajustement. On obtient alors $y = -0{,}0023 \times 1\,500 + 20{,}16 = 16{,}71$.
Ainsi pour un achat de 1500 ballons, le prix unitaire que devrait proposer le fabricant pourrait être d'environ 16,70 €. **2**

4. Dans cette question, on sort du domaine d'étude (entre 15,50 € et 19,90 € d'après le tableau), on va donc réaliser une extrapolation, toujours à partir de l'équation de la droite d'ajustement. On a alors :

$$12 = -0{,}0023x + 20{,}16 \Leftrightarrow x = \frac{12 - 20{,}16}{-0{,}0023} \approx 3548\,.$$

Pour obtenir un prix unitaire de 12 €, il faudrait probablement acheter une quantité de ballons proche de 3550. **2**

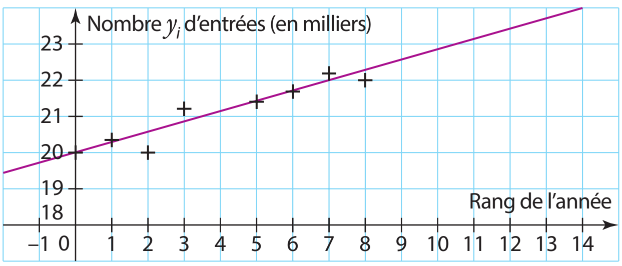
Conseils & Méthodes

1 Plus r est proche de -1, plus sa valeur absolue est proche de 1 : c'est l'indicateur d'une très bonne corrélation linéaire entre les deux variables étudiées.

2 Les résultats d'interpolation et d'extrapolation ne sont que des valeurs indicatives qui découlent de beaucoup d'approximations et d'ajustements successifs, donc ils doivent toujours être donnés avec beaucoup de précautions (utiliser le subjonctif et de termes comme « environ », « probablement »…)

À vous de jouer !

7 Le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ suivant donne le nombre total d'entrées annuelle y_i (en milliers) d'un cinéma municipal selon l'année x_i depuis 2010 (année de rang 0).
Ce nuage a été ajusté par la droite d représentée en violet.
1. Il manque les données de 2014. Estimer graphiquement le nombre d'entrées que le cinéma a totalisé cette année-là.
2. Si la tendance observée se poursuit encore pendant plusieurs années, en quelle année le cinéma peut-il espérer atteindre les 24 000 spectateurs par an ?



8 Dans une école primaire, chaque année depuis 2014 (année de rang 0), on a relevé le nombre de livres empruntés à la bibliothèque de l'école.

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de livres y_i	201	187	191	162	163	134

1. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et le coefficient de corrélation r.
2. D'après le coefficient r, l'ajustement affine de cette série statistique semble-t-il un bon choix ?
3. Peut-on estimer le nombre de livres qui seront empruntés à la bibliothèque en 2021 ?
4. Si la tendance se poursuit selon cet ajustement affine pendant les prochaines années, en quelle année pourrait-on avoir moins de 65 livres empruntés ?

↪ Exercices 30 à 31 p. 238

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c09-04 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 5 Calculer par la méthode des moindres carrés

↪ Cours 2 p. 226

Énoncé

Le tableau ci-contre représente la masse x (en kg) et la taille y (en cm) d'un enfant, relevés par son médecin traitant lors des 6 dernières visites médicales.

Masse x_i (en kg)	4	5,4	10,2	11	12,6	19,8
Taille y_i (en cm)	53	61	72	78	94	113

1. **Calculer la covariance de x et y puis la variance de x.**
2. **En déduire l'équation de la droite de régression de y en x.**
3. **Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère puis tracer la droite de régression.**

Solution

1. On commence par calculer les valeurs des moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$:

$$\overline{x} = \frac{4+5,4+10,2+11+12,6+19,8}{6} = \frac{63}{6} = 10,5 \quad \text{et} \quad \overline{y} = \frac{53+61+72+78+94+113}{6} = \frac{471}{6} = 78,5$$

Puis on peut s'aider d'un tableau pour détailler les étapes du calcul.

Masse x_i (en kg)	4	5,4	10,2	11	12,6	19,8
Taille y_i (en cm)	53	61	72	78	94	113
Écarts $x_i - \overline{x}$	−6,5 **1**	−5,1	−0,3	0,5	2,1	9,3
Écarts $y_i - \overline{y}$	−25,5	−17,5	−6,5	−0,5	15,5	34,5
Produit des écarts $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	165,75	89,25	1,95	−0,25	32,55	320.85

La covariance est la moyenne des produits des écarts :

$$\text{cov}(x,y) = \frac{165,75+89,25+1,95-0,25+32,55+320,85}{6} = \frac{610,1}{6} \approx 101,68$$

La variance de x est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$$\text{var}(x) = \frac{(-6,5)^2+(-5,1)^2+(-0,3)^2+0,5^2+2,1^2+9,3^2}{6} = \frac{159,5}{6} \approx 26,58$$

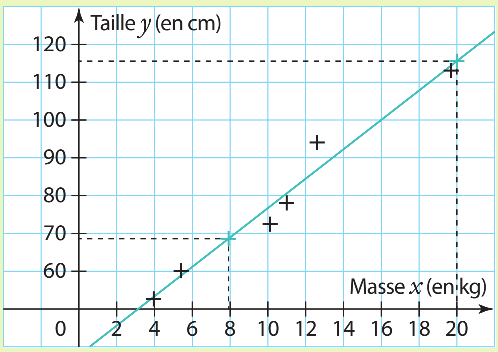
2. On en déduit que le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est : $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x)} \approx \dfrac{101,68}{26,58} \approx 3,83$

et l'ordonnée à l'origine $b \approx 78,5 - 3,83 \times 10,5 \approx 38,29$.

Donc l'équation de la droite de régression de y en x est :
$y = 3,89x + 38,29$.

3. On peut tracer la droite à l'aide d'un tableau comme ci-contre **2**.

x	8	20
y	69,5	116



Conseils & Méthodes

1 $x_1 = 4$ et $\overline{x} = 10,5$ donc l'écart est égal à $4 - 10,5 = -6,5$.

2 Pour tracer la droite on fait un tableau de valeurs en choisissant deux valeurs de x relativement éloignées pour améliorer la précision du tracé et en calculant le y correspondant à l'aide de l'équation de la droite.

À vous de jouer !

9 On considère la série statistique à deux variables x et y suivante.

Valeurs de x	5	7	9	12	16
Valeurs de y	27	23	18	13	6

1. Calculer la covariance de x et y puis la variance de x.
2. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x.
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,,y_i)$ dans un repère puis tracer la droite de régression.

10 On a relevé à certaines latitudes x, la température y à la surface de la mer.

Latitudes x_i (en °)	−45	−20	0	30
Températures y_i (en °C)	12,2	12,9	13,4	14,1

1. Calculer la covariance de x et y puis la variance de x.
2. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x.
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère puis tracer la droite de régression.

↪ Exercices 38 à 40 p. 240

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c09-04 Les rendez-vous Sésamath

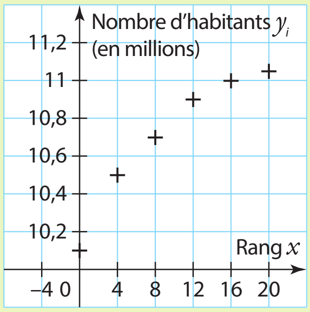
Exercices résolus

Méthode 6 D'autres ajustements

Énoncé

Le tableau ci-contre donne le nombre d'habitants y_i (avec i entier de 1 à 6) en Grèce, en millions d'habitants, tous les 4 ans depuis 1990 (année de rang x_1=0).

Années	1990	1994	1998	2002	2006	2010
Rang x_i	0	4	8	12	16	20
Nombre d'habitants y_i (en millions)	10,1	10,5	10,7	10,9	11	11,05



1. **Au vu du nuage de points $(x_i\,;y_i)$ ci-contre, un ajustement affine semble-t-il pertinent ?**

2. **On pose, pour tout entier i compris entre 1 et 6, $y'_i = e^{Y_i}$. Calculer les valeurs y'_i.**

3. **Représenter le nuage de points $(x_i\,;y'_i)$. Vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.**

4. **Déterminer la droite de régression de y' en x.**
En déduire une expression de y en fonction de x.

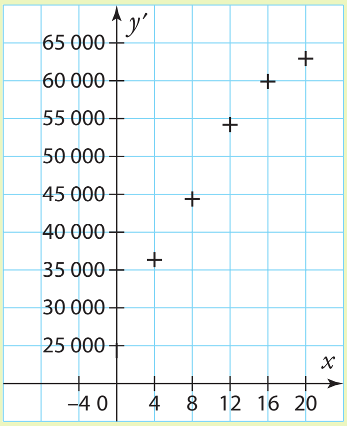
Solution

1. Les points $(x_i\,;y_i)$ ne semblent pas suivre une tendance « rectiligne », mais plutôt légèrement incurvée, l'ajustement affine ne semble donc pas le mieux adapté à la situation.

2. On obtient le tableau ci-contre 1

x_i	0	4	8	12	16	20
$y'_i = e^{y_i}$	24 343	36 316	44356	54 176	59 874	62 944

3. On obtient le nuage de points ci-contre. Les points $(x_i\,;y'_i)$ sont moins incurvés et semblent plus alignés :



4. À la calculatrice, on obtient :

$y' = 1\,954x + 27\,466$.
Or $y' = e^y$, donc $y = \ln(y')$, c'est-à-dire
$y = \ln(1\,954x + 27466)$.

Conseils & Méthodes

1 Lorsque le nuage présente une forme incurvée non rectiligne il est très difficile de savoir s'il existe une courbe de corrélation entre les deux variables et surtout quelle courbe pourrait correspondre car plusieurs courbes de fonctions « usuelles » pourraient convenir. Le changement de variable proposé ici permet un assez bon ajustement du nuage avec une courbe « logarithme » mais qui n'est peut-être pas le meilleur.

À vous de jouer !

11 On considère la série statistique $(x\,;y)$ suivante.

x_i	30	45	65	100	120	165	200	250
y_i	1,2	2	2,6	3,1	3,5	3,7	3,8	3,85

1. Représenter sur la calculatrice le nuage de points $(x_i\,;y_i)$.
2. On pose, pour tout entier i compris entre 1 et 8, $y'_i = e^{y_i}$; calculer les valeurs y'_i.
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y'_i)$.
Vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
4. Déterminer la droite de régression de y' en x.
En déduire une expression de y en fonction de x.

12 La capacité éolienne raccordée en France métropolitaine depuis 2001 (année de rang 0) forme une série statistique à deux variables. TICE

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Puissance y_i (en MW)	94	219	751	2 252	4 573	6 714	8 157

1. Représenter le nuage de points de la série statistique $(x;y)$ sur la calculatrice ou sur un tableur.
2. On pose, pour tout entier i compris entre 0 et 7, $y'_i = \sqrt{y_i}$. Calculer les valeurs y'_i.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x\,;y')$ et en déduire que le nuage de points $(x_i\,;y'_i)$ peut être approchée de façon pertinente par une droite.
4. Déterminer la droite de régression de y' en x.
En déduire une expression de y en fonction de x.

Exercices 45 à 47 p. 241

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c09-05

ØLJEN

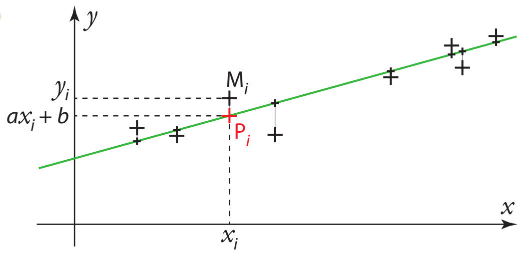
La propriété à démontrer

La droite des moindres carrés associée au nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ passe par le point moyen G du nuage.

On utilisera la définition de la droite des moindres carrés.

Comprendre avant de rédiger

- La droite des moindres carrés d'équation $y = ax + b$ passe par le point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$ si et seulement si on a $\overline{y} = a\overline{x} + b$.
- L'équation de la droite des moindres carrés est caractérisée par les réels a et b pour lesquels la somme $S = M_1P_1^{\,2} + M_2P_2^{\,2} + \ldots + M_nP_n^{\,2}$ est minimale.
- Montrons donc que les réels a et b pour lesquels S est minimale vérifient l'égalité $b = \overline{y} - a\overline{x}$.



Rédiger

Étape 1
Exprimer en fonction de a et b la somme $S = M_1P_1^{\,2} + \ldots + M_nP_n^{\,2}$.

On utilise la formule
$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$

Étape 2
On étudie la somme S en fonction des valeurs de b.

Étape 3
On a, d'une part, $f_i'(b) = 1$ et d'autre part, pour toute fonction f_i, la dérivée de f_i^2 est égale à $2f_i'f_i$.
On peut donc dériver S.

Étape 4
On détermine la valeur de b pour laquelle S est minimale.

Pour cela il faut étudier le signe de la dérivée S' pour tout réel b.

Étape 5
On conclut à l'aide de la valeur de b sur l'appartenance du point moyen G à la droite des moindres carrés.

La démonstration rédigée

Comme, pour tout entier i de 1 à n, M_i et P_i ont la même abscisse x_i, alors on a : $M_iP_i = \sqrt{(ax_i + b - y_i)^2}$ et donc $M_iP_i^{\,2} = (ax_i + b - y_i)^2$.
Donc $S = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2$.

S peut alors être considérée comme une fonction de variable b et se présente comme une somme de carrés de fonctions affines $f_i : b \mapsto (ax_i + b - y_i)$ dérivables pour tout réel b.

Ainsi, S est dérivable pour tout réel b, et on a :
$S'(b) = 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \ldots + 2(ax_n + b - y_n)$
$S'(b) = 2(ax_1 + b - y_1 + ax_2 + b - y_2 + \ldots + ax_n + b - y_n)$
$S'(b) = 2(ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n + n \times b - y_1 - y_2 - \ldots - y_n)$
$S'(b) = 2nb + 2(ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n - y_1 - y_2 - \ldots - y_n)$

On résout d'abord $S'(b) = 0$:
$2nb + 2(ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n - y_1 - y_2 - \ldots - y_n) = 0$
$\Leftrightarrow b = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} - \dfrac{a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} \Leftrightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$.
Avec le même raisonnement, on peut montrer que :
$S'(b) > 0 \Leftrightarrow b > \overline{y} - a\overline{x}$ et aussi que $S'(b) < 0 \Leftrightarrow b < \overline{y} - a\overline{x}$.
Cela signifie que la fonction S admet un minimum lorsque $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Cette valeur de b est l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés. Or $b = \overline{y} - a\overline{x} \Leftrightarrow \overline{y} = a\overline{x} + b$.
Les coordonnées du point moyen G vérifient l'équation de la droite d des moindres carrés associée au nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Pour s'entraîner

Une valeur du tableau ci-contre a été effacée, mais on sait que le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ a pu être ajusté par la droite des moindres carrés d'équation $y = -1{,}1x + 3{,}35$.
Déterminer la valeur manquante.

x_i	4	5		8
y_i	-1	-2	-5	-5

DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c09-06

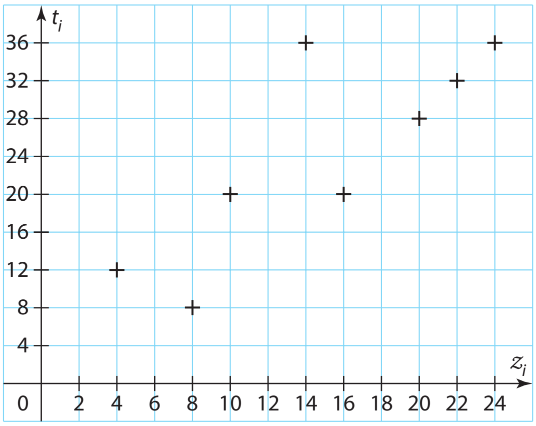
Exercices calculs et automatismes

13 Valeurs et point moyen d'une série statistiques

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre donnant les différentes valeurs prises par les variables z et t de la série statistique double dont le nuage de points (z_i ; t_i) est représenté ci-dessous.

z_i								
t_i								

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage) de la série statistique (z, t).



14 Équation réduite et coefficient de corrélation linéaire

1. Le tableau suivant donne les valeurs (x_i ; y_i) d'une série statistique double (x , y).
Déterminer l'équation réduite (dont les coefficients seront arrondis au dixième) de la droite de régression de y en x.

x_i	1	3	6	8	12	19	21	27	29
y_i	5	1	7	2	48	35	30	19	11

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (x , y)

15 Covariance , corrélation et ajustement affine

On considère la série statistique double (x , y) dont les valeurs (x_i ; y_i) sont donnés dans le tableau ci-contre.

x_i	1	3	6	8
y_i	5	1	7	2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?	**V**	**F**
1. La covariance σ_{xy} des variables x et y est négative.	☐	☐
2. L'écart-type σ_x de la variable x est inférieur à l'écart-type σ_y de la variable y.	☐	☐
3. Le coefficient de corrélation linéaire est positif.	☐	☐
4. Un ajustement affine du nuage de points (x_i , y_i) semble pertinent.	☐	☐

16 Droite de régression et ajustement exponentiel

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre y de licenciés d'un club d'escalade, chaque année de rang x, depuis 2015 (année de rang 0).Un ajustement affine de la série statistique (x , y) ne semblant pas approprié, on a ajouté au tableau une variable y' dont les valeurs y_i' vérifient $y_i' = \ln(y_i)$.

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4
Nombre de licenciés y_i	57	72	98	150	274
Valeurs de $y_i' = \ln(y_i)$	4,04	4,28	4,58	5,01	5,61

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s)

1. L'équation de la droite de régression de y' en x a pour équation (les coefficients sont arrondis au dixième).

a $y' = 51{,}2x + 27{,}8$ b $y' = 0{,}9x + 225$ c $y' = 0{,}4x + 4$

2. On peut calculer une valeur approchée de y avec la formule :

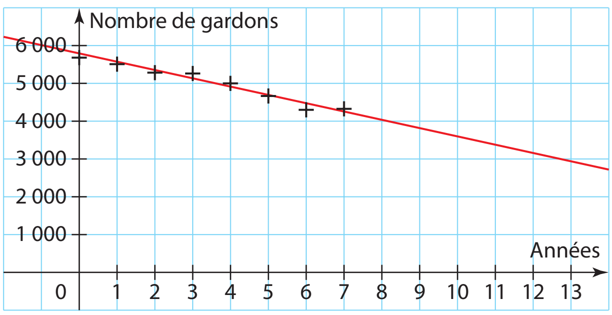
a $y = 54{,}6e^{0{,}4x}$ b $y = e^{0{,}9x} + 225$ c $y = 1{,}2 \times 1{,}7^x$

3. En utilisant l'ajustement exponentiel de la série statistique double (x , y), on peut prévoir que le nombre de licenciés dans le club en 2020 sera égal à environ :

a 315 b 403 c 602

17 Évolution d'un élevage de gardons

Le graphique suivant présente l'évolution annuelle du nombre de gardons dans un étang depuis l'année 2010 (année 0).
Le nuage de points obtenu peut être ajusté par une droite d représentée en rouge.



Si l'évolution continue pendant encore plusieurs années selon l'ajustement modélisé par la droite d, estimer graphiquement :

a) le nombre de gardons dans l'étang en 2008.

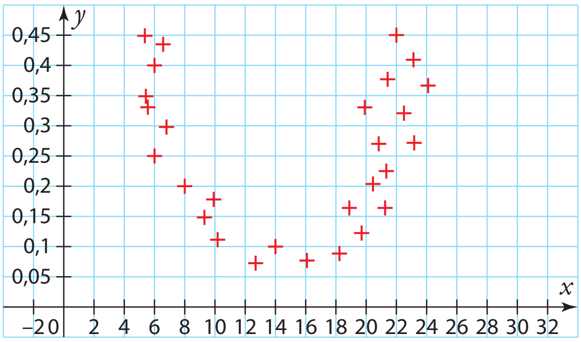
b) l'année à partir de laquelle il y aura moins de 3 000 gardons dans l'étang.

Exercices d'application

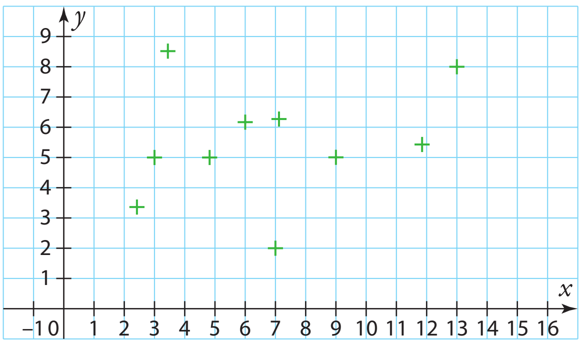
Nuage de points, ajustement
Méthode 1 p. 225

18 Parmi les nuages ci-dessous, lesquelles semblent « ajustables » par une fonction reconnaissable. Citer le nom de la forme du nuage et le nom de la fonction correspondante.

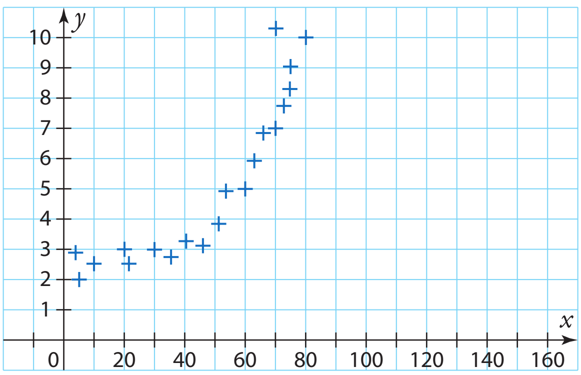
①



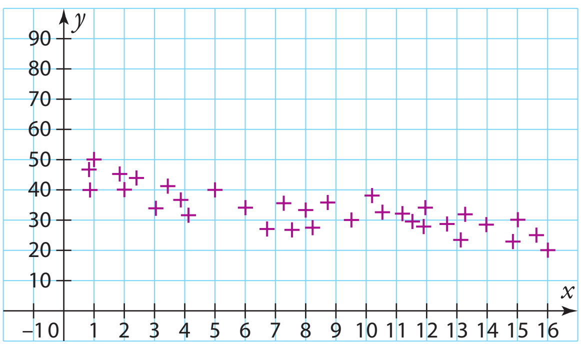
②



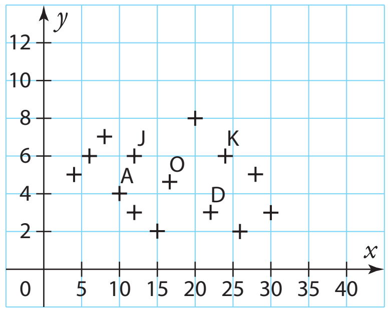
③



④



19 **1.** Dans le nuage de points suivant, parmi les points A, J, O, D, K, quel point semble être le point moyen du nuage ?



2. Peut-on trouver une corrélation entre les deux variables x et y de la série statistique double associée à ce nuage de points ?

20 Les températures, en degrés Celsius, de deux villes A et B ont été relevées à 7h00 tous les matins pendant une semaine.
Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

Ville A : températures x_i (en °C)	7	2	− 1	− 3	0	3	6
Ville B : températures y_i (en °C)	4,5	0	− 3	− 4	− 1	1,5	3

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Ce nuage de points présente-t-il une forme caractéristique d'une fonction de référence ?
Si oui, tracer « au jugé » la courbe de la fonction qui passe au plus près des points du nuage et qui passe par G.

21 Le tableau ci-dessous représente une série statistique double $(x\,,y)$.

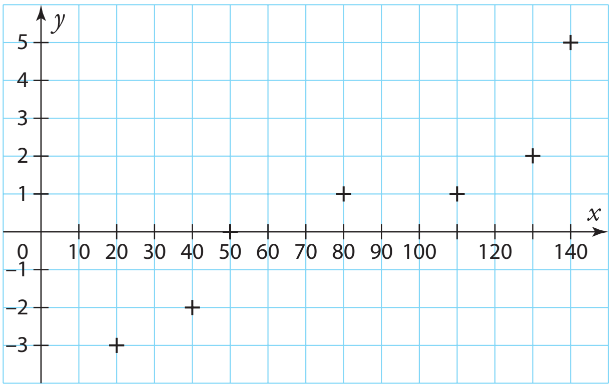
x_i	5	10	20	25	40	55	70
y_i	900	600	450	400	300	275	250

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $M(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Ce nuage de points présente-t-il une forme caractéristique d'une fonction de référence ? Si oui, tracer « au jugé » la courbe de la fonction qui passe au plus près des points du nuage et qui passe par G.

Droite de régression, coefficient de corrélation linéaire

Méthode 2 p. 227

22 On considère le nuage de points suivant.



1. Un ajustement affine de ce nuage est-il pertinent ?
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.

23 On considère la série statistique à deux variables $(x\,, y)$.

Valeurs x_i	–11	–3	2	0	–5
Valeurs y_i	1100	1000	900	950	1050

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ et vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.
3. Représenter la droite d dans le repère.

24 Sous des conditions de température et de volume constants, on étudie la pression et la quantité de matière d'un gaz. Les résultats sont présentés dans ce tableau. **Chimie**

Nombre de moles x_i	0	10	20	30
Pression y_i (en kPa)	0	46	98	145

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ et vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite de régression d de y en x et le coefficient de corrélation linéaire.
3. Représenter la droite d dans le repère.

25 Les dépenses en communication d'une entreprise chaque année, depuis 2014, sont données dans ce tableau.

Années	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dépenses y_i (en milliers d'euros)	11,5	11,2	10,7	10	9,9	9,5

1. Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage.
2. Déterminer, l'équation de la droite d des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.
3. La droite d passe-t-elle par le point moyen du nuage ?

Ajustement exponentiel

Méthode 3 p. 229

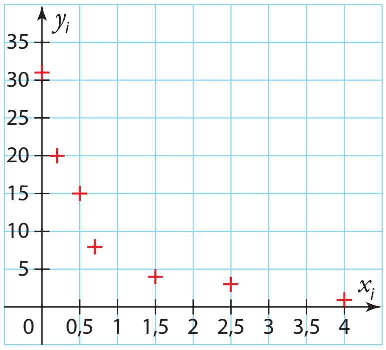
26 On injecte un médicament dans le sang d'une patiente en lui faisant une piqûre en intraveineuse.

La concentration y_i de ce médicament dans le sang, en microgrammes par millilitres est relevé à différents instants x_i en heures.

Temps x_i (en heures)	0	1	2	4	6	10
Concentration y_i (en µg · mL)	90	65	45	23	12	4

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ sur la calculatrice ou un tableur et vérifier que sa forme peut être ajustée par une courbe de fonction exponentielle décroissante.
2. On pose $y_i' = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 6.
Calculer les valeurs y_i'.
3. Représenter sur la calculatrice le nuage de points $(x_i\,;y_i')$.
5. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x.
6. En déduire une expression de y en fonction de x.

27 On considère le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ suivant dont la forme suggère un ajustement exponentiel.



1. On pose, pour tout entier i de 1 à 7, $y_i' = \ln(y_i)$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x_i	0	0,2	0,5	0,7	1,5	2,5	4
y_i							
y_i'							

2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x et le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x\,, y')$.
3. En déduire une expression de y en fonction de x.

28 On considère la série statistique à deux variables ci-contre.

Valeurs x_i	5	9	12	14
Valeurs y_i	0,02	0,07	0,32	1,20

1. On pose $y_i' = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 4. Calculer les valeurs y_i'.
2. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i')$ dans un repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x.
4. En déduire une expression de y en fonction de x.

Interpolation, extrapolation

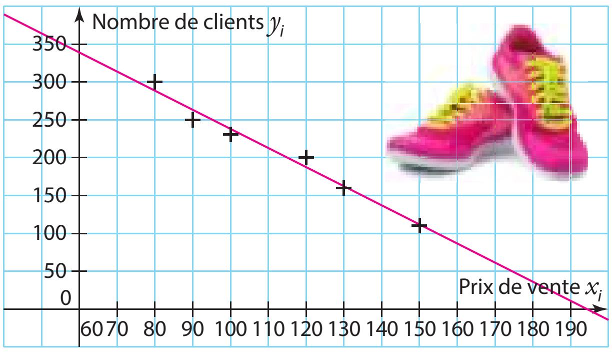
Méthode 4 p. 231

29 Dans une entreprise on étudie conjointement l'évolution du salaire moyen et du chiffre d'affaires. Les données obtenues pendant plusieurs années fournissent une série statistique à deux variable x (montant du salaire moyen en euros) et y (montant du chiffre d'affaires en milliers d'euros) dont le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ a pu être ajusté à l'aide de la droite d'équation $y = 5{,}3x - 5\,900$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
1. En 2003, si le salaire moyen dans l'entreprise était égal à 1 500 €, alors on peut estimer que le chiffre d'affaires devait être d'environ 2,05 millions d'euros.	☐	☐
2. En 2015, l'entreprise a réalisé 10 millions d'euros de chiffre d'affaires. On peut donc estimer que le salaire moyen dans l'entreprise devait être environ égal à 1 115 euros.	☐	☐

30 À l'occasion de la sortie d'un nouveau modèle de baskets, une grande enseigne de distribution réalise une enquête. Le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ ci-contre présente les résultats : en ordonnées, le nombre y_i de personnes prêtes à acheter les baskets selon le prix x_i proposé par l'enseigne en abscisses. On considère que la droite d (représentée en rose sur le graphique) est un bon ajustement du nuage.



1. Donner, par lecture graphique, une estimation du nombre de personnes interrogées qui seraient prêtes à acheter les nouvelles baskets :
a) au prix de 110 €. **b)** au prix de 70 €.
2. Estimer le prix à partir duquel aucune des personnes interrogées ne serait prête à acheter les baskets.

31 Dans le tableau suivant est donné le revenu y_i d'une entreprise qui fabrique du matériel de haute technologie chaque année de rang x_i depuis 2009 (année de rang 0).

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Revenu y_i (en millions d'euros)	10,7	13,3	16,7	20,9	26,1	32,7

Le nuage de points associé à cette série statistique présente une forme « exponentielle croissante ».
Un ajustement exponentiel a été réalisé et a permis d'obtenir la relation $y = 10{,}67\mathrm{e}^{0{,}224x}$.
1. Donner une estimation du revenu de l'entreprise en 2016.
2. En quelle année le revenu pourrait-t-il dépasser 100 millions d'euros ?

32 Dans le service de soins d'un hôpital, on a lancé en 2012, un plan de luttes contre les maladies nosocomiales.
On a relevé chaque année le pourcentage de malades ayant contracté une telle maladie.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Pourcentage de malades y_i	6,9	6,4	6,2	5,1	4,8	3,9	4

1. À la calculatrice on obtient l'équation de la droite d d'ajustement du nuage $(x_i\,;y_i)$ par la méthode des moindres carrés :

$$y = -0{,}54x + 6{,}95$$

ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x\,,y)$: $r \approx -0{,}978$.
Peut-on en déduire que la droite d est un bon modèle d'ajustement du nuage de points ?
2. On considère que la tendance observée pendant ces sept années se poursuit encore quelques années plus tard.
a) Estimer le pourcentage de malades ayant contracté une maladie nosocomiale dans cet hôpital en 2019.
b) En quelle année le pourcentage de malades ayant contracté une maladie nosocomiale dans cet hôpital pourrait-il être inférieur à 1,5 % ?

33 L'évolution annuelle, entre 2009 et 2014, du prix x_i (en euros) d'un paquet de cigarettes et des ventes y_i (en milliards d'unités) de la marque la plus vendue est donnée dans le tableau suivant.

Prix x_i	5,35	5,65	6	6,3	6,7	7
Ventes y_i	55	54,8	54,1	51,5	47,5	45

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés du nuage de points $(x_i\,;y_i)$.
2. En considérant que cette équation est un bon modèle de corrélation des variables x_i et y_i, déterminer les ventes de cigarettes si le prix du paquet atteignait 10 €.

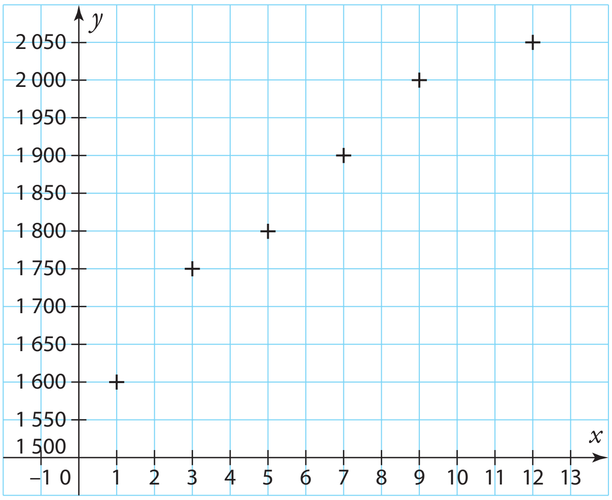
Ajustement affine d'un nuage de points

34 Le tableau ci-contre représente une série statistique double $(x\,;y)$.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	7	5	4	2	2

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $M(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Soit d la droite passant par G et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.
a) Déterminer l'équation réduite de la droite d.
b) Représenter d dans le repère.
c) d est-elle un bon ajustement du nuage ?

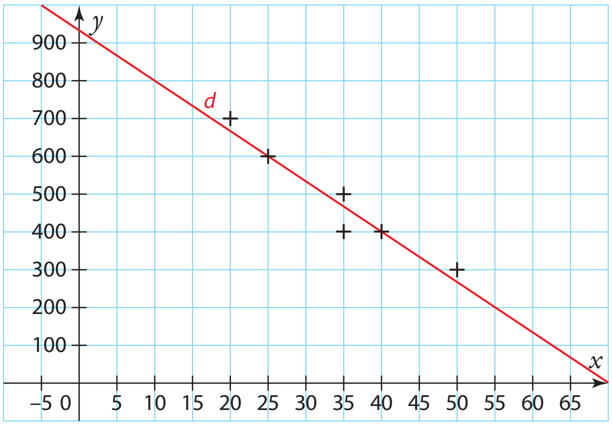
35 On considère la série statistique double $(x\,;y)$ donnée par son nuage de points $(x_i\,;y_i)$ suivant.



On admet qu'on peut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
1. Le point moyen G du nuage a pour coordonnées $\left(\frac{37}{6}\,;1850\right)$	☐	☐
2. L'équation de la droite d'ajustement affine d obtenue par la méthode des moindres carrés et dont les coefficients ont été arrondis à l'unité près, est $y = 41x + 1598$	☐	☐
3. Le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série $(x\,,y)$ est très proche de 1.	☐	☐
4. Si on retire du nuage de points le point (1 ;1 600) correspondant aux valeurs $x_1 = 1$ et $y_1 = 1\,600$ de la série statistique double $(x\,,y)$ alors le coefficient de corrélation linéaire r_2 de la nouvelle série statistique obtenue est inférieur au coefficient de corrélation linéaire r_1.	☐	☐
5. La droite d ne passe pas par le point moyen G.	☐	☐

36 Le nuage de points suivant a été ajusté par la droite d d'équation $y = 13{,}5x + 937{,}5$.



1. Déterminer les coordonnées du point moyen.
2. La droite d semble passer par deux points du nuage. Est-ce vraiment le cas ?
3. La droite d choisie pour ajuster le nuage passe-t-elle par le point moyen G ?

37 Thème 9 Dans un hôpital, on a relevé la tension artérielle x_i (en mm de mercure) et l'âge y_i (en années) de 16 patients.
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Âge x_i (en années)	36	40	43	45	48	49	50	54
Tension y_i (en mm de mercure)	120	108	112	128	110	122	121	128
Âge x_i (en années)	57	57	58	59	61	65	66	67
Tension y_i (en mm de mercure)	140	130	145	131	136	140	140	134

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ (pour i entier de 1 à 16) associé à cette série statistique dans un repère orthonormé.
(On commencera à graduer l'axe des abscisses à 30 et l'axe des ordonnées à 100).
2. On décide de réaliser un ajustement affine par la méthode de Mayer.
On considère deux sous-nuages : celui des huit personnes les plus jeunes (points M_1 à M_8) et celui des huit personnes les plus âgées (points M_9 à M_{16}).
a) Déterminer le point moyen G_1 du premier sous-nuage $M_i(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 8.
b) Déterminer le point moyen G_2 du deuxième sous-nuage $M_i(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 9 à 16.
c) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère et tracer la droite (G_1G_2).
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2), dite « droite de Mayer ».

Exercices d'entraînement

Droite des moindres carrées et corrélation linéaire

Méthode 5 p. 232

38 On a relevé le taux de chômage des jeunes (16 à 24 ans) en France, entre 2010 et 2015.

Années	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Taux y_i de chômage (en %)	7,8	8,1	8	8,7	9	9,2

1. Calculer la variance var(x) de la variable x (rang de l'année) et en déduire l'écart-type σ_x.
2. Calculer la variance var(y) de la variable y (taux de chômage) et en déduire l'écart-type σ_y.
3. Calculer la covariance σ_{xy} des variables x et y.
4. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x, et la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x, y).

39 Thème 9

Le tableau ① suivant donne les températures maximales x prévues par un site de météorologie et les températures y maximales réelles observées, pour chaque jour de la semaine du lundi 9 au dimanche 15 mars. Le tableau ② donne les températures prévues x' par le site météo et les températures y' réelles observées le lundi 9 mars, toutes les quatre heures. Toutes les valeurs sont données en degré Celsius.

Tableau ①

Jours de la semaine	L	M	Me	J	V	S	D
Températures prévues x_i (en °C)	12	15	16	14	12	11	8
Températures réelles y_i (en °C)	13	14	14	10	13	7	7

Tableau ②

Heures	2h	6h	10h	14h	18h	22h
Températures prévues x_i' (en °C)	2	3	6	12	12	9
Températures réelles y_i' (en ° C)	2,5	3	7	13	12,5	8

1. Sur la calculatrice, représenter les nuages de points associés aux séries statistiques (x,y) et (x', y').
2. Pour chaque nuage, déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés, et représenter-la.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série statistique (x,y), puis celui, noté r_2 de la série statistique (x', y').
4. On considère l'affirmation : « Les prévisions météo à un jour sont meilleures que les prévisions à une semaine ». Vos résultats confirment-ils cette affirmation.
Pourquoi ?

40 Une série statistique à deux variables (x, y) est telle que cov$(x, y) \approx 75$, var$(x) \approx 124$ et var$(y) \approx 236$. Est-il pertinent de chercher une corrélation linéaire entre les variables x et y ? Si oui, quel serait le coefficient directeur de la droite de régression de y en x ?

41 Une série statistique à deux variables (x,y) est telle que cov$(x, y) \approx -105$, var$(x) \approx 112$ et var$(y) \approx 109$. Est-il envisageable d'ajuster le nuage de points associé à cette série statistique par une droite ? Si oui, quel est le coefficient directeur de la droite obtenue par la méthode des moindres carrés ?

Ajustements, extrapolation et interpolation

42 En France, pour une femme, l'âge moyen du premier mariage était de
- 34 ans en 2012,
- 34,9 ans en 2014,
- 35,4 ans en 2016,
- 35,9 ans en 2018.

1. Dresser un tableau avec ces données. (Pour les années, on pourra au choix les utiliser telles quelles ou utiliser leur rang en prenant l'année 2012 comme rang 0).
2. Réaliser un ajustement affine de ces données.
(Les coefficients seront arrondis au dixième).
3. À l'aide de cet ajustement, donner une estimation, arrondie au dixième, de ce que pourrait être l'âge moyen du premier mariage pour une femme en France en 2022 ?
4. Si cette « tendance » devait se prolonger assez longtemps à l'avenir, en quelle année l'âge moyen du premier mariage pour une femme pourrait atteindre 40 ans ?

43 TICE

Dans le tableau suivant sont présentées les ventes annuelles de smartphones d'un fabricant depuis 2007. Il manque les données des années 2009 et 2014.

	A	B	C
1	Années	Rang x_i de l'année	Nombre y_i de smartphones
2	2007	0	1,5
3	2008	1	5
4	2009	2	
5	2010	3	20
6	2011	4	55
7	2012	5	85
8	2013	6	114
9	2014	7	
10	2015	8	256

1. Représenter sur le tableur le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ de cette série statistique et vérifier qu'il peut être ajusté par la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction exponentielle.
2. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ qui ajuste « au mieux » le nuage a pour équation $y = 2{,}5e^{0{,}641x}$.
3. Si on considère que l'évolution des ventes a été la même depuis 2007, donner une estimation du nombre de smartphones vendus en 2009 et 2014.

44 Les tableaux suivants donnent l'évolution de la population allemande y et de la population turque z, en millions d'habitants, pendant les années 2000 de rang x allant de 0 à 9.

Thème 9

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Population allemande y_i	82,2	82,3	82,4	82,5	82,5
Population turque z_i	66,9	64,6	65,6	66,4	67,2
Année	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	5	6	7	8	9
Population allemande y_i	82,5	82,4	82,3	82 ,2	82
Population turque z_i	68	68,9	69,7	70,6	71,5

1. Représenter dans le même repère (éventuellement sur un tableur ou la calculatrice) le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ associé à la série statistique à deux variables $(x\,,y)$ et le nuage de points $P_i(x_i\,;z_i)$ associé à la série statistique à deux variables $(x\,,z)$.
2. On réalise un ajustement affine de chacun de ces nuages.
a) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
b) Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x.
3. Si on suppose que l'évolution observée pour chacune de ces séries se poursuit encore les années suivantes, en quelle année la population de la Turquie pourrait dépasser la population de l'Allemagne ?

Autres ajustements

Méthode 6 p. 233

45 On a relevé, dans le tableau suivant, la masse y_i (en kg) d'un nourrisson selon son âge x_i (en mois).

Age x_i (en mois)	0	1	2	3	4	5	7	9	12
Masse y_i (en kg)	3,01	5,04	6,22	7,06	7,71	8,25	9,09	9,61	10,12

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ sur un tableur ou une calculatrice et vérifier qu'un ajustement affine de ce nuage n'est pas pertinent.
2. On pose, pour tout entier i compris entre 1 et 9, $y_i' = e^{y}$; calculer les valeurs y_i'.
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i')$.
Vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
4. Déterminer la droite de régression de y' en x.
En déduire une expression de y en fonction de x.
5. En admettant que l'évolution du poids du nourrisson va continuer selon la même tendance pendant encore quelques mois, donner une estimation du poids du bébé lorsqu'il aura atteint l'âge de 18 mois.

46 La consommation de carburant et la vitesse d'un véhicule sont bien évidemment liés par une relation de causalité.
Le tableau suivant présente pour un type de poids-lourd, quelques valeurs y_i de consommation de carburant en litres pour 100 km selon certaines valeurs x_i de la vitesse en km·h^{-1}.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le lien de corrélation entre ces deux variables.

Vitesse x_i (en km·h^{-1})	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Consommation y_i (en L pour 100 km)	43	37	34	31,8	31	32	34,5	38	42

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ (pour i entier de 1 à 9) dans un repère orthonormé.
2. Vérifier que ce nuage de points peut être ajusté par une parabole ayant un sommet proche du point $M_5(70\,;31)$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;120[$ par :
$$f(x) = a(x-70)^2 + 31$$
où a est un réel strictement positif.
a) Expliquer pourquoi la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pourrait être un bon modèle d'ajustement au nuage.
b) En admettant que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $M_5(60\,;31{,}8)$, démontrer que le réel a est égal à $\dfrac{1}{125}$.
4. Si on prend la courbe $\mathscr{C}_f$ pour modèle d'ajustement du nuage, quelle consommation peut-on prévoir sur ce type de poids-lourd lorsqu'on roule à 20 km·h^{-1} ?

47 Une société vend des vélos électriques.

Thème 9

Ses bénéfices annuels (en milliers d'euros) ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i (en k€)	64	75	100	113	125	127

1. a) Construire le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthonormé.
On prendra comme unités :
• 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses,
• 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
b) Donner les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer dans le repère.
2. En observant le nuage de point, on envisage de l'ajuster par une courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$
a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère de la question **1**.
c) Quelle prévision peut-on faire pour le bénéfice en 2005 avec ce modèle d'ajustement ?

D'après bac

Exercices bilan

48 Ajustement et recettes

SES

Une entreprise fabrique des tee-shirts.
Afin d'établir le prix de vente de son produit elle réalise une enquête auprès de personnes qui, selon le prix proposé, seraient potentiellement acheteurs du tee-shirt.

Prix de vente x_i (en €)	25	29	32	35	39
Nombre d'acheteurs y_i potentiels	124	116	94	85	72

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (à 10^{-4} près) de la série statistique à deux variables x (prix de vente) et y (nombre d'acheteurs potentiels).
Interpréter le résultat.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (arrondir à l'unité)
3. Soit $R(x)$ la recette correspondant à la vente de y produits au prix unitaire de x euros.
a) En utilisant la question précédente, déterminer l'expression de $R(x)$.
b) En déduire le prix de vente x qui permettrait d'obtenir une recette maximale.

49 Quel ajustement choisir ?

En 2015 un lycée décide de créer un club d'échecs.
Dans le tableau suivant est indiqué le nombre d'adhérents chaque année depuis 2015.

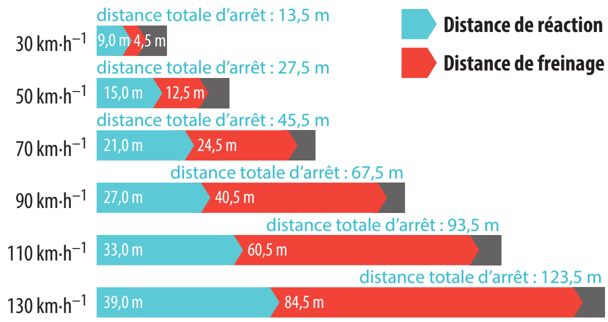
Rang de l'année x	1	2	3	4
Nombre d'adhérents y	9	15	22	31

1. a) On considère la série statistique à deux variables x (rang de l'année) et y (nombre d'adhérents).
Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de cette série statistique (x, y). (à 10^{-4} près)
b) On pose $z = \ln(y)$ et on considère alors la série statistique à deux variables (x, z).
Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_2 de cette série statistique (x, z). (à 10^{-4} près)
c) Depuis la création du club, le président compte sur une progression exponentielle du nombre d'adhérents. Pour ces quatre premières années, peut-on affirmer que ses espérances sont satisfaites ?
2. En 2019 une grande campagne de publicité a été organisée sur les réseaux sociaux du lycée.
Le nombre de participants totalisés à la fin de l'année est égal à 44.
Le président du club, après avoir observé l'ensemble des données de 2015 à 2019, affirme dans son discours de fin d'année : « Si on continue comme ça, l'année prochaine nous serons au moins 67 adhérents ! »
Qu'en pensez-vous ?

50 Distance d'arrêt

Physique

Le document de la sécurité routière ci-dessous donne les valeurs moyenne de la distance de réaction et de la distance de freinage selon la vitesse du véhicule, sur une route sèche, de jour et dans des conditions de visibilité normales.



A ▶ Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de réaction y

1. Construire dans un repère orthonormé le nuage de points correspondant à la série statistique (x,y) où x représente la vitesse du véhicule en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et y la distance de réaction en m. Et vérifier que sa forme invite à réaliser un ajustement affine.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine du nuage obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. Selon cet ajustement :
a) estimer la distance de réaction d'un véhicule roulant, en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
b) indiquer à quelle vitesse le véhicule devraitrouler pour que la distance de réaction soit inférieure à 3 m.

B ▶ Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de freinage y'.

1. Construire le nuage de points correspondant à la série statistique (x,y') où x représente la vitesse du véhicule en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et y' la distance de freinage en mètres.
2. On considère que le nuage peut être ajusté par une parabole d'équation $y' = ax^2$ où a est un réel non nul.
a) On pose $z = \sqrt{y'}$. Recopier et compléter le tableau.

y'	4,5	12,5	24,5	40,5	60,5	84,5
$z = \sqrt{y'}$						

b) À l'aide de la calculatrice déterminer l'équation de la droite de régression de z en x, et vérifier que si l'on arrondit les coefficients à 10^{-3}, on a $z = 0{,}071x$.
c) En déduire une expression de y' en fonction de x.
3. Pour les questions suivantes, on admet que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{200}$ est une bonne modélisation de la distance de freinage en fonction de la vitesse x du véhicule.
a) Estimer la distance de freinage d'un véhicule roulant en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
b) En vous aidant de la partie **A**, déterminer la distance totale d'arrêt pour un véhicule roulant en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

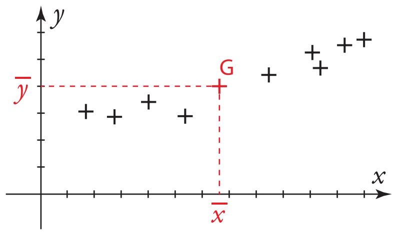
Préparer le BAC L'essentiel

Série statistique à deux variables

Variable x	x_1	x_2	x_3	…………	x_n
Variable y	y_1	y_2	y_3	…………	y_n

Représentation graphique

• **Nuage de points $M_i\ (x_i\ ;\ y_i)$**



• **Point moyen $G(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$**

Il a pour coordonnées :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{n}$$

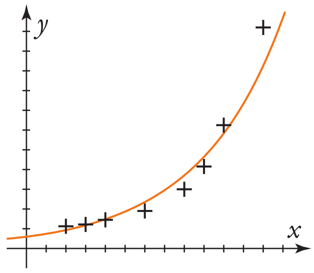
$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_n}{n}$$

Ajustement exponentiel

• Le nuage peut être approché par la courbe d'une fonction f de la forme :

$$f(x) = e^{ax+b}$$

où a et b sont des réels



• Pour déterminer la fonction f, on doit effectuer un changement de variable en posant :

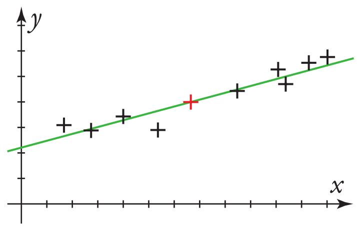
$$y' = \ln(y)$$

Puis on détermine l'équation de la droite de régression de y' en x.

Ajustement affine

Le nuage peut être approché par une droite d'équation

$$y = ax + b$$



Autres ajustements

De nombreuses autres courbes de fonctions usuelles peuvent servir d'ajustement d'un nuage de points :

- une parabole
- une hyperbole
- la fonction logarithme népérien
- la fonction racine carrée
- …

Droite de régression ou droite des moindres carrés

Il existe une droite d'ajustement qui minimise les écarts de chaque point du nuage par rapport à la droite. Son équation est :

$$y = ax + b$$

avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}$

et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

On peut l'obtenir rapidement à l'aide de la calculatrice.

Coefficient de corrélation linéaire

• Pour juger de la qualité d'un ajustement, il existe un nombre r compris entre -1 et 1.

• Plus il est proche de -1 ou de 1, meilleur est l'ajustement.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Représenter un nuage de points	Méthode 1	1, 2, 21, 22, 34
▶ Calculer les coordonnées d'un point moyen	Méthode 1	1, 2, 19, 20, 34
▶ Déterminer une droite de régression à l'aide de la calculatrice, d'un tableur ou autre logiciel	Méthode 2	3, 4, 22, 23, 24, 25
▶ Déterminer certaines courbes d'ajustement (courbe exponentielle notamment) en se ramenant par changement de variable à un ajustement affine	Méthode 3	5, 6, 11, 12, 26, 27, 28, 43, 45, 46, 47
▶ Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.	Méthode 4	7, 8, 30, 31, 42, 43, 45, 46, 47

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c09-07

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 51 à 53, on donne dans le tableau suivant le taux de natalité x (pour mille habitants) et l'espérance de vie y des femmes (en années) en 2015, dans dix pays répartis sur tous les continents. On considère que le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ associé à cette série statistique peut être ajusté par une droite.

Taux de natalité x_i (en ‰)	12	18	20	25	28	31	34	45	48	50
Expérance de vie y_i, (en années)	83	79	71	73	73	69	69	56	60	56

	A	B	C	D
51 Le point moyen G du nuage a pour coordonnées :	(30 ; 70,1)	(31,1 ; 68,9)	(29,5 ; 71)	(32 ; 69)
52 La droite d de régression de y en x a pour équation lorsqu'on arrondit les coefficients à 10^{-2} :	$y = -1{,}38x + 126{,}15$	$y = -0{,}66x + 89{,}70$	$y = -1{,}37x + 126{,}20$	$y = -0{,}67x + 89{,}67$
53 Si on prend la droite d pour modèle d'ajustement du nuage. On peut estimer que dans un pays où le taux de natalité est égale à 40‰, l'espérance de vie d'une femme serait égale à environ	57 ans	59 ans	61 ans	63 ans
54 On peut estimer que dans un pays où l'espérance de vie d'une femme est égale à 50 ans, le taux de natalité serait égal à environ :	57 ‰	59 ‰	61 ‰	63 ‰

55 Salaire mensuel

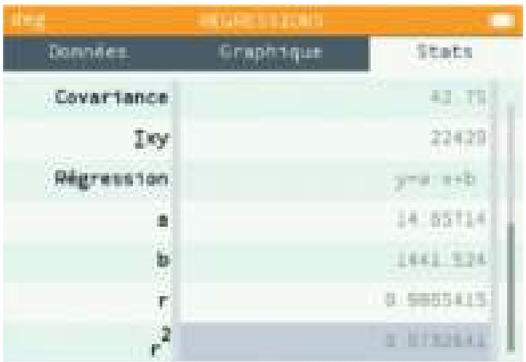
L'évolution du SMIC brut mensuel exprimé en euros entre 2014 et 2019, arrondi à l'entier, est donnée dans le tableau suivant :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
SMIC mensuel y_i	1 445	1 458	1 467	1 480	1 498	1 521

1. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.
On graduera l'axe des ordonnées à partir de la valeur 1 440, et on prendra comme unité 1 cm pour 10 euros.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur le graphique.

3. On saisit les données statistiques dans une calculatrice, et on affiche l'équation réduite de la droite d'ajustement du nuage de points $(x_i\,;y_i)$ par la méthode des moindres carrés. L'écran de la calculatrice affiche :



a) Écrire l'équation réduite de cette droite en arrondissant les coefficients à 3 décimales.

b) On admet que la droite passe par le point de coordonnées (4 ; 1 500).
Tracer cette droite sur le graphique.

4. En utilisant l'ajustement de la question précédente :

a) estimer la valeur du SMIC mensuel en 2023.
(Arrondir à l'entier).

b) déterminer à partir de quelle année le SMIC mensuel dépassera 1 700 euros.

Méthode 1 p. 227 Méthode 2 p. 227 Méthode 4 p. 231

56 Boisson énergisante

Une entreprise commercialise une boisson énergisante depuis 2010. Le tableau suivant donne le nombre de boissons vendues chaque année entre 2010 et 2019.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5
Nombre y_i de boissons vendues (en millions)	2,9	3,5	4,9	6,5	6,9
Année	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
Rang x_i	6	7	8	9	10
Nombre y_i de boissons vendues (en millions)	7,2	8,3	8,7	8,9	9,3

A ▶ Modélisation par un ajustement affine

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthonormal. Prendre comme unités 1 cm sur chaque axe.

2. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite *d* qui réalise un ajustement affine du nuage de points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ obtenu par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au centième.

b) Tracer la droite *d* dans le repère. En supposant que l'ajustement affine réalisé reste valable jusqu'en 2023, déterminer le nombre de boissons qui seront vendues en 2023.

B ▶ Modélisation par une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 20] par $f(x)=15-\dfrac{285}{(3x+20)}$.

1. a) Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau suivant (on arrondira les résultats au centième).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2,61									

b) Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [1 ; 20] ?

c) Démontrer que la dérivée de *f* est la fonction définie sur [1 ; 20] par $f'(x)=\dfrac{855}{(3x+20)^2}$.

d) Utiliser la question précédente pour valider ou non la conjecture émise à la question **1. b)**.

e) Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère que le nuage de points de la partie **A**.

2. *f* peut être considérée comme une modélisation valable des ventes de boissons énergisantes jusqu'en 2029, l'année 2010 étant prise comme année de rang 1.

a) À l'aide de la fonction *f*, faire une prévision des ventes pour l'année 2023.

b) À partir de quelle année la quantité de boissons vendues est-elle supérieure à 10,8 millions ?

Méthode 1 et Méthode 2 p. 227 Méthode 4 p. 231 Méthode 6 p. 233

TP et problèmes thématiques

Modèles définis par une fonction d'une variable

Thème 1

30 min

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

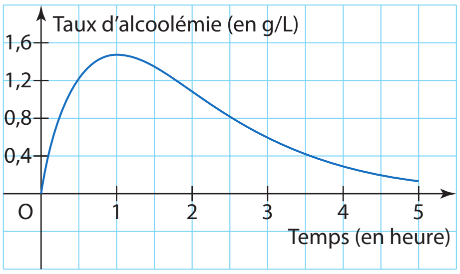
Spécialité : SVT

Vers le sup : Médical, paramédical

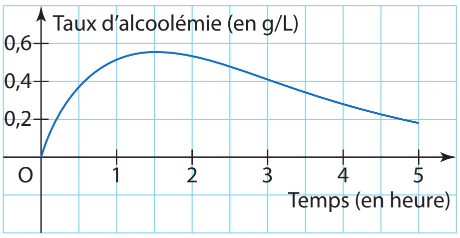
1 Alcool au volant

➡ **Objectif : Déterminer la durée minimale nécessaire, après une absorption d'alcool pour reprendre le volant sans risque.**

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une personne (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_1$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun et la courbe $\mathscr{C}_2$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

A ▶ Observation graphique

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.

2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux d'alcoolémie maximum dans le sang autorisé au volant est de 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

3. Depuis le 1er juillet 2015, le taux maximum d'alcoolémie dans le sang autorisé au volant pour un jeune conducteur (moins de deux ans après l'obtention du permis) est de 0,2 g/L. Dans chacun des deux cas, déterminer à partir de quel moment, après absorption de l'alcool, un jeune conducteur pourra reprendre le volant en respectant la législation.

B ▶ Modélisation

On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) pendant les cinq heures suivant l'absorption est modélisé en fonction du temps (exprimé en heures) :
– par une fonction f_1 lorsque l'alcool est absorbé à jeun ;
– par une fonction f_2 lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments.

On admet que :
– les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la partie **A** sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2 ;
– la fonction f_1 est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par $f_1(t) = 4te^{-t}$;
– la fonction f_2 est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par $f_2(t) = ate^{bt}$ où a et b désignent des nombres réels non nuls.

1. On désigne par f_2' la fonction dérivée de f_2 sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

a) Déterminer $f_2'(t)$.

b) On admet que $f_2'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. En déduire la valeur exacte de b.

2. On admet que $f_2(3) = 0{,}4$. Déterminer une valeur approchée au millième de a.

3. Déterminer, par le calcul, le temps au bout duquel le taux d'alcoolémie maximal est atteint et sa valeur lorsque l'alcool est absorbé à jeun.

4. Résoudre l'équation $f_1(t) = 0{,}985te^{-\frac{2}{3}t}$. Interpréter le résultat.

D'après Bac ES, Polynésie, septembre 2006.

Thème 1

20 min

2 Satellites dans l'espace

➡ Objectif : Déterminer le temps restant avant la rentrée atmosphérique d'un satellite.

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : Physique

Vers le sup : PCSI

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé **rentrée atmosphérique**.

Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètres, de son orbite.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

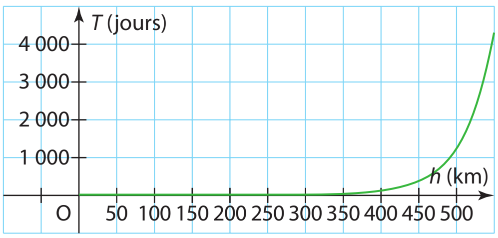
A ▶ Étude d'un premier satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0{,}012\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

Le nombre K est appelé coefficient balistique du satellite.

La fonction T associée à ce satellite est représentée ci-dessous.



1. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1 000 jours ?

2. Si l'orbite du satellite est située à 530 km, quel est le temps restant avant sa rentrée atmosphérique ?

3. Déterminer une valeur approchée au dixième du coefficient balistique de ce satellite.

B ▶ Étude du satellite Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique égal à 11.

La fonction T, associée à ce dernier, est donc définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h) = 0{,}132\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude $h = 575$ km.

Calculer le temps restant avant la rentrée atmosphérique de ce satellite. Arrondir au jour près.

2. Déterminer la limite de T en $+\infty$.

3. a) Déterminer la dérivée T' de T.

b) En déduire le sens de variation de la fonction T sur $[0\,;+\infty[$.

c) Quelle interprétation peut-on en déduire ?

4. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

a) Montrer que $T(h+10) = \mathrm{e}^{0{,}25} \times T(h)$.

b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

D'après Bac STI2D, Antilles Guyane juin 2019.

35 min

3 Aire maximale d'un trapèze

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3
- Calcul intégral .... Chapitre 6

Vers le sup : MPSI

➡ **Objectif : Déterminer l'aire maximale d'un trapèze inscrit à l'intérieur d'une parabole.**

A ▶ Recherche de *f*

On considère une fonction *f* du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère telle que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en 5 et l'axe des abscisses en –2 et 6.

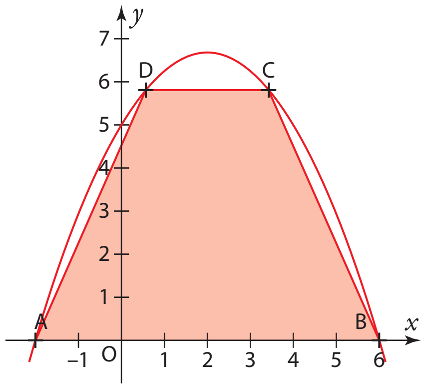
1. Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Étudier les variations de f et déterminer son axe de symétrie.

B ▶ Optimisation d'une aire

On admet, dans cette partie, que la fonction *f* est définie par $f(x) = -\dfrac{5}{12}x^2 + \dfrac{5}{3}x + 5$ sur l'intervalle [–2 ; 6].

On note A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses tels que $x_A < x_B$.
Soit $\mathscr{C}$ un point d'abscisse x de $\mathscr{C}$ tel que $x \in [2\ ;\ 6]$ et les points D de C tel que ABCD soit un trapèze.
L'objectif de cette partie est de déterminer l'abscisse du point C pour que l'aire du trapèze ABCD soit maximale.



1. Exprimer la longueur DC en fonction de x.

2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze ABCD en fonction de x.

3. Déterminer les variations de $\mathscr{A}$.

4. En déduire l'aire maximale du trapèze ABCD et l'abscisse du point C pour laquelle elle est obtenue.

15 min

4 Coût minimal moyen

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie

➡ **Objectif : Déterminer le minimum d'un coût moyen de la production d'un article.**

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 pièces par semaine.
On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction *f* définie sur l'intervalle [1 ; 7] par :

$$f(x) = 1{,}5x^3 - 9x^2 + 24x + 48$$

où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note C la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 7] représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros.
On a, par conséquent, pour tout x de [1 ; 7] :

$$C(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Déterminer la dérivée C' de la fonction C.

2. a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle [1 ; 7].
b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

D'après BAC ES, Amérique du Sud, novembre 2015.

Thème 1

5 Étude de marché

50 min

➡ **Objectif : Déterminer un bénéfice maximal.**

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie

Un producteur de légumes livre directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

A ▶ Coût marginal

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois.
Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10\,.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
Le coût marginal est défini comme la variation du coût liée à la production d'une unité supplémentaire.
On le note C_m.

1. Déterminer une expression de $C_m(x)$.

2. Calculer $C'(x)$.

3. Tracer, sur la calculatrice, les courbes représentatives de C_m et de C' sur l'intervalle [0 ; 10].
Que peut-on remarquer ?

B ▶ Variation du coût marginal

Dans cette partie, on assimile le coût marginal à la fonction dérivée de C, c'est-à-dire que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10] :

$$C_m(x) = C'(x).$$

1. Calculer $C_m(6)$.
Interpréter le résultat.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C.
a) Déterminer $C''(x)$.
b) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;a]$ inclus dans [0 ; 10] sur lequel la fonction C est convexe.
c) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ?
Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

C ▶ Bénéfice maximal

On admet que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R est exprimée en centaines d'euros.

1. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.

2. Vérifier que le bénéfice $B(x)$ en fonction de x est donné par :

$$B(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{5}{16}x^3 + 15x - 10\,.$$

3. Déterminer $B'(x)$.

4. Dans cette question, on cherche à déterminer le signe de $B'(x)$.
a) Calculer et déterminer le signe de $B''(x)$ sur [0 ; 10].
b) En déduire les variations de B' sur [0 ; 10].
c) Démontrer qu'il existe exactement deux valeurs α et β telles que $B'(\alpha) = B'(\beta) = 0$ avec $0 < \alpha < 7{,}5$ et $7{,}5 < \beta < 10$.
d) Donner une valeur approchée au centième de α et de β.
e) En déduire le signe de $B'(x)$ sur [0 ; 10].

5. Déterminer le nombre de paniers pour lequel le bénéfice est maximal et le calculer.

D'après Bac ES, Antilles, septembre 2014.

1

40 min

6 Évolution d'une population

➡ **Objectif : Déterminer si une espèce est en voie de disparition.**

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

Le hérisson européen est une espèce menacée dont l'étude de la population a été surtout menée au Royaume-Uni.
Les causes de cette disparition sont le trafic automobile, ainsi que l'utilisation de certains pesticides.
La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 35\mathrm{e}^{-0{,}053x}$$

modélise l'évolution, au Royaume-Uni, du nombre de hérissons (exprimé en millions).
Les années sont numérotés à partir de 1950 en prenant $x = 0$ pour l'année 1950, $x = 1$ pour 1951,…, $x = 10$ pour 1960 et ainsi de suite.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.
c) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Des études statistiques britanniques démontrent que la population de hérissons est passée d'environ 35 millions en 1950 à 1 million en 2017 au Royaume-Uni.
Retrouver ces résultats à l'aide du modèle proposé dans cet exercice.

4. a) Résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ en donnant le résultat arrondi à l'unité près.
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. En ne prenant en considération que le seul critère énoncé ci-dessous et les informations suivantes, expliquer dans quelle catégorie (vulnérable, en danger, en voie d'extinction) se situe le hérisson européen au Royaume-Uni depuis 1950.

L'Union Internationale pour la Conservation de la Nature (UICN) a établi plusieurs critères pour déterminer si une espèce est menacée ou non. En simplifiant, l'un d'entre eux précise :
- une espèce est « vulnérable » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 30 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes ;
- une espèce est « en danger » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 50 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes ;
- une espèce est en « voie d'extinction » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 80 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes.

La durée de vie d'une génération de hérissons européens est de 4 à 5 ans ; dans cet exercice, on prendra la valeur de 5 ans.

Sauvonslesherissons.fr et uicn.fr/liste-rouge-mondiale/

D'après BAC STAV, France métropolitaine, 2018.

Thème 2 Modèles d'évolution

1 TP Amortissement d'une dette par annuités constantes

TICE 30 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Spécialité : SES

Versw le sup : Économie

➡ **Objectif : Déterminer la durée d'un remboursement par annuités constantes.**

Isabelle contracte un prêt de 50 000 € le 1er septembre 2020 à un taux fixe de 1,5 %. Les intérêts de l'emprunt se calculent sur la somme qu'il reste à rembourser.

Elle a choisi de verser des annuités de remboursement constantes de 3 000 €.

Une partie servira à payer les intérêts et le reste à payer l'amortissement (remboursement) du prêt.

La première année, les intérêts représentent 1,5 % de 50 000 €, soit 750 €. Sur les 3 000 € qu'elle verse, elle ne rembourse réellement que 3 000 – 750 = 2 250. C'est l'amortissement. Il lui reste 50 000 – 2 250 = 47 750 € à rembourser après un an. L'année suivante, les 1,5 % d'intérêts s'appliqueront à 47 750 € l'année suivante.

On note :
- (u_n) la suite correspondant aux intérêts versés la n-ième année,
- (v_n) la suite correspondant à l'amortissement, c'est-à-dire la part du capital qui est remboursé la n-ième année,
- (w_n) la suite correspondant à la somme de capital encore dû au début de la n-ième année.

1. On a $w_1 = 50\,000$. Déterminer la valeur de u_1, v_1 et w_2.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, donner une relation entre u_n et v_n.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, donner une relation entre v_n, w_n et w_{n+1}.

On veut calculer le nombre d'années nécessaire pour rembourser le prêt.

4. Reproduire sur un tableur le tableau suivant.

	A	B	C	D	E
1	Année	Montant dû (w_n)	Amortissement (v_n)	Intérêts (u_n)	Annuité
2	1	50000			
3	2				

5. Remplir la colonne E.

6. Quelle formule faut-il rentrer : **a)** dans la cellule D2 ? **b)** dans la cellule C2 ? **c)** dans la cellule B3 ?

7. En étirant vers le bas, compléter : **a)** la colonne D. **b)** la colonne C. **c)** la colonne B.

8. Déterminer combien d'années il lui faudra pour rembourser son emprunt.

2 Décroissance radioactive

20 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

Spécialité : PC, SVT

Vers le sup : Médical, Paramédical

➡ **Objectif : Déterminer une demi-vie.**

L'iode 131 est un isotope radioactif utilisé en médecine pour les radiothérapies dans les cancers de la thyroïde.

Le patient doit prendre une gélule contenant 0,01 mg d'iode 131 au début de son traitement.

Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %.

On note u_n la masse d'iode 131 exprimée en mg présente dans le patient n jours après l'ingestion de la gélule.

1. Donner la valeur de u_0 et u_1.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer combien de jours sont nécessaires pour que la masse d'iode 131 dans le patient devient inférieure à 0,001 mg.

5. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

2

3 TP

TICE 30 min

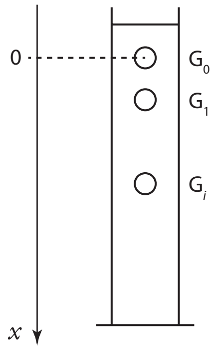
Déplacement d'un solide dans un liquide visqueux

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

Vers le sup : Physique

➡ **Objectif : Déterminer la vitesse limite ou l'angle d'un lancer.**

A ▸ Chute sans vitesse initiale



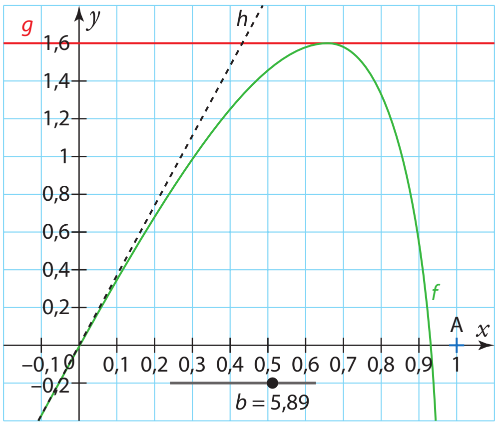
On lâche, sans vitesse initiale, une bille d'acier dans un tube contenant un liquide visqueux. On note m la masse de la bille, g l'intensité de la pesanteur, t le temps et v la vitesse de la bille. L'étude mécanique du système permet de démontrer que la fonction v vérifie $v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + \alpha g$ où k et α sont deux constantes positives dépendant de la matière de la bille et du liquide.

1. Déterminer la fonction v.

2. Montrer que la bille ne pourra pas dépasser une vitesse limite.

B ▸ Chute avec vitesse initiale

On lance vers le haut une bille d'acier dans un fluide visqueux. Les expériences en laboratoire montrent que la trajectoire obtenue est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$ où $(x, f(x))$ sont les coordonnées de la bille dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre.



1. a) Ouvrir GeoGebra. Créer un curseur b compris entre 0 et 10 et la fonction f.

b) En utilisant le curseur, quelle semble être la distance maximale que peut atteindre la bille ? Pourquoi ?

c) En utilisant le curseur, quelles semblent être les valeurs de b pour lesquelles la trajectoire n'est pas définie ?

d) Modifier le curseur pour que b varie entre 2 et 10.

e) En utilisant le curseur, déterminer les valeurs de b pour lesquelles la hauteur maximale de la bille est 1,6 mètre.

2. Par le calcul.

a) Déterminer une condition sur b rendant possible la modélisation de l'expérience par cette fonction f.

b) Montrer que la fonction f admet un maximum en x égale à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

c) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans la suite, on choisit $b = 5{,}65$ et on souhaite déterminer l'angle de tir θ de la bille pour qu'elle atteigne 1,6 mètre. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

a) Établir l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.

b) On note A le point de coordonnée (1 ; 0) et B le point de T_0 d'abscisse 1. Déterminer les longueurs du triangle OAB.

c) Exprimer $\cos\theta$ en fonction de b.

d) Déterminer θ.

Thème 2

Histoire des maths — 55 min

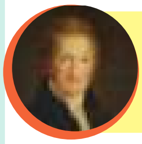
4 Dynamique des populations : modèle de Malthus

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

➡ **Objectif : Comprendre la modélisation d'un phénomène biologique, l'appliquer et étudier ses limites.**



C'est en 1798 que le Révérend Thomas Robert Malthus a formulé son « principe de population » : « Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique. Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique. »

A ▶ Étude discrète

On considère une population P dont la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est constante et égale à r exprimé sous forme décimale (r est appelé coefficient de croissance). On note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.

1. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

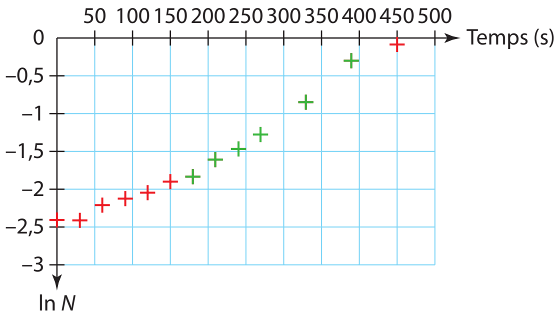
2. Exprimer P_n en fonction de n et P_0.

3. Représenter graphiquement P_n pour $r = 0{,}3$, $P_0 = 1$ puis $r = 1{,}2$ et $P_0 = 200$.

4. Par définition, $a^n = e^{n\ln a}$. Expliquer pourquoi le modèle de Malthus est aussi appelé le modèle exponentielle.

B ▶ Une application : population de la levure de bière

La levure est utilisée en agro-alimentaire pour la production de levain qui est ensuite un élément essentiel de la fabrication du pain. Diverses levures existent qui n'ont pas la même vitesse de croissance. Elles sont donc étudiées en laboratoire pour ensuite être commercialisées. Dans cet exemple, un milieu nutritif est ensemencé avec *Saccharomyces cerevisiae*. On dénombre le nombre de levures N au cours du temps t au fur et à mesure de la croissance. On trace la courbe en mettant le temps en abscisses et $\ln N$ en ordonnées.



1. Que peut-on dire de la courbe entre 175 et 400 s ?

2. On considère que la courbe est une droite entre 175 et 400. Déterminer un ajustement avec la droite des moindres carrées.

3. Expliquer pourquoi le modèle de Malthus s'applique entre $t = 175$ et $t = 400$ et définir les caractéristiques de la suite donnant le nombre de levures à chaque seconde.

C ▶ Les limites du modèle

En août 1944, des gardes côtes américains installent sur l'île Saint Matthieu à l'ouest des côtes de l'Alaska une station d'étude et introduisent 29 rennes.
En 1957, le biologiste David Klein poursuit des recherches sur cette île et constate qu'il y a 1 350 rennes.
On suppose que la croissance de la population est de type Malthusien.
On note P_0 le nombre de rennes en 1944.

1. Vérifier que $P_{13} = 1\,350$.

2. Déterminer r le coefficient de croissance à 10^{-3} près puis déterminer P_n en fonction de P_0, n et r.

3. En 1963, il constate en survolant l'île que les rennes sont environ 6 000. Est-ce que la modélisation précédente s'applique ?

4. En 1966 les rennes ne sont plus que 42. Expliquer

5. Expliquer la citation de Malthus en vous inspirant de l'exemple.

5 TP

Histoire des maths | TICE | 30 min

Dynamique des populations : modèle de Verhulst discret

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets................ Chapitre 1

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

➡ **Objectif : Étudier le modele de Verhust discret et son application.**

Pierre François Verhulst, vers 1840, reprend les travaux de Malthus en introduisant dans les équations l'interaction des populations avec leur environnement.

A ▶ Comprendre l'équation logistique

On considère une population P et on note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.

Dans ce modèle, la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est une fonction affine de la population P_n qui s'écrit $r - b\,P_n$ avec r et b deux réels positifs.

1. On note K la constante $\frac{r}{b}$. Montrer que $a - bP_n = r\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to 0} (r - bP_n)$. Quelle est l'interprétation biologique de r ?

3. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to K} (r - bP_n)$. Quelle est l'interprétation biologique de K ?

4. Établir que $P_{n+1} - P_n = rP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$ appelé suite logistique.

B ▶ Exemple de suites

1. Préparer un tableur comme ci-contre où les cases vertes sont renseignées par l'utilisateur et les cases roses calculent les termes de la suite.

a) Quelle formule entrer en D2 pour afficher la valeur renseignée par l'utilisateur en B3 ?

b) Quelle formule entrer en D3 pour calculer P_1 ? Étendre cette formule vers le bas.

2. À l'aide du tableur, représenter ces trois suites :
a) $K = 15$, $r = 0{,}6$ et $P_0 = 20$
b) $K = 15$, $r = 1.9$ et $P_0 = 14$
c) $K = 15$, $r = 2.4$ et $P_0 = 12$.

3. Décrire le comportement de ces trois suites.

	A	B	C	D
2	$K =$		Rang de la suite P_n	Valeur de P_n
3	$r =$		0	
4	$P_0 =$		1	
5			2	
6			3	
7			4	
8			5	
9			6	
10			7	
11			8	
12			9	
13			10	

C ▶ Évolution de la population d'éléphants

Àla fin du XIX^e, la population des éléphants est en voie d'extinction et un parc naturel entre l'Afrique du Sud et le Mozambique est créé : le parc Kruger. Le tableau ci-dessous indique les effectifs observés.

	1905	1923	1930	1939	1945	1950
Eff. observés	10	13	29	450	980	3010

	1960	1970	1980	1990	2000
Eff. observés	5800	6500	7400	7200	7310

1. Représenter cette suite.

2. Établir les caractéristiques de la suite logistique permettant de modéliser l'évolution de la population d'éléphant.

Thème 2

TICE 30 min

Contenus associés :
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5

Spécialités : SVT, SES
Vers le sup : Économie

6 TP Modèle de Verhulst continu

➡ **Objectif : Utilisation de l'équation différentielle logistique en économie.**

A ▸ Du discret au continu

On note $N(t)$ la population de la Terre à l'instant t mesuré en secondes. On considère, aux vues du grand nombre de personnes au monde (par exemple 139 millions de naissances en 2014), que l'accroissement de la population par seconde est constant, c'est-à-dire que $N(t+k) - N(t) = k(N(t+1) - N(t))$.

1. Que peut-on dire de $\dfrac{N(t+h)-N(t)}{h}$ quand h tend vers 0 ?

On suppose que les taux de naissances (noté α) et de décès (noté β) sont proportionnels à la taille de la population.

2. Exprimer $N'(t)$ en fonction de $N(t)$, α et β.
Résoudre l'équation différentielle.
Quel modèle d'évolution reconnaissez-vous ?
Établir le modèle de Verhulst continu à partir du modèle de Verhuslt discret.

B ▸ En économie

En mars 2019, deux ingénieurs ont mis au point un produit alimentaire révolutionnaire composé pour l'essentiel d'insectes. Ils sont parvenus à créer leur start-up et à commercialiser le produit. Devant le succès croissant de ce produit, la société a décidé de se développer en formant un réseau de franchises. Elle prévoit que le nombre de franchises croîtra de façon logistique avec un taux de croissance intrinsèque r égal à 0,4 et une capacité maximale de franchises K égale à 1 000 (fixée par la législation en vigueur). L'objectif est de retrouver l'expression de la fonction logistique associée.

1. On compte initialement 100 franchises. En notant $N(t)$ le nombre de franchises à la date t, écrire l'équation différentielle logistique associée.

2. On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul. On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

Vérifier que $P'(t) = \dfrac{-N'(t)}{N^2(t)}$ puis montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

En déduire l'expression de $P(t)$, puis celle de $N(t)$.

Montrer que les solutions sont les fonctions de la forme $N(t) = \dfrac{1\,000}{1+9e^{-0{,}4t}}$.

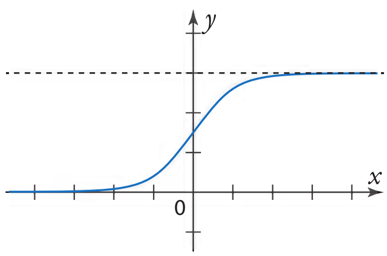
3. Combien de temps faudra-t-il pour que la société puisse compter 500 franchises ?

C ▸ Comportement des fonctions logistiques

Soit $K > 0$ et $r > 0$.

1. Montrer que $f(t) = K\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{K}{y_0}-1\right)e^{-rt}}$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = ry\left(1-\dfrac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



2. Pour chacune des constantes suivantes, représenter les solutions. Que constate-t-on ?

$K = 15$, $r = 0{,}6$ et $y_0 = 20$ $\qquad K = 15$, $r = 1{,}9$ et $y_0 = 14$ $\qquad K = 15$, $r = 2{,}4$ et $y_0 = 12$.

Histoire des Maths Algo 50 min

7 TP Modèle proie prédateur

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

➡ **Objectif : Établir un modèle proie prédateur à partir des données observées puis l'appliquer.**

A ▸ Évolution d'une population de lapins sans prédateur

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Leonardo Fibonacci – *Liber Abaci* – 1202

On note L_n le nombre de couples de lapins à la fin du n-ième mois et on précise que le premier couple est à son 1er mois d'existence.

1. À partir de combien de temps un couple devient fertile ? Combien de temps dure une gestation ?

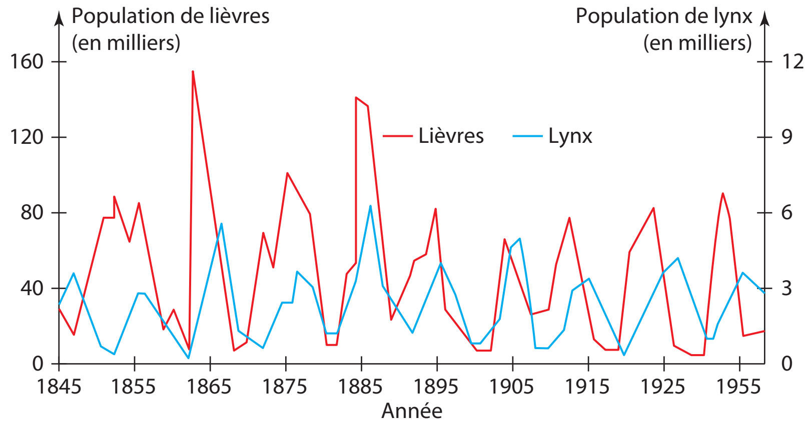
2. a) Justifier que $L_1 = 1$, $L_2 = 1$ et $L_3 = 2$.
b) Déterminer les huit premiers termes de la suite.

3. Exprimer L_{n+2} en fonction de L_n et L_{n+1}.

4. Représenter cette suite. Décrire l'évolution de la population de lapins.

B ▸ Évolution de la population du lièvre et du lynx dans la baie de Hudson

La compagnie de la baie de Hudson a réalisé des comptages de lièvres et de lynx entre 1845 et 1955.



1. Étudier l'évolution de la population des lièvres puis des lynx. Interpréter avec le contexte.

On note (u_n) la population des lynx et (v_n) la population des lièvres à l'année n. La population au temps $n + 1$ est la population au temps n auquel on ajoute les naissances et on ote les décès.

2. En l'absence de lynx, on suppose que les lièvres prolifèrent sans décès. On note a ($a > 0$) le taux de reproduction des lièvres sous forme décimale entre les années n et $n + 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3. En l'absence de lièvre, on suppose que les lynx déperissent sans naissance. On note c le taux de mortalité sous forme décimale des lynx entre les années n et $n+1$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

4. On suppose que le taux de mortalité des lièvres est proportionnel au nombre de lynx et que le taux de natalité des lynx est proportionnel aux nombres de lièvres. Comment exprimer le taux de mortalité des lièvres et le taux de natalité des lynx ?

5. Expliquer le système de suites suivant où a, b, c, d sont des constantes positives

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-c)u_n + du_nv_n & \text{lynx} \\ v_{n+1} = (1+a)v_n + bu_nv_n & \text{lièvres} \end{cases}$$

6. Les études biologiques montrent :
- qu'en l'absence de lynx, la population des lièvres augmentent de 5 % ;
- qu'en l'absence de lièvre, la population de lynx diminue de 3 %.

On suppose de plus que $b = 0{,}001$ et $d = 0{,}0002$.
Proposer une feuille de tableur permettant de calculer le n-ième terme des deux suites.

7. Représenter sur un même graphique les suites u_n et v_n en fonction de n pour $n = 0$ à $n = 450$. Comparer les résultats avec la question **1**.

Thème 3

Approche historique de la fonction logarithme

Contenus associés :
• Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4
Spécialité : SES
Vers le sup : Économie

1 Tables d'intérêt

45 min

➡ **Objectif : Déterminer une méthode rapide pour trouver le nombre d'années permettant de multiplier par k un capital donné.**

A ▶ Soit un capital C placé à un taux t d'intérêts composés. On cherche une méthode rapide pour déterminer approximativement le nombre d'années permettant de tripler ce capital.

1. a) Soit la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x).$$

Calculer $h'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de h sur $]-1\,;+\infty[$.

c) En déduire le signe de h sur $]-1\,;+\infty[$.

2. a) Soit la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-\ln(1+x).$$

Calculer $g'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de g sur $]-1\,;+\infty[$.

c) En déduire le signe de g sur $]-1\,;+\infty[$.

3. À l'aide des questions **1.** et **2.**, montrer que, pour tout $x \geqslant 0$:

$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.$$

4. Pour des petites valeurs de x on peut considérer que $\ln(1+x)\approx x$ avec un majorant de l'erreur égal à $\frac{x^2}{2}$.

Expliquer pourquoi, afin de calculer mentalement le nombre d'années permettant de tripler un capital, on peut utiliser la règle : « Un capital triple au bout de $\frac{110}{t}$ années, avec t le taux d'intérêts, valable pour de petites valeurs de t. »

B ▶ On rappelle qu'un capital C placé à un taux de t % en composition annuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$; un capital C placé à un taux de t % en composition mensuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{12}\right)}{100}\right)^{12}$.

1. En prenant $t = 5$ % et $C = 1\,500$ €, comparer les deux types de placements précédemment décrits.

2. En finance, on utilise le taux d'intérêt continu. On peut l'imaginer comme étant une périodicité infiniment petite. Soit un capital C placé à un taux de t % en composition sur une période m ; le capital C' au bout d'une année sera

$$C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^m.$$

a) En utilisant le résultat $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$

expliquer pourquoi $\lim\limits_{m\to+\infty} C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^m=C\mathrm{e}^{\frac{t}{100}}$.

b) Avec un placement à intérêt continu, quel doit être le taux d'intérêt afin de pouvoir doubler son capital en un an ?

c) De façon générale, avec un placement à intérêt continu, quel doit être le taux d'intérêt afin de :

• multiplier par k son capital en un an ? Le taux d'intérêt trouvé dépendra de k.

• augmenter son capital de 70 % au bout de 5 ans ?

3

45 min

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2

2 Relation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$

➡ **Objectif : Découvrir une autre approche de la fonction ln.**

On cherche à déterminer les fonctions qui vérifient la relation fonctionnelle suivante :

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

A ▸ Recherche de solutions particulières

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui vérifient la relation fonctionnelle ci-dessus ?

a) La fonction nulle.

b) La fonction linéaire $y = x$.

c) La fonction carrée.

B ▸ Recherche de quelques propriétés

1. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle, si elle est définie en 0, que vaut $f(0)$?
Montrer que, dans ce cas, il s'agirait nécessairement de la fonction nulle.

> **Coup de pouce** $f(0) = f(0 \times 0)$

2. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle, montrer que :

$$f(1) = 0.$$

3. Quelle condition doit avoir une fonction vérifiant cette relation fonctionnelle afin d'être paire ?

4. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle :

a) Montrer que, pour $x \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

> **Coup de pouce** $f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right)$

b) En déduire le signe de cette fonction dans le cas où f est paire.

> **Coup de pouce** Faire une démonstration par disjonction de cas (si $x > 1\ldots$).

5. Montrer par récurrence que $f(x^n) = n \times f(x)$.

C ▸ Cas particuliers des fonctions continues

On suppose dans la suite de l'activité que la fonction vérifiant cette relation fonctionnelle est non nulle et continue.
On considérera les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $h > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}.$$

3. En déduire que $f'(x) = f'(1)\ \dfrac{1}{x}$.

D ▸ Cas particulier de la fonction continue sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant $f'(1) = 1$

1. À l'aide de la réponse à la question précédente, déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Avec le même type de raisonnement, en déduire le signe de f selon les valeurs de x.

3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

> **Coup de pouce**
> - Prendre $x = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(2^n) = +\infty$.
> - Pour la limite en 0, utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

▶ **Remarque** On appelle ln la fonction vérifiant ces conditions.

Thème 3

Algo — 45 min

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

3 TP Approximation de ln 2 par dichotomie

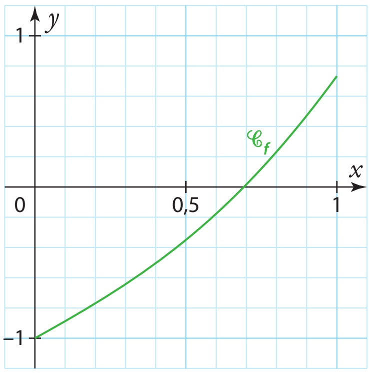
➡ **Objectif : Déterminer une valeur approchée de ln 2 à une précision 10^{-p} près, $p \in \mathbb{N}$.**

La méthode utilisée sera la méthode par dichotomie qui repose sur le théorème suivant.

▶ **Théorème** Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.

Dans la suite, on notera f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = e^x - 2.$$



1. Écrire la fonction **Python** `f` de paramètre un flottant `x` correspondant à la fonction numérique `f` mentionnée ci-dessus et qui retourne donc `e**x–2` (une ligne de code).

2. a) Écrire la fonction **Python** `Dicho` ayant pour paramètres des flottants `a` et `b`, une fonction `f` (vérifiant les hypothèses du théorème énoncé) et un entier naturel `n` qui retourne une valeur approchée de α, solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-p} près, à partir du programme incomplet écrit ci-dessous.

```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a>...:
        m=(a+b)/2
        if f(m) ...:
            a=...
        else :
            b=...
    return...
```

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) En déduire une valeur approchée de ln 2 à 10^{-5} près à l'aide de la fonction `Dicho`, en saisissant sur la console `Dicho(a,b,f,n)` en ayant pris le soin de remplacer a, b et n par les valeurs adéquates.

3. a) Modifier le programme **Python** de façon à le rendre plus performant et qu'il puisse être également utilisé dans le cas d'une fonction non nécessairement croissante.

b) Le tester dans le cas où $f(x) = 2 - e^x$, la fonction f est ainsi décroissante, mais la solution de l'équation $f(x) = 0$ est toujours ln 2.

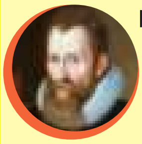
```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a>...:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(b)>0:
            a=...
        else :
            b=...
    return...
```

TICE | Algo | Histoire des maths | 45 min

Contenu associé :
- Fonction logarithme népérien .....Chapitre 4

4 TP Algorithme de Briggs

Objectif : Construire une table des logarithmes décimaux.


Napier

Henry Briggs (1556-1630) est un mathématicien anglais qui fut coinventeur, avec John Napier, alias Neper, des logarithmes décimaux. On donne ci-dessous une description de sa méthode permettant de trouver une valeur approchée de log 5.
Cette méthode de Briggs a permis de construire la table des logarithmes décimaux publiée en 1624 et expliquée par Euler en 1748.

A ▸ Explication de la méthode de Briggs par Euler

DOCUMENT Table des logarithmes lienmini.fr/maths-t03-01

1. Télécharger la table des logarithmes à l'aide du lien ci-contre.

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, et proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 et 10, dont les logarithmes sont 0 et 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, et on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.
Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver Z = 5,000 000 ; à quoi répond le logarithme cherché 0,678 970 ; en supposant la base logarithmique $a = 10$.
Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à-peu-près. C'est de cette manière que Briggs et Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale*.

2. On appelle moyenne géométrique c de deux nombres a et b, le nombre c vérifiant $c = \sqrt{ab}$.
À partir de C, tous les nombres de la 1re colonne correspondent à des moyennes géométriques de deux nombres, expliquées en 3e colonne (ex. $C = \sqrt{AB}$), et tous les nombres de la 2e colonne correspondent à la moyenne arithmétique des deux nombres correspondants dans la 2e colonne (ex. $\log C = \dfrac{\log A + \log B}{2}$ où lC correspond à $\log C$).
La suite formée par les moyennes géométriques en 1re colonne converge vers 5 et la suite formée par les moyennes arithmétiques en 2e colonne converge vers log 5.
Avec cette méthode, détailler le calcul permettant d'obtenir le nombre D puis lD.

3. Le processus semble identique de C à F ; pourquoi diffère-t-il pour le calcul de G ?

4. Après plusieurs itérations de la méthode, on se rapproche du nombre 5 avec Z et une valeur approchée de log 5 est lZ.
Expliquer alors pourquoi il apparaît dans le texte la phrase :
« Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à peu près. »

B ▸ Construction de la table à l'aide d'un algorithme

```
A ← 1
B ← 10
lA ← 0
lB ← 1
Tant que B − x > 10^−p faire
        Si √AB ≤ x alors
             A ← √AB
             lA ← (lA + lB)/2
        Sinon
             B ← √AB
             lB ← (lA + lB)/2
        Fin si
Fin du Tant que
Afficher lB
```

1. On veut que l'algorithme ci-contre permette de déterminer une valeur approchée de log 5, avec une précision de 10^{-5} près. Par quelles valeurs faudrait-il alors remplacer x et p ?

2. Programmer cet algorithme en langage **Python** et vérifier que l'on retrouve effectivement la valeur approchée de log 5 annoncée dans la table de la partie A.

Coup de pouce Lors de la saisie de cet algorithme, il faudra :
1. importer le module `math`.
2. utiliser `math.sqrt` pour la racine carrée.

Thème 3

TICE | Algo | Histoire des maths | 45 min

5 TP Raréfaction des nombres premiers

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien ..... Chapitre 4

➡ **Objectifs : Faire le lien entre la raréfaction des nombres premiers et la fonction ln.**

Au XIX^e siècle, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) a réussi à démontré la raréfaction des nombres premiers : plus le nombre entier naturel n est grand, plus la proportion $\frac{\pi(n)}{n}$, avec $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n, est petit et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Sa démonstration repose sur une approximation de $\pi(n)$, à savoir $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$.
Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), aurait découvert également cette relation à l'âge de 15 ans, en 1792.


Gauss

1. On donne ci-dessous un tableur dans lequel on peut lire : n un nombre entier naturel, $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n et $E(n) = \frac{n}{\pi(n)}$.

	A	B	C	D
1	n	$\pi(n)$	$E(n)$	
2	10	3	3,333333333	
3	100	25	4	0,666666667
4	1000	168	5,952380952	1,952380952
5	10000	1229	8,136696501	2,184315549
6	100000	9592	10,42535446	2,288657961
6	1000000	78498	12,73917807	2,313823606
6	10000000	664579	15,04712006	2,307941988
6	100000000	5761455	17,35672673	2,309606673

a) Retrouver mentalement la valeur de la cellule B2.
b) À partir de la cellule B3, la détermination de nombre premiers inférieurs à n est plus longue ; retrouver les valeurs des cellules B3 à B6 à l'aide d'un programme **Python**.
Compléter à cet effet le programme ci-après.

```
from math import*
def test_premier(N):
    b=0
    if N==1 :
        b=1
    else :
        for i in range(…,…):
            if N%i==…:
                b=1
    return …
def nom_nombres1ers(M):
    compteur=0
    for i in range(2,…):
        n=test_premier(i)
        if n==0 :
            compteur=…
    return …
```

2. Télécharger la feuille de calculs de la question **1.** à partir du lien ci-contre.

TICE
Fichier Excel
lienmini.fr/maths-t03-02

a) Quelle formule doit-on saisir en C2 et copier glisser vers le bas ?
b) Quelle formule doit-on saisir en D3 et copier glisser vers le bas afin de calculer la différence de deux termes successifs ?
c) Compléter les colonnes C et D.
La suite $E(n)$ semble avoir un comportement qui se rapproche d'une suite (u_n). Quelle est la nature de cette suite ?
d) Soit (v_n) la suite définie par la colonne A, on a $v_1 = 10$; $v_2 = 100$…
Quelle est la nature de cette suite ?
On observe ainsi un lien entre une suite géométrique et une suite arithmétique, l'idée de la transformation d'un produit en somme, d'où la conjecture d'une progression arithmétique dont la raison serait de la forme $\ln(a)$.
e) Compte-tenu de la raison déterminée pour la suite (v_n), conjecturer la raison de la suite (u_n).
f) Vérifier cette conjecture à partir des valeurs obtenues à l'aide du tableur.

3. Rajouter en colonne E le calcul de $\ln(n)$ et vérifier le résultat découvert par Legendre et Gauss.

Calculs d'aires

Thème 4

Histoire des maths | TICE | 55 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Calcul intégral .... Chapitre 6

1 TP Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

➡ **Objectif : Comprendre l'algorithme qui approche l'aire du secteur parabolique à l'aide de triangles. Démontrer la formule à l'aide des suites géométriques.**

A ▸ Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

Soit la parabole d'équation $y = (x + 2)^2$ et A et B les points de la parabole d'abscisses respectives -4 et 1.

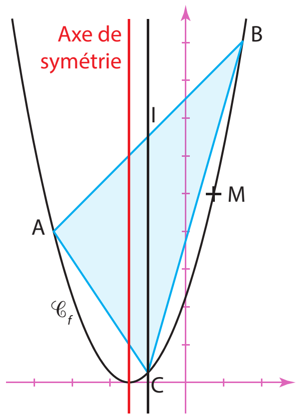
1. À l'aide de GeoGebra, tracer cette parabole, placer les points A, B et I le milieu de [AB].

2. Placer C le point de la parabole et de la droite passant par I et parallèle à l'axe de symétrie de la parabole.
Quelle est la valeur de l'aire de ABC (noté a_0) affichée par le logiciel ?

3. Créer un point M libre sur la parabole et afficher l'aire du triangle ABM. Vérifier que ABC est bien le triangle de base [AB] d'aire maximale.

4. Calculer $\frac{4}{3}a_0$ et comparer ce nombre à l'aire $\mathscr{A}$ du secteur bleu clair.

Étape 0



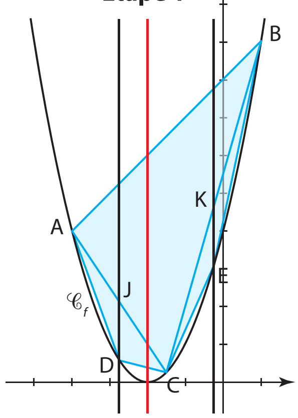
B ▸ Démonstration de l'égalité $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ Aire (ABC)

Archimède démontre ce résultat : il approche l'aire $\mathscr{A}$ en construisant une suite (a_n) des sommes d'aires de triangles construits à l'intérieur de ce domaine.

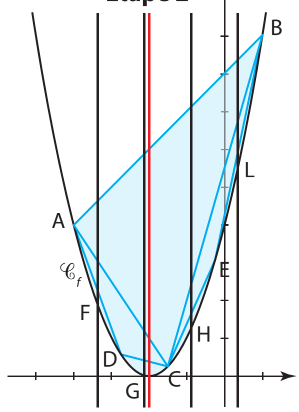
1. On recommence le procédé de construction de triangles (vu en **A**) avec les deux secteurs de parabole de bases [AC] et [CB].
a) Tracer les triangles ACD et CBE d'aire maximale dans ces deux secteurs et constater que ACD et CBE ont la même aire.
b) On note a_1 la somme des aires de ces deux triangles. Vérifier que $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.
c) On contruit les triangles d'aire maximale dans chacun des secteurs de parabole de bases [AD], [DC], [CE] et [EB]. On note a_2 la somme des aires de ces quatre triangles.
Calculer l'aire des quatre triangles puis $\frac{a_1}{a_2}$.
d) On note (a_n) l'aire des triangles obtenus à l'étape n. Quelle semble être la nature de la suite (a_n) ?
e) Que représente $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$?

2. Quelle que soit la parabole, on peut construire avec le même procédé de tels triangles. On note a_0 l'aire de ABC et a_n la somme des aires des triangles construits à l'étape n. On admet que la suite (a_n) est toujours une suite géométrique de même raison q.
a) D'après l'exemple précédent, préciser la raison q puis exprimer a_n en fonction de a_0 et n.
b) Exprimer $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ en fonction de a_0 et n.
c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ et conclure que $= \frac{4}{3}a_0$.

Étape 1



Étape 2



Thème 4

Histoire des maths | TICE | 30 min

2 TP Quadrature de l'hyperbole

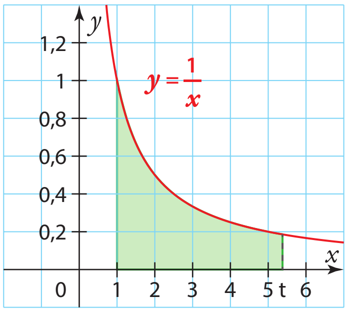
Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5
- Calcul intégral .... Chapitre 6

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique

➡ **Objectif : Étudier des algorithmes permettant de calculer l'intégrale de la fonction inverse.**

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et t un réel supérieur à 1. On note $I(t)$ l'aire sous la courbe de la fonction f entre 1 et t.



A ▸ Méthode de Grégoire de Saint-Vincent

1. Montrer que pout tout $t \geqslant 1$, $I(t) = \ln t$.

2. On considère la suite (t_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 1$.

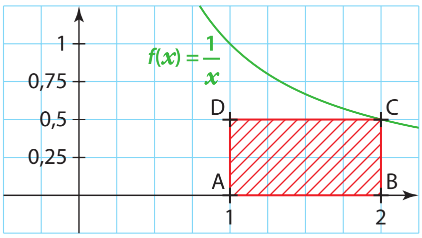
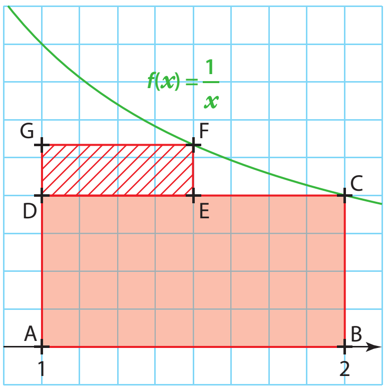
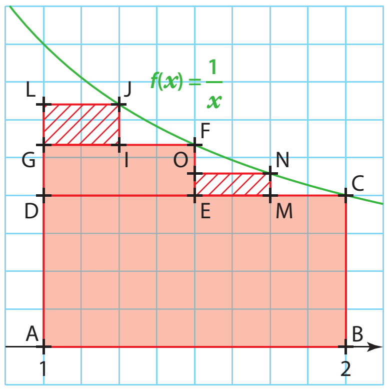
a) Donner l'expression de t_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.

b) Monter que $I(t_{n+1}) = I(t_n) + \ln 2$. Quelle est la nature de la suite $I(t_n)$?

c) Expliquer la phrase de Grégoire de Saint Vincent : « Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique ».

B ▸ Calcul d'une valeur approchée de ln 2 par la méthode de Brouncker

Lord William Brouncker (1620-1680) propose d'approcher $I(2) = \ln 2$ par des aires de rectangles situés sous l'hyperbole.

Étape 1	Étape 2	Étape 3
 A(1 ; 0) B(2 ; 0) C(2 ; 0,5) D(1 ; 0.5)	 E est le milieu de [DC] F appartient à l'hyperbole	 I et M sont les milieux de [GF] et [EC] J et N appartiennent à l'hyperbole

1. a) En suivant le même procédé, combien de rectangle devrait-on construire à l'étape 4 ?

b) Calculer l'aire des rectangles ABCD, DEFG, GIJL et EMNO.

c) Montrer que chaque aire de rectangle peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2i \quad (2i - 1)}$ avec i un entier que l'on précisera.

d) Donner une estimation de ln2.

2. On admet que les n premiers rectangles construits vont tous avoir une aire de la forme $\frac{1}{2i \quad (2i - 1)}$ avec i entier compris entre 1 et n.

a) Écrire un programme en **Python** permettant de calculer la somme des n premiers rectangles.

b) Exécuter le programme pour $n = 100$. Que constate-t-on ?

TICE 30 min

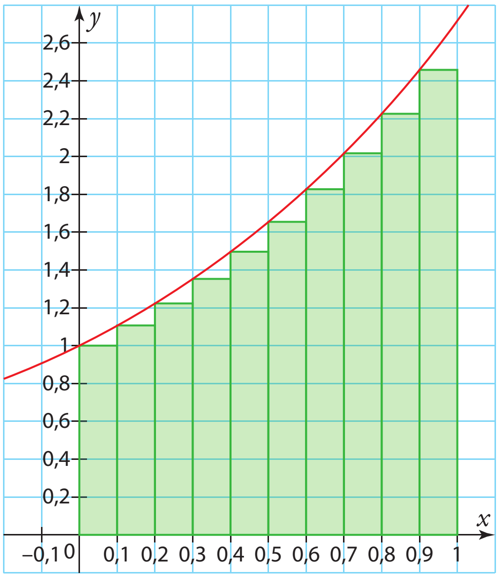
Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Vers le sup :

3 TP Approximation de l'air sous la courbe de la fonction exponentielle

➡ **Objectif : Approcher l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle.**

Soit f la fonction définit sur $[0\ ,\ 1]$ par $f(x) = e^x$. On souhaite approcher l'aire sous la courbe entre 0 et 1.



1. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en 10 intervalles de même amplitude. On définit une suite de rectangles inférieurs comme ci-contre. La figure est composée de 10 rectangles, on note U_{10} l'aire des rectangles inférieurs.

a) Quelle est la largeur de chaque rectangle ?

b) Quelles sont les longueurs des deux premiers rectangles ?

c) Écrire U_{10} en fonction de f puis donner une valeur approchée de U_{10} à 10^{-2}.

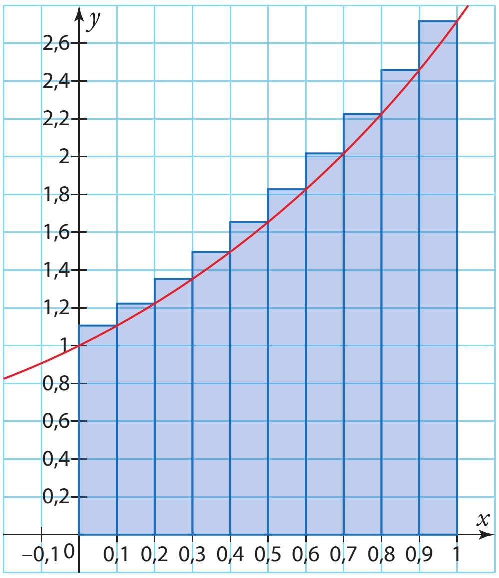
2. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en n intervalles de même amplitude et on construit la suite des rectangles inférieurs.

a) Écrire U_n en fonction de n et de f.

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note (u_m) la suite définit pour $m \geqslant 0$ par $u_m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Quelle est la nature de la suite (u_m) ?

c) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_9$ et déterminer U_{10}.

d) Exprimer U_n en fonction de u_m puis exprimer U_n en fonction de n.



3. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en 10 intervalles de même amplitude. On définit une suite de rectangles supérieurs comme ci-contre. La figure est composée de 10 rectangles, on note V_{10} l'aire des rectangles supérieurs.

a) Exprimer V_{10} en fonction de U_{10}. Donner une valeur approchée de V_{10} à 10^{-2} près.

b) Déterminer la monotonie des suites (U_n) et (V_n).

c) Exprimer la suite $(V_n - U_n)$ en fonction de n puis déterminer sa limite. Les suites (U_n) et (V_n) sont appelées suites adjacentes.

4. On appelle erreur de mesure la suite, notée (E_n), définit par la différence entre l'aire exacte $\mathscr{A}$ et l'aire approchée par la suite (U_n). On définit de même (F_n) par la différence entre l'aire exacte $\mathscr{A}$ et l'aire approchée par (V_n).

a) Calculer E_{10} et F_{10}.

b) Déterminer n pour que l'erreur de mesure E_n, soit inférieure à 10^{-5}.

c) Déterminer n pour que l'erreur de mesure V_n soit inférieure à 10^{-5}.

d) On note (W_n) la suite définit par $W_n = \dfrac{U_n + V_n}{2}$. Déterminer n pour que l'erreur de mesure soit inférieur à 10^{-5}.

Thème 4

4 TP Estimation de l'aire sous la courbe par la méthode de Monte-Carlo

TICE 45 min

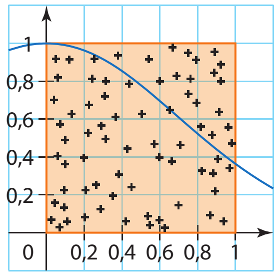
Contenus associés :
- Calcul intégral .... Chapitre 6
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique

➡ **Objectif : Estimer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle [0 ; 1].**

A ▸ Interprétation de la situation



On considère le carré C de côté 1 et le domaine hachuré D sous la courbe de la fonction *f* comme illustré ci-contre.

Soit M(x, y) un point situé à l'intérieur du carré C.

1. À quelles conditions portant sur x et y, le point M :

a) est-il à l'intérieur du carré C ?

b) est-il à l'intérieur du domaine D ?

2. Une expérience aléatoire consiste à placer au hasard un point M à l'intérieur du carré C.

a) Quelles sont les issues possibles de cette expérience aléatoire ?

b) Montrer que la probabilité que ce point appartienne au domaine D est donnée par $p = \dfrac{\text{Aire (D)}}{\text{Aire (C)}}$.

c) Justifier alors que cette probabilité p est égale à $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

3. On répète n fois cette expérience aléatoire de façon indépendante. On compte le nombre N de fois où le point M appartient au domaine D.

a) Quelle est alors la fréquence f_M de l'événement « M appartient au domaine D » ?

b) Quel lien existe-t-il entre la probabilité p et la fréquence f_M ?

B ▸ Simulation

1. L'algorithme ci-contre permet de simuler n fois cette expérience aléatoire et de compter le nombre de fois où le point M appartient au domaine D.

La valeur de n est saisie par l'utilisateur.

a) Compléter l'algorithme.

b) Quel est le résultat obtenu en sortie ?

c) Adapter l'algorithme pour que S soit une valeur approchée du domaine D.

```
n←?
S←0
Pour i allant de 1 à …
    x←Nombre aléatoire entre 0 et 1
    y←Nombre aléatoire entre 0 et 1
    Si y⩽ …
        alors S←S+1
    Fin si
Fin Pour
Afficher S
```

2. a) Compléter le programme **Python** ci-contre, traduction de l'algorithme précédent.

b) Quelle est la valeur obtenue pour $n = 1\,000$? En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

c) Après plusieurs essais, obtient-on toujours la même valeur ? Sinon, comment l'expliquer ?

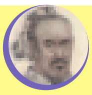
d) Trouver une valeur de n pour laquelle on obtient les trois premières décimales de façon stable.

```python
from math import *
from random import *
N = ................
C = 0
for k in range (N):
    x = ................
    y = ................
    if y <= exp(- x ** 2):
        C = C + 1
resultat = C/N
print (resultat)
```

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets................ Chapitre 1
- Calcul intégral .... Chapitre 6

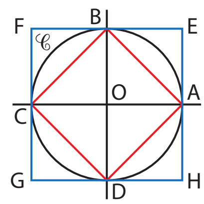
5 Approximation de π par les aires

➡ **Objectif : Effectuer une approximation de l'aire du cercle par des polygones inscrits et exinscrit.**



Dans « *L'art mathématique en neuf chapitres*», le mathématicien chinois Liu Hui (220 – 280) donne une valeur approchée du nombre irrationnel π, en encadrant l'aire d'un disque unité entre les aires de deux polygones réguliers. Le premier polygone est inscrit dans le cercle et a donc une aire inférieure à π, le second est exinscrit, son aire est donc supérieure à π.

A ▸ Entre deux carrés



Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le carré ABCD inscrit dans le cercle et le carré EFGH tangent au cercle en A, B, C et D.

1. Calculer la longueur AB.

2. Calculer les aires des deux carrés puis en déduire un premier encadrement de π.

B ▸ Entre deux hexagones réguliers

Ci-dessous, l'hexagone ABCDEF est inscrit dans $\mathscr{C}$ (**Figure** ①). L'hexagone IJKLMN est exinscrit, soit tangent à $\mathscr{C}$ en A, B, C, D, E et F. (**Figure** ②)

Figure ①

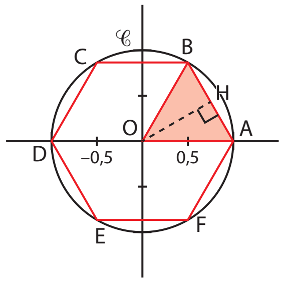
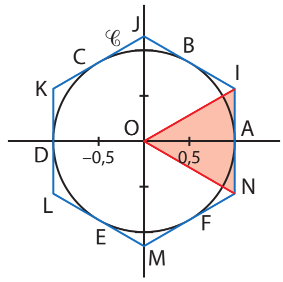


Figure ②

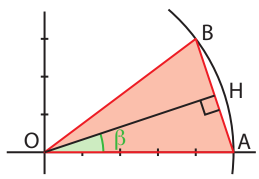


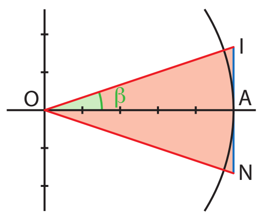
1. En se plaçant dans AOH, montrer que
$OH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $AH = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
En déduire l'aire du triangle OAB, puis de l'hexagone ABCDEF.

2. Montrer que $AI = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Quelle est l'aire de l'hexagone IJKLMN ?

3. En déduire un nouvel encadrement de π.

C ▸ Généralisation avec deux polygones réguliers à *n* côtés





1. Le polygone à *n* côtés inscrit est composé de *n* triangles isocèles identiques à OBA.
En se plaçant dans OAH, calculer OH et HA puis l'aire de OAB en fonction de β.

2. Le polygone à *n* côtés exinscrit est composé de *n* triangles isocèles identiques à OIN.
En se plaçant dans OAI, calculer AI puis l'aire de OIN en fonction de β.

3. En déduire l'encadrement : $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi \leqslant n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

4. Plus on augmente le nombre de côtés des polygones, plus l'encadrement sera précis.
Liu Hui a utilisé deux polygones réguliers de 96 côtés.
Donner l'encadrement obtenu avec 96 côtés puis une valeur approchée de π en faisant la moyenne des deux bornes de l'encadrement.

Thème 5

Répartition des richesses, inégalités

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie, Sociologie

TICE 55 min

1 TP Courbe de Lorenz

➡ **Objectif :** Obtenir une courbe de Lorentz pour évaluer des inégalités.

A ▸ Exemple 1 : revenu disponible par ménage selon la tranche de revenu

Tranche de revenu annuel disponible	Limite supérieure de tranche (décile)	Revenu annuel moyen	Nombre d'unités de consom. moyen par ménage
$<$ à D1	13 630	10 030	1,11
De D1 à D2	17 470	15 630	1,15
De D2 à D3	21 120	19 280	1,24
De D3 à D4	25 390	23 210	1,36
De D4 à D5	30 040	27 680	1,49
De D5 à D6	35 060	32 470	1,61
De D6 à D7	41 290	38 080	1,73
De D7 à D8	49 350	45 070	1,82
De D8 à D9	63 210	55 300	1,89
$>$ D9	///	96 240	1,97

Champ : France métropolitaine, ménages dont le revenu est déclaré au fisc est positif ou nul et dont la personne de référence n'est pas étudiante.
Lecture : en 2015, les 10 % de ménages dont le revenu est compris entre 17 470 euros (D2) et 21 120 euros (D3) ont un revenu annuel disponible moyen de 19 280 euros.

Sources : Insee-DGFiP-Cnaf-Cnav-CCMSA, enquête Revenus fiscaux et sociaux, 2015

1. Le lien suivant permet de télécharger le tableau du revenu disponible par ménage selon la tranche de revenu, en 2015 et en euros.

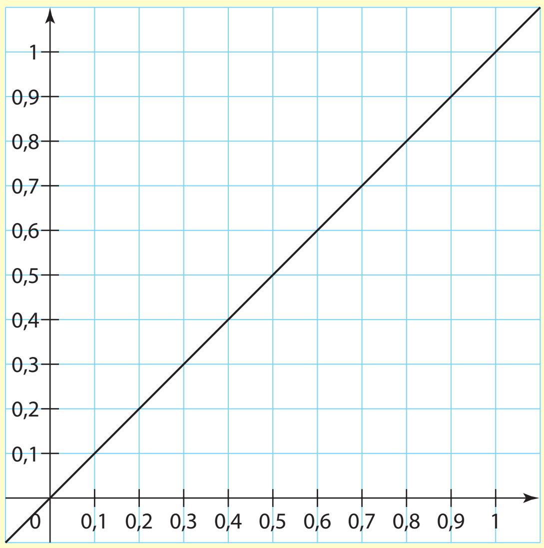
Télécharger le tableau et le compléter en calculant pour chacune des tranches de déciles :

DOCUMENT Tableau du revenu disponible lienmini.fr/maths-t05-01

– le pourcentage de la masse totale des revenus disponibles (on vérifiera que le total des revenus annuels est de 362 990 euros) ;
– le cumul du pourcentage de la masse totale des revenus disponibles.

Coup de pouce
Les 10 % des ménages ayant un revenu disponible compris entre D4 et D5 ont un revenu annuel moyen de 27 680 euros, ce qui représente un pourcentage de $\frac{27\,680}{362\,990}$ 100 de la masse totale des revenus.

2. Représenter sur le tableur et sur le graphique ci-dessous le pourcentage cumulé de la masse totale des revenus disponibles en fonction des pourcentages des déciles correspondants. Joindre les points par des segments.



Dans ce type de graphique où les abscisses sont les déciles (cumul croissant de fréquences) et les ordonnées les parts d'une grandeur étudiée (cumul croissant de pourcentages), les courbes obtenues s'appellent des **courbes de Lorenz**. Elles mettent en évidence la répartition de la grandeur étudiée pour permettre des comparaisons.

3. a) Quelle est l'interprétation de la diagonale du graphique ?
b) Quelle interprétation peut-on donner de l'éloignement de la courbe de Lorenz des revenus disponibles avec la diagonale ?

4. Une courbe de Lorenz est ajustée par une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes :

- f est définie sur l'intervalle [0 ; 1] (attention aux pourcentages compris entre 0 et 1) ;
- f est croissante sur [0 ; 1] et $f(x) \leqslant x$ pour $x \in [0\,;\,1]$;
- f est convexe ;
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On reprend l'étude du revenu disponible :

On considère la fonction $f(x) = 0{,}92x^2 + 0{,}08x$ avec $x \in [0\,;\,1]$.

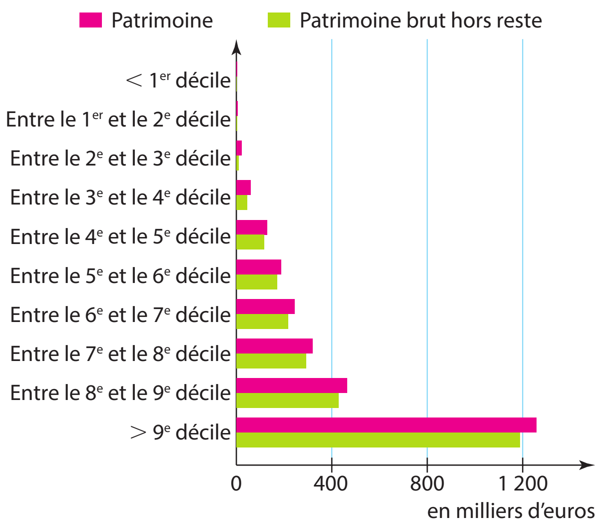
Vérifier que cette fonction constitue un bon ajustement du revenu disponible et qu'elle correspond aux conditions d'une courbe de Lorentz.

5. À l'aide du tableur, trouver une fonction d'ajustement de tendance exponentielle, polynomiale.

- Ouvrir une feuille de calcul et recopier les colonnes cumul des pourcentages de la population et cumul des pourcentages des revenus du tableau de la question **1**.
- Sélectionner ces deux colonnes puis insérer un graphique : choisir nuage de points.
- Pour obtenir une courbe d'ajustement, choisir : éléments de graphique/courbe de tendance/autres options/polynomial/afficher l'équation.

B ▸ Exemple 2 : répartition du patrimoine

Patrimoine moyen par décile en 2015



Lecture : début 2015, les 10 % des ménages aux patrimoines les moins élevés détiennent un patrimoine brut moyen de 2 000 euros et de 200 euros de patrimoine restant.

Note : le patrimoine brut correspond au montant des actifs détenus par un ménage incluant la résidence principale, les éventuelles résidences secondaires, l'immobilier de rapport – c'est-à-dire rapportant un revenu foncier –, les actifs financiers du ménage, et les actifs professionnels lorsque le ménage a une activité d'indépendant à titre principal ou secondaire. Il inclut également depuis 2010 le patrimoine « restant » : les biens durables (voiture, équipement de la maison, etc.), les bijoux, les œuvres d'art et autres objets de valeur. Des améliorations de l'enquête entraînent une rupture de série à partir de 2010 (sur échantillonnage des hauts patrimoines, collecte du patrimoine « restant »).

Champ : France (hors Mayotte) ménages ordinaires.

Source : Insee, enquête Patrimoine.

1. Recopier et compléter le tableau donnant pour chaque décile le pourcentage détenu du patrimoine.

Masse du patrimoine détenue par	Patrimoine brut moyen en milliers d'euros	En %
Inférieur à D1	2	
Entre D1 et D2	7,8	
Entre D2 et D3	21,7	
Entre D3 et D4	61,3	
Entre D4 et D5	128,5	
Entre D5 et D6	186,5	
Entre D6 et D7	245,1	
Entre D7 et D8	319,1	12
Entre D8 et D9	463,8	17
Supérieur à D9	1 254	46,7

2. Construire sur le graphique précédent de l'exemple 1 la courbe de Lorentz de cette répartition.

3. À l'aide du tableur, déterminer une fonction de tendance polynomiale ou exponentielle g pouvant rendre compte de cette courbe. (On pourra admettre pour la suite que $g(x) = 2{,}88x^3 - 1{,}88x^2 + 0{,}53x$ est une approximation convenable.)

4. Des deux répartitions (Exemple 1 (revenus)et Exemple 2 (patrimoine)), quelle est la plus inégalitaire ?

Thème 5

2 TP Un indicateur d'inégalités : le coefficient de Gini

TICE 55 min

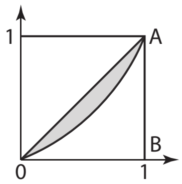
Contenus associés :
- Primitives et équations différentielles .. Chapitre 5
- Calcul intégral .... Chapitre 6

➡ **Objectif : Définir et calculer un coefficient de Gini.**

Remarque Cette activité doit être réalisée après le TP 1 dont elle utilise certaines réponses.

A ▸ Définition et calcul

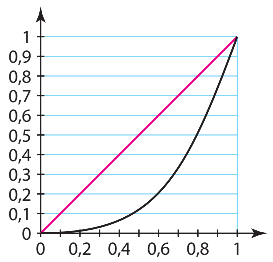
Plus la courbe de Lorentz est éloignée de la première bissectrice, plus la concentration de la grandeur étudiée est forte et la répartition inégalitaire.



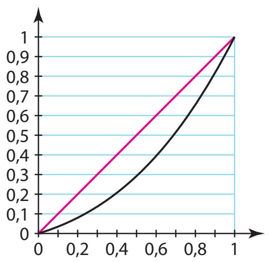
Cette concentration est mesurée par un indice appelé le **coefficient de Gini** défini par le nombre :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la concentration}}{\text{aire du triangle OAB}}$$

où l'aire de concentration est celle du domaine délimité par la courbe de Lorentz et la droite d'équation $y = x$.
Le coefficient de Gini est compris entre 0 et 1.
Si $\gamma = 0$, alors la répartition est parfaitement égalitaire.
Si $\gamma = 1$, alors la répartition est parfaitement inégalitaire.
On donne ci-dessous les courbes de Lorentz associées aux salaires de deux entreprises.



Entreprise 1



Entreprise 2

Dans quelle entreprise la répartition des salaires semble-t-elle la moins inégalitaire ?

Coup de pouce
Il faut pour cela calculer l'aire sous les courbes, c'est-à-dire les intégrales $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ de chacune des deux fonctions.

B ▸ Comparaison de salaires dans deux entreprises

On reprend les courbes de Lorentz associées aux salaires de deux entreprises (partie **A**).

1. La courbe représentant l'entreprise 1 est celle d'une fonction convexe de la forme ax^3. Déterminer le signe puis la valeur du coefficient a.

2. La courbe représentant l'entreprise 1 est celle d'une fonction convexe f solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y + (2 - \mathrm{e})(1 - x) + 1$, avec $f(0) = 0$.

a) Montrer que la fonction affine $g(x) = (2 - \mathrm{e})x - 1$ est une solution particulière de (E) .

b) Montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de (E') : $y' = y$.

c) En déduire que la fonction f représentant l'entreprise 2 est $f(x) = \mathrm{e}^x + (2 - \mathrm{e})x - 1$.

3. Calculer le coefficient de Gini dans chacun des deux cas et en déduire une comparaison entre les deux entreprises.

C ▸ Comparaison de revenus des ménages

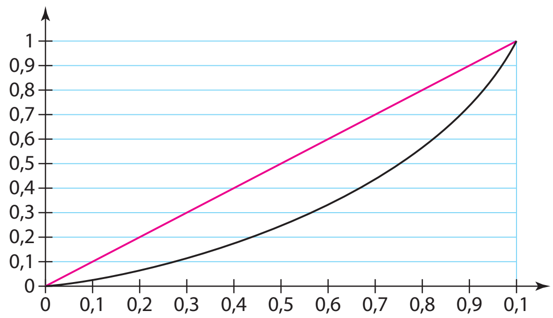
La courbe suivante rend compte de la concentration du revenu des ménages en France (*Source :* Insee, 2010).

1. Télécharger le graphique et y tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :
$f(x) = 1{,}5x^4 - 2x^3 + 1{,}4x^2 + 0{,}1x$.

a) Vérifier que la fonction f est une fonction convexe.

b) Expliquer pourquoi cette courbe est une bonne approche de la courbe de Lorentz du revenu.

DOCUMENT
Courbe revenu des ménages
lienmini.fr/maths-t05-02



2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire le coefficient de Gini du revenu obtenu à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$.

15 min

Contenus associés :
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES

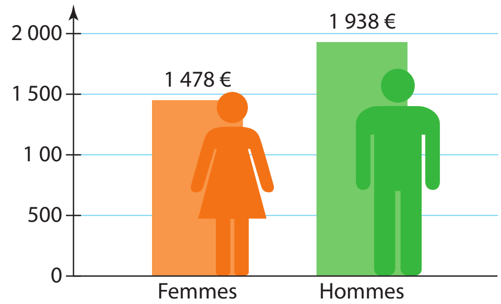
Vers le sup : Économie, Sociologie

3 Mesurer des inégalités : avec des pourcentages et des indicateurs de dispersion

➡ **Objectif : Calculer un rapport interdécile.**

1. Dans un certain secteur d'activités on a relevé en 2015 le revenu salarial moyen par sexe .

Revenu salarial mensuel moyen en 2015



a) Justifier l'affirmation suivante : « Les revenus salariaux féminins sont inférieurs de 24 % à ceux des hommes. »

b) De quel pourcentage faudrait-il augmenter le salaire des femmes pour que leurs revenus salariaux deviennent égaux à ceux des hommes ?

2. Calculer l'étendue puis le rapport interdécile pour chacune des distributions données dans le tableau ci-dessous.

Distribution des salaires mensuels nets de tous prélèvements en 2014

en euros courants

Déciles	Hommes	Femmes	Ensemble	F/H en %
D1	1 257	1 164	1 206	–7,4
D2	1 419	1 279	1 349	–9,9
D3	1 565	1 386	1 480	–11,4
D4	1 717	1 500	1 620	–12,6
Médiane (D5)	**1 893**	**1 636**	**1 783**	**–13,5**
D6	2 113	1 812	1 988	–14,2
D7	2 425	2 051	2 264	–15,4
D8	2 955	2 402	2 716	–18,7
D9	3 940	3 100	3 599	–21,3

Champ : salariés en équivalent temps plein du secteur privé et des entreprises publiques, y compris les bénéficiaires de contrats aidés et hors apprentis, stagiaires, salariés agricoles et salariés des particuliers-employeurs.

Lecture : en 2014, 10 % des salariés en équivalent temps-plein du secteur privé et des entreprises publiques, y compris les bénéficiaires de contrats aidés, gagnent un salaire mensuel net inférieur à 1 206 euros.

Source : Insee, 2014.

Coup de pouce

Rapport interdéciles : IDR = $\dfrac{Q_{0,9}}{Q_{0,1}}$

Rapport interquartiles : IQR = $\dfrac{Q_{0,75}}{Q_{0,25}}$

Thème 5 Répartition des richesses, inégalités

40 min

Contenus associés :
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES
Vers le sup : Sociologie

4 Des inégalités au niveau mondial

➡ **Objectif : Traduire des inégalités par le calcul d'indicateurs.**

On a classé dans les tableaux ci-dessous des résultats d'une étude (*source :* Unicef) portant sur les enfants en âge d'aller à l'école primaire et non scolarisés dans les pays de l'UE et dans les pays d'Afrique subsaharienne.

Étude portant sur 24 pays de l'UE

Masse des pays de l'UE	Quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés	Effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés
$< D1$	1	
Entre D1 et D2	2	
Entre D2 et D3	2,5	
Entre D3 et D4	4	
Entre D4 et D5	5	
Entre D5 et D6	6,5	
Entre D6 et D7	10,5	
Entre D7 et D8	14,5	
Entre D8 et D9	18	
$> D9$	67	

Étude portant sur 42 pays d'Afrique subsaharienne

Masse des pays de l'Afrique subsaharienne	Quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés	Effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés
$< D1$	7	
Entre D1 et D2	45	
Entre D2 et D3	66	
Entre D3 et D4	79	
Entre D4 et D5	193	
Entre D5 et D6	357	
Entre D6 et D7	449	
Entre D7 et D8	678	
Entre D8 et D9	1022	
$> D9$	2000	

1. Ouvrir une feuille de calcul, déterminer les effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) en âge d'aller à l'école primaire non scolarisés.

2. Réaliser la courbe de Lorentz à partir de ces données.

3. Calculer le rapport interdéciles .

4. Des deux résultats des questions **2.** et **3.**, quel est celui qui traduit le mieux les inégalités de scolarisation entre pays de l'UE et pays d'Afrique subsaharienne ?

Inférence bayésienne

Thème 6

1 Test de dépistage d'une maladie

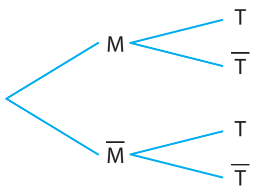
15 min

Contenus associés :
• Lois discrètes..Chapitre 7
Spécialité : SVT
Vers le sup : Médecine

➡ **Objectif :** Inverser une condition.

Une maladie est présente dans la population, avec la proportion d'une personne malade sur 10 000. Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique souhaite faire approuver un nouveau test de dépistage qui vérifie que, si une personne est malade, alors le test est positif à 99 %, et que, si une personne n'est pas malade, alors le test est positif à 0,1 %.
Pour savoir si le laboratoire peut commercialiser son test, on souhaite connaître la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.
On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. Donner à l'aide des événements M et T les probabilités $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$

3. Calculer alors la probabilité $P(T)$ de l'événement T.

4. Exprimer la probabilité $P_T(M)$ qu'une personne soit malade si le test est positif, en fonction de $P(T)$, $P(M)$ et $P_M(T)$. Cette formule s'appelle la formule de Bayes.

La formule de Bayes a longtemps été appelée formule de probabilité des causes. Elle permet en effet de remonter le temps, c'est-à-dire de calculer la probabilité d'une cause sachant celle de sa conséquence.

5. Calculer la valeur de cette probabilité.

6. Conclure pour savoir s'il faut commercialiser ce test ou non.

2 De quelle urne vient la boule ?

15 min

Contenus associés :
• Lois discrètes..Chapitre 7

➡ **Objectif :** Inverser une condition.

On considère deux urnes : l'urne A contient 6 boules jaunes et 4 boules noires, l'urne B contient 3 boules jaunes et 5 boules noires.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On notera : A l'événement « l'urne choisie est l'urne A », B l'événement « l'urne choisie est l'urne B », R l'événement « la boule tirée est jaune » et N l'événement « la boule tirée est noire ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la boule tirée soit jaune.

3. Sachant que la boule tirée est jaune, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

3 Mails indésirables

25 min

➡ **Objectif :** **Tester la pertinence de filtrages de mail.**

Contenus associés :
- Lois discrètes..Chapitre 7

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique et statistiques décisionnelles, Sciences humaines

On étudie la manière dont une boîte mail va considérer qu'un mail est indésirable ou ne l'est pas.

A ▸ Premier exemple

On s'intéresse à la boîte mail d'une première internaute. On remarque que la moitié de son courrier est frauduleux et que 90 % de ses mails frauduleux contiennent le mot *urgent*. Seul 10 % du courrier non frauduleux contient ce mot. Le filtre en œuvre place tous les mails ayant le mot *urgent* dans la répertoire « Indésirables ».
Quelle est la probabilité qu'un mail contenant le mot *urgent* ne soit pas frauduleux ?

B ▸ Second exemple

On considère la boîte mail d'un second internaute, où les hypothèses sont les suivantes :
- un mail sur 200 provient d'une adresse inconnue ;
- un mail sur 800 est jugé indésirable ;
- un mail sur 5 contient le mot *urgent* et n'est pas indésirable.

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-dessous concernant l'adresse d'envoi.

Collègues	Amis	Publicité
0,4	0,1	...

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-dessous concernant le nombre de caractères du mail.

Inf. à 150	Entre 150 et 330	Sup. à 330
0,01	0,44	...

1. Recopier et compléter les tableaux avec les probabilités manquantes.

2. On considère un mail tiré au hasard dans cette boîte.
a) Déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un mail publicitaire provenant d'une adresse connue.
b) Lorsque l'adresse est connue, est-il plus probable de recevoir un mail indésirable entre 50 et 130 caractères ou un mail publicitaire ?

3. Sachant que le mail est indésirable, la probabilité qu'il contienne le mot *urgent* est 0,6.
a) Déterminer la probabilité qu'un mail contienne le mot *urgent*.
b) Donner alors la probabilité qu'un mail soit considéré indésirable sachant qu'il contient le mot *urgent*.

25 min

4 Chez le médecin

➡ **Objectif : Découvrir la spécificité et la sensibilité.**

Contenus associés :
- Lois discrètes..Chapitre 7

Spécialité : SVT

Vers le sup : Médecine

Après un test pour détecter une éventuelle allergie, son médecin convoque Tom pour lui annoncer que le test est positif. Pas de chance car ce type d'allergie ne touche que 0,1 % de la population. Tom demande donc à son médecin si ce test est fiable. Il lui répond que, si vous êtes allergique, alors le test est positif dans 90 % des cas, et que, si vous ne l'êtes pas, alors le test est négatif dans 97 % des cas.
Quelle est la probabilité que Tom soit vraiment allergique ?
On note C l'événement « être allergique » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré de la situation.

2. Calculer la probabilité $P(\mathrm{T})$.

3. En déduire la probabilité cherchée.

4. Conclure.

5. Pour voir autrement ce paradoxe, considérons une population de 10 000 personnes.
Recopier et remplir le tableau suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

	T	$\overline{T}$	Total
M	Vrai positif	Faux négatif	Malade
$\overline{M}$	Faux positif	Vrai négatif	Non malade
Total	Test positif	Test négatif	10 000

6. Vérifier qu'on retrouve la probabilité cherchée.

7. La **sensibilité d'un test** est la probabilité que le test soit positif si la personne est allergique.
a) Déterminer une formule permettant de calculer la sensibilité à l'aide du tableau.
b) Que se passe-t-il si la sensibilité d'un test augmente ?
c) La calculer dans cet exemple.

8. La **spécificité d'un test** est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas allergique.
a) Déterminer une formule permettant de calculer la spécificité à l'aide du tableau.
b) Que dire si la spécificité d'un test augmente ?
c) La calculer dans cet exemple.

9. La sensibilité et la spécificité d'un test sont-elles dépendantes ? Comment réagissent-elles entre elles ?

10. On appelle prévalence, notée p, la probabilité $P(\mathrm{M})$ et on note SE la sensibilité et SP la spécificité.
La valeur prédictive positive (VPP) d'un test est la probabilité que la personne soit réellement allergique si son test est positif et la valeur prédictive négative (VPN) d'un test est la probabilité que la personne ne soit pas allergique si son test est négatif.
a) Donner les valeurs de VPP et VPN en fonction de p, SE et SP.
b) Les calculer dans cet exemple.

Thème 6

15 min

Contenus associés :
• Lois discrètes...Chapitre 7
Spécialité : SVT
Vers le sup : Médecine

5 D'autres maladies

➡ **Objectif : Distinguer spécificité et sensibilité.**

A ▸ La mucoviscidose

On s'intéresse au patient porteur d'une mutation dans le gène CFTR qui est impliqué dans la mucoviscidose.
En France, une personne sur 34 est porteuse de la mutation (cela n'implique pas d'être malade car il s'agit d'une maladie autosomique récessive).
Il existe un test pouvant détecter ces mutations avec une sensibilité de 85 % et une spécificité très proche de 100 %.
On note :
• M l'événement « être porteur de cette mutation » ;
• T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les probabilités de l'énoncé à l'aide des événements T et M.

2. Après avoir fait un test qui s'est révélé négatif, déterminer la probabilité d'être quand même porteur.

B ▸ L'appendicite

Pour diagnostiquer la présence d'une appendicite chez des patients présentant des douleurs abdominales aigues, on réalise une échographie de la région abdominale.
Parmi les 255 patients chez lesquels l'échographie était positive, 235 présentaient effectivement une appendicite.
Toutefois, 75 des 585 patients dont l'échographie était négative présentaient également une appendicite.

1. Représenter les données sous forme d'un tableau à double entrée.

2. Quelle est la spécificité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce La **spécificité d'un test** est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas porteuse de la maladie testée.

3. Quelle est la sensibilité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce La **sensibilité d'un test** est la probabilité que le test soit positif si la personne est porteuse de la maladie testée.

4. Quelle est la valeur prédictive positive du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

5. Quelle est la valeur prédictive négative du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Thème 7

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique, Statistiques

Algo 55 min

1 TP Simulation de variable aléatoire, comportement des moyennes d'échantillons

➡ **Objectif :** Simuler des variables aléatoires.

A ▶ Simulations d'une variable aléatoire

1. En **Python**, écrire une fonction `moyenne` de paramètre `L` de type liste de flottants, renvoyant la moyenne des éléments de `L`.

2. Écrire une fonction `ecart_type` de paramètre `L` de type liste de flottants qui :
- affecte `moyenne(L)` à une variable `m`,
- crée une liste `L2=[]` puis itère sur les éléments de `L` pour remplir la liste `L2` des $(x_i - m)^2$ où x_i sont les éléments de `L`,
- renvoie l'écart-type des éléments de `L`.

Coup de pouce $\sqrt{x}$ s'écrit `math.sqrt(x)`.

3. Écrire une fonction `simul_bernou` de paramètre `p` flottant (entre 0 et 1) qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
`random.random()` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1[.

4. Justifier que la fonction `simul_binom` ci-dessous simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def simul_binom(n,p):
    return sum([simul_bernou(p) for i in range(n)])
```

5. a) Quelle loi suit la variable aléatoire simulée par l'instruction `n*random.random()+1` ?
b) Justifier que la fonction ci-dessous simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$.

```
def simul_uniforme(n):
    return math.floor(n*random.random()+1)
```

Coup de pouce `math.floor(x)` arrondit x à l'entier qui lui est inférieur ou égal.

B ▶ Avec la loi binomiale

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ et $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

1. a) Que représente ce que renvoie `[simul_binom(n,p) for i in range(t)]` si `t` désigne la taille d'un échantillon ?
b) Que renvoie la fonction ci-dessous si `N` désigne un nombre d'échantillons ?

```
def serie_moyennes_binom(N,t,n,p):
    return [moyenne([simul_binom(n,p) for i in range(t)]) for i in range(N)]
```

2. a) Écrire une fonction `comparaison_binom1` de paramètres `N`, `t`, `n` et `p` qui calcule la liste des moyennes de N échantillons de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, calcule l'écart-type s de ces moyennes puis affiche successivement s et $\frac{\sigma}{\sqrt{t}}$.
b) Que remarque-t-on quand on exécute plusieurs fois cette fonction ?

3. a) Écrire une fonction `comparaison_binom2` de paramètres `N`, `t`, `n` et `p` qui calcule la liste des moyennes de N échantillons de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, calcule l'écart-type s de ces moyennes puis affiche la proportion de ces moyennes pour laquelle l'écart avec μ est inférieur ou égal à $2s$.
b) Que remarque-t-on quand on exécute plusieurs fois cette fonction ?

Thème 7

Algo — 30 min

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Vers le sup : SVT, Économie, Statistiques

2 Tirages aléatoires avec remise

➡ **Objectif : Simuler un tirage avec remise dans une urne.**

On considère une urne contenant 80 boules rouges et 20 boules vertes.

1. En **Python**, écrire une fonction `urne` sans paramètre simulant le tirage au sort d'une boule et renvoyant sa couleur.

Coup de pouce Utiliser `random.random()` ou `random.randint(a,b)`.

2. a) Compléter l'instruction suivante afin qu'elle renvoie un échantillon de taille `n` (un entier supposé connu par le programme) obtenu par tirages successifs avec remise dans cette urne : `[urne() for …]`.

b) À la suite de la fonction `urne`, écrire une fonction `echantillon` de paramètre `n` de type entier renvoyant la liste de la question **2. a)**. Exécuter le fichier et lancer `echantillon(50)` depuis la console.

3. Calculer la probabilité qu'on attende plus de 3 tirages avant d'obtenir la première boule verte.

4. a) Écrire une fonction `premier_vert` sans paramètre simulant ces tirages avec remise et renvoyant le rang du premier tirage auquel on obtient une boule verte.

b) Que donne la variable `m` ci-dessous ?

```
A=[premier(vert) for i in range(1000)]
m=sum(A)/1000
```

c) De quelle valeur le résultat doit-il être proche ? Vérifier avec l'ordinateur.

Algo — 30 min

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, SVT

Vers le sup : Économie, Informatique

3 Vérification d'une pièce

➡ **Objectif : Tester une pièce par construction d'un intervalle de fluctuation.**

Ben et Nat' jouent la vaisselle à PILE ou FACE tous les soirs avec la même pièce : si la pièce tombe sur PILE, Ben fait la vaisselle, si c'est FACE, c'est Nat'. Ben, qui a fait la vaisselle 110 fois sur les 200 derniers jours, se demande si la pièce n'est pas truquée.

1. On fait l'hypothèse que la pièce est équilibrée.

a) Quelle est alors la probabilité d'obtenir PILE ?

b) On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus lorsqu'on lance 200 fois cette pièce, dans ce cas où elle est équilibrée. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à cette variable aléatoire X.

c) Ben peut-il affirmer, au seuil de 95 %, que la pièce est truquée ?

2. Sur les 100 soirs qui suivent, Ben a fait la vaisselle 63 fois et Nat' 37 fois.
Ben a-t-il raison d'être de plus en plus suspicieux ?

3. a) Dans la calculatrice, rentrer la fonction $x \mapsto p(X \leqslant 173)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $p = x$ et $n = 300$.

b) Tabuler cette fonction à partir de $x = 0{,}5$ avec un pas de 0,01.

c) En déduire des valeurs pour la probabilité d'obtenir PILE pour lesquelles il serait tout à fait « normal » d'obtenir 173 PILE en 300 essais au seuil de 95 %.

d) Expliquer pourquoi il était légitime de penser *a priori* que la probabilité d'obtenir PILE puisse être 0,5 et dire s'il en va de même pour l'une des valeurs trouvées à la question précédente.

4. Proposer une méthode permettant d'estimer la probabilité que cette pièce tombe sur PILE.

Remarque Les tests et prises de décision permettent de tester les hypothèses d'un modèle pré-existant, en SES et en SVT notamment.

Algo 55 min

4 Problème de surréservation

➜ Objectif : Programmer des fonctions avec la loi binomiale et les utiliser dans un cas de surréservation.

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, NSI

Vers le sup : Économie, Gestion, Informatique

A ▶ 1. On considère la fonction `parmi`, en langage Python, donnée ci-dessous.

```python
def parmi(k,n):
   if k==0 or n==k:
      a=1
   else:
      a=parmi(k,n-1)+parmi(k-1,n-1)
   return a
```

a) Calculer les valeurs renvoyées par `parmi(1,1)` et `parmi(0,1)` puis par `parmi(1,2)`.
b) Calculer les valeurs renvoyées par `parmi(2,2)` et `parmi(0,2)` puis par `parmi(2,3)` et `parmi(1,3)`. En déduire `parmi(2,4)`.
c) Dans chacun des cas précédents, comparer `parmi(k,n)` et $\binom{n}{k}$. Que peut-on conjecturer sur la valeur renvoyée par `parmi(k,n)` pour tout $n \in \mathbb{N}$ et k entier entre 0 et n ?

2. Quelles sont les trois propriétés des coefficients binomiaux utilisés dans la fonction `parmi` ?

3. a) Ouvrir le lien ci-dessous dans lequel se trouve une fonction `parmi` telle que `parmi(k,n)` renvoie $\binom{n}{k}$ de manière optimisée.

PYTHON
Fonction parmi
lienmini.fr/maths-t07-01

b) Écrire une fonction `proba_bin` de paramètres `p` flottant et `n` et `k` entiers telle que `proba_bin(p,n,k)` renvoie $p(X = k)$.
c) Tester cette fonction avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

4. a) Écrire une fonction `seuil_bin` de paramètres `s` et `p` flottants et `n` entier telle que `seuil_bin(s,p,n)` renvoie le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant s$.

Coup de pouce On pourra considérer deux variables `k` et `p` (initialisées respectivement à 0 et $p(X = 0)$) où `k` correspond à la valeur renvoyée par la fonction et `prob` à la probabilité $p(X \leqslant k)$.

b) Tester cette fonction avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

B ▶ Un organisateur de réceptions a envoyé 400 invitations (supposées indépendantes) pour un gala. Il considère que la probabilité qu'une personne invitée vienne effectivement au gala est de 74 %.

1. En utilisant la fonction `seuil_bin` écrite précédemment, déterminer le nombre minimal de repas à prévoir pour ce gala pour être sûr au seuil de 95 % qu'il y aura un repas pour chaque invité présent.

2. Reprendre la question précédente avec un seuil de 99 %.

C ▶ Pour aller plus loin

1. a) Écrire une fonction `proba_cum_bin` de paramètres `p` flottant et `n` et `k` entiers telle que `proba_cum_bin(p,n,k)` renvoie $p(X \leqslant k)$.
b) Écrire une fonction `seuil_bin2` de paramètres `s` et `p` flottants et `k` entier telle que `seuil_bin2(s,p,k)` renvoie le plus grand entier n tel que $p(X \leqslant k) \geqslant s$ où X suit la loi binomiale de paramètres p et n.
c) Tester ces fonctions avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

2. Pour un autre gala, l'organisateur de réceptions dispose d'une salle de 250 places.
En utilisant la fonction `seuil_bin2` écrite précédemment, déterminer le nombre d'invitations maximal qu'il peut envoyer en restant sûr au seuil de 95 % que tous les invités auront une place.

Thème 7

30 min

5 TP Sondage et temps avant l'élection

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

➡ **Objectif : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.**

Un sondage publié par l'institut BVA le 7 décembre 2016 sur le premier tour de l'élection présidentielle française du 23 avril 2017, annonce des intentions de votes de 13 % pour M. Valls, 14 % pour J.-L. Mélenchon, 14 % pour E. Macron, 24 % pour F. Fillon et 24 % pour M. Le Pen. Les autres candidats ne sont pas listés dans ce sondage.

1. Vérifier la liste des candidats au 1er tour de cette élection présidentielle. Que peut-on penser du pourcentage d'intention de votes annoncé dans le sondage pour un des candidats ?

2. Ces intentions de votes sont annoncées avec une marge d'erreur d'environ 3 %.

a) En tenant compte de cette marge d'erreur, donner une fourchette du score attendu pour chaque candidat au 1er tour de cette élection.

b) Rechercher les scores effectifs des différents candidats au 1er tour de cette élection et les commenter en utilisant la question **2. a)**.

c) En avril 2017, le même institut de sondage annonce des intentions de votes de 19 % pour F. Fillon, 19,5 % pour J.-L. Mélenchon, 23 % pour M. Le Pen et 23 % pour E. Macron.
Que peut-on penser de ces estimations au regard des résultats obtenus par ces quatre candidats au 1er tour de cette élection ?

3. Que peut-on penser de l'intérêt de réaliser des sondages sur des élections ayant lieu dans plusieurs mois ?

30 min

6 TP Sondage et suffrage indirect

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

➡ **Objectif : Discuter des résultats d'un sondage dans une élection au suffrage indirect.**

Un sondage réalisé pour le Washington Post entre les 3 et 6 novembre 2016 donnait 49 % d'intention de votes pour H. Clinton et 46 % pour D. Trump à l'élection présidentielle du 8 novembre 2016.

1. a) Qui a gagné cette élection ? Que peut-on donc penser de ce sondage ?

b) Lors de cette élection, H. Clinton a obtenu 65 853 514 et D. Trump 62 984 828 des 136 669 276 votes exprimés.
Calculer leurs pourcentages de votes respectifs et les comparer aux résultats du sondage ?

c) L'élection présidentielle aux États-Unis se déroule-t-elle au suffrage universel direct comme en France ?

2. L'élection présidentielles aux Etats-Unis est une élection au suffrage indirect : chaque état possède un certain nombre de grands électeurs et la personne en tête dans un état y « remporte » tous les grands électeurs. Le ou la candidate ayant le plus de grands électeurs emporte l'élection.

a) Télécharger le fichier ci-dessous.

TICE Fichier Excel lienmini.fr/maths-t07-02

b) Dans les cellules B53 et C53, écrire une formule permettant d'obtenir les sommes des valeurs de chacune des colonnes B et C et les interpréter concrètement.

Coup de pouce Utiliser la fonction SOMME.

c) Écrire une formule dans la cellule D2 permettant de remplir la colonne D par recopie vers le bas puis la recopier vers le bas.

d) Sélectionner la plage A2 : D52 puis effectuer un tri décroissant selon le nombre de grands électeurs par millions d'habitants (Données>Trier).

e) Dans la cellule E2, écrire = SOMME(C$2 : C2) puis recopier vers le bas jusqu'à E52.

f) Expliquer pourquoi il « suffit » de gagner dans les états dans lesquels le nombre de grands électeurs par habitant est supérieur ou égal à 1,65 pour gagner l'élection.

g) Quelle proportion de la population habite ces états ?

h) Commenter le sondage de début d'énoncé.

7 TP Sondage et marge d'erreur

30 min

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

7

➡ **Objectif : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.**

Un sondage IPSOS-SOPRA-STERIA mené fin avril 2017 pour le 2nd tour de l'élection présidentielle est accompagné du tableau ci-dessous portant sur les marges d'erreurs des sondages.

INTERVALLE DE CONFIANCE

(avec un niveau de confiance de 95 %)

SCORES OBTENUS

Taille d'échantillon	2 % ou 98 %	5 % ou 95 %	10 % ou 90 %	15 % ou 85 %	20 % ou 80 %	25 % ou 75 %	30 % ou 70 %	35 % ou 65 %	40 % ou 60 %	45 % ou 55 %	50 %
200 cas	2,0	3,1	4,3	5,1	5,7	6,1	6,5	6,8	6,9	7,1	7,1
500 cas	1,3	2,0	2,7	3,2	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4	4,5	4,5
1 000 cas	0,8	1,4	1,8	2,3	2,5	2,7	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
2 000 cas	0,6	1,0	1,3	1,6	1,8	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3
5 000 cas*	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4
6 000 cas	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4

1. D'après ce tableau, pourquoi l'institut annonce-t-il que pour un candidat ayant 25 % d'intentions de votes pour un sondage sur 5 000 personnes, le résultat attendu est entre 23,8 % et 26,2 %.

2. Le sondage accompagné par ce tableau a été réalisé sur 5 331 personnes, moins d'une semaine avant le 2nd tour des élections. Il donne 63 % d'intentions de votes à E. Macron et 37 % à M. Le Pen.
En prenant les valeurs les plus proches possibles dans le tableau, donner les fourchettes dans lesquelles devraient se trouver les résultats des deux candidats puis les comparer avec les résultats du 2nd tour de l'élection présidentielle 2017.

3. a) On considère que, pour un sondage, la marge d'erreur au seuil de 95 % est d'environ $2\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$
où f est l'intention de votes sous forme décimale et n le nombre de personnes interrogées.
Choisir une valeur de f et une valeur de n dans le tableau et retrouver la marge d'erreur annoncée.
b) Dans le document de l'institut IPSOS-SOPRA-STERIA accompagnant le tableau, on peut lire « le calcul n'est justifié que pour les sondages aléatoires. Il ne peut pas être déterminé dans le cas de sondages par quotas mais on considère qu'il est proche de celui des sondages aléatoires ».
Mener une rechercher sur les sondages « aléatoires » et « par quotas » et commenter cette phrase.

Thème 8 Temps d'attente

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : Informatique

Vers le sup : Sciences

TICE Algo 55 min

1 TP Jeu en réseau

➡ **Objectif :** Simuler la loi uniforme.

Axel et Wissam se donnent rendez-vous entre 18 h 00 et 19 h 00 pour se connecter et jouer ensemble. Les horaires de connexion, en heures, d'Axel et de Wissam, à partir de 18 heures, peuvent être modélisés par des variables aléatoires A et W qui suivent une loi uniforme sur [0 ; 1]. Par exemple, si A prend la valeur 0,75 $\left(=\frac{3}{4}\right)$, cela signifie qu'Axel se connecte à 18 h + 0,75 h, ce qui correspond à 18 h 45 min ; et si W prend la valeur $\frac{2}{3}$ (≈ 0,6667), cela signifie que Wissam se connecte à 18 h + $\frac{2}{3}$ h, ce qui correspond à 18 h 40 min. On souhaite déterminer la probabilité p que le premier connecté n'attende pas l'autre plus d'un quart d'heure.

A ▸ Simulation avec un tableur

Sur une feuille de calcul, on a simulé 1 000 valeurs de A et de W.

1. Télécharger la feuille de calcul à l'aide du lien ci-contre.

TICE Fichier Excel
lienmini.fr/maths-t08-01

2. Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule A2 (resp. C2) afin d'obtenir, par recopie vers le bas jusqu'à la cellule A1001 (resp. C1001), mille simulations de l'horaire de connexion d'Axel (resp. Wissam), en heures à partir de 18 h ?

3. Expliquer ce que font les formules qui figurent dans les cellules E2, G2 et H2 de la feuille de calcul.

4. Effectuer plusieurs simulations à l'aide de la touche F9. Noter les résultats obtenus pour la fréquence.

5. Que peut-on en déduire pour la probabilité p ?

B ▸ Simulation avec un algorithme

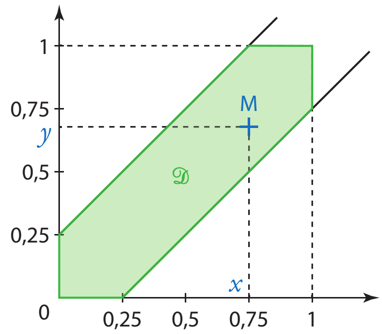
1. Compléter le programme suivant écrit en langage **Python** qui simule 100 000 temps d'attente possibles des deux joueurs et affiche la fréquence des temps d'attente inférieurs à un quart d'heure.

```
import random
c=0
for i in range(…):
      A=random.random()
      W=random.random()
      TA=abs(W-A)
      if TA<=…:
            c=c+1
print(…)
```

2. Exécuter plusieurs fois ce programme. Que peut-on dire de la probabilité p ?

C ▸ Représentation « graphique »

L'horaire de connexion d'Axel et l'horaire de connexion de Wissam peuvent être représentés dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, par un point M de coordonnées x et y où x et y sont des nombres réels de l'intervalle [0 ; 1]. Ainsi, le point $M\left(0{,}75 ; \frac{2}{3}\right)$ correspond à l'événement : « Axel s'est connecté à 18 h 45 et Wissam à 18 h 40. »



1. Justifier que la probabilité p cherchée est égale à $p = P\left(|y-x| \leqslant \frac{1}{4}\right)$.

2. Montrer que :
$$|y-x| \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{4}.$$

3. En déduire que, pour tous réels x et y de l'intervalle [0 ; 1], $|x-y| \leqslant \frac{1}{4}$ si et seulement si le point $M(x ; y)$ appartient au domaine D coloré.

4. On admet que la probabilité p est égale à l'aire du domaine D. Déterminer p.

8

10 min

2 À la gare

➡ **Objectif : Manipuler une loi uniforme.**

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : SES, Informatique

Vers le sup : Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

À la gare de Fontainebleau, des trains pour Paris passent toutes les 30 minutes à partir de 6 h du matin.
Un individu arrive à la gare entre 6 h et 7 h et l'on suppose que l'heure de son arrivée, donnée par le nombre de minutes après 6 h, est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;60]$.
Quelle est la probabilité que l'individu ait à attendre moins de 10 minutes le prochain train? qu'il attende plus d'un quart d'heure ?

30 min

3 Loi exponentielle

➡ **Objectif : Retrouver les résultats du cours et les manipuler.**

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : Physique, NSI

Vers le sup : Statistique et informatique décisionnelle

A ▸ Quelques points théoriques

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

2. On note, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = te^{-\lambda t}$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a
$\lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - g'(t)$.
b) En déduire $\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, puis en déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$.
c) En déduire l'espérance d'une loi exponentielle.

3. a) Résoudre l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$.
b) En déduire le temps de demi-vie d'une loi exponentielle.

B ▸ Durée de vie d'un appareil électronique

Dans un IUT d'informatique, les élèves utilisent un appareil électronique dont le fonctionnement repose sur deux composants : C_1 et C_2.
On suppose que leurs fonctionnements sont indépendants l'un de l'autre et l'on modélise leurs durées de vie par des variables aléatoires T_1 et T_2 suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. a) La durée de vie moyenne du composant C_1 est de 100 heures. En utilisant la question **2.** de la partie **A**, déterminer λ_1.
b) En moyenne, la moitié des composants C_2 ont une durée de vie inférieure ou égale à 120 heures. En utilisant la question **3.** de la partie **A**, déterminer λ_2.

2. L'appareil fonctionne à la seule condition que les deux composants fonctionnent tous les deux. On note T la variable aléatoire modélisant le temps de vie de l'appareil électronique.
a) Déterminer $P(T \leqslant x)$ en fonction de λ_1, λ_2 et x.
b) En utilisant la question **1.** de la partie **A**, que peut-on dire de la loi de T ?
c) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne plus de 100 heures ?

Thème 8

4 Parcoursup

15 min

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité............ Chapitre 8

Spécialité : SES, NSI

Vers le sup : Sciences humaines, Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

➡ **Objectif :** Utiliser une loi de probabilité.

Dans un lycée, les inscriptions sur Parcoursup sont organisées toutes sur la même journée.
Le temps de traitement de l'inscription dépend du nombre d'autres requêtes effectuées durant le même instant.
On suppose qu'en deçà d'un seuil fixé de 100 % de requêtes, l'inscription est pratiquement immédiate ; qu'entre 100 % et 200 % le temps d'inscription est de 10 secondes ; qu'entre 200 % et 350 %, le temps est de 25 secondes et qu'entre 350 % et 1 000 %, il faut attendre une minute.
La proviseure avait pris des notes sur le déroulement de l'an passé. En se basant sur ces notes, elle a pu établir qu'il y a une chance sur cinq que le nombre de requêtes sur Parcoursup soit en dessous de 100 %, une chance sur dix qu'il soit entre 100 % et 200 % et trois chances sur dix qu'il soit entre 200 % et 350 %.

On modélise le temps de traitement de l'inscription sur Parcoursup par une variable aléatoire T.

1. Déterminer la loi de probabilité de T et représenter graphiquement cette loi.

2. Calculer l'espérance ainsi que la variance de T. Interpréter ces résultats.

3. À 9 h, une très grande partie du lycée effectue l'inscription.
La proviseure est certaine que le nombre de requête dépasse alors le seuil de 100 %.
Une élève lui demande s'il est normal qu'au bout de 30 secondes le traitement de l'inscription ne soit pas encore effectué.
Que doit-elle répondre ?

5 Rendez-vous à l'opéra

20 min

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité............ Chapitre 8

Spécialité : SES, Informatique

Vers le sup : Sciences humaines, Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

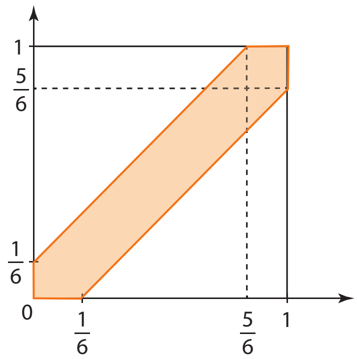
➡ **Objectif :** Manipuler et représenter une loi uniforme.

À l'opéra de Vichy, les portes s'ouvrent 30 minutes avant le début de chaque spectacle. Pour la représentation du *Misanthrope* de Molière, Alexis et Camille se donnent rendez-vous entre 15 h 30 et 16 h. Chacun attend l'autre cinq minutes avant de rentrer dans l'opéra.

On modélise les instants d'arrivée après 15 h30 par une loi uniforme sur [0 ; 1].

1. À 15 h 50, une sonnette retentit, annonçant le début imminent de la représentation.
a) Quelle est la probabilité que Camille entre avant la sonnette ? Même question pour Alexis.
b) Quelle est la probabilité que Camille et Alexis entrent avant la sonnette ?

2. On donne le graphique ci-contre.
a) Que représente l'aire de la surface colorée dans le contexte de l'exercice ?
b) En déduire la probabilité que Camille et Alexis entrent ensemble à l'opéra.



6 TP

Datation au carbone 14

Algo 55 min

Contenus associés :
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5
- Lois discrètes .... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : Physique, SVT, NSI

Vers le sup : Biologie, Physique, Archéologie

➡ **Objectif :** Simuler une durée de vie.

A ▸ Désintégration du carbone 14

On note T la variable aléatoire modélisant le temps de vie de l'atome.
Le phénomène radioactif peut être expliqué de la manière suivante : la probabilité qu'un atome radioactif se désintègre durant un intervalle de temps est proportionnelle à l'intervalle de temps considéré.

1. Si l'on note F la fonction de répartition de T, on admet que cela implique que F vérifie l'équation différentielle suivante :
$F'(x) = \lambda(1 - F(x))$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer alors une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
b) Reconnaître la loi de T.

2. La fonction suivante, écrite en langage Python, simule la durée de vie d'un atome de carbone 14.
Expliquer cette fonction.

```
from math import*
from random import random
def desintegration(l):
    x=random()
    y=-log(1-x)/l
    return y
```

3. On rappelle que le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

Des mesures physiques nous donnent dans le cas du carbone 14 la valeur $t_{\frac{1}{2}} = 5\,730$ ans

a) Déterminer λ. Cette valeur est appelée constante de radioactivité.
b) Que faut-il écrire à la suite du programme de la question **2.** pour obtenir la simulation de la durée de vie avec cette valeur de λ ?
Programmer alors cette fonction.

B ▸ Datation

On considère un gramme d'un organisme fossile dont on veut établir la datation et on note n le nombre d'atomes de carbone 14 présents.

On fait l'hypothèse qu'à la mort de cet organisme, un gramme de matière contenait $N = 7{,}0 \times 10^{10}$ atomes de carbone 14. On note B_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome de carbone 14 numéro i s'est désintégré et à 0 sinon, pour $i \in \{1 ; ... ; N\}$.

1. À quoi correspond la quantité $B_1 + B_2 + ... + B_N$?

2. Pour $i \in \{1 ; ... ; N\}$, quelle est la loi de B_i ?

3. a) Exprimer de manière algébrique la fréquence d'atomes désintégrés lors de l'expérience.
b) Compléter alors la fonction écrite en langage Python qui simule l'expérience, afin qu'elle renvoie cette fréquence. Programmer ensuite cette fonction.

```
def frequence(N,t,l):
    S=0
    for i in range(N):
        if random()<1-exp(-l*t):
            S=S+1
    return...
```

c) En fixant une valeur de t et en choisissant la valeur de λ déterminée dans la partie précédente, représenter graphiquement cette fréquence en fonction de N.
d) Émettre une conjecture quant à la convergence de cette fonction. Que représente cette limite ?

4. Déduire des questions précédentes l'approximation suivante : $\dfrac{N-n}{N} = 1 - e^{-\lambda t}$.

5. En déduire qu'une approximation de t peut être donnée par $\dfrac{\ln(N) - \ln(n)}{\lambda}$.

Thème 8

30 min

7 Greffes de rosiers

➡ **Objectif : Justifier et manipuler une loi géométrique.**

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie, Agronomie

Thibault aide tous les week-ends sa grand-mère dans la greffe de ses rosiers. Lorsqu'une greffe est effectuée, ils constatent dès la semaine suivante si elle a pris ou non.
On note $p = 0{,}6$ la probabilité qu'une greffe prenne.
La grand-mère de Thibault possède 20 rosiers.

1. a) Par quelle loi peut-on modéliser une tentative de greffe sur un rosier ?
b) Thibault choisit de considérer un schéma de Bernoulli et une loi binomiale pour modéliser le nombre de greffes G nécessaires pour un rosier.
Rédiger cette modélisation et calculer selon celle-ci la probabilité qu'un rosier ne soit pas greffé avant 4 semaines.

2. La grand-mère de Thibault regarde la modélisation et s'exclame : « Ton hypothèse est trop forte, tu vois bien que si une greffe prend, il n'est plus la peine d'essayer une nouvelle fois ! »
Le garçon répond alors : « Mais oui bien sûr, il s'agit en réalité du premier succès de mon schéma de Bernoulli. »
a) Justifier alors la loi réelle de G.
Le résultat de probabilité de la question **1. b)** change-t-il alors?
b) Déterminer l'espérance de G.
Interpréter ce résultat dans le contexte.

3. On note X le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les 20 rosiers.
Déterminer l'espérance de X et l'interpréter.

4. Un calcul permet de déterminer la loi de X. On donne dans le tableau de valeurs ci-contre une partie de cette loi.
On appelle cette loi la loi de Pascal.
a) Justifier pourquoi le tableau commence à $n = 20$.
b) Quelle est la probabilité qu'il ait fallu faire au total moins de 30 greffes pour que les rosiers soient tous greffés ?
c) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 50 greffes?

	A	B	C
1	n	p($X = n$)	
2	20	3,65616E-5	
3	21	0,000292493	
4	22	0,001228469	
5	23	0,00360351	
6	24	0,008288072	
7	25	0,015913099	
8	26	0,026521832	
9	27	0,039403864	
10	28	0,053195217	
11	29	0,066198492	
12	30	0,076790251	
13	31	0,083771183	
14	32	0,086563556	
15	33	0,085231809	
16	34	0,08036142	
17	35	0,07286102	
18	36	0,063753393	
19	37	0,054002874	
20	38	0,044402363	
21	39	0,03552189	
22	40	0,027707075	
23	41	0,021110152	
24	42	0,015736659	
25	43	0,011494603	
26	44	0,008237799	
27	45	0,00579941	
28	46	0,004014976	
29	47	0,002736132	
30	48	0,001837117	
31	49	0,001246298	
32	50	0,000794648	

Corrélation et causalité

Thème 9

TICE 30 min

1 TP Température et gaz à « effet de serre »

Objectif : Découvrir la notion d'ajustement d'une série statistiques à deux variables

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

A ▶ Étude de la concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère

Le CO_2 est le principal gaz à « effet de serre ». Depuis 2015, les concentrations moyennes de CO_2 dans l'ensemble de l'atmosphère terrestre sont supérieures à 400 ppm (« **p**artie **p**ar **m**illion »). Comme son nom l'indique, le ppm permet de savoir combien de molécules de CO_2 on trouve sur un million de molécules d'air. Il permet donc de rendre compte de la quantité de CO_2 dans une masse d'air donnée. Les prévisions estiment que d'ici 2030, le taux de CO_2 moyen dans l'atmosphère atteindra les 450 ppm.

1. Télécharger le fichier qui donne la concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère et la température moyenne mondiale chaque année de 1900 à 2015. Sélectionner les données des colonnes A et B, puis insérer un graphique **nuage de points**.

TICE Concentration de CO_2 lienmini.fr/maths-t09-01

	A	B	C
1	Années	Concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère en ppm	Température moyenne mondiale en dégrés Celsius
2	1900	295,7	13,8
3	1901	296,2	13,7
4	1902	296,6	13,6
5	1903	297	13,5
6	1904	297,5	13,5
7	1905	298	13,7
8	1906	298,4	13,8
9	1907	298,8	13,5
10	1908	299,3	13,5
11	1909	299,7	13,6
12	1910	300,1	13,5
13	1911	300,6	13,4
14	1912	301	13,6
15	1913	301,3	13,6
16	1914	301,4	13,8

2. Ouvrir la fenêtre **Format de l'axe** à l'aide d'un double clic sur les valeurs de l'axe des abscisses, puis indiquer 1900 comme minimum et 2040 comme maximum, puis régler le « pas » des unités principales à 10.

3. Faire de même avec l'axe des ordonnées, en indiquant 280 comme minimum et un « pas » de 10 pour les unités principales.

4. a) À l'aide d'un clic droit sur les points du nuage, sélectionner **Ajouter une courbe de tendance** dans la fenêtre de dialogue.

b) Dans la fenêtre d'affichage **Format de courbe de tendance**, faire afficher le coefficient de détermination r^2 sur le graphique. Puis sélectionner successivement **linéaire** puis **polynomiale degré 2** puis **polynomiale degré 3**, tout en observant la courbe et le coefficient r^2. Que constatez-vous ? Quel est le meilleur ajustement possible ?

c) Toujours dans la fenêtre d'affichage **Format de courbe de tendance**, faire une **prévision** « en avant » de 15. Que remarque-t-on ? Cela confirme-t-il les prévisions données dans l'énoncé ?

B ▶ Température moyenne globale

1. Sélectionner les données des colonnes A et C avec la touche **Ctrl** puis insérer un graphique **nuage de points**.

2. Régler le format de l'axe des abscisses comme dans la question **A ▶ 2.**.

3. Ajouter une courbe de tendance **polynomiale degré 3.**

4. Selon cette courbe de tendance, quelle température est prévue en 2030 ?

C ▶ Lien entre température et concentration de CO_2

1. Sélectionner les données des colonnes B et C, puis insérer un graphique « nuage de points ».

2. Régler le format de l'axe des abscisses en prenant 280 comme minimum et 450 comme maximum, et 20 pour le « pas » des unités principales.

3. Faire de même avec l'axe des ordonnées, en indiquant 0,1 pour les unités principales.

4. Ajouter une courbe de tendance **linéaire**.

5. Si la concentration de CO_2 atteint 450 ppm, quelle prévision de température donne la courbe de tendance de ce nuage de points ?

Thème 9

Contenus associés
- Suites et modèles discrets........................ Chapitre 1
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

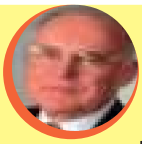
Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

TICE 30 min

2 TP Loi de Moore

➡ **Objectif : Modéliser des évolutions**



En 1965, Gordon E. Moore, l'un des cofondateurs de la société Intel, observe que le nombre de transistors qui composent un microprocesseur double tous les ans (première loi de Moore). En 1975, il précise qu'en fait ce nombre doit doubler tous les deux ans (deuxième loi de Moore) jusqu'en 2015, où on sera limité par la taille des atomes.

A ▸ Évolution du nombre de transistors selon la première loi de Moore

En 1971, un microprocesseur était constitué de 2300 transistors.

Soit (u_n) la suite qui donne, selon la première loi de Moore, le nombre de transistors dans un microprocesseur l'année de rang n, en prenant 1971 comme année de rang 0. Ainsi $u_0 = 2300$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Déterminer u_1, u_2, u_3.

3. Quelle est la nature de cette suite ?

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. Selon la première loi de Moore combien un microprocesseur devrait contenir de transistors en 1974 ? Et en 1982 ?

B ▸ Évolution réelle du nombre de transistors par microprocesseur

Les données exactes de l'entreprise Intel concernant ses microprocesseurs depuis 1974 sont présentées dans le tableau suivant.

Année	Rang de l'année x_i	Nombre de transistors y_i (en millions)
1974	0	0,006
1979	5	0,029
1982	8	0,134
1985	11	0,275
1989	15	1,2
1993	19	3,1
1997	23	7,5
1999	25	9,5
2000	26	42
2004	30	125
2007	33	582
2008	34	820

1. Sur **GeoGebra**, représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$, pour i entier de 0 à 34, associé à la série statistique à deux variables « rang x de l'année » et « nombre y de transistors en millions ».
Dans la barre de saisie, entrer successivement les coordonnées des points : (0,0.006) (5,0.029) (8,0.134) etc.….
Pour visualiser tous les points convenablement, changer l'échelle : clic droit sur le graphique **Axe X : Axe Y** puis **1 : 50**

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}006 \\ v_{n+2} = 2v_n \end{cases}$

a) Justifier que cette suite modélise l'évolution, selon la deuxième loi de Moore, du nombre de transistors, en millions, dans un microprocesseur l'année de rang n, en prenant 1974 comme année de rang 0.

b) On admet que la suite (v_n) est géométrique. Démontrer que sa raison est $\sqrt{2}$.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

d) Déterminer v_{34} et comparer avec la valeur réelle.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto 0{,}006\ \sqrt{2}^{\,x}$ définie sur l'intervalle [0 ; 34] telle que pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$.

a) Représenter la courbe de la fonction f sur **GeoGebra**. Pour cela, dans la barre de saisie, entrer

```
f(x)=0.006*sqrt(2)^x
```

b) La courbe obtenue coïncide-t-elle avec le nuage de points ?

c) Que peut-on dire de la deuxième loi de Moore pour la période 1974 à 2008 ?

3 TP

Chorale et décibels

➡ **Objectif : Découvrir l'ajustement logarithmique**

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

Dans une salle de concert, un instrument de mesure du niveau sonore, en décibels, a été placé devant la scène.

Les mesures relevées lors du passage de différents chœurs amateurs et professionnels qui sont venus donner des concerts dans cette salle sont présentées dans le tableau suivant.

Nombre x_i de chanteurs dans le chœur	4	12	15	28	30	43	55	75	116	122
Niveau sonore y_i (en dB)	75	81	80	84	84	85	87	88	91	90

A ▸ Étude du nuage de points à l'aide d'un tableur

1. Entrer les valeurs du tableau ci-dessus dans les colonnes A et B du tableur.

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 10. (Sélectionner le tableau, puis **Insertion, Graphiques, Nuage de points**).

3. Régler le minimum de l'axe des ordonnées sur 60. (Double-cliquer sur l'axe des ordonnées pour ouvrir la fenêtre **Format de l'axe**).

4. Ajouter une courbe de tendance (clic droit sur les points). Dans la fenêtre **Format de courbe de tendance** , sélectionner **Logarithmique** et **Afficher l'équation et le coefficient de détermination R² sur le graphique**.

5. On admet que l'équation $y = 4{,}5\ln(x) + 68{,}8$ est un bon modèle d'ajustement de la série statistique à deux variables x (nombre de chanteurs) et y (niveau sonore).

a) En déduire, selon ce modèle, le niveau sonore qui pourrait être relevé dans la salle de concert pour une chorale de 200 personnes.

b) Donner une estimation du nombre de chanteurs que l'on devrait réunir sur scène afin de dépasser les 100 décibels .

B ▸ Comparaison avec une autre série statistique

Le niveau sonore moyen d'un chanteur de chorale a été mesuré dans cette salle autour de 70 dB.

Le directeur de la salle prétend qu'à chaque fois que l'on double le nombre de chanteurs, le nombre de décibels augmente de 3.

1. Dans le tableur, recopier et compléter la feuille de calcul suivante qui donne selon l'affirmation du directeur, l'évolution du nombre de chanteurs et du niveau sonore correspondant.

	A	B
1	Selon le directeur de la salle :	
2	Nombre de chanteurs	Niveau sonore (en dB)
3	1	70
4	2	73
5	4	76
6		
7		
8		
9		
10		
11		

Quelle formule doit-on entrer dans la cellule A4 et quelle formule doit-on entrer dans la cellule B4 afin qu'en les recopiant simultanément vers le bas on obtienne les résultats qui correspondent à l'affirmation du directeur ?
(On s'arrêtera à la case A11)

2. Représenter le nuage de points correspondant à cette nouvelle série statistique sur le même graphique que le précédent. (Clic droit sur le graphique, « sélectionner des données », puis cliquer sur l'onglet **Ajouter**, puis cliquer dans l'onglet **Valeurs de la série des abscisses X** et sélectionner la plage de cellules de A3à A11, puis dans l'onglet **Valeurs de la série Y** effacer le contenu et sélectionner la plage de cellules de B3 à B11)

3. Ajouter une courbe de tendance « logarithmique » sur le nouveau nuage de points. Cette courbe de tendance coïncide t-elle avec celle du nuage de points de la partie **A** ?

4. Que peut-on dire de l'affirmation du directeur de la salle ?

Thème 9

4 TP **Effet cigogne**

TICE 40 min

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

➡ **Objectif : Comprendre la différence entre la corrélation et le lien de causalité de deux quantités**

Deux événements x et y sont corrélés si l'on observe un lien, une relation entre les deux. Une erreur de raisonnement courante consiste à dire : « Si x et y sont corrélés c'est que y est causé par x ». Il ne faut pas confondre corrélation et causalité car, en réalité, c'est peut-être x qui est causé par y, ou peut-être que c'est un facteur extérieur qui a causé x et y simultanément, ou peut être encore que la corrélation de x et y n'est qu'un pur hasard.
Par exemple, lors de divers recensements, on a constaté qu'en Alsace, dans les communes où nichaient beaucoup de cigognes, le taux de natalité était plus important que dans le reste du pays. La présence des cigognes a-t-elle une influence sur la natalité ?
En réalité, les communes qui abritaient des cigognes étaient des communes rurales. Or, le taux de natalité des communes rurales était plus important que celui des grandes villes.
Voici quelques exemples de corrélations entre deux variables. Pour certaines le lien de causalité est fortement discutable. Saurez-vous dépister « l'effet cigogne » ?

A ▶ Ventes de glaces et température moyenne

Une commerçante a noté chaque semaine pendant les mois d'été 2017 la température moyenne x_i dans sa ville, en degrés Celsius. Sur la même période, elle a noté le nombre y_i de ventes de glaces qu'elle a servies chaque semaine. Ses résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Température x_i (en °C)	23	25	21	30	29	32	27	25	27
	25	34	12	54	55	61	55	40	48

1. À l'aide de votre calculatrice :
a) représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 9, à l'aide de la méthode suivante.
b) déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire puis représenter la droite.

NUMWORKS

Dans le menu **Régressions**, après avoir entrée les données, appuyer sur , sélectionner l'onglet « Graphique », puis OK : le nuage de points apparaît à l'écran ainsi que la droite d'ajustement du nuage.

TI-83 Premium CE

Appuyer sur la touche stats pour entrer les valeurs puis 2nde f(x) entrer : le menu **Graph1** apparaît.

Sélectionner et compléter chaque ligne comme sur la capture d'écran. Appuyer ensuite sur fenêtre et régler les valeurs minimum et maximum de chaque axe afin de pouvoir visualiser tous les points du nuage puis appuyer sur graphe : le nuage de points apparaît alors sur l'écran.
Pour obtenir la droite d'ajustement, il faut d'abord calculer l'équation de la droite : stats, CALC

4:RégLin(ax+b), puis plusieurs fois entrer. Lorsque la fenêtre **RégLin** est obtenue, appuyer sur la touche f(x), puis sur la touche var, sélectionner **5:Statistiques…**, puis EQ, **1:EQRég**, l'équation de la droite apparait alors. Appuyer sur graphe : la droite d'ajustement est dessinée.

CASIO GRAPH 90 +E

Dans le menu Statistique entrer les valeurs de la série F1 GRAPH puis appuyer sur la touche F1 GRAPH1 puis sur F1 CALC puis sur F2 X et sur F1 ax+b puis sur DRAW

2. D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il y a une corrélation entre la température x et le nombre y de glaces vendues ?

3. On dit qu'il y a un lien de causalité entre deux quantités lorsque l'évolution de l'une a des effets sur l'évolution de l'autre.
Dans le contexte de l'énoncé peut-on dire qu'il y a un lien de causalité entre la température x et le nombre de glaces vendues y ?

4. Si l'on considère que l'ajustement affine réalisé à la question **1. b)** avec la droite de régression peut modéliser de façon approché le lien entre la température et les ventes de glaces, combien de glaces pourrait-elle vendre pendant une semaine de canicule où la température moyenne serait de 37° ?

B ▶ Consommation de viande et espérance de vie

Les données du tableau ci-dessous représentent, pour l'année 2018, la consommation de viande x_i en kilogrammes par habitant et l'espérance de vie y_i (moyenne entre homme et femme), en années, de différents pays.

Pays	x_i (en kg · hab^{-1})	y_i (en années)
Australie	92	82,8
France	87,5	82,4
Paraguay	41	74
Égypte	22	70,9
Indonésie	12	69,1
Mexique	50	76,6
Ethiopie	5,2	64,8
Pakistan	8,4	66,4

1. a) À l'aide de la calculatrice représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 8.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r. Représenter la droite d correspondante.

2. a) D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il existe une corrélation entre la consommation de viande et l'espérance de vie ?

b) En 2018 la consommation de viande d'Israël était égale à 82 kg · hab^{-1} et celle d'Arabie Saoudite 40,6 kg · hab^{-1} (données de l'OCDE). En utilisant l'ajustement affine de la question **1. b)** donner une estimation de l'espérance de vie en 2018 en Israël et en Arabie Saoudite. Comparer avec la valeur réelle recherchée sur Internet.

3. Peut-on en conclure qu'il y a un lien de causalité entre la consommation de viande et l'espérance de vie ? L'affirmation : « Plus on mange de viande, plus on vit vieux » est-elle correcte ? Pourquoi ?

C ▶ Prix du timbre et consommation de lait

Dans le tableau ci-dessous sont présentés le prix du timbre (en euros) et la consommation de lait (en litres par habitant) en France de 2010 à 2015 :

Prix x du timbre (en €)	0,58	0,6	0,6	0,63	0,66	0,76
Consommation de lait (en L·hab^{-1})	57	56	55,4	54	53	51

1. À l'aide de votre calculatrice :

a) représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 6.

b) déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire puis représenter la droite.

2. D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il y a une corrélation (négative) entre le prix du timbre et la consommation de lait ?

3. Peut-on en conclure qu'il y a un lien de causalité entre l'augmentation du prix du timbre et la baisse de la consommation de lait ?
L'affirmation : « Plus l'envoi de courrier est cher moins on consomme de lait » est-elle pertinente ?

Thème 9

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

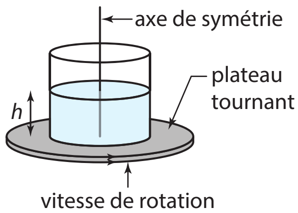
30 min

5 TP Force centrifuge

➡ **Objectif :** Ajuster avec un changement de variable

A ▸ Effet sur un liquide

Dans un laboratoire on dispose un récipient rempli d'un liquide sur un plateau tournant afin d'observer différentes caractéristiques de ce liquide en rotation.
On fait tourner le plateau à vitesse constante.



Dans le tableau suivant, on donne, en mm, la hauteur h du liquide dans le récipient en fonction de sa distance x au centre.

x (en mm)	0	5	8	10	12	15	20
h (en mm)	7,6	8,4	9,3	10,4	11,3	13,6	17,8

Le nuage de points associé ayant une forme d'arc de parabole, on décide de chercher la fonction du second degré f dont la courbe s'ajusterait au mieux au nuage.

1. On pose $y = \sqrt{h - 7,6}$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0	5	8	10	12	15	20
$y = \sqrt{h - 7,6}$							

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables x et y et en déduire que le nuage de points de cette série statistique à deux variables (x , y) peut être ajusté par une droite.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (Les coefficients seront arrondis au millième) puis en déduire l'expression de h en fonction de x.

4. En déduire que la fonction f du second degré qui modélise de façon approchée la hauteur h en fonction de la distance au centre x peut être définie de façon approchée sur $[0 ; 25]$ par $f(x) = 0,025\,x^2 + 0,015x + 7,602$

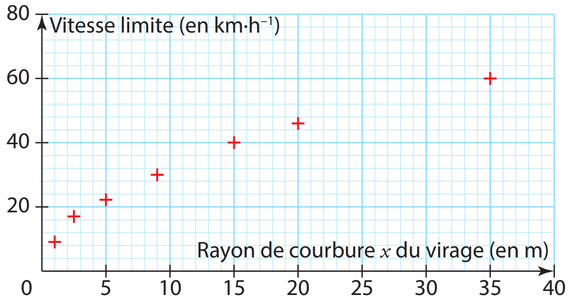
5. Afficher le tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs de x correspondant à celles données dans l'énoncé et comparer aux valeurs de h obtenues expérimentalement et données dans l'énoncé.

Remarque L'effet de la force centrifuge sur un fluide permet de concevoir des télescopes à miroir liquide. Une couche de mercure liquide est déposée dans un récipient en rotation autour de l'axe central, et forme ainsi un miroir parabolique.

B ▸ Effet sur une cycliste

On a relevé pendant plusieurs courses cyclistes et par temps sec, les vitesses maximales, en km · h^{-1}, des coureurs selon le rayon de courbure, en m, d'un virage. On a obtenu les résultats suivants.

Rayon x (en m)	1,5	2,5	5	12	17,5	25	33
Vitesse v (en km · h^{-1})	10	13	20	30	37,5	44	50



Le nuage de points associé présentant une forme de « demi » parabole renversée on décide de chercher la fonction g de la famille « racine carrée » dont la courbe s'ajusterait au mieux au nuage :

1. On pose $y = v^2$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x	1,5	2,5	5	12	17,5	25	33
$y = v^2$							

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables x et y et en déduire que le nuage de points de cette série statistique à deux variables (x , y) peut être ajusté par une droite.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (Les coefficients seront arrondis au millième).
Sachant que $y = v^2$, déterminer l'expression de v en fonction de x.

4. À quelle vitesse maximum peut rouler une cycliste, selon ce modèle, dans un virage dont le rayon de courbure est égal à 10 m ?

Remarque L'effet de la force centrifuge permet d'indiquer, sur la route, les limitations de vitesse à l'entrée des virages.

Dicomaths

Lexique

A

Ajustement affine p. 226

Ajustement exponentiel p. 228

Al-Haytham dit Alhazen (Ibn) (965-1040)

Mathématicien, physicien et philosophe arabe, ses travaux portent sur l'optique et notamment l'optique physiologique.
Il énonce pour la première fois les lois de la démarche scientifique et devance des scientifiques européens (de quelques siècles parfois) à propos de plusieurs de ses découvertes.
Un astéroïde porte son nom.

Algorithme

Séquence d'instructions finie qui permet de résoudre un problème.

Archimède (de Syracuse) (287-212 av. J.-C.)

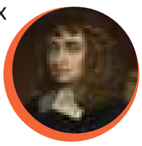
Physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (Grande Grèce), ses travaux portent particulièrement sur la géométrie, la numération et la notion d'infini. Il détermine un encadrement de π en utilisant des polygones inscrits et exinscrits.

Asymptote horizontale p. 44

Asymptote verticale p. 46

B

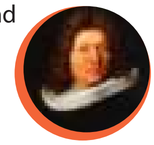
Barrow (Isaac) (1630-1677)



Mathématicien anglais, ses travaux concernent le calcul infinitésimal (tangentes) et l'optique géométrique. Professeur de Newton, il démissionne de sa chaire de mathématiques à Cambridge en faveur de ce dernier.

Bénéfice : Différence entre la recette et les coûts

Bernoulli (Jacques) (1654-1705)



Mathématicien et physicien suisse, grand frère de Jean.
Il définit la notion de probabilité et introduit les notations encore utilisées au XXI^{e} siècle.
Ses neveux Nicolas et Daniel poursuivent par la suite son œuvre.

Bernoulli (épreuve, loi, schéma) p. 170, p. 172

Bienaymé (Irénée-Jules) (1796-1878)

Mathématicien français, spécialisé en probabilités et en statistiques, il perpétue les travaux de Laplace en généralisant la méthode des moindres carrés.
Il énonce l'inégalité de Bienaymé démontrée plus tard par Tchebychev, devenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

C

Cauchy (Augustin Louis) (1789-1857)

Mathématicien français et professeur à l'École Polytechnique, il est connu pour son *Cours d'Analyse* où, entre autres, il définit de manière rigoureuse la convergence de séries et où il énonce (et démontre) le théorème des valeurs intermédiaires.

Cavalieri (Bonaventure) (1598-1647)

Mathématicien et astronome italien, il est connu notamment pour le principe de Cavalieri, précurseur du calcul intégral et pour la géométrie des indivisibles. Galilée, avec lequel il entretient une correspondance prolifique, dit de lui que « peu ou nul, depuis Archimède, a vu aussi profondément dans la science de la géométrie ».

Consignes (vocabulaire des)

Associer Unir des éléments dans lesquels on voit des points communs.

Balayer Observer des tableaux de valeurs successifs en réduisant au fur et à mesure le pas pour avoir un encadrement de plus en plus précis de la valeur cherchée.

Calculer Fournir une valeur numérique à l'aide des règles de calculs.

Chercher Tester plusieurs possibilités à partir des informations données dans l'énoncé, essayer de faire le lien avec des propriétés connues, utiliser la calculatrice ou un logiciel.

Communiquer Expliquer un raisonnement à l'écrit ou à l'oral, expliquer une démarche même si celle-ci n'aboutit pas à l'aide de phrases, de formule, de schémas…

Comparer Comparer deux nombres signifie déterminer s'ils sont égaux ou lequel est plus grand que l'autre.

Conjecturer Émettre une supposition à partir d'observations.

Démontrer À partir des éléments connus, effectuer un raisonnement ou un calcul pour obtenir le résultat ou la propriété cherchée.

Développer Écrire un produit sous forme d'une somme équivalente.

Encadrer Encadrer un nombre c'est donner un couple de valeurs (a ; b) entre lesquelles on est sûr que ce nombre se trouve.
On écrit une double inégalité : $a \leqslant x \leqslant b$.

Expliquer Rendre compréhensible un raisonnement, une idée.

Interpréter Faire une phrase situant le résultat obtenu dans le contexte (souvent concret) de l'exercice.

Modéliser Décrire une situation concrète en utilisant les connaissances mathématiques, par exemple : écrire une équation ou une fonction permettant d'étudier la situation proposée.

Optimiser Résoudre un problème consistant à trouver le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.

Raisonner ↪ **Démontrer**

Représenter Fournir une information sous forme graphique : figures codées en géométrie, courbe d'une fonction, arbre ou schéma en probabilité,…

Résoudre Trouver toutes les solutions possibles.

Simplifier (une fraction) Opération qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles.

Coefficients binomiaux p. 172

Coefficient de corrélation linéaire p. 226

Concavité et convexité p. 74

Continuité p. 50

D

Densité de probabilité p. 198

Deparcieux (Antoine) (1703-1768)

Mathématicien français, il publie des traités concernant la trigonométrie et les probabilités. Son *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, dans lequel on trouve les « tables de mortalité » est considéré comme l'œuvre fondatrice de la science dite actuarielle c'est-à-dire de l'application des mathématiques à la finance et aux assurances.

Dérivée seconde p. 74

Dichotomie

Méthode itérative pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous intervalle dans lequel la solution de l'équation appartient. Lorsque la précision obtenue est atteinte, la méthode est arrêtée.

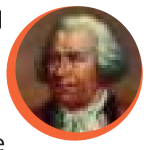
Droite de régression p. 226

E

Équation différentielle p. 116

Espérance (loi à densité) p. 200

Euler (Leonhard) (1707-1783)



Mathématicien et physicien suisse. Il introduit une grande partie des notations des mathématiques modernes : fonctions trigonométriques, notation $f(x)$, lettre e pour le nombre d'Euler, lettre i pour l'unité imaginaire etc.

Extrapolation p. 230

F

Fermat (Pierre de) (1607-1665)

Magistrat, poète et mathématicien français. Il appliqua l'algèbre à la géométrie et est l'auteur de plusieurs théorèmes ou conjectures en théorie des nombres. La plus connue fut démontrée 300 ans plus tard par Andrew Wiles.

Fisher (Ronald Aylmer) (1890-1962)

Statisticien et biologiste anglais, il est l'auteur de nombreuses notions statistiques encore utilisées actuellement : analyse de variance, information de Fisher, maximum de vraisemblance, test de Fisher etc.

G

Gauss (Carl Friedrich) (1707-1783)

Mathématicien, physicien et astronome allemand, il est surnommé « le prince des mathématiciens ». En 1801, il publie ses *Disquisitiones arithmeticae* où il définit la notion de congruence et les premières propriétés modulaires associées.

Gosset (William Sealy) dit Student (1876-1937)

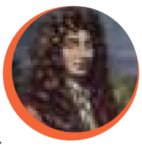
Statisticien anglais, il invente le test de Student afin de stabiliser le goût de la boisson produit par son entreprise. Ce test permet de décréter notamment si la différence entre deux échantillons est pertinente.

H

Héron (d'Alexandrie) (I[e] siècle ap. J.-C.)

Mathématicien grec, ses travaux portent essentiellement sur la géométrie. La formule d'Héron permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de ses côtés et la méthode de Héron permet l'extraction de la racine carrée d'un nombre.

Huygens (Christian) (1629-1695)



Mathématicien, physicien et astronome néerlandais. Après avoir entendu parler de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat, il publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard.

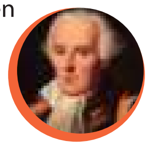
I

L

Lagrange (Joseph-Louis) (1736-1813)

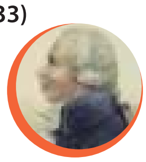
Mathématicien et astronome italien naturalisé français, il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. On lui doit la notation indicielle pour les suites numériques et il est à l'origine de la notation $f'(x)$.

Laplace (Pierre-Simon de) (1749-1827)



Mathématicien, astronome et physicien français, ses connaissances en astronomie lui permettent de devenir président du Bureau des longitudes. Ses travaux portent également sur le calcul intégral, les équations différentielles et les probabilités.

Legendre (Adrien-Marie) (1752-1833)



Mathématicien français, ses travaux portent entre autres sur la théorie des nombres, les statistiques et les probabilités. Il introduit le symbole dit de Legendre au cours de ses recherches pour démontrer la loi de réciprocité quadratique.

Leibniz (Gottfried Wilhelm) (1646-1716)

Philosophe, mathématicien et diplomate allemand.
Il introduit le terme de « fonction » et invente le calcul infinitésimal.

Hui (Liu) (III[e] siècle ap. J.-C.)

Mathématicien chinois, il effectue des calculs d'aires et de volumes pour trouver le volume d'un cylindre (principe de Cavalieri) ou pour donner une estimation à 3,1416 du nombre π.
On trouve également dans ses écrits la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

Lorenz (Max Otto) (1876-1959)

Économiste américain à l'origine du concept de courbe de Lorenz. Cette dernière permet de décrire les inégalités de revenus notamment grâce au calcul de l'indice de Gini.

N

Napier (John) ou Neper (Jean) (1550-1617)

Mathématicien, physicien et astronome écossais, il invente les logarithmes afin de simplifier les calculs utilisés en astronomie.

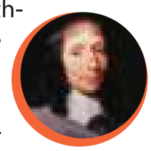
Newton (Isaac) (1642-1727)

Philosophe, mathématicien et physicien britannique. Il est l'un des fondateurs du calcul infinitésimal avec Leibniz et est à l'origine de la formule du binôme qui porte son nom.

Nuage de points p. 224

P

Pascal (Blaise) (1623-1662)



Mathématicien, physicien et théologien français, il conçoit et fabrique une machine arithmétique : la Pascaline. Il entretient une correspondance avec Pierre de Fermat avec lequel il développe un nouveau champ de recherche en mathématiques : les calculs de probabilités.

Pearson (Karl) (1857-1936)

Mathématicien anglais, il est connu pour ses travaux concernant le coefficient de corrélation entre deux variables et le test du $\chi 2$. Il est considéré comme étant un des fondateurs des biostatistiques.

Point d'inflexion p. 76

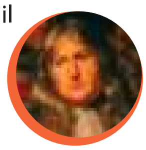
Point moyen p. 224

Primitive (d'une fonction) p. 116

R

Recette
Somme d'argent encaissée.

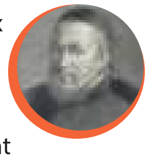
Roberval (Gilles Personne de) (1602-1675)



Mathématicien et physicien français, il est l'inventeur de la balance qui porte son nom. Dans son *Traité de mécanique des poids soutenus par des puissances sur des plans inclinés à l'horizontale*, il définit précisément le mot « force ».

S

Saint-Vincent (Grégoire) (1584-1667)



Mathématicien flamand, ses travaux portent sur les calculs d'aires notamment dans ses recherches concernant la quadrature du cercle. Ses écrits, même si perfectibles, influencent grandement Leibniz lors de l'invention du calcul infinitésimal.

Scalaire

Nombre réel dans le contexte de ce manuel.

Sécante p. 72

Série statistique (à deux variables) p. 224

Suite

Une suite (u_n) est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur un ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ avec n_0 fixé, qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$, noté u_n.

Suite arithmétique

Une suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé la raison de la suite arithmétique.

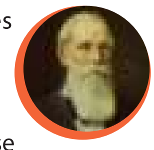
Suite arithmético-géométrique p. 24

Suite géométrique

Une suite (u_n) avec $n \in \mathbb{N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q\, u_n$.
q est appelé la raison de la suite géométrique.

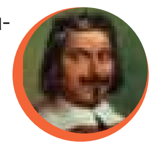
T

Tchebychev (Pafnouti Lvovitch) (1821-1894)



Mathématicien russe, ses domaines d'études sont la théorie des nombres, les probabilités et les statistiques. Il poursuit l'œuvre de ses prédécesseurs en démontrant de manière rigoureuse des théorèmes limites. Il démontre notamment l'inégalité énoncée par Bienaymé, devenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

Torricelli (Evangelista) (1608-1647)



Mathématicien et physicien italien, il étudie la mécanique des fluides et énonce le principe.

V

Variable aléatoire à densité p. 198

Variance (Loi à densité) p. 200

Rappels de Seconde et de Première

Puissances

- Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

- Par convention, $a^0 = 1$.
- On considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$ • $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$ • $(a^m)^p = a^{m \times p}$

Racine carrée

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$
- Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.
- Pour tout nombre a : $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$
- Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Pour tous nombres positifs a et b (avec $b \neq 0$) : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Calcul algébrique

Distributivité

- Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a : $k(a+b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Équations

- Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.
- Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.
- On considère l'équation $x^2 = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $x^2 = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **une seule solution réelle** $x = 0$.
  - si $\boldsymbol{k > 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **deux solutions réelles** $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.
- On considère l'équation $\sqrt{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \geqslant 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ a **une seule solution réelle** $x = k^2$.
- On considère l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \neq 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ a une **seule solution réelle** $x = \dfrac{1}{k}$.

Proportions et évolutions

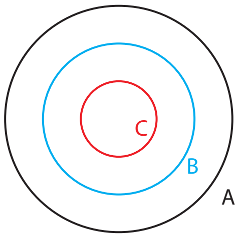
Proportions d'ensembles emboîtés

- On considère trois ensembles A, B et C emboîtés tels que $C \subset B \subset A$.

On note p la proportion de la population de B dans la population de A.

On note p' la proportion de la population de C dans la population de B.

Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à $p \times p'$.

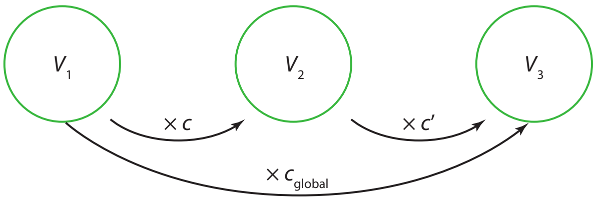


Variations absolue et relative

- On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A.
  - la variation absolue est : $V_A - V_D$
  - la variation relative, ou taux d'évolution, est : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$

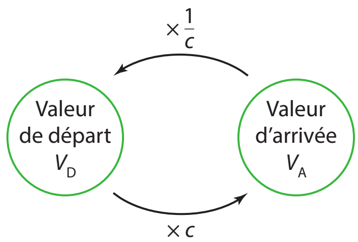
Évolutions successives

- Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à une valeur V_3, le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre V_1 et V_3. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global et est égal à $c \times c'$ où c (respectivement c') est le coefficient multiplicateur de la première (respectivement de la seconde) évolution.



Évolution réciproque

- Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A, le taux réciproque est le taux permettant de revenir de V_A à V_D. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque et est égal à $\dfrac{1}{c}$ où c est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.



Statistiques descriptives

Moyenne

- On considère une série statistique de p valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ donnée dans le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

La **moyenne** de cette série est : $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$

Moyenne pondérée

- On considère une série statistique constituée de p valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectées de p coefficients (ou poids) $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

La **moyenne pondérée** de cette série est : $m = \dfrac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$

Probabilités

Équiprobabilité

- Une loi de probabilité est dite **équirépartie** lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est :

$$\frac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{n}$$

On est alors dans une situation d'**équiprobabilité.**

- La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet évènement.

Dans une situation d'**équiprobabilité**, où il y a n issues, la probabilité d'un événement A réalisé par k issues est :

$$p\,(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}$$

Probabilité de l'évènement contraire

- Soit A un événement. On a : $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}})$

Relation entre union et intersection

- Soit A et B deux événements. On a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

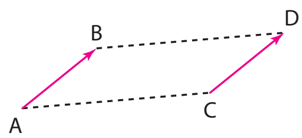
Vecteurs

Définitions

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est défini par :
  - sa **direction** (celle de la droite (AB),
  - son **sens** (de A vers B),
  - sa **norme** (la longueur du segment AB).

- ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$



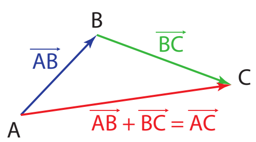
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** s'il existe un réel non nul k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

- Deux droites (AB) et (MN) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont **colinéaires**.
- Trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
- Soient A et B deux points distincts d'une droite d alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite d.

Relation de Chasles

- A, B, C trois points.



On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Géométrie repérée

- On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

• Distance :	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
• Le milieu d'un segment [AB] a pour coordonnées :	$\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$
• Coordonnées du vecteur :	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$
• Égalité de vecteurs :	$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$
• Somme de deux vecteurs :	$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
• Multiplication par un réel k :	$k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$
• Norme d'un vecteur :	$\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{x^2+y^2}$
• Déterminant de deux vecteurs :	$\det(\vec{u},\vec{v})=xy'-x'y$

- Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si leur **déterminant est nul.**
- Une **équation cartésienne** de la droite passant par le point A et de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme :

$$ax+by+c=0$$

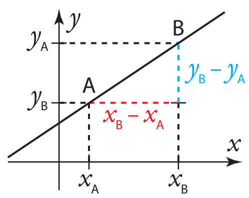
- Toute droite non verticale a une **équation réduite** de la forme : $y=mx+p$

où m s'appelle le **coefficient directeur** et p **l'ordonnée à l'origine.**

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

- Le **coefficient directeur** ou pente d'une droite (AB) est :

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\quad \text{si } x_A\neq x_B$$



- Toute droite **verticale** a une équation réduite de la forme : $x=k$
- Deux droites d'équations réduites $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont **parallèles** si et seulement si $m=m'$.

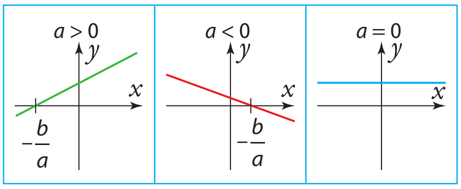
Si, de plus, $p=p'$ alors elles sont **confondues.**
- Deux droites d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont **parallèles** si et seulement si

$$ab'-ba'=0$$

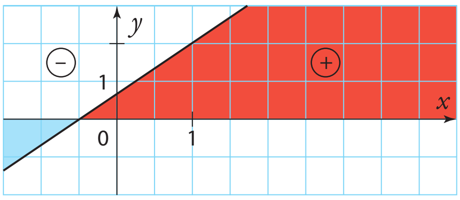
Fonctions

Fonction affine

- Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ (avec m et p réels) :
  - si $\boldsymbol{a > 0}$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a < 0}$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a = 0}$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.
- La fonction affine f s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.



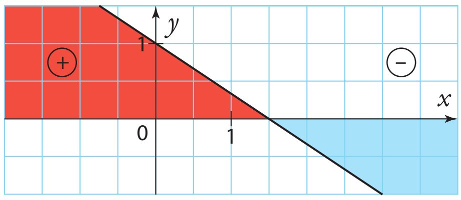
$a > 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f est négative puis positive.

$a < 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f est positive puis négative.

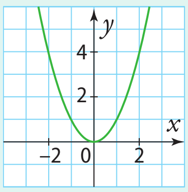
Fonctions de référence

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \to x^2$	↘	0	↗

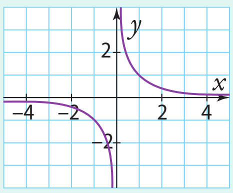


Fonction inverse

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \to \dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

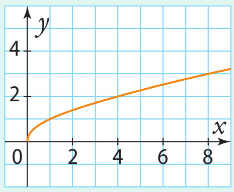


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0	$+\infty$
$x \to \sqrt{x}$	0	↗

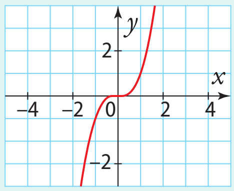


Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \to x^3$	↗	



Second degré

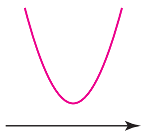
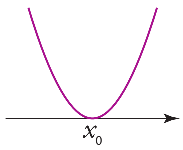
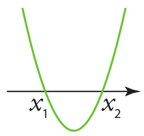
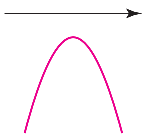
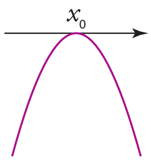
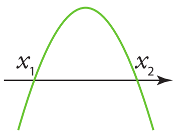
Fonction polynôme de degré 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$

Forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α et β réels.

Coordonnées du sommet $S(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Courbes représentatives

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	 x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: $+$	 x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $+$	 x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a < 0$	 x : $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: $-$	 x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $-$	 x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$
Factorisation	f n'admet pas de racine. Il n'y a donc pas de factorisation.	f a une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ On a alors : $f(x) = a(x - x_0)^2$	f admet deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ On a alors : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ De plus : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$	(u_n) est une suite arithmétique de raison r	(u_n) est une suite géométrique de raison q et $u_0 \neq 0$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1} = u_p \times q^{n-p}$
Variation	• Si $r > 0$: (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$: (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante.	• Si $q > 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement croissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement décroissante. • Si $0 < q < 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement décroissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement croissante. • Si $q = 0$ ou $q = 1$: (u_n) est constante. • Si $q < 0$: (u_n) n'est pas monotone.
Somme, $n \geqslant 1, q \neq 1$	$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Dérivation

Dérivées des fonctions de référence

f est définie sur	Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations et dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonctions u et v	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
Pour k constante réelle, $k \times u$	$k \times u'$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Pour a et b réels : $u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$
e^{ax+b}	$a \times e^{ax+b}$

Équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en un point d'abscisse a $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

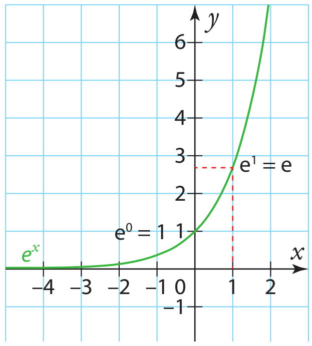
Fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  - $e^0 = 1$
  - $e^1 = e$
  - $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$
- Pour tous réels a et b, $n \in \mathbb{Z}$:

  - $e^{a+b} = e^a \times e^b$
  - $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
  - $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
  - $(e^a)^n = e^{an}$



Produit scalaire

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormé

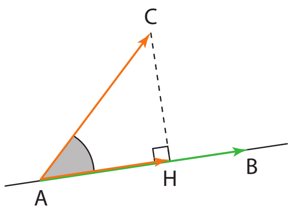
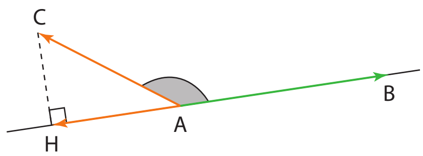
Formule analytique $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Formule géométrique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Formule avec les normes $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Projeté orthogonal

- Soit A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = +AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.
	

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, ce qui se traduit par :

$$xx' + yy' = 0$$

Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Trigonométrie

Fonctions sinus et cosinus

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$. Ce sont des fonctions périodiques de période 2π.

• $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ • $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

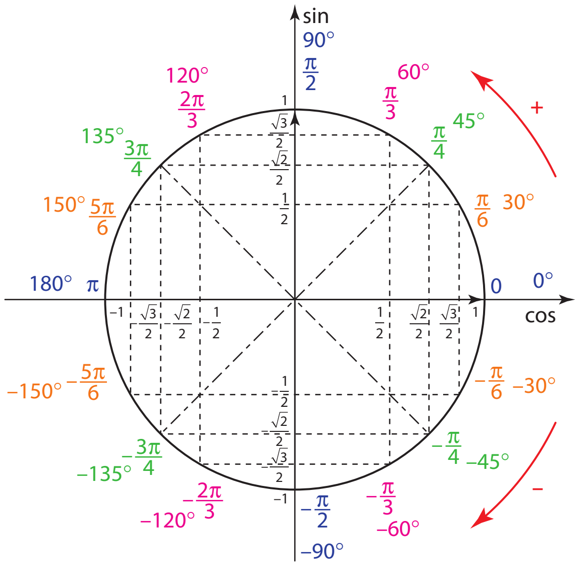
- Pour tout nombre réel x

• $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ • $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
• $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Cercle trigonométrique



Angles associés

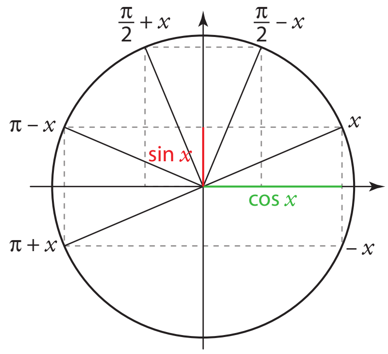
• $\cos(-x) = \cos(x)$ • $\sin(-x) = -\sin(x)$

• $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

• $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

• $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

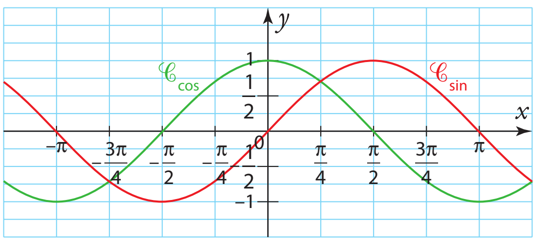
• $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$



Fonctions sinus et cosinus

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, ce sont des fonctions périodiques de **période 2π**, dites « **2π-périodiques** ».

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$



La fonction sinus est impaire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

La fonction cosinus est paire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

Formulaire de Terminale

Fonction logarithme népérien

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$:

  - $e^{\ln(x)} = x$
  - $\ln(e^x) = x$
  - $\ln(1) = 0$
  - $\ln(e) = 1$ $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

  - $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
  - $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

- Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$:

  - $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
  - $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
  - $\ln(a^n) = n\ln(a)$
  - $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

Dérivabilité

- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Fonctions

Théorème

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

Asymptote horizontale

- La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$
- La droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ou lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Propriétés

- Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:
  - f est **convexe** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **positive** sur I.
  - f est **concave** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **négative** sur I.
- Soit f est une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: si f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in \mathrm{I}$ alors $\mathrm{M}(x_0\,;f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe représentative de f.

Probabilités

Loi uniforme sur {1 ; 2 ; … ; *n*}

Si X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur {1 ; 2 ; … ; n} alors :

- $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$
- $E(X) = \dfrac{1+n}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors :

- $E(x) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Loi binomiale

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ alors, pour tout entier k compris dans $[0\,;n]$, on a :

- $p(X = k) = \dbinom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Propriété

Pour tout nombres entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$
- $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
- $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$

Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\,;1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a\,;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p et k un entier naturel non nul. On a alors :

- $p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$
- $p(x \leqslant k) = 1-(1-p)^k$
- $p(x > k) = (1-p)^k$
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$

Non vieillissement ou absence de mémoire de la loi géométrique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

X suit une loi géométrique si et seulement si pour tous s et t des entiers naturels non nuls :

$$p_{X>s}(X > s+t) = p(X > t)$$

Loi à densité

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur I.

La fonction de répartition de la variable X est la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = p(X \leqslant x)$.

- $E(X) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x)\,\mathrm{d}x$
- $V(X) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} (x-E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Probabilités

Loi uniforme sur $[a\,;b]$

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$ alors, pour tous réels c et d compris entre a et b, on a : $p(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$ et sa fonction de répartition est définie sur $[a\,;b]$ par

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

De plus :

$$\bullet\ E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \bullet\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi exponentielle de paramètre λ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Alors pour tout nombres positifs a, c et d :

- $p(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $p(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout nombres strictement positifs t et h, on a :

$$p_{(X>t)}(X > t+h) = p(X > h)$$

Suites

Théorème

- Toute suite **croissante et majorée** est **convergente**.
- Toute suite **décroissante et minorée** est **convergente**.

Théorème des gendarmes

Si à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers un même nombre ℓ, alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.

Convergence des suites géométriques

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ avec k réel
$f(x) = x^n$ avec n entier relatif sauf -1	• $\mathbb{R}$ si n est un entier naturel • $]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$ si n est un entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k réel
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$ avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$	$F(x) = \ln(x) + k$ avec k réel

Équations différentielles

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = Ke^{ax}$ avec K réel .

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution telle que $f(x_0) = y_0$.

Calcul intégral

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors :

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ que l'on note aussi $[F(x)]_b^a$.

Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

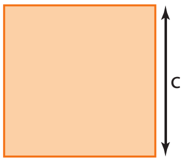
La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Formulaire de géométrie

Aires et périmètres

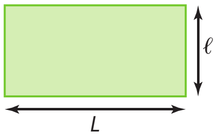
Carré



$\mathcal{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

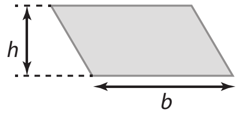
Rectangle



$\mathcal{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

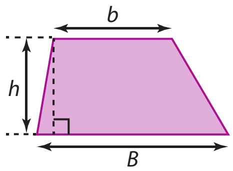
Parallélogramme



$\mathcal{A} = b \times h$

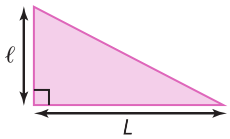
$p = 2 \times (L + \ell)$

Trapèze



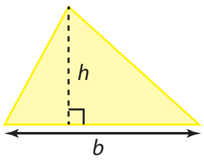
$\mathcal{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

Triangle rectangle



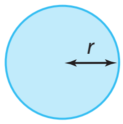
$\mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

Triangle quelconque



$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

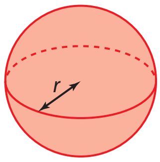
Disque



$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

$p = 2\,\pi\,r$

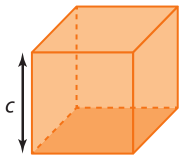
Sphère



$\mathcal{A} = 4\pi \times r^2$

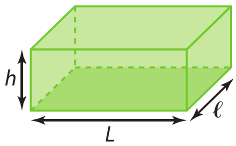
Volumes

Cube



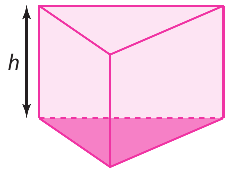
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = c^3$

Parallélépipède rectangle ou pavé



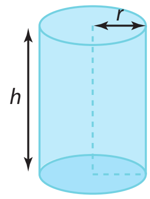
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = L \times \ell \times h$

Prisme droit



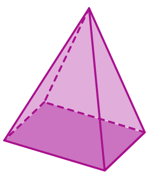
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h$

Cylindre



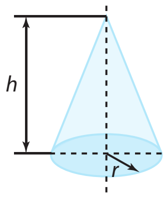
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{base} \times h = \pi \times r^2 \times h$

Pyramide



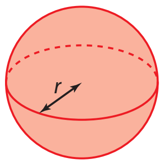
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3}$

Cône de révolution



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{base} \times h}{3} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$

Sphère



$\mathcal{V} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

1 ET et OU en mathématiques

Définition **Et**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 ET une proposition 2 sont vérifiées, cela veut dire qu'elles sont vérifiées à la fois.
Ce "ET" mathématique est très lié au symbole $\cap$.

Exemple

① On cherche le nombre n tel que n soit un entier pair ET appartienne à l'intervalle [3,5 ; 5,9].
Il s'agit de trouver un nombre n (s'ils existe(nt)) qui vérifie les deux conditions à la fois c'est-à-dire qui est un entier pair ET qui appartient à [3,5 ; 5,9].
Le seul nombre vérifiant ces deux conditions est 4 donc $n = 4$.

② On considère le programme **PYTHON** :

```python
import random
x = random.randint(1,10)
if x > 3 and x <= 7.3:
  print("Dans l'intervalle !")
else:
  print("Pas dans l'intervalle...")
```

Le programme affiche **`"Dans l' intervalle!"`** si le nombre **x** vérifie à la fois **x > 3** et **x ⩽ 7,3** c'est-à-dire si **3 < x ⩽ 7,3**.

Définition **Ou**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 OU une proposition 2 est vérifiée, cela veut dire qu'au moins l'une des deux est vérifiée.
Ce "OU" mathématique est très lié au symbole $\cup$.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Quelles sont les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 ?
Les nombres entiers entre 1 et 6 qui vérifient la proposition :
• « être pair » sont 2 ; 4 ; 6 ;
• « être strictement supérieur à 2 » sont 3 ; 4 ; 5 ; 6.
Les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 sont donc 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 qui sont tous les entiers entre 1 et 6 qui vérifient au moins l'une des deux conditions (éventuellement les deux pour 4 et 6).

Remarques

- Dans le langage courant, le OU est **exclusif**. Par exemple, quand sur un menu au restaurant il est écrit « fromage ou dessert » cela veut dire que l'on peut prendre soit du fromage, soit un dessert, mais pas les deux.
- Dans le langage mathématique, le OU est **inclusif**. Dans l'exemple précédent du dé à 6 faces, les nombres 4 et 6 vérifient les deux conditions à la fois cela veut dire que si on les obtient, le résultat est bien pair OU strictement supérieur à 2.

Exemple

L'algorithme suivant illustre l'exemple précédent du dé à 6 faces.

```
x ← Entier aléatoire entre 1 et 6
Si x est pair ou x>2
   Afficher "Pair ou strictement supérieur à 2"
Fin si
```

Il affiche « **`Pair ou strictement supérieur à 2`** » si l'entier aléatoire **x** a pour valeur 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

2 Implication, contraposée, réciproque et équivalence

Définition **Implication**

Une implication est une proposition de la forme : **SI énoncé 1 ALORS énoncé 2**
Symboliquement, cela se note : **énoncé 1** $\Rightarrow$ **énoncé 2**
Cela veut dire que si l'énoncé 1 est vérifié alors l'énoncé 2 l'est forcément (ou nécessairement) également.
On dit que l'énoncé 1 est une **condition suffisante** et que l'énoncé 2 est une **condition nécessaire.**

Exemples

1 La proposition suivante est VRAIE : SI la prise est débranchée ALORS la lampe est éteinte.
On peut la traduire par : la prise est débranchée $\Rightarrow$ la lampe est éteinte (se lit également « la prise est débranchée entraîne la lampe est éteinte »).

2 En revanche, la proposition suivante est FAUSSE : SI la lampe est éteinte ALORS la prise est débranchée.
En effet, si la lampe est éteinte, la prise peut être branchée mais l'interrupteur sur OFF.

Définition **Contraposée**

Si une implication **énoncé 1** $\Rightarrow$ **énoncé 2** est vraie alors sa **contraposée** :
contraire de l'énoncé 2 $\Rightarrow$ **contraire de l'énoncé 1** est également vraie.

Exemple

La proposition suivante est vraie : SI je viens de manger ALORS je n'ai pas faim.
Sa contraposée : SI j'ai faim (le contraire de « je n'ai pas faim ») ALORS je ne viens pas de manger (le contraire de « je viens de manger ») est également vraie.

Définition **Réciproque**

Si l'on considère une implication **énoncé 1** $\Rightarrow$ **énoncé 2**, on dit que :
énoncé 2 $\Rightarrow$ **énoncé 1** est sa **réciproque.**
Cette réciproque peut être vraie ou non.

Exemple

La proposition suivante est VRAIE : SI $x = 3$ ALORS $x^2 = 9$.
En revanche, sa réciproque : SI $x^2 = 9$ ALORS $x = 3$ est FAUSSE.
En effet, si $x^2 = 9$, x peut être égal à 3 ou à –3.

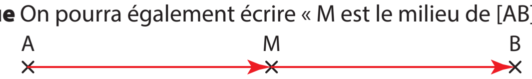
Définition **Équivalence**

Si une implication **énoncé 1** $\Rightarrow$ **énoncé 2** et sa réciproque **énoncé 2** $\Rightarrow$ **énoncé 1** sont vraies,
on dit que les énoncés 1 et 2 sont équivalents.
À l'aide d'un symbole mathématique, cela se note :
énoncé 1 $\Leftrightarrow$ **énoncé 2.**

Exemple

Soit 3 points A, B et M. M est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ car l'implication « Si M est le milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. » et sa réciproque « Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu de [AB] » sont vraies.

Remarque On pourra également écrire « M est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. »



3 Inégalités et inéquations

Définition **Inégalité**

***a*, *b*, *c* et *k* sont des nombres réels.**

• Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité :

si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité :

$$\text{si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

• Multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité :

$$\text{si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Définition **Inéquation**

Une inéquation est une inégalité dans laquelle une inconnue (ou des inconnues) est présente.

Remarques

- Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.
- Si on applique une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a le même ensemble des solutions.

Exemple

Résolvons l'inéquation $-2x - 8 < 4$.

$$\begin{aligned} & -2x - 8 < 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -2x < 12 \\ \Leftrightarrow \quad & x > -6 \text{ (on divise par } -2 \text{ qui est négatif).} \end{aligned}$$

Les trois égalités $-2x - 8 < 4$; $-2x < 12$ et $x > -6$ sont équivalentes puisqu'elles sont obtenues successivement en ajoutant 8 aux deux membres de l'inégalité puis en les divisant par -2 et en changeant le sens de l'inégalité.

Cela veut dire que x est solution de $-2x - 8 < 4$ si et seulement si x est solution de $x > -6$ (que l'on peut voir comme une inéquation d'ensemble des solutions immédiat), autrement dit que l'ensemble des solutions de $-2x - 8 < 4$ est $]-6\,;+\infty[$.

4 Quantificateurs universels

Définition **Il existe**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'il existe un réel x (ou un entier *n* etc.) qui vérifie une certaine propriété, il s'agit simplement de trouver un exemple pour lequel la propriété est vérifiée.

Exemple

Montrons qu'il existe un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$.

On constate que, pour $x = 1$, on a $2x^2 - 2 = 2 \times 1^2 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc il existe bien un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$, en l'occurrence 1.

Remarques

- Si on ne voit pas $x = 1$ directement, on peut aussi résoudre l'équation $2x^2 - 2 = 0$ avec les méthodes classiques pour le retrouver : $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
- Notons que la résolution de $2x^2 - 2 = 0$ fait plus que montrer qu'il existe une valeur de x pour laquelle $2x^2 - 2 = 0$, elle prouve que 1 et -1 sont les deux seules valeurs.

Définition **Pour tout / Quel que soit**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'une propriété est vraie « pour tout réel x » ou « quel que soit le réel x », il faut montrer qu'elle est vraie en tout généralité et non pas uniquement sur quelques exemples.

Exemple

Montrons que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est impaire.

On peut commencer, au brouillon, par se convaincre que c'est vrai en calculant $1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$, $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$; $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$; $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$; etc.

Ceci dit, nous n'avons rien démontré pour l'instant, puisqu'il faut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers (c'est implicite dans l'énoncé).

Soit donc n un entier (en toute généralité) et $n + 1$ celui qui le suit, il s'agit de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.

On calcule donc $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui est impair quel que soit n (puisque $2n$ est un multiple de 2, donc pair, $2n + 1$ est impair).

On vient de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair pour tout entier n (ou quel que soit l'entier n) donc la différence des carrés de deux entiers consécutifs est bien impair.

5 Type de raisonnement

Règle **Utilisation de la contraposée**

Lorsque l'on connaît une propriété, on peut utiliser sa contraposée (qui est également vraie) dans une démonstration.

Exemple

On sait que la propriété suivante est vraie : « Si n est un entier impair alors n^2 est impair. »

La contraposée de cette propriété est :

« Si n^2 n'est pas impair alors n n'est pas impair. »

Ce qui est équivalent à : « Si n^2 est pair alors n est pair ».

On a démontré cette nouvelle propriété par contraposée.

Règle **Raisonnement par l'absurde**

L'utilisation de la contraposée est assez proche d'un autre type de raisonnement, le raisonnement par l'absurde.

Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut montrer, puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).

On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte, donc que la propriété voulue est vraie.

Exemple

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (ne peut s'écrire sous forme d'une fraction).

On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un rationnel, alors il s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs non nuls.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc, en élevant au carré on a $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2 = 2q^2$.

On en déduit que p^2 est pair.

De plus on sait que p est pair si et seulement si p^2 est pair.

On en déduit alors que p est pair, donc il existe p' tel que $p = 2p'$.

On a alors $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2p')^2}{2} = \frac{4p'^2}{2} = 2p'^2$, ce qui signifie que q^2 est pair, ce qui est équivalent à q pair.

On a montré que q et p sont pairs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ car dans ce cas-là, on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, elle n'est donc pas irréductible comme annoncé.

Notre hypothèse de départ est donc fausse, autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Règle Contre-exemple

Pour infirmer une proposition (c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse), il suffit d'en donner un contre-exemple.

Exemple
Considérons la proposition suivante : Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers.
Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de trouver un nombre entier impair supérieur à 2 qui ne soit pas premier.
C'est le cas de 9, qui est divisible par 3.
La proposition est donc fausse.

Remarque On dit que l'on a nié la proposition « tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers ».

Règle Raisonnement par disjonction des cas

Lorsque qu'on démontre une propriété, il peut arriver que l'on doive traiter différents cas.
S'il en est ainsi, on peut procéder par disjonction des cas en faisant attention à bien traiter tous les cas possibles.

Exemple
Annie a souscrit un forfait téléphonique qui s'ajuste automatiquement à son nombre d'heures :
- si elle téléphone moins de 3 heures, elle sera facturée 6 euros au total quel que soit le nombre d'heures,
- si elle téléphone entre 3 heures et 5 heures, elle sera facturée 2 euros l'heure de communication,
- si elle téléphone plus de 5 heures, elle sera facturée 10 euros au total, quel que soit le nombre d'heures.

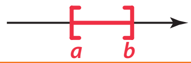
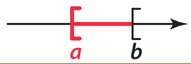
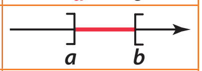
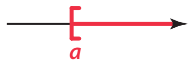
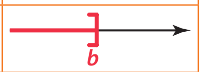
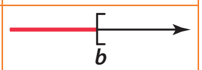
On souhaite montrer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.
Pour cela, on appelle x son nombre d'heures de communication et on va traiter les trois cas suivants :
- si $x < 3$ alors elle paie 6 euros.
- si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $6 \leqslant 2x \leqslant 10$ (or $2x$ est le montant de sa facture qui est donc inférieur ou égal à 10).
- si $x > 5$ alors elle paie 10 euros.

On voit que dans les 3 cas possibles, le montant de la facture est inférieur ou égal à 10 donc on peut affirmer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

6 Notations

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé intervalle et se note $[a\,;b]$

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in\ ]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in\ ]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in\ ]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in\ ]-\infty;b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in\ ]-\infty;b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\,;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\,;+\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty;0]$.

Définition **Ensemble de nombres**

- **$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$: ensemble des entiers naturels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif.**
- **$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$: ensemble des entiers relatifs, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif.**
- **$\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux, ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.**
- **$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ avec a un entier relatif, b un entier relatif non nul.**
- **$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.**
- **$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q}$.**

Définition **Ensembles discrets**

Lorsqu'un ensemble de nombres est constitué de valeurs isolées (on dit alors que c'est un ensemble discret), on le note en écrivant tous ses éléments entre accolades, séparés par un point-virgule.

Exemple

L'ensemble des nombres impairs compris entre 0 et 12 est $\{1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;11\}$.

Notations Il ne faut pas confondre les accolades, les crochets et les parenthèses :
- {2 ; 5} désigne l'ensemble constitué des deux éléments 2 et 5.
- [2 ; 5] désigne l'intervalle constitué de tous les nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus dans ce cas).
- (2 ; 5) désigne un couple dont la première coordonnée est 2 et la deuxième est 5.

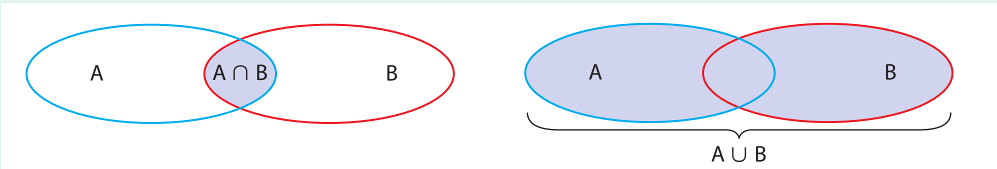
Définition Appartenance et inclusion

- Le symbole $\in$ (resp. $\notin$) désigne le fait qu'un élément **appartienne** (resp. **n'appartienne pas**) à un ensemble.
- Le symbole $\subset$ (resp. $\not\subset$) désigne le fait qu'un ensemble soit **inclus** (resp. **non inclus**) dans un autre ensemble.

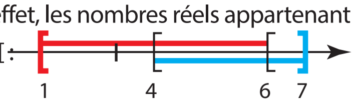
Exemples
- $5 \in \{2\,;3\,;5\,;7\,;22\}$ car 5 est bien un élément de l'ensemble {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22}.
- $2{,}3 \notin]5\,;7[$ car le nombre 2,3 n'est pas strictement compris entre 5 et 7.
- $[4\,;5] \subset [0\,;12]$ car l'ensemble [4 ; 5] est inclus dans l'ensemble [0 ; 12], c'est-à-dire que tous les nombres de [4 ; 5] sont également dans [0 ; 12].
- $\{1\,;2\,;3\} \not\subset \{2\,;3\,;5\,;7\,;22\}$ car {1 ; 2 ; 3} n'est pas inclus dans {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22} c'est-à-dire qu'au moins un élément de {1 ; 2 ; 3}, en l'occurrence 1, n'est pas dans {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22}.

Définition Intersection et réunion

Soit A et B deux ensembles.
- **A ∩ B est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B, c'est-à-dire aux deux ensembles à la fois.**
- **A ∪ B est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B, c'est-à-dire à au moins l'un des deux ensembles.**



Exemples
- $[4\,;7] \cap [1\,;6[= [4\,;6[$ En effet, les nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles [4 ; 7] et [1 ; 6[sont les réels de l'intervalle [4 ; 6[:



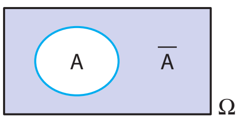
- $\{1\,;3\,;5\,;8\,;9\} \cup \{2\,;3\,;9\,;11\} = \{1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;9\,;11\}$ car ce sont tous les nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles (attention : on n'écrit qu'une seule fois les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, ici 3 et 9).

Règle Complémentaire

Soit A un ensemble (inclus dans un ensemble B).
Le complémentaire de A (dans B), noté $\overline{A}$ ou B\A est l'ensemble des valeurs (de B) qui n'appartiennent pas à A.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{[5\,;6[} =]-\infty\,;5[\cup[6\,;+\infty[$ c'est à dire tous les réels sauf ceux qui appartiennent à [5 ; 6[.

Remarque La notation du complémentaire est la même que celle de l'évènement contraire en probabilités. Cela est normal puisque dans ce contexte, $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, est le complémentaire de A dans l'univers Ω.



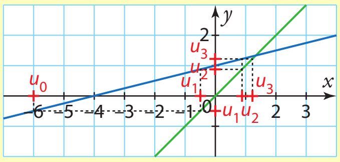
Corrigés

1 Suites et modèles discrets

À vous de jouer !

1 On note u_n la distance parcourue par Nawal n jours après le premier jour d'entraînement.
$u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1{,}1u_n$

3



5 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme)

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 5 = +\infty$ (par produit et somme)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par produit).

7 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2(-n+2)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

9 **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. Donc $u_n \geqslant n^2 - 5$.

b) Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5 = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-5 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant -5 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \frac{1}{n} = -5$.

D'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$.

13 **a)** $0 < 0{,}6 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$ et de premier terme $u_0 = -3$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

15 $x = 2x + 5 \Leftrightarrow -x = 5$
$\Leftrightarrow x = -5$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - (-5) = u_n + 5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 5$
$= 2u_n + 5 + 5$
$= 2(u_n + 5)$
$= 2v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 3$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n$.

Or $v_n = u_n + 5$, donc $u_n = v_n - 5$.

Donc $u_n = 3 \times 2^n - 5$.

17 **1.** $x = 3x + 8 \Leftrightarrow -2x = 8$
$\Leftrightarrow x = -4$

Soit (v_n) la suite définie par :

$v_n = u_n - (-4) = u_n + 4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$
$= 3u_n + 8 + 4$
$= 3u_n + 12$
$= 3(u_n + 4)$
$= 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 2$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 3^n$.

Or $v_n = u_n + 4$, donc $u_n = v_n - 4$.

Donc $u_n = 2 \times 3^n - 4$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 4 - (2 \times 3^n - 4)$
$= 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
$= 2 \times 3^n \times (3 - 1)$
$= 2 \times 3^n \times 2$
$= 4 \times 3^n$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

19 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 5\,000$.

2. Chaque année, 60 % des abonnés se réinscrivent, et 10 % des personnes non abonnées s'abonnent.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1v_n$.

3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1(5\,000 - u_n)$.

$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 500 - 0{,}1u_n$
$= 0{,}5u_n + 500$

4. $x = 0{,}5x + 500 \Leftrightarrow 0{,}5x = 500$
$\Leftrightarrow x = 1\,000$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 1\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000$
$= 0{,}5u_n + 500 - 1\,000$
$= 0{,}5u_n - 500$
$= 0{,}5\,(u_n - 1\,000)$
$= 0{,}5w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $w_0 = u_0 - 1\,000 = -400$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -400 \times 0{,}5^n$.

Or $w_n = u_n - 1\,000$, donc $u_n = w_n + 1\,000$.

Donc $u_n = -400 \times 0{,}5^n + 1\,000$.

Exercices d'application

32 **1.** $400 + 2 \times 10 = 420$.

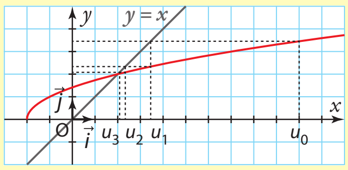
Elle paiera 420 €.

2. a) $u_n = 400 + 2n$

b) $u_n = 434 \Leftrightarrow 400 + 2n = 434$
$\Leftrightarrow n = 17$

Elle a acheté 17 billets de train.

35 **1.** et **2.**



3. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

38 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

45 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n+1 = n+2n+1$.

Donc $3n+1 > n$.

Donc $\sqrt{3n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc $u_n > \sqrt{n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

51 **a)** $4 > 1$ et $2 > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $4 > 1$ et $-3 < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

c) (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Or $0 < \frac{1}{3} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

56 **1.** $u_0 = 2$

$u_1 = 4 \times u_0 - 9 = -1$

$u_2 = 4 \times u_1 - 9 = -13$

2. $u_1 - u_0 = -3$ et $u_2 - u_1 = -12$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = 13$.

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 4u_n - 9 - 3 \\ &= 4u_n - 12 \\ &= 4(u_n - 3) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1$.

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1 \times 4^n$.

c) Or $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3$.

Donc $u_n = -1 \times 4^n + 3 = 3 - 4^n$.

d) $u_{10} = -1\,048\,573$

Exercices d'entraînement

60 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}\right)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{n^3}{n^2 \times \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{n}{1 - \frac{4}{n^2}}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - \dfrac{1}{n^2 - 4} \leqslant a_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 - \dfrac{1}{n^2-4} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

67 **1.** $15\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1000 = 14\,500$.

Il y aura 14 500 habitants en 2021.

2. On note u_n le nombre d'habitants en $2020 + n$.

En 2020, il y a 15 000 habitants, donc $u_0 = 15\,000$.

Chaque année, le maire prévoit que 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitants s'installeront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1000 = 0{,}9u_n + 1000$.

3. $x = 0{,}9x + 1\,000 \Leftrightarrow 0{,}1x = 1\,000$

$\Leftrightarrow x = 10\,000$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 10\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0{,}9\,u_n + 1\,000 - 10\,000 \\ &= 0{,}9u_n - 9\,000 \\ &= 0{,}9(u_n - 10\,000) \\ &= 0{,}9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10\,000 = 5\,000$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5\,000 \times 0{,}9^n$.

Or $v_n = u_n - 10\,000$, donc $u_n = v_n + 10\,000$.

Donc $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$.

4. $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10\,000$.

Le nombre d'habitants de la ville tend vers 10 000.

78 **1.** $a_1 = a_0 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) + b_0 \times \frac{5}{100} = 0{,}326$.

En 2018, la société A va entretenir 32,6 % des ascenseurs.

2. Chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right)a_n + \frac{5}{100}b_n$

$a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$

Or $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05(1 - a_n)$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

3. $x = 0{,}92x + 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}08x = 0{,}05$

$\Leftrightarrow x = 0{,}625$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - 0{,}625$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}625 \\ &= 0{,}92a_n + 0{,}05 - 0{,}625 \\ &= 0{,}92a_n - 0{,}575 \\ &= 0{,}92\left(a_n - \frac{0{,}575}{0{,}92}\right) \\ &= 0{,}92(a_n - 0{,}625) \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = a_0 - 0{,}625 = -0{,}325$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n$.

Or $v_n = a_n - 0{,}625$, donc $a_n = v_n + 0{,}625$.

Donc $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

4. $0 < 0{,}92 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}92^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}625$.

La proportion d'ascenseurs entretenus pas la société A va tendre vers 62,5 %.

Préparer le BAC

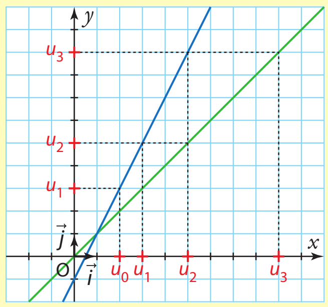
86 B — **87** D

88 A — **89** C

90 B — **91** D

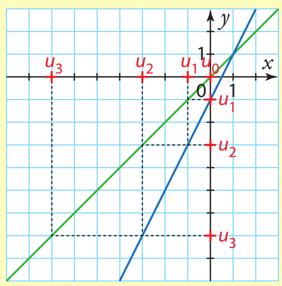
92 B — **93** A

94 **1.** et **2.**



3. La suite (u_n) semble croissante et avoir pour limite $+\infty$.

4.



La suite (u_n) semble décroissante et avoir pour limite $-\infty$.

95 **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$

96 **1. a)** $u_1 = \dfrac{1}{4} \times 20 = 5$ et $u_2 = \dfrac{1}{4} \times 5 = 1{,}25$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique

de raison $\dfrac{1}{4}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c) $0 < \dfrac{1}{4} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. a) $L_1 = u_1 = 5$

$L_2 = u_1 + u_2 = 6{,}25$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$= u_1 + u_1 \times \frac{1}{4} + \ldots + u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{4} \times \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

c) Or $0 < \dfrac{1}{4} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{20}{3}$.

97 **1.** $1500 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 1560$.

Donc le salaire de Thomas en 2021 est 1 560 €.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) u_n = 1{,}04 u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,500 \times 1{,}04^n$.

3. $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$

$$= u_0 + u_0 \times 1{,}04 + \ldots + u_0 \times 1{,}04^9$$

$$= u_0 \times (1 + 1{,}04 + \ldots + 1{,}04^9)$$

$$= u_0 \times \frac{1 - (1{,}04)^{10}}{1 - 1{,}04}$$

$$= 1500 \times \frac{1 - (1{,}04)^{10}}{-0{,}04}$$

$$= -37\,500 \times (1 - (1{,}04)^{10})$$

$$\approx 18\,009{,}16$$

Thomas aura gagné environ 18 009,16 €.

98 **1.** $u_1 = 5\,750$ et $u_2 = 6\,312{,}5$

Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2\,000 = 0{,}75 u_n + 2\,000.$$

2. a)

```
u=5000
for in range(1,13)
    u=0.75*u+2000
print (u)
```

b) Elle a 7 904,97 € sur son compte le 1er janvier 2021.

3. $x = 0{,}75x + 2\,000 \Leftrightarrow x = 8\,000$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000$

$$= 0{,}75 u_n + 2\,000 - 8\,000$$

$$= 0{,}75(u_n - 8\,000)$$

$$= 0{,}75 v_{n+1}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme

$v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0{,}75^n$.

$v_n = u_n - 8\,000$, donc $u_n = v_n + 8\,000$.

Donc $u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^{n+1} - (8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n)$$

$$= 3\,000 \times 0{,}75^n\,(-0{,}75 + 1)$$

$$= 750 \times 0{,}75^n$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$0 < 0{,}75 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8\,000$.

La somme sur le compte augmentera et tendra vers 8 000 €.

99 **1.** $u_0 = 20$ et $v_0 = 2\,980$.

2. Le nombre d'habitants dans le village est constant.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3\,000$.

3. Chaque année :

- 25 % des bénévoles quittent l'association ;
- 5 % habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente deviennent bénévoles.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{25}{100}\right) u_n + \frac{5}{100} v_n.$$

$u_{n+1} = 0{,}75 u_n + 0{,}05 v_n$.

4. On a $u_{n+1} = 0{,}75 u_n + 0{,}05(3\,000 - u_n)$.

Donc $u_{n+1} = 0{,}7 u_n + 150$.

5. $x = 0{,}7x + 150 \Leftrightarrow 0{,}3x = 150$

$\Leftrightarrow x = 500$.

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 500$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$$= 0{,}7 u_n + 150 - 500$$

$$= 0{,}7 u_n - 35$$

$$= 0{,}7\left(u_n - \frac{350}{0{,}7}\right)$$

$$= 0{,}7(u_n - 500)$$

$$= 0{,}7 w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $w_0 = u_0 - 500 = -480$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -480 \times 0{,}7^n$.

Or $w_n = u_n - 500$, donc $u_n = w_n + 500$.

Donc $u_n = -480 \times 0{,}7^n + 500$.

6. $0 < 0{,}7 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$.

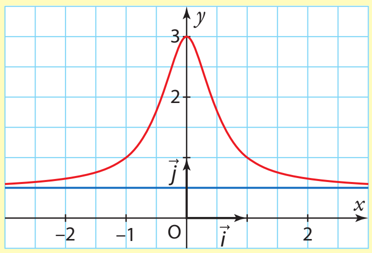
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 500$.

Le nombre de bénévoles de l'association dans le village tendra vers 500.

2 Limites et continuité

À vous de jouer !

1 **1.**



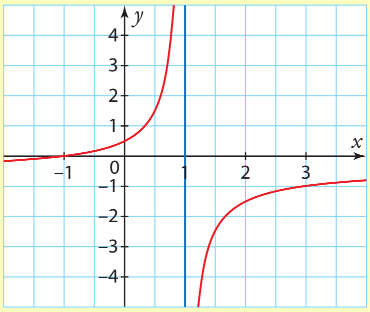
On peut conjecturer que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0{,}5$.

2. On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et la droite d'équation $y = 0{,}5$ est plus petite par exemple de $a = 10^{-3}$.

```
from math import*
def f(x):
    return (2*x**2+3)/(4*x**2+1)
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-0.5)>=a:
        x+=1
    return x
```

3 **1.**



La fonction f est dérivable en 0 car la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

2. La fonction n'admet pas de limite en 1 mais admet une limite à droite et une limite à gauche.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

5 **1.**

2. La fonction n'est pas définie en 4 mais admet une limite : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0{,}25$.

7 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. On n'a pas de limite en 0 mais une limite à gauche et à droite :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

9 Pour $x > 1$, $-\dfrac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

Par le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

12 **1.** $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 8)$

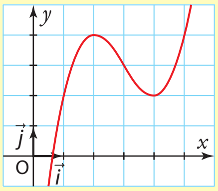
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ « ou » $x = 4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	-12	↗	8	↘	4	↗	$+\infty$

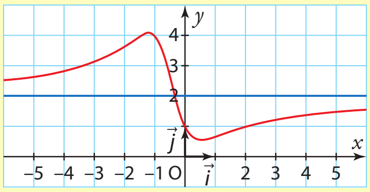
2. a) D'après le tableau de variations, si $x > 2$, $f(x) > 2$ donc ne peut s'annuler.

Si $x \in [0\,;2]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0)\,f(2) < 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe une seule fois l'axe des abscisses.



14 **1.**



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

2. a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

b) Par passage à la limite, on trouve 2 comme limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

16 **1.** $f'(x) = 12g(x)$ avec $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

2. a) $g'(x) = 3x^2 + x + 2 > 0$ car $\Delta = -23$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur $\mathbb{R}$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $\alpha \approx -0{,}57$ à 10^{-2} près

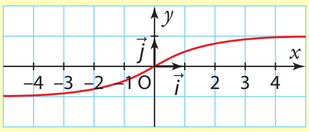
c) Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Exercices d'application

25 **1.**



2. On peut conjecturer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +1$.

3. On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et les droites d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$ est plus petite par exemple de $a = 10^{-3}$.

31 On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

37 **1.** On a, en factorisant par x^3,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. En faisant la somme de deux fonctions,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

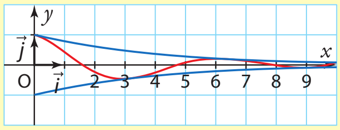
3. En faisant le quotient de deux fonctions,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

4. D'après les limites de la fonction exp,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

41 **1. a)**



b) On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $-\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

43 **1.** D'après le tableau de variation :

- si $x < 1$, $f(x) > -3$ donc ne peut s'annuler ;
- si $x \geqslant 1$, f est continue, strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant -3 \leqslant f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution.

2. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.

Exercices d'entraînement

47 **1. a)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

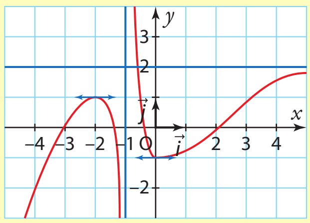
b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

2. La fonction f n'admet pas de limite en -1 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet 2 asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 2$.

4. Courbe possible.



50 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$.

2. On obtient deux asymptotes d'équations $x = -2$ et $y = 2$.

55 **A ▶ 1.** $g'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	14	↗	$+\infty$

2. Sur $[1\,;3]$, la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

3. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B ▶ 1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

2. f' est du signe de g sur $]1\,;+\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Préparer le BAC

67 C

68 A et B

69 D

70 D

71 C

72 C

73 B

74 C

75 C

76 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

77 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$

2. $\mathscr{C}_f$ admet trois asymptotes en -1 ; 2 et $-\infty$ d'équations respectives $x = -1$; $x = 2$ et $y = 2$.

78 **1.** $D_f = \mathbb{R}/\{1\}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

79 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{2x-5} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x+4}{x^2-4} = +\infty$

80 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x + 5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x+1}{x^2+5x-2} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{3x+5}{x^2+x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+2} = -\dfrac{1}{2}$

81 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x\ e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{e^x} = 0$

82 **1.** $f'(x) = e^x - 1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-2	↗	$+\infty$

2. a) Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

b) $f(2) \approx 2{,}39$ et $f(3) \approx 14{,}09$ donc $\alpha \in [2\,;3]$.

On trouve $\alpha \approx 2{,}2$ à 10^{-1} près.

83 **1. a)** $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	0		1		5
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
g	-1	↘	-2	↗	174

b) Sur $[0\,;1[$, $g(x) \leqslant -1$ donc ne s'annule pas.

Sur $[1\,;5]$, la fonction g est continue strictement croissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) $g(1) = -1$ et $g(2) = 3$ donc $\alpha \in [1\,;2]$.

On trouve $1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}7$.

d) Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

2. a) $f'(x) = \dfrac{-1(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		α		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$-\dfrac{2}{63}$

$f(\alpha) \approx -0{,}118$

3 Convexité

À vous de jouer !

1 D'après le graphique, la courbe de f est en-dessous de ses sécantes sur $[-1\,;0{,}5]$ et est au dessus de ses sécantes sur $[0{,}5\,;1{,}5]$. Donc f est convexe sur $[-1\,;0{,}5]$ et concave sur $[0{,}5\,;1{,}5]$.

5 f' est décroissante sur $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $[0\,;1]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

7 $f(x) = xe^{-x}$

donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

et $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$.

Or $e^{-x} > 0$, pour tout réel x, et $x - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 2$. Donc f est convexe sur $[2\,;+\infty[$ et f est concave sur $]-\infty\,;2]$.

9 Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0{,}7$.

11 $f(x) = (x+1)e^{-x}$

donc $f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})$

$= (1 - x - 1)e^{-x} = -xe^{-x}$

et $f''(x) = -1e^{-x} + (xe^{-x}) = e^{x}(x-1)$

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc f'' change de signe pour $x = 1$. Donc le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(1\,;f(1))$ c'est-à-dire $(1\,;2e^{-1})$.

13 **a)** et **b)** Graphiquement, h est concave sur $[0\,;+\infty[$ et convexe sur $]-\infty\,;0]$.

c) Le point d'inflexion a pour coordonnées $(0\,;h(0))$.

15 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ et

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

f'' change de signe pour $x = 1$, donc la croissance commence à ralentir au bout du 1er mois, c'est-à-dire à partir du 1er février 2020.

Exercices d'application

31 f est concave sur $[-2\,;-1]$ et convexe sur $[-1\,;+\infty[$.

35 f' est croissante sur $]-\infty\,;6]$ et f' est décroissante sur $[6\,;+\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty\,;6]$ et f est concave sur $[6\,;+\infty[$.

42 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 12x$ et $f''(x) = 6x + 12$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $6x + 12 \geqslant 0$ si et seulement si $x \mapsto -\frac{12}{6}$ si et seulement si $x \geqslant -2$.

Donc f est convexe sur $[-2\ ;+\infty[$.

47 Graphiquement, les points d'inflexion sont ceux d'abscisses -2 et 2.

50 **1.**

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée $6 + (6-4)e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}$.

Préparer le BAC

76 B et C

77 D

78 D

79 B

80 A

81 A

82 D

83 D

84 A et D

85 D

86 **1.** On étudie une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la dérivée est également définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$g'(x) = \frac{1}{x} + 3$.

2. $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Comme $g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

87 **1.** $-x + 1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. $f'(x) = -\frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{-x+1}}$ et

$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^3}e^{\frac{1}{-x+1}}$. Or $-e^{\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel $x \in D_f$. De plus, $\frac{1}{(x-1)^3} > 0$ si et seulement si $x > 1$, donc $f''(x) < 0$ si et seulement si $x > 1$.

3. Donc f est convexe sur $]-\infty\ ;1[$ et concave sur $]1\ ;+\infty[$.

88 **1.**

$$f'(x) = 0 + 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42)\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$.

$-14x + 28 \geqslant 0$ si et seulement si $28 \geqslant 14x$ si et seulement si $\frac{28}{14} \geqslant x$ si et seulement si $2 \geqslant x$.

D'où le tableau de variations suivant.

x	0	2	60
Variations de f	112 ↗	$70 + 70e^{-0,4}$	↘ $70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$. Le point A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

b) $\frac{14}{25}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x, donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x - 7 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 7$. Donc f est convexe sur $[7\ ;60]$ et concave sur $[0\ ;7]$.

c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

89 **1.** $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$ donc

$f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x$
$= (-5x^2 - 10x + 5)e^x$.

Par suite, $f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x$
$= -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5$
$= 400 - 100 = 300 > 0$

d'où $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Donc $5x^2 + 20x + 5 \geqslant 0$ si et seulement si

$x \in \left]-\infty\ ;-2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}\ ;+\infty\right[$.

Or $-e^x < 0$ pour tout réel x.

Donc $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si :

$x \in \left]-\infty\ ;-2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}\ ;+\infty\right[$ et

$f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si :

$x \in \left[-2-\sqrt{3}\ ;-2+\sqrt{3}\right]$.

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont donc $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur

$\left]-\infty\ ;-2-\sqrt{3}\right] \cup \left[-2+\sqrt{3}\ ;+\infty\right[$ et convexe sur $\left[-2-\sqrt{3}\ ;-2+\sqrt{3}\right]$.

90 **A ▶ 1.** Graphiquement, g est convexe sur $[-5\ ;1]$ et g est concave sur $[1\ ;3]$.

2. Graphiquement, le point d'inflexion a pour coordonnées $(1\ ;6{,}5)$.

B ▶ 1. $g(x) = (3 - x)e^x + 1$

donc $g'(x) = (-1)e^x + (3 - x)e^x + 0$
$= (3 - x - 1)e^x = (2 - x)e^x$

et $g''(x) = (-1)e^x + (2 - x)e^x$
$= (2 - x - 1)e^x = (1 - x)e^x$

2. a) $e^x > 0$ pour tout réel x et $1 - x \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc $g''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc g est convexe sur $]-\infty\ ;1]$ et concave sur $[1\ ;+\infty[$.

b) $g''(x)$ change de signe pour $x = 1$. De plus $g(1) = (3-1)e^1 + 1 = 2e + 1$

donc son point d'inflexion a pour coordonnées $(1\ ;2e + 1)$.

3. $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

$T_1 : y = (2-1)e^1\,(x - 1) + (2e + 1)$

$T_1 : y = ex - e + 2e + 1$

$T_1 : y = ex + e + 1$

4. a) $h(x) = (ex + e + 1) - g(x)$

$h'(x) = e - g'(x) = e - (2 - x)e^x = (x - 2)e^x + e$

$h''(x) = 1e^x + (x - 2)e^x + 0 = (x - 1)e^x$
$= -(1 - x)e^x = -g''(x)$.

b) $g''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc $h''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc h' est décroissante sur $]-\infty\ ;1]$ et croissante sur $[1\ ;+\infty[$.

c) $h'(1) = (1-2)e^1 + e = -e + e = 0$

Donc le minimum de h' est 0 sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel x, $h'(x) \geqslant 0$.

d) Comme $h'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) $h(1) = (e \times 1 + e + 1) - g(1) = 2^e + 1 - (2e + 1) = 0$

f) h est négative sur $]-\infty\ ;1]$ et positive sur $[1\ ;+\infty[$. Donc la tangente au point d'abscisse 1 est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour $x \leqslant 1$ et au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \geqslant 1$ donc elle traverse la courbe au point de coordonnées $(1\ ;2e + 1)$.

Le point de coordonnées $(1\ ;2e + 1)$ est bien un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_g$.

4 Fonction logarithme népérien

À vous de jouer !

1 **a)** $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $e^{2x} = -1\ ;\ S = \{\varnothing\}$

c) Conditions d'existence : il faut que $4 - 2x > 0$ $\Leftrightarrow x \in I =]-\infty\ ;2[$, $\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ;2 - \frac{e}{2}\right[$.

d) $e^{x+1} \geqslant 2 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow x \in [\ln(2) - 1\ ;+\infty[$.

3 **a)** Conditions d'existence : $x \in]-1\ ;+\infty[$ et $x \in]-\infty\ ;0[$ d'où $x \in I =]-1\ ;0[$.

$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$ et $x \in I \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) Conditions d'existence :

$x \in I =]-\infty\ ;-1[\cup]1\ ;+\infty[$

$\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leqslant 5$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6}\ ;\sqrt{6}\right] \cap I$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6}\ ;-1\right[\cup \left]1 ;\sqrt{6}\right]$

5 **a)** $2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$

b) $-\ln 5$

c) $4 - 2\ln 5$

d) $-\frac{4}{5} - \ln 5$

7 a) $n\ln\left(\frac{5}{9}\right)\leqslant \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$ soit $n\geqslant 8$

b) $2^{n-1}(2-7)>-3 \Leftrightarrow 2^{n-1}<\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow n<\dfrac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)}+1$

soit $n=0$

9 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$ or, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $x^2>0$ et, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $1-x>0$.

Donc $f'(x)>0$ et f croissante sur $]0\,;1[$.

Pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, $1-x<0$ donc $f'(x)<0$ et f décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

11 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1\times x^2-(1+x)\times 2x}{x^4}}{\dfrac{1+x}{x^2}}=\dfrac{-(x+2)}{x(1+x)}$

13 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x-2=+\infty$ donc, par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. a) $f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}$

$=\dfrac{\ln(x)-2}{x^2}+\dfrac{\frac{x-1}{x}}{x}$

$=\dfrac{\ln(x)-2+x-1}{x^2}$

$=\dfrac{\ln(x)+x-3}{x^2}=\dfrac{u(x)}{x^2}$

b) $u'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$ pour $x\in[\mathrm{e}\,;+\infty[$, $u'(x)>0$; par conséquent, u est croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, or $u(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2>0$ donc u est positive sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

c) f' est donc positive sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

15 1. $f'(x)=\dfrac{-4x}{-2x^2+13{,}5}$

2.

x	$-2{,}5$		0		$2{,}5$
$-4x$		$+$	0	$-$	
$-2x^2+13{,}5$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\ln(13{,}5)$	$\searrow$	0

3. Puisque f admet un minimum, on en déduit que f est positive sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

Exercices d'application

25 1. a) Conditions d'existence :

$x\in I=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $2x-1=1\Leftrightarrow x=1\in I$

b) Conditions d'existence :

$x\in I=]\mathrm{e}\,;+\infty[$; $x-\mathrm{e}=\mathrm{e}\Leftrightarrow x=2\mathrm{e}\in I$

c) $\ln x=-2\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-2}$

d) $5-2x=\ln 2\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}-\frac{\ln 2}{2}$

2. a) Conditions d'existence :

$x\in I=]-\infty\,;1[$; $1-x>1$ et $x\in I\Leftrightarrow x<0$ et $x\in I\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;0[$.

b) Conditions d'existence :

$x\in I=\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$; $3-2x\leqslant \mathrm{e}$

et $x\in I\Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\,;+\infty\right[$

et $x\in I\Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$

c) $\mathrm{e}^x<3\Leftrightarrow x<\ln 3\Leftrightarrow x\in\,]-\infty\,;\ln 3[$

d) $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-3)\geqslant 0$ or $\mathrm{e}^x>0$ pout tout x, cela revient donc à résoudre $\mathrm{e}^x-3\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant \ln 3$. Donc $x\in[\ln 3\,;+\infty[$

30 1. a) Conditions d'existence : $x>2$ et $x<4$ donc $x\in I=]2\,;4[$.

$3x-6=4-x$ et $x\in I\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

b) Conditions d'existence : $x\in I=]0\,;8[$; $x^2-8x+12=0$ et $x\in I\Leftrightarrow S=\{2\,;6\}$.

c) Conditions d'existence : $x\in I=]5\,;+\infty[$; $\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\ln(x-5)$ et $x\in I\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1}=x-5$ et $x\in I\Leftrightarrow x^2-6x-5=0$ et $x\in I\Leftrightarrow x=3+\sqrt{14}$.

2. a) $x>\frac{1}{2}$ et $\ln(5(4x-2))<\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}}{40}\right[$

b) Conditions d'existence :

$x\in I=]1\,;5[$; $5-x\geqslant x-1$ et $x\in I\Leftrightarrow x\leqslant 3$ et $x\in I\Leftrightarrow x\in\,]1\,;3]$

c) Conditions d'existence :

$x\in I=]2\,;+\infty[$; $x^2-5\geqslant 0$ et $x\in I\Leftrightarrow x\in\left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$

34 1. a) $\ln 25-\ln 15=\ln\left(\frac{25}{15}\right)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln 16-\ln 5=\ln\left(\frac{16}{15}\right)$

2. a) $4\ln 5+2\ln 5+3\ln 5=9\ln 5$

b) $3\ln 5-\ln 5-2\ln 5-2\ln 5=-2\ln 5$

38 a) $n\ln\left(\frac{2}{3}\right)<\ln(10^{-4})\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

soit $n\geqslant 23$

b) $n\ln\left(\frac{9}{7}\right)\geqslant \ln(10^6)\Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$ soit $n\geqslant 55$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{5}\right)\leqslant \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ soit $n\geqslant 14$

d) $\ln(0{,}004)>2n\ln\left(\frac{8}{9}\right)\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln(0{,}004)}{2\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$

soit $n\geqslant 24$.

43 a) $f'(x)=\frac{1}{x}(x-2)+(\ln x+3)\times 1$

$=1-\frac{2}{x}+\ln x+3=-\frac{2}{x}+\ln x+4$

b) $f'(x)=\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(3\ln x+1)-(x-\ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x+1)^2}$

$=\dfrac{3\ln x-2-\frac{1}{x}}{(3\ln x+1)^2}=\dfrac{3x\ln x-2x-1}{x(3\ln x+1)^2}$

c) $f'(x)=3(\ln(x)-2x+1)^2\times\left(\frac{1}{x}-2\right)$

$=\dfrac{3(1-2x)(\ln(x)-2x+1)^2}{x}$

d) $f'(x)=\dfrac{3-1\times\ln x-x\times\frac{1}{x}}{2\sqrt{3x-x\ln(x)}}=\dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{3x-x\ln(x)}}$

48 a) $D_f=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $f'(x)=\dfrac{8}{8x-4}=\dfrac{2}{2x-1}$

b) $D_f=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

c) $D_f=]-\infty\,;-2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$;

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1\times(2x+4)-(x-1)\times 2}{(2x+4)^2}}{\dfrac{x-1}{2x+4}}$

$=\dfrac{6}{(2x+4)(x-1)}$

d) $D_f=]\,0\,;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$.

50 **1. a)** $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$; $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $g(1) = 0$, par conséquent g est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

2. a) $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4}$

$= \dfrac{x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$

$= \dfrac{g(x)}{x^3}$

b) $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$ donc f est décroissante sur $]0\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

52 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 4x = +\infty$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{4}\\ x<\frac{3}{4}}} 3 - 4x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{4}\\ x<\frac{3}{4}}} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2-x}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-x}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{-4}{3-4x}$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{3}{4}\right[$;

$f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{4}\right[$.

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-1(x+1) - (2-x)\times 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{2-x}{x+1}}$

$= \dfrac{-3}{(x+1)(2-x)} < 0$

pour $x \in]-1\,;2[$, donc f est décroissante sur $]-1\,;2[$.

Préparer le BAC

71 C **72** C

73 B **74** D

75 C **76** C

77 **1.** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$; pour $x \in \left]e^{-\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

2. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$ on pose $X = \ln x$ on a alors $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$ à l'aide du calcul de Δ. On a alors :

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 3) > 0$.

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ et sur $]e^3\,;+\infty[$.

3. a) $h'(x) = 4\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \dfrac{4\ln x - 1}{x}$;

$h'(x) > 0$ pour $x \in \left]e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\right[$, donc h est croissante sur $\left]e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;e^{\frac{1}{4}}\right[$.

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x\,(2\ln x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$.

$\mathscr{C}_h$ coupe l'axe des abscisses en M(1 ; 0) et $N\left(e^{\frac{1}{2}}\,;0\right)$.

78 **1.** $A(0\,;1) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; graphiquement on voit que $f'(0) = -1$

or $f'(x) = 2ax + b - \dfrac{1}{x+1}$

d'où $f'(0) = -1 \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = 0$

$f'(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$

d'où $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1)$.

2. $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{x+1}$

sur $]-1\,;+\infty[$;

$x + 1 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 2x - 1$.

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}82$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} x + 1 = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} -\ln(X) = +\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to-1} x^2 + 1 = 2$ donc, par somme des limites,

on a $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

3. Cela revient à résoudre :

$f'(x) \times f'(0) = -1 \Leftrightarrow \left(2x - \dfrac{1}{x+1}\right) \times (-1) = -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$

avec $x \in]-1\,;+\infty[\Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$,

il existe donc une tangente à $\mathscr{C}_f$ perpendiculaire à T_0.

4. $f(x) - h(x) = -\ln(x+1) + \ln(x^2 + 6x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x+1} > 0$ avec $x \in]-1\,;+\infty[$ ce qui est toujours le cas sur $]-1\,;+\infty[$ par conséquent la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_h$ sur $]-1\,;+\infty[$.

79 **1.** 1,2 traduit la hausse de 20 % et le « –28 » le fait de prélever 28 poissons à la fin de chaque année.

2. a) $w_{n+1} = u_{n+1} - 140 = 1{,}2u_n - 168$

$= 1{,}2(u_n - 140) = 1{,}2w_n$

Par conséquent la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}2$.

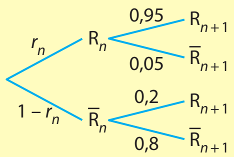
$w_n = w_0 \times 1{,}2^n = 10 \times 1{,}2^n$ d'où

$u_n = w_n + 140 = 10 \times 1{,}2^n + 140$.

b) $u_n > 200 \Leftrightarrow 1{,}2^n > 60 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(6)}{\ln(1{,}2)}$ soit $n \geqslant 10$

Par conséquent la responsable devra prévoir l'achat d'un autre aquarium au bout de 10 ans, soit en 2028.

80 **1.** $P(R_{n+1}) = r_{n+1} = 0{,}95r_n + 0{,}2(1 - r_n)$ d'après la loi des probabilités totale, d'où $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.



2. a)

```
R←0,9
N←1
Tant que R>0,80001
        N←N+1
        R←0,75*R+0,2
Fin tant que
```

b) $0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8 \leqslant 0{,}80001$

$\Leftrightarrow 0{,}7^{n-1} \leqslant 0{,}0001 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}7)} + 1$ donc c'est vérifié à partir de $n = 27$.

À partir de la 27e semaine, la probabilité que le client rapporte la bouteille de son panier devient inférieure à 0,80001.

81 **1. a)** On a $\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim \ln(x) = +\infty$, donc par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 10x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{10x^2+2}{x}$

Or, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $10x^2+2 > 0$ et $x > 0$, donc $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	$0{,}5$	α	1	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de g		$-$	0	$+$	

c) Sur l'intervalle $]0{,}5\,;1[$, g est une fonction continue, strictement croissante telle que $g(0{,}5) < 0$ et $g(1) > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0{,}5\,;1[$. Sur $]0\,;0{,}5[$, la fonction g est négative, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution et sur $]1\,;+\infty[$ la fonction g est positive donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

d) *cf.* tableau précédent.

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} 5x^2 - 2\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{\left(10x - \dfrac{2}{x}\right)\times 2x - (5x^2 - 2\ln x)\times 2}{4x^2}$

$= \dfrac{g(x)}{2x^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$ = Signe de g	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, on en déduit que f admet un minimum en α valant

$f(\alpha) = \dfrac{5\alpha^2 - 2\ln\alpha}{2\alpha}$ or on a

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha = 2 - 5\alpha^2$, d'où

$f(\alpha) = \dfrac{5\alpha^2 - 2 + 5\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

d) $\alpha > 0{,}5$ donc $5\alpha^2 - 1 > 0$, d'où $\dfrac{5\alpha^2-1}{\alpha} > 0$.

Le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0\,;+\infty[$.

5 Primitives et équations différentielles

À vous de jouer !

1 a) $y'(x) = 5x^2 + 3x = f(x)$

b) $y'(x) = -\dfrac{3}{3x^4} = -\dfrac{1}{x^4} = f(x)$

3 a) $F(x) = \dfrac{5}{12}x^4$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{4x^4}$

5 1. $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

2. L'ensemble des primitives sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + K$, avec K réel.

7 a) $F'(x) = e^{-x}$

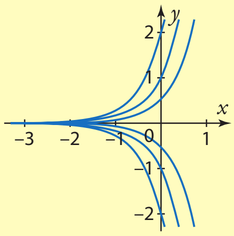
b) $F'(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x^3+5)$

c) $F'(x) = (x^2 + x - 7)^2$

9 1. a) L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K \mapsto Ke^{2x}$, avec K réel.

b) L'ensemble des solutions sont les fonctions, $y_K \mapsto Ke^{-5x}$, avec K réel.

2. Si K est positif, alors la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif la courbe est en dessous de cet axe.



11 a) Une solution particulière est la fonction constante $-\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto -\dfrac{1}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

b) Une solution particulière est la fonction constante $\dfrac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto \dfrac{2}{5} + Ke^{-5x}$, avec K réel.

c) $y' = y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$

Une solution particulière est la fonction constante 3.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K x \mapsto 3 + Ke^{-x}$, avec K réel.

d) $4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{5}{4}$

Une solution particulière est la fonction constante 5.

13 1 $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{2}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto K\,e^{-\frac{2}{3}x}$, avec K éel.

2. $y_k(0) = e \Leftrightarrow K\,e^{-\frac{2}{3}\times 0} = e \Leftrightarrow K = e$.

Donc $f : x \mapsto e \times e^{-\frac{2}{3}x} = e^{1-\frac{2}{3}x}$.

3. $f'(x) = -\dfrac{2}{3}e^{1-\frac{2}{3}x} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. $f(x) = 5 \Leftrightarrow e^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 - 3\ln(5)}{2}$.

15 1. Les solutions sont $y_K \mapsto Ke^{-0{,}035x}$, avec K réel.

2. $y_K(0) = 7 \Leftrightarrow K = 7$ donc $g(x) = 7e^{-0{,}035x}$.

3. $g(100) = 7e^{-0{,}035\times 100} = 7e^{-3{,}5}$

$\approx 0{,}211$ mW $> 0{,}08$ mW,

donc le signal sera encore détectable.

Exercices d'application

27 a) $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + e^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

36 a) $F(x) = e^x$ **b)** $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \ln(x)$ **d)** $F(x) = \dfrac{1}{x}$

38 a) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = e^x + k$, avec k réel.

b) Sur $I =]0\,;+\infty[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel.

c) Sur $I =]0\,;+\infty[$, $F(x) = \ln(x) + k$, avec k réel.

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{8}x^8 + k$, avec k réel.

42 a) $F(x) = x^4 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

b) $F(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{3}x^3 + 5x$

c) $F(x) = e^x + \dfrac{1}{4}x^4$

d) $F(x) = 2e^x + x^3 + 5x$

48 a) $F(x) = e^{x^2-1}$

b) $F(x) = (x^2 + x - 1)^2$

c) $F(x) = (\ln(x))^2 + 3$

55 1. b **2.** d **3.** a

62 a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \dfrac{1}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto 4 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$, avec K réel.

c) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{3}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

d) Les solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto \frac{-1}{5} + Ke^{\frac{5}{2}x}$, avec K réel.

67 **1.** $Q(t) = \frac{0{,}1}{\text{k}}(1 - \text{e}^{-\text{k}t})$

2. $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = \frac{0{,}1}{\text{k}}$ donc dépend de k. La limite évolue de façon inverse à k, elle correspond à la quantité de pénicilline présente dans le sang à long terme. Si k est élevé, alors la quantité est faible ; si k est faible (mais en restant positif), alors la quantité est élevée.

3. $Q(180) = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}1}{\text{k}} \Leftrightarrow \text{k} = \frac{\ln(2)}{180}$

Préparer le BAC

96 A **97** B

98 B **99** A

100 D **101** A

102 D **103** D

104 **1.** Les solutions de l'équation sont de la forme $C\text{e}^{kt}$, avec C réel.

$y(0) = N \Leftrightarrow C\,\text{e}^{k \times 0} = N \Leftrightarrow C = N.$

Donc $y(t) = N\text{e}^{kt}$.

2. $y(2) = 4N \Leftrightarrow N\text{e}^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = -\ln(2)$

Donc $y(t) = N\text{e}^{\ln(2)t} = 2^t N$.

$y(3) = 2^3 N = 8N.$

Au bout de 3 heures, il y a $8N$ microbes.

3. $y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200.$

105 **1.** a **2.** d **3.** b **4.** c

106 **1.** $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$

2. Pour $f(x) = \frac{4}{x} - 3 + 4\ln(x)$ on a $f'(x) = \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x}$

donc on vérifie bien que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

3. $F'(x) = 4\ln x + \frac{1}{x}(4x + 4) - 7 = \frac{4}{x} + 4\ln x - 3.$

107 **1.** $T' = -0{,}1(T - 20)$

2. a) Si $T(t) = 20$ alors $T'(t) = 0$ donc vérifie bien l'équation.

b) $T(t) = 20 + Ke^{-0{,}1t}$ et, avec $T(0) = 100$, on obtient $K = 80$, donc $T(t) = 20 + 80e^{-0{,}1t}$.

108 **1.** $P(t) = \frac{1}{N(t)}$ alors $P'(t) = \frac{-N'(t)}{(N(t))^2}$.

Ainsi $N'(t) = 0{,}07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{0{,}07}{N(t)} - 0{,}07 \cdot 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{-0{,}07}{N(t)} + 0{,}07 \cdot 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow P'(t) = -0{,}07P(t) + 0{,}07 \cdot 10^{-3}.$$

2. $P(t) = 10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}$, soit

$N(t) = \frac{1}{10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}}$ avec $N(0) = 100$

on a $K = \frac{1}{100} - 10^{-3} = 0{,}009$, donc

$N(t) = \frac{1}{10^{-3} + 0{,}009e^{-0{,}07t}}$, valeur qui est toujours inférieure à 1 000.

6 Calcul intégral

À vous de jouer !

1 On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 2x$. L'intégrale est l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 4 et 10.

$$\int_2^5 2x\,\text{d}x = \frac{(4 + 10) \square 3}{2} = 21 \text{ u.a.}$$

3 $\mathscr{A}_i = \frac{5}{10}\left(\ln(1) + \ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right)\right)$

$\mathscr{A}_i = \frac{5}{10}(\ln(1 \times 1{,}5 \times 2 \times 2{,}5 \times \ldots \times 5{,}5) \approx 5{,}28$ u.a.

$\mathscr{A}_i = \frac{5}{10}\left(\ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) + \ln(6)\right)$

$\mathscr{A}_i = \frac{5}{10}(\ln(1{,}5 \times 2 \times 2{,}5 \times \;\; \times 5{,}5 \times 6) \approx 6{,}18$ u.a.

5 **a)** $\int_{-1}^{4}(x - 1)^2\,\text{d}x = \left[\frac{(x - 1)^3}{3}\right]_{-1}^{4} = 1 - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{11}{3}$

b) $\int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}\,\text{d}x = \left[\ln(x^3 - x)\right]_2^3$

$= \ln 24 - \ln 6 = \ln 4$

7 $\int_{-1}^{0} f(x)\,\text{d}x = \int_{-1}^{0}(x + 1)\,\text{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x + 1}\,\text{d}x$

$= \frac{1}{2} + \ln(2)$

9 $\frac{1}{2}\int_0^2 \text{e}^{-10t}\,\text{d}t = -\frac{1}{20}(\text{e}^{-20} - 1)$

11 f est négative sur $[-5\,;-3]$ donc

$\mathscr{A} = -\int_{-5}^{-3}\frac{1}{x}\,\text{d}x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

13 $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2.$

2 et (−1) sont les solutions du trinôme donc $f - g$ est négative sur $[-1\,;2]$.

$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)\,\text{d}x = 4{,}5$ u.a.

15 **1.** $F'(t) = ((-20t - 20)\text{e}^{-t})'$

$= (-20t - 20)'\,\text{e}^{-t} + (-20t - 20)(\text{e}^{-t})'$

$= -20\text{e}^{-t} + 20\text{e}^{-t} + 20t\text{e}^{-t} = f(t)$

2. $\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t = -220\text{e}^{-10} + 20 < 20.$

Ils respectent bien le cahier des charges (de justesse).

Exercices d'application

28 **1.** 6 **2.** 12

34 **1.** 0,2

2. Aire colorée = 0,2 ;

Aire hachurée $= 0{,}2 \times \frac{1}{1{,}2} = \frac{1}{6}$

3. Aire des 5 rectangles hachurés :

$0{,}2\left(\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\,627}{2\,520}$

Aire des 5 rectangles colorés :

$0{,}2\left(1 + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8}\right) = \frac{1\,879}{2\,520}$

La fonction inverse est décroissante donc

$\frac{1\,627}{2\,520} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x}\,\text{d}x \leqslant \frac{1\,879}{2\,520}$

37 **a)** −4 **b)** 49,5

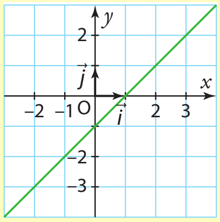
c) 1 **d)** 42,5

41 $\int_{-1}^{4} f(t)\,\text{d}t = \int_{-1}^{2}\text{d}t + \int_2^3(-t + 3)\,\text{d}t + \int_3^4(t + 3)\,\text{d}t = 10$

44 **1.** $\frac{13}{3}$

2. C'est la longueur du rectangle de largeur 4 et d'aire $\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{d}x$.

49 **1.**



2. a) –4,5 **b)** 2

3. $f \leqslant 0$ sur [–2 ; 1] et $f \geqslant 0$ sur [1 ; 3]

4. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5$ u.a.

5. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5 + 2$
$= 6{,}5$ u.a.

Exercices d'entraînement

52 **1.** $g'(x) = \ln(x) + x \,\square\, \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ donc g est une primitive de f.

2. 1

57 $\mathscr{A} = \int_{0}^{1} t\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 0{,}5 + \ln(3)$

66 **1.** F est la primitive de $f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0 donc $F'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$.

F' est positive sur $\mathbb{R}_+$. F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. $F(0) = 0$ et F est croissante, F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

68 **1.** $f(x) > g(x)$ si $x \in]2 ; +\infty[$.

2. $\mathscr{A}_{ABC} = \int_{-4}^{2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = 18$ u.a.

3. $\mathscr{A} = \int_{2}^{7} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 12{,}5$ u.a.

73 **1.** $f'(x) = -0{,}04\mathrm{e}^{x} + 1$

$f'(x) > 0$ si $x < \ln(25)$

f est croissante sur [0 ; ln 25], décroissante sinon.

2. f est continue et décroissante de [ln 25 ; +∞[sur [1,21 ; –∞[$0 \in$ [1,21 ; –∞[. Donc il admet un unique antécédent noté α.

$\alpha \approx 4{,}5$

3. $-0{,}04(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2) + 4$

4. $q_0 = f(\ln(25)) = \ln(25) - 2$

5. $q_1 = \alpha \times 10$ (l'unité est la dizaine de pièces)

6. $\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -0{,}02(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2) + 2$

Préparer le BAC

82 D

83 B

84 B et D

85 B et D

86 A

87 B et D

88 A et C

89 **a)** 0,5

b) 10

c) 10,5

90 c

91 **1.** $F'(x) = f(x)$

2. –12

92 $\frac{1}{x+1}$ est positive sur [0 ; 1] donc $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe entre 0 et 1.

$\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln 2$.

93 **1.** f est positive sur [–2 ; 0].

2. $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}^3}$

94 **a)** $\int_{-2}^{-1} (x+3)^2 = \frac{7}{3}$

b) $\int_{-3}^{2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 3)\mathrm{d}x = \frac{355}{12}$

95 **a)** $\int_{-2}^{1} (2x+1) - (x^2 + 3x - 1)\ \mathrm{d}x = 4{,}5$

b) $\int_{1,5}^{2} \left[(-10\mathrm{e}^{-x}) - (-x^2)\right]\mathrm{d}x$

$= 10\mathrm{e}^{-2} - 10\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{24}$

95 **1.** $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x} + 2x\mathrm{e}^{x} = (2x+2)\mathrm{e}^{x}$

2. $\mathrm{I} = \frac{2}{\mathrm{e}}$

3. La fonction est positive.

97 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \frac{2-x}{x}$

x	0		2		5
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	$-2 + 2\ln(2)$	↘	

3. a) $f(1) = 0$

b) f est continue et strictement décroissante de [3 ; 4] sur [–3 + 2ln (3) ; –2 + 2ln 2].

$0 \in$ [–3 + 2ln (3) ; –2 + 2ln 2] donc 0 admet un unique antécédent dans [3 ; 4].

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [3 ; 4]. $\alpha \approx 3{,}51$.

c) f est positive sur [1 ; α], négative sinon.

4. a) $g'(x) = f(x)$

b) $\mathscr{A} = \int_{1}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = [g(x)]_1^{\alpha} = g(\alpha) - g(1)$

c) $\mathscr{A} \approx 0{,}64$ ua. Or 1 ua = 2 × 5 cm² = 10 cm² donc $\mathscr{A} \approx 6{,}4$ cm².

7 Lois discrètes

À vous de jouer !

1 **1.** F prend les valeurs 1 ; 2 et 3 avec la même probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ donc F suit la loi uniforme sur {1 ; 2 ; 3}.

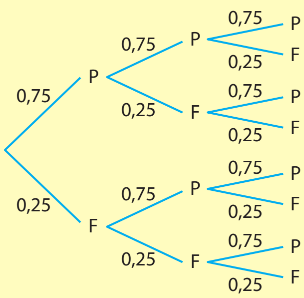
2. $p(F \leqslant 2) = p(F = 1) + p(F = 2) = \frac{2}{3}$.

3 **1.** Il y a soit 0 boule rose, avec une probabilité $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; soit 1 boule rose, avec une probabilité $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ donc R suit la loi $\mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

2. Il faudrait que la probabilité d'obtenir une boule rose soit $\frac{1}{4}$ c'est-à-dire qu'il y ait 40 boules au total donc il faudrait ajouter 25 boules vertes.

5 **1.** On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir « PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0{,}75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement une fois PILE est $3 \times 0{,}75 \times 0{,}25^2 = 0{,}140\,625$ (4e, 6e et 7e chemins en partant du haut).

7 **1.** X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0{,}5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

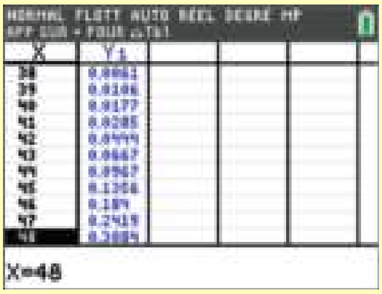
2. $p(X=11)=\binom{20}{11}\times 0{,}5^{11}\times 0{,}5^{20-11}$

$=\binom{20}{11}\times 0{,}5^{20}\approx 0{,}16$

9 **1.** $p(X>6)=1-p(X\leqslant 6)\approx 0{,}62$

2. $p(3\leqslant X<12)=p(X\leqslant 11)-p(X\leqslant 2)\approx 0{,}97$

11 $\alpha=0{,}1$ et on tabule $p(Y\leqslant x)$:



Donc l'intervalle est [45 ; 100].

13 **1.** F donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« obtenir FACE ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 donc F suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}2$.

2. $p(F=3)=(1-0{,}2)^{3-1}\times 0{,}2=0{,}128$.

3. $p(F\leqslant 4)=1-(1-0{,}2)^4=0{,}5904$.

4. $E(F)=\frac{1}{0{,}2}=5$ donc on peut « espérer » obtenir FACE en cinq essais.

15 **1.** $\binom{4}{2}=6$

2. $\binom{6}{2}=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=5+10=15$

17 $p_{X>4}(X\geqslant 8)=p_{X>4}(X>7)$

$=p_{X>4}(X>4+3)$

$=p(X>3)=0{,}25^3\approx 0{,}016$

19 • Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance une pièce équilibrée. A suit la loi $\mathscr{B}(0{,}5)$ donc, en moyenne, on obtient $E(A)=0{,}5$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

• Soit B la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance deux fois la pièce truquée. B suit la loi $\mathscr{B}(2\,;0{,}2)$ donc, en moyenne, on obtient $E(B)=0{,}4$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

Il faut donc privilégier le lancer de la pièce non truquée.

Exercices d'application

34 **1.** C suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;15\}$.

2. $E(C)=\frac{1+15}{2}=8$ et $V(C)=\frac{15^2-1}{12}\approx 18{,}7$.

3. $p(C>4)=p(5)+\ldots+p(15)=\frac{11}{15}$

38 En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi l'option mathématiques complémentaires » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p=0{,}27$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est « L'élève n'a pas choisi l'option mathématiques complémentaire » auquel cas, $p=0{,}73$.

41 **1.** • PILE c'est-à-dire 0 fois FACE avec une probabilité $\frac{2}{3}$;

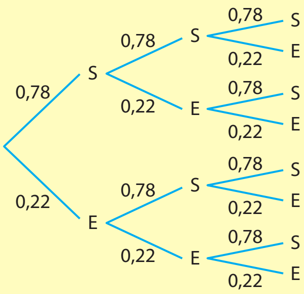
• FACE c'est-à-dire 1 fois FACE avec une probabilité $\frac{1}{3}$;

donc les valeurs prises par X sont bien 0 et 1 avec $p(X=1)=\frac{1}{3}$ donc $p=\frac{1}{3}$.

2. $\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{3}\,\square\,\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

44 **1.** On doit supposer que les lancers sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.



3. a) $0{,}78\times 0{,}22\times 0{,}22+0{,}22\times 0{,}78\times 0{,}22+0{,}22\times 0{,}22\times 0{,}78\approx 0{,}113$

b) $0{,}78^3+3\times 0{,}78^2\times 0{,}22\approx 0{,}876$

47 $\binom{10}{10}=1$ et $\binom{100}{0}=1$

51 **1.** En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est « obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n=20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« obtenir rouge ») est $p=\frac{18}{37}$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\frac{18}{37}$.

2. On cherche

$p(X=9)=\binom{20}{9}\times\left(\frac{18}{37}\right)^9\times\left(\frac{19}{37}\right)^{11}\approx 0{,}168.$

53 **a)** Environ 0,197. **b)** Environ 0,366.
c) Environ 0,861. **d)** Environ 0,66.

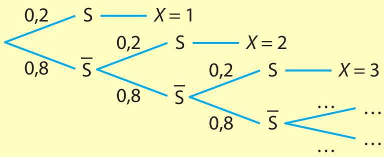
57 **1.** $E(X)=20\times 0{,}83=16{,}6$

2. $E(Y)=100\times 0{,}79=79$

62 **a)** [0 ; 30] **b)** [0 ; 33]

70 **1.** X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« réussir un carreau ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 donc X suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}2$.

2. On a :



$p(X=2)=0{,}8\times 0{,}2=0{,}16$.

3. $p(X=5)=0{,}8^4\times 0{,}2=0{,}08192$ c'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau au 5e essai.

4. $p(X\leqslant 3)=1-0{,}8^3=0{,}488$ c'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau avant le 4e essai.

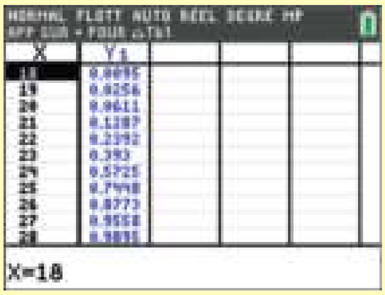
82 En « prolongeant le triangle de Pascal », on trouve :

• $\binom{7}{2}=21$ • $\binom{6}{5}=6$ • $\binom{7}{6}=7$

• $\binom{5}{4}=5$ • $\binom{7}{3}=35$

85 La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles trouvés suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}8$.

1.



Donc l'intervalle cherché est [19 ; 28].

2. [19 ; 30] donc il est sûr au seuil de 99 % de trouver au moins 19 articles.

92 Soit X la variable aléatoire donnant le rang du trajet correspondant au premier contrôle. X suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}05$.

On cherche $p_{X>15}(X\geqslant 30)=p_{X>15}(X>29)$

$=p_{X>15}(X>15+14)=p(X>14)=0{,}95^{14}$

$\approx 0{,}488$.

96 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}09$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}05$.

2. $E(X) = 10 \times 0{,}09 = 0{,}9$ et $E(Y) = 20 \times 0{,}05 = 1$.

En moyenne, on obtient un peu plus de tickets gagnants avec l'option 2.

Préparer le BAC

102 B **103** D

104 B **105** C

106 A **107** B

108 B **109** C

110 B

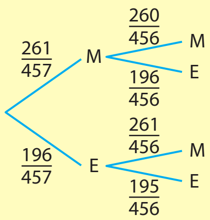
111 **1.** X donne le nombre de succès (« l'élève mange à la cantine ») lorsque l'on réalise $n = 237$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de probabilité de succès $p = 0{,}93$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 237$ et $p = 0{,}93$.

2. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$: la calculatrice donne $k = 227$.

3. Il faut prévoir au minimum 227 repas si l'on veut être sûr au seuil de 95 % que tous les élèves se présentant aient un repas.

112 **1.** Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.

2.



3. a) $\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \approx 0{,}491$ (2^e et 3^e chemins).

b) Appelons E_1 (resp. E_2) l'événement « le 1er (resp. 2^e) titre est électro ».

On cherche :

$$p_{E_2}(E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{196}{457} \times \frac{195}{456}}{\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{195}{456}}$$

$$\approx 0{,}428$$

113 La hauteur de la première barre est $p(X = 1) = 0{,}2$, la hauteur de la dixième barre est $p(X = 10) \approx 0{,}027$ et l'allure générale est typique de la décroissance exponentielle.

114 Voir méthode 8.

115 • Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la première expérience. En moyenne, on obtient 0,25 succès (loi de Bernoulli de paramètre 0,25).

• Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la deuxième expérience. En moyenne, on obtient $E(Y) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ succès (Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{12}$).

On choisit la deuxième expérience.

116 **1.** Soit A la variable aléatoire donnant le rang du premier appareil avec défaut trouvé.

Les tirages étant assimilables à des tirages avec remise, A suit la loi géométrique de paramètre 0,02.

a) On cherche :

$p(A \leqslant 30) = 1 - (1 - 0{,}02)^{30} = 1 - 0{,}98^{30} \approx 0{,}455$.

b) $E(A) = \frac{1}{0{,}02} = 50$, donc après 50 appareils.

c) On cherche :

$p_{A>50}(A > 75) = p_{A>50}(A > 50 + 25) = p(A > 25)$ par propriété de non vieillissement, donc $p_{A>50}(A > 75) = 0{,}98^{25} \approx 0{,}603$.

d) $p_{A>25}(A < 50) = 1 - p_{A>25}(A \geqslant 50)$

$= 1 - p_{A>25}(A > 49)$

$= 1 - p(A > 24) = 1 - 0{,}98^{24}$

$\approx 0{,}384$.

2. D suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,500$ et $p = 0{,}02$.

a) $p(D < 35) \approx 0{,}799$ et $p(D \geqslant 30) \approx 0{,}525$.

b) $[20 ; 41]$

c) Non car $40 \in [20 ; 41]$.

8 Lois de probabilité à densité

À vous de jouer !

1 **1.** g est une fonction polynôme donc continue sur $[0 ; 1]$. Pour tout réel x, $3x^2 \geqslant 0$. Donc la fonction g est positive sur $[0 ; 1]$. $\int_0^1 3x^2\,dx = [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$. Donc g est une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.

2.

$$p(X \geqslant 0{,}25) = \int_{0,25}^{1} 3x^2\,dx$$
$$= [x^3]_{0,25}^{1} = 1^3 - 0{,}25^3 = 0{,}984\,375$$

$$p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = \int_{0,5}^{0,75} 3x^2\,dx$$
$$= [x^3]_{0,5}^{0,75} = 0{,}75^3 - 0{,}5^3$$
$$= 0{,}296875$$

5

$$E(X) = \int_0^2 x \times 0{,}5x\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$
$$= \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = \int_0^2 x^2 \times 0{,}5x\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx - \frac{16}{9}$$
$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2^4}{8} - \frac{0^4}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

7 **1.** $P\left(T < \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ car 20 min $= \frac{1}{3}$ heure.

2. $P\left(T > \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

9 **1.** $P(X > 3) = \frac{10 - 3}{10 - 0} = \frac{7}{10}$

$P(2 \leqslant X \leqslant 7) = \frac{7 - 2}{10 - 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2. $E(X) = \frac{0 + 10}{2} = 5$;

$V(X) = \frac{(10 - 0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$.

11 **1.** D suit la loi uniforme sur l'intervalle $[24 ; 72]$.

a) $P(X < 24) = 0$

b) $P(X > 48) = \frac{72 - 48}{72 - 24} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$

2. $E(X) = \frac{24 + 72}{2} = 48$

Donc en moyenne le colis sera livré en 48 h.

13 **a)** $p(X \leqslant 5) = 1 - e^{-0,1\times5} \approx 0{,}3935$

b) $p(10 < X < 20) = e^{-0,1\times10} - e^{-0,1\times20} \approx 0{,}0861$

c) $p_{X>6}(X \geqslant 16) = p_{X>6}(X \geqslant 6 + 10)$

$= p(X \geqslant 10) = e^{-0,1\times10}$

$= e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}3\,679$.

d) $E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

15 **1.** Soit D la durée de vie. $E(D) = 10$ d'après l'énoncé. Donc $\frac{1}{\lambda} = 10$. Donc $\lambda = 0{,}1$.

2. $P(D \leqslant 4) = 1 - e^{-0,1\times4} \approx 0{,}3297$

$P_{X>10}(X > 10 + 5) = P(X > 5) = e^{-0,1\times5} \approx 0{,}6065$

17 **1.** $\int_x^0 e^t\,dt = [e^t]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$

2. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. Donc, par soustraction des limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - e^x = 1$.

3. La fonction exponentielle est continue est positive sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I =]-\infty ; 0]$. D'après les deux questions précédentes, $\int_I g(t)\,dt = 1$. Donc g est une densité de probabilité sur I.

4. $p(X > -4) = \int_{-4}^{0} e^t\,dt = [e^t]_{-4}^{0} = e^0 - e^{-4}$

$= 1 - e^{-4} \approx 0{,}981\,7$

19 $p(Y \geqslant 10) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow -10\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}4)}{-10} \approx 0{,}0916$

22 $V(X) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(b-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 4 \Leftrightarrow b-1 = 2$

ou $b-1 = -2 \Leftrightarrow b = 3$ ou $b = -1$.

D'après l'énoncé, b est supérieur à 1, donc $b = 3$.

Exercices d'application

36 **1.** La fonction $f : x \mapsto 2$ est une fonction constante positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle I. De plus,

$\int_2^{5{,}5} 2\,dx = [2x]_5^{5{,}5} = 2\times 5{,}5 - 2\times 5$

$= 11 - 10 = 1$

Donc la fonction f est bien une densité de probabilité sur I.

2. $p(X \in [5{,}1 ; 5{,}3]) = \int_{5{,}1}^{5{,}2} 2\,dx = [2x]_{5{,}1}^{5{,}2}$

$= 2\times 5{,}2 - 2\times 5{,}1$

$= 10{,}4 - 10{,}2 = 0{,}2$

51 **a)** $E(X) = \int_5^{5{,}5} 2x\,dx = [x^2]_5^{5{,}5} = 5{,}5^2 - 5^2$

$= 30{,}25 - 25 = 5{,}25$

$V(X) = \int_5^{5{,}5} 2x^2\,dx - 5{,}25^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_5^{5{,}5}$

$= \frac{2\times 5{,}5^3}{3} - \frac{2\times 5^3}{3}$

$= \frac{1331}{12} - \frac{250}{3} = \frac{331}{12}$

$\approx 27{,}6$

b) $E(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$V(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^3\,dx - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{2}^4}{4} - \frac{0^4}{4} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

c) $E(X) = \int_0^{e} 1\,dx = [x]_1^{e} = e - 1$

$V(X) = \int_1^{e} x\,dx - (e-1)^2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e} = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}$

$= \frac{e^2 - 1}{2}$

53 **1.** $p(X > 0{,}2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

2. $p\left(\frac{1}{3} < X < \frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$

3. $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$

59 **1. a)** $p(Y \in [0 ; 6]) = p(Y \leqslant 6) = 1 - e^{-0{,}4\times 6}$

$= 1 - e^{-2{,}4} \approx 0{,}9092$

b) $p(Y \in [3 ; +\infty[) = p(Y \geqslant 3) = e^{-0{,}4\times 3}$

$= e^{-1{,}2} \approx 0{,}3012$

c) $p(Y \in]1 ; 2[) = e^{-0{,}4\times 1} - e^{-0{,}4\times 2}$

$= e^{-0{,}4} - e^{-0{,}8} \approx 0{,}2210$

d) $p(Y \in]1 ; 2[\cup [3 ; +\infty[) = e^{-0{,}4} - e^{-0{,}8} + e^{-1{,}2}$

$\approx 0{,}5222$

2. $p_{Y>5}(Y > 15) = p_{Y>5}(Y > 5 + 10) = p(Y > 10)$

$= e^{-0{,}4\times 10} = e^{-4} \approx 0{,}0183$

3. $E(Y) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$

Préparer le BAC

97 B

98 D

99 C

100 A

101 B

102 B

103 C

104 D

105 C

106 C

107 C

108 **1.** $p(T < 3) = 1 - e^{-0{,}2\times 3} = 1 - e^{-0{,}6} \approx 0{,}4512$

2. On cherche le plus petit réel t tel que $p(T < t) > 0{,}95$

c'est-à-dire :

$1 - e^{-0{,}2t} > 0{,}95 \Leftrightarrow e^{-0{,}2t} < 0{,}05$

$\Leftrightarrow -0{,}2t < \ln(0{,}05)$

$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}2}$

Or $\frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}2} \approx 15$.

Donc le temps d'attente minimal est 15 minutes.

3. $E(T) = \frac{1}{0{,}2} = 5$. Donc en moyenne le temps d'attente entre deux étoiles filantes est de 5 minutes. En 2 heures, le groupe pourra donc observer 24 étoiles filantes car 24×5 min $= 120$ min $= 2$ h.

109 **A ▶** La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I = [0 ; +\infty[$.

De plus, on a :

$\int_0^x \frac{e^{-0{,}5t}}{2}\,dt = [-e^{-0{,}5t}]_0^x$

$= -e^{-0{,}5x} - (-e^{-0{,}5\square 0})$

$= 1 - e^{-0{,}5x}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}5x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc, par composition des limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}5x} = 0$

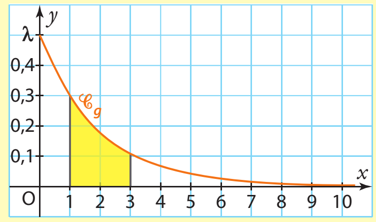
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-0{,}5x} = 1$. Ce qui signifie que $\int_I g(t)\,dt = 1$.

Donc g est une densité de probabilité.

B ▶ 1. $E(X) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc la densité de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.

Or cette fonction est la fonction g de la partie **A**.

2. a) et **b)**



La valeur de λ est bien 0,5 car c'est l'ordonnée à l'origine de la courbe de la fonction g.

3. a) $p(1 \leqslant X \leqslant 3) = e^{-0{,}5\times 1} - e^{-0{,}5\times 3}$

$= e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} \approx 0{,}3834$

b) $p_{X>3}(X \geqslant 4) = p(X \geqslant 1) = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$

110 **A ▶ 1.** Voir cours.

2. $P(X < 2) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}05$

$\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0{,}95$

$\Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0{,}95)$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}95)}{-2} \approx 0{,}026$

3. $E(X) = \frac{1}{0{,}026} \approx 38{,}5$

B ▶ 1. $P(30 \leqslant X \leqslant 50) = e^{-0{,}025\times 30} - e^{-0{,}025\times 50}$

$\approx 0{,}186$

2. $P(X > 60) = e^{-0{,}025\times 60} \approx 0{,}223$

111 **A ▶ 1.** Soit D la durée du trajet.

$E(D) = \frac{12 + 28}{2} = 20$. Son trajet dure 20 minutes en moyenne.

2. Elle arrive en retard au lycée si son trajet dure plus de 25 minutes. Or $p(D > 25) = \frac{28 - 25}{28 - 12} = \frac{3}{16}$.

Donc la probabilité qu'elle arrive en retard au lycée est $\frac{3}{16}$.

3. On admet que Martha arrive pile à l'heure.

a) Loïse ne fera pas attendre Martha si son trajet dure 15 minutes maximum.

Or $p(D < 15) = \frac{15 - 12}{28 - 12} = \frac{3}{16}$.

b) Loïse attend Martha plus de deux minutes si elle met moins de 13 minutes pour arriver au lycée. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$p_{D<15}(D < 13) = \frac{p(D < 13)}{p(D < 15)} = \frac{13 - 12}{15 - 12} = \frac{1}{3}$.

B ▶ 1. D'après l'énoncé, $p(X \geqslant 100) = 0{,}8$. Donc

$e^{-100\lambda} = 0{,}8 \Leftrightarrow -100\lambda = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}8)}{100}$

La valeur approchée de λ est 0,002.

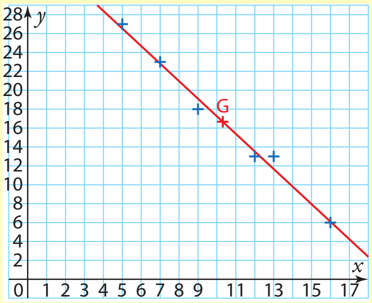
2. $p_{X>150}(X > 300) = P(X > 150)$

$= e^{-0{,}002\times150} = e^{-0{,}3} \approx 0{,}7408$

9 Statistiques à deux variables

À vous de jouer !

1 **1.** Voir ci-dessous.



2. Soit G le point moyen :

$x_G = \dfrac{5+7+9+12+13+16}{6} = \dfrac{62}{6} \approx 10{,}3$ et

$y_G = \dfrac{27+23+18+13+13+6}{6} = \dfrac{100}{6} \approx 16{,}7.$

3. Forme rectiligne : les points sont presque alignés.

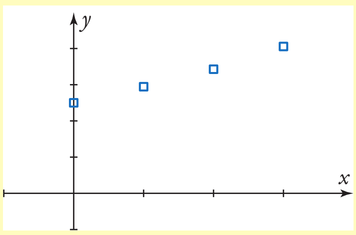
4. Voir ci-dessus.

3 L'équation de la droite d'ajustement est $y = -1{,}852x + 35{,}804$.
Le coefficient de corrélation linéaire est $r \approx 0{,}9939$.

5 **1.**

Valeurs x_i	0	1	2	3
$y_i = \ln(y_i)$	2,48	2,94	3,43	4,06

2. On voit sur le graphique ci-dessous que le nuage de points $(x_i\,;\,y_i')$ présente une forme pouvant être ajustée par une droite.



3. L'équation est $y' = 0{,}522x + 2{,}449$.

4. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow \ln(y) \approx 0{,}522x + 2{,}449$

$\Leftrightarrow y \approx e^{0{,}522x+2{,}449}$

7 **1.** Sur le graphique, on peut lire que le point de la droite d'ajustement d'abscisse 4 (correspondant à 2014) a pour ordonnée 21,2 environ. On peut donc estimer qu'en 2014 le cinéma a totalisé 21 200 entrées environ.

2. On constate que la droite atteint l'ordonnée 24 pour $x = 14$. Cela correspond à l'année 2024.

9 **1.** On calcule d'abord $\overline{x} = 9{,}8$ et $\overline{y} = 17{,}4$.

Valeurs x_i	5	7	9	12	16
Valeurs y_i	27	23	18	13	6
Écarts $x_i - \overline{x}$	−4,8	−2,8	−0,8	2,2	6,2
Écarts $y_i - \overline{y}$	9,6	5,6	0,6	−4,4	−11,4
Produit des écarts $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	−46,08	−15,68	−0,48	−9,68	−70,68

La covariance est la moyenne des produits des écarts :

$\text{cov}(x\,,\,y) = \dfrac{-46{,}08-15{,}68-0{,}48-9{,}68-70{,}68}{5}$

$= \dfrac{-142{,}6}{5} = -28{,}52$

La variance de x est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$\text{var}(x) = \dfrac{(-4{,}8)^2+(-2{,}8)^2+(-0{,}8)^2+2{,}2^2+6{,}2^2}{5}$

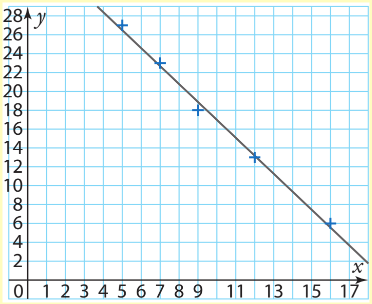
$= \dfrac{74{,}8}{5} = 14{,}96$

2. On en déduit que le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est :

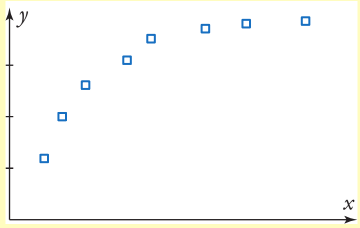
$a = \dfrac{\text{cov}(x\,,\,y)}{\text{var}(x)} = \dfrac{-28{,}52}{14{,}96} \approx -1{,}9064$ et l'ordonnée à l'origine $b \approx 17{,}4 + 1{,}9064 \times 9{,}8 \approx 36{,}08$.

Donc l'équation de la droite de régression de y en x est $y = -1{,}9064x + 36{,}08$.

3.



11 **1.**

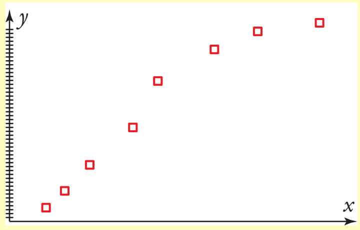


2.

x_i	30	45	65	100
$y'_i = e^{y_i}$	3,32	7,38	13,46	22,2

x_i	120	165	200	250
$y'_i = e^{y_i}$	33,12	40,45	44,7	46,99

3.



4. L'équation de la droite de régression de y' en x est $y' = 0{,}2137x + 0{,}4083$.

Comme $y' = e^y$, alors $y = \ln(y')$. Donc on a $y = \ln(0{,}2137x + 0{,}4083)$.

Exercices d'application

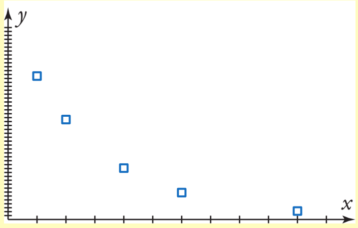
18 Le graphique 1 peut être ajusté par une parabole, le graphique 3 par une courbe exponentielle, le graphique 4 par une droite. Le graphique 2 ne présente aucune forme reconnaissable.

22 **1.** Le nuage de points présente une forme rectiligne « montante », on peut donc l'ajuster par une droite.

2. Avec la calculatrice, on trouve :

$y = 0{,}0556x - 4{,}1508$ et $r \approx 0{,}944$.

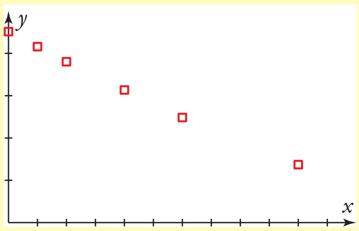
26 **1.**



2.

x_i	0	1	2	4	6	10
$y'_i = \ln(y_i)$	4,5	4,17	3,8	3,14	2,48	1,39

3.



4. L'équation de la droite de régression est $y' = -0{,}31x + 4{,}45$.

5. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^{y'} \Leftrightarrow y = e^{-0{,}31x+4{,}45}$.

29 **1.** $y = 5{,}3 \times 1\,500 - 5\,900 = 2\,050$. Cela signifie que le chiffre d'affaires est égal à 2 050 000 euros. Donc l'affirmation est vraie.

2. 10 millions = 10 000 milliers d'euros. Donc on résout l'équation $10\,000 = 5{,}3x - 5\,900$. Ce qui donne $x = \dfrac{15\,900}{5{,}3} = 3\,000$. Donc l'affirmation est fausse car le salaire moyen devrait être égal à 3 000 €.

Préparer le BAC

51 B

52 D

53 D

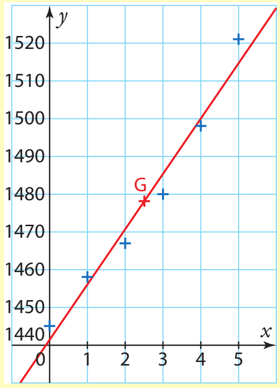
54 B

55 **1.** Voir ci-dessous.

2. Le point moyen a pour coordonnées (2,5 ; 1 478).

3. a) $y = 14{,}657x + 1441{,}524$

b)



4. a) 2023 est l'année de rang 9, donc en utilisant l'équation de la droite d'ajustement on a :
$y = 14{,}657 \times 9 + 1\,441{,}524 = 1\,573{,}437$. Ainsi on peut estimer qu'en 2023 le SMIC brut mensuel sera d'environ 1 573 €.

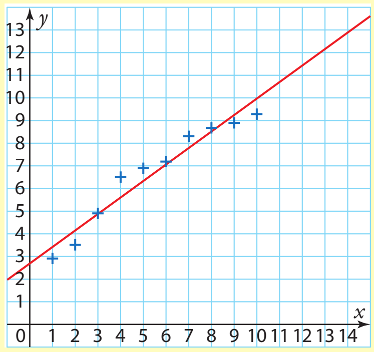
b) $14{,}657x + 1\,441{,}524 > 1\,700$
$\Leftrightarrow 14{,}657x > 258{,}476 \Leftrightarrow x > 17{,}6$.

Donc le SMIC brut mensuel pourrait dépasser 1 700 € l'année de rang 18, c'est-à-dire en 2014 + 18 = 2032.

56 **A ▶ 1.** Voir ci-dessous.

2. a) Avec la calculatrice on trouve l'équation de la droite des moindres carrés : $y = 0{,}73x + 2{,}71$.

b)



L'année 2023 correspond au rang 14. On peut lire sur le graphique ou calculer :
$y = 0{,}73 \times 14 + 2{,}71 = 12{,}93$. Ainsi en 2023 l'entreprise pourrait vendre environ 12,9 millions de boissons.

B ▶ 1. a)

x_i	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,61	4,04	5,17	6,09	6,86

x_i	6	7	8	9	10
$f(x)$	7,5	8,05	8,52	8,94	9,3

b) La fonction semble strictement croissante sur [1 ; 20].

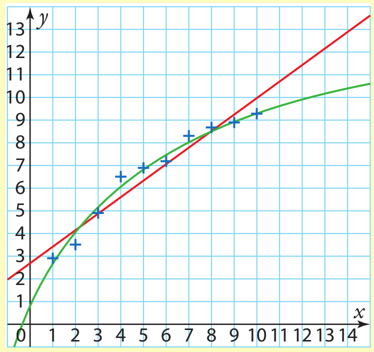
c) $f(x) = 15 - 285 \times \dfrac{1}{3x+20}$.

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x+20}$ est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 3x + 20$ fonction affine non nulle et dérivable sur [1 ; 20] telle que $v'(x) = 3$. Ainsi la fonction f est dérivable sur [1 ; 20] :

$$f'(x) = 0 - 285 \,\square\, \frac{-3}{(3x+20)^2} = \frac{855}{(3x+20)^2}$$

d) $f'(x)$ est le quotient du nombre positif 855 par $(3x+20)^2$ qui est un « carré » donc toujours positif. Ainsi pour tout réel x de [1 ; 20], $f'(x) > 0$. On peut en déduire que la fonction f est strictement croissante sur [1 ; 20].

e)



2. a) $f(14) = 10{,}4$. Donc selon ce modèle, en 2023 on peut prévoir 10,4 millions de boissons vendues.

b) D'après le graphique, on remarque que la courbe de la fonction atteint 10,8 en ordonnée lorsque $x = 16$. On en déduit que la quantité de boissons vendues sera supérieure à 10,8 millions en 2025 (année de rang 16).

Crédits

Couverture : ©Mauricios Ramos/Canvas Images/Alamy/Photo 12

p. 12 : Bridgeman Images ; Leemage/Bridgeman Images; Droits Réservés - **p. 13** : akg / Science Photo Library ; Granger / Bridgeman Images; Granger / Bridgeman Images; Granger / Bridgeman Images - **p. 32** : wikipedia ; Bridgeman Images - **p. 68** : Alain Schein/The ImageBank/Getty Images - **p. 90** : Alain Schein / The Image Bank/Getty Images - **p. 93** : DR - **p. 112** : Henri Stierlin /Bildarchiv Steffens / Bridgeman Images - **p. 138** : iStock Editorial / Getty Images Plus - **p. 162** : Bridgeman Images ; ©Bianchetti/Leemage - **p. 163** : Bridgeman Images ; DR Wikipedia; akg / Science Photo Library; Bridgeman Images; Photo12/Alamy/The History Collection - **p. 164** : Arnaud Robin - **p. 166** : Getty Images via AFP - **p. 254** : Granger collection/Bridgeman images - **p. 255** : Photo12/Alamy/The History Collection - **p. 262** : FineArtImages/ Leemage - **p. 294** : Photo12/Alamy/Science History Images - **p. 295** : Lee/Leemage ; Bianchetti/Leemage - **p. 296** : Granger/Bridgeman Images ; Granger/Bridgeman Images; akg-images / AMERICAN PHILOSOPHICAL SOCIETY/SCIENCE PHOTO LIBRARY; Luisa Ricciarini/Leemage; akg-images / FototecaGilardi - **p. 297** : Aisa/Leemage ; De Agostini Picture Library/Bridgeman; AKG Images; DR; Bridgeman Images/Leemage; Lee/Leemage.

Responsable éditorial : Adrien FUCHS
Coordination éditoriale : Aurore BALDUZZI, Julie DRAPPIER, Stéphanie HERBAUT, Marilyn MAISONGROSSE.
Maquette de couverture : Primo & Primo
Maquette intérieure : Primo & Primo et Delphine d'INGUIMBERT
Mise en pages et schémas : Nord Compo
Iconographie : Candice RENAULT
Numérique : Dominique GARRIGUES et Audrey BILLARD

ISBN : 978-2-210-11423-4

par
Bertrand
Périer

Toutes les clés pour gagner en assurance et réussir à l'oral

- **11 vidéos tutoriels** d'Abyale Nan Nguema Desraisses, pour travailler des **techniques** d'oral
- **12 vidéos d'ateliers d'improvisation** de Bertrand Périer, pour progresser avec d'autres élèves
- Des **fiches** pratiques et visuelles, pleines de **conseils**

www.grandoral.magnard.fr

Spécial Bac

Des fiches ultra-visuelles pour réussir les nouvelles épreuves du Bac !

5,90 € 8,90 € 11,90 €

www.specialbac.magnard.fr

ISBN : 978-2-210-11423-4

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

Ce manuel existe aussi en version numérique

Achat individuel élève disponible sur

www.boutique.edulib.fr

édulib

MAGNARD

www.magnard.fr