Pour l'enseignant

SUR LE SITE COMPAGNON

Livre du professeur

Ressources complémentaires

ENSEIGNANTS

Consultation en ligne sans inscription
jusqu'à fin septembre 2019

SPÉCIMEN

Cette version de démonstration contient :

- Toutes les pages du manuel
- L'accès direct aux ressources à flasher

Parution prévue de la version complète : juillet 2019

MATHS 2de

Programme 2019

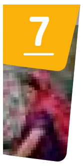
Coordination
Hélène GRINGOZ et Frédéric WEYERMANN

Auteurs
Delphine BAU
Jérémy COUTEAU
Hélène GRINGOZ
Marie HASCOËT
Didier KRIEGER
Mathieu PRADEL
Frédéric WEYERMANN

Les auteurs et les éditions MAGNARD remercient vivement :
Anna IRIBARNE pour sa contribution au développement du projet initial.
Les relectrices et relecteurs du manuel pour leurs remarques et leurs suggestions.
L'ensemble des enseignant•e•s pour leur participation aux études menées sur ce manuel.

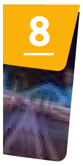
MAGNARD

Sommaire

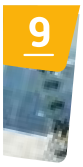


7 Droites du plan et systèmes d'équations

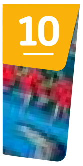
Partie 4 FONCTIONS



8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence



9 Variations et extremums



10 Signe d'une fonction et inéquations

Partie 5 STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

11 Proportions et évolutions en pourcentage

12 Statistiques descriptives

Pour tous les chapitres, les corrigés des exercices dont le numéro est sur fond bleu 100 dans les rubriques

A vous de jouer | Exercices d'application | En autonomie

• Casio Graph 90+ E • TI-83 Premium CE • Numworks

Tous les pictos pour se repérer dans le manuel

Logique & Démonstration Cours, activités et exercices en lien avec la démonstration. Exercices faisant appel à la logique.

Algo & Prog Utilisation d'algorithmes et programmation en PYTHON et en langage naturel.

TICE Utilisation de logiciels (tableur, GeoGebra, géométrie dynamique...)

Les autres disciplines Lien entre les Maths et les enseignements de Français, Histoire, Géographie, Histoire des maths, Arts, Philosophie, SVT, SES, EPS, Physique Chimie...

Problème ouvert Situation de recherche dont la solution peut être trouvée de différentes façons.

Orientation — En groupe — À l'oral

AP Exercices supplémentaires de réinvestissement des notions essentielles

Calculatrice — Calculatrice non autorisée

Chercher
Modéliser
Raisonner
Calculer
Communiquer
Représenter

Compétences mises en jeu dans les travaux pratiques

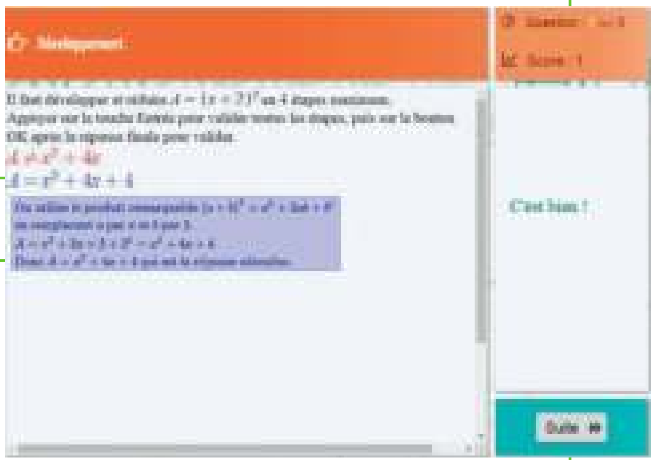
Le numérique dans votre manuel

Un accès simple à vos ressources
Par lien-mini dans le manuel papier • En un clic dans le manuel numérique.

Des parcours différenciés

Exo | Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-01

Un **parcours différencié de réinvestissement** pour chacun des exercices de la rubrique Pour prendre un bon départ.
- Des **conseils** sont proposés en cas d'erreur.
- Les exercices proposés s'adaptent à votre niveau.
- Chaque exercice est **corrigé**.



Des exercices de gammes

Une **version interactive** des exercices résolus portant sur les **méthodes essentielles** du programme.
- Des **conseils** sont proposés en cas d'erreur.
- Chaque exercice est **corrigé**.
- Les **paramètres** de l'exercice sont **renouvelés** à chaque ouverture afin de pouvoir faire des **gammes**.

Exo | Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-02

Des fichiers logiciels

Doc | Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-03

Les **fichiers logiciels** à télécharger pour vos travaux pratiques.

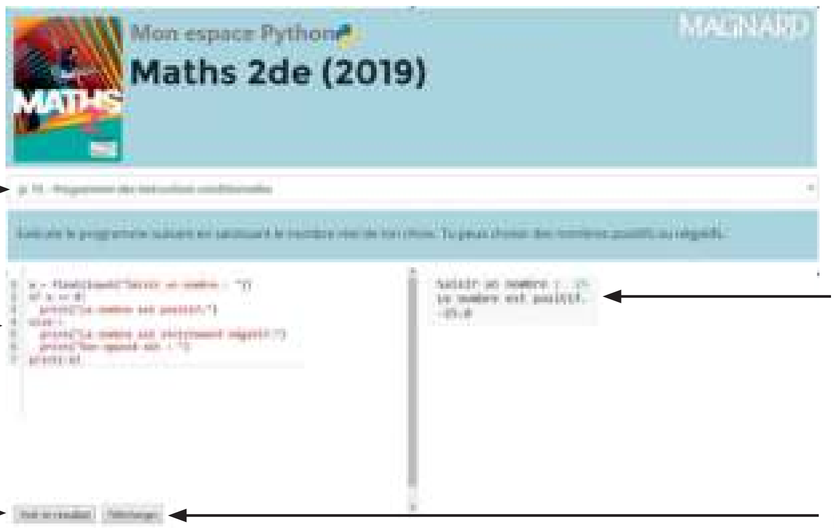
Mon espace Python

Lienmini.fr/maths2-653

Un accès en ligne à tous les **programmes Python** du manuel

Sélectionner l'activité ou l'exercice du manuel.

Afficher, modifier, compléter le programme.



Affichage des résultats du programme.

Exécuter le programme.

Enregistrer le programme.

Programme

Nombres et calculs

• Manipuler les nombres réels	Dans le manuel
Contenus • Ensemble ℝ des nombres réels, droite numérique.	2
• Intervalles de ℝ. Notations $+\infty$ et $-\infty$. • Notation $\|a\|$. Distance entre deux nombres réels. • Représentation de l'intervalle $[a - r, a + r]$ puis caractérisation par la condition $\|x - a\| \leqslant r$.	3
• Ensemble 𝔻 des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près. • Ensemble ℚ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple 2 et π. **Capacités attendues**	2
• Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.	2 3
• Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné. • Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux.	3
• Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.	Tous les chapitres
Démonstrations • Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. • Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel. **Exemple d'algorithme** • Déterminer par balayage un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}. **Approfondissements possibles** • Développement décimal illimité d'un nombre réel. • Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.	2
• Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier	**Dans le manuel**
Contenus • Notations ℕ et ℤ. • Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair. **Capacités attendues** • Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier. • Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible. **Démonstrations** • Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est multiple de a. • Le carré d'un nombre impair est impair. **Exemples d'algorithme** • Déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b. • Pour des entiers a et b donnés, déterminer le plus grand multiple de a inférieur ou égal à b. • Déterminer si un entier naturel est premier.	2
• Utiliser le calcul littéral	
Contenus • Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées.	2
Relation $\sqrt{a^2} = \|a\|$	2 3
• Identités $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens. • Exemples simples de calcul sur des expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.	4
• Somme d'inégalités. Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.	3 9
• Ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation. **Capacités attendues**	3 4 10
• Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.	2 4
• Sur des cas simples de relations entre variables (par exemple $U = RI$, $d = vt$, $S = \pi r^2$, $V = abc$, $V = \pi r^2 h$), exprimer une variable en fonction des autres. Cas d'une relation du premier degré $ax + by = c$. • Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.	3
• Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.	4 8
• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre une inéquation du premier degré. **Démonstrations**	3 8
• Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.	3
• Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}\sqrt{b}$.	2
• Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.	9
Exemple d'algorithme • Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.	2

Approfondissements possibles • Développement de $(a + b + c)^2$. • Développement de $(a + b)^3$.	4
• Inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs.	9

Géométrie

• Manipuler les vecteurs du plan	Dans le manuel
Contenus • Vecteur $\overrightarrow{HH'}$ associé à la translation qui transforme *M* en *M'*. Direction, sens et norme. • Égalité de deux vecteurs. Notation $\vec{u}$. Vecteur nul. • Somme de deux vecteurs en lien avec l'enchaînement des translations. Relation de Chasles. • Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur. • Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B. • Produit d'un vecteur par un nombre réel. Colinéarité de deux vecteurs. • Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme. **Capacités attendues** • Représenter géométriquement des vecteurs. • Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. • Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur. • Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.	6
• Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	5
• Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs. • Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs. **Démonstration** • Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.	6
Approfondissement possible • Définition vectorielle des homothéties.	9
• Résoudre des problèmes de géométrie	**Dans le manuel**
Contenus • Projeté orthogonal d'un point sur une droite. **Capacités attendues** • Résoudre des problèmes de géométrie plane sur des figures simples ou complexes (triangles, quadrilatères, cercles). • Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes.	5
• Traiter de problèmes d'optimisation.	5 8 9
Démonstrations • Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M. • Relation trigonométrique $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ dans un triangle rectangle. **Approfondissements possibles** • Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. • Expression de l'aire d'un triangle : $\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$ • Formule d'Al-Kashi. • Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit.	6
• Représenter et caractériser les droites du plan	**Dans le manuel**
Contenus • Vecteur directeur d'une droite. • Équation de droite : équation cartésienne, équation réduite. • Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. **Capacités attendues** • Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente. • Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique. • Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite. • Établir que trois points sont alignés ou non. • Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes. • Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes. **Démonstration** • En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite. **Exemples d'algorithme** • Étudier l'alignement de trois points dans le plan. • Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés.	7
Approfondissements possibles • Ensemble des points équidistants d'un point et de l'axe des abscisses.	8
• Représentation, sur des exemples, de parties du plan décrites par des inégalités sur les coordonnées.	7

Programme

Fonctions

• Se constituer un répertoire de fonctions de référence	Dans le manuel
Contenus • Fonctions carré, inverse, racine carrée, cube : définitions et courbes représentatives.	8
Capacités attendues • Pour deux nombres a et b donnés et une fonction de référence f, comparer $f(a)$ et $f(b)$ numériquement ou graphiquement.	9
• Pour les fonctions affines, carré, inverse, racine carrée et cube, résoudre graphiquement ou algébriquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$.	3 8 10
Démonstration • Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$.	10

• Représenter algébriquement et graphiquement les fonctions	Dans le manuel
Contenus • Fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles de $\mathbb{R}$. • Courbe représentative : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient $y = f(x)$. • Fonction paire, impaire. Traduction géométrique. **Capacités attendues** • Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : appartenance, calcul de coordonnées.	8
• Modéliser par des fonctions des situations issues des mathématiques, des autres disciplines.	8 9 10
• Résoudre une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$, $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.	3 4 8 10
• Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.	10
• Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une équation ou inéquation du type $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$. **Approfondissement possible** • Étudier la parité d'une fonction dans des cas simples.	8

• Étudier les variations et les extremums d'une fonction	Dans le manuel
Contenus • Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations. • Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	9
• Pour une fonction affine, interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe.	7 9
• Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée, cube. **Capacités attendues** • Relier représentation graphique et tableau de variations. • Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.	9
• Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule. • Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine.	10
Démonstration • Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.	9
Exemples d'algorithme • Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, algorithmes d'approximation numérique d'un extremum (balayage, dichotomie). • Algorithme de calcul approché de longueur d'une portion de courbe représentative de fonction. **Approfondissement possible** • Relier les courbes représentatives de la fonction racine carrée et de la fonction carré sur $\mathbb{R}+$.	8

Statistiques et probabilités

• Utiliser l'information chiffrée et statistique descriptive	Dans le manuel
Contenus • Proportion, pourcentage d'une sous–population dans une population. • Ensembles de référence inclus les uns dans les autres : pourcentage de pourcentage. • Évolution : variation absolue, variation relative. • Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs (produit, inverse).	11
• Indicateurs de tendance centrale d'une série statistique : moyenne pondérée. • Linéarité de la moyenne. • Indicateurs de dispersion : écart interquartile, écart type.	12
Capacités attendues • Exploiter la relation entre effectifs, proportions et pourcentages. • Traiter des situations simples mettant en jeu des pourcentages de pourcentages. • Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution. • Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs. Calculer un taux d'évolution réciproque.	11
• Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.	12

• Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m, l'écart type s, et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.	12
• Modéliser le hasard, calculer des probabilités	**Dans le manuel**
Contenus • Ensemble (univers) des issues. Événements. Réunion, intersection, complémentaire. • Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement : somme des probabilités des issues. • Relation $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$. • Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres. **Capacités attendues** • Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité dans une population) en comprenant que les probabilités sont définies a priori. • Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité. • Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves. Python renvoyant la moyenne m, l'écart type s, et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.	13
• Échantillonnage	**Dans le manuel**
Contenus • Échantillon aléatoire de taille n pour une expérience à deux issues. • Version vulgarisée de la loi des grands nombres : « Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. » • Principe de l'estimation d'une probabilité, ou d'une proportion dans une population, par une fréquence observée sur un échantillon. **Capacités attendues** • Lire et comprendre une fonction Python renvoyant le nombre ou la fréquence de succès dans un échantillon de taille n pour une expérience aléatoire à deux issues. • Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur. • Simuler N échantillons de taille n d'une expérience aléatoire à deux issues. Si p est la probabilité d'une issue et f sa fréquence observée dans un échantillon, calculer la proportion des cas où l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $1/\sqrt{n}$	13

Algorithmique et programmation

• Utiliser les variables et les instructions élémentaires	**Dans le manuel**
Contenus • Variables informatiques de type entier, booléen, flottant, chaîne de caractères. • Affectation (notée ⟵ en langage naturel). • Séquence d'instructions. • Instruction conditionnelle. • Boucle bornée (for), boucle non bornée (while). **Capacités attendues** • Choisir ou déterminer le type d'une variable (entier, flottant ou chaîne de caractères). • Concevoir et écrire une instruction d'affectation, une séquence d'instructions, une instruction conditionnelle. • Écrire une formule permettant un calcul combinant des variables. • Programmer, dans des cas simples, une boucle bornée, une boucle non bornée. • Dans des cas plus complexes : lire, comprendre, modifier ou compléter un algorithme ou un programme.	1
• Notion de fonction	**Dans le manuel**
Contenus • Fonctions à un ou plusieurs arguments. • Fonction renvoyant un nombre aléatoire. Série statistique obtenue par la répétition de l'appel d'une telle fonction. **Capacités attendues** • Écrire des fonctions simples ; lire, comprendre, modifier, compléter des fonctions plus complexes. Appeler une fonction. • Lire et comprendre une fonction renvoyant une moyenne, un écart type. Aucune connaissance sur les listes n'est exigée. • Écrire des fonctions renvoyant le résultat numérique d'une expérience aléatoire, d'une répétition d'expériences aléatoires indépendantes.	1

Vocabulaire ensembliste et logique

• Utiliser les variables et les instructions élémentaires	**Dans le manuel**
Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire, et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles. Ils rencontrent également la notion de couple. Pour le complémentaire d'un sous-ensemble A de E, on utilise la notation des probabilités $\bar{A}$, ou la notation $E \setminus A$.	**Dicomaths**
Les élèves apprennent en situation à : - reconnaître ce qu'est une proposition mathématique, à utiliser des variables pour écrire des propositions mathématiques ; - lire et écrire des propositions contenant les connecteurs « et », « ou » ; - formuler la négation de propositions simples (sans implication ni quantificateurs) ; - mobiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse ; - formuler une implication, une équivalence logique, et à les mobiliser dans un raisonnement simple ; - formuler la réciproque d'une implication ; - lire et écrire des propositions contenant une quantification universelle ou existentielle (les symboles $\forall$ et $\exists$ sont hors programme). Par ailleurs, les élèves produisent des raisonnements par disjonction des cas et par l'absurde.	Tous les chapitres

PARTIE
1

Algorithmique et programmation

Euclide
(vers 325 av. J.-C. – vers 265 av. J.-C.)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Le mot *algorithme* vient du nom du mathématicien Al-Khwarizmi. Ce dernier a classé les différents algorithmes connus de son époque ; son opération *al-jabr* a d'ailleurs donné le mot *algèbre*.

Euclide est l'auteur d'un algorithme servant à déterminer le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels. L'algorithme d'Euclide reste le plus connu.

↳ Dicomaths p. 349

Leibniz imagine une machine pouvant effectuer des calculs. Il est le premier à exposer l'utilité de la numération binaire pour le calcul automatique.

↳ Dicomaths p. 351

Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai appris ce qu'était un algorithme, un programme et une variable informatique. J'ai aussi appris à écrire, à mettre au point et à exécuter un programme simple utilisant des boucles et des conditions.

En 2de, je vais consolider mes connaissances en y ajoutant la notion de fonction et en programmant dans un langage informatique.

En 1943, l'ENIAC est le premier ordinateur ne comportant plus de pièces mécaniques. Les inventions du transistor (1948), du circuit intégré (1958) et du microprocesseur (1971) entraînent une augmentation de la puissance et une diminution de la taille des ordinateurs. Au XXI^{e} siècle, les supercalculateurs deviennent de plus en plus puissants. Une véritable compétition mondiale de performance se joue.

Ada Lovelace (1815 – 1852)

Ada Lovelace, en travaillant sur la machine de Babbage, élabore le premier véritable programme informatique au monde.

↪ Dicomaths p. 351

Alan Turing (1912 – 1954)

Turing donne une définition précise du concept d'algorithme. Dans un article, il présente pour la première fois les termes *programmation* et *programme*.

↪ Dicomaths p. 353

En 1re générale, je consoliderai mes connaissances sur les variables, les instructions conditionnelles, les boucles et les fonctions. Je découvrirai la notion de liste.

En 1re technologique, j'interpréterai et je traduirai des algorithmes, je modifierai un programme informatique, j'écrirai une fonction simple en langage PYTHON, je décomposerai un programme en fonctions et j'organiserai des feuilles de calcul. Je découvrirai également (sauf en STD2A) la notion de liste.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **cryptographie**, à décréter qu'un nombre est premier avec une certaine probabilité (tests de primalité).
- En **géographie**, à déterminer le plus court chemin entre deux lieux (algorithme de Dijkstra).
- En **SES**, à minimiser un coût via une fonction linéaire à plusieurs variables réelles soumises à des contraintes linéaires (algorithme du simplexe).
- En **sciences de l'ingénieur**, à programmer des machines pour des fonctionnalités précises : robotique, automatique.

1

Ada Lovelace (1815-1852), fille du poète britannique Lord Byron, est connue pour avoir conçu le tout premier programme informatique destiné à la machine analytique de Charles Babbage. Cette machine est l'ancêtre du tout premier ordinateur.

Algorithmique et programmation

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Déterminer le type d'une variable.	1 p. 24	35 36 p. 30
Comprendre une suite d'instructions (affectation, calculs avec ou sans variable(s)).	2 p. 24	37 38 p. 30
Comprendre et écrire une instruction conditionnelle.	3 4 p. 25 TP1 p. 35	43 44 48 49 p. 31
Comprendre et écrire une boucle bornée.	5 6 p. 26	51 52 p. 31 55 56 p. 32
Comprendre et écrire une boucle non bornée.	7 8 p. 27 et 28	58 59 61 62 p. 32
Comprendre et écrire une fonction simple.	9 10 p. 29 TP5 p. 38	63 64 65 66 p. 32

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

ZOOM SUR...

Algo & Prog

dans tout le chapitre

TICE

p. 14, 15, 16, 17, 33, 35, 36, 37, 38

Les autres disciplines

p. 36

Problème ouvert

p. 34

Pour prendre un bon départ

Algo & Prog

Exo — Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-01

1. Appliquer un algorithme « débranché »

1. Appliquer plusieurs fois l'algorithme suivant.

```
▶ Écrire 3 nombres sur 3 morceaux de papier et les poser
  de la gauche vers la droite.
▶ Comparer les nombres des deux papiers de gauche : si celui
  le plus à gauche est le plus petit, ne rien faire, sinon,
  les échanger.
▶ Comparer les nombres des deux papiers de droite : si celui
  le plus à gauche est le plus petit, ne rien faire, sinon,
  les échanger.
▶ Comparer les nombres des deux papiers de gauche : si celui
  le plus à gauche est le plus petit, ne rien faire, sinon,
  les échanger.
```

2. Que remarque-t-on à la fin de l'algorithme ?

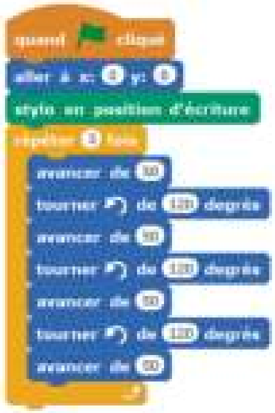
2. Affecter une valeur à une variable

Soit le programme **SCRATCH** ci-contre.

1. Quelle valeur est affichée dans la bulle quand on saisit 5 lorsqu'un nombre est demandé ? Et pour – 5 ?

2. Recopier et compléter la phrase suivante : « Ce programme permet d'afficher l'… d'un nombre par la fonction $f : x \mapsto$ … »

3. Répéter une instruction un nombre fini de fois



Soit le programme **SCRATCH** ci-contre.

1. Tracer la figure réalisée par la partie du programme qui est à l'intérieur du bloc « répéter 3 fois » (On prendra 1 cm pour 10 pas). Préciser le point de départ et le point d'arrivée.

2. Tracer la figure réalisée par ce programme.

4. Traiter une instruction conditionnelle

Soit le programme **SCRATCH** ci-contre.

1. Que fait le programme si l'on répond respectivement –1 et 2 aux deux questions ?

2. Que fait le programme si l'on répond respectivement 3 et 4 aux deux questions ?

3. Décrire le fonctionnement de ce programme.

a) Que demande-t-il ? Que fait-il ?

b) Quelle est son utilité concrète ?

Doc — Corrigés Lienmini.fr/maths2-27

Activités

Algo & Prog TICE

Dans toutes les activités, on utilise le langage PYTHON, on ouvrira un nouvel onglet dans l'éditeur lorsqu'on demande d'écrire un nouveau programme.

20 min

1 Afficher et affecter des valeurs

1. Que veut dire le mot anglais `print` ?

2. a) Écrire et exécuter le **programme 1** et le **programme 2** ci-contre.

b) Expliquer l'affichage du **programme 1**.

c) Pourquoi n'a-t-on pas le même affichage pour le **programme 1** et pour le **programme 2** ? Que permettent les guillemets ?

d) Modifier la dernière ligne du **programme 2** en `print("b=",b)` puis expliquer ce que permet la virgule.

```
Programme 1
a = 2
b = 3*a+5
print(b)
```

```
Programme 2
a = 2
b = 3*a+5
print("b")
```

3. a) Sans l'écrire, dire ce que va afficher le **programme 3** ci-contre.

b) L'écrire, l'exécuter et vérifier l'affichage.

```
Programme 3
x = 5
y = 12
x = 3*x+2*y
y = 5*y-12*x
print(y)
```

Cours 2 p. 18

30 min

2 Comprendre les variables de type numérique

1. Écrire et exécuter le **programme 4** et le **programme 5** ci-contre. Quelle différence d'affichage y a-t-il entre ces deux programmes ?

Remarque Dans le langage **PYTHON**, les variables ont des types :
- dans le **programme 4**, l'ordinateur considère que la variable **b** est de type **`int`** pour entier (*integer* en anglais) puisque tous les nombres considérés (**30** ; **2** et **60**) sont des entiers (écrits sans virgule).
- dans le **programme 5**, l'ordinateur considère que la variable **b** est de type **`float`** pour flottant, c'est-à-dire un réel dont il donne une *certaine* écriture décimale, car on a *forcé* **PYTHON** à ne pas considérer **2** comme un entier en écrivant **2.0** au lieu de **2**.

```
Programme 4
a = 30
b = a*2
print(b)
```

```
Programme 5
a = 30
b = a*2.0
print(b)
```

2. a) Écrire et exécuter le **programme 6** ci-contre.

b) De quel type est la variable **a** après la ligne `a=30` ?

c) De quel type est la variable **a** après la ligne `a=a*2` ?

d) De quel type est la variable **a** après la ligne `a=a/8` ?

```
Programme 6
a = 30
print(a)
a = a*2
print(a)
a = a/8
print(a)
```

Remarque Dans le langage PYTHON, une variable peut éventuellement changer de type suivant les calculs demandés.

3. On considère le **programme 7** ci-contre.

a) Sans écrire ce programme, dire de quels type sont les variables **a** et **b** lors de leur première affectation.

b) Écrire et exécuter ce programme.

c) En observant l'affichage du programme, expliquer ce que fait la ligne `b = float(b)` du programme.

```
Programme 7
a = 3
b = a*2
b = float(b)
print(a)
print(b)
```

4. On considère le **programme 8** ci-contre. Reprendre la question précédente afin d'expliquer ce que fait la ligne `b = int(b)` du **programme 8**.

```
Programme 8
a = 3
b = a*2.5
b = int(b)
print(a)
print(b)
```

Cours 1 p. 18

3 Comprendre les variables de type textuel

20 min

1. a) **Sans l'écrire**, donner l'affichage du **programme 9** ci-contre.
   b) Écrire le programme et vérifier la réponse à la question précédente.
2. Modifier le **programme 9**, en remplaçant la première ligne par `a = "bonjour"`.

```
Programme 9
a = "30"
print(a)
a = a*2
print(a)
```

Remarque Dans le langage **PYTHON**, lorsque l'on écrit une « valeur » entre guillemets " (ou apostrophes ') lors d'une affectation, alors cette variable est de type `str` pour chaîne de caractères (*string* en anglais) c'est-à-dire que sa « valeur » est le texte entre guillemets (même si ce texte est un nombre, comme dans la première version du **programme 9**).

3. a) Écrire et exécuter les **programmes 10, 11 et 12** suivants.
   b) Expliquer chacun des affichages.

```
Programme 10
a = "3"
a = int(a)
b = a*2
print(b)
```

```
Programme 11
a = 3
a = str(a)
b = a*2
print(b)
```

```
Programme 12
a = "bonjour"
a = int(a)
b = a*2
print(b)
```

↪ Cours 1 p. 18

4 Programmer des instructions conditionnelles

25 min

1. Écrire **le programme 13**.
   Attention à bien respecter l'**indentation** (c'est-à-dire l'espace en début de ligne) avant les `print` : pour la réaliser, on utilise les touches **TAB** ou ⇆ du clavier.
2. Exécuter deux fois le **programme 13** en saisissant d'abord `-3.4` puis `10.8` comme valeur de `x` demandée par le programme.
   Expliquer les deux affichages obtenus.

```
Programme 13
x = float(input("Saisir un nombre : "))
if x >= 0:
  print("Le nombre est positif.")
else :
  print("Le nombre est strictement négatif.")
  print("Son opposé est : ")
  print(-x)
```

Coup de pouce Chercher ce que veulent dire `if` et `else`.

3. **Sans l'exécuter avec l'ordinateur**, dire ce que va afficher le programme si on l'exécute et que l'on saisit `-52.568` comme valeur de `x`.
   Vérifier avec l'ordinateur.
4. a) Écrire le **programme 14** ci-contre en veillant à bien respecter l'indentation.
   b) Le tester avec des valeurs positives et négatives.
   c) Expliquer les différents affichages.

```
Programme 14
x = float(input("Saisir un nombre : "))
if x >= 0:
  print("Le nombre est positif.")
else :
  print("Le nombre est strictement négatif.")
  print("Son opposé est : ")
print(-x)
```

↪ Cours 3 p. 19

Activités

5 Programmer une boucle bornée

40 min

1. a) Écrire et exécuter le **programme 15** suivant.

Programme 15

```
for i in range(1,6) :
    print("Je répète 6 fois un message")
```

b) Quelle incohérence semble-t-il y avoir entre le **programme 15** et son affichage ?

2. Écrire et exécuter le **programme 16** ci-dessous.

Programme 16

```
for i in range(1,6) :
    print("J'affiche le message numéro",i)
```

3. L'un des deux algorithmes ci-dessous correspond au **programme 15**. Lequel ?

Algorithme 1

```
Pour i allant de 1 à 6
   Afficher "Je répète 6 fois un message"
Fin pour
```

Algorithme 2

```
Pour i allant de 1 à 5
   Afficher "Je répète 6 fois un message"
Fin pour
```

4. Soit **a** et **b** deux entiers, recopier et compléter les pointillés dans le tableau suivant.

En langage naturel	En PYTHON
`Pour i allant de … à …`	`for i in range(a,b)`

5. Dans le **programme 16**, remplacer tous les **i** par des **k** et exécuter de nouveau le programme. Que remarque-t-on ?

6. a) **Sans utiliser l'ordinateur**, dans le **programme 16**, quel serait l'affichage si l'on ajoutait une 3e ligne `print("au revoir")` indentée comme la 2e ligne ? non indentée ?

b) Vérifier avec l'ordinateur.

7. Écrire un programme qui affiche tous les carrés des nombres entiers de **0** à **1 000** (c'est-à-dire **0** ; **1** ; **4** ; **9** ; … ; **1 000 000**).

8. a) Écrire le **programme 17** suivant.

Programme 17

```
for i in range(5):
  print(i)
```

b) Soit **b** un entier. Recopier et compléter les pointillés dans le tableau.

En langage naturel	En PYTHON
`Pour i allant de … à …`	`for i in range(b):`

c) Reprendre la question **7.** avec l'instruction `range(b)` en remplaçant **b** par la valeur adéquate.

↳ Cours 4 p. 20

25 min

6 Programmer une boucle non bornée

Remarque Quelques informations utiles :
- Pour réaliser cette activité, les modules math et random de **PYTHON** sont nécessaires.
- la commande **PYTHON** `random.randint(a,b)` donne un nombre entier au hasard entre **a** inclus et **b** inclus.
- le mot anglais *while* se traduit par « tant que » en français.
- ≠ s'écrit **! =** en langage **PYTHON**.

1. Écrire le **programme 18** ci-contre et l'exécuter.

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant l'évolution des valeurs des différentes variables du programme dans le cas où **nombre_aleatoire** tiré au sort en début de programme est **6** et où l'on adopte la stratégie consistant à tester tous les entiers de **10** à **1** dans l'ordre décroissant jusqu'à trouver le bon.

Programme 18

```
1  import math
2  import random
3
4  nombre_aleatoire = random.randint(1,10)
5  print("Un entier vient d'être tiré au sort entre 1 et 10 inclus.")
6  reponse = 0
7  nombre_essais = 0
8  while reponse != nombre_aleatoire:
9     reponse = int(input("Devinez l'entier tiré au sort:"))
10    nombre_essais = nombre_essais+1
11
12 print("Vous avez trouvé. Nombre d'essais nécessaires:")
13 print(nombre_essais)
```

nombre_aleatoire	6	6	6	6	6	6
reponse	0	10	9			
nombre_essais	0	1	2			
Condition **reponse ≠ nombre_aleatoire**	Vérifiée	Vérifiée				

3. Expliquer pourquoi à la 6e ligne du **programme 18**, on a affecté la valeur 0 à la variable **reponse**.
D'autres valeurs étaient-elles possibles ?

Cours 5 p. 20

25 min

7 Programmer une fonction

On considère le **programme 19** ci-contre (**ne pas l'écrire tout de suite**) dont on a numéroté les lignes pour plus de commodité.

Programme 19

```
1  def calcul_tension(R,I):
2     U = R*I
3     print("Un calcul de tension vient d'être effectué.")
4     return U
5
6  resistance = float(input("Saisir la résistance(en ohms):"))
7  intensite = float(input("Saisir l'intensité(en ampères):"))
8  tension = calcul_tension(resistance,intensite)
9
10 print("La tension(en volts)est:")
11 print(tension)
```

1. a) Quelle est la première ligne du programme correspondant à un affichage ?
b) Écrire et exécuter le **programme 19** en saisissant la valeur **5** pour la variable **resistance** et la valeur **4** pour la variable **intensite**.
Le premier affichage du programme est-il celui anticipé à la question **1.a)** ?

2. Étant donné les différents affichages observés lors de l'exécution du programme, répondre aux questions suivantes.
a) Quelle est la première ligne « traitée » à l'exécution du programme ?
b) Lorsqu'on écrit **def calcul_tension(R,I) :** on dit que l'on définit la fonction **calcul_tension**.
Quelles lignes correspondent au bloc de la fonction **calcul_tension** ?
c) Que se passe-t-il à la 8e ligne ? On précisera notamment les valeurs prises par les variables **R** et **I** de la fonction **calcul_tension**.

Cours 6 p. 21

Cours

1 Types de variables

Définition **Entier, flottant, chaîne de caractères**

Dans un algorithme ou un programme, les variables considérées ont des types qui définissent la nature des valeurs qu'elles peuvent prendre. Les trois types principaux considérés en classe de Seconde sont :
- **les entiers quand les valeurs possibles de la variable sont des nombres entiers.**
- **les flottants quand les valeurs possibles de la variable sont des nombres réels.**
- **les chaînes de caractères quand les valeurs possibles de la variable sont des mots.**

Exemple

On doit écrire un programme effectuant des statistiques sur des équipes sportives. Dans ce programme, il y aura en particulier trois variables : `nom` qui correspond au nom de l'équipe, `effectif` qui correspond à son effectif et `moyenne_age` qui correspond à sa moyenne d'âge. Les valeurs possibles prises par :
- `nom` sont des mots : elle est donc de type chaîne de caractères.
- `effectif` sont des nombres entiers : elle est donc de type entier.
- `moyenne_age` sont des nombres réels, non entier d'une manière générale : elle est donc de type flottant.

Remarques

Dans ce manuel, le langage informatique choisi est **PYTHON** dans lequel :
- le type chaîne de caractères se nomme `str` (pour *string*),
- le type entier se nomme `int` (pour *integer*),
- le type flottant se nomme `float` (pour *floating-point*).

Nous verrons, par la suite un autre type de variable : le type booléen.

↪ Exercice résolu 1 p. 24

2 Affectation

Définition **Affectation d'une valeur à une variable**

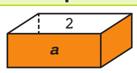
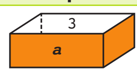
Lorsque l'on a affecté une valeur à une variable, on peut remplacer la variable par cette valeur dans les instructions qui suivent (par exemple dans les opérations arithmétiques).

Remarque On peut visualiser une boîte portant le nom de la variable dans laquelle on stocke une seule valeur.

Exemple

On considère la suite d'instructions ci-contre.
Les différentes étapes correspondantes sont les suivantes

En langage naturel	En PYTHON
`a ← 2` `a ← a+1`	`a=2` `a=a+1`

Étape 1	Étape 2	Étape 3
	a + 1 = 2 + 1 = 3	
Ligne a ← 2 « **a** reçoit la valeur 2 » ou « 2 est affecté à **a** » donc on place la valeur 2 dans la boîte **a**.	**Ligne** a ← a + 1 Le calcul **a** + 1 est effectué : son résultat est 3 puisque **a** vaut 2.	**Ligne** a ← a + 1 **a** reçoit la valeur 3 calculée précédemment donc on remplace 2 par 3 dans la boîte **a**.

Remarque Plutôt que d'affecter une valeur à une variable, on peut laisser l'utilisateur affecter la valeur de son choix à la variable.

L'algorithme suivant demande la saisie d'un nombre par l'utilisateur puis calcule et affiche le double de ce nombre.

En langage naturel	En PYTHON
`a ← Valeur saisie` `Afficher 2xa`	`a = float(input("Saisir une valeur"))` `print(2*a)`

↪ Exercice résolu 2 p. 24

3 Instructions conditionnelles

Définition Instructions conditionnelles

Dans un algorithme, on est parfois amené à exécuter une ou plusieurs instructions uniquement si une certaine condition est vérifiée, c'est ce que l'on appelle des instructions conditionnelles.
Si la condition n'est pas vérifiée, on peut soit exécuter un autre bloc d'instructions, soit ne rien faire.
Dans ces deux cas, on exécute ensuite la suite de l'algorithme.

Exemple

L'algorithme ci-contre permet de simuler un jeu dans lequel on lance un dé et où l'on gagne uniquement si le résultat est 6.

En langage naturel	En PYTHON

x ← entier aléatoire entre 1 et 6
Si x = 6
    Afficher "Gagné !"
Sinon
    Afficher "Perdu…"
Fin si
Afficher "À bientôt !"
	import random
	
	x=random.randint(1,6)
	if x == 6:
	    print("Gagné!")
	else:
	    print("Perdu...")
	print("À bientôt!")

- Si la valeur de la variable `x` est 6 alors l'instruction `Afficher "Gagné !"` est exécutée. Sinon, c'est-à-dire si la valeur de la variable `x` n'est pas 6, alors l'instruction `Afficher "Perdu…"` est exécutée.
- Dans les deux cas, l'algorithme se poursuit après `Fin si` et la dernière instruction (qui n'est pas conditionnelle) `Afficher "À bientôt !"` est exécutée.

Remarques

- La condition qui s'écrit `x = 6` en langage naturel s'écrit `x == 6` en **PYTHON**.

En **PYTHON**, le signe = seul est réservé à l'affectation.

- La condition `Sinon` est facultative.

Exemple

L'algorithme ci-contre est presque le même que le précédent mais n'affiche pas `"Perdu…"` si `x` est différent de 6.

En langage naturel	En PYTHON

x ← entier aléatoire entre 1 et 6
Si x = 6
    Afficher "Gagné !"
Fin si
Afficher "À bientôt!"
	import random
	
	x=random.randint(1,6)
	if x == 6:
	    print("Gagné!")
	print("À bientôt!")

Remarques

- La condition peut être de la forme « `Si condition 1 ou condition 2` » ou « `Si condition 1 et condition 2` » (↪ TP1 p. 35).
- Il existe un type de variables appelé **booléen** dont les valeurs ne peuvent être que « Vrai » ou « Faux ». Dans une instruction conditionnelle, le résultat d'une condition est un booléen.

Exemple

Dans l'algorithme en langage naturel précédent, si `x` vaut 5 alors la condition **`x` = 6** renvoie **`FAUX`** (**`x` == 6** renvoie **`False`** en **PYTHON**) et si `x` vaut 6 alors la condition **`x` = 6** renvoie **`VRAI`** (**`x` == 6** renvoie **`True`** en **PYTHON**).

↪ Exercices résolus 3 et 4 p. 25

Cours

4 Boucles bornées

Définition Boucle Pour

Lorsqu'on veut exécuter un nombre déterminé de fois un même bloc d'instructions, on utilise une boucle bornée, aussi appelée boucle Pour.
Ces boucles sont munies d'une variable compteur que l'on peut utiliser dans les instructions.

Exemple

L'algorithme ci-contre permet de calculer et afficher les 100 premiers nombres pairs strictement positifs puis, quand cela est fait, affiche `Terminé`.

En langage naturel	En PYTHON
Pour i allant de 1 à 100 a ← 2×i Afficher a Fin pour Afficher "Terminé"	for i in range(1,101): a=2*i print(a) print("Terminé")

Au premier passage dans la boucle, `i = 1` donc `a = 2`, puis `i = 2` donc `a = 4`,…, puis `i = 100` donc `a = 200`.
Quand ces instructions ont été exécutées, la boucle **Pour** est terminée, on exécute alors la suite de l'algorithme c'est-à-dire l'affichage de **Terminé**.

Remarque Dans la boucle précédente, la variable `i` est le compteur.
On dit qu'à chaque passage dans la boucle, `i` est incrémenté de `1` c'est-à-dire augmente de `1`.

Exercices résolus 5 et 6 p. 26

5 Boucles non bornées

Définition Boucle Tant que

Lorsqu'on veut répéter un même bloc d'instructions tant qu'une certaine condition est vérifiée, on utilise une boucle non bornée, aussi appelée boucle Tant que.

Exemple

L'algorithme ci-contre affiche la plus petite puissance de 2 supérieure strictement à 1 000 000.

En effet, le tableau suivant donne l'évolution des valeurs de la variable `p`.

En langage naturel	En PYTHON
p ← 1 Tant que p ⩽ 1 000 000 p ← p×2 Fin tant que Afficher p	p = 1 while p<=1000000 p = p*2 print(p)

	Initialisation						
p	1	1 x 2 = 2	2 x 2 = 4	4 x 2 = 8	…	524288	1048576
Condition p ⩽ 1 000 000	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	…	Vérifiée	Non vérifiée

Lorsque `p = 1048576` on sort de la boucle **Tant que** et on exécute la suite de l'algorithme c'est-à-dire l'affichage de la valeur de la variable `p`, soit : `1048576`.

Remarque Comme la condition de la boucle **Tant que** de l'exemple précédent porte sur la variable *p*, cette variable doit être initialisée préalablement (c'est-à-dire qu'il faut lui donner une valeur au départ) : ici, on l'a initialisée à $1 = 2^0$, la première puissance de 2.

Exercices résolus 7 p. 27 et 8 p. 28

6 Fonctions

Définition Fonction

Pour diverses raisons (de lisibilité ou pour éviter des répétitions d'instructions, par exemple), il peut être utile de définir une fonction c'est-à-dire un bloc d'instructions qui ne sera exécuté que s'il est appelé (éventuellement plusieurs fois).
Une fonction possède généralement des paramètres et retourne une valeur de retour (mais pas systématiquement, par exemple si elle réalise un affichage).

Exemple

L'indice de masse corporelle (IMC) d'une personne est donné par la formule $\text{IMC} = \dfrac{\text{masse}}{\text{taille}^2}$ où la masse est en kilogrammes et la taille en mètres.
On considère l'algorithme ci-dessous dont on a numéroté les lignes.

En langage naturel	En PYTHON
`1 fonction calculIMC(masse, taille)`	`1 def calculIMC(masse,taille):`
`2   IMC←masse/taille²`	`2   IMC=masse/(taille*taille)`
`3   Retourner IMC`	`3   return IMC`
`4`	`4`
`5 IMCjean←calculIMC(60,1.6)`	`5 IMCjean=calculIMC(60,1.6)`
`6 massepaul ← 85`	`6 massepaul=85`
`7 taillepaul ←1.80`	`7 taillepaul=1.8`
`8 Afficher calculIMC(massepaul, taillepaul)`	`8 print(calculIMC(massepaul,taillepaul))`

Cet algorithme est constitué :
- d'une fonction appelée `calculIMC` (des lignes **1** à **3**) dont les paramètres sont les variables `masse` et `taille` (ligne **1**) et dont la valeur de retour est la valeur de `IMC` (ligne **3**) ;
- d'un algorithme principal à partir de la ligne **5**.

Dans la ligne **5**, `IMCjean ← calculIMC(60,1.6)` :
- l'algorithme principal appelle la fonction `calculIMC` en spécifiant que la variable masse (de la fonction) doit prendre la valeur `60` et que la variable `taille` (de la fonction) doit prendre la valeur `1.6`.
- le bloc d'instructions correspondant à la fonction `calculIMC` est alors exécuté : la variable `IMC` (de la fonction) reçoit la valeur $60 / 1,6^2 = 23,4375$ (ligne **2**) et la retourne (ligne **3**) ;
- cette valeur `23,4375`, de la variable `IMC`, est retournée dans l'algorithme principal à l'endroit de l'appel de la fonction (ligne **5**), c'est-à-dire que l'algorithme principal affecte la valeur `23,4375` à la variable `IMCjean` (de l'algorithme principal).

De la même manière, à la ligne **8**, l'algorithme principal affiche la valeur retournée par la fonction c'est-à-dire $85 / 1,8^2$ soit approximativement `26,23`.

Remarques

- Dans le programme **PYTHON** précédent, `taille * taille` peut être remplacé par `taille**2`.
D'une manière générale en **PYTHON**, `x**n` signifie x^n.
- Si une fonction **PYTHON** n'a pas de paramètre, on écrit tout de même les parenthèses vides dans sa définition et lors des rappels. Par exemple la fonction `de` (qui retourne un entier aléatoire entre 1 et 6) est appelée avec l'instruction `de( )`.

```
def de():
    return random.randint(1,6)
```

Exercices résolus 9 et 10 p. 29

Pour programmer en PYTHON

Instruction et commande PYTHON	Exemple commenté
Affecter une valeur à une variable a de type `float` ou `int` `a = valeur`	**Commentaire** Attention, la deuxième ligne ne veut pas dire que a et a + 1 sont égaux mais bien que a va prendre pour valeur la valeur actuelle de a augmentée de 1. **En langage naturel :** `a ← 2` / `a ← a+1` **En PYTHON :** `a = 2` / `a = a+1`
Affecter une chaîne de caractères à une variable a de type `str` `a = "texte"` ou `a = 'texte'`	**Commentaire** Le mot `bonjour` est affecté à la variable `mot`. **Remarque** `mot = bonjour` renvoie un message d'erreur. **En PYTHON :** `mot = "bonjour"` ou `mot = 'bonjour'`
Modifier une variable a de type `int` en une variable de type `float` par un calcul où le résultat du calcul n'est pas entier `a = calcul`	**Commentaire** a est de type `int` à la première ligne mais est converti en type `float` à la deuxième ligne. **En PYTHON :** `a = 2` / `a = a + 3.3`
Modifier le type d'une variable a en le type flottant (ou un autre type) `a = float(a)`	**Commentaire** a est de type `int` à la première ligne mais est converti en type `float` à la deuxième ligne. **En PYTHON :** `a = 2` / `a = float(a)`
Affecter une valeur de type `str` saisie par l'utilisateur à une variable a après l'affichage d'un texte `a = input("texte")`	**En langage naturel :** `Afficher "Saisir un mot :"` / `a ← Valeur saisie` / `Afficher a` **En PYTHON :** `a = input("Saisir un mot :")` / `print(a)` **Commentaire** Ce programme affiche `Saisir un mot:` attend la saisie d'une chaîne de caractères par l'utilisateur, qu'il affecte à a, puis affiche la chaîne de caractères saisie.

Affecter une valeur de type `float` ou `int` saisie par l'utilisateur à une variable a après l'affichage d'un texte
(on remplace `float` par `int` suivant le cas)
`a = input("texte")`
`a = float(a)`
ou
`a = float(input("texte"))`
	En langage naturel : `Afficher "a = ?"` / `a ← Valeur saisie` / `b ← 2*a` / `Afficher b`
	En PYTHON : `a = input("a = ?")` / `a = float(a)` / `b = 2*a` / `print(b)`
	Commentaire Ce programme affiche `a = ?` attend la saisie d'une valeur par l'utilisateur, qu'il affecte à a, puis convertit a en flottant puis calcule et affiche le double de a.

Afficher un texte
`print("texte")`
ou
`print('texte')`
	En langage naturel : `Afficher "bonjour"`
	En PYTHON : `print("bonjour")` ou `print('bonjour')`

Afficher la valeur d'une variable a `print(a)`	**Commentaire** Ce programme affiche 3. **En PYTHON :** `a = 3` / `print(a)`
Afficher un texte et la valeur d'une variable a `print("texte",a)`	**Commentaire** Ce programme affiche a = 3. **En PYTHON :** `a = 3` / `print("a=",a)`

Remarques

- Dans toute la suite, certains blocs d'instructions sont précédés d'une ligne finissant par un double point et sont **indentés**, c'est-à-dire que toutes les instructions sont précédées d'un espace (de même taille).
Dans ce cas, la fin de l'indentation marque la fin du bloc.
- Pour les tests de condition (après `if` ou `while`), les symboles =, ≠, ⩽ et ⩾ s'écrivent respectivement ==, !=, <= et >= en PYTHON.

<table>
<tr><th>Instruction et commande PYTHON</th><th>Exemple commenté</th></tr>
<tr><td>Écrire des instructions conditionnelles
if condition:
    instruction1
    instruction2
    etc
else:
    instruction3
    instruction4
    etcbis
Si condition
    instruction1
    instruction2
    etc
Sinon
    instruction3
    instruction4
    etcbis
Fin si</td><td><table><tr><th>En PYTHON</th></tr><tr><td>x = float(input("x=? "))
if x >= 0:
    print("Le nombre est positif.")
else:
    print("x<0")
    print("Son opposé est",-x)
print("Bonne journée.")</td></tr></table>Commentaire Si l'utilisateur choisit 5 pour valeur de x, le programme affichera Le nombre est positif puis Bonne journée. Si l'utilisateur choisit – 3,2 pour valeur de x, le programme affichera x < 0 puis Son opposé est 3,2 puis Bonne journée.
Remarque S'il n'y a pas de Sinon dans l'algorithme alors le bloc allant de else : à etcbis est retiré.</td></tr>
<tr><td>Écrire une boucle bornée
for i in range(1,n+1):
    instruction1
    instruction2
    etc
Pour i allant de 1 à n
    instruction1
    instruction2
    etc
Fin pour</td><td><table><tr><th>En langage naturel</th><th>En PYTHON</th></tr><tr><td>Pour i allant de 1 à 100
    a ← 2×i
    Afficher a
Fin pour</td><td>for i in range(1,101):
    a = 2*i
    print(a)</td></tr></table>Commentaire Ce programme calcule et affiche tous les nombres pairs entre 2 × 1 = 2 et 2 × 100 = 200 (et non 2 × 101 = 202) car range(a, b) désigne les entiers entre a inclus et b exclu.</td></tr>
<tr><td>Écrire une boucle non bornée
Tant que condition
    instruction1
    instruction2
    etc
Fin tant que

while condition :
    instruction1
    instruction2
    etc</td><td><table><tr><th>En langage naturel</th><th>En PYTHON</th></tr><tr><td>p ← 1
Tant que p ⩽ 1 000 000
    p ← 2 × p
Fin tant que
Afficher p</td><td>p = 1
while p <= 1000000:
    p = 2*p
print(p)</td></tr></table>Commentaire Ce programme calcule les puissances de 2 qu'il affecte à la variable p (1 ; 2 ; 4 ; 8 ; etc.) jusqu'à ce que p > 1 000 000 puis affiche cette dernière valeur de p.</td></tr>
<tr><td>Écrire une fonction
fonction nom(p1,p2,…)
    …
    Retourner a
programme principal

def nom(p1,p2,...):
    ...
    return a
programme principal</td><td><table><tr><th>En langage naturel</th><th>En PYTHON</th></tr><tr><td>fonction difference(x, y)
    dif ← x-y
    retourner dif

Afficher difference(3,5)</td><td>def difference(x,y):
    dif = x-y
    return dif

print(difference(3,5))</td></tr></table>Commentaire Ce programme appelle la fonction difference avec 3 et 5 pour valeurs de ses variables x et y. Celle-ci calcule donc 3 – 5 = – 2 (affectée à la variable dif) et retourne cette valeur qui est affichée puisque dans un print.</td></tr>
</table>

Exercices résolus

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-02

1 Déterminer le type d'une variable à partir d'un contexte

Cours 1 p. 18

On souhaite écrire un programme dans lequel apparaissent des variables `ville`, `pluviometrie` et `ensoleillement` donnant respectivement le nom de la ville considérée, sa pluviométrie (en cm par m² arrondi à 0,1) et son nombre de jours d'ensoleillement de l'année en cours. Donner un type possible pour chacune de ces variables.

Solution

La variable **`ville`** prend des mots pour valeur, elle est donc de type chaîne de caractères. 1

La variable **`pluviometrie`** prend pour valeur des nombres décimaux, non entiers a priori, elle est donc de type flottant. 2

La variable **`ensoleillement`** prend pour valeur des nombres de jours c'est-à-dire des nombres entiers, elle est donc de type entier. 2

Conseils & Méthodes

1 On identifie les variables qui ne prennent pas des valeurs numériques : elles sont de type chaîne de caractères.

2 Pour les variables prenant des valeurs numériques, on identifie si ces valeurs sont nécessairement entières ou non. Sinon, elles sont de type flottant.

À vous de jouer !

1 Dans un programme permettant de tester si un triangle est isocèle, équilatéral, rectangle ou quelconque, apparaissent 4 variables : **`nom`**, **`longueur1`**, **`longueur2`** et **`longueur3`** prenant respectivement pour valeurs le nom du triangle (par exemple ABC) et les longueurs de ses trois côtés. De quel type est chacune de ces 4 variables ?

2 Dans un programme permettant de calculer la moyenne de plusieurs notes dans une certaine matière, apparaissent (entre autres) trois variables : **`matière`**, **`n`** et **`moyenne`** prenant respectivement pour valeurs le nom de la matière, le nombre de notes et la moyenne. De quel type est chacune de ces 3 variables ?

Exercices 35 à 36 p. 30

2 Déterminer les valeurs prises par les variables d'un algorithme

Cours 2 p. 18

Quelles sont les valeurs prises par les variables x et y à la fin de cet algorithme ?

```
x ← 5
y ← 8
x ← 4 × x + 3 × y
y ← 2 × x − 7 × y
```

Solution

On dresse le tableau suivant. 1

x	5
y	8

On calcule la nouvelle valeur prise par **x** en utilisant les valeurs « actuelles » de **x** et **y** à savoir **5** et **8**. 2

x	5	4 × 5 + 3 × 8 = 44
y	8	

On calcule la nouvelle valeur prise par **y** en utilisant les valeurs « actuelles » de **x** et **y** à savoir **44** et **8**. 2

x	5	44
y	8	2 × 44 − 7 × 8 = 32

À la fin de l'algorithme, **x** a pour valeur **44** et **y** a pour valeur **32**.

Conseils & Méthodes

1 On dresse un tableau ayant, en en-tête, des lignes le nom des variables utilisées et contenant leur valeur à la première affectation (initialisation).

2 Lors d'une nouvelle affectation, on écrit la nouvelle valeur de la variable en utilisant les valeurs actuelles des variables utilisées (les plus à droite dans le tableau).

À vous de jouer !

3 Donner les valeurs prises par les différentes variables à la fin de cet algorithme.

```
a ← 3
b ← 15
b ← b/a
a ← a² + b²
b ← a × b
```

4 Donner les valeurs prises par les différentes variables à la fin de ce programme.

```
x = 1
y = 2
z = 3
x = x*y*z
z = x + y + z
y = x − y − z
```

Exercices 37 p. 30 à 42 p. 31

3 Comprendre une instruction conditionnelle

Cours 3 p. 19

On considère l'algorithme ci-contre.

1. **Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur saisit pour la variable x ?**

2. **Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur saisit la valeur 12547 pour la variable x ?**

```
Afficher "Saisir un nombre entier"
x ← Valeur saisie
Si x ⩽ 100
  Afficher "Quel manque d'originalité !"
Sinon
  Afficher "Bravo !"
Fin si
Afficher "Merci d'avoir participé."
```

Solution

1. Comme $8 \leqslant 100$, la condition `x ⩽ 100` est vérifiée **1** donc l'algorithme affiche `Quel manque d'originalité !` **2**
L'exécution de l'algorithme se poursuit ensuite après `Fin si` donc l'algorithme affiche `Merci d'avoir participé.` **4**

2. Comme $12547 > 100$, la condition `x ⩽ 100` n'est pas vérifiée **1** Donc l'algorithme affiche `Bravo !` **3**
L'exécution de l'algorithme se poursuit ensuite après `Fin si` donc l'algorithme affiche `Merci d'avoir participé.` **4**

Conseils & Méthodes

1 On vérifie que la condition est vérifiée.
2 Si la condition est vérifiée, on exécute le bloc d'instructions entre `Si` et `Sinon`.
3 Si la condition n'est pas vérifiée, on exécute le bloc d'instructions de `Sinon` à `Fin si`.
4 Les instructions conditionnelles passées, on exécute la suite de l'algorithme.

À vous de jouer !

5 Qu'affiche l'algorithme suivant si `x=5` ? si `x=15` ?

```
x ← Valeur saisie
Si 2x-20 ⩾ 0
  Afficher "2x - 20 est positif"
Sinon
  Afficher "2x - 20 n'est pas positif"
Fin si
```

6 On considère l'algorithme suivant où la variable `annee` a pour valeur l'année en cours.
Qu'affichait cet algorithme
a) en 2012 ?
b) en 2014 ?

```
Si annee/4 est entier
  Afficher "Année bissextile"
Fin si
```

Exercices 43 à 47 p. 31

4 Écrire une instruction conditionnelle

Cours 3 p. 19

Dans un cinéma, la place adulte (à partir de 18 ans) coûte 11 euros et la place enfant (moins de 18 ans) coûte 7 euros. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il affiche le tarif que doit payer un utilisateur.

```
age ← Valeur saisie
Si…
```

Solution

Le tarif est différent suivant si `age ⩾ 18` ou `age < 18`.
On peut choisir comme condition à tester `age ⩾ 18` (on aurait pu prendre `age < 18`). **1**
• Si `age ⩾ 18` alors le tarif est de 11 euros, on affiche donc `11 euros`. **2**
• Sinon (si `age < 18`) alors le tarif est de 7 euros, on affiche donc `7 euros`. **3**

```
age ← Valeur saisie
Si age ⩾ 18
  Afficher "11 euros"
Sinon
  Afficher "7 euros"
Fin si
```

Conseils & Méthodes

1 On identifie la condition à tester.
2 On identifie les instructions à exécuter si la condition est vérifiée.
3 On identifie les instructions à exécuter sinon, c'est-à-dire si la condition n'est pas vérifiée.

À vous de jouer !

7 Soit une fonction f définie par $f(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = -x^3$ si $x < 0$.
Compléter l'algorithme afin qu'il calcule $f(x)$.

```
x ← Valeur saisie
Si…
```

8 Écrire un algorithme demandant à l'utilisateur de saisir une valeur pour une variable `mdp` et affichant `mot de passe non sécurisé` si l'utilisateur a saisi `1234` pour `mdp` et `mot de passe sécurisé` sinon.

Exercices 48 à 50 p. 31

Exercices résolus

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-02

5 Comprendre une boucle bornée

Cours 4 p. 20

Quelle est la valeur de la variable u à la fin de cet algorithme ?

```
u ← 12
Pour i allant de 0 à 2
  u ← 2u + i – 4
Fin pour
```

Solution

On dresse le tableau suivant 1 2.

	Initialisation	i = 0	i = 1	i = 2
u	12			

À chaque passage dans la boucle, on calcule successivement les valeurs des différentes variables. 3

	Initialisation	i = 0	i = 1	i = 2
u	12	$2 \times 12 + 0 - 4 = 20$	$2 \times 20 + 1 - 4 = 37$	$2 \times 37 + 2 - 4 = 72$

La valeur de u à la fin de l'algorithme est donc 72.

Conseils & Méthodes

1 On dresse un tableau ayant, en en-tête, des lignes les variables utilisées autres que le compteur, une colonne pour l'initialisation de ces variables et des colonnes appelées i =... pour chaque passage dans la boucle pour.

2 On complète la colonne d'initialisation.

3 On calcule au fur et à mesure des passages dans la boucle les différentes valeurs des variables.

À vous de jouer !

9 Quelles sont les valeurs prises par la variable r pendant l'exécution de cet algorithme ?

```
Pour i allant de 5 à 7
  r ← 2 × i² + 5
Fin pour
```

10 Quelle est la valeur de la variable b en fin de programme PYTHON ci-contre ?

```
a=0
b=0
for i in range(1,5):
    a=a+2
    b=b+a
```

Exercices 51 p. 31 à 54 p. 32

6 Écrire une boucle bornée

Cours 4 p. 20

Écrire un algorithme qui affiche les nombres pairs de 2 à 1000.

Solution

On constate qu'il va y avoir un affichage (et éventuellement un calcul) qui se répète 500 fois (afficher successivement 2, 4, 6, 8,..., 1000) : 1 on peut donc penser à l'instruction `Pour i allant de 1 à 500`. 2

Quand i=1 on affiche 2, quand i=2 on affiche 4,..., quand i=500 on affiche 1000 : dans tous les cas, il s'agit d'afficher le nombre 2 × i c'est-à-dire d'exécuter l'instruction `Afficher 2×i` à chaque passage dans la boucle. 3

En conclusion, l'algorithme ci-contre répond au problème posé (mais il y a d'autres possibilités).

```
Pour i allant de 1 à 500
  Afficher 2×i
Fin pour
```

Conseils & Méthodes

1 On identifie que des instructions vont se répéter un nombre déterminé de fois.

2 On en déduit une instruction du type `Pour i allant de... à...`.

3 On écrit ces instructions (qui se répètent) éventuellement en utilisant le compteur i.

À vous de jouer !

11 Écrire un algorithme qui affiche tous les nombres entiers de 9 à 784.

12 Écrire un algorithme affichant tous les nombres impairs de 1 à 999.

Coup de pouce
• $1 = 1 + 2 \times 0$ • $3 = 1 + 2 \times 1$ • $5 = 1 + 2 \times 2$ etc

13 Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il demande 10 fois à un utilisateur de saisir une valeur pour une variable x et ajoute à chaque fois cette valeur à celle de la variable somme.

```
somme ← 0
Pour i allant de… à…
  … ← Valeur demandée
  somme ← …
Fin pour
```

Exercices 55 à 57 p. 32

7 Comprendre une boucle non bornée

Cours 5 p. 20

On considère l'algorithme ci-contre.
Quelle est la valeur affichée par l'algorithme ?

```
i ← 0
u ← 12
Tant que u < 10000
  i ← i+1
  u ← 10×u–4×i+1
Fin tant que
Afficher i
```

Solution

On dresse le tableau suivant : 1 et 2

	Initialisation
i	0
u	12
Condition u < 10 000	

On vérifie si la condition u<10000 est vérifiée et, comme c'est le cas ici, on exécute les instructions dans la boucle. 3

	Initialisation	
i	0	0 + 1 = 1
u	12	10 × 12 – 4 × 1 + 1 = 117
Condition u < 10000	Vérifiée	

On répète l'étape précédente jusqu'à ce que la condition u<10000 ne soit plus vérifiée. 3

	Initialisation			
i	0	1	2	3
u	12	117	1 163	11 619
Condition u < 10000	Vérifiée	Vérifiée	Vérifiée	Non vérifiée

Quand u vaut 11 619, la condition u < 10 000 n'est plus vérifiée donc on exécute la fin de l'algorithme c'est-à-dire qu'on affiche la valeur de i : l'algorithme affiche 3. 4

Conseils & Méthodes

1 On dresse un tableau ayant en en-tête des lignes les variables utilisées ainsi que la condition (en dernière ligne) et une colonne pour l'initialisation.

2 On complète la colonne d'initialisation.

3 On teste si la condition est vérifiée et, si oui, on exécute les commandes puis on reteste si la condition est vérifiée, etc.

4 Quand la condition n'est plus vérifiée, on exécute la suite de l'algorithme.

À vous de jouer !

14 Quelle est la valeur affichée par l'algorithme suivant ?

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ≠ 656
  u ← 5 × u + 1
  n ← n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

15 Quelle est la valeur affichée par l'algorithme suivant ?

```
u ← 5
v ← 12
i ← 1
Tant que u < v
  u ← 3 × u + 2
  v ← 2 × v + 3
  i ← i + 1
Fin tant que
Afficher i
```

16 Quelles sont les valeurs prises par chacune des variables à la fin du programme python suivant ?

```
a=78
b=4
q=0
r=a
while r>=b:
    r=r-b
    q=q+1
```

17 **1.** Faire tourner l'algorithme suivant sur quelques passages dans la boucle.
2. Décrire par une phrase ce que fait cet algorithme (on ne demande pas son affichage).
3. En déduire l'affichage de fin d'algorithme.

```
x ← 0
Tant que x²<1000
  x ←x + 1
Fin tant que
Afficher x
```

Exercices 58 à 60 p. 32

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-02

8 Écrire une boucle non bornée

Cours 5 p. 20

Compléter le bloc d'instructions suivant pour qu'après avoir généré un nombre entier aléatoire x entre 1 et 6, il demande à l'utilisateur de saisir des valeurs (stockées successivement dans la variable a) jusqu'à trouver x.

```
x ←entier aléatoire entre 1 et 6
a ← 0
```

Solution

La demande à l'utilisateur de saisir une valeur se répète mais on ne sait pas combien de fois donc on va utiliser une boucle `Tant que`. 1

Dans chaque passage dans la boucle, l'utilisateur doit saisir une valeur pour **a** donc l'instruction à répéter est `a ← Valeur saisie`. 2

La condition mettant fin à cette répétition est **a = x** donc il y a répétition `Tant que a ≠ x`. 3

Le bloc d'instructions ci-dessous répond donc au problème posé.

```
x ←entier aléatoire entre 1 et 6
a ← 0
Tant que a ≠ x
  a ←Valeur saisie
Fin tant que
```

Remarque On a initialisé **a** de sorte d'assurer un premier passage dans la boucle mais on aurait pu procéder autrement, par exemple, comme le programme ci-contre.

```
x ← entier aléatoire entre 1 et 6
a ← Valeur saisie
Tant que a ≠ x
  a ←Valeur saisie
Fin tant que
```

Conseils & Méthodes

1 On identifie que des instructions vont se répéter un nombre non déterminé de fois.

2 On écrit ces instructions (qui se répètent).

3 On identifie la condition qui doit être vérifiée pour que les instructions continuent à se répéter et on en déduit une instruction du type `Tant que Condition`.
Il peut arriver qu'il soit plus simple de traiter l'étape 3 avant l'étape 2.

À vous de jouer !

18 On considère le nombre **a = 5** auquel on applique le programme de calcul `on multiplie par – 2 et on ajoute 1`, le résultat donnant la nouvelle valeur prise par **a**.
Écrire un algorithme affichant la première valeur supérieure à 20 prise par **a** quand on répète ces instructions.

19 Écrire un algorithme calculant et affichant les puissances de 5 successives jusqu'à ce que l'une d'elle dépasse 1 000 000.

Coup de pouce On pourra se demander quelle est la plus petite puissance de 5 (pour l'initialisation) et comment passer d'une puissance de 5 à la suivante.

20 **1.** Écrire un programme :
Étape 1 : demandant à l'utilisateur de saisir un nombre entier **a** strictement positif.
Étape 2 : calculant a^a et affectant la valeur obtenue à **a** puis affichant le résultat obtenu.
Étape 3 : reprenant l'étape précédente si la nouvelle valeur de **a** est plus petite que 10^{100}, s'arrêtant sinon.

2. Que se passe-t-il si l'utilisateur saisit 1 comme valeur de **a** au départ ?

21 Une somme de 1 000 euros est placée sur un livret bancaire rémunéré à 2 % d'intérêt en 2019. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine à partir de quelle année la somme d'argent sur le livret bancaire sera supérieure à 2 000 euros.

```
somme ← 1000
annee ← 2019
Tant que….
  somme ←…
  annee ←…
Fin tant que
Afficher…
```

Exercices 61 à 62 p. 32

Exercices résolus

9 Utiliser une fonction simple

Cours 6 p. 21

Donner l'affichage réalisé par l'algorithme ci-contre.

```
fonction calculproduit(x,y)
  produit ← x × y
  Retourner produit
a ← 5
b ← 8
Afficher calculproduit(a,b)
```

Solution

Dans l'algorithme principal, on identifie l'appel de la fonction **`calculproduit`** : c'est **`calculproduit(a,b)`** qui est équivalent à **`calculproduit(5,8)`** (car **a** = 5 et **b** = 8). 1

On exécute donc la fonction où **x** a pour valeur 5 et **y** a pour valeur 8 (on respecte l'ordre des paramètres !) : 2
on a donc **produit** = 5 × 8 = 40 (dans la fonction).

La fonction retourne la valeur de la variable **produit** donc 40. 3

Ainsi, dans l'algorithme principal, on peut remplacer **`calculproduit(a,b)`** par 40. 4

Il s'agit donc d'exécuter l'instruction **Afficher** 40 donc l'algorithme affiche la valeur 40. 5

Conseils & Méthodes

1 On repère l'appel d'une fonction.
2 On exécute la fonction en donnant aux variables paramètres de la fonction les valeurs données lors de l'appel.
3 On détermine la valeur de retour.
4 On remplace l'appel de fonction par la valeur de retour.
5 On exécute la suite de l'algorithme.

À vous de jouer !

22 Quel est l'affichage de cet algorithme ?

```
fonction bizarre(a,b,c)
  valeur ← 3 × a + 5 × b + c
  Retourner valeur

x ← 0
y ← 1
Afficher bizarre(x,2,y)
```

23 Quelle est la valeur de la variable **a** à la fin de ce programme ?

```
def aire_triangle(base,hauteur):
    aire=(base*hauteur)/2
    return aire

a=aire_triangle(4,8)
```

Exercices 63 à 64 p. 32

10 Écrire une fonction simple

Cours 6 p. 21

Écrire une fonction `calcul_somme` retournant la somme de deux valeurs.

Solution

La fonction a deux paramètres que l'on va appeler **x** et **y**. 1
La valeur de retour est leur somme soit **x** + **y**. 2
Les deux fonctions ci-contre conviennent. 3

```
fonction calcul_somme(x,y)
  somme ← x + y
  Retourner somme
```

```
fonction calcul_somme(x,y)
  Retourner x + y
```

Conseils & Méthodes

1 On identifie les paramètres de la fonction.
2 On identifie la valeur de retour et comment l'obtenir.
3 On écrit la fonction.

À vous de jouer !

24 Écrire une fonction **moyenne2** prenant comme paramètres deux variables **x** et **y** et retournant la moyenne de leurs deux valeurs.

25 Écrire une fonction **moyenne3** prenant comme paramètres trois variables **x**, **y**, et **z** et retournant la moyenne de leurs trois valeurs.

26 Écrire une fonction image prenant en paramètre une variable x et retournant l'image de la valeur de x par la fonction $x \mapsto 3x^2 - 7x + 4$.

27 Écrire une fonction **hausse20** prenant en paramètre une variable **quantite** et retournant sa valeur augmentée de 20 %.

Exercices 65 à 66 p. 32

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

28 Trouver une (ou plusieurs) ressemblance(s) et différence(s) entre les « fonctions » dont parle ce chapitre et les « fonctions » étudiées au collège et dans le chapitre 8 de ce manuel.

29 **1.** Découper dix cartes identiques dans une feuille cartonnée.
Sur cinq cartes écrire en bleu les instructions ←, **si**, **pour**, **tant que** et **fonction**.
2. Sur les cinq cartes restantes, écrire en rouge les instructions python correspondantes (sans regarder le cours d'abord puis avec le cours si vous n'y arrivez pas).
3. Battre les cartes et demander à un camarade de les associer.

Questions - Flash

Diapo
Diaporama
Ressource professeur

Remarque : PYTHON dispose d'un module `turtle` permettant de dessiner des figures.
En voici quelques instructions :
- `import turtle` permet de charger le module.
- `t=turtle.Pen()` crée la « tortue ».
- `t.forward(a)` (resp. `t.backward(a)`) fait avancer (resp. reculer) la tortue de **a** pixels.
- `t.right(b)` (resp. `t.left(b)`) fait se tourner la tortue de **b** degrés sur sa droite (resp. sa gauche);
- `t.up()` (resp. `t.down()`) lève (resp. baisse) le stylo.

Dans les exercices 30 à 33, dessiner le motif réalisé par le programme en prenant 1 mm par pixel.

30
```
import turtle
t = turtle.Pen()
t.forward(30)
t.right(90)
t.forward(30)
t.right(90)
t.forward(30)
t.right(90)
t.forward(30)
```

31
```
import turtle
t = turtle.Pen()
t.forward(100)
t.right(135)
t.forward(40)
t.right(45)
t.forward(100)
t.right(135)
t.forward(40)
```

32
```
import turtle
t = turtle.Pen()
t.backward(100)
t.left(90)
t.forward(100)
t.right(90)
t.forward(80)
t.up()
t.backward(80)
t.down()
t.left(90)
t.forward(100)
t.right(90)
t.forward(100)
```

33
```
import turtle
t = turtle.Pen()
for i in range(1,11) :
    t.forward(10)
    t.up()
    t.forward(10)
    t.down()
```

34 À l'aide du module turtle de **PYTHON**, dessiner :
a) un triangle équilatéral.
b) un M majuscule.
c) deux segments parallèles et de même longueur (non reliés).

Déterminer le type d'une variable à partir d'un contexte

35 Le programme d'une application sportive comporte, entre autres, trois variables **nom**, **temps** et **total** correspondant au nom de l'utilisateur, au nombre (entier) de minutes passées à faire du sport dans la journée et au nombre de kilocalories dépensées, arrondi à 0,1 kcal.
Donner un type possible pour chaque variable.

36 Un programme permettant de calculer la longueur d'un segment dans un repère orthonormé contient sept variables **nom1**, **nom2**, **abscisse1**, **ordonnee1**, **abscisse2**, **ordonnee2** et **longueur** correspondant au nom des deux extrémités du segment, à leurs coordonnées respectives et à la longueur du segment.
Donner un type possible pour chaque variable.

Déterminer les valeurs prises par les variables d'un algorithme

37 Quelles sont les valeurs des variables en fin de ces algorithmes ?

a)
```
a ← 15
b ← 3×a²−7
a ← b−2
c ← a×b
```

b)
```
x ← 5
y ← 2
x ← −2×x+6
y ← 8×x−2×y
```

38 Quelles sont les valeurs des variables en fin de ce programme en **PYTHON** ?
```
x = 12
y = 5
x = 3*x-5
y = 12*x+y
```

39 On considère l'algorithme suivant.
```
x ← Valeur saisie
y ← x²
z ← x⁴
x ← y² − z
```
1. Quelle est la valeur prise par la variable **x** en fin d'algorithme si l'utilisateur saisit **12** pour valeur de **x** en début d'algorithme ?
2. Reprendre la question précédente avec d'autres valeurs de **x** en début d'algorithme. Quelle conjecture peut-on faire ?
3. Démontrer cette conjecture.

40 **1.** Écrire un algorithme demandant de saisir la longueur du côté d'un carré et affichant son aire.
2. Modifier l'algorithme précédent pour l'adapter à un rectangle.

41 Écrire un algorithme demandant à l'utilisateur de saisir, pour un triangle rectangle :
a) les longueurs des deux côtés de l'angle droit et affichant la longueur de son hypoténuse.
b) les longueurs d'un côté de l'angle droit et de l'hypoténuse et affichant la longueur du deuxième côté de l'angle droit.

42 Écrire un algorithme demandant à l'utilisateur de saisir une distance parcourue, en km, et une vitesse, en km/h, et affichant le temps, en h, mis pour parcourir cette distance à cette vitesse.

Comprendre une instruction conditionnelle

43 Quelles sont les valeurs des variables en fin de cet algorithme si l'utilisateur saisit :
a) – 3 pour valeur de **x** ?
b) 2 pour valeur de **x** ?

```
x ← Valeur saisie
z ← 5
Si x×z > 0
  x ← x-z
Sinon
  z ← 2z
Fin si
z ← z+2
```

44 **1.** On considère l'algorithme suivant.

```
Afficher "Taper 1 ou 2."
choix ← Valeur saisie
Si choix = 1
  x ← entier aléatoire entre 1 et 6
Fin si
Si choix = 2
  x ← entier aléatoire entre 1 et 10
Fin si
```

Que fait cet algorithme si l'utilisateur saisit :
a) 2 comme valeur pour la variable **choix** ?
b) 7 comme valeur pour la variable **choix** ?
2. Expliquer pourquoi l'algorithme précédent est différent de celui ci-dessous.

```
Afficher "Taper 1 ou 2."
choix ← Valeur saisie
Si choix = 1
  x ← entier aléatoire entre 1 et 6
Sinon
  x ← entier aléatoire entre 1 et 10
Fin si
```

45 On considère le bloc d'instructions suivant.

```
Si x × y > 0
  Afficher "x et y sont de signes différents."
Sinon
  Afficher "x et y sont de même signe."
Fin si
```

1. Quel est l'affichage si :
a) **x** = 3 et **y** = – 5 ? **b)** **x** = – 7 et **y** = – 1 ?
2. Que faut-il changer pour que le bloc d'instructions soit cohérent ?

46 On considère le bloc d'instructions suivant.

```
Si x > 2 et x ⩽ 7
  Afficher "x est dans l'intervalle."
Sinon
  Afficher "x n'est pas dans l'intervalle."
Fin si
```

1. Quel est l'affichage si :
a) **x = 5,5** ? **b)** **x = 12** ?
2. Ce bloc d'instructions sert à tester si **x** appartient à un intervalle, lequel ?

47 On considère le bloc d'instructions suivant.

```
Si y ⩽ -3 ou y ⩾ 36
  Afficher "y n'est pas dans l'intervalle."
Sinon
  Afficher "y est dans l'intervalle."
Fin si
```

1. Quel est l'affichage si :
a) **y = 21,7** ? **b)** **y = -36,7** ?
2. Ce bloc d'instructions sert à tester si y appartient à un intervalle, lequel ?

Écrire une instruction conditionnelle

48 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x > 0 \\ x^3 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Écrire un algorithme ou un programme demandant à l'utilisateur de saisir une valeur de x et affichant son image $f(x)$.

49 Même exercice que le précédent avec :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ si } x \in]-\infty\,;1] \\ 5x \text{ si } x \in]1\,;2[\\ 14 - 2x \text{ si } x \in [2\,;+\infty[\end{cases}$$

50 Écrire un algorithme :
• demandant à l'utilisateur de saisir une valeur x.
• donnant le signe de $5x^2 + 3x - 2$ c'est-à-dire si $5x^2 + 3x - 2$ est strictement positif, strictement négatif ou égal à 0.

Comprendre une boucle bornée

51 Qu'affiche l'algorithme suivant ?

```
Pour i allant de 1 à 100
  Afficher 2×i-1
Fin pour
```

52 **1.** Qu'affiche le programme **PYTHON** suivant ?

```python
for x in range(1,11):
    print(x,"|",2*x+5)
```

2. Expliquer le lien avec la fonction $x \mapsto 2x + 5$.
3. Modifier le programme pour qu'il permette de tabuler la fonction $x \mapsto 2x^2 + 3x + 5$ entre – 1 et 8 avec un pas de 1.

Exercices d'application

53 Quelle est la valeur de la variable `somme` à la fin de cet algorithme ?

```
somme ← 0
Pour k allant de 1 à 10
  somme ← somme + k
Fin pour
```

Écrire un algorithme avec une boucle bornée

54 Écrire un algorithme ou un programme affichant 1 000 fois le mot « mathématiques ».

55 Écrire un algorithme ou un programme permettant d'afficher les images de tous les entiers entre 12 et 55 par la fonction $x \mapsto 3x^2 - 5$.

56 Écrire un algorithme ou un programme écrivant tous les triples de 0 à 999 (c'est-à-dire 0 ; 3 ; 6… 996 ; 999).

57 Dans une feuille de tableur, on écrit un nombre strictement positif dans la cellule A1.
On écrit ensuite la formule $\boxed{= A1/2+1/A1}$ dans la cellule A2 et on la recopie vers le bas.
1. Écrire un programme ou un algorithme permettant de déterminer la valeur présente dans la cellule A10.
2. Faire tourner l'algorithme à la main avec le nombre de départ de votre choix en A1.
3. De quel nombre « connu » le résultat semble-t-il proche ?

Comprendre un algorithme avec une boucle non bornée

58 Quelle est la valeur de `u` en fin de cet algorithme ?

```
u ← 9,5
Tant que u > 0
  u ← 100 - u²
Fin tant que
```

59 Quelle est la valeur de `i` en fin de cet algorithme si l'utilisateur choisit `10` pour valeur de `x` ?

```
x ← Valeur saisie
i ← 0
Tant que i<√x
  i ← i + 1
Fin tant que
```

60 Expliquer le comportement de ce bloc d'instructions.

```
a ← 0
Tant que a² + 1 > 0
  a ← a - 1
Fin tant que
```

Écrire un algorithme avec une boucle non bornée

61 Jeganitha aime bien s'adonner au petit jeu suivant :
• elle part d'un nombre réel positif `j` au hasard,
• elle le multiplie par 3 et lui ajoute 5,
• elle recommence avec le nouveau nombre, jusqu'à ce que le résultat soit plus grand que 200.
Écrire un algorithme ou un programme permettant d'afficher le dernier nombre obtenu si elle part du nombre 0.

62 On considère la suite logique ci-dessous :
4-5-7-10-14-19-…
Écrire un algorithme ou un programme affichant le premier terme de cette suite logique supérieur ou égal à 100.

Coup de pouce Considérer les différences entre termes consécutifs.

Utiliser une fonction simple

63 Quelle est la valeur de retour de la fonction `f` ci-contre si l'on appelle `f(2)` ?

```
fonction f(x)
  y ← 3 × x² + 5
  Retourner y
```

64 Quelle est la valeur de retour de la fonction `g` ci-contre si l'on appelle `g(1)` ?

```
fonction g(x)
  y ← x² + 3
  z ← 4 × x + y
  y ← z²
  Retourner z
```

Écrire une fonction simple

65 Écrire une fonction retournant l'image d'un réel par
a) $f : x \mapsto -25x + 12$ **b)** $g : x \mapsto 8x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

66 En mathématiques, il existe des fonctions de plusieurs variables. Soit la fonction $h : (x ; y) \mapsto 3xy - 5x + 2y$
Écrire une fonction retournant l'image d'un couple de réels $(x ; y)$ par la fonction h.

Calculs et automatismes

67 Combien y a-t-il de nombres dans la liste des entiers successifs de 5 à 100 ?

68 Calculer $(3x+5y)z$ pour $x = 2$, $y = -1$ et $z = 11$.

69 Que doit-on écrire dans les pointillés de la phrase suivante ?

La condition "tant que `i < 35`" est équivalente à "jusqu'à ce que `i`…".

70 Quel retour ?

Quel est l'affichage de cet algorithme ?

```
fonction
pythagore(cote1,cote2)
  Retourner √(cote1² + cote2²)
a ← 3
b ← 4
c ← pythagore(a,b)
Afficher c
```

71 Au tableur ! TICE

Dans le tableur, il y a deux fonctions MIN et MAX.
Quand on tape $\boxed{= \text{MIN}(5;3)}$, la valeur 3 est renvoyée.
Écrire deux fonctions MIN et MAX ayant le même usage que celles du tableur.

Coup de pouce C'est-à-dire ayant deux paramètres et retournant la plus grande ou la plus petite des valeurs.

72 Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre x, notée $|x|$, est :
- le nombre lui même s'il est positif,
- l'opposé du nombre s'il est négatif.

Ainsi, $|4{,}5| = 4{,}5$ et $|-3| = -(-3) = 3$, par exemple.
Écrire une fonction de paramètre x qui retourne la valeur absolue de la valeur de x.

73 Hausse et évolution et quantité

1. Écrire une fonction `hausse5` ayant un paramètre `quantite` et retournant la valeur de ce paramètre augmentée de 5 %.
2. Même question pour une fonction `hausse40`.
3. Écrire une fonction `evolution` ayant deux paramètres `quantite` et `taux` et retournant quantite augmentée de taux %.
4. Cette fonction est-elle toujours correcte si `taux` est un nombre négatif ?

74 Pour le 26…

Pour quelle(s) valeur(s) de **x** l'algorithme affiche-t-il 26 ?

```
x ← Valeur saisie
Si x > 0
  Afficher "Pas intéressant"
Sinon
  y ← x² + 1
  Afficher y
Fin si
```

75 Forfaits au choix

Une entreprise commercialise deux forfaits téléphoniques.

- **Forfait ① :** 1,20 € par heure d'appel.
- **Forfait ② :** illimité pour 20 € par mois.

Écrire un algorithme ou un programme demandant à l'utilisateur de donner son temps d'appel mensuel en heures et affichant le forfait à privilégier.

76 Voyage en train

Pour un trajet de train, un guichet automatique est programmé avec l'algorithme ci-dessous où la variable **age** est l'âge de l'utilisateur.

```
age ← Valeur saisie
Si age < 27 ou age > 60
  Afficher "15 euros"
Sinon
  Afficher "30 euros"
Fin si
```

1. Quel est l'affichage si l'utilisateur a :
a) 12 ans ?
b) 36 ans ?
c) 75 ans ?
2. Sous quelles conditions une personne bénéficie-t-elle d'un demi-tarif sur ce trajet de train ?

77 À compléter

Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche tous les inverses des entiers de 8 à 20 c'est-à-dire $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, etc.

```
Pour i allant de… à…
  Afficher…
Fin pour
```

78 À partir d'un certain rang…

Écrire un algorithme ou un programme :
- demandant à l'utilisateur de saisir un nombre entier `p` entre `2` et `10`,
- donnant le premier exposant entier `i` à partir duquel $p^i > 10\ 000$.

Par exemple, si l'utilisateur choisit `p = 3`, le début du tableau d'évolution des valeurs des variables est :

p	3	3	3
i	0	1	2
Condition	Vérifiée	Vérifiée	

79 Différence de carrés

1. Écrire un algorithme ou un programme affichant la différence de deux carrés consécutifs de $1^2 - 0^2$ à $100^2 - 99^2$.
2. Le faire tourner « à la main ». Que remarque-t-on ?

80 Pour calculer des aires et des volumes

En groupe

1. Former des groupes.
2. Lire intégralement l'énoncé du TP5 p.38, et se répartir toutes les fonctions à écrire entre membres du groupe.
3. Regrouper ensuite les fonctions de tout le groupe dans un seul fichier pour tester le programme.

Exercices d'approfondissement

81 À Monte-Carlo

1. Écrire une fonction **PYTHON** sans paramètre :
- générant deux flottants x et y au hasard entre – 1 et 1.
- testant si le point de coordonnées $(x ; y)$ est à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé d'origine O.
- retournant 1 si c'est le cas et 0 sinon.

Coup de pouce `random.uniform(a,b)` retourne un flottant au hasard entre **a** et **b**.

2. Écrire une fonction de paramètre n qui appelle n fois la fonction précédente et retourne $4 \times \frac{p}{n}$ où p est le nombre de fois où le point de coordonnées $(x ; y)$ est à l'intérieur du cercle parmi les n appels de la fonction.
3. Lancer plusieurs fois cette dernière fonction avec des valeurs de n élevées (au moins 1 000 000) depuis la console.
4. De quel nombre « connu » semble s'approcher le résultat retourné ?

82 La racine encadrée

Modifier l'algorithme de l'exercice 59 pour qu'il affiche :
- la valeur de $\sqrt{x}$ si x est un carré parfait.
- les deux entiers encadrant $\sqrt{x}$ si x n'est pas un carré parfait.

83 En moyenne !

On souhaite écrire une fonction permettant d'obtenir la moyenne de n notes.
1. Écrire les deux premières lignes d'une fonction moyenne de paramètre n dans laquelle une variable `total` est initialisée à 0.
2. Écrire une boucle demandant n fois à l'utilisateur de saisir une note et ajoutant à chaque fois cette note au total.
3. Terminer l'écriture de la fonction moyenne retournant la moyenne des n notes saisies.

84 Pour ou Tant que ?

On considère l'**algorithme 1** suivant.
Recopier puis compléter l'**algorithme 2** pour qu'il fasse exactement la même chose que le précédent.

```
Algorithme 1
u ← 5
Pour i allant de 1 à 5
  u ← 2 × u + 3
Fin pour
```

```
Algorithme 2
i ← 1
u ← 5
Tant que
```

85 Suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie ainsi :
- on part d'un nombre entier strictement positif.
- s'il est pair, on le divise par 2.
- s'il est impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute 1.
- on recommence avec le nouveau nombre obtenu.

1. Écrire un programme permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite de Syracuse (qui dépendra de la valeur de départ).

Coup de pouce L'instruction `if n%2 == 0` permet de tester si un nombre est pair.

2. Exécuter le programme plusieurs fois en changeant le nombre de départ.
Que remarque-t-on ?

86 Un simple échange — Problème ouvert

Écrire un algorithme ou un programme demandant à l'utilisateur de saisir deux nombres **a** et **b** et tel que les valeurs de **a** et **b** soient échangées.
Par exemple, si l'utilisateur saisit `2` pour valeur de **a** et `3` pour valeur de b alors `a = 3` et `b = 2` en fin de programme.

Vers la 1re — Orientation

87 Spécialité Maths

La suite de Fibonacci est définie de la manière suivante.

> ① Le 1er et le 2e termes de la suite sont égaux à 1.
> ② Tous les termes suivants se calculent en additionnant les deux précédents : le 3e est 1 + 1 = 2, le 5e est 2 + 3 = 5, le 4e est 1 + 2 = 3, etc.

Écrire un programme affichant le 1 000e terme.

88 Spécialité Maths

Karima a trouvé un algorithme permettant de déterminer le quotient **q** d'un nombre **a** par un nombre **b**.
Quand elle l'exécute avec `a = 38` et `b = 12`, elle obtient successivement : pour `q = 0`, `q × b = 0 ⩽ a`, pour `q = 1`, `q × b = 12 ⩽ a`, pour `q = 2`, `q × b = 24 ⩽ a`, pour `q = 3`, `q × b = 36 ⩽ a`, pour `q = 4`, `q × b = 48 > a`.
Donc elle en déduit `q = 4 – 1 = 3`.

1. Écrire l'algorithme de Karima en langage naturel.
2. Modifier cet algorithme pour le transformer en une fonction de paramètres **a** et **b** et qui retourne la valeur **q**.
3. Écrire une fonction de paramètres à déterminer et qui retourne le reste de la division de **a** par **b**.

89 STL-ST2S

Il y a : 4 kcal dans 1 g de glucides, 4 kcal dans 1 g de protéines et 9 kcal dans 1 g de lipides.
1. Écrire une fonction `calories100` dont les paramètres sont le nombre de grammes de lipides, de protéines et de glucides par 100 g d'un aliment et renvoyant le nombre de calories au 100 g de cet aliment.
2. Écrire le programme principal associé à la fonction précédente demandant à l'utilisateur de saisir le nombre de grammes de lipides, protéines et glucides par 100 g d'un aliment et affichant la valeur renvoyée par la fonction `calories100`.

Travaux pratiques

Logique TICE Raisonner 25 min

1 Des conditions avec ET/OU

On considère les programmes **PYTHON** suivants.

Programme 1	Programme 2

`import random`
`x=random.randint(1,5)`
`y=random.randint(1,5)`
`if x>=2 and y<4:`
`    print("Vous avez gagné!")`
	`import random`
	`x=random.randint(1,3)`
	`y=random.randint(1,3)`
	`if x!=3 or y==1:`
	`    print("Vous avez gagné!")`

1. a) Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il traduise le premier programme.

```
x ← entier aléatoire entre 1 et 5
…
```

b) Le **programme 1** affiche-t-il `Vous avez gagné !`
- si $x = 2$ et $y = 3$?
- si $x = 1$ et $y = 5$?
- si $x = 3$ et $y = 4$?

c) Dans un repère, marquer en rouge les points de coordonnées $(x\,;\,y)$ pour lesquels l'affichage est `Vous avez gagné !`

2. a) On rappelle que la condition `x!=3` est vérifiée si la valeur de `x` est différente de **3** et que la condition `y==1` est vérifiée si la valeur de `y` est égale à **1**.
Traduire le deuxième programme en langage algorithmique.

b) Le **programme 2** affiche-t-il `Vous avez gagné !`
- si $x = 3$ et $y = 2$?
- si $x = 3$ et $y = 1$?
- si $x = 2$ et $y = 3$?

c) Dans un nouveau repère, marquer en rouge les points de coordonnées $(x\,;\,y)$ pour lesquels l'affichage est `Vous avez gagné !` pour $-5 \leqslant x \leqslant 5$ et $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

TICE Logique Raisonner 20 min

2 Découvrir les booléens

1. a) L'inégalité 5>3 est-elle vraie ?

b) Saisir **5>3** dans la console de **PYTHON** et valider. Quel affichage est obtenu ?

c) Proposer une inégalité à écrire dans la console de **PYTHON** qui produise `False` pour affichage. Essayer.

2. a) Écrire le programme ci-contre puis l'exécuter.

```
a = 5!=3
print(a)
```

b) Ajouter la ligne `print(type(a))` et exécuter le programme.

Coup de pouce La commande type permet d'afficher le type d'une variable. Ici, la variable **a** est du type **booléen**. Les variables de ce type ne prennent que deux valeurs : VRAI `(True)` ou FAUX `(False)`.

c) Créer une variable **b** de type booléen ayant pour valeur `False`.

3. Quelle est la valeur d'une variable booléenne :

a) **c** définie par `c = (6>10) == False` ? Expliquer puis vérifier avec **PYTHON**.

b) **d** définie par `d = (11!=14) == (4<7)` ? Expliquer puis vérifier avec **PYTHON**.

4. On considère le programme ci-contre.

```
e = False
if e:
    print("Super!")
else:
    print("Génial!")
```

a) Sans le taper, dire ce qu'il va afficher. Vérifier avec **PYTHON**.

b) Le modifier afin qu'il affiche `Super !`

Algo & Prog

SVT TICE Modéliser, communiquer 55 min

3 À propos des groupes sanguins

Remarque Pour réaliser ce TP, les modules **`random`** et **`matplotlib`** de **PYTHON** sont nécessaires.
Dans ce TP, tous les programmes commenceront par la ligne **`import random`**.
On rappelle également que la commande **`random.randint(a,b)`** de **PYTHON** donne un nombre entier au hasard entre **a** inclus et **b** inclus.

A ▶ Répartition d'allèles dans une population

Un des gènes qui déterminent le groupe sanguin (présent sur le chromosome 9) existe sous trois versions : l'allèle A, l'allèle B et l'allèle O.
Chaque être humain est porteur de deux allèles (un hérité de chaque parent) qui selon leur dominance/récessivité déterminent son groupe sanguin.
Par exemple un individu porteur des allèles A et B est du groupe AB, un individu porteur des allèles A et O est du groupe A, etc.
On considère une population de 6 individus dans laquelle les 12 allèles (2 par individu) évoqués plus haut sont équirépartis, c'est-à-dire qu'il y a 4 allèles A, 4 allèles B et 4 allèles O.
On souhaiterait observer l'évolution des effectifs de chaque allèle dans les générations suivantes.
Pour cela, recopier le tableau ci-contre à compléter dans les questions suivantes.

Choix du modèle On considère que chaque allèle sera transmis zéro, une ou deux fois à la génération suivante. Modéliser la situation revient donc, pour chacun des allèles, à tirer un nombre entier au hasard entre 0 et 2.

Génération	Effectif de l'allèle A	Effectif de l'allèle B	Effectif de l'allèle O
n° 0	4	4	4
n° 1			
n° 2			
n° 3			
n° 4			

Ce modèle est évidemment très simplifié et discutable ! Normalement, il faudrait, par exemple, apparier les allèles (deux pour chaque individu) qui ne pourraient donc jamais être en effectif total impair.

1. On considère un **programme 1** qui génère un entier au hasard entre 0 et 2 et réalise un affichage comme celui ci contre (obtenu en exécutant 4 fois le programme)

Remarque Le nombre étant aléatoire, on peut obtenir une autre séquence mais toujours avec 0, avec 1 ou avec 2 allèle(s).

```
Quatre affichages du programme 1
 0 allèle transmis.   1 allèle transmis.
 2 allèles transmis.  0 allèle transmis.
```

Écrire ce **programme 1** avec **PYTHON** (noter les « s » éventuels à « allèle »).

2. a) Exécuter quatre fois le **programme 1** afin de simuler l'effectif de l'allèle A à la génération n° 1 à partir des 4 allèles A de la génération n° 0 puis reporter le résultat dans le tableau.
b) Faire de même pour obtenir l'effectif des allèles B et C de la génération n° 1 et reporter ces résultats dans le tableau.

3. Compléter la ligne correspondant à la génération n° 2 à l'aide du **programme 1**.

4. a) Pour gagner du temps, on souhaite écrire le **programme 2** :
• demandant l'effectif d'un allèle à une génération ;
• affichant l'effectif de cet allèle à la génération suivante.
Recopier et compléter les pointillés dans le **programme 2**.

Coup de pouce On rappelle que pour deux entiers **n** et **p**, la ligne **`for i in range(n,p)`** fait varier **i** de **n** à **p − 1** (et non **p**).

```
Programme 2
import random

effectif = input("Effectif de l'allèle?")
effectif = int(effectif)
nouvel_effectif = 0
for i in range(1,...):
  nouvel_effectif = nouvel_effectif + ...
print(...)
```

b) Utiliser ce **programme 2** afin de remplir les lignes suivantes du tableau.

B ▸ Étude d'effectifs à la génération zéro

Dans cette partie, on va utiliser un programme (constitué notamment d'une partie du **programme 2**) qui :
- demande à l'utilisateur l'effectif de chaque allèle à la génération n° 0 et le nombre de générations souhaité ;
- donne en sortie :
  - l'effectif de chaque allèle après le nombre de générations spécifié ;
  - le graphique de l'évolution de la fréquence de chaque allèle sur toutes ces générations.

1. Recopier le tableau ci-dessous à compléter dans les questions suivantes.

Fréquence (en %) à la génération n° 100 de … / Effectif de chaque allèle à la génération n° 0	l'allèle A	l'allèle B	l'allèle O
50			
1 000			
10 000			

2. a) Aller chercher le programme. Doc Fichiers TICE Lienmini.fr/maths2-28

b) Exécuter le programme avec un effectif de 50 pour chaque allèle à la génération n° 0 pour 100 générations.

c) Enregistrer puis **fermer la figure générée et noter** l'effectif de chaque allèle après 100 générations puis compléter la première ligne du tableau en calculant les fréquences de chaque allèle.

3. Reprendre la question **2.** avec 1 000 comme effectif de chaque allèle à la génération n° 0 pour 100 générations.

4. Reprendre la question **2.** avec 10 000 comme effectif de chaque allèle à la génération n° 0 pour 100 générations.

5. Réaliser un compte-rendu numérique des résultats observés dans cette partie **B**.
Celui-ci contiendra notamment les trois graphiques obtenus et fera le lien entre les effectifs de départ et les fréquences finales des différents allèles.

4 Une petite étrangeté

TICE — Raisonner, Calculer — 10 min

1. Écrire un programme demandant à l'utilisateur de saisir deux nombres réels `x` et `y` et testant si leur produit est égal à `6,3`.

2. Tester le programme avec :

a) `1` et `6,3`. **b)** `2` et `4`. **c)** `3` et `2,1`.
Les affichages obtenus sont-ils cohérents ?

3. Écrire `3*2.1` dans la console et valider.
Que remarque-t-on ?

Remarque Les nombres manipulés étant traités en base 2 par l'ordinateur (le fameux binaire), cela induit des approximations problématiques dans les calculs avec des nombres non entiers. C'est pourquoi, d'une manière générale, on évite les tests d'égalité sur les flottants.

Calculer, communiquer

55 min

5 Pour calculer des aires et des volumes

Le but de ce TP est d'écrire en **PYTHON** un programme permettant de calculer automatiquement des aires et volumes de figures usuelles.

A ▶ Quelques fonctions

1. Écrire une fonction de première ligne `def aire_carre(c)` retournant l'aire d'un carré dont le côté **a** pour longueur **c**.

Coup de pouce On peut tester cette fonction dans la console en rentrant `aire_carre(6)` par exemple.

2. Écrire une fonction de première ligne `def aire_rectangle(l1,l2)` retournant l'aire d'un rectangle de longueur `l1` et de largeur `l2`.

3. Écrire sur le même modèle les fonctions `aire_triangle`, `aire_disque`, `volume_cube`, `volume_cone` et `volume_boule` en tenant bien compte du nombre de paramètres nécessaires aux calculs de ces aires et volumes.

Coup de pouce Écrire `import math` en début de programme : le nombre π s'obtient alors avec la commande `math.pi`.

B ▶ Création de menus

1. Écrire une fonction de première ligne `def menu_principal()` :
• affichant successivement et à la ligne `Pour calculer des aires, taper 1`, puis `Pour calculer des volumes, taper 2` ;
• affichant `Votre choix ?` et attendant la saisie d'un nombre de type entier par l'utilisateur pour l'affecter à une variable `choix` ;
• retournant la valeur de la variable `choix`.

2. Sur le même modèle, écrire une fonction `menu_aire` :
• affichant successivement et à la ligne : `Pour l'aire d'un carré, taper 1` puis `Pour l'aire d'un rectangle, taper 2` puis `Pour l'aire d'un triangle, taper 3` puis `Pour l'aire d'un disque, taper 4`.
• affichant `Votre choix ?` et attendant la saisie d'un nombre de type entier par l'utilisateur pour l'affecter à une variable `choix` ;
• retournant la valeur de la variable choix.

3. Écrire sur le même modèle une fonction `menu_volume` proposant de la même manière de calculer le volume d'un cube, d'un cône ou d'une boule.

C ▶ Programme principal

1. Écrire le début du programme principal suivant puis le compléter.

```
choix1 = menu_principal()
if choix1 == 1:
    choix2 = menu_aire()
    if choix2 == 1:
        c = float(input("Longueur d'un coté ?"))
        print(aire_carre(c))
    if choix2 == ...
```

2. Tester le programme.

3. Pour aller plus loin
• Ajouter un choix `Pour quitter le programme, taper 0` dans la fonction `menu_principal` et, à l'aide d'une boucle `Tant que`, faire en sorte de réafficher le menu principal après chaque calcul d'aire ou de volume jusqu'à ce que l'utilisateur saisisse `0`.
• Vous pouvez aussi calculer d'autres aires et volumes (ou périmètres !).

1 Comprendre l'affectation

QCM

Pour les exercices 90 et 91 on considère l'algorithme ci-contre.

```
x ← - 1
y ← 5
x ←x - y
y ←x - y
```

90 À la fin de cet algorithme, on a :

a `x = -1` b `x = -6` c `x = -4`

91 À la fin de cet algorithme, on a :

a `y = 5` b `y = -6` c `y = -11`

92 ✶ On considère le programme **PYTHON** suivant.

```
a=12
b=5
b=a*b
a=3*b
print("La valeur de a est",a)
print("La valeur de b est",b)
```

Qu'affiche ce programme ?

2 Travailler avec des instructions conditionnelles

QCM

93 On considère l'algorithme ci-contre.
Si l'utilisateur saisit `4` comme valeur de `x`, l'algorithme affiche :

```
x ← Valeur saisie
Si -5x + 10 > 0
  Afficher "image positive"
Sinon
  Afficher "image négative"
Fin si
```

a `4` b `-10`
c `image positive` d `image négative`

94 ✶ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 6x - 2 \text{ si } x > 5 \\ 4x + 8 \text{ si } x \leqslant 5 \end{cases}$$

Écrire un algorithme ou un programme demandant à l'utilisateur de saisir une valeur de x et affichant son image $f(x)$.

3 Comprendre et écrire une boucle

QCM

95 On considère l'algorithme ci-contre.
Cet algorithme affiche :

a `2` b `5`
c `24` d `120`

```
i ← 1
Pour j allant de 2 à 5
  i ←i×j
Fin pour
Afficher i
```

Pour les exercices 96 et 97 on considère le bloc d'instructions ci-contre.

```
i←0
Tant que s > 0
  s ←s - 100
  i ←i + 1
Fin tant que
Afficher s
Afficher i
```

96 Si la valeur de `s` est `641` en début de bloc, quelle est la valeur de `s` affichée en fin de bloc ?

a `141` b `41` c `-59` d `-159`

97 Si la valeur de `s` est `471` en début de bloc, quelle est la valeur de `i` affichée en fin de bloc ?

a `6` b `5` c `4` d `0`

98 ✶✶ Écrire un algorithme ou un programme qui affiche tous les nombres pairs de 624 à 48 762.

99 ✶✶ Écrire un algorithme ou un programme additionnant des nombres entiers aléatoires entre 1 et 10 jusqu'à ce que leur somme soit supérieure à 1 000.

4 Travailler avec les fonctions

QCM

100 Quelle valeur retourne la fonction ci-dessous si l'on appelle `facture(120,12,7)` ?

```
def facture(prix,effectif,reduction):
    total=prix*effectif
    remise=total*reduction/100
    total=total-remise
    return total
```

a `1 440` b `100,8` c `1 339,2`

101 ✶ Quelle est la valeur de retour de la fonction `affine` suivante si l'on appelle `affine(2, 4)` ?

```
fonction affine(a,b)
  Retourner -b/a
```

102 ✶ Écrire une fonction à deux paramètres nommée `ecart` retournant l'écart entre les deux valeurs prises par les paramètres.

103 ✶✶ Écrire une fonction retournant le volume d'un pavé droit (bien choisir les paramètres).

104 ✶✶ Écrire une fonction `multiples` à deux paramètres `k` et `n` entiers affichant les `n` premiers multiples non nuls de `k`.

PARTIE 2

Nombres et calculs

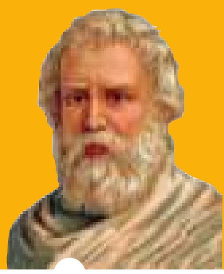
Les Égyptiens, les Mayas et les Romains avaient tous leur propre manière de compter et de faire des calculs. Les nombres servaient notamment au recensement, aux transactions, aux conversions.

Diophante d'Alexandrie (Entre 200 et 500)

Diophante d'Alexandrie, dans son *Arithmétique*, étudie certaines équations dites diophantiennes.

↪ Dicomaths p. 349

Archimède (vers 287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.)



Archimède propose un encadrement de π.

↪ Dicomaths p. 347

Al-Khwarizmi (vers 780 – vers 850)

Al-Khwarizmi présente des méthodes de résolution de certaines équations du 1er et du 2nd degré.

↪ Dicomaths p. 347

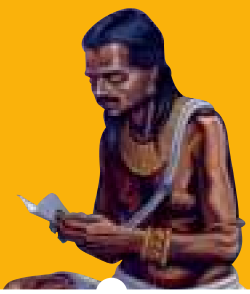
Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai utilisé des nombres (décimaux, rationnels, etc.) et des fractions (classiques, irréductibles, décimales, etc.) pour comparer, calculer et résoudre des problèmes. J'ai également découvert la racine carrée, les carrés parfaits entre 1 et 144, les puissances et la notation scientifique. J'ai étudié les notions de divisibilité (division euclidienne, multiples, diviseurs) et de nombres premiers. J'ai utilisé le calcul littéral et la résolution d'équations pour résoudre des problèmes.

En 2de, je vais approfondir mes connaissances sur les divers types de nombres et les ensembles associés afin de résoudre des problèmes arithmétiques. Je vais découvrir la notion d'intervalle réel et apprendre à résoudre des inéquations du 1er degré. Je vais utiliser le calcul littéral et apprendre à résoudre des équations produit, quotient, ou incluant des fonctions de référence.

Au XXI^{e} siècle, une véritable course au plus puissant supercalculateur se déroule au niveau mondial. Des pays investissent des millions dans la construction de ces supercalculateurs tant leur apport au niveau de l'industrie et de la technologie est grand.

Brahmagupta (598 – 670)



Brahmagupta définit le zéro comme étant le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même.
↪ Dicomaths p. 347

François Viète (1540 – 1603)

François Viète répand l'utilisation des nombres décimaux.
↪ Dicomaths p. 353

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

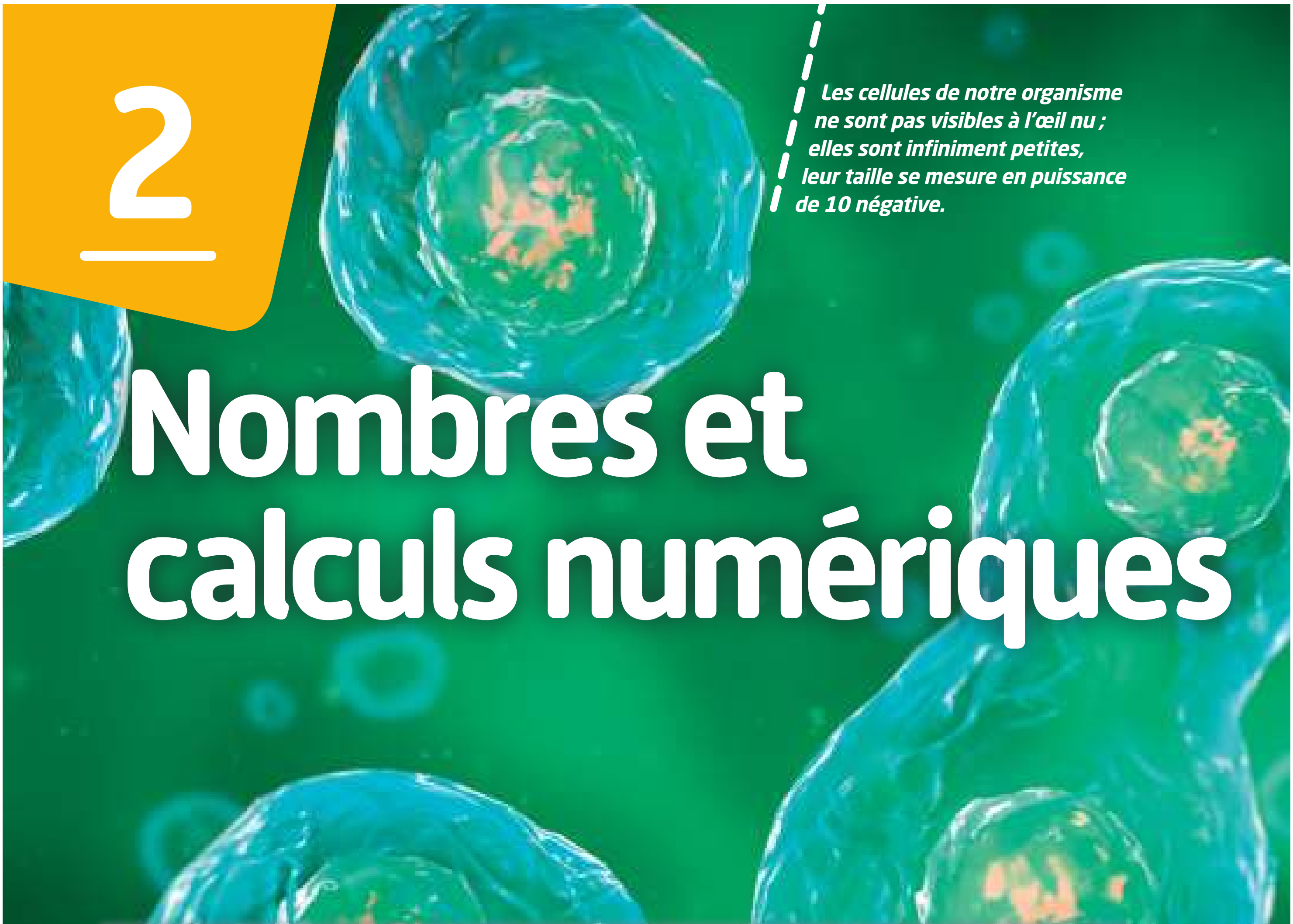
Fermat émet la conjecture suivante : « Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que $n \geqslant 2$. » Ce résultat sera démontré par Wiles en 1994 et sera connu sous le nom de théorème de Fermat-Wiles.
↪ Dicomaths p. 350

En 1res générale et technologique, je découvrirai les suites numériques et j'apprendrai à résoudre des équations du 2nd degré.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **physique-chimie**, à isoler certaines variables dans des formules et à calculer leurs valeurs, à convertir des unités.
- En **SES**, à calculer des taux d'évolution successifs, à optimiser des achats.
- En **géographie**, à calculer des aires de territoires.
- En **cryptographie**, à mettre en place des procédures de chiffrement basées sur la primalité (RSA, El Gamal, etc.).
- En **informatique**, à optimiser le temps de calcul d'un algorithme.



2

Les cellules de notre organisme ne sont pas visibles à l'œil nu ; elles sont infiniment petites, leur taille se mesure en puissance de 10 négative.

Nombres et calculs numériques

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Utiliser les notions de multiples, diviseurs et nombres premiers.	1 p. 50 · 1 2 p. 50 · 28 29 32 33 p. 54
Calculer avec les puissances.	2 p. 51 · 4 5 p. 51 · 45 46 p. 55
Calculer avec les quotients.	3 p. 52 · 7 8 p. 52 · 51 52 p. 55
Calculer avec les racines carrées.	4 p. 53 · 11 12 p. 53 · 56 57 p. 56
Déterminer la nature d'un nombre.	105 106 p. 60
Démonstrations	
• Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.	131 p. 63
• Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.	Act 4 p. 45 · 133 p. 63
• Démontrer que pour une valeur numérique de *a*, la somme de deux multiples de *a* est un multiple de *a*.	41 p. 55
• Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair.	Cours 1 p. 46
• Démontrer que, quels que soient les réels positifs *a* et *b*, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.	Act 3 p. 45
Algo & Prog	
• Déterminer si un entier naturel est premier.	120 p. 62
• Déterminer par balayage un encadrement d'une racine carrée d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.	TP 1 p. 64
• Déterminer si un entier naturel *a* est multiple d'un entier naturel *b*.	71 p. 57
• Déterminer le plus grand multiple de *a* inférieur à *b*, pour des entiers *a* et *b* donnés.	73 p. 57
• Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.	79 p. 58

1 exercices résolus · 11 exercices corrigés · 12 exercices non corrigés · TP travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 45, 46, 48, 55, 57, 60-63

Algo & Prog
p. 57, 58, 62, 64, 65

TICE
p. 64, 65

Les autres disciplines
p. 57, 58, 61, 62

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-03

1. Connaître la division euclidienne

On donne l'égalité $177 = 15 \times 11 + 12$.

Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 177 par 15, puis de la division euclidienne de 177 par 11.

2. Utiliser les critères de divisibilité

Parmi les nombres 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indiquer ceux qui sont divisibles :

a) par 2 **b)** par 3 **c)** par 5 **d)** par 9

3. Calculer avec les quotients

Calculer chacune des expressions suivantes.

$A = 1 - \frac{-7}{3}$ $B = \frac{-2}{10} + \frac{7}{25}$

$C = \frac{-7}{15} \times \left(-\frac{5}{21}\right)$ $D = \frac{-7}{3} \div \frac{-21}{6}$

4. Connaître la notation scientifique

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

a) $5{,}23 \times 10^{12}$ **b)** $72{,}43 \times 10^{-8}$ **c)** $2{,}45 \times 100^{-9}$

d) $-1{,}47 \times 10^{6}$ **e)** $0{,}251 \times 10^{3}$ **f)** $-7{,}6$

5. Utiliser la racine carrée en géométrie

Sachant que le triangle ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 3 et AC = 7, calculer la valeur exacte de BC.

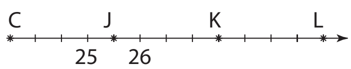
6. Connaître les carrées parfaits

Quels sont les carrés parfaits compris entre 1 et 144 ?

7. Repérer des nombres sur une droite graduée

1. Tracer une demi-droite graduée en prenant 12 carreaux pour une unité. Sur cette demi-droite, placer les points E, F, G et H d'abscisses respectives $\frac{11}{12}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{2}$.

2. Écrire l'abscisse des points C, J, K et L.



Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

Activités

1 Calculer avec des puissances de 10

15 min

1. a) Recopier puis compléter les expressions suivantes.

$$10^2 \times 10^3 = \underbrace{\underbrace{10 \times 10}_{\dots\text{ facteurs}} \times \underbrace{10 \times 10 \times 10}_{\dots\text{ facteurs}}}_{\dots\text{ facteurs au total}} = 10^{\cdots} \qquad 10^5 \times 10^4 = \underbrace{\underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\dots\text{ facteurs}} \times \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{\dots\text{ facteurs}}}_{\dots\text{ facteurs au total}} = 10^{\cdots}$$

b) Calculer de la même façon $10^5 \times 10^8$ et $10^7 \times 10^{-6}$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $10^n \times 10^p = 10^{\cdots}$.

2. a) En s'inspirant de la question **1.**, décomposer $\frac{10^5}{10^2}$, puis simplifier cette fraction en donnant le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

b) Recommencer avec les fractions $\frac{10^7}{10^{-5}}$ et $\frac{10^{\ 3}}{10^2}$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots}$.

3. a) Compter le nombre de facteurs 10 contenus dans l'écriture décomposée de $(10^2)^3$.

b) Combien aurait-on de facteurs 10 dans $(10^3)^5$? Déterminer $(10^5)^8$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $(10^n)^p = 10^{\cdots}$.

4. Les formules obtenues dans les questions précédentes sont-elles encore valables pour des puissances autres que 10 ?

↳ Cours 2 p. 47

2 Connaître de nouveaux nombres

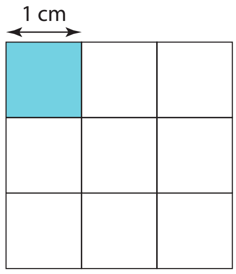
15 min

1. a) L'aire d'un carré est 25 cm². Quelle est la mesure d'un côté ?
On appelle c le côté de ce carré en centimètres. Quelle relation existe-t-il entre c et 25 ?

b) Trouver **tous** les nombres dont le carré est 16.
Recommencer avec 0,81.

c) Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifier.

d) Si a et b sont deux nombres qui ont le même carré, que peut-on dire de a et b ? Justifier.



2. a) Est-il possible de tracer un carré dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre ? (Il est possible de s'aider du quadrillage.)
Comparer sa réponse avec celles des autres élèves de la classe.

b) On appelle c le côté de ce carré en centimètres.
Quelle relation existe-t-il entre c et 2 ? Traduire cette égalité par une phrase en français.

c) Est-il possible de donner une écriture décimale de c ?

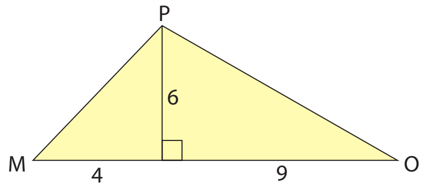
d) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$.

↳ Cours 3 p. 48

15 min

3 Calculer le produit de deux racines carrées

1. a) Quelle est l'aire du triangle POM ci-contre ?



b) Démontrer que POM est un triangle rectangle.

c) Calculer l'aire de ce triangle d'une autre manière.

d) En s'aidant des résultats trouvés aux questions **a)** et **c)**, écrire $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$ où c est un nombre entier.

e) Quelle est la décomposition en facteurs premiers de 6 084 ?
En déduire un moyen de calculer $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ d'une autre manière, sans utiliser la calculatrice.

f) Quel calcul aurait permis d'écrire facilement $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$, où c est un nombre entier, sans utiliser les aires des triangles ?

g) Conjecturer une formule de calcul du produit de deux racines carrées.

2. On va démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres a et b **positifs**. **Démonstration**

Pour cela, on va élever au carré chacun des termes de l'égalité.

a) Pourquoi a et b doivent-ils être positifs ?

b) Calculer $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ puis conclure.

↪ Cours 3 p. 48

15 min

4 Faire le point sur les nombres

1. Voici une liste de nombres :

$\frac{-457}{23}$; $4\sqrt{2}$; 854 ; $0{,}000\,08 \times 10^7$; $\sqrt{49}$; π ; $\frac{174}{58}$; $-0{,}000\,415\,7$; $-\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\frac{58}{4}$; 10^{-3}.

a) Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b) Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?

c) Y a-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire ?

d) Y a-t-il des nombres qui ne peuvent être classés dans aucune des catégories précédentes ?

2. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel **Démonstration**

$\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal. On se demande donc si c'est un nombre rationnel. On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cela signifie qu'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q (q non nul) : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

a) Démontrer que $2q^2 = p^2$.

b) Recopier et compléter les tableaux ci-dessous.

Si le chiffre des unités de p est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est :										

Si le chiffre des unités de q est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est :										
et le chiffre des unités de $2q^2$ est :										

c) En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont) le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de p et q quand $2q^2 = p^2$?

d) La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ? Que peut-on en déduire pour le nombre $\sqrt{2}$?

↪ Cours 4 p. 49

Cours

1 Multiples, diviseurs et nombres premiers

a Multiples et diviseurs

Définitions Multiple et diviseur

Soit a et b deux nombres entiers. S'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$, on dit que :
- **b divise a ou que b est un diviseur de a ;**
- **ou que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.**

Exemple

357 est divisible par 3 (car $3 + 5 + 7 = 15$ qui est divisible par 3 et $357 = 3 \times 119$) :
- 357 est divisible par 3 (et par 119) et 3 est un diviseur de 357 (et 119 aussi) ;
- 357 est donc un multiple de 3 (et de 119).

Remarques

① Si $a = bk$ alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul, c'est-à-dire que $\frac{a}{b}$ est un nombre entier.

② 1 et n sont des diviseurs de n.

Propriété Nombres pairs et impairs

Soit n un nombre entier.
n est pair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p$.
n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

Propriété Carré d'un nombre impair

Si n est impair alors n^2 est impair.

Démonstration

Soit n un nombre impair. Il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
$n^2 = (2p + 1)^2 = (2p + 1) \times (2p + 1) = 4p^2 + 2p + 2p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.
On pose $P = 2p^2 + 2p$ qui est un entier car p l'est.
$n^2 = 2P + 1$
Comme il existe un entier P tel que $n^2 = 2P + 1$, n^2 est aussi un nombre impair.

b Nombres premiers

Définition Nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Exemple

Voici la liste des 10 premiers nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Propriété Diviseur premier d'un entier

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier plus petit ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple

$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$.

Le plus petit diviseur de 12 est 2 qui est premier.

Chacun des diviseurs premiers de 12 est plus petit que $\sqrt{12}$ ($\sqrt{12} \approx 3{,}46$).

Propriété Décomposition d'un nombre entier

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

↪ Exercice résolu 1 p. 50

Définition Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur en commun : 1.

Exemple

$\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur commun de 5 et 3 est 1.

$\frac{12}{15}$ n'est pas une fraction irréductible car 3 est un diviseur commun à 12 et 15.

↪ Exercice résolu 1 p. 50

2 Puissances entières d'un nombre relatif

a Notations a^n et a^{-n}

Définition Puissances d'un nombre

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

Par convention, $a^0 = 1$.

a^n (lu « a puissance n ») est appelé puissance n-ième de a et n est appelé l'exposant.

Remarque En particulier, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Exemples

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

La décomposition de 12 en produits de facteurs premiers est $2 \times 2 \times 3$. On écrit $12 = 2^2 \times 3$.

Cours

b Calculs avec les puissances

Dans tout ce paragraphe, on considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

Règle Calculs avec les puissances

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\ (a \neq 0) \qquad (a^m)^p = a^{m \times p}$$

Démonstration

Si n et m sont positifs : $a^n \times a^m = \underbrace{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}}}_{n+m \text{ facteurs au total}} = a^{n+m}$

Exemples

$A = (-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^{4+3} = (-2)^7$

$B = 7^{-3} \times 7^{-7} = 7^{-3+(-7)} = 7^{-10}$

$C = (-2)^4 \times 5^4 = (-2 \times 5)^4 = (-10)^4$

$C = \dfrac{6}{6^{-3}} = \dfrac{6^1}{6^{-3}} = 6^{1-(-3)} = 6^4$

$E = 10^{-3\times(-7)} \times 10^{2\times(-3)} = 10^{21} \times 10^{-6} = 10^{21+(-6)} = 10^{15}$

Remarque Attention, il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction de puissances.

Exemples

$5^3 + 5^{-2} = 5 \times 5 \times 5 + \dfrac{1}{5 \times 5} = 125 + \dfrac{1}{25} = 125{,}04$

$5^{3-2} = 5^1 = 5$ et $5^3 + 5^{-2} \neq 5^{3-2}$

Exercice résolu 2 p. 51

3 Racine carrée

a Définitions

Définition Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a :
$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Définition Carré parfait

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Remarques

Le carré d'un nombre est toujours positif.
Lorsque a est un nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a donc pas de sens.

Exemples

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ et 1 est positif.

$3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$.

$\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2 = 3{,}6$ car $3{,}6 > 0$.

2 est positif donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Règle Racine d'un carré

Pour tout nombre a, $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.

Exemples

$\sqrt{(1{,}3) \times (1{,}3)} = 1{,}3$ car 1,3 est positif.

$\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$ car -5 est négatif. En effet, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$.

b Calculs avec les racines carrées

Règle Calculs avec les racines carrées

Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$.

Exemples

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$

Exercice résolu 4 p. 53

Remarque Attention, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$.

En effet, on a par exemple $25 = 16 + 9$, mais $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{25} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

4 Ensemble de nombres

Définitions Ensemble de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}$.
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif : $\mathbb{Z} = \{\dots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$.
- L'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.
- L'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ avec a un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Exemples

$\dfrac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\dfrac{6}{3} = 2$ $\qquad$ $-45 \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $12{,}45 \in \mathbb{D}$ car $12{,}45 = \dfrac{1\,245}{100} = \dfrac{1\,245}{10^2}$ $\qquad$ $\dfrac{-17}{11} \in \mathbb{Q}$ par définition

Définition Nombres réels

Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.
L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'**ensemble des nombres réels** et se note $\mathbb{R}$.
Un tel axe est appelé **droite des réels**.

Propriété Inclusion des ensembles de nombres

Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont des nombres décimaux qui sont des quotients : $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q}$.

Exemples

- D'après l'activité 1, on peut construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ et ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.
- L'écriture décimale de π n'est pas périodique, ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.

Propriété Nature des racines carrées

Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait soit un irrationnel.

Exemple

$\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel et $\sqrt{9}$ est un nombre entier.

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-04

1 Utiliser les nombres premiers

Cours 1 p. 46

1. Parmi les nombres suivants, indiquer les nombres premiers et donner une décomposition en produit de facteurs premiers des nombres qui ne sont pas premiers.

a) 373

b) 4 312

c) 1 008

2. Rendre $\frac{4\,312}{1008}$ irréductible.

Solution

1. a) $\sqrt{373} \approx 19{,}3$ 1

373 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 qui sont les nombres premiers plus petit que 19,3.
373 est donc un nombre premier.

b) 4 312 est divisible par 2. 4 312 n'est pas un nombre premier.

4 312	2 (4 312 ÷ 2 = 2 156) ⟶ On réitère la procédure avec 2 156.
2 156	2 (2 156 ÷ 2 = 1 078) ⟶ 2 est un diviseur évident.
1 078	2 (1 078 ÷ 2 = 539)
539	7 (539 ÷ 7 = 77)
77	7 (77 = 7 × 11)
11	11 est premier, c'est la fin de la recherche.

$4\,312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

c) 1 008 est divisible par 2. 1 008 n'est pas un nombre premier.

1 008	2 (1 008 ÷ 2 = 504)
504	2 (504 ÷ 2 = 252)
252	2 (252 ÷ 2 = 126)
126	2 (126 ÷ 2 = 63)
63	3^2 ($63 = 3^2 \times 7$)
7	7 est un nombre premier.

$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$

2. $\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 11}{2^4 \times 3^2 \times 7}$ 2

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{7 \times 11}{2 \times 3^2}$

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{77}{18}$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer si un nombre N est premier :
- on utilise les critères de divisibilité pour déterminer les diviseurs évidents de N ;
- on teste si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{N}$ divisent N.

Soit N n'a aucun diviseur autre que 1 et lui-même : N est premier.

Soit N admet un diviseur premier : N n'est pas premier.

2 Une fraction est irréductible si « elle ne se simplifie plus ». Pour rendre une fraction irréductible, on écrit la décomposition en facteurs premiers du numérateur et dénominateur, puis on utilise les règles de calculs des puissances pour simplifier la fraction. Ici on simplifie la fraction par 2^3 et 7.

À vous de jouer !

1 Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers : 821 ; 861 ; 762 ; 83 ; 1 023 ?

2 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 2 835 **b)** 1 323 **c)** 1 001 **d)** 45 600

3 Simplifier chaque fraction pour obtenir une fraction irréductible.

a) $\dfrac{540}{506}$ **b)** $\dfrac{45\,600}{7\,650}$ **c)** $\dfrac{12\,789}{5\,481}$

Exercices 32 à 38 p. 54

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-04

2 Calculer avec les puissances

Cours 2 p. 47

Effectuer les calculs suivants.

$A = 2^4 \times 2^{-3}$ $\quad B = \dfrac{3^4}{3^{-7}}$ $\quad C = \dfrac{(-4)^2}{(-4)^6}$

$D = \dfrac{5^{-2} \times 5^{-7}}{5^6}$ $\quad E = \dfrac{(5-2\times 3)^4}{(2-3)^5}$ $\quad F = \dfrac{12 \times 10^4 \times 5 \times 10^6}{15 \times 10^3 \times 2 \times 10^2}$

Solution

$A = 2^4 \times 2^{-3}$ **1**
$A = 2^{4-3}$
$A = 2^1$
$A = 2$

$B = \dfrac{3^4}{3^{-7}}$ **2**
$B = 3^{4-(-7)}$
$B = 3^{11}$

$C = \dfrac{(-4)^2}{(-4)^6}$ **3**
$C = (-4)^{2-6}$
$C = (-4)^4$

$D = \dfrac{5^{-2} \times 5^{-7}}{5^6}$
$D = 5^{-2+(-7)-6}$
$D = 5^{-15}$

$E = \dfrac{(5-2\times 3)^4}{(2-3)^5}$ **4**
$E = \dfrac{(-1)^4}{(-1)^5}$
$E = \dfrac{1}{-1}$ **5**
$E = -1$

$F = \dfrac{12 \times 5 \times 10^{-4+6}}{15 \times 2 \times 10^{3+2}}$ **6**
$F = \dfrac{60 \times 10^2}{30 \times 10^5}$
$F = \dfrac{60}{30} \times 10^{2-5}$
$F = 2 \times 10^{-3}$ **7**
$F = 0{,}002$ **8**

Conseils & Méthodes

1 Pour calculer A, on applique la règle du produit de deux puissances.

2 Pour calculer B, on applique la règle du quotient de deux puissances en faisant attention au signe négatif au dénominateur.

3 Il ne faut pas confondre le signe – de l'exposant (cas du calcul de B) et une puissance d'un nombre négatif (ici –4).

4 Pour calculer E, on commence par effectuer les calculs entre parenthèses en respectant les priorités opératoires.

5 $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$ et $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$.
Plus généralement :
- $(-1)^n = 1$ si le nombre de (-1) est pair ;
- $(-1)^n = -1$ si le nombre de (-1) est impair.

Le nombre de (-1) est donné par l'exposant.

6 Pour calculer F, on commence par calculer les produits d'entiers et les produits de puissances, puis on effectue le quotient des entiers et des puissances.

7 Il s'agit de l'écriture scientifique du nombre F.

8 Il s'agit de l'écriture décimale du nombre F.

À vous de jouer !

4 Effectuer les calculs suivants.

$A = 5^{-7} \times 5^{-3}$ $\quad B = 6^{12} \times 6^{-10}$

$C = \dfrac{21^{-13}}{21^{10}}$ $\quad D = \dfrac{-5^4}{5^{-3}}$ $\quad E = (8^3)^2$

5 Effectuer les calculs suivants.

$E = \dfrac{2^{-4} \times 2^9}{2^5 \times 2^{-7}}$

$F = \dfrac{((-3)^4)^{-2} \times (-3)}{(-3)^{-3}}$

$G = \left(\dfrac{7^{13} \times 7^{-9}}{7^{-14} \times 7^{-8}}\right)^2$

6 Effectuer les calculs suivants.

$H = 45 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-26}$

$I = 9{,}35 \times 10^{-12} + 0{,}047 \times 10^{-10} - 51{,}3 \times 10^{-14}$

$J = 2\,500\,000\,000^2$

$K = \dfrac{14 \times 10^7 \times 27 \times 10^{-3}}{21 \times 10^2}$

$L = \dfrac{49 \times 10^{-7} \times 6 \times 10^5}{3 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-2}}$

Exercices 45 à 50 p. 55

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-04

3 Calculer avec les quotients

Effectuer les calculs suivants.

$A=-\dfrac{13}{8}-\dfrac{5}{24}$ $\quad B=\dfrac{24}{35}\times\dfrac{14}{36}$ $\quad C=\dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}}$ $\quad D=\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{4}\times\dfrac{7}{8}$

Solution

$$A=-\frac{13}{8}-\frac{5}{24} \quad \boxed{1}$$
$$A=\frac{-13\times 3}{8\times 3}-\frac{5}{24}$$
$$A=\frac{-39}{24}-\frac{5}{24}$$
$$A=\frac{-39-5}{24}$$
$$A=\frac{-44}{24} \quad \boxed{2}$$
$$A=\frac{-11}{6}$$

$$B=\frac{24}{35}\times\frac{14}{36} \quad \boxed{3}$$
$$B=\frac{24\times 14}{35\times 36}$$
$$B=\frac{6\times 4\times 7\times 2}{7\times 5\times 6\times 3\times 2}$$
$$B=\frac{4}{5\times 3}$$
$$B=\frac{4}{15}$$

$$C=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}} \quad \boxed{4}$$
$$C=\frac{15}{4}\times\frac{16}{21}$$
$$C=\frac{15\times 16}{4\times 21}$$
$$C=\frac{5\times 3\times 4\times 4}{4\times 7\times 3}$$
$$C=\frac{20}{7}$$

$$D=\frac{5}{4}-\frac{7}{4}\times\frac{7}{8} \quad \boxed{5}$$
$$D=\frac{5}{4}-\frac{49}{32}$$
$$D=\frac{40}{32}-\frac{49}{32}$$
$$D=-\frac{9}{32}$$

Conseils & Méthodes

1 Pour A, on reconnaît une somme. Pour additionner deux fractions, on réduit au même dénominateur, puis on applique la règle de l'addition de deux fractions.

2 Il faut penser à simplifier.

3 Pour B, on reconnaît un produit. On effectue le calcul puis on décompose chaque produit en vue de simplifier la fraction. On simplifie alors par $6\times 7\times 2$.

4 Pour C, on reconnaît une division de deux fractions et on effectue les calculs.

5 Dans un calcul sans parenthèses, comme pour D, on effectue d'abord les produits.

À vous de jouer !

7 Effectuer les sommes suivantes.

$A=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{5}{14}$ $\quad B=\dfrac{8}{35}+\dfrac{6}{15}$ $\quad C=\dfrac{23}{26}-\dfrac{12}{39}$

8 Effectuer les produits suivants.

$D=-\dfrac{63}{30}\times\dfrac{60}{-4}$ $\quad E=\dfrac{10}{15}\times\dfrac{7}{20}$ $\quad F=-\dfrac{5}{12}\times\dfrac{18}{13}$

9 Effectuer les divisions suivantes.

$G=\dfrac{\frac{21}{-24}}{\frac{14}{-32}}$ $\quad H=\dfrac{\frac{45}{18}}{12}$ $\quad I=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$

10 Effectuer les calculs suivants.

$A=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\frac{7}{3}\times 8}{21}$ $\quad B=\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\times 3}{2}$

$C=\dfrac{\left(\frac{24}{15}+\frac{35}{25}\right)\times 20}{33}$ $\quad D=\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$

Exercices 51 à 55 p. 55-56

4 Calculer avec les racines carrées

Cours 3 p. 48

1. Donner la valeur exacte de $E = \dfrac{\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt{7}}$ et $F = \sqrt{20}$.

2. Écrire $G = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

3. Écrire $H = \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

4. Écrire $I = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Solution

1. $E = \dfrac{\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt{7}}$ **1**

$E = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{7}}$

$E = \sqrt{\dfrac{49}{7}}$

$E = \sqrt{7}$

$F = \sqrt{20}$ **2**

$F = \sqrt{4 \times 5}$

$F = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$

$F = 2\sqrt{5}$

2. $G = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ **3**

$G = \sqrt{4 \times 3} \times \sqrt{3 \times 10}$

$G = \sqrt{4} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}$

$G = 2 \times 3 \times \sqrt{10}$

$G = 6\sqrt{10}$

3. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$ **4**

$\sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3}$

$\sqrt{48} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$H = \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$

$H = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$H = \sqrt{3}(4 + 5)$

$H = 9\sqrt{3}$

4. $I = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **5**

$I = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$I = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Conseils & Méthodes

1 Pour E, on utilise les règles de calculs sur le quotient de deux racines carrées.

2 Pour F, on décompose 20 en un produit où un facteur est un carré parfait (ici 4) et on utilise les règles de calculs sur le produit de deux racines carrées.

3 G est un produit de racines carrées : on commence par décomposer chacune des racines carrées dans l'objectif de faire apparaître des racines carrées identiques ou des carrées parfaits.

4 H est une somme de racines carrées : on décompose 48 et 75 sous la forme d'un produit d'un carré parfait par un entier puis on applique la définition d'une racine carrée.

5 Pour I, on multiplie par $\sqrt{3}$ le numérateur et le dénominateur.

À vous de jouer !

11 Calculer $G = \sqrt{\dfrac{15}{45}}$; $H = \dfrac{50}{2\sqrt{25}}$; $I = \sqrt{\dfrac{121}{49}}$.

12 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier et b un entier positif, le plus petit possible.

$A = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ $B = \sqrt{7} \times \sqrt{28} \times \sqrt{63}$

$C = 5\sqrt{26} \times \sqrt{2}$ $D = \dfrac{\sqrt{480}}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}}$

13 Écrire les nombres sans radical au dénominateur.

$M = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$ $N = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $P = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

14 Écrire $E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$ et $F = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

Exercices 56 à 63 p. 56

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

15 Choisir deux fractions composées d'au moins deux nombres négatifs. Les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser. Vérifier les résultats à la calculatrice.

16 Comment multiplier deux puissances d'un même nombre ? Par exemple, $2^5 \times 2^{-3}$.

17 Comment additionner deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} + \sqrt{40}$.

18 Comment multiplier deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} \times \sqrt{40}$.

19 Comment écrire un quotient sans racines carrées au dénominateur ? Par exemple, $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

20 Répondre aux questions suivantes en justifiant.
a) 4 est-il un diviseur de 28 ?
b) 32 est-il un multiple de 6 ?
c) 4 divise-t-il 18 ?
d) 35 est-il divisible par 5 ?

21 **1.** Décomposer 204 et 595 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\dfrac{204}{595}$.

22 Décomposer puis donner l'écriture fractionnaire ou entière en calculant à la main.
a) 2^{-5} **b)** 5^{-1} **c)** 4^{-3}

23 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
$A = 8^2 \times 8 \times 8^7$ $B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$ $C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

24 Effectuer les calculs suivants.
a) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{-1}{3}$ **b)** $\dfrac{-3}{10} \times \dfrac{-11}{3}$ **c)** $\dfrac{8}{-1} \div \dfrac{-4}{5}$

25 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.
a) $\sqrt{3^2}$ **b)** $(-\sqrt{16})^2$ **c)** $\sqrt{(-7)^2}$

26 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.
a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$

27 Déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient :
a) $\dfrac{3}{2}$ **b)** $\dfrac{11}{3}$ **c)** $\dfrac{8}{2}$ **d)** $\sqrt{9}$ **e)** $\sqrt{11}$

Multiples et diviseurs

AP

28 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $\overline{65u}$ où u représente le chiffre des unités.
Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :
a) un multiple de 2 ?
b) un nombre divisible par 9 ?

29 Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

30 Écrire la liste de tous les diviseurs de :
a) 32 **b)** 67 **c)** 81 **d)** 144

31 Répondre par Vrai ou Faux. Justifier.
a) Tout nombre qui a pour chiffre des unités 3 est divisible par 3.
b) Tout nombre divisible par 4 et 5 est divisible par 10.
c) Tout nombre divisible par 3 et 2 est divisible par 5.
d) Tout nombre divisible par 2 est divisible par 4.

Nombres premiers

32 Parmi les nombres entiers naturels suivants, chercher ceux qui sont des nombres premiers. AP
a) 157 **b)** 231 **c)** 311 **d)** 468

33 Parmi les nombres ci-dessous, indiquer ceux qui ne sont pas des nombres premiers.
a) 19 **b)** 169 **c)** 1 009 **d)** 127
e) 558 **f)** 615 **g)** 2 367 **h)** 14 674

34 Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers.
a) 215 **b)** 507 **c)** 1 868 **d)** 1 431

35 Pour chaque nombre entier, indiquer s'il est premier ou donner sa décomposition en produit de facteurs premiers.
a) 32 **b)** 59 **c)** 115 **d)** 187
e) 227 **f)** 303 **g)** 503 **h)** 667

36 Simplifier au maximum chaque fraction.
a) $\dfrac{48}{56}$ **b)** $\dfrac{56}{63}$ **c)** $\dfrac{63}{48}$ **d)** $\dfrac{650}{800}$

37 **1.** Décomposer 800 et 650 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\dfrac{650}{800}$.

38 **1.** Décomposer 2 261 et 323 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\dfrac{2261}{323}$.
3. Effectuer $\dfrac{2261}{323} + \dfrac{7}{49}$.

Résolution de problèmes arithmétiques

39 Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre, simultanément, puis un deuxième six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifier.

Démonstrations

40 **1.** Démontrer que si un entier est multiple de 15, alors il est aussi multiple de 3 et de 5.
2. La réciproque semble-t-elle vraie ?

41 **1.** 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.
2. En utilisant la question **1.**, démontrer que 6 335 est divisible par 7.
3. Démontrer, dans le cas général, que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x+y$ est divisible par 7.
4. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6 349 147 est un multiple de 7.

42 Démontrer que si a^2 est pair alors a est pair.

43 Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

44 **1.** Donner une écriture littérale des multiples de 18.
2. Démontrer que si un entier est multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6.
3. La réciproque est-elle vraie ?
Justifier.

Calculs avec les puissances

45 **1.** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$
$B = 625 \times 512$
2. Écrire sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$E = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ $\qquad F = \dfrac{25}{16}$

46 Recopier et compléter.
a) $12^{-5} = \dfrac{1}{12^{\cdots}}$ **b)** $7^{\cdots} = \dfrac{1}{7^5}$
c) $8^{-6} = \dfrac{1}{8^{\cdots}}$ **d)** $\dfrac{1}{9^{\cdots}} = 9^{-23}$
e) $1{,}5^2 = \dfrac{1}{1{,}5^{\cdots}}$ **f)** $(-7)^3 = \dfrac{1}{(-7)^{\cdots}}$

47 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $5^2 \times 5^4$ **b)** $6^5 \times 6^{-8}$ **c)** $3^4 \times 5^4$
d) $2{,}5^{-7} \times 4{,}2^{-7}$ **e)** $-4 \times (-4)^{-7}$ **f)** $(-2)^{-3} \times (-2)^5$

48 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $\dfrac{3^8}{3^{-4}}$ **b)** $\dfrac{6^5}{3^5}$ **c)** $\dfrac{4^6}{4^2}$
d) $\dfrac{(-4{,}5)^4}{3^4}$ **e)** $\dfrac{9^{-3}}{(-2{,}5)^{-3}}$ **f)** $\dfrac{3{,}2^{-5}}{3{,}2^{-2}}$

49 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
a) $2{,}8 \times 2{,}8^{-3}$ **b)** $\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}$ **c)** $\left((-3{,}7)^{-2}\right)^5$
d) $\dfrac{7^{-3}}{2^{-3}}$ **e)** $\left((5{,}6)^{-4}\right)^{-2}$ **f)** $10^7 \times 10^{-7}$
g) $(-6)^8 \times (-6)^{-3}$ **h)** $5{,}3^{-6} \times 4^{-6}$ **i)** $\dfrac{(-4{,}2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$

50 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$
$B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$
$C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

Calculs avec les quotients **AP**

51 Effectuer les calculs suivants en détaillant les étapes et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{42}{75} - \left(-\dfrac{22}{30}\right)$ **b)** $\dfrac{85}{4} + \dfrac{25}{-5}$
c) $\dfrac{-1}{25} - 8$ **d)** $-\dfrac{14}{27} + \dfrac{-5}{108}$

52 Effectuer les calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{3}{-7}$ **b)** $\dfrac{5}{-7} \times \left(-\dfrac{7}{5}\right)$
c) $-15 \times \dfrac{2}{15}$ **d)** $\left(-\dfrac{8}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \times 3$

Exercices d'application

53 Effectuer les calculs et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{-4}{45} \div \frac{16}{15}$ **b)** $\frac{-5}{6} \div \left(-\frac{15}{18}\right)$

c) $12 \div \frac{3}{-4}$ **d)** $1 \div \left(\frac{-7}{4}\right)$

54 Écrire les quotients suivants en utilisant le symbole ÷ puis effectuer le calcul.

$A = \frac{2}{\frac{3}{5}}$ $B = \frac{\frac{2}{3}}{5}$ $C = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}$

55 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$D = 11 \div \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)$ $E = \left(\frac{11}{7} - \frac{2}{5}\right) \times \frac{24}{7}$

Calculs avec les racines carrées

56 Déterminer, si possible, la racine carrée des nombres suivants.

a) 100 **b)** 9 **c)** –36 **d)** $(-8)^2$
e) 169 **f)** –1 **g)** –52 **h)** π

57 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.

a) $\left(\sqrt{25}\right)^2$ **b)** $\sqrt{3^2}$ **c)** $\left(-\sqrt{16}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{0{,}14}\right)^2$ **e)** $\sqrt{(-7)^2}$ **f)** $\sqrt{0{,}4^2}$

58 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{75}$

c) $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$ **d)** $\sqrt{108}$

59 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{75}$ **c)** $\sqrt{500}$ **d)** $\sqrt{80}$

e) $-\sqrt{48}$ **f)** $5\sqrt{18}$ **g)** $-4\sqrt{32}$

60 Écrire sans radical les expressions suivantes.

a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{16}}$ **c)** $\sqrt{\frac{49}{25}}$ **d)** $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{49}{64}}$

61 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

c) $\sqrt{7} \times 3\sqrt{14}$ **d)** $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{70}$

62 Sans utiliser de calculatrice, transformer les expressions suivantes de façon à obtenir la racine carrée d'une fraction irréductible.

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}}$ **b)** $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{75}}$

c) $\frac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}$ **d)** $\sqrt{\frac{28}{42}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$

63 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers.

$A = \sqrt{81} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $B = \sqrt{3}\,(5 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 3)$

Calculs et automatismes

64 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \frac{\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{5}{5}\right)}{3}$$

$$B = \frac{25}{8} \times \frac{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}}{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}} \div \frac{25}{8}$$

$$C = \frac{12}{9 + \frac{8}{7 + \frac{6}{5 + \frac{4}{3 + \frac{2}{1+1}}}}}$$

$$D = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{7} - \frac{8}{9}}{\frac{8}{9} - \frac{3}{7}}$$

65 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

$A = \sqrt{8}$ $E = \sqrt{49}$

$B = \sqrt{20}$ $F = \sqrt{300}$

$C = \sqrt{75}$ $G = \sqrt{810}$

$D = \sqrt{10}$ $H = \sqrt{27}$

Arithmétique

66 Un fleuriste dispose de 30 tulipes et 24 muscaris. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre de muscaris, et utiliser toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.
1. Expliquer pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 30 et 24.
2. Déterminer les diviseurs de 30 et 24.
3. Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ? Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

67 Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.
1. Peut-il y avoir vingt joueurs ? neuf joueurs ?
2. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donner toutes les possibilités.

68 La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.
Quels sont ces quatre entiers ?

Démonstrations

69 On veut démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.
1. Combien faut-il ajouter à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit ?
2. Donner les écritures littérales de deux entiers naturels impairs consécutifs.
3. Montrer que leur somme peut s'écrire $4m$, où m est un entier naturel, puis conclure.

70 n est un entier naturel.
1. Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.
2. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?
3. Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

71 **Algo & Prog** On veut déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b.
1. Quelle opération permet de trouver le résultat ?
2. Quelle condition portant sur le résultat permet de conclure ?
3. Proposer un programme qui détermine, à partir de deux entiers a et b, si a est un multiple de b.

72 **Algo & Prog** Déterminer un algorithme qui permet de déterminer, à partir de deux entiers a et b, si a est un diviseur de b.

73 **Algo & Prog** **1.** Écrire un programme qui écrit les dix premiers multiples d'un entier a.
2. Modifier le programme pour qu'il détermine le plus grand multiple de a inférieur à un nombre b donné.

74 a est un chiffre, on veut démontrer que le nombre $\overline{a00a}$ est divisible par 143.
(Pour $a = 4$, le nombre est 4 004.)
1. Vérifier cette affirmation avec $a = 1$ puis avec $a = 2$.
2. Écrire la division euclidienne de $\overline{a00a}$ par 10.
3. Démontrer cette affirmation dans le cas général.

Calculs avec les puissances

75 Le cerveau humain est composé de 100 milliards de neurones. À partir de 30 ans, ce nombre de neurones baisse d'environ 100 000 par jour. En considérant qu'une année contient 365 jours, donner l'écriture décimale puis scientifique du nombre de neurones d'un humain âgé de 40 ans.

76 **Physique** La lumière est composée de photons qui se déplacent à la vitesse moyenne de 300 000 km par seconde. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par un de ces photons en une année.
1. À quelle distance, en km, correspond une année-lumière ? Écrire la réponse en notation scientifique.
2. La distance du centre du Soleil au centre de la Terre est de $1{,}5 \times 10^8$ km. Exprimer cette distance en année-lumière.

77 *(D'après Brevet)* **1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.
$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$
2. Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif : $B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$.
3. Calculer C et donner le résultat en écriture scientifique.
$$C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$$
4. Donner les écritures décimale et scientifique de $D = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$.

78 Donner un encadrement par deux puissances de 10 consécutives :
a) en nombre d'années, de l'âge de la Terre qui est d'environ 4,5 milliards d'années.
b) en mètre, de la largeur d'une bactérie qui peut atteindre 3 µm.
c) en Hertz, de la fréquence d'un processeur tournant à 4,1 GHz.

Exercices d'entraînement

79 Algo & Prog **1.** Écrire un programme qui donne les 10 premières puissances d'un entier a.
2. Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus grande puissance de a inférieure à un nombre b donné.
3. Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus petite puissance de a supérieure à un nombre b donné.
4. À partir des programmes écrits aux questions **2.** et **3.**, écrire un programme qui détermine la première puissance d'un nombre positif a supérieure ou inférieure à une valeur donnée b.

80 **1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.
$A = \dfrac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$
2. Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif.
$B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$
3. Calculer et donner le résultat en écriture scientifique de
$C = \dfrac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$.
4. Donner les écritures décimale et scientifique de
$D = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$.

81 Écrire chaque nombre relatif en notation scientifique.
a) 6 540 **b)** 0,003 2 **c)** – 1 475,2
d) 23,45 **e)** –34,3 **f)** –0,001

82 Écrire chaque nombre relatif en notation scientifique.
a) $645{,}3 \times 10^{-15}$ **b)** $0{,}056 \times 10^{17}$
c) $-13{,}6 \times 10^{-8}$ **d)** -523×10^7

83 On donne l'expression numérique
$A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$.
1. Donner l'écriture décimale de A.
2. Donner l'écriture scientifique de A.
3. Écrire A sous la forme d'un produit d'un nombre entier par une puissance de 10.
4. Écrire A sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction irréductible inférieure à 1.

84 Calculer chaque expression et donner le résultat en notation scientifique.
$A = 45 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-26}$ $B = 2\,500\,000\,000^2$
$c = \dfrac{36 \times 10^{15}}{3 \times 10^{-17}}$ $D = \dfrac{-48{,}8 \times 10^{23}}{-4 \times 10^{15}}$

85 Chimie Une mole de carbone pèse 12 g et est composée de $6{,}02 \times 10^{23}$ atomes.
Quelle est la masse d'un atome de carbone ?

86 Physique La lumière se propage à la vitesse moyenne d'environ 3×10^5 km par seconde.
1. Calculer la distance parcourue par la lumière en une année. Utiliser la notation scientifique et arrondir le nombre décimal au dixième.
2. Des astronomes ont observé l'extinction d'une étoile et ils ont estimé que cet événement s'est produit il y a environ 5 000 ans.
Calculer la distance en kilomètres séparant cette étoile de la Terre. Utiliser la notation scientifique.

87 **1.** Quel est le chiffre des unités de 13^1 ? celui de 13^2 ? de 13^3 ? de 13^4 ? de 13^5 ?
2. Quel est le chiffre des unités de $13^{2\,000}$?

Calculs avec les quotients

88 Effectuer les calculs suivants en respectant les priorités opératoires.
$A = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{-4}{3} + \dfrac{7}{2}$ $B = \dfrac{13}{7} + \left(-\dfrac{8}{7}\right) \div \left(-\dfrac{4}{5}\right)$
$C = \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{3}\right)$ $D = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{8} \times \dfrac{7}{9}$

89 Calculer puis simplifier au maximum le résultat.
$A = \dfrac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3}}$ $B = 2 + \dfrac{\dfrac{2}{7}}{\dfrac{5}{14}}$ $C = -\dfrac{3}{14} - \dfrac{3}{\dfrac{7}{5}} + 2$
$D = \dfrac{7}{5} + \dfrac{\dfrac{8}{15}}{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{19}{2}$ $E = \dfrac{3 - \dfrac{7}{5}}{1 - \dfrac{9}{10}}$ $F = \dfrac{7}{-8} + \dfrac{\dfrac{5}{6}}{4} - 1$

90 Le train Marseille-Lille part de la gare de Marseille avec 800 passagers. Un quart d'entre eux voyagent en 1re classe et le reste en 2de classe. Les trois huitièmes des passagers de la 1re classe et le sixième des passagers de la 2de classe descendent en gare de Lyon.
1. Au départ de Marseille, quel est le nombre de passagers en 1re classe ? en 2de classe ?
2. En déduire le nombre de personnes de 1re classe puis de 2de classe descendant en gare de Lyon.
3. Exprimer alors à l'aide d'une fraction simplifiée la proportion des passagers de 1re classe puis de ceux de 2de classe descendant en gare de Lyon par rapport au total des voyageurs.

91 La longueur et la largeur d'un rectangle ont été multipliées respectivement par $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

1. Par quel nombre l'aire du rectangle initial a-t-elle été multipliée (donner le résultat sous la forme d'une fraction) ?
2. Par quelle fraction le périmètre du rectangle initial a-t-il été multiplié, sachant que sa longueur mesure 7 cm et sa largeur mesure 4 cm ?

92 Anne-Cécile rend visite à plusieurs amis à son retour d'Australie. À chaque fois, ses amis lui offrent gentiment un morceau de son gâteau préféré.
Le premier jour, gourmande, elle mange un demi-gâteau chez Sophie. Le lendemain, Marie lui donne un quart de gâteau. Plus raisonnable, le troisième jour, elle prend juste un huitième de gâteau avec Mathieu et, le quatrième jour, un seizième avec Franck.
Le cinquième jour, elle prend juste un trente-deuxième de gâteau chez Hafid, pour lui faire plaisir.

1. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?
2. En continuant ainsi, parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

93 Le volume V d'un tonneau est donné par la formule suivante :

$$V = \pi L\left[\frac{d}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right)\right]^2.$$

1. Calculer le volume de ce tonneau en m^3. Donner la valeur approchée à 0,001 m^3 par excès, puis en litres, à 1 litre près par excès, sachant que :
L = 1,60 m ; d = 0,85 m ; D = 1,34 m.
2. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin.
Combien de bouteilles de 75 cL pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin rouge ?

94 Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2016 puis le tiers du reste en 2019.
Quelle fraction de sa propriété lui reste-t-il aujourd'hui ?

95 L'air est constitué principalement d'azote et d'oxygène. Dans un volume d'air donné, le volume d'azote correspond à 78,6 % du volume total et celui d'oxygène à 20,9 %.
Sachant qu'une salle de classe a un volume de 125 m^3, calculer le volume, en m^3, de chacun des gaz présents dans cette salle.

Calculs avec les racines carrées

96 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec b le plus petit possible.

$A = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 7\sqrt{8}$
$B = \sqrt{20} - 8\sqrt{45} + 2\sqrt{5}$
$C = \sqrt{12} + \sqrt{75} + 4\sqrt{300}$
$D = 5\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{7}$

97 Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers relatifs, avec c le plus petit possible.

$A = 7 - \sqrt{12} - 8 + 3\sqrt{27}$
$B = 3\sqrt{50} - \sqrt{49} + 2\sqrt{8}$
$C = 2\sqrt{18} + \sqrt{16} - 7\sqrt{81}$

98 Écrire les quotients suivants avec un dénominateur entier.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

99 *(Extrait du brevet)* Soit $a = 2\sqrt{45}$ et $b = \sqrt{80}$.
1. Calculer $a + b$.
Donner le résultat sous la forme $c\sqrt{d}$ où d est un entier le plus petit possible.
2. Calculer ab.
3. Le nombre a est-il solution de l'équation
$x^2 - 2x - 180 = -12$? Justifier.

100 *(Extrait du brevet)* Soit $a = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $b = 5 + \sqrt{2}$.
1. Calculer a^2 et b^2.
2. En déduire les valeurs de $a^2 + b^2$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

101 Développer et simplifier les expressions suivantes.

$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $B = \sqrt{18}\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{18}}{18}\right)$

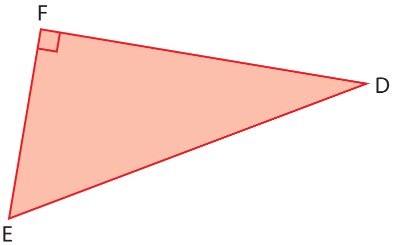
$C = \sqrt{3}\left(2 - 5\sqrt{3}\right)$ $D = 5\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 7\sqrt{18}\right)$

$E = \left(\sqrt{6} + 2\right)\sqrt{2}$ $F = 2\sqrt{12}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$

102 Soit ABC un triangle rectangle en A.
1. Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [BC] sachant que AB = 5 cm et AC = 7 cm.
2. Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [AB] sachant que AC = 6 m et BC = 11 m.

Exercices d'entraînement

103 EDF est un triangle rectangle en F.
On donne $ED = 5\sqrt{2}$ cm et $DF = 3\sqrt{2}$ cm.



1. Déterminer la valeur exacte de EF.
Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier positif.
2. Donner la valeur exacte du périmètre du triangle EDF, puis l'arrondi au millimètre.

104 L'unité choisie est le centimètre.
On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{75}$ et pour largeur $\sqrt{48}$.
1. Déterminer le périmètre exact de ce rectangle.
Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.
2. Calculer l'aire exacte du rectangle.
Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

Ensembles de nombres

Démonstration

105 **1.** Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a entier.
$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$
$B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$
2. *(D'après Brevet.)* Démontrer que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

106 *(D'après Brevet)*
Soit $D = \dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$.
À quel ensemble le nombre D appartient-il ?

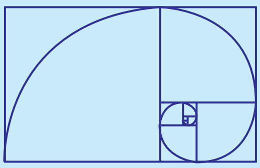
107 *(D'après Brevet)*
On pose $M = \dfrac{20\,755}{9488} - \dfrac{3}{8}$.
1. Écrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Le nombre M est-il décimal ?
Est-il rationnel ? Justifier.

Travailler autrement

108 Chaque groupe présentera au reste de la classe ses recherches sur un des thèmes proposés autour du nombre d'or φ.

En groupe

Thème 1 : Le rectangle d'or
1. Rechercher ce qu'on appelle un rectangle d'or et écrire son programme de construction.
2. Construire un rectangle d'or sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.



Thème 2 : Le pentagone régulier
1. Rechercher le lien unissant le nombre d'or, un pentagone régulier et son pentagramme.
2. Construire un pentagone régulier et son pentagramme sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.

Thème 3 : Les racines continuées
1. Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au dix-millième près de chacun des termes de la suite de nombres suivante.

$A = \sqrt{1+\sqrt{1}}$ $\quad B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

Écrire D, le terme suivant de cette suite, puis calculer sa valeur exacte et une valeur approchée.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les six termes suivants de la suite.
Que peut-on remarquer ?

Thème 4 : La suite de Fibonacci
1. Rechercher qui était Fibonacci (époque et lieu où il a vécu, ses travaux...) et la méthode de calculs des termes de sa suite.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les vingt premiers termes de la suite de Fibonacci.
3. Calculer le rapport de deux termes successifs. Que peut-on remarquer ?

Thème 5 : φ dans l'art et dans la nature
1. Étudier le rôle du nombre d'or φ à travers l'histoire.
2. Sur Internet, rechercher différents exemples dans la nature où φ est mis en évidence.
3. Sur Internet, rechercher différentes œuvres d'art (peinture, sculpture, architecture) où φ intervient.

109 Quotient et ensemble de nombres

1. Soit $G = \dfrac{3575}{4225}$.
Écrire G sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Soit $H = G + \dfrac{4}{26}$.
À quel ensemble de nombres H appartient-il ?

110 Fraction irréductible

Calculer $J = \dfrac{575}{161} - \dfrac{45}{21}$.
Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

111 Calcul et quotients

1. Soit $A = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3} \div \dfrac{20}{21}$.
Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Calculer $B = \left(2 + \dfrac{2}{3}\right) \div \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3}\right)$.

3. Déterminer le plus petit ensemble de nombres qui contient A.

4. Même question avec B.

112 Masse d'un atome

Chimie

(D'après Brevet) La masse d'un atome de carbone est égale à $1{,}99 \times 10^{-26}$ kg.
Les chimistes considèrent des paquets contenant $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes.

1. Calculer la masse, en grammes, d'un tel paquet d'atomes de carbone.

2. Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

Démonstration

113 Simplification de racines carrées

(D'après Brevet) Soit $D = \dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$.
Montrer que D est un nombre entier.

114 Biologie

(D'après Brevet) Le cœur humain effectue environ 5 000 battements par heure.

1. Écrire 5 000 en notation scientifique.

2. Calculer le nombre de battements effectués en un jour, sachant qu'un jour dure 24 heures.

3. Calculer le nombre de battements effectués pendant une vie de 80 ans. On considère qu'une année correspond à 365 jours.
Donner la réponse en notation scientifique.

115 Puissances et nombres entiers

1. Retrouver les nombres entiers positifs non nuls n, m et p tels que $349\,272 = 2^n \times 3^m \times 7^p \times 11$.

2. Retrouver les nombres entiers positifs non nuls r, s et t tels que $36\,288 = 2^r \times 3^s \times 7^t$.

3. On considère $N = 2^3 \times 3^3 \times 7$.
Sans calculer la valeur de N, montrer que N est un diviseur commun à 349 272 et à 36 288.

4. On considère $M = 2^6 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$.
Sans calculer la valeur de M, montrer que M est un multiple commun à 349 272 et à 36 288.

116 Géométrie et racines carrées

1. Tracer un carré ABCD de côté 1 cm.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur AC.

3. Placer le point E sur [AB] tel que $AE = 3 \times AB$.
Construire le carré AEGH de telle sorte que D soit un point de [AH].
Calculer la valeur exacte de la longueur AG.

4. Montrer que AG est un multiple de AC.

5. Placer le point F sur [EG] de telle sorte que AEFD soit un rectangle.
Calculer la longueur exacte de AF.

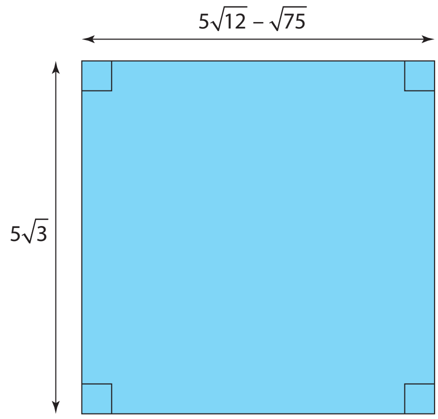
6. Placer sur [AG] le point P tel que AP = AF.
La longueur de [AP] est-elle un multiple de celle de [AC] ?

7. Prouver que $CG = \sqrt{8}$ cm.

8. Comparer $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{10}$. (Utiliser l'un des symboles =, < ou >.)

117 Aire et racines carrées

On considère la figure suivante. (L'unité est le centimètre.)



1. Écrire $5\sqrt{12} - \sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.

2. Quelle est la nature exacte de ABCD ?
Justifier.

3. Déterminer le périmètre de ABCD sous la forme la plus simple possible.
Donner ensuite l'arrondi au millimètre.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire de ABCD.

Exercices d'approfondissement

Démonstrations

118 Divisibilité

Soit n un nombre entier non premier et d le plus petit diviseur premier de n. On suppose qu'il existe un entier d' qui divise d. Démontrer que d' divise aussi n.

119 Une propriété du cours

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Il existe au moins un diviseur de n autre que 1 et n (sinon n serait premier). Soit donc d le plus petit diviseur de n autre que 1.

1. Pourquoi existe-t-il un diviseur de n autre que n et 1 ?

2. Démontrer que d est premier en utilisant un raisonnement par l'absurde et l'exercice précédent.

3. Démontrer que $\sqrt{n} > d$.

120 Le crible d'Ératosthène

Algo & Prog

Doc — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-29

Le crible d'Ératosthène est un algorithme permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre entier donné. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer tous les nombres premiers plus petits que 100.

1. Télécharger sur le site compagnon la grille des 100 premiers nombres entiers.

2. Rayer tous les multiples de 2 puis tous les multiples de 3.

3. Est-il nécessaire de rayer les multiples de 4 ? Pourquoi ?

4. Quel est le plus petit entier restant ? Rayer ses multiples.

5. Réitérer la procédure et lister les 100 premiers nombres premiers.

121 Escaliers et division euclidienne

L'escalier d'une tour a un nombre de marches compris entre 130 et 150. Si je les monte trois par trois, j'arrive en haut.
Si j'étais capable de les monter 4 par 4, je finirais par 1 marche. Combien y a-t-il de marches ?

122 Développement décimal périodique

Déterminer la 314^{e} décimale de $\dfrac{253}{7}$.

123 Développement décimal illimité

1. Justifier que $x = 0{,}999\ldots$ est solution de $10x - 9 = x$.

2. Résoudre $10x - 9 = x$.

3. Conclure.

Démonstration

124 Produit de deux puissances

L'objectif de l'exercice est de démontrer que $a^n \times a^m = a^{n+m}$ si n est un entier positif et m un entier négatif.

1. Écrire l'égalité $a^n \times a^m$ en utilisant n et $-m$.

2. Simplifier le quotient et en déduire que $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

125 Des molécules d'eau

Chimie

L'unité de masse atomique unifiée (symbole u) est une unité de mesure standard, utilisée pour mesurer la masse des atomes : $1\ \text{u} = 1{,}660\,54 \times 10^{-27}$ kg (valeur fournie par le Bureau international des poids et mesures). La masse d'un atome d'hydrogène est 1 u et celle d'un atome d'oxygène est 16 u.

1. Une molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène. Calculer la masse théorique d'une molécule d'eau.

2. On admet qu'un litre d'eau pèse 1 kg. Calculer le nombre théorique de molécules d'eau dans un litre d'eau.

3. Une estimation du volume total des océans est de 1,370 milliard de km^3. Donner un ordre de grandeur du nombre théorique de molécules d'eau présentes dans les océans.

4. Le débit moyen de la Seine à Paris est d'environ 250 m^3 par seconde. Donner une estimation du nombre de molécules d'eau qui passe sous le pont de l'Alma chaque seconde, puis chaque année.

126 Production d'éléctricité

En 2005, la production totale nette d'électricité en France s'élevait à 549,4 TWh. Elle se répartissait en 430,0 TWh pour les centrales nucléaires, 57,2 TWh pour les parcs hydrauliques et éoliens et 62,2 TWh pour les différentes productions thermiques classiques (source : DGEMP / Observatoire de l'Énergie).
En 2016, la production totale nette d'électricité en France s'élevait à 531,3 TWh. Elle se répartissait en 384,0 TWh pour les centrales nucléaires, 84,6 TWh pour les parcs hydrauliques et éoliens et 62,7 TWh pour les différentes productions thermiques classiques (source : *Bilan électrique français 2016 – RTE*).

1. Que représente un TWh ? Écrire chaque valeur en Wh en utilisant l'écriture scientifique.

2. Calculer la part, en pourcentage, de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité.

3. Dessiner un diagramme circulaire mettant en valeur la part de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité en France pour l'année 2005, puis 2016. Comparer les deux diagrammes.

127 Calculs algébriques et quotients

1. Sachant que $a = \dfrac{-2}{21}$ et $b = \dfrac{5}{-7}$, calculer $\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{b}{a}$; $a \times b$; $a + b$ et $a - b$.

Donner les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

Exercices d'approfondissement

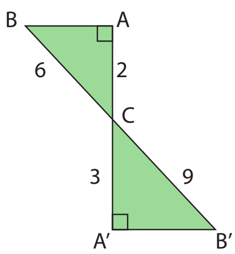
Démonstration

128 Quotient de racines carrées

On va démontrer que, si a est positif et b est strictement positif, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

1. Pourquoi a doit-il être positif et b strictement positif ?
2. Démontrer l'égalité.

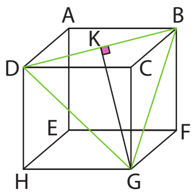
129 Théorème de Thalès



1. Calculer la valeur de $\dfrac{AB}{A'B'}$.

2. En utilisant la définition d'une racine carrée, écrire le résultat précédent sous la forme $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ où a et b sont des entiers positifs, avec $b \neq 0$.
3. Calculer AB puis A′B′.
4. Comparer les deux écritures de $\dfrac{AB}{A'B'}$ et trouver un moyen pour simplifier $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.

130 Racines carrées dans un cube



ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.
1. Calculer la valeur exacte de GD et écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ avec a entier.
2. Quel est le périmètre du triangle BDG ? Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{2}$.
3. Calculer la valeur exacte de GK.
4. Calculer l'aire du triangle BGD. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centième.

Démonstration

131 $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

On suppose que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.

1. Démontrer qu'il existe un entier naturel n et un entier relatif a tel que $10^n = 3a$.
2. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 10^n.
3. On note $a = p_1^{n_1} \times \ldots \times p_m^{n_m}$ la décomposition en produit de facteurs premiers.

Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.

132 Démonstration d'Euclide

On suppose que l'ensemble E des nombres premiers est fini : E = {2 ; 5 ; 7 ; … ; p} et on pose $P = 2 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (p + 1)$.
1. Démontrer que P n'est pas un nombre premier.
2. Démontrer que P peut s'écrire comme produit d'un entier k et d'un nombre premier q.
3. Est-ce que P est divisible par un nombre premier appartenant à l'ensemble E ?
4. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini.

133 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

1. On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q. Il peut donc s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

Démontrer que $2q^2 = p^2$ et en déduire que p^2 est pair.
2. Démontrer que p est pair.
3. p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$.
Calculer alors q^2.
Que peut-on en déduire pour la parité de q ?
Que peut-on dire de la fraction $\dfrac{p}{q}$?

Vers la 1re

Orientation

134 Spécialité Maths

Soit $E = \dfrac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{18}} + \dfrac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{18}}$.

Écrire le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est une fraction irréductible et b est un nombre entier.

135 Technologie

L'énergie distribuée par EDF est mesurée en kilowattheures (kWh). Une autre unité de mesure de l'énergie est le Joule (noté J).
On sait que 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.
Les économistes utilisent pour les combustibles (gaz, bois, charbon…) une autre unité appelée tonne équivalent pétrole (tep), qui correspond à la quantité d'énergie libérée par la combustion d'une tonne de pétrole.
On sait que 1 tep = $4{,}18 \times 10^{10}$ J.
Pour les questions suivantes, arrondir les résultats au centième.
1. Une tonne de charbon a un pouvoir calorifique de $2{,}8 \times 10^{10}$ J.
Exprimer ce pouvoir en kWh puis en tep.
2. Calculer, en kWh, l'énergie correspondant à 1 tep.
3. En France, en 2015, l'énergie consommée par les transports était égale à $49{,}4 \times 10^6$ tep (source : Insee).
Exprimer cette énergie en kWh.

Modéliser, calculer, communiquer

50 min

1 Approximation d'une racine carrée

A ▶ Avec une calculatrice

1. On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{33}$.
Sans calculatrice, donner un encadrement à l'unité de ce nombre.

2. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

N	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
N^2											

3. Quel est l'encadrement de $\sqrt{33}$ au millième ?

B ▶ Avec un tableur

TICE

1. Construire la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Pas											
2	N	5										6
3	N^2											

2. Quelle formule doit-on écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permet d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
Compléter la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1, puis recopier la formule jusqu'en K2.
Pour recopier la formule sans changer B1, écrire B1 au lieu de B1.

3. Compléter la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2, puis recopier la formule jusqu'à L3.

4. Observer le tableau et donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

5. Remplacer le contenu de B2 et de L2 par les bornes de l'encadrement.
Quel encadrement de $\sqrt{33}$ obtient-on ?
Quelle est sa précision ?

6. Recommencer la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de 10^{-6}.
Changer si besoin le format d'affichage des nombres.

7. Utiliser la feuille de calcul pour obtenir une approximation de $\sqrt{125}$ à 10^{-4} près.

C ▶ Avec un programme

Algo & Prog

On recherche une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre n en utilisant l'algorithme de Héron d'Alexandrie.
Cette méthode est définie par la formule $m = \frac{1}{2}\left(N + \frac{n}{m}\right)$ où n est un nombre choisi au départ et m remplace n dans l'étape suivante.

1. On cherche la valeur approchée de $\sqrt{33}$. On pose $n = 5$.
Déterminer m à la 1re étape noté m_1.

2. m_1 remplace n dans la formule.
Déterminer m à la 2e étape, noté m_2.

3. Réitérer l'algorithme et calculer m_3, m_4 et m_5.

4. Proposer un programme ou un algorithme permettant de calculer la racine carrée de 33 au dix-millième.

5. Modifier le programme précédent pour qu'il demande au préalable N et n.

6. Déterminer une approximation de $\sqrt{125}$.

Algo & Prog TICE Modéliser, représenter, communiquer 30 min

2 Dans le cœur des micros

A ▸ Parlons chiffre

En informatique, on utilise uniquement des 0 et des 1 pour coder les nombres.
On travaille avec un système de numération binaire.

Écriture binaire	Écriture décimale	Lien entre les deux écritures
1	1	1×2^0
10	2	$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
11	3	$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
100	4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

1. Bien observer bien la table de correspondance précédente, puis déterminer l'écriture en binaire des entiers inférieurs à 10.
2. Reproduire la feuille de calcul suivante sur un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre en binaire							
2	0	1	1	1	1	1	0	1
3	Nombre en écriture décimale						...	

Programmer en G3 le calcul nécessaire pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre en binaire.

B ▸ La table ASCII

L'unité d'enregistrement en informatique est le **bit**, symbolisé par un 0 ou un 1. Un **octet** correspond à une suite de huit bits, par exemple 0100 1101.

1. Combien de nombres peut-on écrire avec un octet ?
Pour coder la centaine de caractères présents sur un clavier, on les numérote de 0 à 255 et on les code à l'aide d'un octet. La table qui permet de mettre en correspondance un caractère et le nombre entre 0 et 255 s'appelle la **table ASCII**. La télécharger à l'aide du lien ci-contre.

Doc — Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-30

2. Retrouver l'écriture décimale du nombre 0100 0001.
À quelle lettre correspond-il ?
3. À l'aide de la question **1.**, retrouver l'écriture en binaire des codes des autres lettres de l'alphabet.
4. Constituer des groupes.
Chaque groupe choisit alors quatre mots de moins de dix lettres, les code en binaire puis demande aux autres groupes de les retrouver.

C ▸ Une unité d'enregistrement appelée « octet »

1. Calculer, en octets, la valeur des expressions suivantes :
$A = 2^{10}$ octets ; $B = 2^{20}$ octets ; $C = 2^{30}$ octets.
2. Expliquer pourquoi l'expression A est généralement appelée « 1 kilooctet ».
On note $A \approx 1$ Ko (10^3 octets).
Par approximation, on écrit A = 1 Ko.
3. De même, B est appelé « 1 mégaoctet » (1 Mo) et C « 1 gigaoctet » (1 Go).
Indiquer par quelles puissances de 10 se traduisent les préfixes *méga-* et *giga-*.

En autonomie

1 Utiliser les notions de multiples et diviseurs

QCM

136 435 est :

a un multiple de 5.
b un diviseur de 5.
c divisible par 5.
d de la forme $5k$, où k est un entier.

137 $n = 12k$, où k est un entier, donc :

a n est un diviseur de 12.
b n est un multiple de 4.
c le reste de la division euclidienne de n par 12 est 0.
d 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12 sont des diviseurs de n.

138 Parmi les fractions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) irréductible(s) ?

a $\dfrac{2\,590}{3\,885}$ b $\dfrac{74}{111}$

c $\dfrac{1601}{1621}$ d $\dfrac{2\,429}{1735}$

139 ✶ Les nombres suivants sont-ils premiers ?

a) 23 **b)** 79 **c)** 91

140 ✶ Décomposer 276 et 161 en facteurs premiers.

141 ✶✶ **1.** Décomposer 3 528 et 1 596 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{3\,528}{1596}$.

2 Calculer avec les puissances

QCM

142 2^4 est égal à :

a $-2 \times 2 \times 2 \times 2$ b $(-2)^4$
c -8 d -16

143 $(-1)^{123}$ est égal à :

a -123 b -1
c 1 d 0

144 $2^5 \times 2^8$ est égal à :

a $2^4 \times 2^9$ b 2^{40}
c 2^{13} d $2^7 \times 2^7$

145 $7^3 \times 7^{-4}$ est égal à :

a 7^{-7} b 7^{-1}
c 7^{-12} d $\dfrac{1}{7}$

146 $2^5 \times 3^4 \times 2^{-2} \times 3^{-2}$ est égal à :

a 72 b $\dfrac{2^5 \times 3^4}{6^2}$
c $2^3 \times 3^2$ d 36^5

147 $\dfrac{5^8}{5^3}$ est égal à :

a 5^{11} b 5^5
c 3 125 d 625

148 $\dfrac{9^3}{9^5}$ est égal à :

a 9^8 b $\dfrac{1}{81}$
c 9^{-2} d 9^{15}

149 ✶ Donner l'écriture décimale des nombres suivants.

$A = 3^4$ $B = (-10)^5$ $C = 2^{-5}$

150 ✶✶ Calculer chaque nombre.

$A = 5 \times 2^{-1} - 3^{-2}$

$B = 3 \times (1 - 3)^5 - 2^2 \times (3 \div 2)$

$C = \dfrac{(5 - 2 \times 3)^4}{(2 - 3)^5}$

3 Calculer avec les quotients

QCM

151 $\dfrac{17}{24}$ est le résultat de :

a $\dfrac{10}{12}+\dfrac{7}{12}$ b $\dfrac{5}{24}+\dfrac{1}{2}$

c $16+\dfrac{1}{24}$ d $\dfrac{15}{8}-\dfrac{7}{6}$

152 $\dfrac{-5}{6}$ est le résultat de :

a $\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{-5}{2}$ b $\dfrac{-5}{11}\times\dfrac{11}{6}$

c $\dfrac{-30}{36}\div 6$ d $-5\times\dfrac{1}{6}$

153 $-\dfrac{7}{5}\div\dfrac{2}{-3}$ est égal à :

a 2,1 b $\dfrac{10}{21}$ c $\dfrac{3{,}5}{1{,}6}$ d $-\dfrac{21}{10}$

154 $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ est égal à :

a $2\div 3\div 4$ b $\dfrac{8}{3}$

c $\dfrac{2}{12}$ d On ne peut pas calculer.

155 $\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3}{2}\times\dfrac{5}{6}$ est égal à :

a 0 b $\dfrac{1}{4}$ c $\dfrac{-33}{12}$ d $\dfrac{-12}{14}$

156 ✶ Calculer.

$A=\dfrac{2}{17}-\dfrac{5}{17}\times\dfrac{17}{2}$

$B=\dfrac{3}{9}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

157 ✶✶ Calculer en détaillant les étapes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$A=\dfrac{24\times 9\times 72\times 121}{36\times 33\times 64}$

$B=56\times\dfrac{15}{128}-\dfrac{1}{18}$

$C=\dfrac{81}{63}\div\left(4-\dfrac{2}{14}\right)$

$D=3+\dfrac{2}{15}\times\left(5\times\dfrac{23}{25}-\dfrac{12}{49}\div\dfrac{9}{14}\right)\div\dfrac{1}{70}$

4 Calculer avec les racines carrées

QCM

158 Le nombre 11 est égal à :

a $\sqrt{11^2}$ b $\sqrt{11}$ c $\sqrt{121}$ d 3,31

159 $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ est égal à :

a $\sqrt{25}$ b 7 c 5 d 12

160 $\sqrt{108}$ est égal à :

a $3\sqrt{6}$ b $4\sqrt{27}$ c $6\sqrt{3}$ d 10,39

161 $\sqrt{6}\times\sqrt{12}$ est égal à :

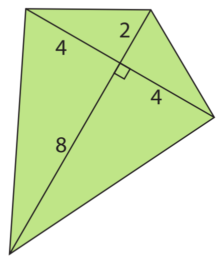
a $6\sqrt{12}$ b $\sqrt{72}$ c $6\sqrt{2}$ d $3\sqrt{8}$

162 $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ est égal à :

a $\dfrac{5}{13}$ b $\sqrt{\dfrac{5}{13}}$ c $\dfrac{\sqrt{25}}{169}$ d $\sqrt{\dfrac{25}{169}}$

163 ✶ **1.** Écrire $\sqrt{8}$; $\sqrt{18}$ et $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont entiers, b étant le plus petit possible.
Réduire l'expression $G=\sqrt{50}+\sqrt{18}-2\sqrt{8}$.
2. En raisonnant de façon identique, réduire l'expression $H=\sqrt{12}-7\sqrt{27}+\sqrt{3}$.

164 ✶✶ Les mesures des diagonales de ce cerf-volant sont données en centimètres.



Calculer la valeur exacte de son périmètre, puis la valeur arrondie au millimètre.

3

Suivant la durée d'immersion dans l'eau et la profondeur atteinte, une plongeuse sous-marine doit généralement prévoir des paliers de décompression, c'est-à-dire un découpage de sa remontée vers la surface en intervalles de temps de durées variables à différentes profondeurs afin de réduire le taux d'azote dans les tissus humains.

Intervalles et inégalités

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Utiliser les intervalles.	1 2 p. 75 1 2 3 4 p. 75 30 31 36 37 p. 78
Utiliser des inégalités.	3 p. 76 5 6 p. 76 39 41 p. 79
Résoudre une inéquation du 1^er^ degré.	4 p. 76 7 8 p. 76 49 52 p. 79
Comparer deux quantités en utilisant leur différence.	5 p. 77 10 11 p. 77 55 56 p. 79
Modéliser un problème par une inéquation.	6 p. 77 12 13 p. 77 61 63 p. 80
Calculer et interpréter des valeurs absolues.	65 67 70 p. 80

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 74, 81, 83, 85

Algo & Prog
p. 71, 81, 82, 84

TICE
p. 84, 86, 87

Les autres disciplines
p. 77, 81, 85

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-05

1. Placer des nombres sur une droite graduée

Sur la droite graduée ci-contre A a pour abscisse 1.
Reproduire cette droite graduée et placer sur celle-ci les nombres suivants.

a) -6 **b)** 3,3 **c)** $-\dfrac{5}{2}$ **d)** $\dfrac{3}{4}$

2. Connaître les symboles liés aux inégalités

Recopier et compléter les phrases suivantes.

a) $2 < 3$ signifie que 2 est ... à 3.
b) $a \geqslant 0$ signifie que a est ... à 0.
c) $3 < x$ signifie que 3 est ... à x.
d) $10 > x$ signifie que x est ... à 10.
e) $-2 \leqslant x$ signifie que x est ... à -2.

3. Comparer des nombres

Recopier et compléter par $>$ ou $<$.

a) -4 ... -5 **b)** 5,5 ... -2 **c)** 3,142 5 ... 3,132 6

d) $\dfrac{1}{2}$ ... $\dfrac{1}{3}$ **e)** $\dfrac{9}{4}$ ... $\dfrac{37}{16}$ **f)** 1,01... 1,005

g) $2{,}5 \times 10^{-1}$ ... 0 **h)** $-a$ ... a avec $a > 0$ **i)** $-a$ ... a avec $a < 0$.

4. Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes.

a) $-2x + 6 = 19$ **b)** $4x - 5 = x + 10$

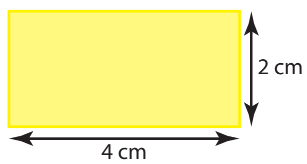
5. Évaluer et comparer

On considère l'expression $A = 5x - 3$.
Peut-on dire que le résultat de A est supérieur ou égal à 2 si on remplace x :

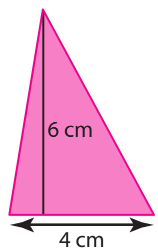
a) par 2 ? **b)** par 0 ? **c)** par -3 ?

6. Calculer des aires et des périmètres

1. Donner le périmètre et l'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 2 cm.



2. Donner l'aire d'un triangle de base 4 cm et de hauteur 6 cm.



7. Développer une expression

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$A = 5(2x + 3) - 2x$ $B = -3(x + 6)$ $C = -4(6 - 2x) + 2x + 7$

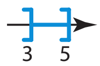
Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

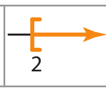
Activités

1 Introduire la notation d'intervalle

15 min

Observer les deux exemples de notation suivants.

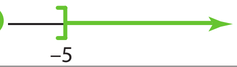
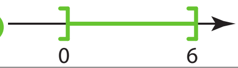
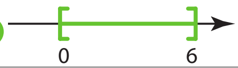
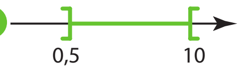
① x est compris entre 3 exclu et 5 inclus.		$3 < x \leqslant 5$	$x \in]3\,;5]$

② x est supérieur ou égal à 2.		$x \geqslant 2$	$x \in [2\,;+\infty[$

Notation On appelle intervalle les ensembles de nombres notés $]3\,;5]$ et $[2\,;+\infty[$.

Regrouper ensemble les éléments du tableau qui représentent un même intervalle.

Coup de pouce Il y a 5 intervalles. Chacun est représenté par une combinaison de 4 numéros (un orange, un vert, un bleu, un rouge).

Inégalité	Schéma	Phrase	Notation d'intervalle
1 $0 < x \leqslant 6$	6 	11 x est compris entre 0,5 exclu et 10 exclu	16 $x \in [0\,;6]$
2 $0 \leqslant x \leqslant 6$	7 	12 x est compris entre 0 exclu et 6 inclus	17 $x \in]-\infty\,;3]$
3 $0{,}5 < x < 10$	8 	13 x est supérieur à –5	18 $x \in]0\,;6]$
4 $x > -5$	9 	14 x est compris entre 0 inclus et 6 inclus	19 $x \in]-5\,;+\infty[$
5 $x \leqslant 3$	10 	15 x est inférieur ou égal à 3	20 $x \in]0{,}5\,;10[$

Cours 1 p. 78

2 Manipuler des inégalités

20 min

1. Recopier et compléter les pointillés noirs avec les résultats des calculs puis les pointillés colorés avec les symboles $<$ ou $>$.

a) $3 < 6$; $+2$; $+2$; $5 \ldots 8$

b) $1 < 3$; -4 ; -4 ; $\ldots \ldots \ldots$

c) $4 > -2$; $+10$; $+10$; $\ldots \ldots \ldots$

2. Écrire une conjecture en recopiant et en choisissant la bonne expression dans la phrase ci-contre.

Si on additionne ou soustrait un même nombre réel à chacun des membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.

3. Utiliser cette règle pour recopier et compléter les schémas suivants.

a) $x \geqslant 4$; $+5$; $+5$; $x + 5 \ldots \ldots$

b) $t > 1$; -2 ; -2 ; $t - 2 \ldots \ldots$

c) $0 \leqslant x \leqslant 2$; $+\ldots$; $+\ldots$; $\ldots \ldots x + 7 \ldots \ldots$

4. a) Selma dit que si elle choisit un nombre supérieur ou égal à 3 et qu'elle le multiplie par 2 alors le résultat sera supérieur ou égal à 6. Hari dit que s'il choisit un nombre supérieur à 4 et qu'il le multiplie par –3 alors le résultat est supérieur à –12. Qui semble avoir raison ? Qui semble avoir tort ?

b) Écrire une conjecture en recopiant et en choisissant les bonnes expressions dans les phrases ci-contre.

- Si on multiplie par un même nombre strictement positif les membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.
- Si on multiplie par un même nombre strictement négatif les membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.

Cours 2 p. 73

3 Résoudre une inéquation

40 min

1. On considère l'inéquation $2x+3 \geqslant 10$ d'inconnue réelle x. Cette inéquation est une inéquation du 1er degré.

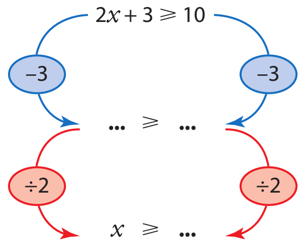
a) Montrer que 5 est solution de l'inéquation $2x+3 \geqslant 5$.

b) Trouver trois autres nombres solutions de cette inéquation.

c) Recopier et compléter la résolution ci-contre.

d) Quelles sont les solutions ? Proposer plusieurs écritures.

e) Vérifier que les trois nombres proposés à la question **b)** appartiennent bien à cet ensemble des solutions.



2. De la même façon, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $4x-6 \leqslant -26$

b) $-3x+5 \geqslant 32$

c) $2x+17 < x-1$

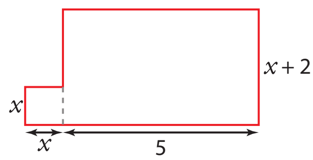
Coup de pouce Pour résoudre une inéquation de degré 1, on s'appuie sur les techniques de résolution d'une équation du 1er degré en utilisant les règles de manipulation des inégalités.

Cours 2 p. 73

4 Modéliser par une inéquation

25 min

On considère la figure ci-contre. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. On veut que le périmètre de la figure soit supérieur ou égal à 32 cm. Écrire une inéquation caractérisant cette contrainte.

2. Résoudre cette inéquation et donner l'ensemble des valeurs de x pour que le périmètre soit supérieur ou égal à 32 cm.

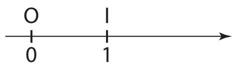
Cours 2 p. 74

5 Découvrir la valeur absolue

Algo & Prog

25 min

1. Tracer un axe muni d'une origine O et d'une graduation comme ci-contre.



Placer dans ce repère les points A(3), B(−2), C$\left(\frac{7}{2}\right)$ et D(−1, 3).

2. Déterminer les distances OA, OB, OC et OD.

3. Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il demande l'abscisse d'un point M, calcule et affiche la valeur de la distance OM.

```
x=float(input("Saisir l'abscisse de M:"))
if x>=...:
    distance = ...
    print("La distance OM est égale à", distance)
else:
    distance = ...
    print("La distance OM est égale à", distance)
```

4. Pour toute valeur de x saisie, la valeur égale à la distance OM affichée est appelée la valeur absolue de x et est notée $|x|$. Déterminer $|5|$, $|-3,4|$ et $|2-\pi|$.

Cours 3 p. 74

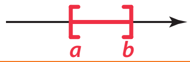
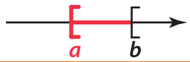
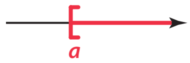
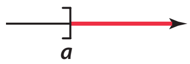
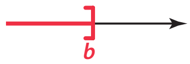
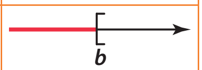
Cours

1 Intervalles

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre *a* (inclus) et *b* (inclus) est appelé intervalle et se note [*a* ; *b*].
***a* et *b* sont les bornes de l'intervalle.**

Notation On peut définir d'autres types d'intervalles à l'aide du tableau suivant.

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty; b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\,;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\,;+\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty; 0]$.

Exemples

L'ensemble des nombres réels :

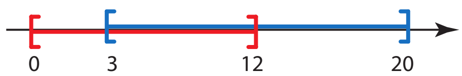
- compris entre 2 (inclus) et 5 (inclus) est noté [2 ; 5].
- inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty; 10]$.
- supérieurs (strictement) à 4 s'écrit $]4\,;+\infty[$.
- compris entre –6 (exclu) et 2 (inclus) s'écrit]–6 ; 2].

Exercice résolu 1 p. 75

Définition **Intersection et réunion de deux intervalles**

- **L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∩ J qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J.**
- **La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∪ J qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J.**

Exemple



En prenant I = [0 ; 12] et J = [3 ; 20] :

- l'intersection de I et J est I ∩ J = [3 ; 12] (c'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I et à J, ici l'endroit où se superposent le bleu et le rouge).
- la réunion de I et J est I ∪ J = [0 ; 20] (c'est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J, ici l'endroit où l'on a de la couleur : du rouge d'abord, puis du bleu et du rouge superposés, et enfin du bleu).

Exercice résolu 2 p. 75

Remarque On a $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0\,;+\infty[$.

2 Inégalités, inéquations et modélisation

Règle — Manipulation des inégalités

a, b, c et k sont des nombres réels.

• Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c.$$

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Remarque Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou des encadrements.

Exemple

Si $a < 10$ alors $-6a > (-6) \times 10$ en multipliant par (-6) (qui est strictement négatif) donc $-6a > -60$.

Exercice résolu 3 p. 76

Propriété — Inégalité et somme

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

Définition — Inéquation

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues). Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Remarque Une inéquation de la forme $ax + b < cx + d$ (où x est l'inconnue et a, b, c et d sont des nombres réels avec a et b non tous deux nuls) est appelée **inéquation du 1er degré**.

Exemple

$3x + 4 < 7x + 9$ ou $2x + 6 \geqslant x - 5$ sont des exemples d'inéquations d'inconnue x (qui font partie de la famille des inéquations du 1er degré).

Règles — Résolution d'une inéquation du 1er degré

Si on applique l'une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a le même ensemble des solutions.

Remarque On se sert du symbole $\Leftrightarrow$ pour signifier « est équivalent à ».

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x + 2 \geqslant 8 \Leftrightarrow -3x \geqslant 6$ (en soustrayant 2) $\Leftrightarrow x \leqslant -2$ (en divisant par -3).
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\,; -2]$.

Exercice résolu 4 p. 76

Remarque La résolution d'inéquation permet par exemple de comparer des expressions.

Exercice résolu 5 p. 77

Définition — Modélisation d'un problème

Modéliser un problème par une inéquation, c'est écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème.

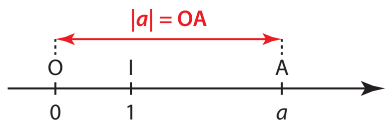
Exercice résolu 6 p. 77

Cours

3 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition Valeur absolue et distance

Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une graduation, on considère un point A d'abscisse *a*.
La valeur absolue de *a*, notée $|a|$ est le nombre égal à la distance OA.



Propriété Valeur absolue et signe

La valeur absolue d'un nombre réel *a* est le nombre $|a|$ tel que $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

● **Exemple**

On a : $|3| = 3$ et $|-2{,}8| = -(-2{,}8) = 2{,}8$.

Propriété Valeur absolue et racine carrée

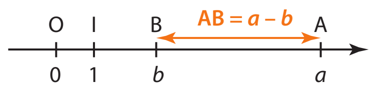
Pour tout nombre réel *a*, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Définition Distance entre deux points

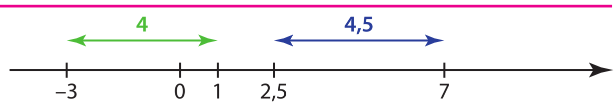
Soit A et B les points d'abscisses *a* et *b* sur une droite munie d'une origine et d'une graduation.
On appelle distance entre les réels *a* et *b* et la distance AB.

Propriété Distance et abcisses

• **Si $a \geqslant b$ alors $AB = a - b$.** • **Si $a < b$ alors $AB = b - a$.**



● **Exemples**



1. La distance entre 7 et 2,5 (ou entre 2,5 et 7) est égale à $7 - 2{,}5 = 4{,}5$.
2. La distance entre 1 et -3 est égale à $1 - (-3) = 1 + 3 = 4$.

Propriété Distance et valeur absolue

La distance entre *a* et *b* est égale à $|a - b|$.

Démonstration

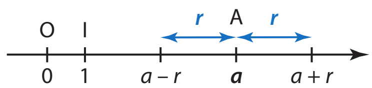
Si $a \geqslant b$ alors $AB = a - b$. De plus $a - b \geqslant 0$ donc $|a - b| = a - b$ et alors $AB = |a - b|$.
Si $a < b$ alors $AB = b - a$. De plus $a - b < 0$, donc $|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$ et alors $AB = |a - b|$.

Propriété Intervalle et valeur absolue

Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[a - r\,;a + r]$ où *a* est un nombre réel et *r* un nombre réel strictement positif, alors on a :

$$x \in [a - r\,;a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leqslant r.$$

Dans ce cas le nombre *a* est appelé centre de l'intervalle et le nombre *r* rayon de l'intervalle.



1 Utiliser la notation des intervalles

Cours 1 p. 72

1. Le nombre 6,3 appartient-il à l'intervalle [4 ; 10,5] ?

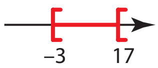
2. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $-3 \leqslant x < 17$.

3. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que x est supérieur ou égal à $\frac{1}{5}$.

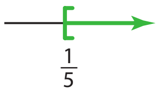
Solution

1. $6{,}3 \in [4\,;10{,}5]$ car 6,3 est compris entre 4 et 10,5.

2. L'intervalle correspondant est $[-3\,;17[$. **1** et **2**



3. L'intervalle correspondant est $\left[\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$. **1** **2** **3**



Conseils & Méthodes

1 Faire un schéma pour imaginer l'intervalle.

2 Bien repérer si les bornes sont incluses ou exclues pour adapter l'orientation des crochets.

3 Les crochets sont ouverts (vers l'extérieur) pour les infinis.

À vous de jouer !

1 **1.** Le nombre 3,1 appartient-il à l'intervalle [0 ; 3] ?
2. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels compris entre 2 inclus et 4 inclus.

2 **1.** Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $-3 < x < 14$.
2. Le représenter sur une droite graduée.

Exercices 30 à 38 p. 78

2 Déterminer une intersection ou une réunion d'intervalles

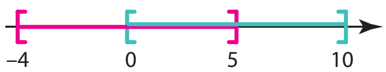
Cours 1 p. 72

Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants.

a) [– 4 ; 5] et [0 ; 10] **b)**]0 ; 5] et [–2 ; 3] **c)** [0 ; 4] et [6 ; 8[

Solution

a) Schématiquement, on a : **1**



L'intersection des deux intervalles est l'ensemble des nombres qui appartiennent à $[-4\,;5]$ **et** à $[0\,;10]$: on a $[-4\,;5] \cap [0\,;10] = [0\,;5]$. **2**

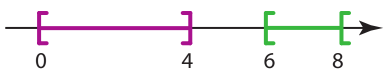
La réunion des deux intervalles est l'ensemble des nombres qui appartiennent à $[-4\,;5]$ **ou** à $[0\,;10]$: on a $[-4\,;5] \cup [0\,;10] = [-4\,;10]$. **3**

b) Schématiquement, on a **1** :

On obtient $]0\,;5] \cap [-2\,;3] =]0\,;3]$. **2** **4**

On obtient $]0\,;5] \cup [-2\,;3] = [-2\,;5]$. **3**

c) Schématiquement, on a **1** :



On obtient $[0\,;4] \cap [6\,;8[= \varnothing$ car il n'y a pas de nombre commun aux deux intervalles. **2**

La réunion $[0\,;4] \cup [6\,;8[$ ne peut pas être écrite d'une manière simplifiée.

Conseils & Méthodes

1 On peut faire un schéma pour s'aider.

2 L'intersection est l'ensemble des nombres en commun aux deux intervalles : on prend donc l'ensemble de ceux qui sont surlignés par les deux couleurs.

3 La réunion est l'ensemble des nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux intervalles : on prend donc l'ensemble de ceux qui sont surlignés par l'une au moins des deux couleurs.

4 0 n'est ici pas dans l'intersection car exclu de]0 ; 5] en rouge.

À vous de jouer !

3 Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles [–10 ; 5] et [4 ; 12].

4 Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles.
a) [10 ; 20[et [0 ; 15[**b)** [0 ; 8[et]9,5 ; 10].

Exercices 36 à 38 p. 78

Exercices résolus

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-06

3 Manipuler des inégalités

Cours 2 p. 73

1. **Soit x un nombre réel tel que $x > 4$. Que peut-on dire de $x + 6$ et $\frac{x}{2}$?**

2. **Soit a un nombre réel tel que $2 < a \leqslant 9$. Donner un encadrement de $-3a$.**

Solution

1. En ajoutant 6 à chaque membre de l'inégalité, on obtient $x + 6 > 4 + 6$, c'est-à-dire $x + 6 > 10$ **1**

En divisant par 2 chaque membre, on obtient $\frac{x}{2} > \frac{4}{2}$, c'est-à-dire $\frac{x}{2} > 2$ **2**

2. En multipliant par -3 chacun des membres des inégalités de départ ($2 < a$ et $a \leqslant 9$), on obtient $2 \times (-3) > -3a \geqslant 9 \times (-3)$, c'est-à-dire $-6 > -3a \geqslant -27$ **3**

Conseils & Méthodes

1 Ajouter un même nombre à chaque membre ne change pas le sens.

2 Diviser par un même nombre strictement positif chaque membre ne change pas le sens.

3 Multiplier par un même nombre strictement négatif chaque membre change le sens.

À vous de jouer !

5 Soit $t \geqslant 10$. Que peut-on dire de $2{,}5t$ et $t - 7$?

6 Sachant que $-4 < x < 0$, donner un encadrement de $\frac{x}{4}$ et $x + 12$.

Exercices 39 à 45 p. 79

4 Résoudre une inéquation du 1er degré

Cours 2 p. 73

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $4x - 8 < 16$ **b)** $-3x - 9 \leqslant 1$ **c)** $6x + 2 \geqslant 5x - 5$

Solution

a) On a **1** :

$4x - 8 < 16$

$\xrightarrow{+8}$ $4x < 16 + 8$

$4x < 24$

$\xrightarrow{\div 4}$ $x < \frac{24}{4}$ **2**

$x < 6$

Donc $\mathscr{S}$ est $=]-\infty\,;6[$.

b) On a **1** :

$-3x - 9 \leqslant 1$

$\xrightarrow{+9}$ $-3x \leqslant 1 + 9$

$-3x \leqslant 10$

$\xrightarrow{\div(-3)}$ $x \geqslant \frac{10}{-3}$ **3**

$x \geqslant -\frac{10}{3}$

Donc $\mathscr{S} = \left[-\frac{10}{3}\,;+\infty\right[$.

c) On a **1** :

$6x + 2 \geqslant 5x - 5$

$\xrightarrow{-2}$ $6x \geqslant 5x - 5 - 2$

$6x \geqslant 5x - 7$

$\xrightarrow{-5x}$ $6x - 5x \geqslant -7$

$x \geqslant -7$

Donc $\mathscr{S} = [-7\,;+\infty[$.

Conseils & Méthodes

1 Pour résoudre une inéquation du 1er degré on applique les mêmes techniques que pour la résolution d'une équation du 1er degré associées aux règles de manipulation des inégalités.

2 4 est positif donc le sens de l'inégalité ne change pas lors de la division par 4.

3 -3 est négatif donc le sens de l'inégalité change lors de la division par -3.

À vous de jouer !

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x + 7 \leqslant 27$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x - 12 \geqslant 24$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $4x + 7 > -25$ **b)** $2x < 5x + 3$ **c)** $8x - 5 < 2x + 19$

Exercices 49 à 54 p. 79

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-06

5 Comparer deux expressions par leur différence

Cours 2 p. 73

On considère les expressions A = 50x + 10 et B = 25x – 115 pour tout nombre réel x.
Comparer les expressions de A et B suivant les valeurs de x.

Solution

On calcule A – B puis on compare par rapport à 0. 1 2

On a $A - B = 50x + 10 - (25x - 115) = 50x + 10 - 25x + 115 = 25x + 125$.

$A > B \Leftrightarrow A - B > 0 \Leftrightarrow 25x + 125 > 0 \Leftrightarrow 25x > -125 \Leftrightarrow x > -\dfrac{125}{25}$

$\Leftrightarrow x > -5$. Le résultat de A est donc supérieur à celui de B si $x > -5$.

$A < B \Leftrightarrow A - B < 0 \Leftrightarrow 25x + 125 < 0 \Leftrightarrow 25x < -125 \Leftrightarrow x < -\dfrac{125}{25}$

$\Leftrightarrow x < -5$. Le résultat de A est donc inférieur à celui de B si $x < -5$.

$A = B \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow 25x + 125 = 0 \Leftrightarrow 25x = -125 \Leftrightarrow x = -\dfrac{125}{25}$

$\Leftrightarrow x = -5$. Le résultat de A est donc égal à celui de B si $x = -5$.

Conseils & Méthodes

1 Comparer des quantités signifie de dire si la première quantité est supérieure, inférieure, égale à la deuxième et si besoin de préciser pour quelle(s) valeur(s) de l'indéterminée x elle l'est.

2 Pour comparer les expressions de A et B on peut s'appuyer sur les règles suivantes :

$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

$A < B \Leftrightarrow A - B < 0$

$A = B \Leftrightarrow A - B = 0$

À vous de jouer !

10 Comparer les expressions de :
$C = 4x + 9$ et $E = -x + 44$ pour tout nombre réel x.

11 Comparer les expressions de :
$R = 15 - 2a$ et $S = a + 14$ pour tout nombre réel a.

Exercices 55 à 60 p. 79

6 Modéliser un problème par une inéquation

EPS

Cours 2 p. 73

Leila s'est inscrite auprès d'un club nautique pour louer du matériel pendant un an afin de faire des sorties en rivière. L'inscription lui a coûté 22 euros et la location d'un kayak lui revient à 2,80 euros par heure. Leila a un budget de 120 euros pour l'année. Quel nombre d'heures peut-elle prévoir pour ses sorties ?

Solution

On pose x le nombre d'heures que peut prévoir Leila.

On sait que x est un nombre d'heures donc x est un nombre réel positif. 1

De plus, d'après l'énoncé, le prix payé pour x heures est donné par la formule $22 + x \times 2{,}80 = 22 + 2{,}8x$. 2

On peut donc modéliser ce problème par l'inéquation $22 + 2{,}8x \leqslant 120$ d'après la contrainte de budget maximal. On résout alors cette inéquation :

$22 + 2{,}8x \leqslant 120 \Leftrightarrow 2{,}8x \leqslant 120 - 22 \Leftrightarrow 2{,}8x \leqslant 98 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{98}{2{,}8} \Leftrightarrow x \leqslant 35$

Leila peut donc prévoir jusqu'à 35 heures de sortie en kayak.

Conseils & Méthodes

1 Comme on recherche un nombre d'heures, on sait que celui-ci doit être positif : il faut parfois bien analyser au préalable les valeurs possibles pour x.

2 Comme la contrainte est sur le budget, on exprime le prix payé en fonction de x.

À vous de jouer !

12 Dans une boulangerie, Roman veut acheter autant de croissants que de pains au chocolat. Un croissant est vendu 1,10 euros et un pain au chocolat est vendu 1,35 euros. Avec 30 euros, combien Romain peut-il acheter de viennoiseries au total ?

13 Un rectangle est tel que sa longueur est 7 cm plus grande que sa largeur.
Comment doit être la largeur pour que le périmètre du rectangle soit supérieur ou égal à 41 cm ?

Exercices 61 à 64 p. 80

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

14 Écrire, de mémoire, tous les symboles mathématiques définis dans ce chapitre et donner leur signification. Demander à un camarade de vous les faire réciter.

15 **1.** Écrire trois inéquations que vous avez apprises à résoudre dans ce chapitre.
2. Les faire résoudre par un camarade.
3. Vérifier les solutions obtenues.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

16 Donner trois nombres appartenant à l'intervalle [8,5 ; 9,5].

17 Dire si chacun des nombres suivants appartient ou non à l'intervalle [4 ; 10[.
a) 4 **b)** – 5
c) 6,65 **d)** 10

18 Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $4 < x \leqslant 15$.

19 Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels tels x que $x < 0{,}1$.

20 Le nombre 3,2 appartient-il à l'intersection de [–3 ; 3,5] et]3,1 ; 3,8] ?

21 On considère un carré de côté c.
Exprimer son périmètre en fonction de c.

22 Un objet est vendu 5 euros. Soit q le nombre d'objets vendus. Exprimer la recette $R(q)$ en fonction de q.

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x + 5 < 8$.

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 1 < 9$.

25 Si $a < 0$, que peut-on dire de :
a) $3a$? **b)** $a + 6$?
c) $-100a$? **d)** $2a + 1$?

26 Si $0 < x < 5$, donner un encadrement de :
a) $2x$ **b)** $x + 6$
c) $x - 3$ **d)** $-5x$

27 Le périmètre d'un rectangle de largeur $\ell = 5{,}5$ et de longueur inconnue L ne doit pas dépasser 30. Modéliser ce problème par une inéquation.

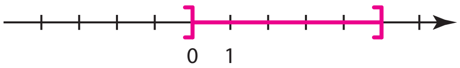
28 Calculer les valeurs absolues de $\frac{1}{2}$, $-\pi$ et 6,75.

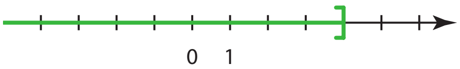
29 Calculer $|6| - |-7|$.

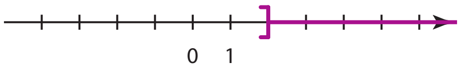
Intervalles

30 On considère des droites graduées sur lesquelles on a marqué des ensembles de nombres.
Donner l'intervalle correspondant.

a) 

b) 

c) 

d) 

31 Représenter sur une droite graduée et décrire, à l'aide d'un intervalle, chacun des ensembles de nombres réels x tels que :
a) $0 \leqslant x \leqslant 3$ **b)** $-2 < x < 1$
c) $x \leqslant 9$ **d)** $x > -3{,}5$

32 Représenter sur une droite graduée chacun des intervalles suivants.
a)]1 ; 6] **b)** [–0,5 ; 3,2]
c)]–∞ ; 2] **d)** [0 ; +∞[

33 Écrire les inégalités vérifiées par les réels x pour chacun des cas suivants.
a) $x \in [0 ; 1{,}2]$ **b)** $x \in \left]-\frac{5}{3} ; 3\right]$
c) $x \in [4{,}73 ; +\infty[$ **d)** $x \in]-\infty ; 0[$

34 Recopier et compléter par $\in$ et $\notin$.
a) 1,4 **...** [0 ; 7] **b)** $-\pi$ **...**]–3 ; –1[
c) 6 **...** $\left[\frac{7}{3} ; +\infty\right[$ **d)** –3 **...**]–∞ ; –3,5[

35 Sans calculatrice, dire si $\frac{2}{3}$ appartient aux intervalles suivants.
a) $\left[0 ; \frac{4}{5}\right]$ **b)** $\left[\frac{3}{5} ; 1\right]$ **c)** $\left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{5}\right]$

36 Soit I = [–6 ; 8] et J =]2 ; 100[.
Dire si chacun des nombres suivants appartient à I, à J, à I ∩ J, à I ∪ J.
a) –10 **b)** –6 **c)** –0,5 **d)** 2
e) 8,1 **f)** 99,9 **g)** 1 000 **h)** 0

37 Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants.
a) [20 ; 25[et [14 ; 21[**b)**]–∞ ; 7,5] et [10 ; 22]
c)]–1 ; +∞[et]–∞ ; 1[**d)**]0 ; 1] et [0,5 ; 0,7]

38 Simplifier, lorsque c'est possible, l'écriture des ensembles suivants.
a) [–1 ; 3,5] ∩ [1,7 ; 7] **b)**]–∞ ; –π] ∪ [–3π ; π[
c) [–7,1 ; 2] ∩ [2 ; +∞[**d)** [–5 ; 0] ∪ [3 ; +∞[

Inégalités

39 Soit x un réel tel que $x \leqslant 1\,000$.
Que peut-on en déduire pour :
a) $1{,}5x$? **b)** $\frac{x}{50}$? **c)** $-\frac{1}{10}x$? **d)** $x - 30$?

40 Soit $m \in [-\infty\,;4]$. Que peut-on en déduire pour $3m$ et $2m - 1$?

41 Soit x un nombre réel tel que $2 \leqslant x \leqslant 4$.
Donner un encadrement des expressions suivantes.
a) $x - 10$ **b)** $1{,}5x$ **c)** $x + 15$ **d)** $-4x$

42 Soit a un nombre réel tel que $-3 \leqslant a \leqslant 1{,}5$.
Donner un encadrement des expressions suivantes.
a) $a + 5$ **b)** $2a$ **c)** $\frac{a}{3}$
d) $2a - 8$ **e)** $-4a + 1$ **f)** $\frac{a+3}{2}$

43 Soit t un nombre réel tel que $3 < t$.
Que peut-on dire du résultat des expressions suivantes ?
a) $2t + 1$ **b)** $-3t$ **c)** $-\frac{t}{2}$ **d)** $6 - t$

44 On sait que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
Sans calculatrice, donner un encadrement des nombres suivants.
a) $2\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2} - 0{,}5$ **c)** $\sqrt{2} + 3$ **d)** $5 - 2\sqrt{2}$

45 **1.** Marco affirme qu'il a une somme S entre 100 et 160 euros sur un compte en banque.
Ses parents rajoutent 30 euros sur ce compte. Que peut-il affirmer maintenant ?
2. Marco dépense 80 euros pour acheter un vélo d'occasion. Que peut-il dire de la somme restant sur son compte ?

Équations du 1^er^ degré AP

46 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $x - 7 = 4$ **b)** $2x = 13$ **c)** $9 - x = 5$ **d)** $4x = 0$

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $3x + 5 = 4x - 7$ **b)** $2x - 9 = 8x + 3$
c) $-2x + 3 = 3x - 1$ **d)** $5 - 2x = x$
e) $1 + \frac{3}{10}x = 4 - \frac{2}{5}x$ **f)** $x^7 + 3x - 2 = 7x + 4 + x^7$

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $4x - 5 = 9x + 4$ **b)** $\frac{5}{4}x = \frac{25}{16}$
c) $x^2 + 3 - x = x^2 + 10x - 7$ **d)** $5x = 5(x - 2) + 3$
e) $\frac{1}{2} + 4x = 5 - \frac{6}{7}x$ **f)** $(x - 7)^2 = (x + 4)^2$

Inéquations du 1^er^ degré

49 Recopier et compléter la résolution de l'inéquation $2x + 8 < 100$.

$$2x + 8 < 100$$
$$\xrightarrow{-8} \quad \ldots < \ldots \quad \xleftarrow{-8}$$
$$2x < \ldots$$
$$\xrightarrow{\div 2} \quad \ldots \;\ldots\; \ldots \quad \xleftarrow{\div 2}$$
$$x < \ldots$$

50 On considère l'inéquation $-4x - 40 > 60$ d'inconnue réelle x.
En écrivant les opérations effectuées à chaque étape sur les deux membres, résoudre cette inéquation.

Coup de pouce On peut utiliser la méthode employée dans l'exercice précédent.

51 Même exercice que le précédent pour les inéquations suivantes.
a) $4x + 5 \leqslant -x + 100$ **b)** $x - 10 \leqslant 4x + 23$

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.
a) $2x + 2 \leqslant 10$ **b)** $4x + 5 < -25$
c) $-2x + 6 \leqslant 0$ **d)** $-3x - 7 \geqslant 101$

53 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $3x + 2 \leqslant x - 14$ **b)** $-2x - 5 > 4x + 31$
c) $9x + 19 \leqslant -x + 51$ **d)** $-3x + 5 < -x + 17$

54 Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.
a) $2(x + 1) - 7x > 5 - x$ **b)** $4x + 5 \leqslant 3(x - 1) + 3$
c) $3(x + 4) > 0$ **d)** $\frac{x-5}{2} \leqslant 0$

Comparaison

55 Soit les expressions $A = 45 + 5x$ et $B = 1\,000 - 5x$.
Comment faut-il choisir x pour que le résultat de A soit supérieur au résultat de B ?

56 Comparer les expressions $5 + 2x$ et $x + 9$ pour tout nombre réel x.

57 Comparer $9 + \frac{1}{2}x$ et 1 pour tout nombre réel x.

58 Comparer $A = -6x + 150$ et 0 pour tout nombre réel x.

59 Comparer $A = 4x + 5$ et 0 pour tout nombre réel x.

60 Comparer $-2t + 9$ et $-2t + 3$ pour tout nombre réel t.

Exercices d'application

Modélisation

61 Yanis veut délimiter une parcelle rectangulaire de pelouse avec des bordures en bois.
Il a les contraintes suivantes.
- La longueur est de 5 mètres plus grande que la largeur.
- Yanis dispose de 120 mètres de bordures au maximum et souhaite trouver toutes les largeurs possibles.

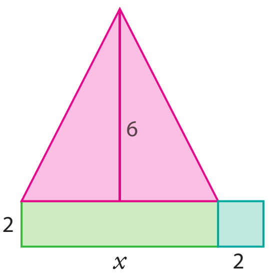
Modéliser ce problème par une inéquation.

62 Assia a acheté des graines de carottes à 2,90 euros pour les semer dans son jardin.
Elle compte revendre quelques kilos de carottes à ses amis au prix de 1,50 euros le kilo.
Elle cherche à connaître le nombre de kilos qu'elle doit vendre pour faire un bénéfice de 25 euros.
1. En notant x le nombre de kilos de carottes à vendre, modéliser le problème par une inéquation.
2. Résoudre le problème.

63 Rémi a gagné au loto : il a le choix entre deux lots :
- une somme de 100 000 euros puis 1 400 euros par mois à vie.
- une somme de 5 000 euros puis 2 000 euros par mois à vie.

Il cherche à savoir au bout de combien de mois écoulés la deuxième offre devient plus intéressante.
1. En notant x le nombre de mois, modéliser le problème par une inéquation.
2. Résoudre le problème.

64 On considère la figure ci-contre.
Les longueurs sont en cm.
On souhaite que l'aire de cette figure dépasse 50 cm^2.
Modéliser ce problème par une inéquation puis le résoudre.



Valeurs absolues

65 Calculer.

a) $|-4|$ **b)** $|3{,}8|$ **c)** $\left|-\dfrac{100}{3}\right|$

d) $|5-6|$ **e)** $|\sqrt{17}-2|$ **f)** $|2-\sqrt{17}|$

66 Sans calculatrice, simplifier :

a) $|4|+|-3|$ **b)** $|1{,}2|-|-1{,}2|$

c) $\dfrac{|5-8|-3}{2}$ **d)** $2|4-10|+|7-5|$

67 **1. a)** Sur une droite graduée, placer les nombres 5 et $\dfrac{1}{3}$.
b) Calculer la distance entre 5 et $\dfrac{1}{3}$.
2. Reprendre la question **1.** avec 3 et $-\dfrac{4}{5}$.
3. Reprendre la question **1.** avec -1 et $-\dfrac{4}{5}$.

68 À l'aide d'une valeur absolue, écrire la distance entre :

a) $\dfrac{125}{3}$ et 2 **b)** $\sqrt{2}$ et 5

c) -5 et $\dfrac{12}{5}$ **d)** π et 4

69 Sans calculatrice, simplifier :

a) $|5-\pi|$ **b)** $\left|8-\dfrac{2}{3}\right|$ **c)** $\left|2-\dfrac{9}{2}\right|$

d) $|-1-8|$ **e)** $|-5-\pi|$ **f)** $\left|\dfrac{1}{2}+6\right|$

70 De la même façon que $|x-3|$ représente la distance entre le nombre réel x et 3, exprimer en termes de distance :

a) $|x-100|$ **b)** $\left|x-\dfrac{1}{3}\right|$

c) $|x+5|$ **d)** $|1{,}35-x|$

e) $|-7-x|$ **f)** $|\pi-x|$

71 Nelson dit que $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ pour tout nombre réel x.
A-t-il tort ou raison ?

Calculs et automatismes

72 Développer et réduire les expressions suivantes.
$A=5(x+7)+3(4+x)$
$B=2(3x-3)-4x$
$C=-4(2x-6)-(3x+2)$
$D=5(5-2x)-6(x-1)$

73 Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants.

a) $\left|\dfrac{125}{4}\times\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{2}\right|$ **b)** $\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}{\left|1+\dfrac{1}{3}\right|}$

Avec des intervalles

74 Utiliser les intervalles (on pourra utiliser le symbole de réunion) pour décrire, si possible, les ensembles de nombres x tels que :

a) $x < 1$ et $x \geqslant -3$ **b)** $x \leqslant -2$ ou $x > 1$
c)$x \leqslant 3{,}5$ ou $x < -1$ **d)** $x \geqslant \pi$ et $x \leqslant 3$

75 Logique
Les propositions conditionnelles suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Si $\frac{1}{4} < x$ alors $0{,}2 < x$
b) Si $x < \pi$ alors $x < 3{,}1$
c) Si $x \in [0{,}8 ; 2]$ alors $x \in [0{,}7 ; 1]$
d) Si $x \in \left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right]$ alors $x \in [0 ; 1]$

76 Algo & Prog
On considère le programme suivant.

```
x=float(input("Saisir une valeur de x:"))
if x<=-1 or x>=3:
    print("Gagné!")
else:
    print("Perdu...")
```

1. Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le programme affiche `Gagné!`
2. Modifier le programme précédent pour qu'il affiche `Gagné!` si le nombre appartient à $]-\infty ; 4[\cup]5 ; +\infty[$ et `Perdu...` sinon.
3. Modifier le programme précédent pour qu'il affiche `Gagné!` si le nombre appartient à $[0 ; 4[$ et `Perdu...` sinon.

77 L'amplitude (ou la longueur) d'un intervalle $[a ; b]$ où a et b sont deux nombres réels est l'écart entre les deux bornes, c'est-à-dire la valeur de $b - a$.
1. Donner les amplitudes des intervalles suivants.

a) $[5 ; 100]$ **b)** $\left[1 ; \frac{4}{3}\right]$

c) $\left[2 - \frac{1}{3} ; 2 + \frac{1}{3}\right]$ **d)** $\left[5 - \frac{1}{n} ; 5 + \frac{1}{n}\right]$ où $n \in \mathbb{N}^*$

2. Donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant $\sqrt{2}$.
3. Donner un encadrement entre deux décimaux d'amplitude 10^{-2} contenant π.

Inégalités et comparaison

78 Soit x un nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 12$.
À quel intervalle appartient le résultat de chacune des expressions suivantes ?

a) $\frac{2x+8}{5}$ **b)** $4x$ **c)** $\frac{8-x}{2}$ **d)** $10 - 0{,}2x$

79 m est un nombre dont une valeur approchée à 10^{-2} près est 10,54.
1. Donner un encadrement de m à l'aide de deux nombres ayant trois chiffres après la virgule.
2. En déduire un encadrement de 1 000 m.

80 **1.** Calculer la valeur exacte du périmètre p d'un cercle de rayon 10 m.
2. Donner un encadrement de p en utilisant l'encadrement :
a) $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ **b)** $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$.
3. Quel encadrement de π faut-il prendre pour obtenir p avec une précision de 1 cm ?

81 En 2018, pour Mme Lucas dont le revenu brut global R appartient à l'intervalle [27 086 ; 72 617] (en euros), le montant de l'impôt est donné par la formule :
$$I = 0{,}3R - 5\,706{,}74$$
Donner un encadrement du montant de l'impôt de Mme Lucas.

82 Physique Chimie
Théo roule à une vitesse comprise entre 15 et 17 km/h sur son vélo
Quelle distance peut-il avoir parcourue en 3 h 30 min ?

83 Physique Chimie
Un conducteur ohmique de résistance $R = 40\ \Omega$ est traversé par un courant électrique d'intensité $I = 90$ mA mesurée à 1 % près.
Que peut-on dire de la tension U aux bornes du conducteur ohmique sachant que $U = RI$ (où U est en volts, Ω en ohms et I en ampères) ?

Démonstration

84 **1.** On considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$.
a) Calculer $(b + c) - (a + c)$ et comparer le résultat à 0.
b) Recopier et compléter par $<$ ou $>$.

On a donc $a + c$ **...** $b + c$

2. On considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et un nombre réel $k > 0$.
a) En observant que $kb - ka = k(b - a)$, que peut-on dire du signe (positif ou négatif) de $kb - ka$?
b) Recopier et compléter par $<$ ou $>$.

On a donc ka **...** kb

3. D'une manière analogue à la question **2.**, montrer que si $a < b$ et $k < 0$ alors $ka > kb$.

85 Soit a et b deux nombres réels tels que $a < 7$ et $b < 8$.
Que peut-on en déduire pour :
a) $a + b$? **b)** $2a + b$? **c)** $a + 3b$?

Coup de pouce Utiliser la propriété :
si a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

86 Soit x et y deux nombres réels tels que $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$. Que peut-on en déduire pour :
a) $x + y$? **b)** $x + 3y$? **c)** $x - y$? **d)** $2x - 3y$?

Exercices d'entraînement

87 La largeur ℓ et la longueur L d'un rectangle sont telles que $2{,}4 \leqslant \ell \leqslant 2{,}5$ et $5{,}54 \leqslant L \leqslant 5{,}56$.
1. Donner un encadrement du périmètre p de ce rectangle.
2. Donner un encadrement de p entre deux nombres décimaux ayant une décimale.

88 **1.** A, B et C sont trois nombres strictement positifs tels que A > B > C. Comparer :
a) $\frac{A}{B}$ et 1 **b)** $\frac{C}{B}$ et 1.
2. a) Comparer $3\sqrt{2} + 4$ et 7 sachant que $\sqrt{2} > 1$.
b) $\frac{3\sqrt{2} + 4}{7}$ est-il supérieur à 1 ?
3. x est un nombre réel supérieur ou égal à 1.
Que peut-on dire de $\frac{2x + 3}{2x + 7}$ par rapport à 1 ?

89 On considère les deux programmes suivants. **Algo & Prog**

Programme 1
```
t=float(input("Saisir t : "))
y=4*t
x=y+2
print(x)
```

Programme 2
```
t=float(input("Saisir t : "))
r=t+6
x=0.5*r
print(x)
```

Comparer les résultats affichés selon les valeurs de t si on rentre la même valeur de t dans les deux programmes.

90 **1.** Quel est le signe (positif ou négatif) de x^2 suivant les valeurs de x ?
2. Comparer $2 + x + x^2$ et $1 + x$.

Inéquations du 1er degré et problèmes

91 Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.
a) $\frac{5}{2}x + 4 > x + 6$ **b)** $\frac{14}{3}x \leqslant 2x - \frac{1}{3}$
c) $\frac{7}{9}x + 4 \geqslant \frac{1}{3}x - 3$ **d)** $-\frac{1}{2}x - 1 < \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}$

92 Éléonore dit qu'elle a trouvé des nombres solutions de l'inéquation $4x + \frac{1}{2} > 4(x + 5) + 1$.
Qu'en pensez-vous ?

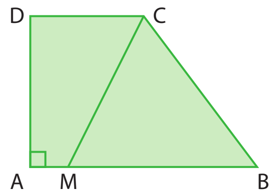
93 Samy dit que tous les nombres réels sont solutions de l'inéquation $-3x + 7 \geqslant 5 - 3x$.
Qu'en pensez-vous ?

94 Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.
a) $3x + 5 \leqslant 4 + 3x$ **b)** $5x - 2 > 5(x - 3) + 1$.

95 Le cours d'une action a augmenté de 30 % en un an. Elle vaut maintenant 162,5 euros. Combien valait-elle un an auparavant ?

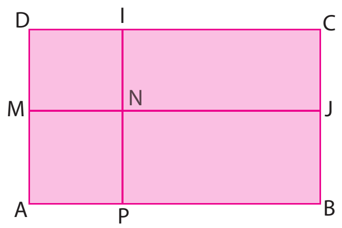
96 Les légionnaires romains, sur le champ de bataille, se disposaient en carré pour une plus grande efficacité. La compagnie de Brutus était telle que si elle avait comporté 36 hommes de plus, le carré ainsi formé aurait eu 2 rangées de plus. Combien d'hommes comporte cette compagnie ?

97 Un pré est représenté par un trapèze rectangle ABCD tel que AB = 12, AD = 8 et DC = 5 en dam.



On souhaite partager ce pré par un segment [CM] où M est un point du segment [AB] en deux parcelles ADCM et CBM.
On pose AM = x.
1. Déterminer la valeur de x pour que les deux aires soient égales.
2. Pour quelle valeur de x l'aire de ADCM est-elle supérieure à celle de CBM ?

98 ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AD = 3 cm.
M est un point du segment [AD] On place alors les points P sur [AB] et N tel que AMNP soit un carré.
Le point I est l'intersection de (PN) et (CD) et le point J est celle de (BC) et (MN).



1. À quelle distance du point A faut-il placer M pour que les aires de AMNP et CJNI soit égale ?
2. À quelle distance du point A faut-il placer M pour que le périmètre de NICJ soit supérieur à 10 ?

99 Clara a eu quatre contrôles ce trimestre. Elle a eu 10/20 et 15/20 aux deux premiers. Sachant qu'elle a obtenu la même note aux contrôles 3 et 4 et que sa moyenne trimestrielle est supérieure à 14, quelles sont les notes possibles de Clara aux deux derniers contrôles ?

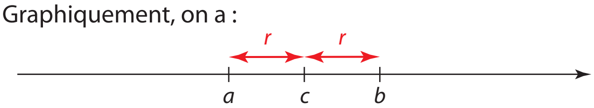
Exercices d'entraînement

Valeurs absolues

100 Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels x vérifiant :
a) $|x - 10| \leqslant 1$ **b)** $|x - 2{,}5| \leqslant 0{,}2$ **c)** $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{2}$

101 Déterminer l'ensemble (sous forme d'intervalle) des réels x vérifiant :
a) $|x + 5| \leqslant 3$ **b)** $|x + 1| \leqslant 2$ **c)** $|x - 3| < 1$

102 On considère un intervalle $[a\,;b]$ avec a et b deux nombres réels.
On appelle **centre** de l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre $c = \frac{a+b}{2}$
et **rayon** de l'intervalle $[a\,;b]$ le nombre $r = \frac{b-a}{2}$.
Graphiquement, on a :



1. a) Calculer le centre et le rayon de $[2\,;6]$.
b) Traduire $|x - 4|$ en termes de distance entre deux réels.
c) Recopier et compléter : $x \in [2\,;6] \Leftrightarrow |x - 4| \leqslant$ ...
2. De la même manière, recopier et compléter :
a) $x \in [1\,;25] \Leftrightarrow |x - 13| \leqslant$ ...
b) $x \in [6\,;20] \Leftrightarrow |x - \ldots| \leqslant$ ...
c) $x \in [1{,}2\,;3] \Leftrightarrow |x - \ldots| \leqslant$ ...

103 Écrire une inégalité vérifiée par x et utilisant une valeur absolue dans les cas suivants.
a) $x \in [-4\,;5]$ **b)** $x \in [0\,;1{,}1]$ **c)** $x \in \left[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$

104 Écrire une inégalité vérifiée par x dans les cas suivants.
a) $|x - 4| \leqslant 10$ **b)** $|x + 2| \leqslant 8$ **c)** $|x + 5| \leqslant \frac{1}{3}$

Démonstration

105 En distinguant les cas
$a > 0$ et $a < 0$, démontrer que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Équation linéaire à deux inconnues

106 On considère l'équation à deux inconnues réelles $4x - 2y = 6$.
1. a) Montrer que si $x = 1$ et $y = -1$ alors l'égalité est vérifiée.

Remarque On dit que le couple $(1\,;-1)$ est solution de l'équation $4x - 2y = 6$.

2. Déterminer si les couples suivants sont solutions de l'équation.
a) $(-2\,;-6)$ **b)** $(7\,;11)$ **c)** $(1{,}5\,;0)$
3. Trouver y pour que le couple $(4\,;y)$ soit solution de l'équation.
4. Exprimer y en fonction de x d'après l'équation.

Remarque Une équation d'inconnues x et y de la forme $ax + by = c$ (avec a, b et c trois nombres réels) est appelée une équation linéaire à deux inconnues.
Comme pour les équations de 1er degré, on obtient des équations équivalentes lorsque l'on ajoute un même nombre, multiplie ou divise par un même nombre non nul les membres d'une équation linéaire à deux inconnues.

107 On considère l'équation $3x + y = -7$.
1. Montrer que le couple $(-1\,;-4)$ est solution de cette inéquation.
2. Si $y = -15$, trouver x pour que le couple $(x\,;y)$ soit solution de l'équation.
3. si $x = -\frac{1}{2}$, trouver y pour que le couple $(x\,;y)$ soit solution de l'équation.
4. Exprimer y en fonction de x.

108 On considère l'équation $4x + 12y = 76$.
1. Montrer que le couple $(4\,;5)$ est solution de cette inéquation.
2. Trouver x pour que le couple $\left(x\,;-\frac{1}{5}\right)$ soit solution de l'équation.
3. Exprimer x en fonction de y.
4. Exprimer y en fonction de x.

Travailler autrement

En groupe

109 Essayer de répondre le plus rapidement possible aux questions suivantes face à l'un de vos camarades de classe.
1. a est le seul nombre entier naturel divisible par 3 tel que $a \in]-\infty\,;9{,}01[\cap [6{,}99\,;+\infty[$. Que vaut a ?
2. b est le résultat de $\frac{|5-7|}{2} + |9-6|$. Déterminer b.
3. c est la somme des quatre premières décimales de $\sqrt{2}$. Trouver c.
4. d est la distance entre $-1\,001$ et -999. Donner la valeur de d.
5. Résoudre l'inéquation $ax + b > cx + d$.
6. Quel est le plus grand nombre entier appartenant à l'ensemble des solutions de l'inéquation de la question **5** ?

110 Résoudre le problème suivant. **Problème ouvert**
Le groupe écrira un compte-rendu détaillant la démarche effectuée et une conclusion au problème.

Lou et Harry ont délimité chacun leur jardin de forme rectangulaire.
Le jardin de Lou mesure 6 mètres sur 5 et celui de Harry mesure 2 mètres sur 12,5.
Ils envisagent chacun d'augmenter les côtés (longueur et largeur) de leur jardin d'une même mesure de x mètres comprise entre 50 cm et 5 m.
Comparer les surfaces des jardins de Lou et Harry suivant les valeurs de x.

Exercices bilan

111 Les bons intervalles

Recopier et compléter les phrases suivantes en donnant l'intervalle qui correspond.

a) L'ensemble des nombres réels x tels que $x < 7$ est....

b) L'ensemble des nombres réels t tels que $1 < t \leqslant 101$ est ....

c) L'intersection de $[-2\,;+\infty[$ et $]-4\,;5]$ est ....

d) $[0\,;5] \cup [4{,}5\,;9[=$ ....

e) Si $x \in [-3\,;5]$ alors $x + 10 \in$ ....

f) Si $x > 0$ et $k < 0$ alors $kx \in$ ....

g) Si $0 \leqslant a \leqslant 10$ alors $-2a + 3 \in$ ....

h) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x + 3 < 2x - 6$ est ....

112 Solutions diverses

On considère les inéquations $4x + 6 \geqslant 0$ et $-2x + 11 \geqslant 0$ d'inconnue réelle x.

1. (–1,5) est-il solution de ces deux inéquations ?

2. Proposer, en justifiant, un autre nombre solution de ces inéquations.

3. Résoudre ces deux inéquations.

4. Proposer un nombre qui est solution de $4x + 6 \geqslant 0$ mais qui n'est pas solution de $-2x + 11 \geqslant 0$.

113 Fabrication artisanale de jus de fruit TICE

Ayoub souhaite fabriquer du jus de fruit. Pour cela, il a acheté une machine à 149 euros. La fabrication de 1 litre lui revient ensuite à 80 centimes pour les matières premières. Il décide de vendre le litre de jus de fruit à 2,40 euros.
Il construit une feuille de calcul suivante pour analyser les coûts et les recettes.

	A	B	C
1	Nombre de litres de jus de fruit	Coût (en euros)	Recette (en euros)
2	0	149,00	0,00
3	1	149,80	2,40
4	2	150,60	4,80
5	3	151,40	7,20
6	4	152,20	9,60
7	5	153,00	12,00
8	6	153,80	14,40
9	7	154,60	16,80
10	8	155,40	19,20
11	9	156,00	21,60
12	10	157,00	24,00
13	11	157,80	26,40
14	12	158,60	28,80

1. a) Quelle formule Ayoub a-t-il saisie dans la cellule B2 et recopiée vers le bas pour obtenir les résultats de la colonne B ?

b) Quelle formule a-t-il saisie dans la cellule C2 et recopiée vers le bas pour obtenir les résultats de la colonne C ?

2. Il souhaite connaître le nombre de litres de jus de fruit à fabriquer et vendre pour faire un bénéfice positif.

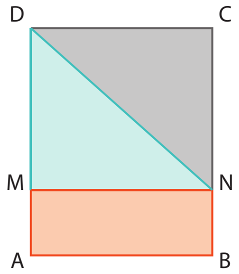
a) Poser une inéquation modélisant ce problème.

b) Déterminer l'ensemble des solutions.

3. Quelle formule Ayoub pourrait-il saisir dans la cellule D2 et recopier vers le bas pour obtenir le gain réalisé ?

114 Comparaison d'aires

ABCD est un rectangle tel que AB = 8 et AD = 10.
M est un point du segment [AD] et N est le point de [BC] tel que ABNM est un rectangle.
On pose $x = \text{AM}$.



1. À quel intervalle appartient x ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de ABNM est-elle supérieure ou égale à celle du triangle NDC ?

115 Distances et valeur absolue Algo & Prog

On considère l'expression $A = |x - 2{,}5|$.

1. Que vaut A si on remplace x :

a) par 5 ?

b) par –7 ?

2. A-t-on $|x - 2{,}5| = x + 2{,}5$ pour tout réel x ? Justifier.

3. On donne l'algorithme suivant. Le compléter pour qu'il calcule et affiche la distance entre x et 2,5.

```
x=float(input("Saisir x :"))
if x>=...:
    distance=...
else:
    distance=...
print(distance)
```

116 Écriture d'un programme Algo & Prog

1. On considère l'inéquation $ax + b < c$ où a, b, c sont des nombres réels et a est non nul ainsi que l'algorithme incomplet suivant.

```
Saisir a
Saisir b
Saisir c
solut ←(c-b)/a
Si a < 0
  Afficher "S=]solut;+infini["
sinon
  Afficher ...
Fin si
```

a) Exécuter cet algorithme (sans tenir compte des pointillés) en choisissant $a = -5$; $b = 9$ et $c = 104$.
Que va-t-il afficher ?

b) Réécrire et compléter l'algorithme ci-dessus qui demande à un utilisateur les valeurs de a, b et c de l'inéquation et qui renvoie l'ensemble des solutions de cette inéquation.

2. Écrire un algorithme donnant l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + b < cx + d$ où a, b, c et d sont des nombres réels (attention à faire en sorte de traiter tous les cas possibles).

Démonstration

117 Somme d'inégalités

On se propose de démontrer que si a, b, c et d sont quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$.

1. Comparer $a + c$ et $b + c$.
2. Comparer $b + c$ et $b + d$.
3. Que peut-on en déduire ?

118 Multiplication d'inégalités (1)

a, b, c et d sont quatre nombres réels strictement positifs tels que $a < b$ et $c < d$.

1. Comparer ac et bc.
2. Comparer bc et bd.
3. Que peut-on en déduire ?
Énoncer la propriété démontrée.
4. Cette propriété est-elle vraie pour tous nombres réels a, b, c et d ?

119 Multiplication d'inégalités (2)

SVT Physique Chimie

À l'aide de la propriété démontrée dans l'exercice précédent, répondre aux questions suivantes.
Ces questions sont indépendantes.

1. La Terre a la forme d'une sphère, aplatie au niveau des pôles.
En supposant que le rayon de la Terre est compris entre 6 352 km et 6 385 km, et que π est compris entre 3,14 et 3,15, donner un encadrement de la circonférence de la Terre.
2. L'accueil d'une compagnie d'assurances estime qu'elle reçoit chaque jour entre 35 et 50 clients. Chacun d'entre eux restant entre 2 min et 10 min, que peut-on dire du temps que doit mobiliser le service d'accueil pour les clients ?
3. Dans le bilan d'une prise de sang, il est signalé que la glycémie (concentration de glucose dans le sang) doit normalement se situer entre 0,74 et 1,06 g/L. On a prélevé 50 mL de sang avec une précision de 1mL chez une personne dont la glycémie est normale (située entre les deux valeurs de référence).
Donner un encadrement de la masse en gramme de glucose présente dans ce prélèvement.

120 Vrai ou faux ?

Logique

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Propriété 1 Pour tous nombres réels a et b on a $|a + b| = |a| + |b|$.

Propriété 2 Il existe des nombres réels a et b tels que $|a + b| = |a| + |b|$.

Propriété 3 Pour tout nombre réel a on a $|-a| = |a|$.

121 Valeurs absolues et intervalles

1. Expliquer graphiquement pourquoi $|X| \leqslant r \Leftrightarrow -r \leqslant X \leqslant r$.
2. Montrer que $|x - a| \leqslant r \Leftrightarrow x \in [a - r \,;\, a + r]$.

122 Systèmes d'inéquations

On considère le système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} 3x + 100 > 172 \\ 100 + 50x \geqslant 75x - 627 \end{cases}$$

Trouver les nombres entiers naturels pairs solutions de ce système.

Coup de pouce Pour être solution de ce système d'inéquations, un nombre doit être solution des deux inéquations.

123 Valeurs absolues et (in)équations

1. Trouver les deux nombres solutions de $|x| = 4$.
2. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 10| = 1{,}5$.
a) Exprimer $|x - 10|$ en termes de distance.
b) Tracer une droite graduée, y placer 10 et trouver les deux nombres réels tels que leur distance avec x est égale à 1,5.

Remarque Ce sont les solutions de l'équation $|x - 10| = 1{,}5$.

3. De la même manière, résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $|x - 3| = 4$ **b)** $|x + 5| = 12$
4. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de :
a) $|x + 3| < 0{,}3$ **b)** $|x - 10| \geqslant 1{,}1$

Vers la 1re

Orientation

124 Spécialité Maths

Dans un repère (O, I, J), tracer l'ensemble des points dont les coordonnées $(x \,;\, y)$ vérifient $y = |x|$.

125 STL STI2D STMG

La population d'une ville en 2018+n est modélisée par la formule $p(n) = 21\,000 + 510n$ pour tout entier naturel n. Par exemple, en 2020 (qui vaut 2018+2), la population est de $21\,000 + 510 \times 2 = 22\,020$ habitants.

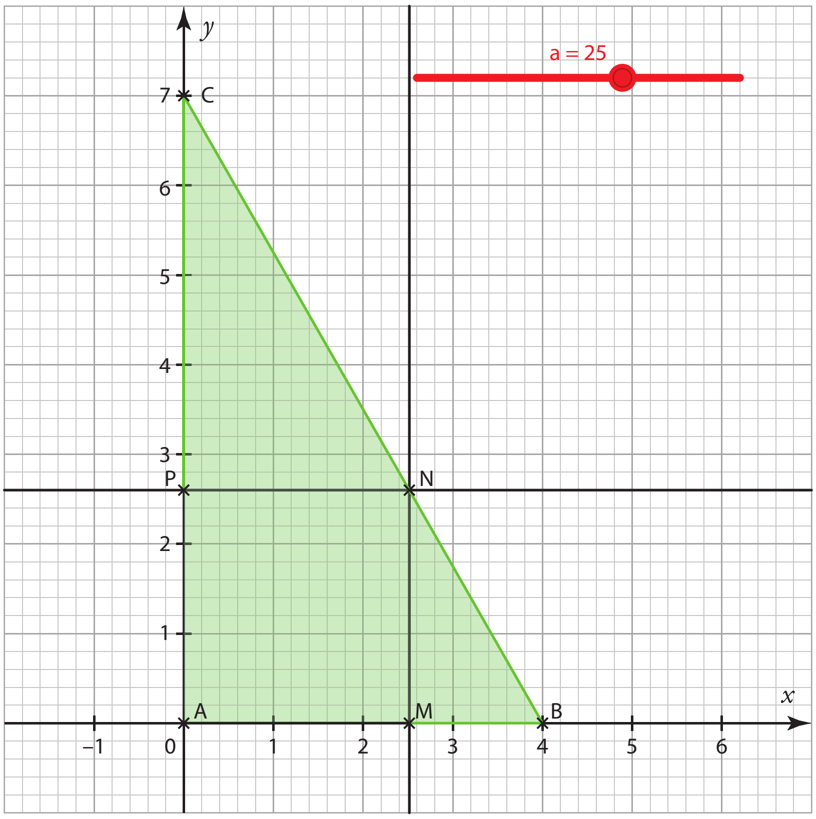
1. Calculer la population en 2021 avec ce modèle.
2. En quelle année la population dépasse-t-elle 25 000 habitants avec ce modèle ?

Travaux pratiques

TICE — Chercher, Raisonner — 45 min

1 Recherche d'un lieu de points

Agathe possède un jardin de forme triangulaire dans lequel elle souhaite construire un enclos rectangulaire. Elle possède 12 mètres de grillage au maximum pour fermer cet enclos.
On donne la copie d'écran de Géogebra ci-dessous schématisant la situation.
ABC correspond au jardin, AMNP à l'enclos. Les distances sont exprimées en mètres.
ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 et AC = 7.
M est un point du segment [AB].
N est le point de [BC] et P le point de [AC] tel que AMNP est un rectangle.



A ▸ Conjecture avec un logiciel

1. Dans un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur nommé a allant de 0 à 4 avec un incrément de 0,01.
2. Reproduire la figure ci-dessus dans laquelle M a pour coordonnées $(a\ ;0)$.
3. À l'aide du logiciel, répondre au problème en précisant la (ou les) valeur(s) possibles de a.

Coup de pouce On pourra créer une variable « périmètre » en écrivant le calcul à effectuer dans la partie algèbre du logiciel afin qu'il affiche le périmètre de AMNP.

B ▸ Résolution algébrique

1. En considérant a = AM, modéliser le problème à l'aide d'une inéquation.
2. Répondre au problème de manière algébrique et contrôler les résultats observés avec le logiciel.

Coup de pouce Montrer que MN = $7 - 1{,}75a$.

TICE Chercher, Calculer 30 min

2 Comparaison à l'aide du tableur

En recherchant un emploi, Boris a trouvé deux offres.

• **Dans l'entreprise A :** un salaire annuel de 24 000 euros puis une augmentation de ce salaire annuel de 1 300 euros par an.

• **Dans l'entreprise B :** un salaire mensuel de 1 750 euros puis une augmentation de ce salaire mensuel de 140 euros à chaque date anniversaire du contrat de travail.

Boris a commencé à compléter une feuille de tableur pour comparer ces deux offres.

Il souhaite savoir au bout de combien d'années le salaire dans l'entreprise B deviendra plus élevé que celui dans l'entreprise A.

	A	B	C
1	Année n°	Salaire dans l'entreprise A (en euros)	Salaire dans l'entreprise B (en euros)
2	1	24 000	21 000
3	2	25 300	22 680
4	3	26 600	24 360
5	4	27 900	26 040
6	5	29 200	27 720
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		
12	11		
13	12		

A ▸ Conjecture avec un tableur

1. Reproduire et compléter la feuille de tableur de Boris en utilisant les cellules, des formules et la recopie vers le bas du tableur.

2. Donner les formules permettant le calcul des cellules B7 et C7.

3. Donner le numéro de l'année répondant au problème de Boris.

B ▸ Résolution algébrique

1. Montrer que le salaire annuel dans l'entreprise A à l'année numéro n (avec n entier non nul) est donné par la formule $22\,700 + 1\,300\,n$.

2. En considérant les salaires dans les deux entreprises l'année numéro n (avec n entier non nul), modéliser le problème à l'aide d'une inéquation.

3. Répondre au problème de manière algébrique.

4. Pour aller plus loin : Boris souhaite maintenant déterminer le numéro de l'année à la fin de laquelle la somme cumulée de tous les salaires dans l'entreprise B dépasse celle de tous les salaires dans l'entreprise A. Utiliser le tableur pour l'aider à répondre.

En autonomie

1 Travailler avec des intervalles

QCM

126 Le nombre 4,7 appartient à :

a [3 ; 4,7[b [6 ; 10,1]
c [–5 ; 4,72[d [0 ; 4,69]

127 $x < 3$ est équivalent à :

a $x \in]-\infty ; 3]$ b $x \in]-\infty ; 3[$
c $x \in]3 ; +\infty[$ d $x \in [3 ; +\infty[$

128 [6 ; 10[∪ [7 ; 15[est égal à :

a ∅ b [7 ; 10[c]7 ; 10[d [6 ; 15[

129 [6 ; 10[∩ [7 ; 15[est égal à :

a ∅ b [7 ; 10[c]7 ; 10[d [6 ; 15[

130 $x \geqslant 0$ est équivalent à :

a $x \in]-\infty ; 0]$ b $x \in [0 ; +\infty[$
c $x \in]0 ; +\infty[$ d $x \in \mathbb{R}+$

131 ✶ **1.** Représenter sur une droite munie d'une origine et d'une graduation, l'intervalle [–1 ; 3,5].
2. Donner quatre nombres appartenant à cet intervalle.
3. Donner quatre nombres n'appartenant pas à cet intervalle.

132 ✶ Écrire l'inégalité ou l'encadrement vérifié par les réels x tels que :
a) $x \in [-3 ; 16]$ **b)** $x \in [-8 ; +\infty[$

133 ✶ Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que :
a) $5 < x \leqslant 12$ **b)** $4 \geqslant x$ **c)** $0 > x > -1$

134 ✶✶ La proposition si $10{,}52 \leqslant x \leqslant 15{,}38$ alors $x \in [10{,}54 ; 15{,}4]$ est-elle vraie ou fausse ?

135 ✶✶ Donner l'intersection et la réunion des intervalles [–3 ; 5[et]–3 ; 8].

2 Manipuler des inégalités et des inéquations

QCM

136 L'inéquation $3x - 8 < 25$ a pour ensemble de solutions :

a [0 ; 11] b]–∞ ; 11]
c [11 ; +∞[d]–∞ ; 11[

137 L'inéquation $-2x + 10 \leqslant 12x + 150$ a pour ensemble de solutions :

a [–10 ; +∞[b]–∞ ; –10]
c]–10 ; +∞[d]–∞ ; 14[

138 Si $x > 5$ alors :

a $-3x < -15$ b $-2x > -10$
c $4x > 40$ d $-5x > 0$

139 ✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle.
a) $4x + 7 > -3x + 63$ **b)** $-10x + 5 > 0$
c) $\frac{1}{2}x + 5 \geqslant x - 5$ **d)** $\frac{x+3}{2} < 1$

140 ✶ On sait que x est un nombre réel tel que $-2 < x \leqslant 10$.
Donner un encadrement de $5x$ et de $x - 12$.

141 ✶ On sait que $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$.
Donner un encadrement de $\sqrt{5} - 1$ puis de $5\sqrt{5}$.

142 ✶✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{4}x + \frac{8}{7}$.

143 ✶✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$2x(x + 5) - 7 \geqslant 2x^2 - 7x + 3$.

144 ✶✶ On sait que x est un nombre réel tel que $-\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{5}{3}$.
Peut-on affirmer que $-1 < -3x + 5 < 8$?

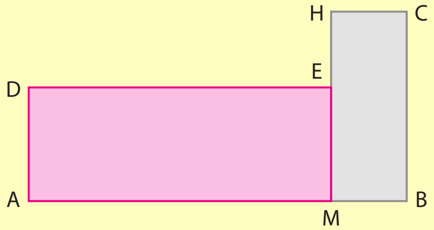
145 ✶✶ Trouver l'ensemble des valeurs de x telles que $2x + 5 < 0$ et $-5x - 4 < 20$.

3 Modéliser par une inéquation

QCM

Pour les exercices 146 à 149, on considère la figure suivante.

On considère un segment [AB] de longueur 10 cm, un point M sur ce segment et les deux rectangles AMED et MBCH tels que AD = 3 cm et BC = 5 cm.
On note AM = x.



146 Parmi les inéquations suivantes laquelle permet de chercher les valeurs de x telles que le périmètre de AMED est inférieur ou égal à 10 ?

a $6 - 2x \leqslant 10$ b $6 + 2x \leqslant 10$
c $3x \leqslant 10$ d $6 - 2x \geqslant 10$

147 Parmi les inéquations suivantes, laquelle permet de chercher les valeurs de x telles que l'aire de MBCH est supérieure à 14 ?

a $50 - 5x > 0$ b $50 - 5x > 14$
c $50 - 5x < 14$ d une autre inéquation

148 ✶ **1.** À quel intervalle appartient x ?
2. Exprimer l'aire de la figure ABCHED en fonction de x.
3. On souhaite que l'aire de la figure soit supérieure ou égale à 37. Modéliser ce problème par une inéquation.

149 ✶ Donner un intervalle qui contient les nombres 4 ; 5,7 et –3,2.

150 ✶ Une association souhaite mettre en place une tombola pour préparer un prochain voyage. Les tickets et les quelques lots qu'elle a achetés en plus de ceux offerts par des commerçants lui ont coûté 125 euros. L'association prévoit de vendre 500 tickets. Elle souhaite déterminer un prix de vente du ticket pour qu'elle obtienne un bénéfice supérieur à 750 euros.
Modéliser ce problème en posant une inéquation et déterminer les solutions.

151 ✶✶ Jeanne a choisi un nombre réel. Elle dit que si elle lui retranche 4 et qu'elle met le résultat au carré alors le résultat final est supérieur au carré de son nombre de départ.
Que peut-on dire du nombre choisi par Jeanne ?

152 ✶✶ Pour quelle(s) valeur(s) du nombre réel a la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est supérieure ou égale à 12 ?

Coup de pouce Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet passe par le milieu du côté opposé à ce sommet.

4 Calculer et interpréter des valeurs absolues

QCM

153 $|-4{,}12|$ est égale à :

a 4 b 4,12 c –4,12 d 4,12 ou –4,12

154 La distance entre 5 et $\frac{1}{4}$ est égale à :

a 4,75 b $-\frac{19}{4}$ c $\frac{21}{4}$ d $\left|5 + \frac{1}{4}\right|$

155 $|x - 2| \leqslant 2$ est équivalent à :

a $x \in [-2 ; 0]$ b $x \in [0 ; 4]$
c $x \in [0 ; 2]$ d $x \in [2 ; 4]$

156 $|x - 5| \leqslant 2$ est équivalent à :

a $2 \leqslant x \leqslant 5$ b $-5 \leqslant x \leqslant 5$
c $3 \leqslant x \leqslant 7$ d $-2 \leqslant x \leqslant 2$

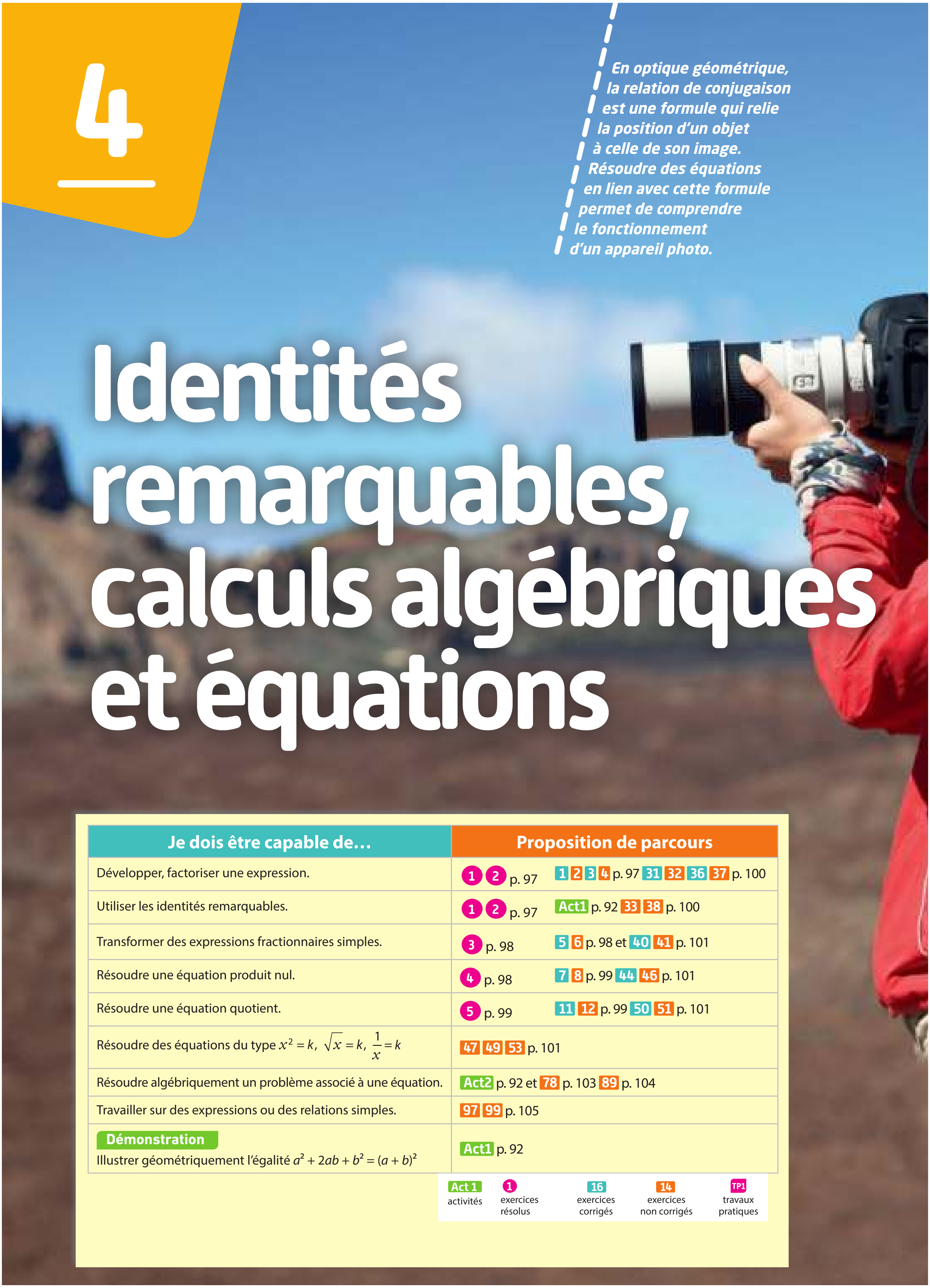
157 ✶ Écrire la distance entre x (avec x un nombre réel) et 3 en utilisant la notation de valeur absolue.

158 ✶ **1.** Calculer la distance entre –2 et 10.
2. Calculer la distance entre –2 et $\frac{10}{3}$.
3. La distance entre 10 et $\frac{10}{3}$ est-elle égale à $12 + \frac{16}{3}$?

159 ✶ Sachant que $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, écrire sans la notation de valeur absolue :
a) $|\sqrt{7} - 12|$ **b)** $|\sqrt{7} + 3|$ **c)** $|2 - \sqrt{7}|$

160 ✶✶ x est un nombre réel tel que $|x + 4| \leqslant 12$.
À quel intervalle appartient x ?

161 ✶✶ x est un nombre réel tel que $\left|x - \frac{1}{5}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
À quel intervalle appartient x ?



4

En optique géométrique, la relation de conjugaison est une formule qui relie la position d'un objet à celle de son image. Résoudre des équations en lien avec cette formule permet de comprendre le fonctionnement d'un appareil photo.

Identités remarquables, calculs algébriques et équations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Développer, factoriser une expression.	1 2 p. 97	1 2 3 4 p. 97 31 32 36 37 p. 100
Utiliser les identités remarquables.	1 2 p. 97	Act1 p. 92 33 38 p. 100
Transformer des expressions fractionnaires simples.	3 p. 98	5 6 p. 98 et 40 41 p. 101
Résoudre une équation produit nul.	4 p. 98	7 8 p. 99 44 46 p. 101
Résoudre une équation quotient.	5 p. 99	11 12 p. 99 50 51 p. 101
Résoudre des équations du type $x^2 = k$, $\sqrt{x} = k$, $\frac{1}{x} = k$	47 49 53 p. 101	
Résoudre algébriquement un problème associé à une équation.	Act2 p. 92 et 78 p. 103 89 p. 104	
Travailler sur des expressions ou des relations simples.	97 99 p. 105	
Démonstration Illustrer géométriquement l'égalité $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	Act1 p. 92	

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-07

1. Repérer des formes développées

Parmi les expressions suivantes, chercher celles qui sont écrites sous forme développée et réduite.

$A = 4 + 2(5x - 7)$ $B = 4x^2 + 3x - 2$ $C = (x + 1)(4 + x)$ $D = 1 + x + x^3$

2. Développer des expressions

Développer, réduire puis ordonner les expressions suivantes.

$A = 4(5x - 7)$ $B = -2x(3 - 5x)$ $C = (x + 3)(4 + x)$ $D = (-2x + 4)(5 - 3x)$

3. Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

1. 5 est-il solution des équations suivantes ?

a) $-16 + 3x = -2x + 9$ **b)** $x^2 + 5 = 0$ **c)** $(x - 5)(x + 7) = 0$

2. -2 est-il solution des équations suivantes ?

a) $9 + 3x = -2x + 1$ **b)** $-2x^2 + 8 = 0$ **c)** $2x(6x - 4) = 0$

4. Résoudre des équations du 1er degré

Résoudre les équations suivantes.

a) $7x + 21 = 0$ **b)** $-3x + 5 = 9 - 5x$ **c)** $3x = 0$ **d)** $\frac{2}{3}x = 5$

5. Calculer avec des fractions

Sans calculatrice, exprimer sous la forme d'une seule fraction :

a) $5 + \frac{2}{3}$ **b)** $2 - \frac{1}{7}$

6. Chercher des antécédents

On considère une fonction f définie par $f(x) = 2x + 6$ pour tout nombre réel x. Déterminer les éventuels antécédents par la fonction f de :

a) 2 **b)** 0 **c)** $\frac{15}{2}$

7. Utiliser un tableur TICE

Sur tableur, on a obtenu la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D
1	x	3x	x^2-2	x^2+3x-2
2	0	0	-2	-2
3	1	3	-1	2
4	2	6	2	8
5	3	9	7	16
6	4	12	14	26
7	5	15	23	38
8	6	18	34	52
9	7	21	47	68

Remarque $x \wedge 2$ signifie x^2.

Pour obtenir cette feuille de calcul par recopie vers le bas, quelles formules peut-on saisir en :

a) B2 ? **b)** C2 ? **c)** D2 ?

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 95, 96, 102, 104, 107

Algo & Prog
p. 92, 93, 103, 104, 106, 107, 108

TICE
p. 91, 102, 109

Les autres disciplines
p. 103, 105, 107

Problème ouvert
p. 92, 93, 104

Activités

1 Découvrir les identités remarquables

TICE — 40 min

Ethan doit développer l'expression $(x + 3)^2$. Il écrit alors $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9$.
Voici une copie d'écran d'une feuille de tableur.

	A	B	C	D
1	x	$(x+3)^2$	x^2+9	$(x+3)^2-(x^2+9)$
2	-2	1	13	-12
3	-1	4	10	-6
4	0	9	9	0
5	1	16	10	6
6	2	25	13	12
7	3	36	18	18
8	4	49	25	24
9	5	64	34	30
10	6	81	45	36
11	7	100	58	42

1. En observant cette feuille de calcul, que peut-on dire du développement d'Ethan ?

2. Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B2, C2 et D2 pour obtenir cette feuille de calcul par recopie vers le bas ?

3. Conjecturer une relation entre x et $(x + 3)^2 - (x^2 + 9)$ (c'est-à-dire entre les colonnes A et D) puis recopier et compléter la conjecture sur la forme développée de $(x + 3)^2$:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 9 + \ldots.$$

4. Développer l'expression $(x + 3)^2$ sachant que $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$.

5. Cela valide-t-il votre conjecture ?

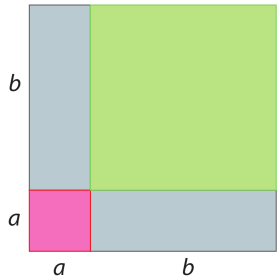
6. Développer l'expression $(a + b)^2$.

Remarque L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou dans l'autre sens $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ est une identité remarquable, c'est-à-dire une égalité qui est vraie pour n'importe quels nombres réels a et b et qui permet de développer ou factoriser facilement.

7. Développer l'expression $(a - b)^2$ pour obtenir une deuxième identité remarquable.

8. Développer l'expression $(a + b)(a - b)$ pour obtenir une troisième identité remarquable.

9. On considère la figure ci-contre.



a) Justifier que l'aire du grand carré est $(a + b)^2$.

b) Exprimer les aires de chacun des rectangles et carrés colorés en fonction de a et b.

c) Quelle identité remarquable vue plus haut vient-on d'expliquer graphiquement ?

↪ Cours 1 p. 94

2 Résoudre algébriquement un problème avec une équation

Problème ouvert — Algo & Prog — 45 min

Le professeur donne des programmes de calcul à étudier à ses élèves puis leur demande de tester des nombres mais Kader et Sophie n'en font qu'à leur tête !

```
Programme de Kader
▸ Choisir un nombre.
▸ Calculer son double.
▸ Additionner 4.
```

```
Programme de Sophie
▸ Choisir un nombre.
▸ Calculer son triple.
▸ Soustraire 7.
```

1. Ils veulent choisir le même nombre et obtenir le même résultat.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

2. Ils veulent choisir des nombres opposés (x et $-x$) et obtenir le même résultat.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

3. Ils veulent choisir le même nombre et que le produit de leurs résultats soit nul.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

4. Ils veulent choisir le même nombre et que les résultats de leurs programmes aient le même carré.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

↪ Cours 2 p. 95

Algo & Prog

25 min

3 Travailler avec une expression fractionnaire

On considère l'expression $A = \dfrac{3x+12}{x+2}$.

1. Calculer A pour $x = 2$ et pour $x = -3$.

2. a) Peut-on calculer A pour $x = -2$?

b) D'après-vous, existe-t-il d'autres nombres pour lesquels on ne peut pas calculer A ?

3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le résultat ci-contre.

a) Conjecturer une autre écriture de A pour tout nombre $x \neq -2$.

b) En utilisant une mise au même dénominateur, justifier que $3 + \dfrac{6}{x+2} = A$ pour tout $x \neq -2$.

↪ Cours 1 p. 94

30 min

4 Résoudre des équations quotients

On considère les équations suivantes d'inconnue réelle.

① $(x-2)(2x+1) = 0$	② $5x - 7 = 3x + 9$	③ $5x^2 - 10x = 0$
④ $\dfrac{5x+7}{2} = 0$	⑤ $5(1+x) - 3x = -2x + 3$	⑥ $\dfrac{x+2}{x-1} = 0$
⑦ $x^2 - 9 = 0$	⑧ $\dfrac{3x}{x+2} = 2$	⑨ $(2x+3)^2 = 0$

1. Parmi les équations précédentes quelles sont celles qu'il est possible de résoudre ?

2. On veut résoudre l'équation ⑥.

a) Quelle valeur ne peut pas prendre x ?

b) À quoi doit-être égal le numérateur d'une fraction pour qu'elle soit égale à 0 ?

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$.

3. En trouvant un moyen de se ramener au cas précédent, résoudre l'équation ⑧.

↪ Cours 2 p. 95

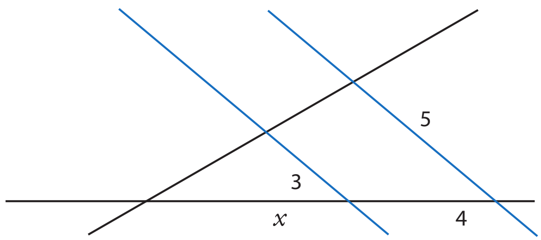
Problème ouvert

25 min

5 Modéliser un problème avec une équation

On considère le schéma ci-contre.

Quelle valeur faut-il donner à x pour que les deux droites bleues soient parallèles ?



↪ Cours 2 p. 95

Cours

1 Calcul algébrique et identités remarquables

Propriété Distributivité

- **Pour tous nombres réels a, b et k on a : $k(a+b) = ka + kb$.**
- **Pour tous nombres réels a, b, c et d on a : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.**

Remarque Ces règles permettent généralement de **développer** une expression.
La règle de distributivité permet aussi de **factoriser** si un facteur commun est apparent dans une somme, en l'utilisant de la manière : $ka + kb = k(a+b)$.

Exercices résolus 1 et 2 p. 97

Propriété Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $(a+b)^2 \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2 - b^2$

Remarques

- Dans le sens ①, les identités remarquables permettent de **développer** des expressions.
- Dans le sens ②, les identités remarquables permettent de **factoriser** des expressions.

Démonstration

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemples

① Pour développer : $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$ d'après la 2e identité remarquable.

② Pour factoriser : $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x+1)^2$ en remplaçant a par x et b par 1 dans l'égalité $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Exercices résolus 1 et 2 p. 97

Règle Écriture fractionnaire

Les règles de calcul habituelles des quotients comme la mise au même dénominateur peuvent être utilisées pour transformer des expressions fractionnaires si le(s) dénominateur(s) présent(s) dans l'expression est (sont) non nul(s).

Exemple

Pour $x \neq 2$, on a :
$$2x + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x}{1} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{x-2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x(x-2)+(x+1)}{x-2} = \frac{2x^2 - 4x + x + 1}{x-2} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-2}$$

Exercice résolu 3 p. 98

Remarque on signale au départ que $x \neq 2$. En effet, si on prend $x = 2$ le dénominateur $x - 2$ du quotient $\frac{x+1}{x-2}$ dans le calcul s'annulerait, ce qui n'est pas possible car on ne peut pas diviser par 0.

2 Quelques résolutions algébriques d'équations

Propriété Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.

Exemple

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+1)(x-7)=0$.

$(2x+1)(x-7)=0$ si et seulement si au moins l'un des facteurs vaut 0.

C'est-à-dire : $2x+1=0$ ou $x-7=0 \Leftrightarrow 2x=-1$ ou $x=7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=7$. Donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;7\right\}$.

Exercice résolu 4 p. 98

Propriété Résolution de l'équation $x^2=k$

On considère l'équation $x^2=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.

- **Si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k=0$, l'équation $x^2=k$ a une seule solution réelle $x=0$.**
- **Si $k>0$, l'équation $x^2=k$ a deux solutions réelles $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$.**

Démonstration

$x^2=k \Leftrightarrow x^2-k=0$.

- Si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'a pas de solution car le carré de tout nombre réel est positif.
- Si $k=0$, on obtient $x^2=0 \Leftrightarrow x\times x=0 \Leftrightarrow x=0$. Il n'y a donc qu'une seule solution : $x=0$.
- Si $k>0$ alors $k=(\sqrt{k})^2$. L'équation est alors équivalente à $x^2-(\sqrt{k})^2=0$.

Par factorisation en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2=k &\Leftrightarrow (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0 \\ &\Leftrightarrow x+\sqrt{k}=0 \text{ ou } x-\sqrt{k}=0 \\ &\Leftrightarrow x=-\sqrt{k} \text{ ou } x=\sqrt{k}. \end{aligned}$$

Donc si $k>0$, l'équation $x^2=k$ a deux solutions : $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$.

Exemples

1. $x^2=64 \Leftrightarrow x=\sqrt{64}$ ou $x=-\sqrt{64} \Leftrightarrow x=8$ ou $x=-8$. Donc $\mathcal{S}=\{-8\,;8\}$.
2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+4)^2=9$, on utilise la propriété précédente de la manière suivante :

$(2x+4)^2=9 \Leftrightarrow 2x+4=\sqrt{9}$ ou $2x+4=-\sqrt{9}$.

$\Leftrightarrow 2x+4=3$ ou $2x+4=-3 \Leftrightarrow 2x=-1$ ou $2x=-7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{7}{2}$. Donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{2}\right\}$.

Remarque On peut aussi utiliser une factorisation pour résoudre ce type d'équations.

Propriété Résolution de l'équation $\sqrt{x}=k$

On considère l'équation $\sqrt{x}=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.

- **Si $k<0$ l'équation $\sqrt{x}=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k\geqslant 0$ l'équation $\sqrt{x}=k$ a une seule solution réelle $x=k^2$.**

Exemple

L'équation $\sqrt{x}=4$ a pour solution $x=4^2=16$.

Propriété Quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.

Remarque La (les) valeurs pour la(les)quelle(s) le dénominateur s'annule est (sont) appelée(s) **valeurs interdites**. En effet, comme nous ne pouvons pas diviser par 0, le calcul ne peut pas être effectué.

Exemple

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+8}{x-2}=0$, on utilise la propriété : $\dfrac{2x+8}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2x+8=0$ et $x-2\neq 0$.

Déterminons tout d'abord la (ou les) valeurs interdites.

Pour cela, on résout $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

La valeur interdite est 2 : le dénominateur ne s'annule pas si $x\neq 2$.

$2x+8=0 \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{2} \Leftrightarrow x=-4$.

Comme -4 n'est pas une valeur interdite, c'est la solution de l'équation : $\mathcal{S}=\{-4\}$.

Exercice résolu 5 p. 99

Remarques

- Dans le cas d'une équation mettant en jeu plusieurs fractions, une mise au même dénominateur peut être utilisée pour obtenir une équation quotient-nul équivalente.
- Une équation du type $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ où A, B, C, et D sont des nombres ou expressions avec x est équivalente à $A\times D=B\times C$ avec B et D différents de 0.

  Cela permet parfois de réécrire l'équation sous condition de valeurs interdites.

Propriété Résolution de l'équation $\dfrac{1}{x}=k$

On considère l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:

- **Si $k=0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k\neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ a une seule solution réelle $x=\dfrac{1}{k}$.**

Démonstration

La valeur interdite est 0 : le dénominateur ne s'annule pas si $x\neq 0$.

- Si $k=0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=0$ n'a pas de solution car le numérateur 1 ne peut pas s'annuler.
- Si $k\neq 0$ on a : $\dfrac{1}{x}=k \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-k=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-\dfrac{kx}{x}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-kx}{x}=0 \Leftrightarrow 1-kx=0 \text{ et } x\neq 0.$$

$1-kx=0 \Leftrightarrow 1=kx \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{k}$ car k est non nul.

Exemple

L'équation $\dfrac{1}{x}=6$ a pour solution $x=\dfrac{1}{6}$.

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-08

Exercices résolus

1 Développer une expression

Cours 1 p. 94

En utilisant éventuellement une identité remarquable, développer, réduire et ordonner les expressions suivantes. $A = (5x - 2)(x - 3)$ $B = (x + 6)^2$ $C = (2t + 3)(2t - 3)$

Solution

On a : $A = (5x - 2)(x - 3) = 5x \times x + 5x \times (-3) - 2 \times x - 2 \times (-3) = 5x^2 - 15x - 2x + 6 = 5x^2 - 17x + 6$ **1**

On a : $B = (x + 6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$ **2**

On a : $C = (2t + 3)(2t - 3) = (2t)^2 - 3^2 = 4t^2 - 9$ **3**

Conseils & Méthodes

1 On utilise la règle de double distributivité.

2 On utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 6$.

3 On utilise l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2t$ et $b = 3$.

À vous de jouer !

1 Développer, réduire et ordonner ces expressions.

a) $(2x + 3)(x + 7)$ **b)** $(x - 1)^2$
c) $(3 + 2x)^2$ **d)** $(x - 1)(5 - x)$

2 Développer, réduire et ordonner ces expressions.

a) $3x(x + 1) + (x - 2)(3 - x)$ **b)** $(3t - 5)^2$
c) $(x + 10)(x - 10) - 100$ **d)** $3(x + 5)^2$

Exercices 31 à 35 p. 100

2 Factoriser une expression

Cours 1 p. 94

En utilisant ou non une identité remarquable, factoriser les trois expressions suivantes.
$A = (x - 2)(x - 1) + (2x + 7)(x - 2)$ $B = x^2 - 10x + 25$ $C = 9x^2 - 64$

Solution

• L'expression A ne ressemble pas à une identité remarquable. On remarque que c'est la somme de deux produits qui ont chacun pour facteur $(x - 2)$: c'est le facteur commun.

$A = \mathbf{(x - 2)}(5x - 1) + (2x + 7)\mathbf{(x - 2)}$ **1** $A = \mathbf{(x - 2)}[(5x - 1) + (2x + 7)]$ **2**

$A = (x - 2)[5x - 1 + 2x + 7]$ **3** $A = (x - 2)(7x + 6)$ **4**

• Dans l'expression B, aucun facteur commun ne semble visible. **5**
On remarque que x^2 est le carré de x et $25 = 5^2$.
L'expression B fait penser à l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ **5** où a serait x, b serait 5.
Vérifions si $2ab = 10x$: avec $a = x$ et $b = 5$, on trouve $2ab = 2 \times x \times 5 = 10x$.
On trouve donc : $B = x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = (x - 5)^2$ d'après l'identité remarquable.

• Dans l'expression C, aucun facteur commun ne semble visible.
On remarque que $9x^2$ est le carré de $3x$ car $(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$ et $64 = 8^2$.
L'expression C fait penser à l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
On trouve donc : $C = 9x^2 - 64 = (3x)^2 - 8^2 = (3x + 8)(3x - 8)$ d'après l'identité remarquable.

Conseils & Méthodes

1 On identifie un facteur commun dans l'expression.

2 On place le facteur commun en premier et on regroupe à l'intérieur des crochets les éléments restants en les séparant par « + » ou « – » suivants les cas.

3 On calcule à l'intérieur des crochets en enlevant les parenthèses. Une attention particulière est nécessaire lorsqu'il y a des signes « – » dans les calculs devant les parenthèses.

4 On simplifie les expressions à l'intérieur des parenthèses.

5 Lorsqu'il n'y a pas de facteur commun visible, l'hypothèse d'une utilisation d'une identité remarquable doit être envisagée pour factoriser. $x^2 - 10x + 25$ fait penser à $a^2 - 2ab + b^2$.

À vous de jouer !

3 Factoriser les expressions suivantes.

a) $(2x + 1)(x + 4) + (2x + 1)(5 - 4x)$ **b)** $x^2 + 4x + 4$
c) $36 - x^2$ **d)** $x^2 + 4x$

4 Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 6x + 9$ **b)** $x^2 + 20x + 100$
c) $4x(1 - 3x) - 4x(7 - 5x)$ **d)** $5x^2 - 15x$

Exercices 36 à 39 p. 100

Exercices résolus

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-08

3 Mettre au même dénominateur une expression fractionnaire

Cours 1 p. 94

Écrire sous la forme d'une fraction la plus simple possible les expressions.

$A = 4 + \dfrac{3}{x+1}$ et $B = \dfrac{2x+1}{2x-4} - 5$

Solution

• Pour $x \neq -1$, on a : **1** $A = 4 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4}{1} + \dfrac{3}{x+1}$

$A = \dfrac{4(x+1)}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{4(x+1)+3}{x+1} = \dfrac{4x+4+3}{x+1} = \dfrac{4x+7}{x+1}$ **2**

• Pour $x \neq 2$, on a : $B = \dfrac{2x+1}{2x-4} - 5 = \dfrac{2x+1}{2x-4} - \dfrac{5(2x-4)}{2x-4}$ **3**

$B = \dfrac{2x+1-5(2x-4)}{2x-4} = \dfrac{2x+1-10x+20}{2x-4} = \dfrac{-8x+21}{2x-4}$ **4**

Conseils & Méthodes

1 On remarque que le dénominateur $x + 1$ s'annule pour $x = -1$: x doit être différent de -1.

2 Dans cette expression fractionnaire le dénominateur commun est $x + 1$, on met donc 4 sur ce dénominateur commun.

3 Le dénominateur commun est $2x - 4$.

4 Attention au calcul avec le signe « – » entre les deux fractions.

À vous de jouer !

5 Écrire l'expression suivante sous la forme d'une fraction la plus simple possible $5 + \dfrac{1}{2x+10}$.

6 Écrire l'expression suivante sous la forme d'une fraction la plus simple possible $10 - \dfrac{x}{x-3}$.

Exercices 41 à 42 p. 101

4 Obtenir et résoudre une équation produit

Cours 2 p. 95

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes. a) $(5 - 2x)(x + 3) = 0$ b) $5x^2 - 25x = 0$

Solution

a) $(5 - 2x)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 0$ ou $x + 3 = 0$ d'après la règle du produit nul **1**

$\Leftrightarrow -2x = -5$ ou $x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$ ou $x = -3$.

Donc les solutions sont $\dfrac{5}{2}$ et -3.

b) $5x^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 5x = 0$ ou $x - 5 = 0$ d'après la règle du produit nul **2**

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$

Donc les solutions sont 0 et 5.

Conseils & Méthodes

1 On remarque que le membre à gauche de l'équation est un produit de facteurs et que le second membre est nul.
On est donc dans le cadre d'application de la règle du produit nul.

2 L'équation n'est pas de degré 1 et le membre à gauche de l'équation n'est pas un produit de facteurs. On peut factoriser pour se ramener dans le cadre d'application de la règle du produit nul.

À vous de jouer !

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(100 - 2x)(5x + 9) = 0$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$(5 - x)(3x - 1) - (4x + 2)(5 - x) = 0$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$

10 Résoudre dans l'équation
$4x(1 + x) - x(5 - 4x) = 0$

Exercices 44 à 46 p. 101

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-08

5 Obtenir et résoudre une équation quotient

Cours 2 p. 95

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{5x-4}{x-2}=0$ **b)** $\dfrac{4}{x+3}+2=0$ **c)** $\dfrac{x-10}{2x-6}=4$

Solution

a) $\dfrac{5x-4}{x-2}=0 \Leftrightarrow 5x-4=0$ et $x-2\neq 0$ **1**

On détermine tout d'abord la (ou les) valeur(s) interdite(s).

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$: la valeur interdite est donc 2.

$5x-4=0 \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{5}$ (qui est différent de 2).

La solution de l'équation est $\dfrac{4}{5}$.

b) $\dfrac{4}{x+3}+2=0$ **2**

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{x+3}+\dfrac{2(x+3)}{x+3}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x+3}+\dfrac{2x+6}{x+3}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+2x+6}{x+3}=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+10}{x+3}=0$

On a : $\dfrac{2x+10}{x+3}=0 \Leftrightarrow 2x+10=0$ et $x+3\neq 0$

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$: la valeur interdite est donc -3.

$2x+10=0 \Leftrightarrow 2x=-10 \Leftrightarrow x=\dfrac{-10}{2}=-5$ (qui est différent de -3).

La solution de l'équation est -5.

c) L'équation est équivalente à $\dfrac{x-10}{2x-6}-4=0$ que l'on peut résoudre avec la même méthode qu'à la question **b)**.

Proposons une autre méthode de résolution : on peut déterminer tout d'abord la ou les valeurs interdites.

$2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{2}=3$: la valeur interdite est donc 3.

Pour $x\neq 3$ et d'après les règles de résolution des équations, on a :

$\dfrac{x-10}{2x-6}=4 \Leftrightarrow (x-10)=4(2x-6)$ en multipliant par $(2x-6)$ (qui est différent de 0 si $x\neq 3$) les deux membres de l'égalité. **3**

On résout alors $x-10=4(2x-6)$:

$x-10=8x-24 \Leftrightarrow x-8x=-24+10 \Leftrightarrow -7x=-14 \Leftrightarrow x=\dfrac{-14}{-7}=2$. Attention, la méthode utilisée pour répondre à la question **c)** ne fonctionne pas lorsqu'on souhaite résoudre une inéquation.

2 est différent de la valeur interdite 3 : la solution de l'équation est 2.

Conseils & Méthodes

1 On remarque que cette équation est une équation quotient nul.

2 Le membre à gauche de l'équation n'est pas un quotient. On effectue une mise au même dénominateur.

3 Si l'équation est de la forme $\dfrac{A}{B}=k$ où k est un nombre, cela est aussi équivalent à résoudre $A=k\times B$ sous la condition que B ne s'annule pas.

À vous de jouer !

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3+x}{x+1}=0$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+1}{x+5}-4=0$.

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x}{x+1}=2$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{x+4}{x+2}-3=5$

b) $\dfrac{1}{2x+4}=8$

Exercices 50 à 53 p. 101

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

À l'oral

15 Chercher dans le dictionnaire les définitions mathématiques de « développer » et « factoriser ». Recopier ces deux définitions et les réciter à un camarade.

16 Écrire les trois identités remarquables qui permettent de factoriser une expression.

En groupe

17 **1.** Écrire trois équations que vous avez apprises à résoudre dans ce chapitre.
2. Les faire résoudre par un camarade.
3. Vérifier les solutions obtenues.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

18 Développer les expressions suivantes.
$A = 3x(x - 10)$ et $B = (x + 8)^2$

19 Compléter l'égalité suivante.
$$(x - \ldots)^2 = x^2 - 20x + \ldots.$$

20 Factoriser les expressions suivantes.
$A = 3x^2 + x$ et $B = 5x^2 - x$

21 Factoriser les expressions suivantes.
$A = x^2 - 25$ et $B = 4x^2 + 12x + 9$

22 Factoriser l'expression suivante.
$A = (2x + 1)(3x + 2) + (4x + 7)(2x + 1)$

23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $(x - 3)(x + 2) = 0.$ **b)** $(x - 3)(x - 4) = 0$
c) $(2x + 3)(1 - x) = 0$ **d)** $x(x + 1) = 0$

24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $x^2 = 9$ **b)** $x^2 - 16 = 0$ **c)** $x^2 + 4 = 0$

25 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $(2x - 20)(5x + 7)$ s'annule-t-elle?

26 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $x^2 - 8$ s'annule-t-elle ?

27 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\dfrac{-4 + x}{2x - 2}$ n'est elle pas définie ?

28 Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression $\dfrac{-4 + x}{2x - 2}$ s'annule-t-elle ?

29 Simplifier les fractions suivantes.
$$A = \frac{6x + 15}{3} \quad \text{et} \quad B = \frac{9x^2 + 6x}{3x}$$

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} = 10$

Développer des expressions

31 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes. AP
a) $3x(x + 5)$ **b)** $-2x(x + 6)$
c) $-3x(4 - 5x)$ **d)** $(1 + x)(1 + 2x)$
e) $(x^2 + 2)(x - 1)$ **f)** $2x^2(1 - 3x^2)$

32 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes. AP
a) $(x + 3)(x + 5) - 4x$ **b)** $x(3 - 2x) + 5x^2 + 2x$
c) $(5 - t)(1 + 2t) + 2(3t + 4)$ **d)** $2x^2(x + 6) - x^3 + 4x^2 - 2x$

33 Développer les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables.
a) $(x + 12)^2$ **b)** $(3x + 1)(3x - 1)$
c) $(6 - x)^2$ **d)** $(x + 1)^2 + (x - 2)^2$

34 Recopier et compléter les égalités suivantes.
a) $(x + \ldots)^2 = x^2 + 20x + \ldots$
b) $(x + \ldots)(x - \ldots) = x^2 - 81$
c) $\ldots + 16x + 64 = (x + \ldots)^2$

35 En utilisant les identités remarquables, développer les expressions suivantes.
a) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(3x - \dfrac{1}{3}\right)^2$
c) $\left(x + \dfrac{2}{5}\right)\left(x - \dfrac{2}{5}\right)$ **d)** $(a + \sqrt{5})^2$

Factoriser des expressions

36 Factoriser les expressions suivantes. AP
a) $3x - 15$ **b)** $4x^2 - 7x$
c) $3x^3 - 5x^2 + 8x$ **d)** $3a^2 - 6a$
e) $3x^3 + 9x^2$ **f)** $2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$

37 Recopier l'expression, souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.
a) $(2x - 3)(24x - 3) + (2x - 3)(-22x + 5)$
b) $(15x + 7)(3 - x) + (12x + 5)(15x + 7)$
c) $(7x - 26)(11x + 8) + (7x - 26)(12x + 4)$
d) $(13t + 5)(-5t + 2) - (8t - 15)(13t + 5)$

38 Factoriser en utilisant une identité remarquable.
a) $x^2 - 12$ **b)** $9y^2 + 12y + 4$
c) $x^2 + 169 - 26x$ **d)** $144x + 144x^2 + 36$
e) $(3x + 1)^2 - (2x)^2$ **f)** $9t^2 - 24t + 16$
g) $-22x + 121x^2 + 1$ **h)** $(x + 1)^2 - 9$

39 Choisir la bonne méthode pour factoriser les expressions suivantes.
a) $(6x - 4)(2x + 5) - (3x + 2)(2x + 5)$
b) $9t^2 - 64$
c) $25x^2 + 9 + 30x$
d) $(5x - 7)(3x - 2) - (x - 8)(3x - 2)$

Simplifier des expressions fractionnaires

40 Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{5t+25}{5}$ **b)** $\dfrac{5x^2}{2} \times \dfrac{3}{10x}$

c) $\dfrac{4x^2+8x-6}{2}$ **d)** $\dfrac{4a}{8a^2}$

41 Écrire sous la forme d'une fraction la plus simple possible. AP

a) $\dfrac{3}{x+8}+5$ **b)** $\dfrac{x}{x+1}-3$

c) $5-\dfrac{2}{x^2+1}$ **d)** $\dfrac{4x+1}{x-4}-\dfrac{3}{2}$

42 Écrire sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

a) $\dfrac{3x}{x+1}-x$ **b)** $\dfrac{x}{x-2}+4x+2$

c) $\dfrac{x(x+1)}{x^2+2}-3$ **d)** $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{3}{x}$

43 Simplifier, quand c'est possible, les expressions fractionnaires suivantes.

a) $\dfrac{2(x+3)}{x+3}$ pour $x \neq -3$

b) $\dfrac{5x(x+4)}{(x+4)(2-x)}$ pour $x \neq -4$ et $x \neq 2$

c) $\dfrac{4x+6}{2}$

d) $\dfrac{5t^2+3t}{t}$ pour $t \neq 0$

e) $\dfrac{3x-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$

Résoudre des équations

44 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. AP

a) $(x+4)(x-7)=0$ **b)** $(2x+3)(4x-5)=0$
c) $-x(5-4x)=0$ **d)** $(-15x+3)(3x+9)=0$
e) $(2x-4)^2=0$ **f)** $3x(x-5)=0$

45 **1.** Factoriser x^2-16.
2. Résoudre $x^2-16=0$

46 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $5x^2-6x=0$
b) $(2x+1)(x+4)+(x+4)(3-5x)=0$
c) $(x-7)(3x-5)-(9x-4)(x-7)=0$
d) $4x^2+8x+4=0$
e) $(4x-7)(9x+5)=(8x-3)(4x-7)$

47 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2=81$ **b)** $x^2=-7$
c) $x^2=15$ **d)** $3x^2=48$
e) $2x^2+20=0$ **f)** $4x^2-2=1$

48 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $x^2+6x+9=0$ **b)** $36x^2-12x+22=21$
c) $4x^2=8x$ **d)** $5(2x+1)^2=20$
e) $(3x+4)^2=(5x-6)^2$ **f)** $(x-2)^2-100=0$

49 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\sqrt{x}=12$ **b)** $\sqrt{x}=-2$

c) $\sqrt{x}=11{,}5$ **d)** $3\sqrt{x}=21$

50 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{x-2}{x+9}=0$ **b)** $\dfrac{2x-7}{x+3}=0$

c) $\dfrac{20-4x}{x-5}=0$ **d)** $\dfrac{5x-1}{2x+3}=0$

51 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{2x-1}{x+6}=1$ **b)** $\dfrac{4}{2x+6}=9$

c) $\dfrac{2x}{x-4}=-3$ **d)** $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\dfrac{x}{2x+2}+5=0$ **b)** $\dfrac{10+x}{x-2}-2=0$

c) $\dfrac{3}{2x-4}=-5$ **d)** $\dfrac{x+1}{3-x}=1$

53 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{1}{x}=4$ **b)** $\dfrac{1}{x}=-1$

c) $\dfrac{1}{x}=10$ **d)** $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}$.

e) $\dfrac{1}{x}=0$ **f)** $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{5}$

Calculs et automatismes

54 Calculer mentalement.

a) $2+3\times5^2$ **b)** $5\times10\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}$

c) $\dfrac{6+9+12+15}{3}$ **d)** $\dfrac{10+5}{5+5}$

55 Soit $A = x^2+5x+10$. Calculer A si x vaut :
a) 0 **b)** -2 **c)** 10 **d)** $\sqrt{2}$

56 Donner les carrés de tous les entiers naturels entre 1 et 15.

Exercices d'entraînement

Calcul littéral

57 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(3x-2)(5-x)-4x(x+6)$ **b)** $-3(2-2x)(6-2x)$

c) $2(x+3)(5x+1)$ **d)** $-2(x^2+1)(x-2)$

58 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a) $(x+5)^2-21+2x$ **b)** $4(2x-3)^2$

c) $3(t-2)^2+1$ **d)** $-2(x+4)^2+4x+7$

59 Montrer que les trois expressions suivantes sont égales pour tout réel t.

$A=(2t-4)^2+12 \quad B=4(t-2)^2+12 \quad C=4(t-3)(t-1)+16$

60 Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x+7)^2+2x+4$

b) $-3(x-4)^2+11$

c) $(2x-5)(2x+5)-(3x+5)^2$

d) $(x-1)^2(x+2)$

61 En utilisant les identités remarquables, mettre les expressions suivantes sous la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des nombres réels.

a) $(1+\sqrt{2})^2$ **b)** $(3-\sqrt{2})^2$

c) $(4+2\sqrt{2})^2$ **d)** $(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})$

62 En mettant en évidence un facteur commun, factoriser les expressions suivantes.

a) $(23x+1)(-17x+1)+(23x+1)^2$

b) $(13x-14)(25x-11)-(13x-14)^2$

c) $(8-18x)^2-(16x-3)(8-18x)$

d) $(16t+13)(21t-3)+2(16t+13)$

e) $(-14x+5)-(4x-7)(-14x+5)$

63 En mettant en évidence une différence de deux carrés, factoriser les expressions suivantes.

a) $(x-4)^2-36$ **b)** y^2-5

c) $25-(2-x)^2$ **d)** $(x+3)^2-(2x+4)^2$

64 Factoriser les expressions suivantes.

a) $7a^3+28a^2$ **b)** $\frac{4}{9}x^2-\frac{49}{81}$

c) $18x^2-48x+32$ **d)** $2x^2-4$

65 Factoriser les expressions suivantes.

$A=6(x^2-49)$

$B=\frac{1}{4}x^2-1$

$C=(5+4x)(6-7x)+(5+4x)$

$D=\sqrt{x}\,(x+4)+\sqrt{x}(3x+9)$

$E=8x^2y-4y^2x+6xy$

66 **1.** Factoriser $(x+1)^2-(x-1)^2$.

2. Calculer $10\,001^2-9\,999^2$ sans calculatrice.

67 On considère la feuille de tableur suivante. TICE

	A	B	C
1	x	2(x²+1)²+3	2(x⁴+2x²)
2	-1	11	6
3	0	5	0
4	1	11	6
5	2	53	48
6	3	203	198
7	4	581	576
8	5	1355	1350
9	6	2741	2736
10	7	5003	4998

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 et recopier vers le bas pour obtenir les résultats de la colonne B ?

2. Soit $f(x)=2(x^2+1)^2+3$ et $g(x)=2(x^4+2x^2)$ pour tout nombre réel x.

3. D'après la feuille de tableur, que peut-on dire de $f(x)-g(x)$?

4. Démontrer cette conjecture.

68 ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC=x+7$ et $AC=5$ où x désigne un nombre positif.
Exprimer AB^2 en fonction de x sous forme factorisée.

Démonstrations

69 On considère TICE
le nombre $A(n)=(2n-1)^2-n(3n-2)$ pour n entier naturel.

1. Dresser un tableau de valeurs de $A(n)$ avec la calculatrice ou le tableur.

2. Que peut-on conjecturer ?

3. Démontrer cette conjecture.

70

1. En utilisant une identité remarquable, démontrer que si deux nombres réels ont le même carré, alors ils sont égaux ou opposés.

2. Démontrer la propriété suivante.

> Deux nombres réels positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés sont égaux.

71 Simplifier, quand c'est possible, les expressions fractionnaires suivantes.

a) $\frac{2x+4}{x+2}$ pour $x \neq -2$ **b)** $\frac{6x-4}{10x+20}$ pour $x \neq -2$

c) $\frac{5x^2+4x}{x}$ pour $x \neq 0$ **d)** $\frac{2x^2+3x}{x^2+x}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$.

72 Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible.

a) $\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}$ **b)** $\frac{2x+4}{x-2}+\frac{1}{2}$

c) $\frac{4}{x-4}-\frac{3}{x+1}$ **d)** $\frac{2x+2}{2x-1}+\frac{3x}{x+3}$

73 On considère la feuille de tableur ci-dessous. TICE

	A	B	C
1	x	x/(x+1)	3-(4+3x)/(x+1)
2	0	0	-1
3	1	0,5	-0,5
4	2	0,66666667	-0,333333333
5	3	0,75	-0,25
6	4	0,8	-0,2
7	5	0,83333333	-0,166666667
8	6	0,85714286	-0,142857143
9	7	0,875	-0,125
10	8	0,88888889	-0,111111111

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 et recopier vers le bas pour obtenir les résultats de la colonne B ?

2. Soit $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $g(x) = 3 - \dfrac{4+3x}{x+1}$ pour tout nombre réel x différent de -1.
Conjecturer la valeur de l'écart $f(x) - g(x)$ pour tout nombre $x \neq -1$ puis démontrer cette conjecture.

Résoudre des équations

74 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.
a) $(3x-1)^2 = 0$
b) $(3-2x)(5-x)(6+10x) = 0$
c) $(x^2-9)(x+20) = 0$

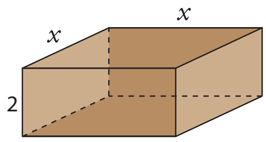
75 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.
a) $(x+4)^2 = 121$ **b)** $(2x+1)^2 - 9 = 0$
c) $3(2-x)^2 = 48$ **d)** $(5-x)^2 = -2$

76 On considère la fonction f définie par $f(x) = (5x+1)(x-4)$ pour tout nombre réel x.
Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

77 On considère l'expression $A(x) = (x-1)(x^2 - 22x + 121)$.
Pour quelle valeur de x, l'expression A s'annule-t-elle ?

78 On étudie dans un certain milieu l'évolution d'une population de bactéries. SVT
Le nombre de bactéries en milliers a été modélisé en fonction du temps écoulé en jours sur les dix premiers jours d'étude par la fonction N définie par $N(t) = (0{,}5t+1)^2$ pour tout nombre réel $t \in [0;10]$.
1. Donner une estimation du nombre de bactéries au bout d'un jour.
2. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il atteint 16 000 ?

79 On veut construire une boîte en bois avec couvercle ayant une base carrée de côté x et une hauteur égale à 2. Arts plastiques



1. Montrer que la surface extérieure de la boîte est donnée en fonction de x par la formule $S(x) = 2(x+2)^2 - 8$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x la boîte a t-elle une surface extérieure égale à 72 ?

80 La directrice d'une entreprise a vu ses effectifs augmenter de 20 % en deux ans. En supposant que la hausse en pourcentage a été la même les deux années, déterminer ce pourcentage de hausse annuelle.

81 On considère une fonction f définie par $f(x) = 3(x-3)^2 + 5$ pour tout réel x.
1. Montrer que $f(x) = 3x^2 - 18x + 32$.
2. Choisir la forme la plus adaptée pour calculer chaque image puis calculer.
a) $f(2)$ **b)** $f(0)$
c) $f(3+\sqrt{5})$ **d)** $f(\sqrt{2})$

82 Soit $f(x) = (x-2)(3+7x)$ pour tout réel x.
1. Résoudre $f(x) = 0$.
2. Développer et réduire $f(x)$.
3. Résoudre $f(x) = -6$ en utilisant une factorisation.

83 On considère l'expression $h(x) = (x-5)(x+11)$ pour tout réel x.
1. Calculer la forme développée de $h(x)$.
2. Montrer que $h(x) = (x+3)^2 - 64$.
3. Utiliser la forme la plus adéquate pour répondre aux questions suivantes.
a) Calculer $h(0)$.
b) Résoudre $h(x) = 0$ et $h(x) = -64$.

84 **1.** Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$(x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4.$$
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3 = 3x^2 - 4$.

85 Soit $f(x) = x^2 + x - 2$ pour tout nombre réel x. Algo & Prog
À l'aide de **XCAS**, on a factorisé $f(x)$. En utilisant la bonne expression, résoudre les équations suivantes.

```
factoriser(x^2+x-2)
                                   (x-1)(x+2)
```

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) = -2$

Exercices d'entraînement

86 On considère l'expression $A = \dfrac{x+3}{3x+1}$.

1. Pour quelle valeur de x cette expression n'est-elle pas définie ?

2. Sans calculatrice, calculer le résultat de A si x prend la valeur :

a) 1 **b)** -2 **c)** $\dfrac{1}{2}$ **d)** $-\dfrac{2}{7}$

3. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression A s'annule-t-elle ?

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression A sera-t-elle égale à 3 ?

87 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{3x-2}{x+1} = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{x+6}{2x+1} = \dfrac{x-3}{2x-2}$

c) $\dfrac{5-x}{x+2} + \dfrac{2}{3} = 0$ **d)** $\dfrac{x}{x+5} - \dfrac{2x}{2x+3} = 0$

88 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{(5x-2)(4-x)}{x+10} = 0$ **b)** $\dfrac{x^2-10}{3-x} = 0$

c) $\dfrac{x+1}{(10-2x)(2x+2)} = 0$ **d)** $\dfrac{2x}{x-10} = 2$

89 Afin d'étudier sa popularité, une nouvelle entreprise a modélisé le pourcentage de personnes connaissant son nom dans une ville en fonction de x, le nombre de semaines écoulées depuis le début de sa promotion publicitaire.

Ce pourcentage est modélisé par la fonction $p(x) = \dfrac{72x}{x+6}$ pour $x \in [0;52]$.

1. Quel est le pourcentage de personnes connaissant le nom de l'entreprise au bout de 5 semaines de publicité ?

2. Au bout de combien de semaines de publicité 50% des habitants de la ville connaissaient-ils le nom de l'entreprise ?

90 On considère le programme en **PYTHON** suivant. **Algo & Prog**

```
x=float(input("Saisir une valeur de x:"))
a=5*x+2
b=2*x+4
c=a/b
print(c)
```

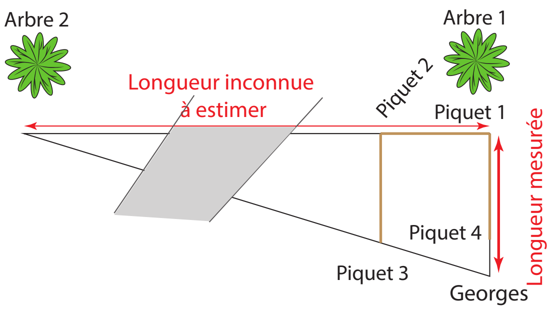
1. Qu'affiche ce programme si on entre **3** comme valeur de **x** ?

2. Ce programme fonctionne-t-il pour toute valeur de **x** ?

3. Compléter ou modifier ce programme pour qu'il affiche un message "**valeur interdite**" pour **x**, si la valeur saisie ne permet pas de faire le calcul ou qu'il calcule et affiche le résultat sinon.

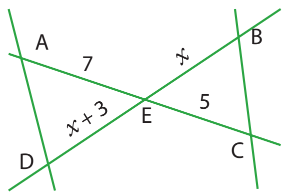
4. Quelle valeur faut-il saisir pour **x** afin d'obtenir **0** en résultat final ?

91 Georges est un funambule.
Il se promène dans la montagne à la recherche de deux arbres séparés par un ravin pour tendre un câble. Il souhaite, à chaque site qu'il découvre, estimer la longueur du câble à utiliser.
Il se construit un U en bois (un carré avec un côté en moins) d'un mètre de côté. Il posera et fixera celui-ci au sol avec des piquets afin d'estimer la distance entre les deux arbres. Voici le schéma vue de dessus et les instructions à suivre pour déterminer cette distance (le U en bois est tracé en marron gras sur le schéma, fixé en ses quatre sommets par des piquets).



Georges est un étourdi, il a perdu le tableau de correspondance.
Il a effectué les 4 premières étapes et a mesuré une distance de 1,1 m entre lui et l'arbre 1. Calculer la distance entre les arbres 1 et 2.

92 Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?



93 **Problème ouvert** ABC est un triangle rectangle en C tel que $\widehat{CBA} = 60°$ et l'hypoténuse AB mesure 4 cm de plus que BC.
Déterminer les valeurs exactes des trois côtés de ABC.

94 **Démonstration** **1.** Rappeler la propriété de résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation de $\sqrt{x} = k$.

2. Démontrer cette propriété.

95 **Algo & Prog** Écrire un programme en **PYTHON** qui demande à un utilisateur une valeur de k puis qui affiche, suivant les valeurs de k, la solution éventuelle de l'équation $\sqrt{x} = k$.

96 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\sqrt{x} = 10^8$ **b)** $\sqrt{x} = \dfrac{81}{49}$

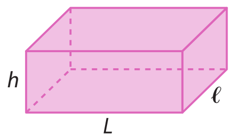
c) $3\sqrt{x} + 5 = 6$ **d)** $-4\sqrt{x} + 9 = 0$

e) $2\sqrt{x} + 1 = 0$ **f)** $(\sqrt{x} - 4)^2 = 0$

Relation simple entre variables

97 L'aire $\mathscr{S}$ d'un disque de rayon r est donnée par πr^2.
1. Exprimer r en fonction de $\mathscr{S}$.
2. Quel est le rayon d'un disque ayant une aire de 25 cm² ? On donnera le résultat sous forme exacte puis une valeur approchée au mm près.

98 On considère un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur ℓ, et de hauteur h.
Son volume est noté $\mathscr{V}$ et son aire est notée $\mathscr{A}$.
1. Exprimer h en fonction de ℓ, L et $\mathscr{V}$.
2. Exprimer h en fonction de ℓ, L et $\mathscr{A}$.



99 La vitesse v en mètre par seconde est donnée par : **Physique-Chimie**

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

où d est la distance parcourue en mètres et Δt est la durée du trajet en secondes.
1. Exprimer Δt en fonction de v et d.
2. Quel est le temps de trajet en minute d'une distance de 15 km à une vitesse de 7 mètres par seconde ?
On arrondira le résultat à la minute près.

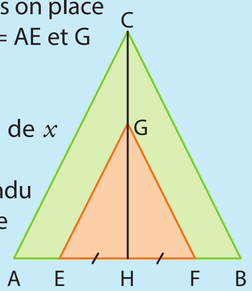
100 En électricité, la loi d'Ohm est une relation qui lie la tension U (en volts) aux bornes d'un conducteur ohmique traversé par un courant d'intensité I (en ampères) et sa résistance R (en ohms) : elle est donnée par $U = RI$. **Physique-Chimie**
1. Exprimer I en fonction de U et R.
2. Quelle la résistance d'un conducteur ohmique si on mesure une intensité $I = 0{,}16$ A et une tension $U = 4$V ?

101 On considère la relation $2x^2 + 4y = 12$.
Exprimer y en fonction de x.

102 On considère la relation $y = \dfrac{x}{x+1}$.
Exprimer x en fonction de y.

Travailler autrement

103 ABC est un triangle isocèle en C tel que AB = 6 cm, H le milieu de [AB] et CH = 6 cm. **En groupe**
On place un point E sur [AH] puis on place les points F sur [BH] tel que BF = AE et G sur [CH] tel que CG = 2AE.
On pose x = AE.
Pour quelle(s) valeur(s) exacte de x l'aire de EFG est-elle égale à 3 ?
Le groupe écrira un compte-rendu détaillant la démarche effectuée et une conclusion au problème.



104 La quadrature du cercle (la construction d'un carré de même aire qu'un disque donné), la duplication du cube et la trisection de l'angle uniquement à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas, sont trois grands problèmes antiques (environ v^e siècle avant J.C.). **Histoire des Maths**
Rechercher les noms des mathématiciens qui ont prouvé que ces problèmes sont insolubles. Faire un exposé de 10 minutes à l'oral sur la quadrature du cercle et donner la signification de cette expression dans le langage courant.

105 Al Khwarizmi est un mathématicien perse qui a travaillé sur la résolution d'équations. **Histoire des Maths** **À l'oral**

Rechercher quelques informations sur le siècle pendant lequel il a vécu, sur ses travaux et découvrir les mots qui sont issus de son traité de résolution des équations et de son nom.
Faire un exposé de 10 minutes à l'oral sur les travaux d'Al Khwarizmi.

Exercices bilan

106 La meilleure forme

On considère l'expression $A(x) = (x + 2)^2 - 9$ pour tout réel x et la fonction A définie par l'expression $A(x)$ pour tout réel x.

1. Calculer la forme développée de $A(x)$.

2. Déterminer la forme factorisée de $A(x)$.

3. Utiliser la forme la plus adéquate pour répondre aux questions suivantes.

a) Calculer $A(3)$ et $A(\sqrt{3} - 2)$.

b) Résoudre $A(x) = 0$.

c) Déterminer les antécédents de -5 par A.

107 Trois expressions

On considère les trois expressions $A(x) = 4x^2 - 100$, $B(x) = (5 + x)(1 - 2x) + (5 + x)(1 - 3x)$ et $C(x) = (x - 3)^2$ pour tout réel x.

1. Factoriser $A(x)$.

2. Factoriser $B(x)$.

3. Développer $C(x)$.

4. Résoudre $A(x) = 0$ puis $A(x) = 69$.

5. Résoudre $B(x) = 0$.

6. Existe-il une valeur de x pour laquelle la valeur de $A(x)$ est égal à quatre fois celle de $C(x)$? Si oui, la ou les donner.

108 Étude de deux quotients

Soit $B(x) = \dfrac{x}{x-1} + 2$ pour tout réel x différent de 1.

1. Montrer que $B(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.

2. Résoudre $B(x) = 0$.

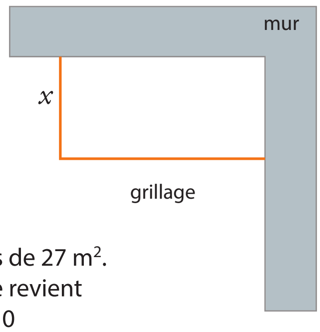
3. On considère $A(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$ pour tout $x \neq 1$.

a) Calculer $A(11)$, $B(11)$ et $A(11) - B(11)$.

b) Montrer que $A(x) - B(x) = x$ pour tout $x \neq 1$.

109 Pour poser un grillage — Algo & Prog

Jan souhaite poser un grillage au fond de son jardin afin de créer un enclos pour ses poules.



Il possède 12 mètres de grillage. On note x la largeur de l'enclos.

Jan souhaite faire un enclos de 27 m^2.

1. Montrer que le problème revient à résoudre $-x^2 + 12x - 27 = 0$

2. Développer $(x - 3)(9 - x)$.

3. Résoudre le problème de Jan.

4. Finalement Jan préférerait obtenir un enclos de 30 m^2. En utilisant les affichages ci-dessous, trouver la (les) solution(s).

```
developper(x(12-x))
                                   -x²+12x
developper(36-(x-6)²)
                                   -x²+12x
```

110 Paniers bio

Un jardinier vend des paniers bio de légumes frais. Le coût de production de x paniers bio est donné par la formule $C(x) = 100 + 7x$ avec $x \in [0 ; 30]$.

$C(0) = 100$: cela représente les coûts fixes de production.

1. Quel est le coût de production de 15 paniers ?

2. Combien coûte un panier en moyenne, au jardinier, lorsqu'il en produit 15 ?

3. On appelle coût moyen unitaire de production pour une production égale à x le résultat de $\dfrac{C(x)}{x}$ pour $x > 0$ (c'est-à-dire le coût total divisé par le nombre d'unités produites).

Dans la suite de l'exercice, on notera $C_m(x)$ le coût moyen unitaire pour x paniers produits ($x > 0$).

Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.

4. Trouver la production x pour laquelle un panier coûte en moyenne 11 euros au jardinier.

111 Des équations à résoudre

En utilisant les méthodes vues dans ce chapitre, résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.

a) $\sqrt{x} = 5$

b) $\dfrac{4x - 34}{6 - x} = 0$

c) $x^2 = -10^4$

d) $(5 - 2x) - (11 + 3x) = 0$

e) $\dfrac{-2x + 3}{x + 4} = 7$

f) $\dfrac{1}{x} = -9$

g) $2x(x^2 - 100) = 0$

h) $(1 - x)(3 + 4x) + (1 - x)(1 + 2x) = 0$

i) $\dfrac{3}{x} + 5 = -\dfrac{1}{2}$

j) $2x^3 = x^2$

Exercices d'approfondissement

112 Un développement

Développer $(a+b+c)^2$ pour tous nombres réels a, b et c.

113 Solutions d'une équation produit

Algo & Prog

On considère l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ où a, b, c et d sont des nombres réels et a et b sont non nuls.
Écrire un algorithme qui demande à un utilisateur les valeurs de a, b, c et d de l'équation et qui renvoie les solutions de cette équation.

114 Probabilités de tirage

1. Une urne contient des boules jaunes et vertes indiscernables au toucher. Il y a 5 boules vertes.
Combien y a-t-il de boules jaunes sachant que la probabilité d'en tirer une au hasard est égale à 0,8 ?

2. Une urne contient des boules jaunes, vertes et rouges. Il y a deux fois plus de boules vertes que de boules jaunes et 5 boules rouges.
Combien y a t-il de boules jaunes sachant que la probabilité d'en tirer une au hasard est égale à $\frac{5}{16}$?

115 Vrai ou faux ?

Logique

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

a) Pour tout réel x, on a $(x+1)^2-4=(x+5)(x-2)$.

b) Il existe un réel x tel que $x^2+2x=-4x$.

c) Pour tout réel x, on a $(x+3)^2+2x=(x+2)^2+4x+5$.

d) Il existe un réel x tel que $(x+1)(x+2)=3x+1$.

e) Il existe un réel x tel que $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2x+2}$.

f) Pour tout réel x non nul, on a $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$.

116 Pour calculer

Démonstration

1. Effectuer chacun des calculs ci-dessous.

a) $48^2-47^2-46^2+45^2$

b) $82^2-81^2-80^2+79^2$

c) $166^2-165^2-164^2+163^2$

2. Émettre une conjecture.

3. La démontrer.

4. À l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul :
$123\,456\,789\,515^2+123\,456\,789\,512^2-[123\,456\,789\,514^2+123\,456\,789\,513^2]$

5. Que penser de la réponse affichée ?

117 Équation bicarrée

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4+x^2=6$ (E).

1. Développer $(y-2)(y+3)$.

2. On pose $y=x^2$ dans l'équation (E). Transformer l'équation (E) d'inconnue x en une équation d'inconnue y.

3. Trouver les valeurs possibles de y.

4. En déduire les solutions de l'équation (E).

118 Factorisations

1. Factoriser l'expression $R=(4x-3)^2+28x-21$.

Coup de pouce On remarquera que $28x-21=7(4x-3)$.

2. Factoriser l'expression $S=3(x+2)+x^2+4x+4$.

Coup de pouce On remarquera que $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

3. De la même manière, factoriser les expressions suivantes.

$M=(2x+3)(4+5x)+4x+6$

$A=5x-7+(7-5x)^2$

$T=(5x+2)(x+1)+x^2+2x+1$

$H=x^2+6x+9-(2x-3)(x+3)$

$S=(3x+2)(4x-1)+(8x-2)(7x-8)$

Coup de pouce Faire apparaitre un facteur commun à travers une première factorisation.

119 Voyage en train

Physique-Chimie

Pour aller d'une ville A à une ville B distante de 80 km, un train roule en moyenne à 80 km/h sur l'aller. Il doit ensuite revenir dans la ville A.

1. Peut-il faire en sorte que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 100 km/h ? Si oui à quelle vitesse moyenne doit-il rouler au retour ?

2. Peut-il faire en sorte que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 180 km/h ? Si oui à quelle vitesse moyenne doit-il rouler au retour ?

3. La distance entre les deux villes a t-elle de l'influence sur les résultats précédents ?

Vers la 1re

Orientation

120 Spécialité Maths

1. Compléter les pointillés avec un nombre réel :

a) $x^2+4x-12=(x+2)^2-\dots$

b) Factoriser l'expression trouvée en **a)**.

c) En déduire les solutions de $x^2+4x-12=0$

2. De la même façon, résoudre $x^2-12x+20=0$ puis $x^2-2x+8=0$.

121 STL- STI2D- STMG-ST2S

On appelle racine d'un polynôme un nombre qui annule ce polynôme.

1. Vérifier que 3 est une racine du polynôme $A(x)=x^3-3x^2+x-3$.

2. Déterminer les racines du polynôme $B(x)=(x-3)(x-4)(x-5)$.

Travaux pratiques

Algo & Prog — Chercher, représenter — 40 min

1 Création d'un exerciseur sur les identités remarquables

Remarques

- On rappelle que :
- `random.randint(a,b)` génère un entier aléatoire entre **a** et **b** (toute utilisation de cette commande doit être précédée, au début du programme, de la ligne `import random`).
- pour une variable **x** de type `float` ou `int`, `str(x)` retourne la chaîne de caractère constituée de la valeur de **x**.
- une expression entre guillemets est une chaîne de caractère ;
- on peut concaténer (assembler) deux chaînes de caractères avec le symbole + (par exemple « `bon` »+« `jour` » donne la chaîne de caractères « `bonjour` »).

On considère le début de programme **PYTHON** suivant dont on a numéroté les lignes.

```
1  import random
2
3  A=random.randint(2,6)
4  B=random.randint(2,10)
5
6  a=str(A)+"x"
7  b=str(B)
8
9  expression_facto="("+a+"+"+b+")^2"
10 expression_develo=str(A*A)+"x^2+"+str(2*A*B)+"x+"+str(B*B)

11 print(expression_develo,"est de la forme (a+b)^2")
```

1. a) De quels types sont respectivement les variables **A**, **B**, **a**, **b**, `expression_facto` et `expression_develo` ?

b) À quelle ligne, la valeur d'une variable entière est-elle transformée en chaîne de caractère ?

c) À quelle ligne, la valeur d'une variable entière est-elle transformée en chaîne de caractère puis concaténée avec la lettre x ?

d) Donner les valeurs des variables **a**, **b**, `expression_facto` et `expression_develo` si **A** prend la valeur **2** et **B** prend la valeur **3**.

2. Récupérer le programme TP1_identite_remarquable1et le tester quelques fois.

Exo — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-31

3. a) Enregistrer le programme TP1_identite_remarquable1 sous TP1_identite_remarquable2, et modifier les lignes 9 et 10 en `expression_facto = "("+a+"-"+b+")^2"` et `expression_develo = str(A*A)+"x^2-"+str(2*A*B)+"x+"+str(B*B)`.

b) Apporter la modification nécessaire au programme TP1_identite_remarquable2 afin qu'il soit cohérent.

4. Aller chercher le programme TP1_identite_remarquable3 pour s'entraîner sur les identités remarquables.

Exo — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-32

Chercher, raisonner — 35 min

2 Une autre identité remarquable

1. En utilisant un tableur, comparer les résultats de $x^3 + 3x^2 + 3x$ et $(x + 1)^3$ pour x allant de -10 à 10 avec un pas de 0,5.

2. Conjecturer la formule développée de $(x + 1)^3$.

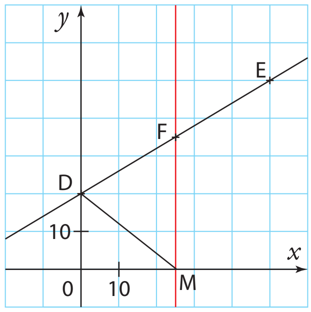
3. Démontrer cette conjecture.

4. Démontrer plus généralement que pour tous nombres réels a et b, on a $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

TICE — Chercher, raisonner — 45 min

3 À la même distance

On considère la figure ci-contre dans laquelle la droite (DE) est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \mapsto 20 + 0{,}6x$, M est un point mobile sur l'axe des abscisses dont l'abscisse est positive et F est l'intersection de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M et la droite (DE).



A ▸ Avec un logiciel de géométrie dynamique

On cherche où placer M pour que MD = MF.

Reproduire la figure ci-contre dans un logiciel de géométrie dynamique et conjecturer les coordonnées du point M pouvant répondre au problème.

B ▸ Avec une résolution algébrique

Notons x l'abscisse du point M ($x \geqslant 0$).

1. Exprimer la distance MD et la distance MF en fonction de x et poser l'équation à résoudre pour répondre au problème.

2. L'équation précédente est équivalente à l'équation $400 + x^2 = (20 + 0{,}6x)^2$.

Résoudre cette équation pour déterminer la ou les solutions au problème.

TICE — Modéliser, représenter — 45 min

4 Pour fabriquer des vases

A ▸ Avec un logiciel de calcul formel

1. Dans le logiciel **Xcas**, saisir `factoriser(2*x^2+5*x+3)`.

Qu'obtient-on ?

2. De même factoriser, si possible, les expressions suivantes.

a) $3x^2 - 14x - 5$

b) $x^2 - 15x + 50$

c) $x^2 - x - 1$

Remarque Un logiciel de calcul formel est un logiciel qui permet de faire des calculs (développer, factoriser, résoudre des équations…) de manière exacte.

B ▸ Application

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$.

On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.

Un vase est vendu 50 euros.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

2. Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisée lorsque l'artisan vend 50 vases.

3. Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

4. L'artisan souhaite connaître le nombre de vases à fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice de 364 euros. Traduire le problème en une équation puis le résoudre en utilisant un logiciel de calcul formel.

En autonomie

1 Développer avec ou sans identité remarquable

QCM

122 Si $x \in \mathbb{R}$, alors $(4 + x)^2$ est égal à :

- a $16 + x^2$
- b $16 + 4x + x^2$
- c $16 + 8x + x^2$
- d Aucune des réponses proposées.

123 Si $x \in \mathbb{R}$, alors $(x + 3)(5x^2 - 2)$ est égal à :

- a $5x^3 + 15x^2 - 2x - 6$
- b $20x^2 - 2x - 6$
- c $5x^3 + 8x^2 - 2x - 6$
- d Aucune des réponses proposées.

124 Pour tous réels a et b, on a $(a - b)^2$ est égal à :

- a $a^2 - b^2$
- b $a^2 + b^2 - 2ab$
- c $a^2 - 2ab - b^2$
- d Aucune des réponses proposées.

125 $(1 + \sqrt{7})^2$ est égal à :

- a $8 + \sqrt{7}$
- b $8 + 2\sqrt{7}$
- c 8
- d Aucune des réponses proposées.

126 ✶ Soit $f(t) = (3t + 2)^2 - 9$ pour tout réel t.

1. Développer et réduire $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) = (3t - 1)(3t + 5)$.

127 ✶ On considère l'affichage suivant.

```
developper(2*(x-7)^2-3)
                          2x^2 - 28x + 95
```

Justifier cet affichage.

128 ✶✶ Démontrer que $(s - 2t)^2 = s^2 + 4t^2 - 4st$ pour tous réels s et t.

129 ✶✶ Soit $A = \left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ et $B = \left(8x - \frac{1}{8}\right)^2$.

Développer les expressions de A et B.

130 ✶✶ Soit $f(x) = (x - 6)(x + 6)(2x - 1)$ et $g(x) = 4(x - 3)^2(x - 1)$ pour tout réel x.

Développer et réduire $f(x)$ et $g(x)$.

131 ✶✶ Compléter avec des nombres l'égalité suivante pour qu'elle soit vraie pour tout réel x :

$$(\ldots - 3x)^2 + \ldots = 9x^2 - 24x + 24.$$

2 Factoriser avec ou sans identité remarquable

QCM

132 $64 - 4x^2$ est égal à :

- a $(8 - 2x)(8 + 2x)$
- b $(8 - 2x)^2$
- c $(64 - 2x)(64 - 2x)$
- d Aucune des réponses proposées.

133 $(2x + 3)(5 - x) - (2x + 3)(7 + 2x)$ est égal à :

- a $(2x + 3)(12 + x)$
- b $(2x + 3)(12 - 3x)$
- c $(2x + 3)(-2 + x)$
- d Aucune des réponses proposées.

134 $9 + 6x + x^2$ est égal à :

- a $(x + 3)^2$
- b $(3x + 1)^2$
- c $(3 - x)(3 + x)$
- d Aucune des réponses proposées.

135 $4x^2 - 5$ est égal à :

- a $(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5})$
- b $(2x + 5)(2x - 5)$
- c $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
- d Aucune des réponses proposées.

136 ✶ Factoriser :

a) $6a^3 - 7a^2 + 3a$. **b)** $25x^2 - 20x + 4$.

137 ✶ Soit $f(x) = (x + 5)^2 - 9$ et $g(x) = 3x(6 - 2x) + 3x(3x + 5)$ pour tout réel x.

Factoriser les expressions suivantes.

a) $f(x)$. **b)** $g(x)$.

138 ✶ Factoriser l'expression $A = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$

139 ✶✶ Soit $A = \frac{1}{9}x^2 - 1$ et $B = x^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}x$

Factoriser les expressions A et B.

140 ✶✶ Factoriser les expressions suivantes.

a) $4xy + 6x^2y^2 + 7xy^3$

b) $(x + 1)(x + 3) + 2x + 2$

141 ✶✶ Soit $f(x) = (3x + 4)^2 - (4x - 2)^2$.

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. Factoriser $f(x)$.

3 Calculer avec des expressions fractionnaires

QCM

142 $5+\dfrac{7}{x+6}$ est égal à :

a $\dfrac{12}{x+6}$
b $\dfrac{5x+37}{x+6}$
c $\dfrac{5x+13}{x+6}$
d Aucune des réponses proposées.

143 Pour $x \neq 0$, $\dfrac{10x^2-3x}{x}$ est égal à :

a $10x-3x$
b $10x^2-3$
c $10x-3$
d Aucune des réponses proposées.

144 ✶ Soit $f(x)=\dfrac{2x}{3x+1}+5$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.
Mettre $f(x)$ sous la forme d'un quotient.

145 ✶ Simplifier $\dfrac{x+8}{2x} \times \dfrac{x}{x+4}$.

146 ✶✶ Montrer que $\dfrac{3x+1}{x+1}-\dfrac{4x}{2x+2}$ est égal à une constante pour tout réel x différent de -1.

147 ✶✶ Soit $f(x)=\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ pour tout réel x différent de -1 et -2.
Mettre $f(x)$ sous la forme d'un quotient.

4 Résoudre algébriquement des équations

QCM

148 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2=10$:

a a pour solution 5.
b a pour solutions -5 et 5.
c a pour solutions $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.
d n'a pas de solution.

149 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2+5=0$:

a a pour solution -5.
b a pour solution $\sqrt{5}$.
c a pour solution $-2,5$.
d n'a pas de solution.

150 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\dfrac{2x+4}{x-1}=0$:

a a pour solution -2.
b n'a pas de solution.
c a pour solutions -2 et 1.
d a pour solution 1.

151 Dans $\mathbb{R}$, l'équation $\dfrac{1}{x}=9$:

a n'a pas de solution.
b a pour solution -9.
c a pour solution $\dfrac{1}{9}$.
d a pour solution 9.

152 ✶ Soit $A=(t-4)(5t-7)$.
Pour quelle valeur de t, l'expression A s'annule-t-elle ?

153 ✶ Résoudre $\dfrac{x+4}{x}=2$ dans $\mathbb{R}$.

154 ✶ Résoudre $(3x+3)(x-4)(76-2x)=0$ dans $\mathbb{R}$.

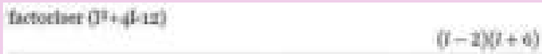
155 ✶✶ On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2-5$ pour tout réel x.
1. Résoudre $f(x)=4$.
2. Déterminer les antécédents de 0 par f.

156 ✶✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+4)^2=121$.

157 ✶✶ On considère la fonction f définie par $f(x)=4x^2-2x$ pour tout réel x.
Résoudre :
a) $f(x)=0$.
b) $f(x)=-\dfrac{1}{4}$.

158 ✶✶ ABCD est un rectangle tel que AD = AB + 4
Déterminer la (les) longueur(s) possible(s) de [AB] pour que l'aire de ABCD soit égale à 12.

Coup de pouce On pourra utiliser l'affichage suivant.



PARTIE
3

Géométrie

Euclide
(vers 325 av. J.-C. – vers 265 av. J.-C.)

René Descartes
(1596 – 1650)

Au moment des crues du Nil, les Égyptiens utilisaient la géométrie pour calculer l'impôt que chacun devait payer.

Euclide est l'auteur des *Éléments* dans lequel il présente des théorèmes et leurs démonstrations en se basant sur des axiomes et des postulats. Il donne son nom à la géométrie euclidienne.
↪ Dicomaths p. 349

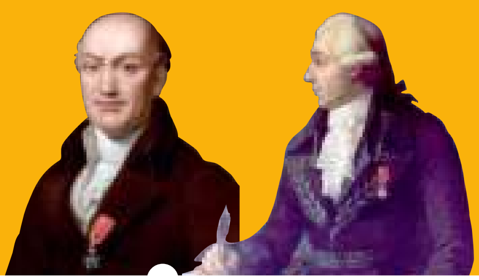
Pour Descartes, les objets se représentent par des équations ou des inéquations, avec le choix d'un repère dans lequel les objets ont des coordonnées, ce qui conduit à la géométrie analytique.
↪ Dicomaths p. 349

Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai appris à me repérer sur une droite graduée, dans le plan ou dans l'espace. J'ai défini les notions d'abscisse, d'ordonnée, d'altitude, de latitude et de longitude. J'ai étudié les polygones (triangles, quadrilatères) et les cercles, les théorèmes de Thalès et de Pythagore, ainsi que le parallélisme et la perpendicularité.

En 2de, je vais apprendre à résoudre des problèmes de géométrie repérée et je vais découvrir la notion de vecteur. Je vais également apprendre à représenter et à caractériser les droites du plan.

Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749 – 1822)
Pierre Méchain (1744 – 1804)



Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Benoît Mandelbrot (1924 – 2010)

Sous la Révolution française, Delambre et Méchain utilisent la triangulation pour mesurer la longueur du méridien à l'origine du mètre universel.
↪ Dicomaths p. 348 et p. 351

La géométrie riemannienne étend les deux précédentes géométries et permet l'étude de géodésiques afin de résoudre certains problèmes de plus court chemin.
↪ Dicomaths p. 352

Au XXIe siècle, la géométrie fractale de Benoît Mandelbrot a des applications variées, comme la construction de murs anti-bruit ou dans le domaine de l'art.
↪ Dicomaths p. 351

En 1re générale, j'étudierai le calcul vectoriel et le produit scalaire.

En 1re technologique, j'étudierai des droites particulières : les tangentes à une courbe. En 1re STD2A, j'étudierai la géométrie dans l'espace, les frises et les pavages.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **physique-chimie**, à calculer la trajectoire d'un satellite, à faire le bilan des forces d'un solide.
- En **géographie**, à mesurer la distance entre deux villes, à établir la valeur du mètre universel.
- En **SVT**, à établir la profondeur de la discontinuité de Mohorovičić.
- En **architecture**, à construire des bâtiments de formes diverses.
- En **informatique**, à construire les graphismes des jeux vidéo.

5

La biométrie est une série de méthodes automatisées permettant de reconnaître une personne.
Ici on s'intéresse aux mesures faites par un capteur des caractéristiques d'un visage humain (écartement des yeux, arêtes du nez etc.). C'est la distance entre certains de ces points caractéristiques qui va permettre d'obtenir la meilleure identification.

Repérage et problèmes de géométrie

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Utiliser le projeté orthogonal	1 p. 120	1 2 p. 120 28 29 p. 123
Calculer des longueurs, des aires ou des volumes	2 p. 121	6 7 p. 121 26 27 p. 123
Utiliser les coordonnées pour calculer des longueurs	3 p. 121	8 p. 121 33 p. 123
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	3 p. 121	9 p. 121 32 36 p. 123
Démonstration Montrer que le projeté orthogonal d'un point M sur une droite Δ est le point le plus proche du point M Montrer la relation trigonométrique $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ dans un triangle rectangle	Act 2 p. 117 Cours p. 118	TP3 p. 130

Act 1 activités · 1 exercices résolus · 16 exercices corrigés · 14 exercices non corrigés · TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-09

1. En trigonométrie

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que AC = 3 et BC = 6.
Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

2. ACD est un triangle rectangle en A tel que AC = 3 et $\widehat{ADC} = 60°$
Calculer la longueur CD.

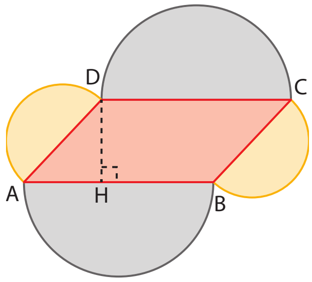
2. Aires

On considère un parallélogramme ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 4 cm.
La hauteur DH mesure 3 cm.

1. Déterminer l'aire du parallélogramme ABCD.

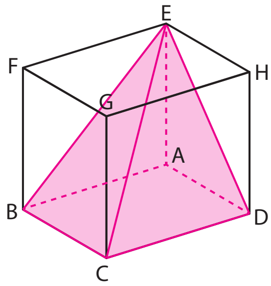
2. Calculer les aires des demi-disques de diamètres les côtés du parallélogramme

3. En déduire l'aire totale de la figure coloriée ci-contre.



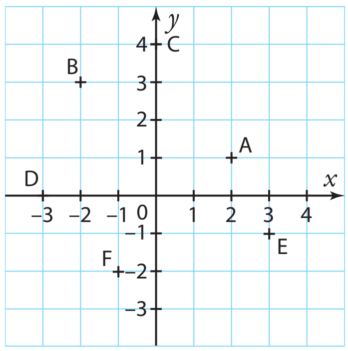
3. Volumes

Dans un cube ABCDEFGH de côté 4 cm, on construit la pyramide à base carrée ABCD et de sommet E.
Calculer son volume.



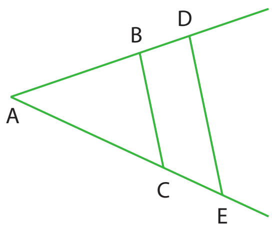
4. Coordonnées

Sur la figure ci-contre, lire les coordonnées de tous les points.



5. Triangles semblables

Les points A, B et D d'une part et A, C et E d'autre part sont alignés et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.
Démontrer que les triangles ABC et ADE sont des triangles semblables.



Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 127, 128, 130, 131

Algo & Prog
p. 126, 131

TICE
p. 117, 127, 130, 131

Les autres disciplines
p. 125, 128, 131

Problèmes ouverts
p. 128

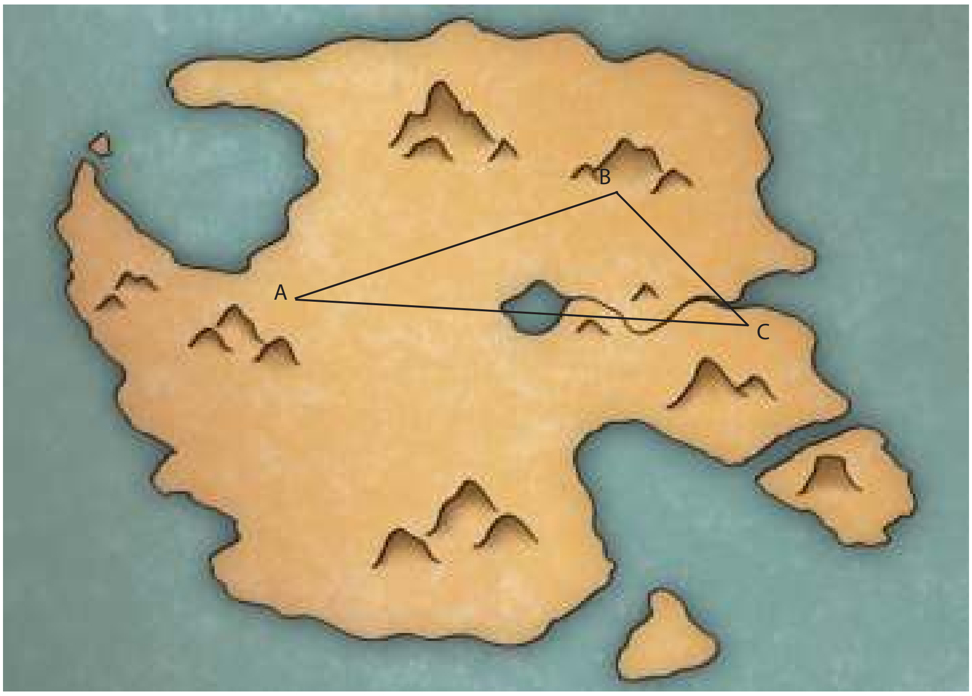
Activités

1 Régionner le plan

10 min

Sur une île du pacifique, trois villages ont des problèmes pour l'alimentation de l'eau.
Les habitants décident donc de s'unir pour creuser un puits qui soit le plus proche possible des trois villages.
On a représenté sur le schéma suivant les villages par les points A, B et C et on a :
AB = 9 km, AC = 12 km et BC = 5 km.

1. Reproduire la figure à l'échelle 1/100 000^{e}.



2. On sait que le puits doit être plus proche du village B que du village A.
Déterminer la droite qu'il faut construire et hachurer la zone de l'île où le puits ne peut pas se trouver.

3. De plus on sait que le puits doit être à une distance du village B qui soit inférieure à celle entre les villages B et C.
Hachurer la partie qui ne convient pas.

4. Pour des raisons de nuisances sonores, les habitants des villages B et C souhaitent que le puits soit construit à une distance de plus de 4 km de la route les séparant.
Hachurer la partie qui ne convient pas.

5. Finalement, les habitants du village A aussi craignent le bruit et donc il est décidé de construire le puits à l'extérieur du triangle ABC.
Colorier la zone possible pour la construction de ce puits.

↪ Cours 1 p. 118

TICE · En groupe · 15 min

2 Plus court

1. On considère un triangle ABC rectangle en A et un point M sur le segment [BC].
On construit la droite perpendiculaire à (AC) passant par le point M, elle coupe [AC] en un point N.
De même, on construit la droite perpendiculaire à (AB) passant par M, elle coupe [AB] en un point P.
À l'aide de GeoGebra, faire la construction.

2. Faire varier le point M sur le segment [BC].
Chercher la position qui rend minimale la longueur du segment [NP].

3. Montrer que chercher le minimum de NP revient à chercher le minimum de AM.

4. On construit la perpendiculaire à (BC) passant par A, elle coupe [BC] en un point H.
Montrer que la longueur AH est la plus courte distance AM pour $M \in [BC]$

Cours 1 p. 118

15 min

3 Distance entre deux points

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les coordonnées des points A et B.
On cherche la distance AB.

1. Placer les points A et B dans chacun des cas du tableau ci-contre puis recopier et compléter le tableau en donnant une valeur arrondie à 10^{-4} de la distance AB.

	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4	Cas n° 5
A	(2 ; 3)	(2 ; –1)	(–3 ; 0)	(2 ; 3)	(–4 ; 1)
B	(4 ; 3)	(2 ; –3)	(0 ; 3)	(4 ; 1)	(2 ; –3)
AB					

2. Conjecturer une formule permettant de calculer la distance AB.

Coup de pouce Utiliser le théorème de Pythagore

3. On note $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$ les coordonnées des points A et B.
On trace la parallèle à un axe du repère passant par A et la parallèle à l'autre axe passant par B, elles se coupent en un point H.
Dans le triangle ABH, exprimer les longueurs AH et BH.
En déduire la longueur AB.

Cours 2 p. 119

15 min

4 Où est le milieu ?

Le plan est muni d'un repère quelconque. On donne les coordonnées des points A et B.
Le point K est le milieu du segment [AB].

1. Placer les points A et B, puis le point K dans chacun des cas du tableau ci-contre puis recopier et compléter le tableau.

	Cas n° 1	Cas n° 2	Cas n° 3	Cas n° 4
A	(2 ; 0)	(–2 ; 1)	(–6 ; –4)	(1,5 ; 4)
B	(4 ; 6)	(2 ; –3)	(10 ; –3)	(2 ; 3)
K				

2. Conjecturer une formule permettant de calculer l'abscisse du point K en fonction des abscisses des points A et B.

3. Conjecturer une formule permettant de calculer l'ordonnée du point K en fonction des ordonnées des points A et B.

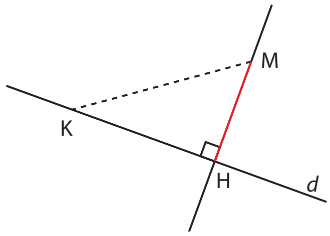
Cours 2 p. 119

Cours

1 Géométrie sans repère

Définition Projeté orthogonal

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite *d* avec M extérieur à cette droite, le point H intersection de la droite *d* et de la perpendiculaire à la droite *d* passant par M.



Remarque Si le point M appartient à la droite *d* alors il est son propre projeté orthogonal.

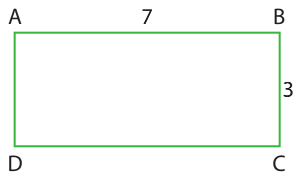
Définition Distance d'un point à une droite

On appelle distance d'un point M à une droite *d* la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite *d*.
Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite.

Démonstration

Soit K un point quelconque de la droite *d* distinct de H. Le triangle MHK est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a : $MK^2 = MH^2 + HK^2$.
Par conséquent, comme $HK \neq 0$: $MK^2 > MH^2$ on en déduit que quel que soit le point K de la droite *d*, $MK > MH$, ce qui montre que la plus courte distance est bien MH.

Exemple

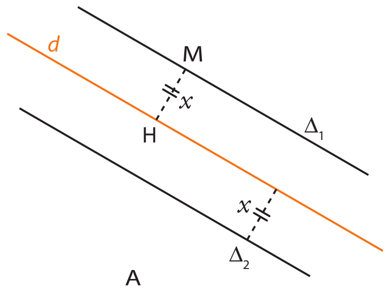


ABCD est un rectangle de longueur AB = 7 et de largeur BC = 3.
Le projeté orthogonal du point D sur la droite (BC) est le point C donc la distance du point D à la droite (BC) vaut DC = AB = 7.

Exercice résolu 1 p. 120

Propriété Ensemble des points à une distance donnée d'une droite

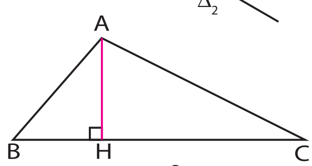
L'ensemble des points à une distance fixée x d'une droite donnée *d* est composé des deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles à *d* situées de part et d'autre de *d*.



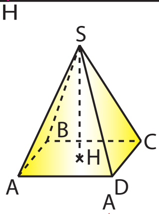
Remarque La droite Δ_1 est également la droite perpendiculaire à (MH) passant par M où H est le projeté orthogonal de M sur *d*.

Définition Hauteur dans un triangle

Dans un triangle ABC, la droite qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire au côté opposé [BC] s'appelle la hauteur issue de A.
La longueur AH est la distance du point A à la droite (BC).

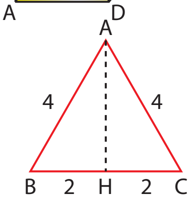


Remarque
De la même manière, la hauteur SH d'une pyramide est la plus courte distance entre son sommet et sa base.



Exemple

ABC est un triangle équilatéral de côté 4. Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) est le milieu du segment [BC] car A est sur la médiatrice de ce segment.
Donc la distance de A à la droite (BC) est la longueur AH.
Pour la calculer on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AHB qui donne :
$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ et donc $AH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

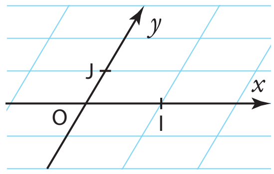


Exercice résolu 2 p. 121

2 Géométrie avec repère

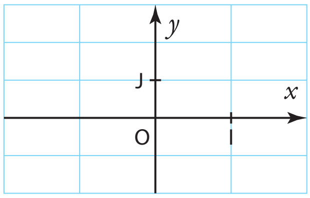
Définition Repère

Étant donné trois points distincts O, I et J non alignés, le repère noté (O ; I, J) est le repère d'origine O ayant pour axe des abscisses (OI), pour axe des ordonnées (OJ) et tel que I et J sont les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).

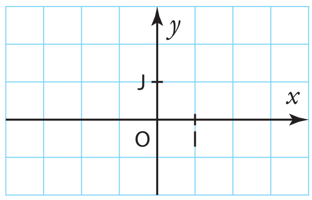


Remarque Les deux cas particuliers qui sont le plus souvent utilisés sont les suivants.

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est **orthogonal.**



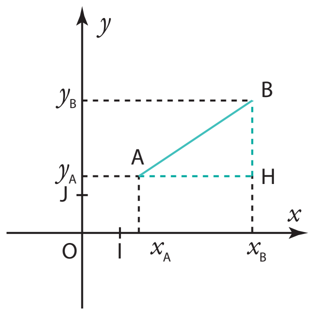
- Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, le repère est **orthonormé** (ou orthonormal)



Définition Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la longueur AB du segment [AB] où A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) est donnée par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Démonstration

On considère le point H tel que ses coordonnées sont H(x_B ; y_A), le triangle ABH est donc rectangle en H et le théorème de Pythagore nous donne :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exemple

Soit A(3 ; –2) et B(–1 ; –4) dans un repère orthonormé alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

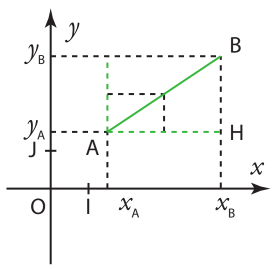
soit $AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Exercice résolu 3 p. 121

Propriété Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère quelconque, le milieu d'un segment [AB] où A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



Exemple

Soit A(3 ; –1) et B(–2 ; 5) alors le milieu du segment [AB]

a pour coordonnées $\left(\frac{3+(-2)}{2} ; \frac{-1+5}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$.

Exercice résolu 3 p. 121

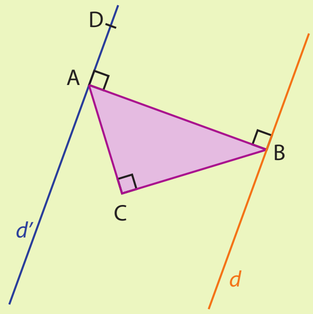
Exercices résolus

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-10

1 Utiliser le projeté orthogonal

Cours 1 p. 118

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que AB = 5 cm, BC = 4 cm et AC = 3 cm. On trace deux droites *d* et *d'* perpendiculaires à [AB] et on place un point D sur la droite *d'*.
Déterminer les distances :
a) du point A à la droite (BC).
b) du point B à la droite (AC).
c) du point D à la droite *d*.



Solution

a) Le triangle ABC est rectangle en C donc le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) est le point C [1] et [2].
Par conséquent, la distance de A à (BC) est égale à la longueur AC soit 3 cm. [3]

b) Le triangle ABC est rectangle en C donc le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est le point C [1] et [2].
Par conséquent, la distance de B à (AC) est égale à la longueur BC soit 4 cm. [3]

c) Pour déterminer la distance du point D à la droite *d*, il faut construire le projeté orthogonal E de D sur la droite *d*, mais alors (DE) est perpendiculaire à d et par conséquent ABDE est un rectangle.
Donc AB = DE et la distance cherchée est la longueur AB soit 5 cm. [3]

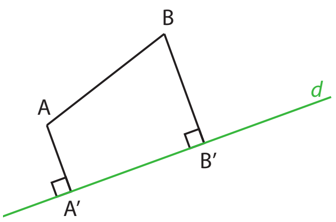
Conseils & Méthodes

1 Repérer les angles droits de la figure.
2 Déterminer les projetés orthogonaux nécessaires.
3 Utiliser le fait que la distance est la plus courte avec le projeté orthogonal.

À vous de jouer !

1 Tracer une droite *d* et placer un point M n'appartenant pas à *d*.
1. Construire le point H tel que la distance de M à la droite *d* soit la longueur MH.
2. Soit un point N de la droite *d*, tracer la hauteur issue de H dans le triangle MNH, elle coupe le segment [MN] en un point I.
3. Dans le triangle MNH, quelle sera la hauteur issue de N ?
4. Quelle est la distance du point H à la droite (MN) ?

2 On considère deux points A et B situés du même côté par rapport à une droite *d*, et on construit les projetés A' et B' des points A et B sur la droite *d*.



Donner la nature du quadrilatère AA'B'B. Justifier.

3 Tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Soit A un point quelconque sur le cercle, tracer la droite *d* perpendiculaire à (OA) en A.
On place un point M quelconque sur la droite *d*.
Comparer, en justifiant, les distances OA et OM.

4 On considère un parallélogramme ABCD d'aire 24 cm^2 et tel que AB = 8 cm.
On appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).
1. Déterminer la distance du point D à la droite (AB).
2. Construire un parallélogramme ABCD vérifiant les hypothèses et tel que H soit le milieu du segment [AB].
3. En déduire que DA = DB
4. En déduire que le cercle de centre B passant par D passe aussi par C.

5 On considère un carré ABCD de côté 6 cm.
1. Construire l'ensemble des points M qui sont situés à 2 cm de la droite (AD).
2. Quelles sont les valeurs possibles pour la distance du point B à cet ensemble ?
3. De la même manière, construire l'ensemble des points qui sont situés à 2 cm de la droite (AB).
4. Combien y a-t-il de points qui sont dans les deux ensembles précédents ?

Exercices 28 à 31 p. 123

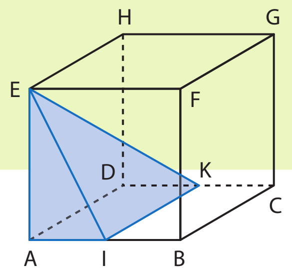
Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-10

Exercices résolus

2 Calculer des longueurs, des aires ou des volumes

↪ Cours 1 p. 118

Dans le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 2 cm, les points I et K sont les milieux des arêtes [AB] et [CD] du carré ABCD.
Calculer le volume de la pyramide AIKDE.



Solution

Cette pyramide a pour base AIKD qui est un rectangle car c'est un quadrilatère avec deux angles droits et deux côtés opposés de même longueur 1.

La hauteur de cette pyramide est la plus courte distance entre son sommet E et sa base AIKD donc c'est la longueur AE 2.

Le volume de cette pyramide est donc :

$\frac{1}{3} \times AD \times AI \times AE = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{4}{3}$ cm^3 3

Conseils & Méthodes

1 Déterminer la base et le sommet de la pyramide
2 Déterminer quelle est sa hauteur.
3 Rechercher la formule à utiliser, reconnaitre les longueurs à calculer puis appliquer la formule.

À vous de jouer !

6 Dans le cube ABCDEFGH de côté 4, calculer le volume du tétraèdre ABDE.
Quel est son rapport avec le volume du cube ?

7 Dans le cube ABCDEFGH, de côté 3, on admet que la diagonale [AC] du carré ABCD mesure $3\sqrt{2}$.
Déterminer la longueur de la diagonale [AG] de ce cube.

↪ Exercices 26 et 27 p. 123

3 Utiliser des coordonnées dans un repère

↪ Cours 2 p. 119

On considère les points A (1 ; –3), B (–4 ; –1), C (3 ; 3) et D (–1 ; 2)
1. Déterminer par le calcul les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [AC] et [BD].
2. Calculer les longueurs AC et BD.

Solution

1. Le milieu I du segment [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+1}{2} ; \frac{3+(-3)}{2}\right)$ soit I(2 ; 0) et le milieu J de [BD] a pour coordonnées $\left(\frac{-4+(-1)}{2} ; \frac{-1+2}{2}\right)$ soit $J\left(-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. 1 3

2. On calcule : $AC = \sqrt{(3-1)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
et $BD = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 2 3 4

Conseils & Méthodes

1 Reconnaitre la formule qu'il faut utiliser.
2 Vérifier que le repère est orthonormé pour calculer une longueur.
3 Attention dans les calculs aux soustractions de nombres négatifs.
4 On peut simplifier l'écriture et la mettre sous la forme $a\sqrt{b}$.

À vous de jouer !

8 On considère les points A (1 ; 5), B (–1 ; 1) et C (3 ; 4).
Calculer les longueurs AB, AC et BC.

9 On considère les points A (–2, 1), B (1 ; 3) et C.
Calculer les coordonnées des milieux des segments [AB], [AC] et [BC].

↪ Exercices 32 et 36 p. 123

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

10 Reconnaitre la formule qui donne les coordonnées du milieu d'un segment [AB] et celle qui donne la distance AB. Recopier ces deux formules et demander à l'un de vos camarades de vous les faire réciter.

a) $\left(\dfrac{x_B - x_A}{2} ; \dfrac{y_B - y_A}{2}\right)$ **b)** $\sqrt{(x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2}$

c) $\left(\dfrac{x_B + x_A}{2} ; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$ **d)** $\dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

e) $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ **f)** $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

11 Sur un tableau ou une feuille, tracer deux colonnes : l'une « Vrai » et l'autre « Faux ».

Recopier dans l'une ou l'autre des colonnes chacune des phrases suivantes puis corriger les phrases qui se trouvent dans la colonne « Faux ».

① Le milieu de [AB] est aligné avec A et B.

② Si un point M vérifie MA = MB alors M est le milieu du segment [AB].

③ L'ensemble des points M tels que AM = 3 est le cercle de centre A et de rayon 3.

④ Un quadrilatère qui a deux angles droits est un rectangle.

⑤ L'ensemble des points M à la distance 2 d'une droite d est le cercle de centre M et de rayon 2.

⑥ Un triangle qui a deux côtés de même longueur est un triangle rectangle.

⑦ L'ensemble des points à égale distance de deux droites parallèles s'appelle une médiatrice.

Questions - Flash

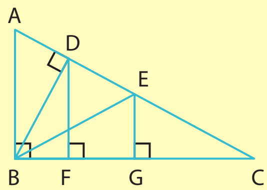
Diapo Diaporama Ressource professeur

12 Dans la figure ci-contre, déterminer les projetés suivants :

a) du point A sur la droite (BD).

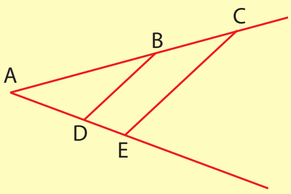
b) du point E sur la droite (BC).

c) du point F sur la droite (AB).



13 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a BC = 10 et AB = 6.
Quelle est la longueur du côté AC ?

14 On considère trois points A, B et C alignés tels que : AB = 8 et AC = 12. On place les points D et E sur une même droite passant par A et tels que AD = 5 et les droites (BD) et (CE) sont parallèles.
Quelle est la valeur de la longueur AE ?



15 On considère les points A (–2 ; 3) et B (–4 ; –1).
Déterminer la longueur AB.

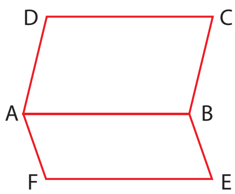
16 On considère les points A (–3 ; 1) et B (–2 ; –4).
Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

17 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :
AB = 4, AC = 3 et BC = 5.
Déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

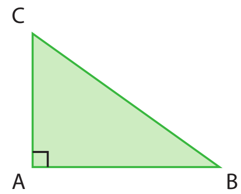
18 Dans le même triangle que l'exercice précédent, déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$.

Géométrie plane AP

19 On considère les parallélogrammes ABCD et ABEF.
Montrer que le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.



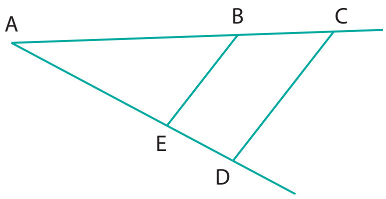
20 On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que AC = 15 et BC = 25.



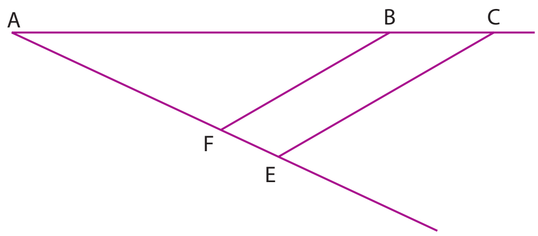
Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [AB].

21 Un triangle BCD est tel que BC = 25, BD = 24 et CD = 7.
Déterminer si le triangle BCD est rectangle ou non.

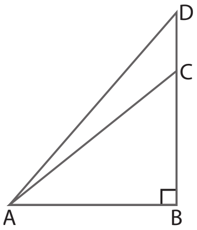
22 On considère trois points A, B et C alignés sur une même demi-droite d'origine A tels que AB = 8 et AC = 12.
Sur une autre demi-droite d'origine A, on place les points D et E tels que (BE) est parallèle à (CD) et AD = 9.
Calculer la longueur AE.



23 Sur deux demi-droites de même origine A, on place les points B, C, E et F tels que AB = 8, BC = 4, AF = 4 et EF = 2.
Déterminer si les droites (BF) et (CE) sont parallèles.



24 Le triangle ABD est rectangle en B et le point C est un point appartenant au segment [BD].
De plus on a AB = 6, AC = 8 et AD = 10.
1. Calculer la longueur BC.
2. Calculer la longueur BD.



25 Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point M et les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
De plus on a AD = 3, BC = 2 et AM = 3,5.
1. Calculer la longueur BM.
2. On donne CM = 1,8, calculer DM.
3. Soit I et J les milieux respectifs de [MB] et [MC], montrer de (IJ) et (BC) sont parallèles.

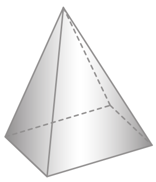
Calculer des longueurs, des aires et des volumes

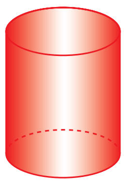
26 Dans un triangle ABC, on a : AB = 9, BC = 12 et AC = 15.
1. Montrer que ABC est un triangle rectangle.
2. Calculer son aire.

27 On considère les quatre solides suivants.

① Une pyramide de base rectangulaire de longueur 6 cm et de largeur 3 cm, et de hauteur 6 cm.

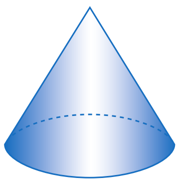
② Un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 3 cm.

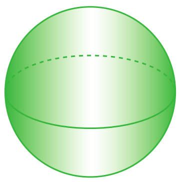




③ Un cône de rayon 3 cm et de hauteur 3 cm.

④ Une boule de rayon 2 cm.



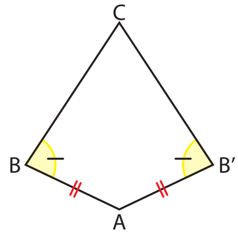


Classer ces quatre solides dans l'ordre croissant de leurs volumes.

Utiliser le projeté orthogonal

28 ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur [BC].
1. Montrer que les triangles ABC et AHC sont semblables.
2. De même, montrer que les triangles ABC et AHB sont également semblables.

29 Sur la figure ci-contre, AB = AB′ et $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C}$. On appelle H et H′ les projetés orthogonaux du point A respectivement sur (BC) et (B′C). Démontrer que les triangles ABH et AB′H′ sont semblables, puis égaux.



30 **1.** Tracer une droite *d* et placer un point A n'appartenant pas à *d*.
2. Construire l'ensemble des points situés à 2 cm de *d*.
3. Déterminer les points qui sont à la fois à 2 cm de *d* et à 4 cm de A.
4. Discuter selon la distance du point A à la droite *d*, le nombre de solutions à la question **3**.

31 On considère un parallélogramme ABCD tel que B et D ont le même projeté orthogonal sur la diagonale [AC].
1. Réaliser une figure correspondante.
2. Justifier qu'alors (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
3. Que peut-on en déduire de la nature de ABCD ?

Utiliser des coordonnées dans un repère

32 On donne les points A(2 ; 3) et B(–1 ; –4)
Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

33 On donne les points C (–1 ; –3) et D (3 ; 1).
Déterminer par le calcul la longueur CD.

34 On considère les points A (3 ; –1), B (5 ; 2) et C (7 ; –1).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. Donner la nature du triangle ABC.

35 On considère les points A (–2 ; 1), B (–4 ; 4) et C (0 ; –2).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

36 Dans un repère orthonormé, on place les points A (1 ; –1), B (–2 ; 0), C (0 ; 6) et D (3 ; 5).
1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AC].
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [BD].
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Calculs et automatismes

37 Exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$.
a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt{32}$

38 Simplifier les fractions.
a) $\dfrac{3+4}{2}$ **b)** $\dfrac{-2+4}{2}$ **c)** $\dfrac{-3+(-5)}{2}$ **d)** $\dfrac{7+(-4)}{2}$

Exercices d'entraînement

Utiliser le projeté orthogonal

39 Dans un triangle ABC isocèle en A, on construit les projetés orthogonaux H et K des points B et C respectivement sur les côtés [AC] et [AB].
1. Montrer que les triangles BCH et BCK sont égaux.
2. En déduire que AH = AK, puis que (HK) est parallèle à (BC).

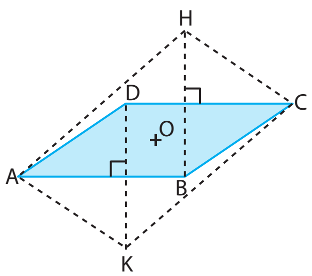
40 On considère le triangle ABC tel que AB = 10,5 AC = 17,5 et BC = 14 et on appelle H le projeté orthogonal du point B sur le côté [AC].
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Exprimer l'aire de ce triangle de deux façons.
3. En déduire la longueur BH.

41 On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 et BC = 3. On projette orthogonalement le point B sur (AC) en un point H
1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer la longueur de la diagonale [AC].
3. En déduire la longueur BH.

42 On considère deux droites *d* et d' sécantes en un point O et un point A n'appartenant ni à *d*, ni à *d'*. On projette le point A sur la droite *d* en un point H et sur *d'* en un point K. La droite (AH) coupe *d'* en un point B et la droite (AK) coupe la droite d en un point C.
1. Réaliser la figure correspondante.
2. Démontrer que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

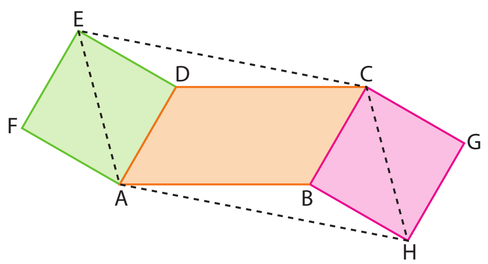
Résoudre des problèmes de géométrie plane

43 On considère un parallélogramme ABCD.
Le point H est le symétrique du point B par rapport à la droite (CD) et le point K est le symétrique du point D par rapport à la droite (AB).



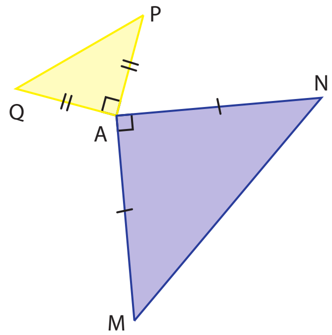
1. Montrer que le quadrilatère DHBK est un parallélogramme.
2. En déduire que le quadrilatère AKCH est aussi un parallélogramme

44 On considère un parallélogramme ABCD et on construit à l'extérieur les carrés ADEF et BCGH.



Démontrer que AECH est un parallélogramme.

45 Les deux triangles AMN et APQ sont rectangles et isocèles en A.
Démontrer que MP et NQ ont la même longueur par deux méthodes :
a) en comparant les triangles MAP et NAQ.
b) en utilisant une rotation de centre A.

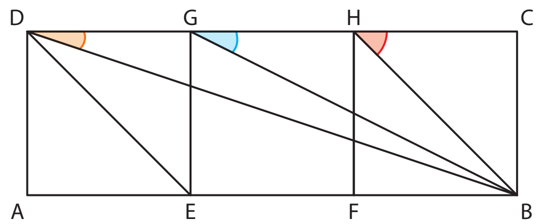


46 Soit un rectangle ABCD avec AB = 3AD = 3.
On le découpe en trois carrés AEGD, EFHG et FBCH tous de côté 1.

1. Calculer les rapports $\frac{ED}{HG}$, $\frac{DB}{GB}$ et $\frac{BE}{BH}$.

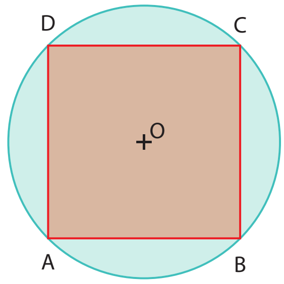
2. Comparer alors les triangles EDB et HGB.

3. Montrer que $\widehat{BDC} + \widehat{BGC} = \widehat{BHC}$.



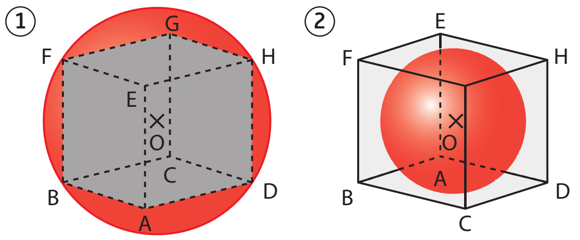
Calculer des longueurs, des aires et des volumes

47 On considère un carré ABCD de centre O et de côté 4 cm, et un disque de centre O passant par les quatre sommets du carré.
1. Calculer l'aire du carré.
2. Calculer le rayon du disque.
3. Calculer l'aire du disque.
4. En déduire l'aire turquoise comprise entre le disque et le carré.



Exercices d'entraînement

48 Soit un cube d'arête 2 cm.
1. Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube.
2. Calculer le volume de la sphère inscrite dans le cube.



49 On dispose d´une sphère de diamètre 4 cm remplie d´eau dont on transvase le contenu dans un cylindre de révolution de diamètre de base 4 cm et de hauteur 4 cm. Quelle est la hauteur atteinte par l´eau dans le cylindre ?

50 Une boite de quatre balles **EPS** de tennis est un cylindre de hauteur 26 cm.
1. Calculer le diamètre d'une balle de tennis.
2. En déduire le rayon de la boîte.
3. Calculer le volume de la boîte.
4. Calculer le volume d'une balle de tennis.
5. En déduire le volume de l'espace vide.

Utiliser la trigonométrie

51 Dans un triangle ABC rectangle en C, on donne AB = 8 et AC = 4.
1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{CAB}$.
3. Calculer la longueur BC par deux méthodes différentes.

52 On considère un losange ABCD de centre le point O tel que AB = 5 et AC = 6.
1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ADO}$.
2. Déterminer la longueur BO.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$.

53 Dans triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5, on place un point D sur le segment [AB] tel que AD = 3 et $\widehat{ADC} = 60°$.
1. Calculer la longueur CD.
2. Calculer la longueur AC.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

Utiliser les coordonnées

Pour les exercices suivants, on se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J)

54 On considère les points A(–2 ; 1), B(2 ; 3) et C(–3 ; 3).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

55 On considère les points A(6 ; 1), B(7 ; 5) et C(–2 ; 3).
1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

56 On considère les points A(2 ; –1), B(4 ; 5) et C(–7 ; 2).
1. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment [BC].
2. Calculer les longueurs MA, MB et MC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

57 Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants.
a) A(4 ; 1), B(–1 ; 5) et C(–2 ; –1).
b) A(6 ; –5), B(–1 ; –4) et C(–0,5 ; –0,5).
c) A(–2 ; 4), B(4 ; 0) et C(–3 ; –4).

58 On considère les points A(–2 ; –3), B(2 ; –2), C(–1 ; 1) et D(3 ; 2).
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

59 On considère les points A(5 ; 1), B(–1 ; 5), C(1 ; 8) et D(7 ; 4).
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

60 On considère les points A(1 ; 2), B(–6 ; 3), C(6 ; 7) et D(–1 ; 8).
Déterminer la nature du quadrilatère BACD.

61 On donne les points A(2 ; –3) et B(–3 ; –1).
Déterminer les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à B.

62 On considère les points A(1 ; 4), B(4 ; 6) et C(2 ; 3).
Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

63 Soit A(–2 ; 5), B(0 ; 9) et D(8 ; 0).
1. Déterminer les coordonnées du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Montrer que ABCD est un rectangle.

64 On donne le point A (–3 ; 2). Déterminer la distance du point A aux deux axes du repère.

65 On considère les points A(–5 ; 0), B(3 ; –4) et C(2 ; 4).
1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Calculer les longueurs OA et OB.
3. En déduire que la droite (OC) est la médiatrice du segment [AB].
4. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercices d'entraînement

66 On considère les points A(1 ; 2), B(3 ; –1) et C(–1 ; –1).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [BC].
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D symétrique de A par rapport à I.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

67 On considère les points A(0 ; 12), B(–9 ; 0) et C(16 ; 0)
1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un rectangle.

68 On considère les points D(–2 ; –1), E(15 ; –1) et F(11 ; $2\sqrt{13}$–1).
1. Montrer que le triangle DEF est rectangle.
2. Donner une valeur approchée arrondie à l'unité de l'angle $\widehat{EDF}$.

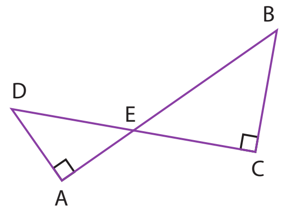
69 Que fait l'algorithme, **Algo & Prog** écrit en PYTHON suivant ?

```
xa=float(input("xa="))
xb=float(input("xb="))
ya=float(input("ya="))
yb=float(input("yb="))
xm=(xa+xb)/2
ym=(ya+yb)/2
print(xm)
print(ym)
```

70 Que donne le programme **Algo & Prog** écrit en PYTHON suivant ? Justifier.

```
import math
def D(xa,ya,xb,yb):
    d = math.sqrt((xb-xa)**2+(yb-ya)**2)
    return d
```

71 Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) se coupent en un point E. Les triangles EAD et BCE sont rectangles et de plus : BC = 5, BE = 7 et AE = 4.



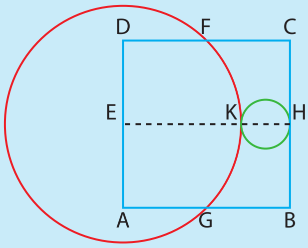
1. Calculer la valeur en degré, arrondie à 0,1, de l'angle $\widehat{BEC}$.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AED}$.
3. Calculer la longueur DE, arrondie à 10^{-1}.

72 On considère les points A(–3 ; –1), B(1 ; –1), C(1 ; 3) et D(–3 ; 3).
1. Démontrer que ABCD est un carré.
2. Calculer les coordonnées des milieux E du segment [AD], F de [CD], G de [AB] et H de [BC].
3. Calculer le rayon du cercle de centre E passant par F et G.
4. On appelle K le point d'intersection du cercle et du segment [EH].
En déduire le rayon du cercle qui touche le carré et le cercle précédent.

Travailler autrement — Problèmes ouverts

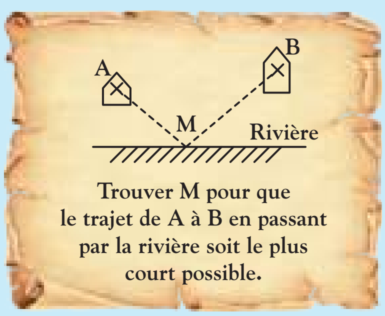
73 ABCDEFGH est un cube de 10 cm d'arête. Combien de points sur les arêtes du cube sont situés à 15 cm du point A ?

74 On considère *d* et *d′* deux droites sécantes. Déterminer où placer trois points A, B et C de telle manière que *d* et *d′* soient deux hauteurs du triangle ABC.



75 On considère un triangle ABC et un point P fixe sur [AB]. Trouver Q sur [AC] et R sur [BC] tels que le périmètre du triangle PQR soit minimum.

76 Lire le parchemin et suivre la consigne.



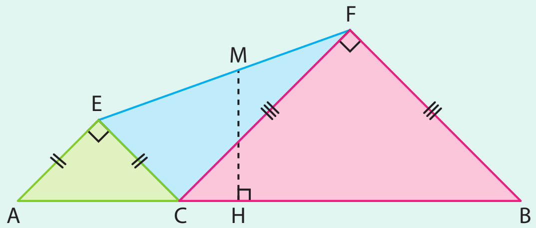
77 Longueur constante TICE

Dans un triangle ABC rectangle et isocèle en A, on construit le milieu I du segment [BC] et un point M quelconque et variable sur le segment [BC].
La droite parallèle à la droite (AI) passant par M coupe la droite (AB) en E et la droite (AC) en F.
1. Déterminer la nature des triangles MEB et MFC.
2. En déduire que la distance ME + MF est constante et donner sa valeur.

Démonstration

78 Encore une constante TICE

Sur un segment [AB], on place un point C variable, puis on construit deux triangles ACE et BCF qui sont isocèles et rectangles en E et F.
On place le point M milieu du segment [EF] et on construit le projeté orthogonal H de M sur la droite (AB).
1. Démontrer que le triangle CEF est rectangle.
2. On construit le point G intersection des droites (AE) et (BF), montrer que le quadrilatère ECFG est un rectangle.
3. En déduire que M est le milieu du segment [CG].
4. On appelle I et J les milieux respectifs des segments [AG] et [BG], démontrer que les points I, M et J sont toujours alignés sur une droite que l'on précisera.



Coup de pouce On pourra utiliser le théorème de Thalès.

5. En déduire que la distance MH est constante.
6. On appelle P et Q les projetés orthogonaux de E et F sur (AB), montrer que MH est la moyenne entre EI et FJ.

79 Cercle et triangle

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(2 ; 3), B(13 ; 1), C(5 ; 7) et D(4 ; –1)
1. Le point A appartient-il au cercle de centre C et de rayon 5 ?
2. Le point B appartient-il à la médiatrice du segment [OJ] ?
3. Quelle est la nature du triangle JAD ?

80 Triangle et rectangle

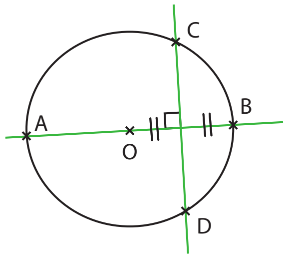
Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–2 ; 1), B(–1 ; 4) et C(5 ; 2).
1. Calculer les valeurs exactes des longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du point M milieu de [AC].
4. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un rectangle.

81 Aires de triangles

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–2 ; –1), B(–4 ; 3) et C(2 ; 6).
1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. On appelle D le symétrique du point B par rapport au milieu du segment [AC].
Démontrer que ABCD est un rectangle.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. La droite perpendiculaire à (AC) passant par le point B coupe (AC) en H.
5. À l'aide de l'aire du triangle ABC, en déduire la longueur BH.
6. Calculer alors la longueur CH.

82 Dans un cercle

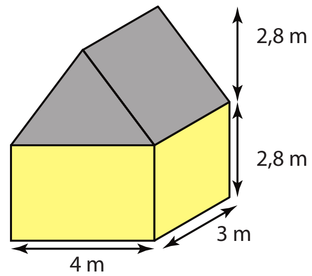
1. Quelle est la médiatrice du segment [OB] ?
Justifier.
2. Expliquer pourquoi OD = DB = OB.



3. Justifier la nature du quadrilatère ODBC.

83 Maquette d'un abri de jardin

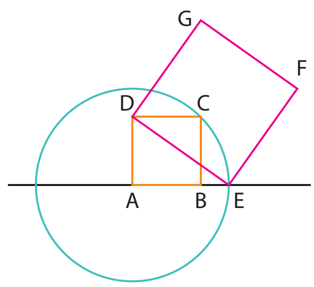
Un abri de jardin est représenté en perspective cavalière.



1. Construire le patron d'une maquette de cet abri à l'échelle 1/100^{e}.
2. Calculer son volume.

84

ABCD est un carré de côté 10.
On trace le cercle de centre A et passant par le point C.
Le point E est l'intersection du cercle avec la droite (AB).
On construit le carré DEFG.



1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire la longueur DE.
3. Montrer que l'aire du carré DEFG est le triple de l'aire du carré ABCD.

Exercices d'approfondissement

85 Sur la piste…

On considère un segment [AB] de longueur 6 cm.
Déterminer l'ensemble des points M du plan qui sont à une distance de 3 cm du segment [AB]

86 Appartenance ou pas

1. Le point A(2 ; 3) appartient-il au cercle de centre C (5 ; 7) et de rayon 5 ?

2. Le point B(9 ; 1) appartient-il à la médiatrice du segment [AC] ?

3. Le point D(7 ; 4) est le milieu du segment [BC] ?

4. Le point E(–5 ; 5) appartient-il à la droite (AB) ?

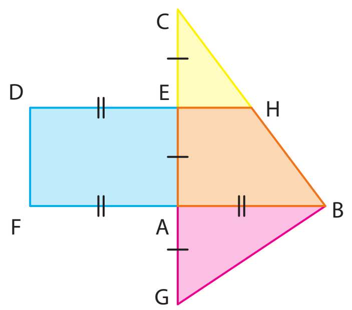
87 Repères non orthonormés

On considère un parallélogramme ABCD. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD]. On considère le repère (A ; B, D).
1. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Démontrer alors que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Remarque Ce résultat est toujours vrai, il s'agit du théorème de Varignon.

88 Changement de repère

Sur la figure ci-contre, les segments de même longueur sont codés.
Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure :
a) dans le repère (A ; B, C).
b) dans le repère (F ; D, A).



89 Une équivalence Logique

On considère trois points A, B et M non alignés.
Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- Le point I est le milieu du segment [AB].
- Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ dans le repère (M, A, B) quelle que soit la position du point M.

90 Enroulement cylindrique

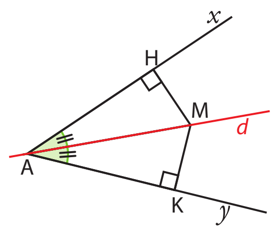
On considère une feuille de longueur L et de largeur ℓ. Déterminer lequel des deux cylindres a le plus grand volume : celui quand on enroule la feuille selon sa largeur ou bien celui où on enroule la feuille selon sa longueur.

91 Bissectrice

Soit deux demi-droites [Ax) et [Ay) de même origine A et une droite d qui coupe l'angle $\widehat{xAy}$ en deux angles égaux

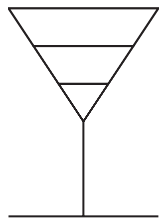
Remarque Cette droite s'appelle la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.

On place un point M sur cette droite d et on construit les projetés orthogonaux H et K de M sur les deux demi-droites.
1. Exprimer la longueur MH en fonction de la longueur AM et d'un angle
2. Exprimer la longueur MK en fonction de la longueur AM et d'un angle
3. Comparer alors les longueurs MH et MK
4. En déduire une caractérisation de la bissectrice d'un angle en tant qu'ensemble de points.



92 Masses volumiques Physique-Chimie

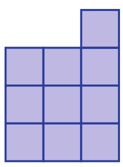
Dans un verre à pied de forme conique, on verse un volume de mercure, un volume d'eau et un volume d'huile de telle manière que l'épaisseur de chacun des liquides dans le verre soit la même.



1. Sachant que la masse volumique du mercure est 13,59 g/cm^3, celle de l'eau 1 g/ cm^3 et celle de l'huile 0,9 g/cm^3, déterminer la masse de chacun des trois liquides dans le verre.
2. Classer les trois liquides de la masse la plus importante à la masse la plus faible et schématiser la superposition obtenue. On représentera l'huile en jaune, le mercure en gris et l'eau incolore.

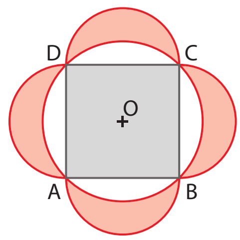
93 Découpage astucieux

Recopier la figure ci-contre sur du carton. Chaque carré a pour côté 1 cm.
Découper la figure obtenue en faisant seulement deux coups de ciseaux et recoller les morceaux pour obtenir un nouveau carré.



94 Surface de croissants

ABCD étant un carré de centre O et de côté a, calculer en fonction de a l'aire de la surface coloriée en rouge comprise entre le cercle de centre O et les demi-cercles de diamètres [AB], [BC], [CD] et [DA].



95 Coordonnées du symétrique d'un point

Les coordonnées des points M(x ; y) et I(x_I ; y_I) sont considérées comme données.
Démontrer que les coordonnées du point M′(x' ; y') symétrique du point M par rapport au point I sont données par :

$$\begin{cases} x' = 2x_I - x \\ y' = 2y_I - y \end{cases}$$

96 Somme constante

On place un point M quelconque à l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC. Démontrer que la somme des distances du point M aux côtés du triangle reste constante et est égale à la longueur de la hauteur du triangle ABC.

97 Identification d'un quadrilatère

On considère les points A(2 ; $\sqrt{2}$), B(1 ; –2), C($-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$) et D($-1-\sqrt{2}$; –1)

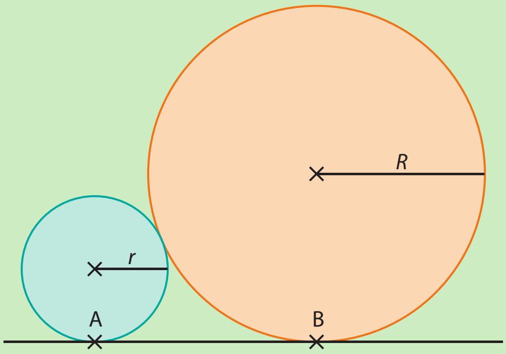
1. Faire une figure et conjecturer la nature du quadrilatère ABDC.
2. Calculer les longueurs AB, BD, CD et AD.
3. Peut-on alors conclure sur la nature du quadrilatère ABDC ?
4. Quelles sont les deux longueurs à calculer pour pouvoir conclure ?
Vérifier.
5. Déterminer les coordonnées du centre du quadrilatère ABCD.

Vers la 1re

Orientation

98 Spécialité Maths

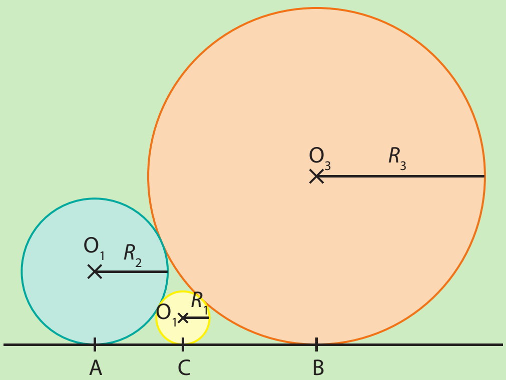
Deux cercles sont tangents à une droite (AB) et également entre eux. Leurs rayons respectifs sont r et R.
Montrer que AB^2 = 4 r R



99 Spécialité Maths

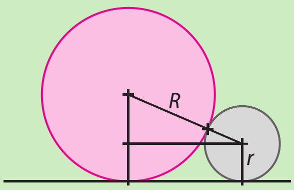
On insère un troisième cercle entre les deux premiers qui est aussi tangent à la droite et tangent aux deux premiers cercles. On note R_1, R_2 et R_3 les rayons des trois cercles de centres respectifs O$_1$, O$_2$ et O$_3$.
À l'aide de l'exercice précédent, montrer que :

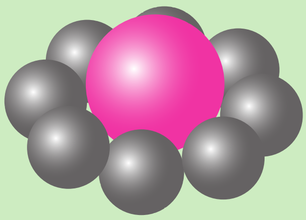
$$\frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$



100 Spécialité Maths

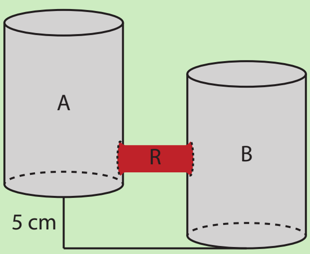
On dispose une sphère de rayon R et huit autres sphères de rayon r sur une table selon les figures suivantes.
Montrer que $\frac{R}{r} = 2 - \sqrt{2}$





101 STI

On considère deux vases A et B qui sont deux cylindres identiques de hauteur 25 cm. Le fond du vase A est situé 5 cm au-dessus de celui du vase B. Ces deux vases communiquent par un tuyau muni d'un robinet R. Le vase A est rempli d'eau, le vase B est vide et le robinet R est fermé.
On ouvre maintenant le robinet R. Une partie du liquide contenu dans le vase A vient donc remplir le vase B. Ce mouvement s'arrêtera lorsque les surfaces libres du liquide dans les deux vases seront sur un même plan horizontal.
Quelle sera alors la hauteur de l'eau contenue dans le vase B ?



Travaux pratiques

TICE — Démonstration — Raisonner, Communiquer — 20 min

1 L'intersection des hauteurs d'un triangle

A ▶ Construction des hauteurs d'un triangle

1. À l'aide de GeoGebra, construire les trois hauteurs d'un triangle ABC.
2. Vérifier en faisant varier les points A, B et C que ces trois droites sont toujours concourantes.

B ▶ Concourance des hauteurs

Dans un triangle ABC, on admet que les hauteurs issues de A et de B se coupent en un point H.
1. Construire la droite d_1 parallèle à la droite (AC) passant par B, puis la droite d_2 parallèle à (BC) passant par A et la droite d_3 parallèle à (AB) passant par C.
On notera M le point d'intersection des droites d_1 et d_3, N le point d'intersection de d_2 et d_3 et P le point d'intersection de d_1 et d_2.
2. Démontrer que les droites (AH) et (BH) sont les médiatrices respectivement des segments [NP] et [MP].
3. En déduire que le point H est équidistant des points M, N et P.
4. En déduire que le point H appartient à la médiatrice du segment [MN].
5. En déduire que le point H appartient à la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
6. Conclure.

Chercher, Communiquer — 15 min

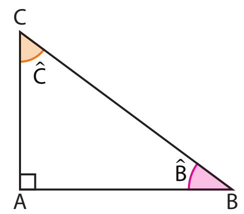
2 Formule d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC quelconque tel que le point H projeté orthogonal de A appartienne au segment [BC].
1. Dans le triangle rectangle ABH, exprimer BH^2 en fonction de AB et de AH.
2. Dans le triangle rectangle ACH, exprimer CH^2 en fonction de AC et de AH.
3. À l'aide d'une identité remarquable, montrer que : $CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2 \times BH \times BC$.
4. En déduire l'expression de BH en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC à l'aide des questions **1.** et **2.**
5. Dans le triangle rectangle ABH, exprimer $\cos\hat{B}$ en fonction de BH et de AB.
6. En déduire la formule d'Al Kashi dans un triangle quelconque : $\cos\hat{B} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BC \times AB}$
7. Cas particulier : quand le triangle est rectangle en B, en déduire la valeur de $\cos\hat{B}$.

Démonstration — Chercher, Communiquer — 10 min

3 Relation trigonométrique

On considère un triangle ABC rectangle en A .
1. Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle $\hat{B}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
2. Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle $\hat{C}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
3. Quelles égalités remarque-t-on ? Et quelle relation a-t-on entre ces deux angles ?
4. Calculer $(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
5. En utilisant le fait que le triangle est rectangle en A, simplifier cette expression.



Remarque Cette relation est vraie quelle que soit la valeur des angles.

Histoire des maths · TICE · Chercher Représenter · 30 min

4 Quadrature du cercle

Le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920) a proposé une solution approchée au problème (qui n'a pas de solution exacte) de la quadrature du cercle.
Selon ses instructions, réaliser les constructions qui suivent à l'aide de GeoGebra.

1. Placer un point nommé O.

2. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Placer un diamètre [AB] de ce cercle.

3. Sur le segment [OB], placer le point C tel que : $OC = \frac{2}{3}OB$

4. D'un même côté de la droite (AB), placer les points suivants.
a) Le point D intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec la perpendiculaire en C à (AB).
b) Le point E du cercle $\mathscr{C}$ tel que BE = CD.
c) Les points O' et C' projetés orthogonaux des points O et C sur la droite (AE).

5. De l'autre côté de la droite (AB), placer les points suivants.
a) Le point F du cercle $\mathscr{C}$ tel que AF = AO'.
b) Le point G sur la perpendiculaire en A à (AB) tel que AG = O'C'.
c) Le point H milieu du segment [OA].
g) Le point I de [BF] tel que BI = BH.
h) Le point J intersection de (BG) avec la parallèle à (GF) passant par I.
i) Finir en traçant le carré de côté [BJ].

6. Quelle est l'aire du carré de côté [BJ] ?

7. Comparer ce nombre au nombre π.

TICE · Démonstration · Chercher Raisonner · 20 min

5 Intersection des médiatrices dans un triangle

A ▸ Construction des médiatrices d'un triangle

1. À l'aide de GeoGebra, construire un triangle ABC quelconque.
2. Construire les médiatrices de chacun des côtés du triangle.
3. Que remarque-t-on ?
Faire varier les points A, B et C pour confirmer cette conjecture.
4. Tracer le cercle passant par les trois sommets du triangle et faire afficher son centre.
5. Que peut-on conclure ?

B ▸ Concourance des médiatrices

1. Justifier que les médiatrices des côtés [AB] et [AC] sont sécantes en un point noté O.
2. Que peut-on en déduire pour les longueurs OA, OB et OC ?
3. En déduire que O appartient à la médiatrice du côté [BC].
4. Que peut-on conclure sur le cercle passant par les trois sommets du triangle ?

Remarque Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle.

C ▸ Cas du triangle rectangle

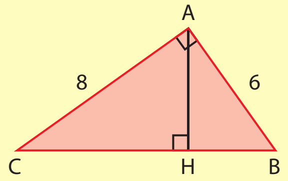
1. Faire varier les points pour que le triangle ABC soit rectangle.
2. Que peut-on conclure sur le centre du cercle circonscrit dans ce cas ?

En autonomie

1 Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes

QCM

Pour les exercices 102 à 105, on utilise la figure suivante.



102 La longueur du côté [BC] vaut :

a 7 b 14 c 10 d 100

103 La longueur de la hauteur [AH] est :

a 2 b 4,8 c 2,4 d 4

104 Le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut :

a 0,8 b 0,6 c $\frac{4}{3}$ d $\frac{3}{4}$

105 L'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'angle :

a $\widehat{BAC}$ b $\widehat{HAC}$ c $\widehat{HAB}$ d $\widehat{BAC}$

Pour les exercices 98 à 101, on utilise le cube suivant de côté 6 où J et K sont les milieux des arêtes [EH] et [GH].

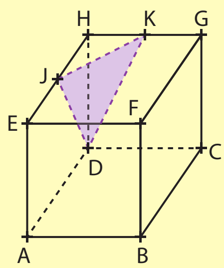
106 Le triangle DJK est :

a rectangle.

b isocèle.

c équilatéral.

d quelconque.



107 Dans la pyramide DJHK, si on prend comme base JHK alors la hauteur mesure :

a 3 b 2 c 6 d $\sqrt{6}$

108 Le volume de la pyramide DJHK vaut :

a 27 b 54 c 9 d 18

109 Les côtés du triangle DJK mesurent :

a 18 et 45 b $3\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$

c 4, 5 et 6 d 3 et 6

110 ✶ On considère un triangle ABC quelconque et H le projeté orthogonal de A sur [BC] avec AH = 4, BH = 6 et CH = 3.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

111 ✶✶ On considère un parallélogramme ABCD et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).

1. Faire une figure avec AB = 8, AD = 4 et AH = 2.

2. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ADH}$.

3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{ADC}$.

4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

112 ✶✶ On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : AB = 10, BC = 3 et AE = 2.

1. Calculer le volume de la pyramide ABCDH de base ABCD et de sommet H.

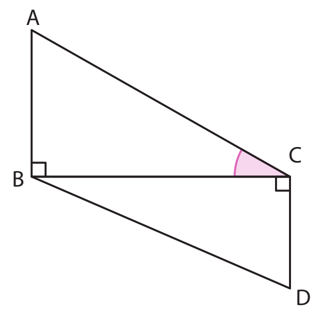
2. Calculer le volume de la pyramide ABDH de base ABD et de sommet H

113 ✶✶ ABCD est un rectangle de longueur AB = 8 et de largeur BC = 6. On appelle H le projeté orthogonal de B sur la diagonale [AC].

1. Calculer la longueur de la hauteur BH.

2. On construit le point K tel que AHBK soit un rectangle. Calculer son aire.

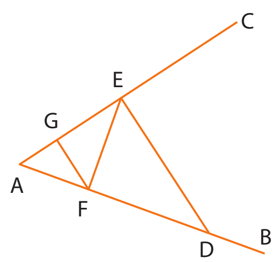
114 ✶✶ Le triangle ABC est rectangle en B et le triangle BCD est rectangle en C.
De plus, CD = 3,7, AC = 8 et $\widehat{CBD} = 32°$.



1. Déterminer la longueur BC.

2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$.

115 ✶✶ Sur deux segments [AB] et [AC], on place les points D, E, F et G tels que : AB = AC = 9, AD = 7, AE = 4,2, AF = 2,5 et DE = 6. De plus les droites (DE) et (FG) sont parallèles.



1. Le triangle ADE est-il rectangle ? Justifier.

2. Calculer la longueur FG.

2 Calculer avec des coordonnées

QCM

Pour les questions 116 à 123 les points A(3 ;–2), B(–2 ; –1), C(2 ; 6) et D(–1 ; 4).

116 Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées :

a (1 ; –1) b $\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$ c $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ d $\frac{26}{4}$

117 La longueur du segment [CD] est :

a $\sqrt{101}$ b $\sqrt{13}$ c $\sqrt{5}$ d $\left(\frac{1}{2};5\right)$

118 Le triangle ABC est :

a rectangle b équilatéral
c isocèle d quelconque

119 Le cercle de centre D passant par A a pour rayon :

a $2\sqrt{13}$ b $13\sqrt{2}$ c $2\sqrt{2}$ d 4

120 Le triangle ABD est :

a rectangle b isocèle
c équilatéral d quelconque

121 Les coordonnées du point E milieu du segment [BC] sont :

a $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ b (4 ;7) c (–4 ; –7) d 2,5

122 Les points A, E et D vérifient :

a E milieu de [AD].
b E, A et D sont alignés.
c EAD est un triangle rectangle
d EAD est un triangle équilatéral

123 Le point G(1 ;1) est le centre d'un cercle passant par :

a A, B et C b B, C et D
c A, B et D d A, C et D.

Dans cette partie, on se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J)

124 ✶ On considère un triangle ABC tel que : A(–3 ; 1), B(7 ; 1) et C(1 ; 4).
Le point H a pour coordonnées (1 ; 1).

1. Montrer que les triangles ACH et BCH sont rectangles.
2. Calculer les valeurs des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.
3. En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle.

125 ✶✶ On considère les points A(–2 ; 1), B(6 ; 1), C(9 ; 4) et H(–2 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Démontrer que le triangle ACH est rectangle.
3. En déduire que H appartient à la droite (CD).
4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

126 ✶✶ On considère les points A(3 ; –2) et B(0 ; 3). Déterminer les coordonnées du point C tel que B soit le milieu du segment [AC].

127 ✶✶ On donne les points D (–3 ; –1) et E (1 ; –2). Déterminer les coordonnées du point F symétrique du point D par rapport au point E.

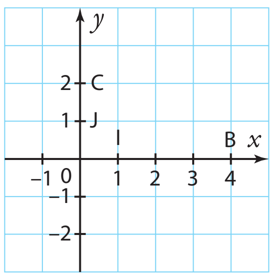
128 ✶✶ On considère les points $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$, $A\left(\frac{4}{5};\frac{7}{3}\right)$ et $T\left(-\frac{5}{6};\frac{2}{3}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [MT].
2. Déterminer les coordonnées du point H tel que MATH soit un parallélogramme.

129 ✶✶ On considère les points A(–3 ; –4), B(–1 ; 2), C(3 ; 2) et D(5 ; 0)

Démontrer que le cercle de diamètre [AD] passe par les points B et C.

130 ✶✶ On considère les points I(1 ; 0), B(4 ; 0) et C(0 ; 2). On appelle d la médiatrice du segment [IB]. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par C coupe la droite d en un point noté H.



1. Donner les coordonnées du point H.
2. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre H passant par I. Montrer que B appartient au cercle.
3. Montrer que l'axe des ordonnées est tangent en C au cercle $\mathscr{C}$, c'est à dire que l'axe coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point et qu'il est perpendiculaire au rayon en ce point.

6

Vecteurs du plan

Le kitesurf est un sport dans lequel on glisse sur l'eau avec une planche sous les pieds en étant tracté par une aile (cerf-volant ou kite en anglais). La traction s'effectue grâce à la force exercée par le vent sur l'aile. Le mouvement le plus simple est la traction orientée en glissade : une translation !

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Représenter géométriquement des vecteurs et construire leur somme.	2 p. 145	5 6 p. 145 40 41 p. 151
Construire le produit d'un vecteur par un réel.	3 p. 146	9 10 p. 146 45 46 p. 152
Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.	4 p. 147 5 p. 148	13 14 p. 147 16 17 p. 148 48 56 p. 152
Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	6 p. 149	22 23 p. 149 68 70 71 p. 153
Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée.	1 p. 144	1 2 p. 144 35 39 p. 151
Démonstration Montrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.	Cours p. 143	84 p. 154 85 p. 155

Act 1 Activités — 1 exercices résolus — 4 exercices corrigés — 5 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 151, 154

Algo & Prog
p. 155, 158

TICE
p. 137, 156, 157, 159

Les autres disciplines
p. 154, 157

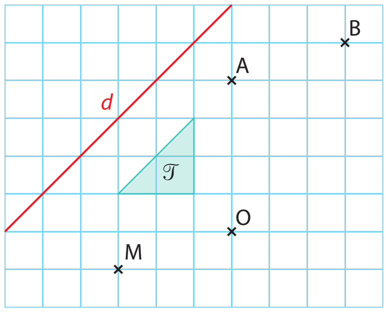
Problème ouvert
p. 155

Pour prendre un bon départ

Exo — Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-11

1. Compléter une figure en faisant des constructions

Reproduire puis compléter la figure ci-contre.



1. a) Construire M_1, le symétrique du point M par rapport à la droite *d*.

b) Construire M_2, le symétrique du point M par rapport au point O.

c) Construire M_3, l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

2. De même, construire les images $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ du triangle $\mathcal{T}$ par les mêmes transformations.

2. Effectuer des calculs

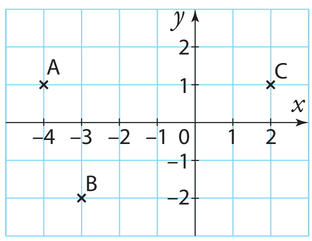
Calculer les nombres suivants.

a) $-3-5$ **b)** $-3-(-5)$ **c)** $3\times(-5)-2\times 4$ **d)** $\dfrac{8+(-5)}{2}$

e) $-6\times 3-(-2)\times 9$ **f)** 7^2-4^2 **g)** $(2-1)^2+(3-(-5))^2$ **h)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

3. Calculer des longueurs et des milieux à partir de coordonnées

Soit le repère orthonormé ci-contre.



1. Lire les coordonnées des points A, B et C.

2. Soit M le milieu du segment [AC]. Calculer ses coordonnées.

3. Soit N le milieu du segment [BC]. Calculer ses coordonnées.

4. Calculer la longueur AC.

5. Calculer la longueur BC.

4. Identifier un parallélogramme

Dans chacun des cas suivants, peut-on affirmer que ABCD est un parallélogramme ?

a) AB = CD

b) AB = CD et AD = BC.

c) AB = CD et (AB) // (CD)

d) [AC] et [BD] ont le même milieu.

5. Reconnaitre des tableaux de proportionnalité

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, préciser le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la 1re ligne à la 2e ligne.

a)

–2	3
3	–4,5

b)

$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{3}{5}$
$\dfrac{3}{4}$	$-\dfrac{4}{3}$

c)

$\sqrt{2}$	2
1	$\sqrt{2}$

d)

–6	3
1	0,5

Doc — Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

Activités

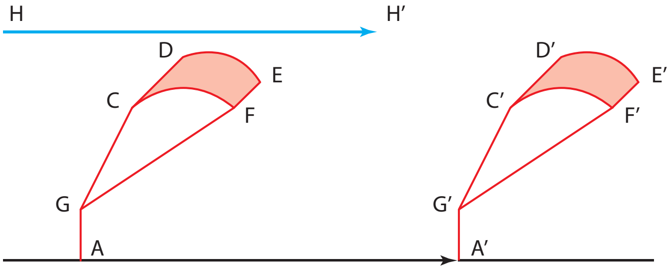
1 Découvrir les vecteurs

10 min

Julia est en train d'observer un kitesurfeur sur l'océan depuis la plage. Elle observe qu'en à peine quelques secondes, celui-ci se déplace du point A au point A′ grâce à la force du vent, représentée par la flèche bleue.

1. a) Décrire le mouvement du kitesurfeur et de son cerf-volant.

b) Quelle transformation reconnait-on ?



2. a) Quelle est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$?

b) Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$?

c) On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont égaux.
Citer d'autres couples de vecteurs égaux.

3. a) Comparer les longueurs des segments [AA′], [CC′], [DD′] et [HH′].

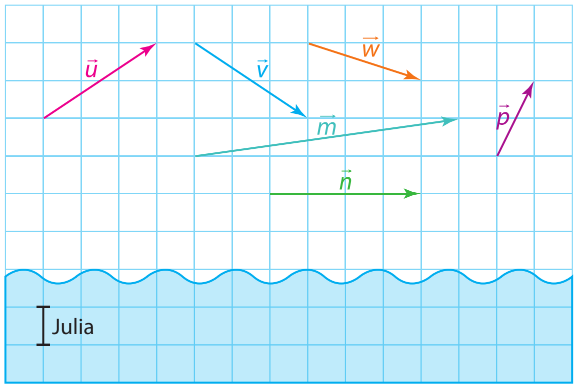
b) Quelle semble être la nature du quadrilatère CC′D′D ?

↪ Cours 1 p. 138

2 Enchaîner deux translations

20 min

Julia décide de tester le kitesurf. Il est représenté par le segment vertical. Le but est de déterminer les nouvelles positions de Julia suite aux différentes bourrasques de vent auxquelles elle fait face, représentées par les vecteurs.



1. a) Sur votre cahier, recopier le segment représentant Julia puis construire son image par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{w}$.

Remarque On dit que l'on a trouvé l'image du segment par l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{w}$.

c) L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est également une translation dont le vecteur est noté $\vec{u} + \vec{w}$.
À quel vecteur représenté sur cette figure correspond le vecteur $\vec{u} + \vec{w}$?

2. a) Julia poursuit ses essais. Construire l'image du nouveau segment obtenu par la translation de vecteur $\vec{p}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Émettre une conjecture sur $\vec{p} + \vec{v}$.

↪ Cours 2 p. 139

TICE — 15 min

3 Multiplier un vecteur par un nombre réel

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a) créer un vecteur $\vec{u}$.

b) créer un curseur k de –5 à 5 et d'incrément 0.2.

Remarque Le logiciel note le vecteur $\vec{u}$ sans la flèche mais il apparaît bien dans la catégorie vecteur.

2. Dans la barre de saisie, taper k*u. Vous obtenez alors un nouveau vecteur nommé $\vec{v}$ par défaut.

3. Comparer le sens, la direction et la norme du $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsque :

a) $k = 1$ **b)** $k > 1$ **c)** $k < -1$ **d)** $0 < k < 1$ **e)** $-1 < k < 0$

Cours 3 p. 140

TICE — 10 min

4 Découvrir le lien entre coordonnées de points et coordonnées de vecteurs

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire apparaître la grille et les axes puis placer six points A,B,C,D,E et F dans ce repère.

2. Construire les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ en reliant les points deux à deux à l'aide de l'outil vecteur.

3. Dans la fenêtre algèbre, comparer les coordonnées des points A et B et du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (faire de même pour $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$) puis conjecturer la formule liant les coordonnées de deux points et les coordonnées du vecteur ayant ces points pour origine et extrémité.

4. Déplacer les points et vérifier que votre conjecture est toujours vérifiée.

Cours 4 p. 140

15 min

5 La colinéarité, à quoi ça sert ?

1. Dans un repère orthonormé, placer les points :
A(–2 ; 6), B(–8 ; –3), C(–3 ; –2), D(–1 ; 1), E(–6 ; 0), F(1 ; 4), G(3 ; 2), H(1 ; –1) et K(–2 ; –1).

2. a) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$, et $\overrightarrow{GK}$.

b) Parmi eux, lesquels semblent avoir la même direction que $\overrightarrow{CD}$?

c) Recopier le tableau suivant. Écrire le nom des vecteurs trouvés dans la première ligne du tableau puis le compléter en calculant leurs coordonnées.

Vecteur	$\overrightarrow{CD}$				
Première coordonnée					
Deuxième coordonnée					

3. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Vérifier en calculant le produit en croix entre la première colonne et les autres colonnes, les unes après les autres.

4. Exprimer les vecteurs du tableau en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $k\overrightarrow{CD}$ où k est un réel.

5. Observer la position relative des droites (AB) et (CD), (CD) et (CF) ainsi que (GH) et (GK). Faire une conjecture liant la position relative des droites avec la colinéarité potentielle des vecteurs.

Cours 5 p. 142

Cours

1 Translations et vecteurs associés

Définition Translation

On considère deux points A et B du plan.

La translation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.**

Si les points A et B sont confondus, on parle alors de **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

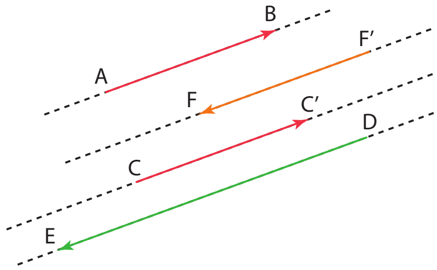
Notation Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche **d'origine A et d'extrémité B.**

Définition Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
• sa **direction** (celle de la droite (AB)), • son **sens** (de A vers B), • sa **norme** (la longueur du segment [AB]).

Exemple

Sur la figure ci-contre, les points sont placés sur des droites parallèles, donc tous les vecteurs ont la même direction.
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, les points C et F ont pour images respectives C′ et F′.
Les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{F'F}$ ont des sens opposés mais ont la même norme, tandis que les vecteurs $\overrightarrow{F'F}$ et $\overrightarrow{DE}$ ont le même sens mais pas la même norme.

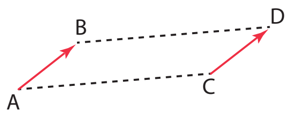


Définition Vecteurs égaux

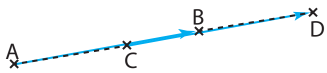
Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même longueur sont égaux.

Propriété Caractérisation du parallélogramme

ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)
si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Parallélogramme non aplati



Parallélogramme aplati

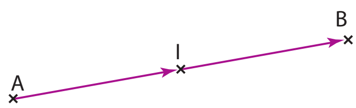
Remarque Il faut bien faire attention à l'ordre des points dans lequel on nomme le parallélogramme : ici ABDC (et non ABCD).

Démonstration

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.
Ce qui se traduit par les droites (AB) et (CD) sont parallèles, le quadrilatère ABDC est non croisé et AB = CD.
C'est-à-dire si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Propriété Caractérisation du milieu d'un segment

I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

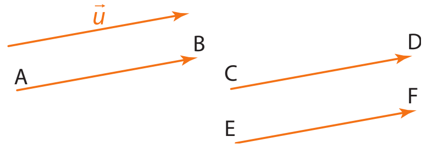


Démonstration

I est le milieu de [AB] si et seulement si I appartient à [AB] et AI = IB.
Ce qui se traduit par les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même direction, le même sens (car les points A, I et B sont alignés dans cet ordre) et la même norme.
C'est-à-dire si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont égaux soit $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Définition **Le vecteur $\vec{u}$ et ses représentants**

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\vec{u}$, $\vec{v}$, …, indépendamment des deux points. D'où : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.



Remarque La norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. On peut aussi utiliser cette notation pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

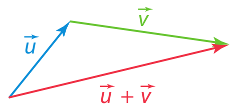
Exercice résolu 1 p. 144

2 Somme de deux vecteurs

Remarque On admet que l'enchaînement de deux translations est une translation.

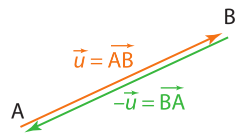
Définition **Vecteur somme**

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.



Définition **Vecteur opposé**

Le vecteur opposé du vecteur $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais un sens opposé.



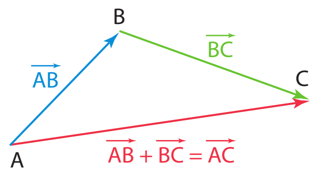
Conséquence $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriété **Généralités**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
- **la somme est commutative.**
- **$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, que l'on peut donc aussi écrire $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.**
- **$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, la somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.**
- **$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.**

Propriété **Relation de Chasles**

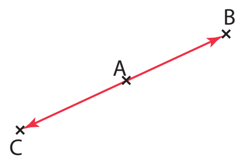
Soit A, B, C trois points. L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Remarques
- Ici le point **B** est à la fois l'extrémité de $\overrightarrow{AB}$ et l'origine de $\overrightarrow{BC}$.
- Attention, l'égalité vectorielle n'implique pas l'égalité des longueurs, en effet, généralement **AB + BC ⩾ AC** : c'est l'inégalité triangulaire.

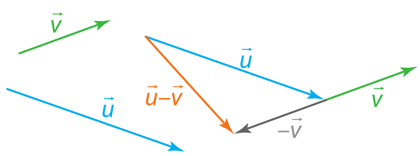
Propriété **Somme nulle de deux vecteurs et milieu**

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment [BC].



Définition **Différence de deux vecteurs**

Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



Exercice résolu 2 p. 145

3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

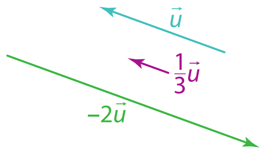
Définition Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul, alors le vecteur $k\vec{u}$ résultant de la multiplication de $\vec{u}$ par k, est défini par :

- **sa direction :** la même que celle de $\vec{u}$,
- **son sens :** celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, l'opposé de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$,
- **sa norme :** $\|k\vec{u}\| = |k| \times |\vec{u}|$
  - si $k > 0$ alors $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$,
  - si $k < 0$ alors $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$

Exemple

À partir de $\vec{u}$, on représente les deux vecteurs $\frac{1}{3}\vec{u}$ et $-2\vec{u}$.



Remarque Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété Distributivité entre vecteurs et réels

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels k et k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Exemples

- $2(\vec{u} + \vec{w}) = 2\vec{u} + 2\vec{w}$
- $3\vec{v} - 4\vec{v} = (3 - 4)\vec{v} = -1\vec{v} = -\vec{v}$
- $\frac{1}{2} \times 4\vec{u} = \frac{4}{2}\vec{u} = 2\vec{u}$

Exercice résolu 3 p. 146

4 Base, repère et coordonnées

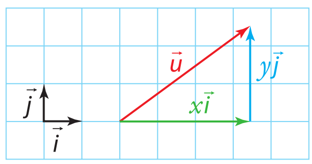
Définition Base orthonormée

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé **base orthonormée** des vecteurs du plan.

Propriété Décomposition d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose **de manière unique** sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont deux nombres réels.

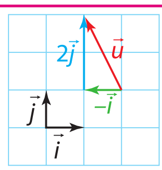
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



Remarque Parfois, lorsqu'on veut préciser les notations, on note $x_{\vec{u}}$ l'abscisse de $\vec{u}$ et $y_{\vec{u}}$ l'ordonnée de $\vec{u}$.

Exemple

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ce que l'on peut aussi noter $\vec{u}(-1\,;2)$ ou encore $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.



Propriété Égalité de vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

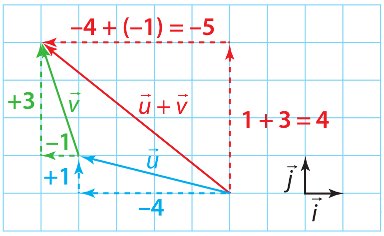
Propriété Somme et différence de deux vecteurs, opposé d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$ s'obtiennent en faisant la somme des coordonnées : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. De même : $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

Exemple

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -4+(-1) \\ 1+3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$



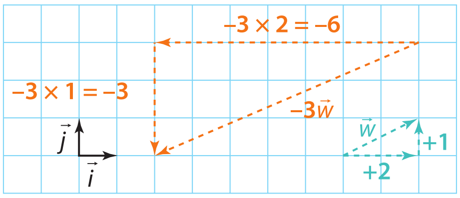
Propriété Multiplication d'un vecteur par un réel

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ si on multiplie un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par un nombre réel k, alors ses coordonnées sont multipliées par k. On a : $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

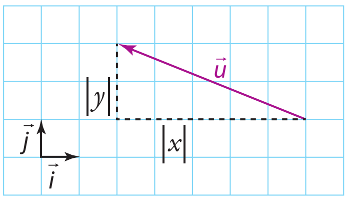
Alors $-3\vec{w}\begin{pmatrix} -3\times 2 \\ -3\times 1 \end{pmatrix}$ d'où $-3\vec{w}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$



Propriété Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Remarque Pour justifier, il suffira d'appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $|x|$ et $|y|$.

Définition Repère orthonormé

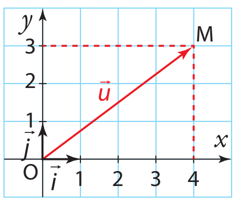
On appelle repère orthonormé du plan le triplet $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ constitué par un point O du plan appelé origine et par les vecteurs d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

Remarque Soit M un point quelconque du plan. M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple

Le vecteur $\vec{u}$ représenté ci-contre a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ donc M(4 ; 3).



Propriété Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$

On retrouve la formule vue dans le chapitre précédent.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on a

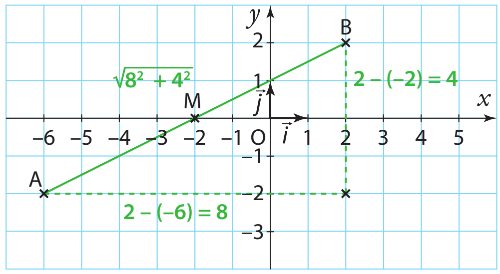
$A(-6\,;-2)$ et $B(2\,;2)$. On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-6) \\ 2-(-2) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculons la distance AB à partir des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16}$

$= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9$ unités de longueur.



Exercices résolus 4 p. 147 et 5 p. 148

5 Colinéarité de vecteurs

Définition Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. S'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. k est appelé coefficient de colinéarité.
De manière analogue, on considère que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $\vec{0} = 0\vec{u}$.

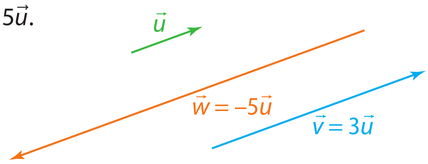
Remarque On en déduit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Exemple

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que : $\vec{v} = 3\vec{u}$ et $\vec{w} = -5\vec{u}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et l'on a $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$.

De même $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, ainsi ils ont tous les trois la même direction donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.



Définition Déterminant de deux vecteurs

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$

Exemple

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 1 \times (-4) - 3 \times (-2) = 2$

Propriété Condition de colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\ \vec{v}$. Ce qui signifie que $x = kx'$ et $y = ky'$ si et seulement si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire que les produits en croix sont égaux, ce qui équivaut à $xy' = x'y$ ou à $xy' - x'y = 0$.

Remarque Dans la démonstration, nous avons vu que deux vecteurs colinéaires ont des coordonnées proportionnelles.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 \times 18 - 6 \times 12 = 72 - 72 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

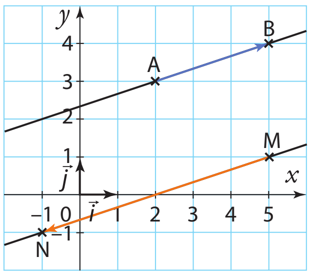
Remarque Le calcul du déterminant ne permet pas/ ne nécessite pas de trouver le coefficient de colinéarité. Ci-dessus, le coefficient de colinéarité s'obtient en faisant : $k = \frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Propriété Parallélisme de deux droites

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires (si et seulement si leur déterminant est nul).

Exemple

Soit A(2 ; 3), B(5 ; 4), M(5 ; 1) et N(–1 ; –1). On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ puis leur déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 3 \times (-2) - (-6) \times 1 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



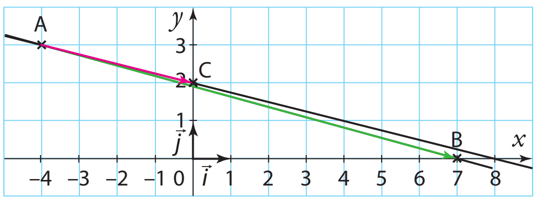
Propriété Alignement de trois points

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (si et seulement si leur déterminant est nul).

Remarque Cette propriété se justifie ainsi : si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les deux droites (AB) et (AC) seront parallèles. Mais comme elles ont un point en commun, elles seront confondues, donc les points A, B et C seront alignés.

Exemple

Soit A(–4 ; 3), B(7 ; 0) et C(0 ; 2). On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis leur déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 11 \times (-1) - 4 \times (-3) = 1 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.



Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-12

1 Démontrer avec des égalités de vecteurs

Cours 1 p. 138

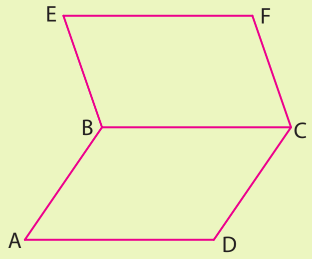
BCDA et BCFE sont deux parallélogrammes.

1. Démontrer que ADFE est un parallélogramme.

2. G est le symétrique de C par rapport à B.

a) Citer 3 vecteurs égaux à $\overrightarrow{GB}$.

b) Donner deux autres parallélogrammes à l'aide des points de la figure.

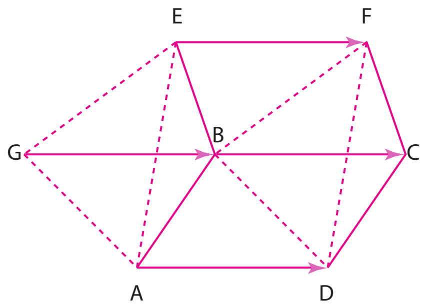


Solution

1. BCDA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ **1**
BCFE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$. On en déduit donc que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$, donc ADFE est un parallélogramme. **2**

2. a) G est le symétrique de C par rapport à B donc B est le milieu de [GC]. **3**
On en déduit donc que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BC}$. Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EF}$ donc GBFE est un parallélogramme. $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AD}$ donc GBDA est un parallélogramme.



Conseils & Méthodes

1 Attention à l'ordre des lettres ! BCDA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

2 Ici, on utilise les deux sens de la propriété « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **si et seulement si** ABDC est un parallélogramme » :
D'abord « **Si** ABDC est un parallélogramme **alors** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » puis « **Si** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **alors** ABDC est un parallélogramme ».

3 Toujours penser à traduire la symétrie centrale par l'idée de milieu d'un segment.

À vous de jouer !

1 DEF est un triangle. G et H sont les images respectives de D et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$.

1. Citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{FE}$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère EHGD ?
3. Que peut-on dire du point E pour le segment [FH] ?

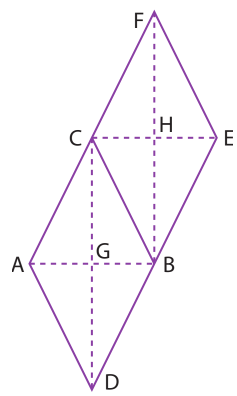
2 MNPQ est un trapèze tel que $\overrightarrow{QP} = 2\,\overrightarrow{MN}$.
On note R le milieu de [QP].

1. Citer trois vecteurs égaux.
2. Trouver deux parallélogrammes. Justifier.

3 ABCD est un rectangle. Soit I le point d'intersection de ses diagonales.
K et J sont les symétriques respectifs de I et A par rapport à D.

1. Montrer que AIJK est un parallélogramme.
2. Citer tous les vecteurs égaux de cette figure.
3. En déduire que ICJK est un parallélogramme.
4. Que peut-on dire des droites (KI) et (JC) ?

4 ACBD et CBEF sont deux losanges tels que les points A, C et F sont alignés.



1. Reproduire la figure et la coder afin de trouver des vecteurs égaux.
2. Montrer que AFED et ACEB sont des parallélogrammes.
3. En déduire que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ puis que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{GB}$.
4. Montrer que CHBG est un rectangle.

Coup de pouce Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu.

Exercices 35 à 40 p. 151

2 Construire la somme et la différence de deux vecteurs

Cours 2 p. 139

1. **Construire un carré ABCD de centre O.**

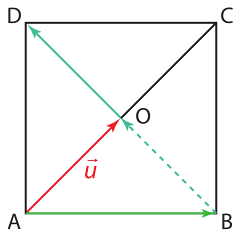
2. **Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants.**

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$ **c)** $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

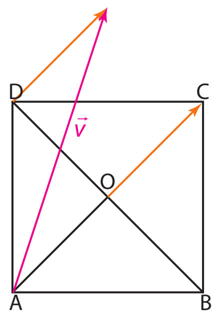
Solution

1 et 2. a) On met les vecteurs bout à bout donc on trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis le représentant du vecteur $\overrightarrow{OD}$ d'origine B c'est-à-dire $\overrightarrow{BO}$ puisque O est le milieu de [BD] 1 2

On a donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ par la relation de Chasles.

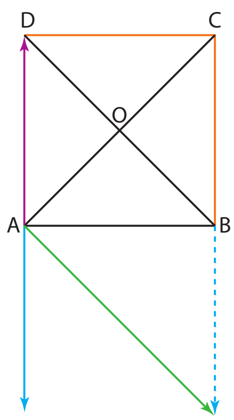


b) On met les vecteurs bout à bout. Pour cela, on trace le vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis le représentant du vecteur $\overrightarrow{OC}$ d'origine D. 2 3



c) $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ 4



Conseils & Méthodes

1 Lorsque l'origine du représentant n'est pas précisée dans l'énoncé, on peut partir de n'importe où. Par commodité, on part souvent de l'origine du premier vecteur.

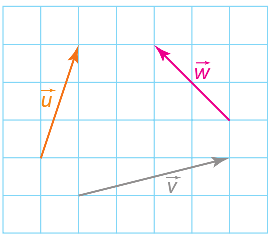
2 On peut considérer d'autres représentants des vecteurs afin de les mettre bout à bout (pour utiliser la relation de Chasles).

3 Il faut parfois ajouter des points sur la figure.

4 Pour construire une différence de vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, on l'écrit d'abord comme une somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.

À vous de jouer !

5 Reproduire la figure ci-contre et construire les vecteurs suivants.

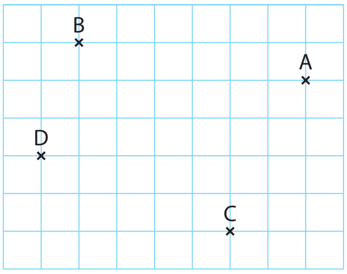


a) $\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} + \vec{w}$
c) $\vec{v} + \vec{w}$ **d)** $-\vec{v}$
e) $\vec{w} - \vec{u}$ **f)** $\vec{u} - \vec{v}$

6 **1.** Reproduire la figure ci-contre.

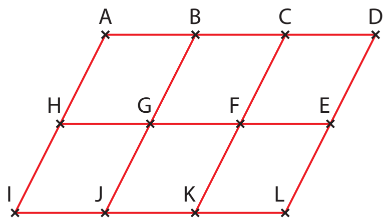
2. Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
d) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$
e) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}$



7 La figure représente six parallélogrammes isométriques. En utilisant les points de la figure, donner un vecteur égal à :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{KL}$
b) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HF}$
c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$
d) $\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{BD}$
e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$
f) $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{HA}$



8 ABCD est un rectangle de centre I. Faire une figure et construire les représentants des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$ **b)** $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI}$ **d)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

Exercices 41 à 44 p. 151

Exercices résolus

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-12

3 Construire le produit d'un vecteur par un nombre réel

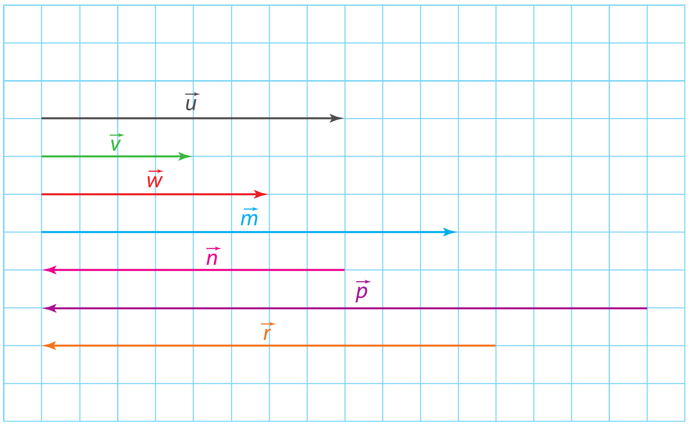
→ Cours 3 p. 140

1. Construire un vecteur $\vec{u}$ quelquonque.

2. Construire les vecteurs suivants. $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$, $\vec{w} = \frac{3}{4}\vec{u}$, $\vec{m} = \frac{11}{8}\vec{u}$, $\vec{n} = -\vec{u}$, $\vec{p} = -2\vec{u}$, $\vec{r} = -\frac{3}{2}\vec{u}$.

Solution

On obtient les vecteurs suivants 1 2 3.



Conseils & Méthodes

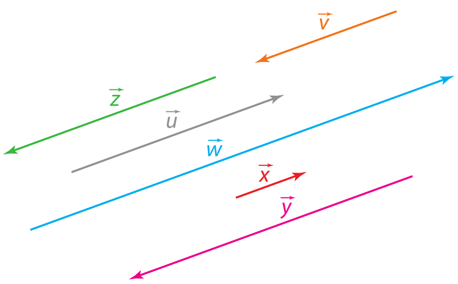
1 Partager à l'aide de la règle et du compas, le segment en demi, en quart et en huitième puis reporter les longueurs obtenues.

2 Il est possible d'utiliser les carreaux du cahier à condition de réfléchir au départ à la norme du vecteur $\vec{u}$. Ici, il serait judicieux de prendre 8 carreaux.

3 Tous les vecteurs obtenus en multipliant le vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel ont même direction, on peut donc utiliser les lignes du cahier.

À vous de jouer !

9 **1.** Attribuer à chaque vecteur $\frac{1}{3}\vec{u}$, $-\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-\frac{2}{3}\vec{u}$ et $-\frac{4}{3}\vec{u}$ son représentant tracé ci-dessous.



2. Parmi les vecteurs précédents, quels sont ceux qui :

a) ont le même sens que $\vec{u}$

b) ont une norme supérieure à celle de $\vec{u}$

c) ont la même direction que $\vec{u}$

10 Sur une droite (AB), placer les points C, D, E et F tels que :

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$

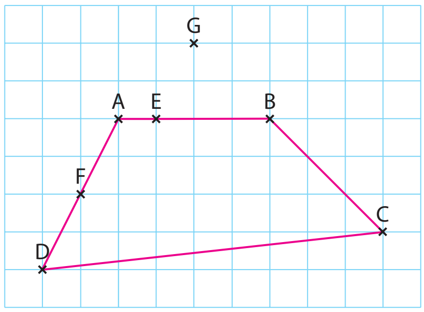
d) $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

11 **1.** Reproduire la figure suivante et placer les points H, I et J tels que :

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{DJ} = \frac{5}{9}\overrightarrow{DC}$

2. Recopier et compléter.

a) $\overrightarrow{AE} = \ldots\,\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{DF} = \ldots\,\overrightarrow{DA}$ **c)** $\overrightarrow{BG} = \ldots\,\overrightarrow{BC}$



12 **1.** Construire sur votre cahier deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ayant pas la même direction.

2. Construire les vecteurs $2\vec{u}$, $2\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $5\vec{u}$.

3. Tracer le vecteur $2\vec{u}+2\vec{v}$ et le vecteur $2(\vec{u}+\vec{v})$. Que peut-on en déduire ?

4. Même question pour le vecteur $2\vec{u}+5\vec{u}$ et le vecteur $7\vec{u}$.

→ Exercices 45 à 47 p. 152

4 Calculer avec les coordonnées

Cours 4 p. 140

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On considère C(–3 ; 2), D(1 ; 4) et E(6 ; 3) trois points et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. **Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$.**

2. **Calculer les coordonnées du vecteur somme $\vec{u}+\overrightarrow{CD}$.**

3. **Calculer les coordonnées du vecteur $1{,}5\vec{u}$.**

4. **Calculer les coordonnées du vecteur $-3\overrightarrow{DE}$.**

Solution

1. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - x_C\\ y_D - y_C\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-(-3)\\4-2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$. 1 2

2. On a $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1+4\\3+2\end{pmatrix}$

soit $\vec{u}+\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. 1

3. On a $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ donc $1{,}5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1{,}5\times(-1)\\1{,}5\times 3\end{pmatrix}$ soit $1{,}5\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}$. 3

4. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}x_E - x_D\\ y_E - y_D\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6-1\\3-4\end{pmatrix}$

soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ donc $-3\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-3\times 5\\-3\times(-1)\end{pmatrix}$

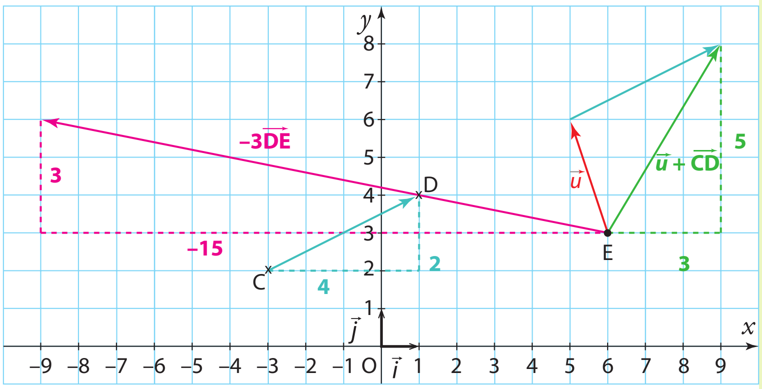
soit $-3\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-15\\3\end{pmatrix}$. 3

Conseils & Méthodes

1 Toujours faire une figure même si ce n'est pas demandé par l'énoncé, cela permet de vérifier ses réponses graphiquement.

2 Commencer par écrire la formule en l'adaptant avec les points de l'énoncé en respectant l'ordre « extrémité - origine ».

3 Penser à multiplier chaque coordonnée par le nombre réel.



À vous de jouer !

Pour les exercices 13 à 15, le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

13 Soit M(–5 ; 2), N(3 ; 4) et P(6 ; –7).

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$.

2. En déduire les coordonnées de leurs opposés.

3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{PM}$.

14 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $\vec{u}-\vec{v}$.

2. Calculer les coordonnées de $3\vec{w}-2\vec{u}$.

3. Vérifier les résultats par une lecture graphique.

15 Soit A(3 ; –2), B(–1 ; 2) et C(2 ; 3).

1. Construire les vecteurs suivants et lire graphiquement leurs coordonnées.

a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{BC}$

c) $2\overrightarrow{AB}$ **d)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

e) $2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$ **f)** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$

2. Vérifier les coordonnées des vecteurs précédents par le calcul.

Exercices 53 à 63 p. 152 et 153

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-12

5 Déterminer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle

Cours 4 p. 140

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère les points A(–2 ; 3), B(4 ; –1) et C(5 ; 3).
Calculer les coordonnées :

a) du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

b) du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Solution

a) On cherche $(x_D\,;y_D)$, les coordonnées du point D tel que ABDC soit un parallélogramme, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. 1 2

Après calculs, on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ et on exprime

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - 5\\y_D - 3\end{pmatrix}$ en fonction des coordonnées de D.

On obtient alors deux équations, une pour les abscisses $x_D - 5 = 6$, l'autre pour les ordonnées $y_D - 3 = -4$. 3

On résout chacune d 'entre elle : $x_D = 6 + 5 = 11$ et $y_D = -4 + 3 = -1$ donc D(11 ; –1).

b) On cherche les coordonnées $(x_E\,;y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. Après calcul 3 :

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E + 2\\y_E - 3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}13\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ soit $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})\begin{pmatrix}12\\-8\end{pmatrix}$

Pour les abscisses, on résout l'équation $x_E + 2 = 12$, d'où $x_E = 10$.

Pour les ordonnées, on résout $y_E - 3 = -8$ d'où $y_E = -5$.

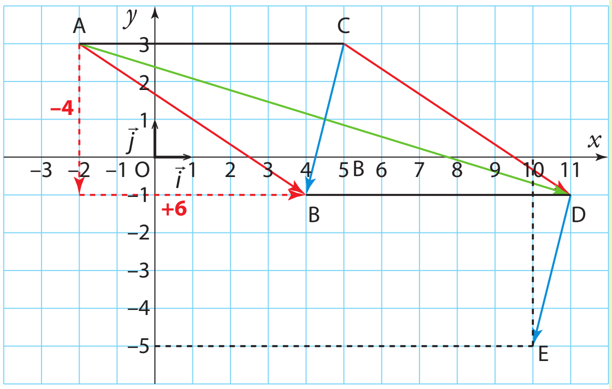
Donc E(10 ; –5). 3

Conseils & Méthodes

1 Toujours faire une figure même si ce n'est pas demandé par l'énoncé, cela permet de vérifier ses réponses graphiquement.

2 Dans un repère, pour montrer que ABDC est un parallélogramme, on montre l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ en utilisant la propriété : « Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées. »

3 Lorsqu'on cherche les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle, il faut résoudre deux équations dont les inconnues sont les coordonnées cherchées.



À vous de jouer !

Pour les exercices 16 à 18, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

16 Soit A(–5 ; –2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnées du point M défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.

2. Calculer les coordonnées de N défini par $\overrightarrow{AN} = \vec{u} - \vec{v}$.

3. Faire une figure et vérifier vos résultats.

17 On considère les points B(– 4 ; 2), C(0 ; 3) et D(1 ; –5). Calculer les coordonnées du point E défini par $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{CD}$

18 Soit E(–3 ; 2), F(1 ; –2) et G(–1 ; –5) trois points. Déterminer les coordonnées du point H pour que EFGH soit un parallélogramme.

Exercices 64 à 67 p. 153

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-12

Exercices résolus

6 Utiliser la colinéarité de vecteurs

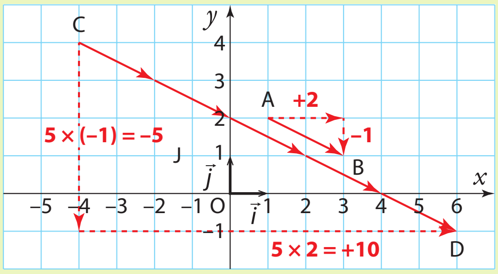
Cours 5 p. 142

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points A(1 ; 2), B(3 ; 1), C(–4 ; 4) et D(6 ; –1).

1. Prouver que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?



Solution

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$
puis leur déterminant $2 \times (-5) - 10 \times (-1) = -10 + 10 = 0$
donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires,
et donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. 1 2

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$
puis leur déterminant $2 \times 2 - (-5) \times (-1) = 4 - 5 = -1 \neq 0$
donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. 3

Conseils & Méthodes

1 Pour savoir si des droites sont parallèles, on regarde si les vecteurs correspondants sont colinéaires.

2 Parfois, il n'est pas nécessaire de calculer le déterminant si l'on voit une relation évidente entre les coordonnées des vecteurs.
Ici $\overrightarrow{CD} = 5\overrightarrow{AB}$.

3 Pour savoir si des points sont alignés, on choisit deux vecteurs non nuls dont l'origine et l'extrémité sont ces points puis on regarde s'ils sont colinéaires. Ici, on a choisi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ mais on aurait pu choisir $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, par exemple.

À vous de jouer !

Dans la suite des exercices de cette rubrique, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

19 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$.

1. Calculer les déterminants des vecteurs suivants.
a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$
b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$
c) $\vec{w}$ et $\vec{r}$

2. Quels sont les vecteurs colinéaires entre eux ?

20 **1.** On sait que $\vec{u} = 4\vec{v}$ et que $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{w}$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
2. De même, on sait que $\vec{u} = 5\vec{v}$ et que $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{w}$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

21 On considère les points K(–3 ; 3), L(3 ; –6) et M(2 ; 0).
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$.
2. Calculer leur déterminant.
3. Le point K appartient-il à la droite (LM) ?

22 On considère les points E(–32 ; 33), F(113 ; –7), G(62 ; –40) et H(–28 ; –15).
Les droites (EF) et (GH) sont-elles sécantes ?

23 On considère les points P(–3 ; –1), N(0 ; 1) et R(3 ; 3).
Les points P, N et R sont-ils alignés ?

24 **1.** Placer les points A(–3 ; 1), B(1 ; 3), C(1 ; –4) et D(7 ; –1) sur une figure.
2. Les droites suivantes sont-elles parallèles ?
a) (AB) et (CD)
b) (AC) et (BD)

Exercices 68 à 73 p. 153

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

Pour les exercices 25 à 27, rédiger correctement vos réponses en y ajoutant des schémas et des exemples puis faire une fiche de cours avec l'ensemble des réponses.

25 **1.** Quelles sont les trois caractéristiques d'un vecteur ?
2. Comment positionner deux vecteurs pour pouvoir les additionner facilement ?
3. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tels que $\vec{v} = k\vec{u}$ où k est un nombre réel, ont-ils même direction ? même longueur ? même sens ?

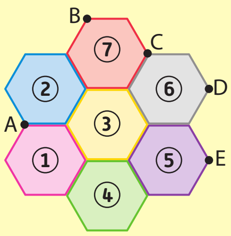
26 **1.** Comment calcule-t-on la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées ?
2. Comment calcule-t-on les coordonnées d'un vecteur multiplié par un nombre réel ?

27 **1.** Pour quels objets mathématiques utilise-t-on les mots « colinéaires » et « parallèles » ?
2. Qu'est-ce que le déterminant ? À quoi sert-il ?

Questions - Flash

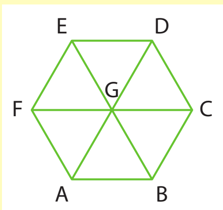
Diapo
Diaporama
Ressource professeur

28 La figure suivante représente sept hexagones réguliers et numérotés.



Déterminer l'image de :
a) l'hexagone 1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
b) l'hexagone 4 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
c) l'hexagone 7 par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$.
d) l'hexagone 1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE}$.

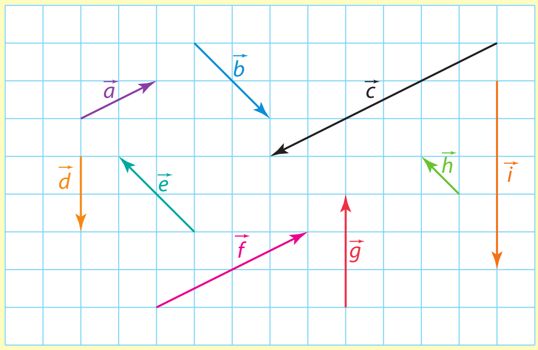
29 La figure représente un hexagone régulier.



En utilisant les points de la figure, donner un vecteur égal à :

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$ **b)** $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DE}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$
d) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD}$ **e)** $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EF}$ **f)** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE}$

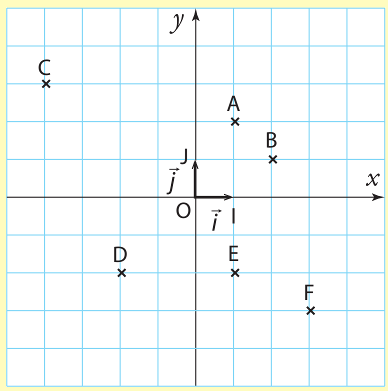
30 Recopier et compléter les égalités suivantes avec le nombre réel manquant.



• $\vec{c} = ...\vec{a}$ • $\vec{b} = ...\vec{e}$ • $\vec{d} = ...\vec{g}$ • $\vec{d} = ...\vec{i}$
• $\vec{a} = ...\vec{c}$ • $\vec{b} = ...\vec{h}$ • $\vec{i} = ...\vec{g}$ • $\vec{f} = ...\vec{c}$

31 Lire les coordonnées des points et des vecteurs suivants dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) A **b)** B **c)** $\overrightarrow{OC}$
d) $\overrightarrow{AE}$ **e)** $\overrightarrow{FC}$ **f)** $\overrightarrow{DO}$



32 Soit A(5 ; –1) et B(–2 ; 1) deux points dans un repère orthonormé.
Déterminer :
a) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) la valeur exacte de la longueur du segment [AB].
c) les coordonnées du milieu du segment [AB].

33 Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont colinéaires ?

$\vec{v_1}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ $\vec{v_2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v_3}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v_4}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{v_5}\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{v_6}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

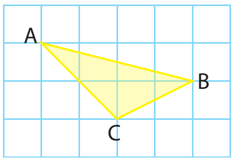
34 Déterminer y pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\y\end{pmatrix}$

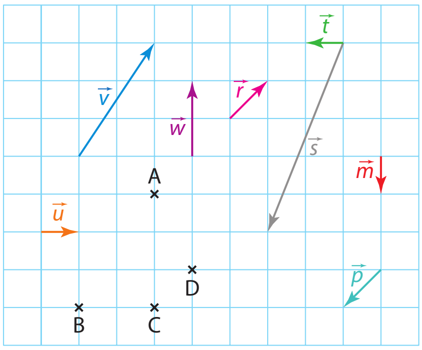
Translation et égalités de vecteurs

35 **1.** Reproduire la figure puis construire l'image A′B′C′ du triangle ABC obtenue par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



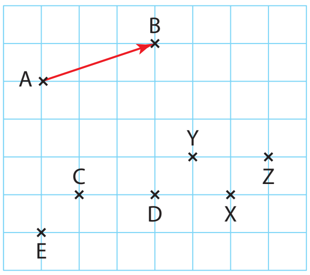
2. Citer deux vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Citer le vecteur égal à $\overrightarrow{BC}$.
4. Citer le représentant d'origine A′ du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

36 **1.** À partir de la figure, citer un vecteur :
a) opposé à $\overrightarrow{CD}$.
b) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.
c) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire.
d) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$.



2. Placer les points E, F, G et H, images respectives du point A par les translations de vecteurs suivants.
a) $\vec{w}$ **b)** $\vec{v}$ **c)** $\vec{p}$ **d)** $\vec{m}$
3. Placer les points I, J, K et L, images respectives du point B par les translations de vecteurs suivants.
a) $\vec{r}$ **b)** $\vec{u}$ **c)** $\vec{w}$ **d)** $\vec{m}$

37 À partir de la figure :
1. donner les images des points C, D, E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. citer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. citer les trois parallélogrammes définis par les trois égalités vectorielles du **2**.



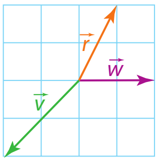
38 Soit A, B et C trois points.
1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
3. Que peut-on dire du point C ? Justifier.

39 **1.** Construire un parallélogramme ABCD de centre O. Nommer I le milieu de [OC].
2. Construire A′ le symétrique de A par rapport à D et O′ le symétrique de O par rapport à B.
3. a) Démontrer que $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{DB}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OO'}$.
c) En déduire que I est le milieu de [A′O′].

40 Logique
1. Indiquer si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.
2. Lorsqu'elles sont fausses, dessiner un contre-exemple.
3. Écrire la réciproque de chacune des affirmations suivantes, puis dire si elles sont vraies ou fausses.
a) Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
b) Si AB = CD alors ABDC est un parallélogramme.
c) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ alors A, B et C sont alignés.
d) Si AB = BC alors B est le milieu de [AC].
e) Si (AD) // (BC) alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

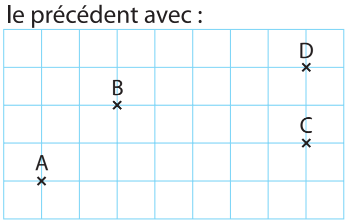
Somme, différence et opposés de vecteurs

41 **1.** Reproduire la figure ci-dessous.

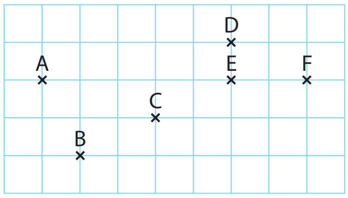


2. Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants.
a) $-\vec{r}$ **b)** $\vec{w} + \vec{r}$ **c)** $\vec{r} + \vec{v}$ **d)** $\vec{w} - \vec{r}$

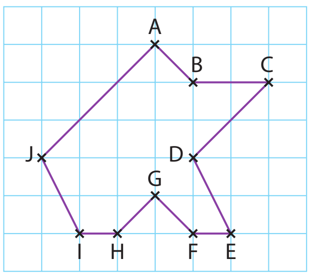
42 Même exercice que le précédent avec :
a) $-\overrightarrow{BA}$
b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
d) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$
e) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$



43 Même exercice que le **41** avec :
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF}$
c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE}$
d) $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{AD}$



44 En utilisant les points de la figure, donner un vecteur égal à :
a) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HI}$ **b)** $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{EI}$
d) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$ **e)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$ **f)** $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{FE}$
g) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ **h)** $\overrightarrow{HF} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ **I)** $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{FD}$



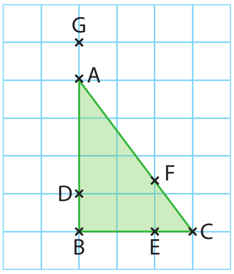
Exercices d'application

Produit de vecteurs par des nombres réels

45 Tracer un vecteur $\vec{u}$ de votre choix.
Construire les vecteurs $3\vec{u}, -5\vec{u}, \frac{1}{4}\vec{u}, -\frac{3}{2}\vec{u}$.

46 A et B sont deux points distincts.
Placer les points M, N, P, Q tels que :
a) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{AQ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

47 En observant la figure ci-contre, recopier et compléter les égalités vectorielles suivantes.



a) $\overrightarrow{BD} = \ldots\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{BA} = \ldots\overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{BE} = \ldots\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BC} = \ldots\overrightarrow{BE}$
c) $\overrightarrow{CF} = \ldots\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{CA} = \ldots\overrightarrow{CF}$
d) $\overrightarrow{BA} = \ldots\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG} = \ldots\overrightarrow{BA}$

Manipulation algébrique

48 Simplifier les expressions vectorielles suivantes.
a) $-5\vec{u} + 2 \times 3\vec{u}$
b) $2\vec{u} - 5\vec{v} - 4\vec{u} + 2\vec{v}$
c) $-12\vec{v} + \vec{u} - 3 \times 4\vec{v} - \vec{u}$
d) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 2(5\vec{u} - 2\vec{v})$

49 Recopier et compléter les égalités suivantes à l'aide de la relation de Chasles.
a) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
b) $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{\ldots}$
c) $\overrightarrow{D\ldots} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{\ldots B}$
d) $\overrightarrow{E\ldots} + \overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{\ldots}$
e) $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{A\ldots} + \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{CM}$
f) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{\ldots} = \vec{0}$

50 Écrire le plus simplement possible.
a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$
b) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AA}$
c) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}$
d) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}$
e) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
f) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

Démonstration

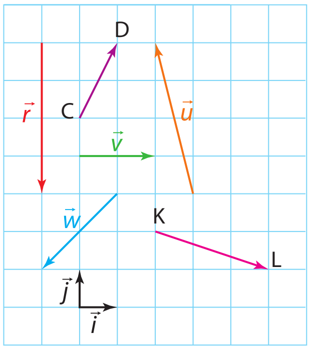
51 A, B, C, D sont quatre points.
Démontrer que :
a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{DA}$
b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

52 Simplifier les écritures suivantes.
a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$
b) $\vec{v} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA}$

Dans la suite des exercices de cette rubrique, le plan est muni d'une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$ ou d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$.

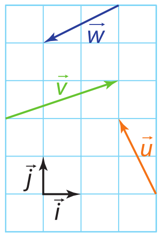
Coordonnées de vecteurs

53 Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}, \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$.

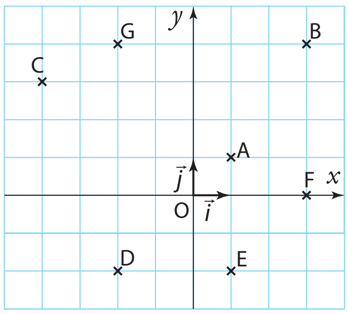


54 On considère les points A(1 ; 2), B(–2 ; 5) et C(–3 ;–3).
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

55 **1.** Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. a) Reproduire la figure ci-contre puis tracer les vecteurs suivants.
$\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{w}$.
b) Lire leurs coordonnées.
c) Les vérifier par le calcul.



56 **1.** Lire les coordonnées des points.



2. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{BG}$.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD}$.
Comparer avec les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$.

57 On considère les points A(3 ; 5), B(2 ; –1), C(–2 ; –4) et D(–1 ; 2).
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

58 **1.** On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
Tracer ces deux vecteurs.
2. a) Construire les vecteurs suivants.
$2\vec{u}$, $-3\vec{v}$, $\frac{1}{3}\vec{u}$ et $\frac{3}{2}\vec{v}$.
b) Lire leurs coordonnées.
c) Les vérifier par le calcul.

Exercices d'application

59 On considère le vecteur $\vec{u}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
$3\vec{u},\ -4\vec{u},\ \frac{2}{3}\vec{u}$ et $-4{,}5\vec{u}$.

60 On considère les vecteurs suivants $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ vérifiant l'égalité $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$?

61 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées de $\vec{w}$, $\vec{m}$ et $\vec{z}$ tels que $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{m} = \vec{v}$ et $\vec{z} - \vec{u} = \vec{v}$

62 On considère les points A(1 ; 2), B(–2 ; 5) et C(–3 ; –3).
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA}$ et $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.

63 Calculer la norme des vecteurs suivants.
$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}, \vec{m}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}, \vec{n}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

Relation vectorielle avec point inconnu

64 Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ celles du point A(5 ; 2).
Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

65 On considère les points E(2 ; –1), F(–3 ; 4) et G(1 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H pour que EFGH soit un parallélogramme.

66 On considère les points A(3 ; –4) et B(–1 ; 2).
Quelles sont les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$?

67 On considère les points M(–4 ; 2), N(0 ; 3) et P(1 ; –5).
Calculer les coordonnées du point Q défini par $\overrightarrow{MQ} = -3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$.

Colinéarité de vecteurs

68 **1.** Calculer les déterminants des vecteurs suivants.
2. Dire s'ils sont colinéaires.
3. S'ils sont colinéaires, trouver un coefficient de colinéarité.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}3\\4{,}5\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$

e) $\vec{s}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{m}\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{7}\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$

69 **1.** Soit D(–3 ; –1), E(–4 ; 2), F(2 ; –2) et G(1 ; 1).
Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.
a) $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{DE}$ **b)** $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FD}$ **c)** $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ **d)** $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DG}$

2. Calculer les déterminants des vecteurs de la question **1.**

3. Les vecteurs de la question **1.** sont-ils colinéaires ?

70 Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant par un calcul de déterminant.
a) A(–2 ; 1), B(3 ; 4), C(2 ; 2) et D(5 ; 4)
b) A(2 ; 2), B(5 ; 4), C(1 ; 4) et D(–2 ; 2)
c) A(3 ; 4), B(5 ; 0), C(0 ; 5) et D(3 ; 0)

71 Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés en justifiant par un calcul de déterminant.
a) A(–4 ; 3), B(2 ; 3) et C(6 ; 3)
b) D(2 ; 5), E(–4 ; –3) et F(5 ; 9)
c) G(–2 ; 1), H(3 ; 4) et I(5 ; 5)

72 Dans chaque cas, dire si le point C appartient à la droite (AB).
a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)
b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)
c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

73 **1.** Placer les points $A\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$, $B\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{4}{3} ; -1\right)$ et $D\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$.
2. Les droites suivantes sont-elles parallèles ? Justifier.
a) (AB) et (CD) **b)** (BC) et (AD)

Calculs et automatismes

74 Calculer mentalement.

a) $\dfrac{3+(-5)}{2}$ **b)** $\dfrac{-6-5}{2}$ **c)** $\sqrt{6^2+8^2}$

d) $\sqrt{25-9}$ **e)** $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}$ **f)** $\sqrt{121}$

g) $(5-2)^2$ **h)** $(2-(-4))^2$ **i)** $(-2-5)^2$

75 On considère $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$. Calculer mentalement les coordonnées de $3\vec{u} + 2\vec{v}$ et de $-\vec{u} + \vec{v}$.

76 Développer les expressions suivantes.
$A = (3x+2)(5x-4)$ $B = (2x-5)^2$
$C = (x-6)(x+6)$ $D = 2x(3x^2-7)$

Exercices d'entraînement

Sans coordonnées

77 Soit ABC un triangle.
Placer les points D, E et F tels que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$ et $3\overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$.

78 EFGH est un parallélogramme de centre O.
1. Construire les points S et T vérifiant $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$.
Que peut-on en déduire ?

79 Soit ABC un triangle rectangle en A.
1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère BCDE ?
Justifier.

Logique

80 **1.** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Lorsqu'elles sont fausses, dessiner un contre-exemple.
a) Si $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ alors les points A, B et C sont alignés.
b) Si $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ alors (AC)//(BD).
c) Si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$.
d) Si ABCD est un trapèze alors il existe k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
2. Écrire la réciproque de chacune des affirmations précédentes, puis dire si elles sont vraies ou fausses.

81 Soit trois points A, B et C distincts non alignés. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires dans les cas suivants ?
a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -6\overrightarrow{AB}$
b) $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 4\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC}$
c) $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
d) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC}$
e) $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
f) $\vec{u} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

82 Soit trois points A, B et C distincts et non alignés.
Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
1. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, M et N ?

83 ABCD est un parallélogramme.
Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.
1. Réaliser une figure.
2. Recopier et compléter.
$$\overrightarrow{CE} = \ldots + \overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{BF} = \ldots + \overrightarrow{DF}$$
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

Dans la suite des exercices de cette rubrique, le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ ou d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Égalités et coordonnées

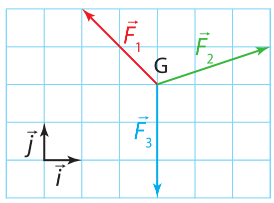
Démonstrations

84 On considère trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et deux réels k et k'.
Démontrer en utilisant les coordonnées que :
a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
c) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
d) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
e) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

85 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le but est de démontrer que $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
On note $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ où O est l'origine du repère.
1. Exprimer les coordonnées de $\vec{v}$ en fonction des coordonnées de M(x ; y) et de N(x_N ; y_N)
2. Exprimer $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de la relation de Chasles.
3. Conclure.

Avec des coordonnées

86 L'action de trois forces **Physique-Chimie** $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ sur un objet est modélisée par l'action des trois vecteurs appliquée sur le point G qui représente le centre d'inertie de l'objet.
1. Recopier sur un quadrillage la figure ci-contre.
2. Rajouter une force, c'est-à-dire un vecteur d'origine G, de telle sorte que la somme des forces soit égale au vecteur nul.
L'objet est ainsi en équilibre.



Coup de pouce On peut soit dessiner le vecteur somme $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$, soit utiliser les coordonnées.

87 On considère les points A(5 ; –6) et B(–2 ; 6).
Le point C est le milieu de [AB].
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$.

88 On considère les points M(–2 ; –2), N(3 ; 1), P(0 ; 6) et Q(–5 ; 3).
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$, en déduire la nature du quadrilatère MNPQ.
2. Calculer la norme de $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MP}$.
Préciser la nature du quadrilatère MNPQ.
3. a) Le repère $(M ; \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ est-il orthonormé ? Justifier.
b) La base $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$ est-elle orthonormée ? Justifier.

89 On considère les points A, B et C respectivement de coordonnées (1 ; 4), (4 ; 6) et (2 ; 3).

1. Quelles sont les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme ?

2. Prouver que ABCD est aussi un losange.

90 On considère les points D(–4 ; 2), E(0 ; 3) et F(1 ; –5). Calculer les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{DG} = -3\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{DF}$.

91 Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement (3 ; 2), (9 ; –5) et (–9 ; 16). Ces points sont alignés. Calculer le nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

92 Proposer un algorithme vérifiant si les droites (AB) et (CD) sont parallèles à partir des coordonnées des points A, B, C et D entrées par l'utilisateur. **Algo & Prog**

93 Proposer un algorithme qui vérifie si les points A, B et C sont alignés à partir de leurs coordonnées entrées par l'utilisateur. **Algo & Prog**

Travailler autrement

En groupe

94 Jouer au jeu des bonnes associations suivant.

But du jeu Obtenir le plus grand nombre de paires de cartes rouges et vertes.

Contenu du jeu

7 cartes rouges et 7 cartes vertes

Préparation du jeu

Recopier les 7 égalités de la colonne de gauche du tableau sur les 7 cartes rouges. Recopier les 7 égalités de la colonne de droite du tableau les 7 cartes vertes. On écrira une égalité par carte.

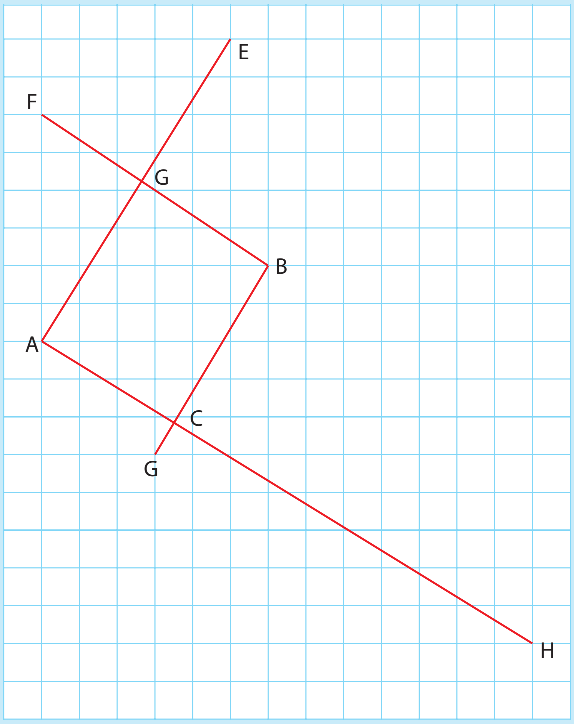
Égalité vectorielle	Description géométrique
1 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, $k \neq 1$	8 B est le milieu de [AC].
2 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$	9 (AB) et (CD) sont parallèles.
3 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$	10 ABDC est un parallélogramme.
4 $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k > 0$	11 A, B et C sont alignés.
5 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	12 B et C sont confondus.
6 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$	13 ABCD est un parallélogramme.
7 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	14 ABCD est un trapèze.

Retourner toutes les cartes rouges et toutes les cartes vertes sur une table pour masquer leur contenu.

Déroulement du jeu

Le joueur le plus âgé est celui qui commence.
À son tour, chaque joueur retourne une carte rouge et une carte verte choisies au hasard pour tenter de les associer. Si l'association est bonne le joueur ramasse les deux cartes et les conserve ensemble puis il rejoue. Si les cartes ne s'associent pas, chacune est retournée face cachée sur la table et un autre joueur tente sa chance. Le jeu est terminé quand toutes les bonnes associations ont été faites.

95 Le quadrilatère ACBD est-il un rectangle ? **Problème ouvert**



96 Faire une recherche pour pouvoir expliquer le lien entre les mots « véhicule, voiture, invectiver » et le mot « vecteur ».

Exercices bilan

Pour l'ensemble des exercices de cette rubrique, le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ ou d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

97 Triangles imbriqués

1. Construire un triangle ABC.

2. Placer les points M, P et N tels que :
a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA}$
c) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MC}$

3. Prouver que $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$.
Que peut-on en déduire pour les points P, N et B ?

98 Triangles symétriques

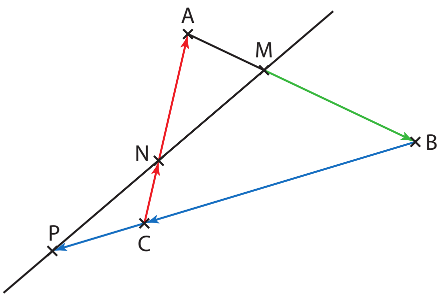
Soit DEF un triangle quelconque. H est le symétrique de D par rapport à F.
Le point G est défini par $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}$.

1. Faire une figure.

2. Justifier que le triangle FGH est l'image du triangle DEF par une translation dont on précisera le vecteur.

99 Points alignés

A, B et C sont trois points non alignés.
On a construit les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.



1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que les points M, N et P sont alignés.

100 Nature d'un quadrilatère

Soit A(-9 ; 7), B(3 ; 5), C(8 ; -2) et D(-4 ; 0) quatre points.

1. a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
b) En déduire la nature du ABCD.

2. Soit M le milieu de [AB] et N tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
a) Calculer les coordonnées de M et N.
b) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{BN}$.
c) Calculer la norme de $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{MN}$.
d) Montrer que MBN est un triangle rectangle en rédigeant soigneusement.
e) En déduire la nature du quadrilatère MBND.

101 Théorème de Varignon TICE

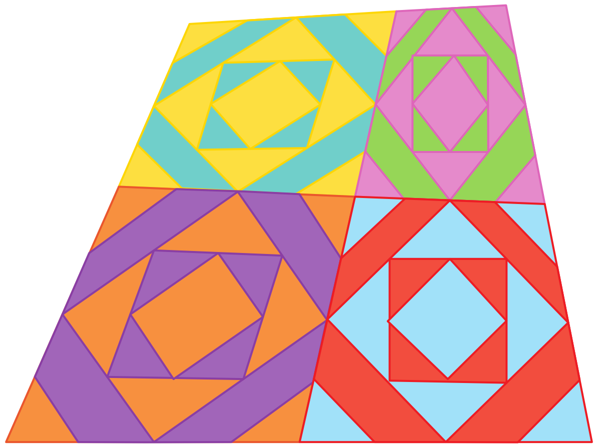
Soit ABCD un quadrilatère quelconque. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la nature du quadrilatère IJKL.

2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. De la même manière, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

4. Conclure.



102 Position relative de droites

1. Placer les points V(−1 ; −1,5), A(−2 ; 0) et T(5 ; 0).

2. Placer E tel que $\overrightarrow{VA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{VE}$.
En déduire ses coordonnées.

3. Placer U tel que $\overrightarrow{TU}$ ait pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.
En déduire ses coordonnées.

4. Que peut-on dire des droites (OU) et (ET) ?
Justifier.

103 Droites parallèles et points alignés

Soit les points A(−1 ; 3), B(1 ; 6), C(2 ; 4) et D(−2 ; −2). Les points K, L et M sont définies par les égalités vectorielles suivantes.
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1. Calculer les coordonnées des points K, L et M.

2. Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?

3. Démontrer que les points K, L et M sont alignés.

4. Faire une figure pour contrôler vos résultats.

104 Coordonnée inconnue

On donne les points A(6 ; 3), B(−3 ; 0), C(5 ; 4) et D(−1 ; 1).

1. Montrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

2. Les points B, C et D sont-ils alignés ?

3. Déterminer y pour que le point M(25 ; y) appartienne à la droite (AB).

Exercices d'approfondissement

Pour l'ensemble des exercices de cette rubrique, le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$ ou d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

105 Points alignés (1)

A, B et C sont trois points du plan tels que pour tout point M du plan on a :

$$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Montrer que les points A, B et C sont alignés et représenter ces points.

106 Points alignés (2)

TICE

On considère le triangle ABC et a un nombre réel.
Les points M, S et T sont définis par :

- $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Trouver la position du point M sur la droite (AB) afin que les points S, T et M soient alignés.

Coup de pouce On peut conjecturer la solution à l'aide d'une figure dessinée à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

107 Symétrie centrale

Soit les points A(7 ; 3), B(1 ; −1) et C(9 ; −3). Les points D et E sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. La symétrie centrale de centre A transforme D en D′ et E en E′.

1. Calculer les coordonnées des points E et D puis du vecteur $\overrightarrow{ED}$.
2. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{E'D'}$.
3. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$. Que peut-on dire de (BC) et (E′D′) ?

Remarque Une symétrie centrale est une homothétie de rapport −1.

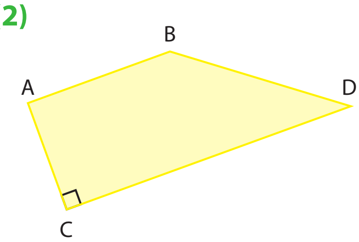
108 Homothétie (1)

Soit trois points non alignés A, B et C dans le plan. L'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$ transforme A en A′ et B en B′.

1. Construire la figure.
2. Donner les égalités vectorielles obtenues grâce à l'homothétie.
3. En déduire que (AB) est parallèle à (A′B′).

109 Homothétie (2)

Soit ABDC un trapèze rectangle en C tel que AB = 4 cm et AC = 3 cm. Soit A′ et B′ les images respectives de A et B par l'homothétie de centre C et de rapport 4.



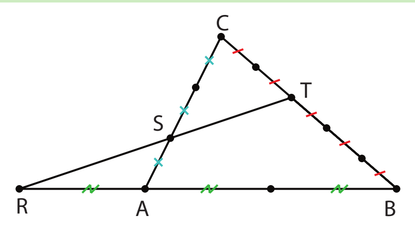
1. Construire la figure.
2. Prouver que ABB′A′ est un trapèze.
3. Calculer l'aire de ces deux trapèzes.

Vers la 1re

Orientation

110 Spécialité Maths

On considère le triangle ABC. R est un point de (AB), S un point de (AC) et T un point de (BC).



À partir de la figure ci-contre, déterminer les valeurs des réels α, β et γ tels que :

- $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AS} = \beta\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BT} = \gamma\overrightarrow{BC}$

Dans la suite, on se propose de démontrer que les points R, S et T sont alignés en utilisant deux méthodes.

A. Méthode géométrique

Dans cette partie, on utilise des égalités vectorielles.

1. Montrer que :

a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

2. En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{RT}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

B. Méthode analytique

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

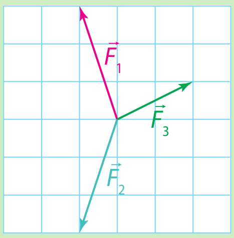
1. Donner les coordonnées des points suivants : A, B, C, S et R.
2. Calculer les coordonnées du point T.
3. Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{2}{5} ; \frac{4}{15}\right)$.
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires.
5. Conclure.

111 STI2D

On considère un objet soumis à trois forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$.

L'objet est-il en équilibre ou va-t-il se déplacer ?

S'il se déplace, dans quelle direction le fait-il ?



Travaux pratiques

Algo & Prog — Modéliser, Communiquer — 45 min

1 Coordonnées de points ou de vecteurs ?

A ▸ Test d'un programme

Le **programme 1** suivant est écrit en langage **PYTHON**.

1. Tester le **programme 1** pour :
`xA = 2, yA = 4, xB = 3` et `yB = -1`.

```
Programme 1
xA=float(input("xA?"))
yA=float(input("yA?"))
xB=float(input("xB?"))
yB=float(input("yB?"))

x=xB-xA
y=yB-yA

print(x)
print(y)
```

Doc — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-33

Doc — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-34

Doc — Fichiers TICE — Lienmini.fr/maths2-35

2. Que représente l'affichage de ce programme si `xA`, `yA`, `xB` et `yB` sont les coordonnées de deux points A et B ?

B ▸ Comparaison de deux programmes

1. Que représentent les variables `x1`, `y1`, `x2` et `y2` dans le **programme 2** et le **programme 3** ci-contre ?

2. Expliquer la différence entre ces deux programmes.

3. En s'inspirant du **programme 2** et du **programme 3**, écrire un **programme 4** qui détermine si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées de $\vec{u}$, A et B.

4. Manon propose de remplacer le **programme 3** par la fonction suivante.

```
def egalitevect3(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
    egalitevect(xA-yA,xB-yB,xC-yC,xD-yD)
```

Cette fonction est-elle correcte ?
Sinon, la modifier pour qu'elle le soit.

5. Soit les points A (–2 ; 5), B (5 ; 3), C (–9 ; 0) et D (2 ; –2) ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$.

Écrire le **programme 2** et le **programme 3** puis les utiliser pour déterminer si les vecteurs suivants sont égaux.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$

b) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

c) $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$.

```
Programme 2
def egalitevect(x1,y1,x2,y2):
    if(x1==x2 and y1==y2):
        print("Les vecteurs sont égaux")
    else:
        print("Les vecteurs ne sont pas égaux")

x1=float(input("x1=?"))
y1=float(input("y1=?"))
x2=float(input("x2=?"))
y2=float(input("y2=?"))

egalitevect(x1,y1,x2,y2)
```

```
Programme 3
def egalitevect2(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):
    x1=xB-xA
    y1=yB-yA
    x2=xD-xC
    y2=yD-yC
    if(x1==x2 and y1==y2):
        print("Les vecteurs sont égaux")
    else:
        print("Les vecteurs ne sont pas égaux")

xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xC=float(input("xC=?"))
yC=float(input("yC=?"))
xD=float(input("xD=?"))
yD=float(input("yD=?"))
egalitevect2(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD)
```

Travaux pratiques

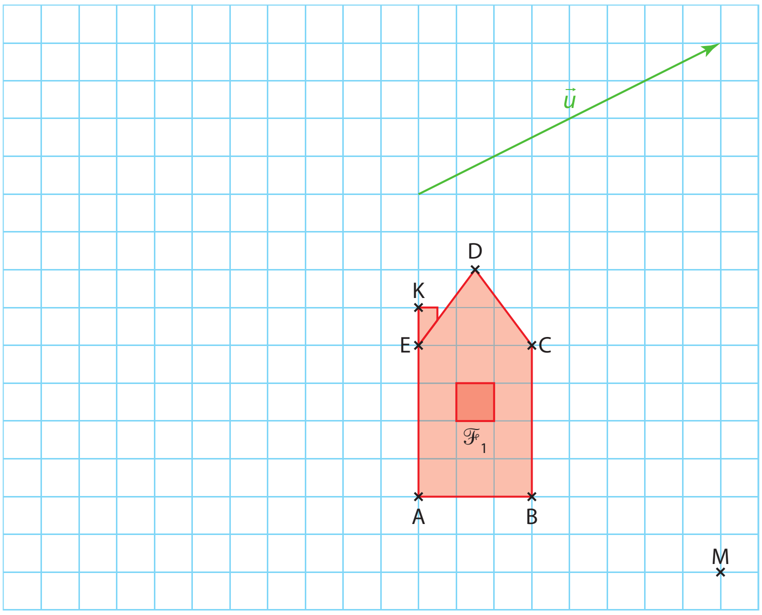
TICE — Modéliser, Raisonner — 35 min

2 Les transformations conservent-elles certaines propriétés ?

A ▶ Étude de la conservation du parallélisme, de l'alignement et des longueurs

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- reproduire la figure $\mathcal{F}_1$ ci-contre ainsi que le vecteur $\vec{u}$ et le point M,
- construire la figure $\mathcal{F}_2$ image de $\mathcal{F}_1$ par la symétrie de centre C,
- construire la figure $\mathcal{F}_3$ image de $\mathcal{F}_1$ par la translation de vecteur $\vec{u}$,
- construire la figure $\mathcal{F}_4$ image de $\mathcal{F}_1$ par l'homothétie de centre M et de rapport 2.

Doc — Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-36



2. Sur la figure $\mathcal{F}_1$, citer 2 segments parallèles, 3 points alignés, des côtés égaux.

3. Observer les images des objets mathématiques cités ci-dessus puis recopier et compléter le tableau ci-dessous à l'aide de « Oui » ou « Non ».
Ne pas hésiter à déformer la figure $\mathcal{F}_1$ pour vérifier.

	…le parallélisme.	…l'alignement.	…les longueurs.
La symétrie de centre C conserve…			
La translation de vecteur $\vec{u}$ conserve…			
L'homothétie de centre M et de rapport 2 conserve…			

B ▶ L'homothétie conserve-t-elle les alignements ?

Sur la figure $\mathcal{F}_1$, les points A, E et K sont alignés donc il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AE}$.
Montrons qu'il existe la même relation avec les points A′, E′ et K′ images respectives de A, E et K par l'homothétie de centre M et de rapport 2.

Coup de pouce Lorsqu'on considère une homothétie de centre M et de rapport k qui transforme A en A′ alors on a l'égalité vectorielle suivante :
$$\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MA}.$$
Il en est de même pour les autres points.

1. Compléter les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{ME'} = \ldots\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MK'} = \ldots\overrightarrow{MK}$.
En déduire $\overrightarrow{A'E'} = \ldots\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{A'K'} = \ldots\overrightarrow{AK}$.

2. Conclure en trouvant une égalité permettant de prouver l'alignement des points A′, E′ et K′.

En autonomie

1 Démontrer avec des égalités de vecteurs

QCM

112 Si EFGH est un parallélogramme alors :

a $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ b $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GF}$

c $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}$ d $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{HG}$

113 Si J est le milieu du segment [KL] alors :

a $\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JL}=\vec{0}$ b $\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{JL}=\vec{0}$

c $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{JL}$ d $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JL}$

114 ✶ ABCD est un parallélogramme.

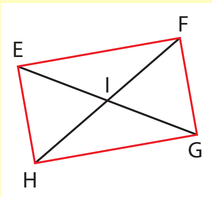
1. Construire les points E et F tel que $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DC}$.
2. Prouver que AEFD est un parallélogramme.

115 ✶✶ ABCD est un rectangle. Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et[CD].
Soit D′ le symétrique de D par rapport à I et J′ le symétrique de J par rapport à B.
Faire une figure et prouver que D′DJJ′ est un parallélogramme.

2 Construire la somme et la différence de deux vecteurs

QCM

Pour les exercices 116 à 117, EFGH est un parallélogramme de centre I.



116 $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}$ est égal à :

a $\overrightarrow{GE}$ b $\overrightarrow{HI}$ c $\overrightarrow{HF}$ d $\overrightarrow{EG}$

117 $\overrightarrow{HE}-\overrightarrow{FE}$ est égal à :

a $\overrightarrow{HF}$ b $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}$ c $\overrightarrow{FH}$ d $2\overrightarrow{HI}$

118 ✶ Avec la relation de Chasles, démontrer que pour tous points A, B, C et D, on a :

$$-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$

119 ✶ MNOP est un rectangle.
Construire le point S défini par :

$$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{PO}$$

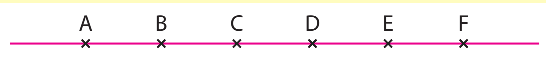
120 ✶✶ ABC est un triangle rectangle isocèle en A. Construire les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$$

3 Construire le produit d'un vecteur par un réel

QCM

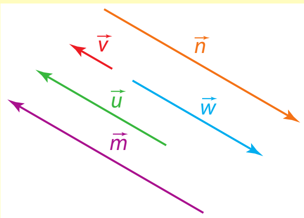
121 Les points A, B, C, D et E sont régulièrement espacés sur la droite ci-dessous.



On a :

a $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ b $\overrightarrow{EB}=-3\overrightarrow{DC}$ c $\overrightarrow{FC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$

122 D'après la figure ci-contre, les égalités correctes sont :



a $\vec{w}=\vec{u}$ b $\vec{n}=2\vec{u}$

c $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{m}$ d $\vec{v}=3\vec{u}$

123 ✶ Tracer un vecteur $\vec{u}$ sur votre cahier de norme $\|\vec{u}\|=5$, puis construire un représentant des vecteurs $-3\vec{u}$, $\frac{2}{5}\vec{u}$, $-\frac{8}{5}\vec{u}$, $\frac{6}{5}\vec{u}$.

124 ✶ Tracer une droite (MN) puis placer les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{MP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NQ}=-2\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{MR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MN}$.

125 ✶✶ Construire un triangle ABC puis construire les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NB}=3\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

126 ✶✶ Construire un rectangle ABCD puis construire les points E, F, G et H tels que :
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
Conjecturer la nature du quadrilatère EFGH.

4 Calculer avec les coordonnées

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$

QCM

127 Si C(3 ; –6) et D(–2 ; 5), alors $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix}5\\-11\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}-5\\11\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix}-1\\-11\end{pmatrix}$

128 Soit D(2 ; –4), E(9 ; –5) et F(–2 ; –2)

alors le vecteur $2\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix}18\\-4\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}-25\\5\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}25\\-21\end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix}25\\-5\end{pmatrix}$

129 ✶ Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Calculer la norme de $\vec{u}$, la norme de $\vec{v}$ puis celle de $\vec{u}+\vec{v}$.

130 ✶ Soit A (5 ; 1), B (–2 ; 3) et C (4 ; –1).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
3. Vérifier les résultats sur une figure.

131 ✶✶ Soit M (6 ; 1), N (2 ; 4) et P (–1 ; –1).

Déterminer les coordonnées du point Q tel que : $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$.

5 Utiliser la colinéarité de vecteurs

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère$(O, \vec{i}\,, \vec{j})$.

QCM

132 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\\overline{3}\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

et $\vec{z}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$. On peut affirmer que :

a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
b $\vec{v}$ et $\vec{z}$ sont colinéaires.
c $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{w}$
d $\vec{z}=3\vec{u}$

133 On considère les points A(3 ; –2), B(2 ; 4) et C(1 ; 7).

a A, B et C sont alignés.
b A, B et C ne sont pas alignés.
c $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$
d $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

134 On considère les points D(–3 ; 2), E(2 ; 4), F(0 ; 5) et G(1 ; –3). On a det($\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FG}$) qui est égal à :

a 38
b –42
c –11
d 21

135 ✶ On considère les points D(–12 ; 4), E(6 ; –6) et F(30 ; –20). Les points D, E et F sont-ils alignés ? Si oui, donner une relation vectorielle les reliant.

136 ✶ On considère les points M(–2 ; 5), N(4 ; 3), P(–1 ; 3) et Q(8 ; 0).

Les droites (MN) et (PQ) sont-elles parallèles ?

137 ✶ On considère les points D(0 ; 4), E(4 ; 5), F(8 ; 0) et G(0 ; –2)

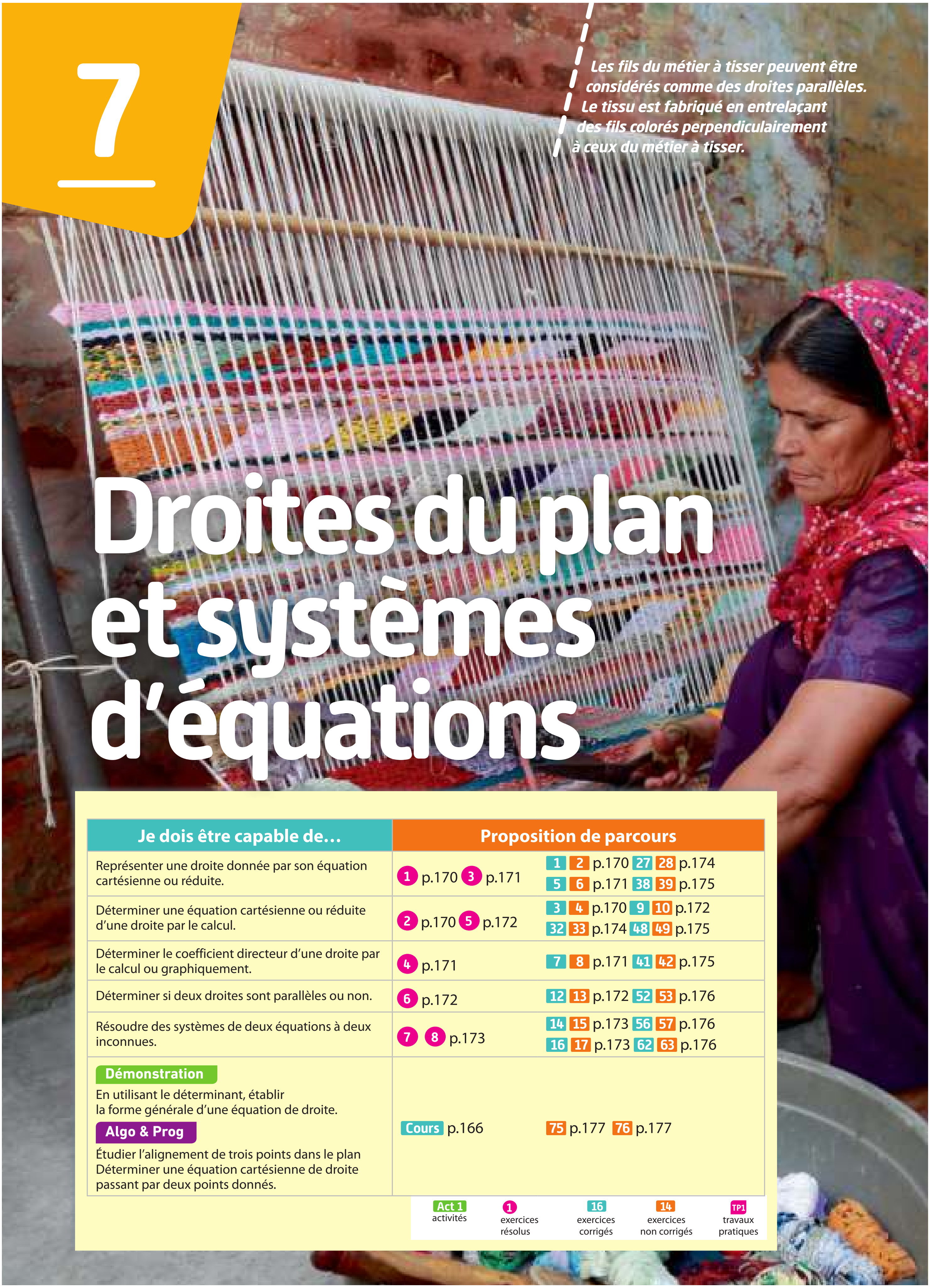
1. Quelle est la nature du quadrilatère DEFG ?
2. Les droites (EF) et (DG) sont-elles parallèles ?

138 ✶✶ On considère les points M(2 ; 4), A(x ; 5), T(2 ; 1) et H(3 ; x – 1) où x est un réel.

1. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ en fonction de x.
2. Déterminer les valeurs de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ soient colinéaires.

139 ✶✶ Soit trois points A, B et C distincts et non alignés. Les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire une figure
2. Montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
3. Que peut-on en déduire pour les points A, M et N ?



7

Les fils du métier à tisser peuvent être considérés comme des droites parallèles. Le tissu est fabriqué en entrelaçant des fils colorés perpendiculairement à ceux du métier à tisser.

Droites du plan et systèmes d'équations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Représenter une droite donnée par son équation cartésienne ou réduite.	1 p.170 3 p.171	1 2 p.170 27 28 p.174 5 6 p.171 38 39 p.175
Déterminer une équation cartésienne ou réduite d'une droite par le calcul.	2 p.170 5 p.172	3 4 p.170 9 10 p.172 32 33 p.174 48 49 p.175
Déterminer le coefficient directeur d'une droite par le calcul ou graphiquement.	4 p.171	7 8 p.171 41 42 p.175
Déterminer si deux droites sont parallèles ou non.	6 p.172	12 13 p.172 52 53 p.176
Résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues.	7 8 p.173	14 15 p.173 56 57 p.176 16 17 p.173 62 63 p.176
Démonstration En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite. **Algo & Prog** Étudier l'alignement de trois points dans le plan Déterminer une équation cartésienne de droite passant par deux points donnés.	Cours p.166	75 p.177 76 p.177

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-13

1. Calculer des coordonnées de vecteurs

On considère les points A(– 1 ; 1), B(3 ; – 1), C(0 ; – 2), D(2 ; 2), E(– 3 ; – 2) et F(– 5 ; 4) dans un repère.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

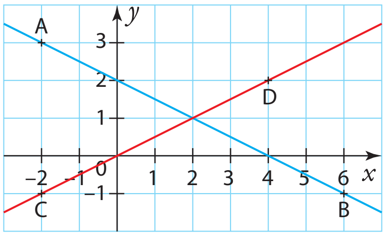
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ADBC ?

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FE}$.

4. Que peut-on en déduire pour les quadrilatères ACEF et BDFE ?

2. Déterminer les coordonnées de points d'intersection

On donne les droites (AB) et (CD) représentées ci-contre.



1. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère ?

2. Donner trois points à coordonnées entières appartenant à la droite (CD).

3. Par lecture graphique, donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

3. Compléter un tableau de valeurs

Compléter le tableau suivant sachant que $y = -3x + 2$.

x	2		$\frac{1}{2}$	
y		-2		$-\frac{2}{3}$

4. Identifier des droites particulières

1. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (3 ; – 2), (5 ; – 2) et (– 3 ; – 2) ?

2. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (– 2 ; – 2), (3 ; 3) et (8 ; 8) ?

3. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (1 ; – 2), (1 ; 3) et (1 ; 5) ?

5. Alignement

On considère les points A(–3 ; –2), B(–1 ; 2) et C(0 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. En déduire si les points A, B et C sont alignés ou non.

6. Parallélisme

On considère les points A(–1 ; –2), B(1 ; 2), C(2 ; –3) et D(3 ; –1).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. En déduire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 167, 168, 183

Algo & Prog
p. 177

TICE
p. 164, 182, 183, 185

Les autres disciplines
p. 179, 180

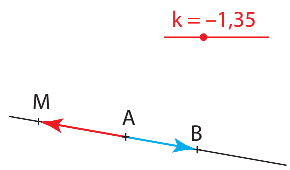
Problèmes ouverts
p. 178

Activités

1 Effectuer des paramétrages sur une droite

TICE — 10 min

On considère deux points A et B distincts et le point M défini par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel.



1. Sur GeoGebra, construire une droite (AB), créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$, un curseur k et le vecteur $k\overrightarrow{AB}$, puis son représentant d'origine A pour créer le point M.

2. Pour quelle valeur de k le point M est-il confondu avec le point A ?

3. Pour quelle valeur de k le point M est-il confondu avec le point B ?

4. Pour quelle valeur de k le point M est-il au milieu C du segment [AB] ?

5. Où se situent tous les points M pour lesquels k est un réel compris entre 0 et 1 ?

6. Pour quelle valeur de k le point M est-il le symétrique D du point B par rapport au point A ?

Remarque k s'appelle un paramètre et dans ce cas il donne la position du point M sur la droite (AB).

7. On considère maintenant les points N tels que $\overrightarrow{BN} = h\,\overrightarrow{BC}$ où h est un réel.
Où se situent tous les points N ?

8. Quelles sont alors les valeurs du paramètre h correspondantes aux points A, B, C et D ?

↪ Cours 1 et 2 p. 166

2 Étudier les positions relatives de droites

TICE — 10 min

On considère la droite d d'équation cartésienne : $2x - 3y - 4 = 0$

1. Représenter la droite d à l'aide de GeoGebra.

2. Créer trois curseurs a, b et c. Représenter la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

3. Faire varier les curseurs et proposer des valeurs de a, b et c pour que les droites obtenues soient strictement parallèles à d.

4. Faire varier les curseurs et proposer des valeurs de a, b et c pour que les droites obtenues soient confondues avec d.

5. Calculer dans chacun des cas précédents la valeur du quotient $-\frac{a}{b}$. Conclure.

↪ Cours 4 p. 168

3 Trapèze complet

TICE — 20 min

1. À l'aide de Geogebra, placer les points A(−3 ; −1) , B(6 ;2) , C(3 ;5) et D(−3;3).

2. Faire construire les points F et H, milieux respectifs des segments [CD] et [AB].

3. Construire les droites (AD) et (BC) et leur point d'intersection E.

4. De même, construire les droites (BD) et (AC) et leur point d'intersection G.

5. Construire la droite (EF) et vérifier qu'elle passe par les points G et H

6. Faire varier les points A, B, C et D. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ?

Remarque Tous les calculs seront fait dans l'exercice 134 p. 185.

↪ Cours 2 p. 166 et 5 p. 169

4 Résoudre un système par combinaison

15 min

On cherche à étudier le point d'intersection, s'il existe, des droites suivantes :

- d_1 d'équation cartésienne 20x + 30y – 219 = 0 et
- d_2 d'équation cartésienne 15x + 25y – 174 = 0.

1. Dans un repère, représenter ces deux droites.

2. Graphiquement, quelles semblent être les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ?

3. Vérifier par le calcul si ce point appartient à l'une des deux droites ou bien au deux.
Le point d'intersection a des coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient donc les deux équations en même temps, on dit qu'elles sont solutions d'un système (S) que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} 20x + 30y - 219 = 0 \\ 15x + 25y - 174 = 0 \end{cases}$$

4. Mon professeur propose de transformer ce système sous la forme :

$$\begin{cases} 60x + 90y - 657 = 0 \\ -60x - 100y + 696 = 0 \end{cases}$$

a) Quelles opérations a-t-il effectuées ? Quels avantages y voyez-vous ?

b) En déduire alors la valeur de y.

c) Remplacer cette valeur dans les deux équations pour vérifier que vous obtenez la même valeur de x.
Donner alors les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

5. Essayer d'effectuer des opérations sur les équations pour éliminer y en partant du système (S) de départ.
Retrouver alors la même valeur de x précédente.

↳ Cours 5 p. 169

5 Mettre un problème en équation et résoudre un système par substitution

15 min

Au café « Chez Jules », des professeurs de Maths et de Physique Chimie se retrouvent après les cours.
Ils commandent 2 cafés et 3 chocolats. Le serveur leur réclame 10,10 euros.
Puis quatre autres collègues arrivent et commandent 3 cafés et 1 chocolat.
Cette fois-ci, le serveur leur réclame 7,10 euros. Pour obtenir un partage équitable, déterminer le prix d'un café et d'un chocolat.
On notera x le prix d'un café et y celui d'un chocolat.

1. Donner l'équation qui traduit le total de 10,10 euros.

2. De même, donner l'équation qui traduit le total de 7,10 euros.

3. Vérifier qu'on obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y - 10{,}1 = 0 \\ 3x + y - 7{,}1 = 0 \end{cases}$

4. Dans la deuxième équation, isoler l'inconnue y pour l'exprimer en fonction de l'inconnue x.

5. Dans la première équation, remplacer l'inconnue y par le résultat de la question précédente.

Remarque Ainsi, on obtient une nouvelle équation dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue x.

6. Résoudre cette dernière équation pour trouver la valeur de x.

7. Remplacer alors cette valeur dans l'équation de la question **4.** pour trouver la valeur de y.

8. Rédiger une conclusion au problème proposé.

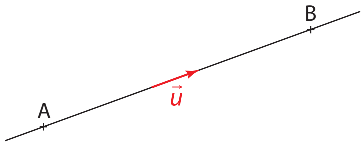
↳ Cours 5 p. 169

Cours

1 Vecteur directeur d'une droite

Définition Vecteur directeur d'une droite

Soient A et B deux points distincts d'une droite d alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite d.



Remarque Le vecteur $\vec{u}$ peut être remplacé par n'importe quel autre vecteur non nul qui lui est colinéaire, il n'est donc pas unique.

Exemple

Soient A(−2 ; 4) et B(6 ; 2) alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Exercice résolu 1 p. 170

2 Équation cartésienne d'une droite

Définition Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne de la droite passant par le point A(x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration

Un point M(x ; y) appartient à cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire si leur déterminant est nul. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc on obtient $a(x - x_A) - (-b)(y - y_A) = 0$ qui peut s'écrire $ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$ qui est bien de la forme annoncée.

Remarques

- Si $a = 0$ alors la droite est **horizontale** et donc parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $b = 0$ alors la droite est **verticale** et donc parallèle à l'axe des ordonnées.
- Une équation cartésienne peut aussi s'écrire sous la forme $ax + by = c$.

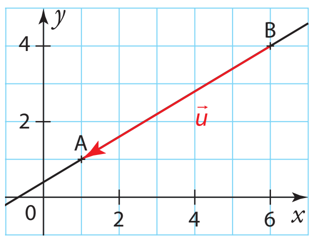
Propriété Condition d'appartenance d'un point à une droite

Si les coordonnées (x ; y) d'un point M vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ alors il appartient à la droite dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemples

① Un point M(x ; y) appartient à la droite passant par le point A(2 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ don $2(x-2) - (-3)(y+1) = 0$ soit $2x + 3y - 1 = 0$

② On cherche à tracer une droite dont une équation cartésienne est $-3x + 5y - 2 = 0$:
- soit on trouve deux points dont les coordonnées vérifient l'équation : A(1 ; 1) et B(6 ; 4), par exemple.
- soit on trouve un point A(1 ; 1) et on utilise un vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$, par exemple.



Exercices résolus 1 et 2 p. 170

3 Équation réduite d'une droite

Définition Équations réduites d'une droite non verticale et d'une droite verticale

- **Toute droite non verticale a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.**
- **Toute droite verticale a une équation réduite de la forme $x = k$.**

Démonstration

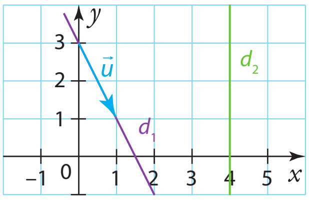
Étant donné une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$:
- si $b = 0$ alors l'équation cartésienne devient : $x = -\dfrac{c}{a}$
- si $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = \dfrac{-c}{b}$

Remarques

- Toutes les droites ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation cartésienne.
- Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

Exemple

Sur la figure ci-contre on a représenté les droites d_1 d'équation réduite $y = -2x + 3$ et d_2 d'équation réduite $x = 4$.



Exercices résolus 3 et 4 p. 171

Propriétés Lectures graphiques

On considère la droite d'équation réduite : $y = mx + p$
- **Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.**
- **Le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;p)$.**

Démonstration

- $y = mx + p$ équivaut à $mx - y + p = 0$ dont un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.
- Pour $x = 0$ alors $y = p$.

Exemple

Pour la droite d_1 de l'exemple précédent, on lit le point A(0 ; 3), intersection de la droite avec l'axe des ordonnées donc on retrouve : $p = 3$.

À partir de ce point si on se déplace selon le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ on trouve le coefficient du vecteur $m = -2$.

Propriétés Signe du coefficient directeur

Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$
- **Si $m > 0$ alors la droite « monte ».**
- **Si $m < 0$ alors la droite « descend ».**
- **Si $m = 0$ alors la droite est horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses).

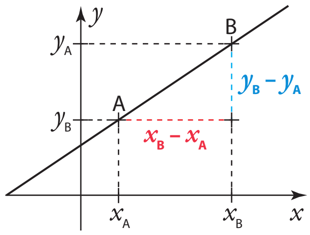
Propriété Droites parallèles

Deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont le **même coefficient directeur**

Définition Coefficient directeur ou pente

Le coefficient directeur ou pente d'une droite (AB) avec A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) est donné par :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ si } x_A \neq x_B$$



Remarques

- Si $x_A = x_B$ alors la droite est verticale d'équation réduite $x = x_A$.
- m est donc le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d'un point à un autre point de la droite.

Exemples

① Soit la droite ci-contre avec les points A(3 ; 4) et B(6 ; 6).

On calcule le coefficient directeur m, ce qui donne :

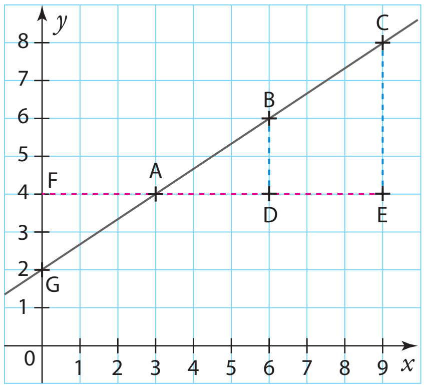
$$m = \frac{6-4}{6-3} = \frac{2}{3}$$

② Par le calcul on sait déjà que : $y = \frac{2}{3}x + p$

Et comme la droite passe par le point A(3 ; 4) on obtient l'égalité :

$y_A = \frac{2}{3}x_A + p$ soit $4 = \frac{2}{3} \times 3 + p$

qui permet de trouver $p = 2$.



Exercices résolus 4 p. 171 et 5 p. 172

4 Positions relatives de deux droites

Règle Droites sécantes, droites parallèles et droites confondues

Deux droites du plan peuvent être soit sécantes, soit parallèles ou soit confondues.

Propriété Droites parallèles avec équations réduites

Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont confondues

Propriété Droites parallèles avec équations cartésiennes

Deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

Démonstration

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\ a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des deux droites.

Elles sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires c'est-à-dire si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

Exercice résolu 6 p. 172

5 Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Définition Système linéaire de deux équations à deux inconnues

On dit qu'un couple $(x\,;y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires du 1er degré à deux inconnues $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ où a, b, c, a', b', c' sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.

Remarques Résoudre un système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système, quand il existe, donc à étudier d'abord la position relative des deux droites.

- Si elles sont **sécantes** le système admet **un seul couple solution.**
- Si elles sont **strictement parallèles** le système n'admet **aucune solution.**
- Si elles sont **confondues** le système a **un nombre infini de solutions**.

Règle Résolution d'un système par substitution

Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Remarque Cette méthode présente l'inconvénient que si la résolution de la première équation est fausse alors celle de la seconde le sera également.

Exemple

Pour résoudre le système $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ à l'aide de la première équation, on isole, on a : $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$

Puis on remplace y dans la deuxième équation pour obtenir $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5(2x-3)-2=0 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} y=2x-3 \\ x=\dfrac{13}{7} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} y=2\times\dfrac{13}{7}-3 \\ x=\dfrac{13}{7} \end{cases}$ Et donc la solution du système est le couple $\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{5}{7}\right)$.

Exercice résolu 7 p. 173

Règle Résolution par combinaison

Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.

Exemple

On souhaite résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y+1=0 & (L_1) \\ 3x-4y-2=0 & (L_2) \end{cases}$ constitué des lignes L_1 et L_2.

$\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases} \begin{pmatrix} \times 3 \\ \times(-2) \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases} \begin{pmatrix} \times 4 \\ \times 3 \end{pmatrix}$ ce qui donne

$\begin{cases} (6x+9y+3)+(-6x+8y+4)=0 \\ (8x+12y+4)+(9x-12y-6)=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 17y+7=0 \\ 17x-2=0 \end{cases}$ Donc la solution est le couple $\left(\dfrac{2}{17}\,;\dfrac{-7}{17}\right)$

Exercice résolu 8 p. 173

Remarque Si les équations du système ne sont pas écrites sous la forme d'équations cartésiennes de droites il suffit de les transformer pour s'y ramener.

Par exemple : $\begin{cases} 5x=7y-3 \\ 2x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7y+3=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases}$

Exercices résolus

Versions interactives
Exo
Lienmini.fr/maths2-14

1 Représenter une droite par son équation cartésienne

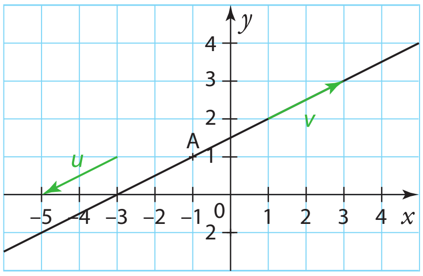
↪ Cours 2 p. 166

Représenter la droite dont une équation cartésienne est : $-x + 2y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé.

Solution

On trouve le point A(–1 ; 1) et un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ ou un vecteur qui lui est colinéaire comme $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. 2

Donc à partir du point A, on se déplace de 2 horizontalement et de 1 verticalement pour obtenir un nouveau point de la droite.



Conseils & Méthodes

1 On cherche deux points à coordonnées entières, par exemple en remplaçant x par une valeur et en cherchant la valeur de y correspondante (ou le contraire).

2 On peut aussi chercher un point et on construit à partir de celui-ci un vecteur directeur, par exemple de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ ou un vecteur colinéaire.

À vous de jouer !

1 Représenter dans un repère orthonormé la droite dont une équation cartésienne est $2x + 5y - 4 = 0$.

2 Représenter dans un repère orthonormé la droite dont une équation cartésienne est $-4x - 5y + 3 = 0$.

↪ Exercices 27 à 31 p. 174

2 Déterminer une équation cartésienne d'une droite par le calcul

↪ Cours 1 et 2 p. 166

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(–2 ; 3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Solution

Méthode 1. Le point M(x ; y) appartient à la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si

$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \times 1 - (-2)\,(y - 3) = 0$

Et donc une équation cartésienne de la droite est $x + 2y - 4 = 0$ 1

Méthode 2. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ permettent de savoir que $a = 1$ et $b = 2$ et donc qu'une équation cartésienne est de la forme $x + 2y + c = 0$. Pour trouver c on remplace les coordonnées du point A ce qui donne $-2 + 6 + c = 0$ d'où $c = -4$. 2

Conseils & Méthodes

1 On exprime la colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ à l'aide du déterminant.

2 On peut aussi remplacer directement les coordonnées du vecteur directeur dans une équation cartésienne puis on calcule la constante c.

À vous de jouer !

3 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A(1 ; –2) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

4 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points A(–3 ; –2) et B(–1 ; 1).

↪ Exercices 32 à 37 p. 174

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-14

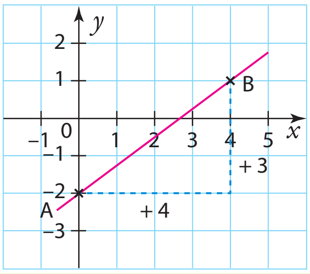
3 Représenter une droite donnée par son équation réduite

Cours 3 p. 167

Représenter la droite d'équation réduite $y=\frac{3}{4}x-2$ dans un repère orthonormé.

Solution

On place le point A(0 ; –2) puis à partir de celui-ci on se déplace de 4 unités horizontalement et on monte de 3 unités verticalement pour trouver B un deuxième point B de la droite puis on trace la droite passant par les deux points. 2



Conseils & Méthodes

1 On cherche deux points à coordonnées entières.
2 On peut aussi placer le point correspondant à l'ordonnée à l'origine, puis à partir de celui-ci on représente le coefficient directeur.
3 On peut également chercher un point à coordonnées entières, puis on représente le coefficient directeur.

À vous de jouer !

5 Représenter la droite d'équation réduite $y=-2x+3$

6 On donne la droite d'équation réduite $y=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}$

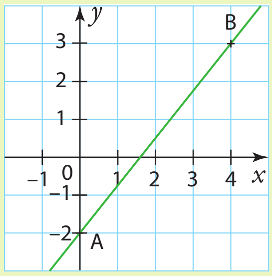
1. Donner son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
2. La représenter.

Exercices 38 à 40 p. 175

4 Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

Cours 3 p. 167

Donner l'équation réduite de la droite représentée ci-contre.



Solution

Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont A(0 ; –2) donc $p=-2$ 1.
Puis à partir de ce point on se déplace jusqu'à un autre point à coordonnées entières, par exemple B(4 ; 3) : on avance de 4 et on monte de 5 donc $m=\frac{5}{4}$ et donc on obtient l'équation $y=\frac{5}{4}x-2$ 2

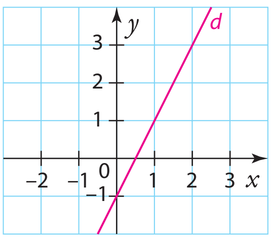
Conseils & Méthodes

1 On lit l'ordonnée à l'origine à l'aide du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
2 On lit le coefficient directeur en cherchant deux points à coordonnées entières A et B pour lire facilement le déplacement horizontal et le déplacement vertical entre ces deux points.
3 Si la droite est verticale alors son équation est $x=x_A$.

À vous de jouer !

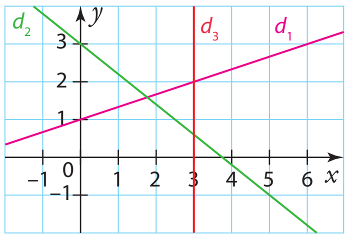
7 On donne la droite *d* représentée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement son coefficient directeur.
2. Déterminer graphiquement son ordonnée à l'origine.
3. Donner l'équation réduite de la droite *d*.



8 On donne les droites d_1 et d_2 et d_3 représentées ci-contre.

1. Déterminer graphiquement deux points à coordonnées entières sur chacune.
2. En déduire leurs équations réduites



Exercices 41 à 42 p. 175

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-14

5 Déterminer l'équation réduite d'une droite par le calcul

Cours 3 p. 167

Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (AB) avec A(–3 ; –1) et B(2 ; –4).

Solution

On calcule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-4-(-1)}{2-(-3)} = -\dfrac{3}{5}$ **1**

L'équation de la droite est de la forme $y = -\dfrac{3}{5}x + p$

Le point A appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $y_A = -\dfrac{3}{5}x_A + p$ ce qui donne $-1 = -\dfrac{3}{5}(-3) + p$

d'où $p = -1 - \dfrac{9}{5} = -\dfrac{14}{5}$ **2**

Et donc l'équation réduite de la droite (AB) est $y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{14}{5}$

Conseils & Méthodes

1 On calcule le coefficient directeur avec la formule du cours sauf si A et B ont la même abscisse car alors la droite est verticale d'équation réduite $x = x_A$.

2 Pour trouver l'ordonnée à l'origine on remplace x et y par les coordonnées d'un point connu et on résout alors l'équation obtenue d'inconnue p.

À vous de jouer !

9 Déterminer par le calcul le coefficient directeur de la droite (AB) avec A(–2 ; –3) et B(1 ; 2)

10 Déterminer par le calcul l'équation réduite de la droite (EF) avec E(1 ; –2) et F(–1 ; 2)

11 On considère la droite (MN) avec M(0 ; 3) et N(–2 ; –2)

1. Donner son ordonnée à l'origine.
2. Calculer son coefficient directeur.
3. En déduire son équation réduite.

Exercices 48 à 51 p. 175

6 Étudier les positions relatives de deux droites données par leurs équations cartésiennes

Cours 4 p. 168

On donne les droites d_1 d'équation cartésienne $2x - y - 5 = 0$ et d_2 d'équation cartésienne $3x - 4y - 2 = 0$. Étudier la position relative de ces deux droites.

Solution

Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u_2}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ **1**

On calcule alors : $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = 1 \times 3 - (-4) \times 3 = 15 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites sont sécantes en un point, déterminé dans l'exercice résolu 7. **2**

Conseils & Méthodes

1 On détermine un vecteur directeur de chaque droite.

2 On calcule le déterminant pour voir si elles sont sécantes ou non.

3 Dans ce dernier cas, on cherche à multiplier une équation pour avoir l'autre et si c'est possible alors elles sont confondues et sinon elles sont strictement parallèles.

4 Pour cette dernière éventualité on peut aussi trouver un point de l'une et vérifier s'il appartient à l'autre.

À vous de jouer !

12 Déterminer la position relative des droites d_1 d'équation cartésienne $2x + 3y - 5 = 0$ et d_2 d'équation cartésienne $4x + 6y - 2 = 0$.

13 Déterminer la position relative des droites d_1 d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$ et d_2 d'équation cartésienne $-3x + 3y - 3 = 0$.

Exercices 52 à 55 p. 176

7 Résoudre un système par la méthode de substitution

Cours 5 p. 169

Résoudre le système $\begin{cases} 3x+4y-2=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases}$ **par substitution**

Solution

Un vecteur directeur de la 1re droite est $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la 2e droite est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on calcule : $\det(\vec{u},\vec{v}) = -8-3 = -11 \neq 0$ donc les droites sont sécantes. **1**

On extrait l'inconnue y dans la 2e équation pour obtenir $\begin{cases} 3x+4y-2=0 \\ y=2x-5 \end{cases}$ **2**

puis on remplace dans la 1re équation $\begin{cases} 3x+4(2x-5)-2=0 \\ y=2x-5 \end{cases}$ **3**

ce qui donne $\begin{cases} x=2 \\ y=2x-5=-1 \end{cases}$ et donc la solution est le couple $(2\,;-1)$ **4**

Conseils & Méthodes

1. On étudie la position relative des droites avec un déterminant.
2. On observe les équations pour chercher quelle inconnue on va extraire le plus simplement et dans quelle équation (par exemple un x, un $-x$, un y ou un $-y$ sont des cas simples.
3. On remplace l'inconnue dans la deuxième équation puis on résout le système.
4. On donne la solution du système.

À vous de jouer !

14 Déterminer quelle inconnue on va extraire le plus simplement dans le système suivant puis résoudre le système.

$$\begin{cases} -2x+3y+2=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

15 Résoudre le système suivant par substitution.

$$\begin{cases} -3x-2y-2=0 \\ 4x+y+5=0 \end{cases}$$

Exercices 56 à 61 p. 176

8 Résoudre un système par la méthode de combinaison

Cours 5 p. 169

Résoudre le système $\begin{cases} 5x-3y-1=0 \\ -3x+4y+1=0 \end{cases}$ **par combinaison.**

Solution

Un vecteur directeur de la première droite est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de la deuxième droite est $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, on calcule : $\det(\vec{u},\vec{v}) = -20+9 = 11 \neq 0$. **1**

Donc les droites sont sécantes.

Pour éliminer l'inconnue x, on calcule $3L_1+5L_2$ **2** et pour éliminer y, on calcule $4L_1+3L_2$ **3** ce qui donne $\begin{cases} (15x-9y-3)+(-15x+20y+5)=0 \\ (20x-12y-4)+(-9x+12y+3)=0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} 11y+2=0 \\ 11x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-2 \\ 11x=1 \end{cases}$ donc la solution est le couple $\left(\frac{1}{11};-\frac{2}{11}\right)$. **4**

Conseils & Méthodes

1. On étudie la position relative des droites avec un déterminant.
2. On cherche par quelle valeur multiplier les deux équations afin d'éliminer une inconnue quand on va additionner les deux nouvelles lignes obtenues.
3. On fait de même pour éliminer la deuxième inconnue.
4. On donne la solution du système.

À vous de jouer !

16 Déterminer par combien il faut multiplier la deuxième équation pour pouvoir éliminer l'inconnue y en additionnant ensuite les deux équations $\begin{cases} 2x+4y+1=0 \\ 3x+2y-2=0 \end{cases}$

17 Déterminer par quelles valeurs il faut multiplier les deux équations pour éliminer l'inconnue x par addition dans le système $\begin{cases} -3x-2y-2=0 \\ 4x+5y-1=0 \end{cases}$, de même pour éliminer y, et finalement donner la solution.

Exercices 62 à 67 p. 176

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

18 Parmi les formules suivantes, reconnaître et apprendre celle qui correspond au coefficient directeur d'une droite.

a) $\dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$ **b)** $\dfrac{y_B + y_A}{x_B + x_A}$

c) $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ **d)** $\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

Dans les exercices 19 à 26 on se place dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

19 On considère la droite d'équation réduite $y = -2x + 3$.
1. Quelle est la valeur de y :
a) si $x = -1$? **b)** si $x = \dfrac{5}{2}$?
2. Quelle est la valeur de x :
a) si $y = 2$? **b)** si $y = \dfrac{1}{3}$?

20 On considère la droite d'équation cartésienne $2x + y - 2 = 0$.
1. Quelle est la valeur de y si $x = 4$?
2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur directeur ?

21 On considère la droite d'équation cartésienne $-2x + 3y - 1 = 0$.
1. Quelle est la valeur de x si $y = -3$?
2. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur directeur ?

22 On considère la droite d'équation cartésienne $-\dfrac{3}{5}x + y + 1 = 0$.
1. Le couple (–5 ; 2) vérifie-t-il cette équation ?
2. Le point de coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ appartient-il à cette droite ?

23 On considère l'équation cartésienne $2x - 5y - 1 = 0$
1. Exprimer y en fonction de x.
2. Exprimer x en fonction de y.

24 Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations de droites ?
a) $y = \sqrt{2}x - 3$
b) $xy = -1$
c) $x^2 - 2x - y + 3 = 0$
d) $(x - 2)^2 - x^2 - y = 0$

25 Les vecteurs donnés ci-dessous, sont-ils des vecteurs directeurs de la droite dont une équation cartésienne est $-2x + 3y - 4 = 0$?
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

26 On considère la droite d'équation réduite $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{5}$
1. Donner la valeur de son coefficient directeur.
2. Donner la valeur de son ordonnée à l'origine.

Représenter une droite donnée par une équation cartésienne

27 Représenter la droite donnée par une équation cartésienne $-3x + 2y + 1 = 0$.

28 Représenter la droite dont une équation cartésienne est $4x + 5y - 2 = 0$.

29 Représenter les droites dont les équations cartésiennes sont :
a) $\dfrac{3}{4}x - 2y + 5 = 0$ **b)** $x - 2 = 0$

30 Représenter les droites dont les équations cartésiennes sont :
a) $2x - 5y = 0$ **b)** $-4x + y = 1$

31 Même exercice que le précédent pour les droites suivantes.
a) $x - 3y = -3$ **b)** $2y - 3x + 4 = 0$

Déterminer une équation cartésienne d'une droite par le calcul

32 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A(–2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

33 Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec A(1 ; –3) et B(–2 ; 1).

34 On donne les points C(0 ; –5) et D(–3 ; 2).
Déterminer une équation cartésienne de la droite (CD).

35 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par l'origine du repère et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

36 Déterminer une équation cartésienne de la droite (MN) passant par les points M(2 ; 3) et N(–1 ; 3).

37 Même exercice que le précédent pour la droite passant par les points F(1 ; 3) et G(1 ; –2).

Représenter graphiquement une droite donnée par son équation réduite

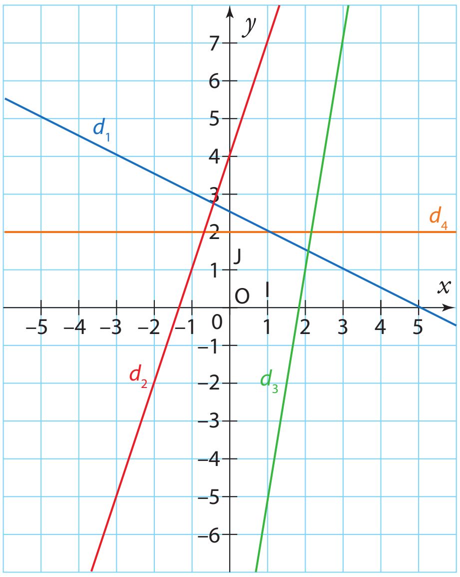
38 Dans un repère orthonormé, représenter la droite d'équation réduite $y = -5x + 4$.

39 Même exercice que le précédent avec les droites d'équations réduites $y = \frac{3}{4}x - 2$ et $x = -2$.

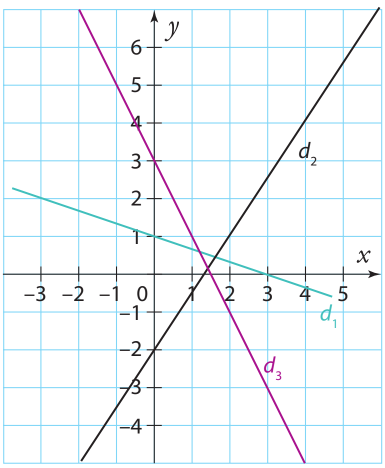
40 Même exercice que le **38** avec les droites d'équations réduites $y = \frac{7}{5}x + 1$ et $y = 3$.

Lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite

41 Pour chacune des droites représentées ci-dessous, donner à l'aide du graphique, son coefficient directeur.

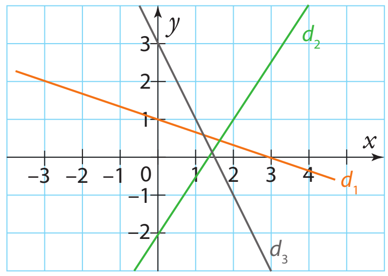


42 Même exercice que le précédent avec les droites suivantes.

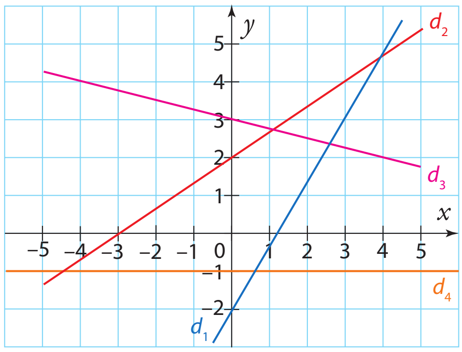


Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

43 Pour chacune des droites représentées ci-dessous, lire graphiquement son équation réduite.



44 Même exercice que le précédent avec les droites suivantes.



Calculer le coefficient directeur d'une droite

45 Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) passant par les points A(–2 ; 1) et B(4 ; –2).

46 Même exercice que le précédent avec les points M(3 ; –4) et N(–1 ; –2).

47 Même exercice que le **45** avec les points C(0 ; –5) et D(–3 ; 2).

Déterminer l'équation réduite d'une droite par le calcul

48 Par le calcul, trouver l'équation réduite de la droite (GH) passant par les points G(–3 ; –1) et H(5 ; –3)

49 Même exercice que le précédent avec les points K(–2 ; 1) et L(–2 ; 4)

50 Trouver l'équation réduite de la droite de coefficient directeur $\frac{4}{5}$ et passant par le point M(–2 ; 4).

51 Même exercice que le précédent avec la droite de coefficient directeur –3 et passant par le point N(2 ; 3).

Exercices d'application

Déterminer la position relative de droites données par leurs équations cartésiennes

52 On considère les droites d'équations cartésiennes $2x - 3y + 1 = 0$ et $3x + 5y - 1 = 0$.
1. Déterminer un vecteur directeur de chacune de ces droites.
2. En déduire leur position relative.

53 On considère les droites d'équations cartésiennes $-2y + 3 = 0$ et $3x + 4 = 0$.
1. Déterminer un vecteur directeur pour chacune de ces deux droites.
2. En déduire leur position relative.

54 On considère les droites d'équations cartésiennes $-2x + y = 0$ et $6x - 3y + 4 = 0$.
1. Déterminer un vecteur directeur pour chacune de ces deux droites.
2. Étudier leur position relative.

55 On considère les droites d'équations cartésiennes $-x + 3y + 1 = 0$ et $2x - 6y - 2 = 0$.
1. Déterminer un vecteur directeur pour chacune de ces deux droites.
2. Étudier leur position relative.

Résoudre un système par la méthode de substitution

56 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

57 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$$

58 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ 5x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

59 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 6y - 1 = 0 \end{cases}$$

60 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} -x + 5y = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

61 Résoudre le système suivant par substitution.
$$\begin{cases} 5x + 3y - 1 = 0 \\ -7x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Résoudre un système par la méthode de combinaison

62 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

63 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

64 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} 4x - 7y + 1 = 0 \\ -3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

65 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} -4x + 2y + 6 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

66 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 3x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

67 Résoudre le système suivant par combinaison.
$$\begin{cases} 5x + 3y - 1 = 0 \\ -7x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Calculs et automatismes

Pour les exercices 68 à 70 calculer mentalement les expressions suivantes.

68 **a)** 18×22 **b)** 38×43
c) $(30 + 5) \times (30 - 5)$ **d)** 19^2

69 **a)** $\dfrac{2-6}{2-(-3)}$ **b)** $\dfrac{4-2}{-4-3}$ **c)** $\dfrac{7-3}{5-3}$ **d)** $\dfrac{-3-(-1)}{-7-(-2)}$

70 **a)** $-3 \times 4 - (-2) \times 7$ **b)** $2 \times (-5) - (-3) \times 8$
c) $(-4) \times (-2) - 1 \times (-2)$ **d)** $5 \times 7 - (-3) \times (-2)$

Avec des équations de droites ou des vecteurs colinéaires

71 On donne les points A(–2 ; –3), B(4 ; –1).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Le point C(3 ; –1) appartient-il à cette droite ?

3. Déterminer l'ordonnée du point D d'abscisse $\frac{3}{2}$ qui appartient à la droite (AB).

4. Déterminer l'abscisse du point E d'ordonnée $-\frac{4}{3}$ qui appartient à la droite (AB).

72 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation cartésienne $\frac{3}{4}x + y - \frac{1}{3} = 0$ avec les deux axes du repère orthonormé.

73 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a) A(2 ; –1), B(3 ; 5), C(3 ; –5) et D(5 ; 7).

b) A(15 ; 30), B(5 ; 20), C(–10 ; –20) et D(50 ; 40).

c) A(8 ; 210), B(177 ; 14), C(88 ; 312) et D(86 ; 222).

74 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la droite (AB) est parallèle à la droite *d*.

a) A(5 ; –10), B(7 ; –2) et *d* d'équation $4x - y + 5 = 0$

b) A(91 ; –280), B(277 ; 830) et *d* d'équation $6x - y - 2 = 0$

c) A(0 ; 1), B(3 ; 1) et *d* d'équation $6y - 4x + 1 = 0$

d) A(13351 ; 17630), B(–7432 ; 5754) et *d* d'équation $y = \frac{4}{7}x$

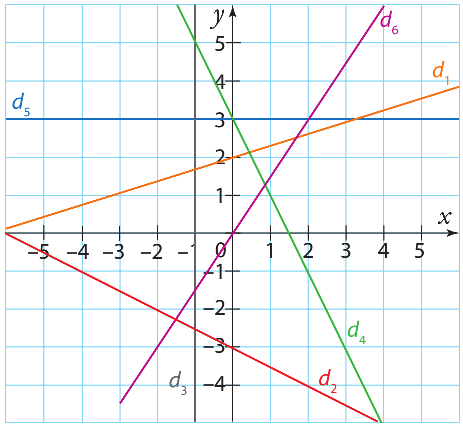
75 Algo & Prog Que fait l'algorithme, écrit en **PYTHON**, suivant ?

```
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
if xA==xB :
    print("La droite est verticale.")
else :
    m=(yB-yA)/(xB-xA)
    print("Le coefficient directeur de la droite est :",m)
```

76 Algo & Prog Justifier que le programme écrit en **PYTHON** suivant donne une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (AB) passant par des points A et B donnés.

```
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
xB=float(input("xB="))
yB=float(input("yB="))
a=yB-yA
b=xA-xB
c=-xA*yB+xB*yA
print("a=",a)
print("b=",b)
print("c=",c)
```

77 Déterminer les équations réduites des droites représentées ci-dessous.



78 Dans un repère orthonormé, tracer les droites dont les équations réduites sont données ci-dessous.

a) $y = -\frac{3}{4}x + 2$ **b)** $y = \frac{x}{3} + 1$ **c)** $x = -2$

d) $y = 3x - 4$ **e)** $y = 2$ **f)** $y = \frac{1}{4}x - 2$

Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

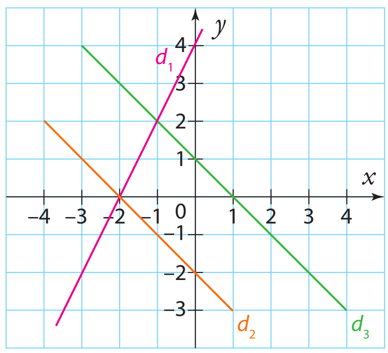
79 Résoudre les systèmes suivants par la méthode votre choix (ou la plus adaptée).

a) $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ -2x + 5y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ -2x + 5y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 2 \end{cases}$

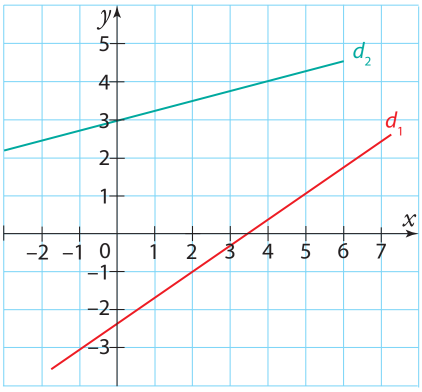
80 À l'aide de la représentation graphique ci-dessous, donner les solutions des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x - 2 \end{cases}$



Exercices d'entraînement

81 Déterminer les équations des deux droites tracées et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.



82 Déterminer par le calcul l'intersection des deux droites dont les équations sont données dans chacun des cas suivants.

a) $2x - 3y - 1 = 0$ et $-4x + 3y + 2 = 0$

b) $-3x + 2y + 1 = 0$ et $x + 3y - 3 = 0$

c) $x - y + 1 = 0$ et $-3x + 3y - 2 = 0$

d) $2x - y + 1 = 0$ et $-6x + 3y - 3 = 0$

83 Déterminer deux entiers dont la différence est 8 et dont la somme est 36.

84 Déterminer deux entiers dont la différence est 7 et dont la différence de leurs carrés est 21.

85 Chloé possède dans sa tirelire 20 pièces de monnaie. Certaines ont une valeur de 2 euros et d'autres une valeur de 1 euro. À l'aide de la totalité de ses 20 pièces, elle s'offre un cadeau valant 36 euros.

Combien de pièces de chaque sorte Chloé a-t-elle dans sa tirelire ?

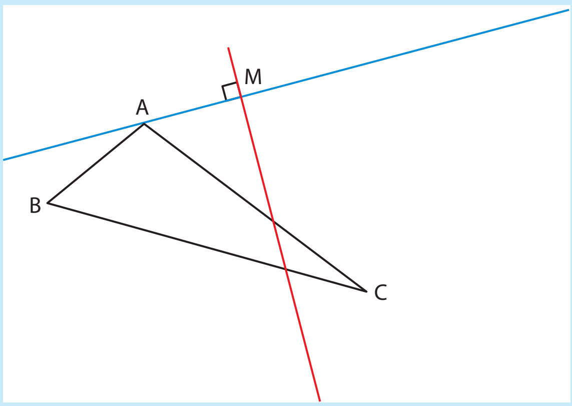
86 Une entreprise reçoit une première facture d'électricité de 3 020,55 euros. Le détail de la facture montre une consommation de 2 166 kWh durant les heures creuses et de 4 691 kWh pendant les heures pleines. Le mois suivant la facture s'élève à 1 551,15 euros pour une consommation de 2 484 kWh en heures creuses et de 1 629 kWh en heures pleines.
Déterminer le prix du kWh en heures creuses et en heures pleines.

Travailler autrement

En groupe

87 On considère un triangle ABC. TICE

On cherche l'ensemble des points M tels que la droite perpendiculaire à (AM) en M coupe le segment [BC].



Problèmes ouverts

88 **1.** Peut-on trouver deux entiers distincts a et b tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ ?}$$

2. Peut-on trouver trois entiers distincts a, b et c tels que :

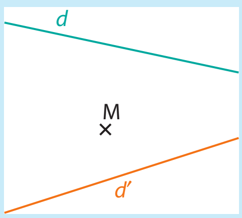
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \text{ ?}$$

3. Peut-on trouver quatre entiers distincts a, b, c et d tels que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1 \text{ ?}$$

Et ainsi de suite …

89 Est-il possible de tracer la droite qui passe par le point M donné et par le point O intersection des deux droites d et d' (sans prolonger les droites bien sûr) ?



90 Théorème de Pappus

Histoire des Maths

On considère les droites d'équations réduites $y = x$ et $y = -3$.
On place sur la première droite les points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1 et 4.
Puis sur la deuxième droite on place les points D, E et F d'abscisses respectives 1, 4 et 7.

1. Déterminer des équations cartésiennes des droites (BF) et (CE).
2. Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (BF) et (CE).
3. Déterminer des équations cartésiennes des droites (AF) et (CD).
4. Déterminer les coordonnées du point N intersection des droites (AF) et (CD).
5. Déterminer des équations cartésiennes des droites (AE) et (BD).
6. Déterminer les coordonnées du point P intersection des droites (AE) et (BD).
7. Démontrer que les points M, N et P sont alignés.

Remarque Cette propriété est vraie quelle que soit la position des points A, B et C sur une droite et des points D, E et F sur une autre droite.

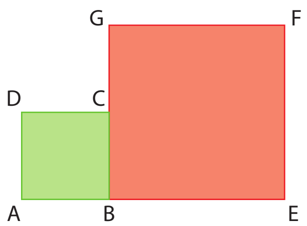
91

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–3 ; 5), B(9 ; 2) et C(2 ; 0)

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Montrer que le point C n'appartient pas à la droite (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection M de cette droite (d) avec la droite (AB).
5. Déterminer l'abscisse du point d'intersection P de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

92 Carrés

Dans le repère (A ; B, D), ABCD est un carré de côté 1 et BEFG est un carré d'arête a.



1. Déterminer des équations cartésiennes des droites (CE), (DF) et (AG) en fonction de a.
2. Démontrer qu'elles sont concourantes en un même point K dont on donnera les coordonnées.

93 Les longueurs des côtés d'un triangle

ABC est un triangle rectangle en C d'aire 8,64 cm^2 tel que AB = 6. On note AC = b et BC = a les longueurs de ces côtés.

1. Donner la valeur du produit ab.
2. Calculer la somme $a^2 + b^2$.
3. À l'aide des identités remarquables, donner les valeurs de $(a + b)^2$ et de $(a - b)^2$
4. En déduire les valeurs de $a + b$ et de $a - b$.
5. Conclure en donnant les longueurs de tous les côtés de ce triangle.

94 Spectacles

Pour Noël, Zoé a reçu un bon de 400 euros utilisable à la Maison de la Danse, une salle de spectacles. La programmation propose 20 concerts à 16 euros le concert et 40 spectacles de ballets à 12 euros le ballet. On note x le nombre de concerts et y le nombre de ballets qu'elle pourra voir.

A. Autant de concerts que de ballets

Passionnée par les deux types de spectacles, Zoé voudrait assister à autant de ballets que de concerts.

1. Déterminer l'équation qui lie x et y si Zoé dépense la totalité de son bon d'achat.
2. Expliquer pourquoi Zoé ne pourra pas assister à autant de ballets que de concerts si elle veut tout dépenser.
3. Dans un repère orthonormé, construire la représentation graphique de la droite ayant cette équation
4. Déterminer les points de cette représentation qui ont des coordonnées entières
5. Choisir pour Zoé la combinaison qui lui permettra d'assister presque à autant de concerts que de ballets.

B. Davantage de ballets que de concerts

Zoé change d'avis et voudrait assister à deux fois plus de ballets que de concerts

1. Que faut-il tracer de plus sur le graphique pour répondre à la question ?
2. Quelles seraient les solutions possibles ?

95 Soldes

Medhi part faire les boutiques durant les soldes. Il achète dans un même magasin deux tee-shirts et un jean pour 120 euros. La semaine suivante, il reçoit un sms du magasin pour des ventes privées : réduction de 50 % pour les tee-shirts et de 30 % pour les jeans. Il décide donc de faire des cadeaux à sa mère et ses sœurs et achète 6 tee-shirts et 2 jean qu'il paye 174 euros.
Quelle somme ces ventes privées lui ont-elles fait économiser ?

96 Perdu dans le désert

Pour aller de son palais à son aéroport, un émir voyage toujours à la même vitesse moyenne sur son autoroute au milieu du désert. Selon que son chauffeur augmente ou diminue sa vitesse moyenne de 20 km/h, il gagnerait 2 minutes ou perdrait 3 minutes.
Déterminer à quelle distance de l'aéroport se trouve le palais de l'émir.

Exercices d'approfondissement

97 Mobile ou immobile?

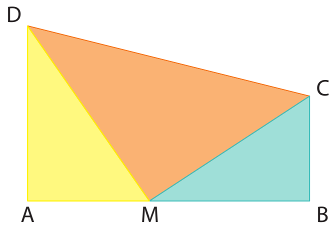
On considère un segment [AB] et un point C n'appartenant pas à [AB]. On place le point C' sur la demi-droite [CA) tel que : C'A = 6 CA. Le point K est le milieu du segment [BC'] et le point M est l'intersection des droites (CK) et (AB).

1. Conjecturer en déplaçant le point C ce qui se passe pour le point M.

2. Prouver votre conjecture en utilisant des équations de droites.

98 Histoire d'aires

ABCD est un trapèze rectangle avec AB = 8, AD = 5 et BC = 3. Pour tout point M du segment [AB], on note x la distance AM.



1. Déterminer les aires des triangles AMD et MBC en fonction de x.

2. Donner l'aire du trapèze ABCD et en déduire l'aire du triangle DMC en fonction de x

3. Soient les fonctions f_1, f_2 et f_3 qui à tout x associent respectivement les aires des triangles AMD, MBC et DMC. Construire les courbes représentatives de ces trois fonctions dans un même repère

4. Graphiquement, peut-on trouver un point M tel que AMD et DMC aient la même aire ? Et pour AMD et MBC ? Et pour DMC et MBC ?

5. Démontrer par le calcul les trois résultats précédents.

99 L'automobiliste et le cycliste

Deux localités A et B sont distantes de 50 km. A 8h, une automobiliste part de A, elle arrive en B à 8h50, s'y repose pendant une heure et revient à la même vitesse qu'à l'aller. À 8h30, un cycliste part de B vers A à une vitesse de 15 km/h. Les mouvements sont supposés uniformes. On se propose d'étudier les croisements de l'automobiliste et du cycliste.

A. Une solution graphique

1. Tracer un repère.

> **Coup de pouce** Prendre comme unités :
> 1 cm pour 30 minutes en abscisses et 1 cm pour 10 km en ordonnées.

2. Représenter graphiquement la distance qui sépare l'automobiliste de la localité A en fonction de l'heure et la distance qui sépare le cycliste de la localité A.

3. Lire sur le graphique les instants où l'automobiliste et le cycliste se croisent, et à quelles distances de A se produisent ces croisements

B. Une solution algébrique

1. Déterminer les équations réduites des droites tracées sur le graphique.

2. En déduire les instants où l'automobiliste et le cycliste se croisent, et à quelles distances de la localité A se produisent ces croisements.

100 Tangente à un cercle

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère le cercle de centre O et de rayon 1. On place sur ce cercle un point quelconque M de coordonnées (a ; b). On cherche à déterminer l'équation réduite de la droite tangente au cercle au point M en fonction de a et de b, c'est-à-dire la droite qui coupe le cercle en un seul point et qui est perpendiculaire au rayon en ce point. On appelle H et K les points d'intersection de cette tangente respectivement avec l'axe des abscisses et celui des ordonnées.

1. Montrer que : $a^2 + b^2 = 1$

2. À l'aide du triangle OMH, montrer que l'abscisse du point H est $\frac{1}{a}$.

3. De même dans le triangle OMK, montrer que l'ordonnée du point K est $\frac{1}{b}$.

4. Déterminer alors l'équation réduite de la tangente en M au cercle unité.

101 Terrain carré

Didier possède un jardin carré qui est bordé par une grande allée, de largeur constante et de surface 464 mètres carrés. Cette allée borde le jardin intérieurement. Quand il se promène autour de son jardin, Didier remarque une différence de 32 mètres entre le parcours effectué sur le bord extérieur du jardin et celui effectué sur le bord intérieur de l'allée. Déterminer la surface totale du jardin de Didier.

102 Baleines en promenade

En plein océan, deux baleines nageaient tranquillement en ligne droite à une vitesse de 8 km/h. Tout à coup, l'une d'elles décida d'accélérer et partit alors à 10 km/h sans changer de direction. Puis, finalement elle se ravisa et fit demi-tour pour retrouver sa compagne, qui pendant ce temps n'avait changé ni de vitesse, ni de direction.
Sachant que les deux baleines se sont séparées à 9h15 et se sont retrouvées à 10h, déterminer à quelle heure la première baleine a effectué son demi-tour.

103 Coefficient directeur et vitesse

Physique Chimie

Un cycliste part en randonnée. Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue en fonction du temps. Les graduations se sont effacées mais sauriez-vous classer les parcours de 1 à 5 de la plus grande à la plus petite vitesse ?

Vers la 1re

Orientation

104 Spécialité Maths

ABCD est un carré.
On cherche où sont les points M tels que les triangles ABM et BCM ont la même aire.

1. Quand M est à l'intérieur du carré, déterminer où doivent se trouver tous les points M pour que les aires soient égales

2. Quand M est à l'extérieur du carré, on se place dans le repère (A, B, D) et on note M(x ; y)

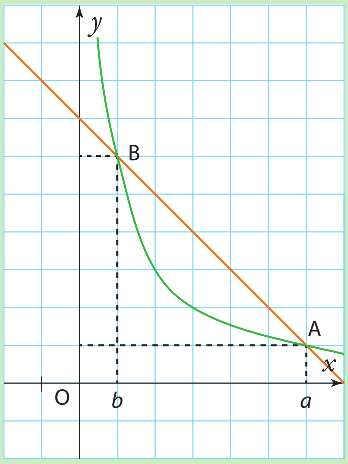
a) Démontrer que les aires sont égales si et seulement si $y^2 = (1 - x)^2$

b) En déduire que l'ensemble cherché est la réunion de deux droites

c) Construire cet ensemble.

105 Spécialité Maths

Sur l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, on place deux points A et B d'abscisses respectives a et b strictement positives.



1. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) en fonction de a et de b.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses et avec celui des ordonnées.

106 Spécialité Maths

On considère le système suivant.

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3 \\ -3x^2 + 2y = -5 \end{cases}$$

1. En posant $X = x^2$, résoudre le système avec les inconnues X et y.

2. En déduire les solutions du système avec les inconnues x et y.

3. Dans chacune des équations, isoler y et en déduire une interprétation graphique des solutions de ce système.

4. En utilisant la même méthode, résoudre le système :

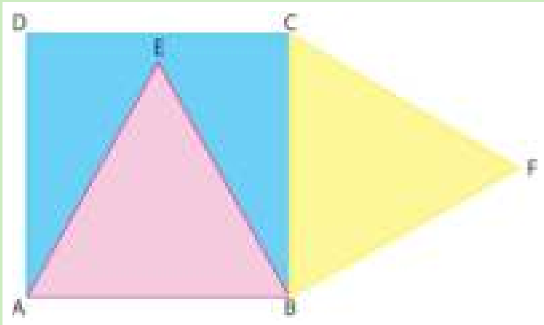
$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} - 2y = 1 \\ -\dfrac{2}{x} + 3y = 1 \end{cases}$$

et interpréter graphiquement ses solutions.

107 Spécialité Maths

ABCD est un carré, ABE est un triangle équilatéral à l'intérieur du carré et BCF est un triangle équilatéral à l'extérieur du carré.

Démontrer que les points D, E et F sont alignés .



108 STL - STI2D - STMG-ST2S

Deux particules α et β sont animées chacune d'un vecteur vitesse $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$.
On suppose de plus qu'à l'instant $t = 0$, les particules sont respectivement en A et en B.
On définit la droite d_A par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{v}_A$ et la droite d_B par l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{BN} = t\vec{v}_B$ où t est un réel correspondant au temps.

A. Première collision

A(2 ; 1), B(1 ; 3), $\vec{v}_A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de t.

2. Déterminer les coordonnées du point N en fonction de t.

3. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle les points M et N sont confondus ?

4. Que peut-on en déduire sur la collision des deux particules ?

B. Deuxième collision

A(5 ; 4), B(–1 ; 7), $\vec{v}_A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

1. Reprendre les questions précédentes et montrer qu'il y a collision.

2. Déterminer en quel point celle-ci a lieu et quand.

C. Généralisation

1. Montrer qu'il y a collision entre les deux particules si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AB} = t(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$.

2. Vérifier la validité de ce critère dans les deux cas précédents.

Travaux pratiques

TICE — Raisonner, Communiquer — 20 min

1 Équation diophantienne

On se pose la question suivante : « Est-il toujours possible de trouver des points à coordonnées entières sur une droite pour pouvoir la tracer plus précisément ? »

1. Soit l'équation $2x - 3y = 4$ de l'activité **2** p. 164.

a) Expliquer pourquoi y doit être pair.

b) Trouver alors quelques points à coordonnées entières vérifiant cette équation.

2. On considère maintenant la droite d'équation réduite $y = \frac{x}{3} - 1$

a) Comment choisir x pour que y soit un entier ?

b) Donner alors quelques points à coordonnées entières appartenant à cette deuxième droite.

3. De même, on considère la droite d'équation réduite $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$.

a) Peut-on choisir x de la même manière que pour la droite précédente ?

b) Que doit-on alors faire pour trouver des points à coordonnées entières ?

c) Donner des points appartenant à cette troisième droite.

4. Enfin, on considère la droite d'équation réduite $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$, tester plusieurs valeurs entières de x, est-ce que pour certaines d'entre elles, y est également entier ?

Remarque On démontre que pour qu'une équation de la forme $ax + by = c$ ait des solutions entières, il faut que c soit un multiple du PGCD de a et b. (Cette équation a été étudiée par *Diophante d'Alexandrie,* mathématicien grec du IIIe siècle)

TICE — Modéliser, Représenter — 30 min

2 Le crible de Iouri Matiassevitch

A ▸ Construction à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. À l'aide de GeoGebra, construire la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère avec $-4{,}5 < x < 4{,}5$ et $-1 < y < 25{,}5$ ainsi qu'une unité de 1 sur l'axe des abscisses (distance)

2. Construire deux curseurs a et b avec un pas de 1 (incrément) et avec $2 < a < 10$ et $-10 < b < -2$

3. Placer les points A et B sur la parabole et d'abscisses respectives a et b.

4. Tracer la droite (AB).

5. Étudier l'intersection de ces droites (AB) avec l'axe des ordonnées.
Faire varier les curseurs. Que peut-on conjecturer ?

B ▸ Étude d'un cas particulier

1. On prend A d'abscisse 2 et B d'abscisse –6, quelles sont leurs ordonnées ?

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

3. Donner l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) ?

4. Le résultat obtenu confirme-t-il votre conjecture ou non ?

Iouri Mattiassevitch, né en 1947, est un mathématicien russe qui a résolu le 10e problème de Hilbert.

C ▸ Généralisation

1. On note a et b les abscisses des points A et B, donner leurs ordonnées, en fonction de a et de b.

2. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB), en fonction de a et de b.

3. Donner son ordonnée à l'origine, en fonction de a et de b.

4. Conclure .

Remarque On peut ainsi atteindre tous les nombres sur l'axe des ordonnées sauf les nombres premiers.

Démonstration TICE Chercher, Raisonner 30 min

3 Famille de droites

On considère la famille constituée par les droites d'équations réduites : $mx - y + m - 1 = 0$ où m est un réel quelconque donné.

A ▸ Construction avec un logiciel de géométrie dynamique

1. À l'aide de GeoGebra, construire un curseur m avec un pas de 0,1.
2. Dans la fenêtre de saisie, écrire l'équation cartésienne des droites en fonction de m.
3. Faire varier la valeur du paramètre m.
4. Émettre des conjectures sur ces droites. Sont-elles verticales ? Sont-elles horizontales ? Ont-elles un point commun ?
5. Trouve-t-on toutes les droites possibles ?
6. Démontrer votre conjecture sur les droites possibles.
7. Démontrer qu'elles ont toutes un point commun.

B ▸ Une famille de droites particulières

On considère la famille des droites d'équations cartésiennes : $(m^2 - 1)x - y + m = 0$
1. Trouve-t-on toutes les droites ? (on étudiera leur vecteur directeur).
2. Ces droites ont-elles un point commun ?

Remarque Quand on prend un pas très petit pour m on constate que toutes ces droites « enveloppent » une courbe, qui ici est une hyperbole.

TICE Représenter, Raisonner 30 min

4 Optimisation

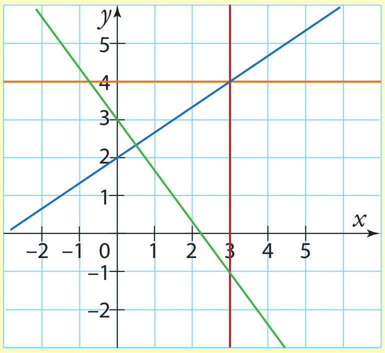
On veut organiser un pont aérien pour transporter un minimum de 1 600 personnes et au moins 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types A et B.
La compagnie dispose d'un maximum de 12 avions de type A et de 9 avions de type B.
Un avion de type A peut transporter un maximum de 200 personnes et de 6 tonnes de bagages.
Un avion de type B peut lui transporter un maximum de 100 personnes et de 15 tonnes de bagages.
On appelle x le nombre d'avions de type A et y le nombre d'avions de type B, où x et y sont des entiers naturels.
1. Montrer que la traduction de l'énoncé donne les inéquations suivantes.
$0 \leqslant x \leqslant 12$, $0 \leqslant y \leqslant 9$, $2x + y \geqslant 16$ et $2x + 5y \geqslant 30$
2. Dans un repère orthonormé, représenter les droites d'équations :
a) $x = 0$ **b)** $x = 12$ **c)** $y = 0$
d) $y = 9$ **e)** $2x + y = 16$ **f)** $2x + 5y = 30$
3. Hachurer le polygone appelé « polygone des contraintes » qui représente l'ensemble des solutions de toutes les inéquations de la question **1.** On vérifiera que le point (9 ; 6) est solution mais que le point (6 ; 2) ne l'est pas.
4. La location d'un avion de type A coûte 400 000 euros et celle d'un avion de type B coute 100 000 euros. Exprimer, en centaines de milliers d'euros, le coût, noté C, de la location pour x avions de type A et y avions de type B.
5. On cherche comment réaliser le transport à moindre coût, c'est-à-dire, parmi les couples solutions du polygone, un couple correspondant à la plus petite dépense possible.
Sur quelle droite se trouvent les couples correspondant à une dépense de 1 600 000 euros ?
a) La tracer sur la figure précédente.
b) Le transport peut-il être réalisé avec cette somme ?
6. Répondre aux mêmes questions avec une dépense de 4 000 000 euros.
7. Pour une dépense de k centaines de milliers d'euros, comment sont toutes les droites correspondantes à la dépense ?
8. En déduire, à l'aide du graphique, le nombre d'avions de chaque type qu'il faut louer pour que le coût soit minimal.
Quel est alors ce coût ?

En autonomie

1 Etudier graphiquement les équations de droites

QCM

Pour les exercices 109 à 112, on utilisera la figure ci-suivante.



109 La droite verte a pour équation réduite :

a $y = \frac{4}{3}x + 3$ b $y = -\frac{3}{4}x + 3$

c $y = -3x + 2$ d $y = -\frac{4}{3}x + 3$

110 La droite bleue a pour équation cartésienne :

a $3x - y + 2 = 0$ b $-2x - 3y + 6 = 0$

c $2x - 3y + 6 = 0$ d $x - 2y + 4 = 0$

111 La droite rouge a pour équation cartésienne :

a $y - 3 = 0$ b $x - 3 = 0$

c $-3x + y = 0$ d $x - 3y = 0$

112 La droite orange a pour équation réduite :

a $y = 4x$ b $x = 4y$

c $x = 4$ d $y = 4$

113 ✶ Tracer les droites d'équations réduites $y = -2x + 1$ et $y = \frac{1}{2}x - 3$.

114 ✶ Tracer les droites d'équations réduites $y = -\frac{5}{7}x + 3$ et $y = 3x - 4$

115 ✶✶ Tracer les droites d'équations cartésiennes $-2x - 3y + 2 = 0$ et $3x + 4y - 1 = 0$.

2 Étudier les équations de droites par le calcul

QCM

116 Le coefficient directeur de la droite (AB) où A(−3 ; −1) et B(2 ; −2) est :

a -3 b 5 c $\frac{1}{5}$ d $-\frac{1}{5}$

117 Le coefficient directeur de la droite (FG) où F(−2 ; 3) et G(1 ; 3) :

a vaut 0. b vaut 3. c n'existe pas. d vaut −1

118 On considère la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 3 = 0$.
Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

119 On considère la droite d'équation cartésienne $-3x + 5y + 6 = 0$.
Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

120 On considère la droite d'équation cartésienne $4x + 2y - 8 = 0$.
Un vecteur directeur de cette droite a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ b $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ c $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ d $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

121 ✶ Déterminer l'équation réduite de la droite passant par les points A(−2 ; 3) et B(1 ; −2).

122 ✶ Déterminer l'équation réduite de la droite de coefficient directeur $\frac{5}{4}$ et passant par le point D(−1 ; −3).

123 ✶✶ Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) passant par les points A(−1 ; −3) et B(4 ; −2).

124 ✶✶ Déterminer une équation cartésienne de la droite (EF) passant par les points E(−2 ; 5) et F(−3 ; −1).

125 On considère trois points A(2 ; −3), B(−1 ; 2) et C(1 ; −2).

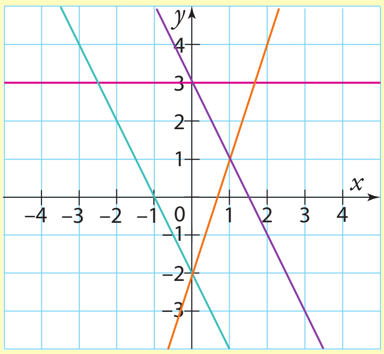
1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AB) passant par le point C.

3 Résoudre des systèmes d'équations

QCM

Pour les exercices 126 à 129, on utilisera la figure ci-suivante.



126 Pour chercher l'intersection des droites orange et violette, on doit résoudre le système :

a $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 3x \end{cases}$ b $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

c $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$ d $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

127 Le point d'intersection des droites rose et violette a pour coordonnées :

a (3 ; 0) b (0 ; –2) c (1 ; 1) d (0 ; 3)

128 Le système $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y = -3x - 2 \end{cases}$ admet :

a une infinité de solutions.
b une solution unique.
c aucune solution.
d deux solutions.

129 Le système $\begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases}$ admet :

a une infinité de solutions.
b une solution unique.
c aucune solution.
d deux solutions.

130 Le système $\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ admet :

a une solution unique.
b aucune solution.
c deux solutions.
d trois solutions.

131 ✶ Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations cartésiennes respectives $-2x - y + 5 = 0$ et $3x - y - 1 = 0$.

132 ✶ Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations cartésiennes respectives $\frac{2}{3}x - y - 1 = 0$ et $-x - 2y + 4 = 0$.

133 ✶✶ On considère les points A(–2 ; 3), B(1 ; –3), C(–3 ; –1) et D(2 ; –3)

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

134 ✶✶ Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–3 ; –1), B(6 ; 2), C(3 ; 5) et D(–3 ; 3).

1. a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b) Vérifier en calculant leur déterminant qu'ils sont colinéaires.

c) Que peut-on en déduire sur la nature du quadrilatère ABCD ?

2. Déterminer les coordonnées des points F et H, milieux respectifs des segments [CD] et [AB].

3. a) Déterminer, par le calcul, les équations cartésiennes des droites (AD) et (BC).

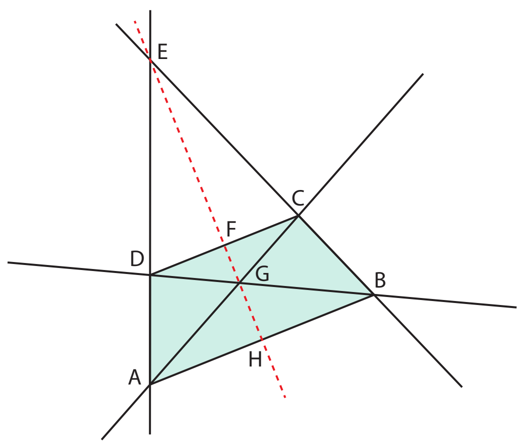
b) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point E, intersection des droites (AD) et (BC).

4. De même, déterminer, par le calcul, les équations cartésiennes des droites (BD) et (AC), ainsi que les coordonnées de leur point d'intersection G.

5. Déterminer, par le calcul, l'équation cartésienne de la droite (EF).

6. En déduire que les points E, F, G et H sont alignés.

Remarque ↪ Act 3 p. 164 pour l'animation sur GeoGebra. TICE



PARTIE
4

Fonctions

René Descartes
(1596-1650)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

L'idée d'une relation entre deux objets est très ancienne. Sous l'Antiquité, on calculait déjà le prix d'un ensemble d'objets en fonction de leur nombre et on établissait des tables afin d'étudier plus facilement certaines sciences, telles que l'architecture ou l'astronomie.

Descartes, dans sa *Géométrie*, fait le lien entre deux quantités variables x et y.

↪ Dicomaths p. 349

En 1673, Leibniz introduit le terme de *fonction*.

↪ Dicomaths p. 351

Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai appris les notions de fonction, de variable, d'antécédent, d'image, de courbe représentative d'une fonction et j'ai découvert les notations $f(x)$ et $x \longmapsto f(x)$.
J'ai étudié les fonctions linéaires et les fonctions affines.

En 2de, je vais découvrir de nouvelles fonctions de références (carré, inverse, racine carrée, cube), résoudre des équations et des inéquations par différentes méthodes. Je vais également étudier les variations et les extremums d'une fonction.

Jean Bernoulli
(1667 – 1748)

Leonhard Euler
(1707-1783)

Jean Le Rond d'Alembert
(1717 – 1783)

Jean Bernoulli donne une première définition de la notion de fonction d'une grandeur variable comme étant « une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».
↪ Dicomaths p. 347

Euler classifie les fonctions et distingue les notions de fonctions continues et discontinues.
↪ Dicomaths p. 350

D'Alembert utilise les fonctions de plusieurs variables, ainsi que les calculs différentiel et intégral, pour modéliser des phénomènes physiques.
↪ Dicomaths p. 348

En 1re générale, j'étudierai le concept de dérivée et ses applications, ainsi que les fonctions exponentielles et trigonométriques.

En 1re technologique, j'étudierai le second degré et la dérivation pour des fonctions polynômes de degré 2 ou 3.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **physique-chimie**, à modéliser la trajectoire d'un projectile, d'un pendule, d'un ressort.
- En **SES**, à résoudre des problèmes de gestion (représenter un coût, optimiser une production, prévoir des ventes, etc.).
- En **géographie**, à modéliser le relief du territoire d'un pays.
- En **SVT**, à dater certains fossiles en utilisant la radioactivité, à étudier une population.

8

Des architectes ont utilisé des fonctions pour créer ces formes particulières de l'éclairage bleu du pont de Meydan (Dubaï, Émirats Arabes Unis).

Généralités sur les fonctions, fonctions de référence

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe représentative de fonction pour savoir si un point appartient à cette courbe.	31 à 35 p. 201
Résoudre graphiquement des équations ou inéquations à l'aide de courbes représentatives.	1 et 2 p. 197-198 1 2 p. 197 4 5 p. 198 38 40 p. 201
Modéliser une situation avec une fonction.	61 62 p. 203
Conjecturer la parité d'une fonction.	3 p. 199 6 7 p. 199 44 p. 202
Connaître des fonctions de référence (fonction carré, fonction inverse, fonctions affines, fonction racine carrée, fonction cube).	45 à 55 p. 202
Résoudre des équations et des inéquations avec des fonctions de référence.	4 p. 199 8 9 p. 199 52 p. 202
Algo & Prog • Calculer une valeur approchée de la longueur d'une portion de courbe. • Trouver une valeur approchée d'une solution d'une équation (par balayage, par dichotomie).	 TP 3 p. 212 TP 4 p. 213

1 exercices résolus | 16 exercices corrigés | 14 exercices non corrigés | TP1 travaux pratiques

ZOOM SUR…

Logique & Démonstration
p. 194, 195, 209

Algo & Prog
p. 203, 212, 213

TICE
p. 212

Les autres disciplines
p. 204, 205, 207, 208

Problème ouvert
p. 207

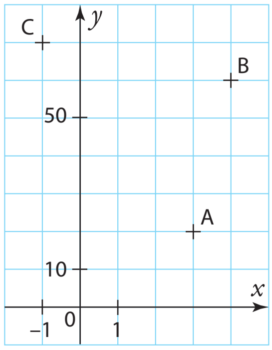
Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-15

1. Lire des coordonnées

On considère le repère ci-contre.

Lire les coordonnées des points A, B et C.



2. Lire graphiquement des images et des antécédents

On considère une fonction f dont on donne ci-contre la représentation graphique.
Lire graphiquement :

a) l'image de 8.

b) l'image de 4.

c) les antécédents éventuels de 1.

3. Calculer des images

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5(x - 1)(2 - x)$.
Calculer l'image de :

a) 10 **b)** –3 **c)** 0

4. Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2x - 4 = 7$ **b)** $(3x + 6)(x - 7) = 0$ **c)** $\dfrac{2x+1}{x+10} = 0$

d) $\sqrt{x} = 15$ **e)** $\dfrac{1}{x} = 8$ **f)** $x^2 = 10$

5. Utiliser un programme de calcul

On considère le programme de calcul ci-contre.

- Choisir un nombre.
- Retrancher 5 à ce nombre.
- Mettre le résultat précédent au carré.
- Ajouter 3 au résultat précédent.

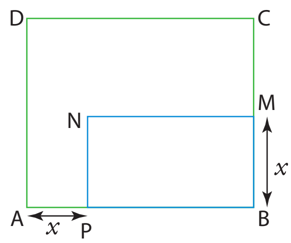
1. Quel sera le résultat final si l'on choisit 9 comme nombre de départ ?

2. Donner l'expression du résultat en fonction de x si l'on choisit x comme nombre de départ.

6. Modéliser avec une expression algébrique

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB = 6 et AD = 5.

M est un point de [BC], P le point de [AB] tel que AP = BM.
BMNP est un rectangle.
On pose x = BM.
Exprimer l'aire du rectangle BMNP en fonction de x.

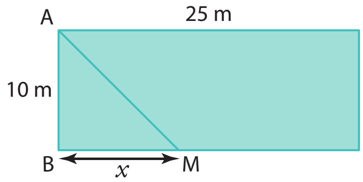


Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

Activités

1 Modéliser une situation avec une fonction

30 min



Une piscine a pour dimensions 25 m × 10 m.
Alice se situe au point A et elle veut rejoindre l'autre côté de la piscine en ligne droite à la nage.

1. Quelle est la distance minimale que peut parcourir Alice ?
Et la distance maximale ?

2. On note x la distance entre le coin B de la piscine et le point M où elle touche le bord situé en face.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

b. Justifier que la distance entre A et M est donnée par la formule $\sqrt{x^2+100}$.
Cela permet de définir la fonction f qui à la distance variable x, avec $x \in [0 ; 25]$, associe la longueur AM. On a $f(x)=\sqrt{x^2+100}$.

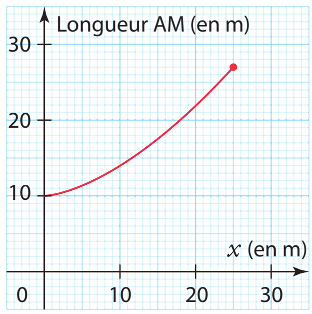
c. Quelle distance Alice parcourt-elle si $x = 12$?
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f.
Les trois affirmations d'Alice suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $x = 10$, je parcours environ 14 mètres.

b. Si $x \in [15 ; 25]$, je suis sûre de parcourir plus de 15 mètres.

c. Il y a une valeur de x pour laquelle je peux parcourir 20 mètres.



Cours 1 p. 192

2 Découvrir la notion d'équation de courbe

30 min

1. Tracer un repère orthonormé.

2. a) Tracer en rouge l'ensemble de tous les points dont l'ordonnée est égale au double de l'abscisse.

Remarque Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient l'équation $y = 2x$ pour tout réel x.

Il s'agit de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

b) Le point R(250 ; 501) appartient-il à cet ensemble ?

3. a) Dans le repère, placer un maximum de points, en vert, dont l'ordonnée est égale au carré de l'abscisse.
L'ensemble de tous ces points est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto x^2$.

b) Le point S(15 ; 225) appartient-il à cet ensemble ?

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 + x - 3$.

a) Le point T(2 ; 7) appartient-il à la représentation graphique de la fonction h ?

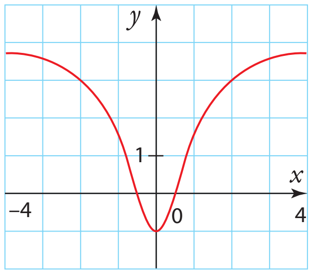
b) Placer dans le repère un maximum de points, en bleu, appartenant à la représentation graphique de la fonction h.

Cours 2 p. 193

30 min

3 Découvrir la notion de parité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - \dfrac{5}{1 + x^2}$ dont on donne ci-contre la courbe représentative dans un repère.



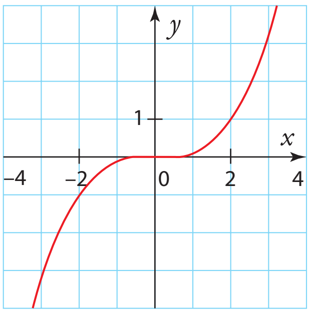
1. Erwann dit que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = f(-x)$.
A-t-il raison ou tort ? Justifier.

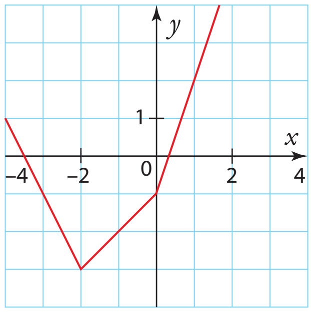
2. Comment cela se traduit-il graphiquement pour la courbe de la fonction f ?
Une telle fonction est dite paire.

3. Dans un livre, Erwann lit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est impaire si, pour tout réel x, la fonction f vérifie $f(-x) = -f(x)$.
Compléter le tableau de valeurs ci-contre sachant que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ est impaire.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	14			0	9	-3	

4. Parmi les deux courbes représentatives de fonctions suivantes, une seule est celle d'une fonction impaire : laquelle ?



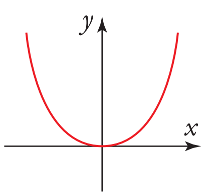


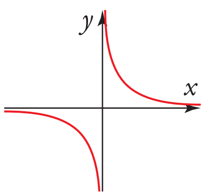
Cours 3 p. 194

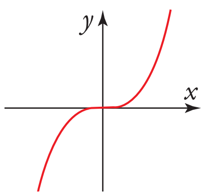
15 min

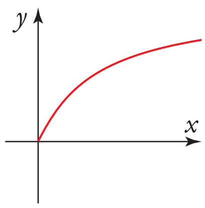
4 Découvrir les fonctions de référence

Louane a retrouvé dans son cahier de seconde plusieurs schémas de courbes représentatives de fonctions. Elle se rappelle que ce sont des fonctions de référence : la fonction carré, la fonction inverse, la fonction cube et la fonction racine carrée.
Retrouver à quelle fonction, à quel ensemble de définition et à quelle expression littérale correspond chacune des courbes représentatives des fonctions de référence suivantes.

A)


B)


C)


D)


1. fonction carré
2. fonction inverse
3. fonction cube
4. fonction racine carrée

a) définie sur $[0 ; +\infty[$
b) définie sur $\mathbb{R}$
c) définie sur $\mathbb{R}^*$
d) définie sur $\mathbb{R}$

I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
II) $g(x) = \sqrt{x}$
III) $h(x) = x^3$
IV) $l(x) = x^2$

Cours 4 p. 195

Cours

1 Notion de fonction

Définitions Fonction et ensemble de définition

Soit D un ensemble de nombres réels, par exemple un intervalle.

Définir une fonction f sur D revient à associer à chaque réel x de D un réel *et un seul*, appelé image de x.

D est l'ensemble de définition de la fonction : c'est l'ensemble des nombres pour lesquels il existe une image par la fonction.

Remarques

- Soit $a \in D$. L'image du nombre a par la fonction f est unique et se note $f(a)$.
  $f(a)$ se lit « f de a ».
- S'il n'est pas donné, l'ensemble de définition d'une fonction peut être obtenu par analyse de son expression (en cherchant par exemple des valeurs que x ne peut pas prendre), par analyse du contexte lié à cette fonction (comme des distances par exemple).
- Modéliser une situation par une fonction f, c'est mettre en lien deux grandeurs en choisissant une variable (notée en général x, t ou n) dans un ensemble de définition, puis en définissant les valeurs associées $f(x)$ à chacune des valeurs prises par la variable (par exemple par une formule, un tableau ou une courbe).
- **Vocabulaire** : si b est **l'image** de a, on a l'égalité $f(a)= b$ et a est appelé **un antécédent** de b par la fonction f.
- Un nombre peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents.

Définition Expression algébrique d'une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et $x \in D$.

L'expression algébrique d'une fonction donne directement $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 6)^2$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$: on peut calculer les images de n'importe quel nombre réel par la fonction g. Par exemple, on a $g(2) = (2 - 6)^2 = (-4)^2 = 16$.

Remarques

- On peut parfois écrire $g : x \mapsto (x - 6)^2$ qui se lit « la fonction g qui à x associe $(x - 6)^2$ ».
- Il n'existe pas toujours d'expression à une fonction.

Définition Tableau de valeurs

Soit f une fonction, D son ensemble de définition et x un élément de D.

Un tableau de valeurs d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), les images $f(x)$ qui leur sont associées.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto 3x + 5$ admet le tableau de valeurs ci-contre.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-1	2	5	8	11	14

Remarques

- Un tableau de valeurs n'est pas unique : il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne).
- Il s'obtient facilement avec une calculatrice (voir le TP 1) ou un tableur.

2 Courbe représentative d'une fonction

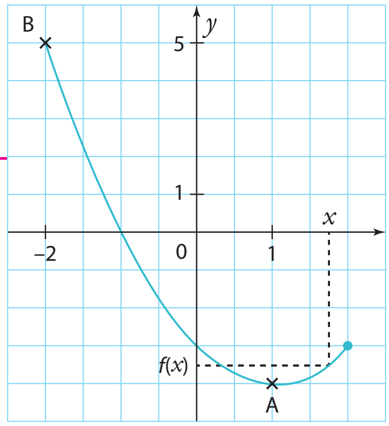
Définition Courbe représentative d'une fonction

On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D.

Dans un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'égalité $y = f(x)$.

Cette courbe est la courbe représentative de la fonction f.

Remarque Autrement dit, cela signifie que l'ordonnée y d'un point d'abscisse x de la courbe représentative de la fonction f vaut $f(x)$: la courbe est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ où x parcourt l'ensemble de définition D de la fonction f.



Exemples

① On considère la fonction f définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

La courbe représentative de la fonction f est la courbe d'équation $y = (x-1)^2 - 4$ tracée ci-contre.

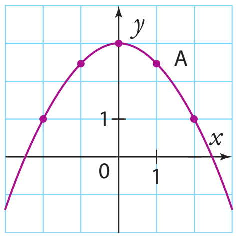
$f(1) = (1-1)^2 - 4 = -4$, donc l'image de 1 est -4 : la courbe passe par le point A(1 ; −4).

Le point B(−2 ; 5) est sur la courbe. Cela veut dire que $f(-2) = 5$.

② Soit la fonction h définie par $h(x) = 3 - 0{,}5x^2$ pour tout réel x.

On a $h(0) = 3 - 0{,}5 \times 0^2 = 3$ donc le point de coordonnées A(0 ; 3) appartient à la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de h.

On peut, de la même façon, calculer et consigner les coordonnées de plusieurs points dans un tableau.



x	−2	−1	−0,5	0	0,5	1	2
$y = h(x)$	1	2,5	2,875	3	2,875	2,5	1

La courbe de la fonction h passe par les points que l'on a obtenus.

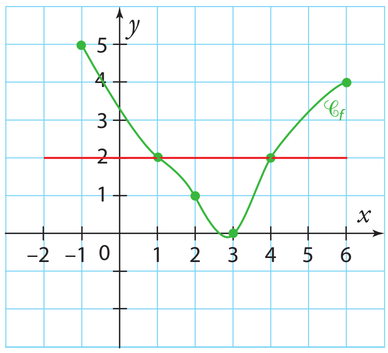
③ On peut résoudre de manière approchée une équation ou une inéquation en utilisant la courbe représentative d'une fonction.

Par exemple, on considère une fonction f définie sur $[-1\,;6]$ dont on donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

De manière graphique :

– les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont 1 et 4 ;

– l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ est $S = [1\,;4]$.



Exercices résolus 1 et 2 p. 197-198

Remarque On peut tracer la courbe d'une fonction sur l'écran de la calculatrice (voir le TP 1).

Cours

3 Fonction paire et fonction impaire

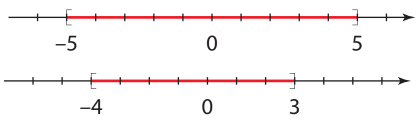
Définition Ensemble symétrique par rapport à 0

Un ensemble de ℝ (par exemple un intervalle) est dit symétrique par rapport à 0 si, pour tout nombre de l'ensemble, son opposé appartient à l'ensemble.

Exemples

L'intervalle [–5 ; 5] est symétrique par rapport à 0.

L'intervalle [–4 ; 3] n'est pas symétrique par rapport à 0 (par exemple –4 est dans l'intervalle mais pas son opposé qui est 4).



Définition Fonction paire

Une fonction *f*, définie sur un ensemble de définition *D* symétrique par rapport à 0, est dite paire si, pour tout réel x de *D*, on a $f(-x) = f(x)$.

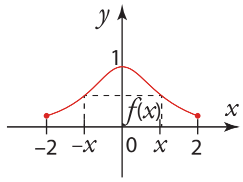
Propriété Symétrie de la courbe d'une fonction paire

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Démonstration

Soit x un nombre de l'ensemble de définition et le point de coordonnées $(x\,;f(x))$ de la courbe représentative de *f*. On veut montrer que son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées qui a pour coordonnées $(-x\,;f(x))$ appartient aussi à la courbe de *f*.

L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, donc $-x$ appartient à l'ensemble de définition. Comme $f(-x) = f(x)$ pour tout x, le point de coordonnées $(-x\,;f(-x))$ est le même que le point de coordonnées $(-x\,;f(x))$. Or le point de coordonnées $(-x\,;f(-x))$ est un point de la courbe de *f* car l'ordonnée est égale à l'image de l'abscisse. Donc le point de coordonnées $(-x\,;f(x))$ appartient à la courbe de *f*.



Remarque Si la courbe d'une fonction semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on peut conjecturer que la fonction est paire.

Exemple

La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = x^2$ est paire. En effet, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pour tout réel x.

↪ Exercice résolu 3 p. 199

Définition Fonction impaire

Une fonction *f*, définie sur un ensemble de définition *D* symétrique par rapport à 0, est dite impaire si, pour tout réel x de *D*, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété Symétrie de la courbe d'une fonction impaire

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque Si la courbe d'une fonction semble symétrique par rapport à l'origine, on peut conjecturer que la fonction est impaire.

Exemple

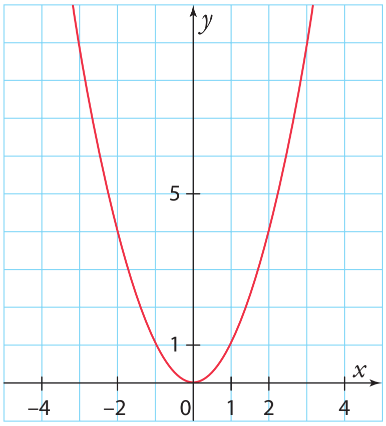
La fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = x^3$ est impaire. En effet, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. De plus, $f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x^3 = -f(x)$ pour tout réel x.

↪ Exercice résolu 3 p. 199

4 Quelques exemples de fonctions de référence

Une fonction de référence est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

a Fonction carré



Définition Fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Elle associe à chaque nombre réel son carré.

Un tableau de valeurs de la fonction carré est :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

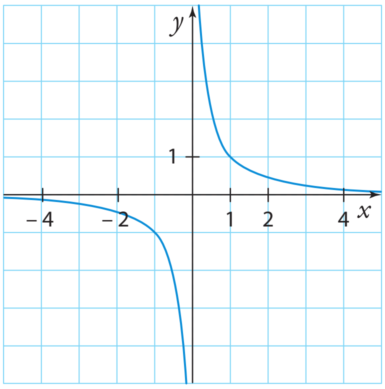
Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.
Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « paraboles ».

Propriété Parité de la fonction carré

La fonction carré (définie sur $\mathbb{R}$) est paire.

Remarque La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce que l'on peut observer graphiquement.

b Fonction inverse



Définition Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Elle associe à chaque nombre réel non nul son inverse.

Un tableau de valeurs de la fonction inverse est :

x	– 2	– 1	– 0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	– 0,5	– 1	– 2	$\times$	2	1	0,5

Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.
Sa courbe fait partie d'une famille de courbes appelées « hyperboles ».

Propriété Parité de la fonction inverse

La fonction inverse (définie sur $\mathbb{R}^*$) est impaire.

Démonstration

L'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout réel x non nul, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

Remarque La courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine, ce que l'on peut observer graphiquement.

Cours

c Fonction affine

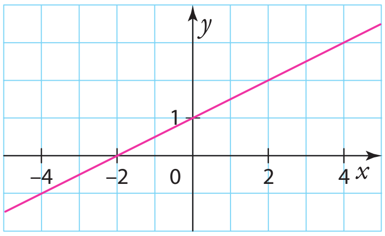
Définition Fonction affine

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $mx + p$ (avec m et p réels).

Remarque Les fonctions affines sont représentées graphiquement par des droites.

Exemple

$f : x \mapsto 0{,}5x + 1$ est une fonction affine avec $m = 0{,}5$ et $p = 1$.
Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.
L'équation réduite de cette droite est $y = 0{,}5x + 1$.



d Fonction racine carrée

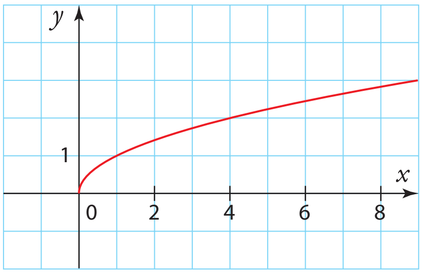
Définition Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Elle associe à chaque nombre réel positif sa racine carrée.

Un tableau de valeurs de la fonction racine carrée est :

x	0	1	2	3	4	5	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	2	$\sqrt{5} \approx 2{,}24$	3

Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.



e Fonction cube

Définition Fonction cube

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Elle associe à chaque nombre réel son cube.

Un tableau de valeurs de la fonction cube est :

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–8	–1	0	1	8

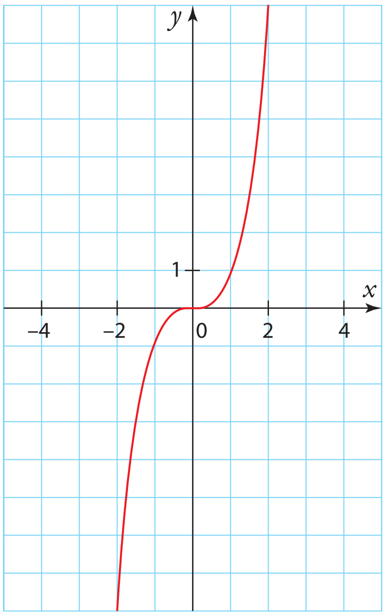
Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-contre.

Propriété Parité de la fonction cube

La fonction cube (définie sur $\mathbb{R}$) est impaire.

Remarque La courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine, ce que l'on peut observer graphiquement.

↪ Exercice résolu 4 p. 199



Exercices résolus

1 Résoudre graphiquement des équations

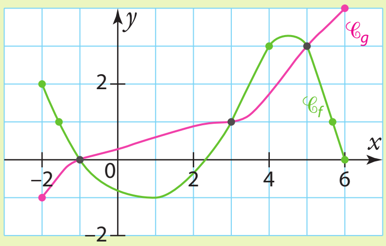
↪ Cours 2 p. 193

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2 ; 6]$ dont voici ci-dessous les courbes représentatives.

1. **À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre les équations suivantes.**

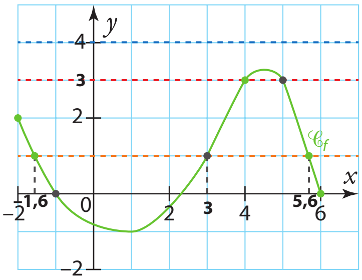
a) $f(x) = 3$ **b)** $f(x) = 1$ **c)** $f(x) = 4$

2. **À l'aide des courbes représentatives de f et g, résoudre $f(x) = g(x)$.**



Solution

1.



a) On trace la droite d'équation $y = 3$ puis on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec cette droite. 1

Les solutions sont 4 et 5. 2

On peut noter cela $S = \{4 ; 5\}$. 3

b) On trace la droite d'équation $y = 1$ puis on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec cette droite. 2

Donc $S = \{-1{,}6 ; 3 ; 5{,}6\}$. 4

c) Pour résoudre $f(x) = 4$, on trace la droite d'équation $y = 4$.

On remarque qu'il n'y a pas de point d'intersection avec cette droite (aucun nombre n'a pour image 4 par la fonction f).

Donc $f(x) = 4$ n'a pas de solution. 5

On peut noter $S = \varnothing$.

2. On lit les abscisses des points d'intersection éventuels des deux courbes représentatives : ce sont les solutions. 6

Les solutions sont -1 ; 3 et 5.

Conseils & Méthodes

1 Pour résoudre l'équation $f(x) = 3$, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de coordonnées $(0 ; 3)$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = 3$.

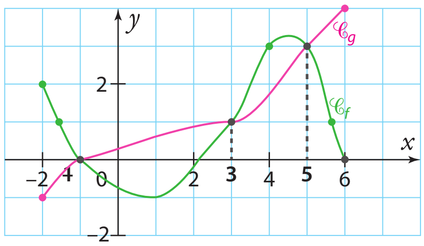
2 Les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe.

3 Résoudre l'équation $f(x) = 3$ revient à chercher les antécédents éventuels de 3.

4 Par lecture graphique, les solutions sont approchées.

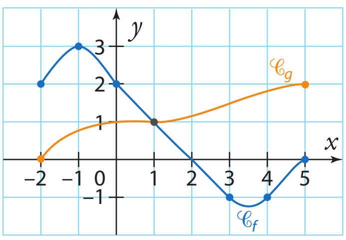
5 Il peut ne pas y avoir de solution à une équation.

6 Pour résoudre $f(x) = g(x)$, on repère les points d'intersection des courbes représentatives de f et g.



À vous de jouer !

Pour les exercices 1 à 3 on considère les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-2 ; 5]$.



1 Résoudre.

a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = g(x)$

2 Résoudre.

a) $f(x) = 1$ **b)** $g(x) = 3$

3 Résoudre.

a) $g(x) = 2$ **b)** $f(x) = -1$

↪ Exercices 38 et 39 p. 201

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-16

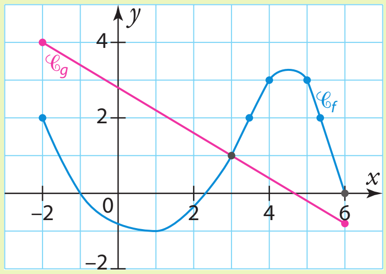
2 Résoudre graphiquement des inéquations

Cours 2 p. 193

On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2 ; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.

1. À l'aide de la courbe représentative de f, résoudre :
a) $f(x) \geqslant 3$ **b) $f(x) < 2$**

2. À l'aide des courbes représentatives de f et de g, résoudre $f(x) \leqslant g(x)$.



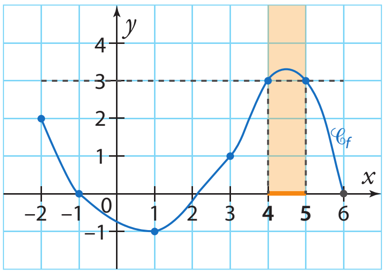
Solution

1. a) On repère les points de la courbe qui se situent sur ou au-dessus de la droite d'équation $y = 3$. **1** **2**

On voit que c'est le cas quand x se situe entre 4 (inclus) et 5 (inclus) c'est-à-dire dans l'intervalle $[4 ; 5]$. **3**

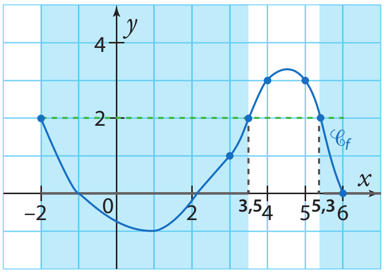
L'ensemble des solutions est donc $[4 ; 5]$.

On peut noter cela $S = [4 ; 5]$.



b) On repère les points de la courbe qui se situent en dessous de la droite d'équation $y = 2$. On voit que c'est le cas lorsque x se situe entre -2 (exclu) et 3,5 (exclu) ou lorsque x se situe entre 5,3 (exclu) et 6 (inclus), c'est-à-dire lorsque $x \in]-2 ; 3{,}5[\cup]5{,}3 ; 6]$. **4**

On en déduit que $S \in]-2 ; 3{,}5[\cup]5{,}3 ; 6]$.



Conseils & Méthodes

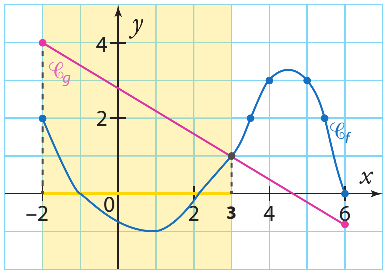
1 Pour résoudre $f(x) \geqslant 3$, on commence par tracer la droite d'équation $y = 3$.

2 Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe sur ou au-dessus ou en dessous de la droite suivant l'inéquation.
Ici l'inéquation est $f(x) \geqslant 3$, donc on cherche les points de la courbe sur et au-dessus de la droite.

3 Il faut bien prendre en considération chacune des bornes des intervalles pour savoir si elle appartient ou non à l'ensemble des solutions.

4 S'il y a plusieurs nombres ou intervalles représentant des solutions, on utilise le symbole $\cup$.

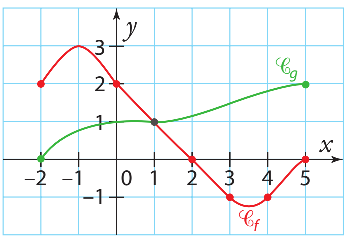
2. Pour résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on repère les points de la courbe de la fonction f situés en dessous de la courbe de g ou à son intersection.



On voit que c'est le cas quand x se situe entre -2 (inclus), et 3 (inclus), c'est-à-dire dans l'intervalle $[-2 ; 3]$. On en déduit que $S = [-2 ; 3]$.

À vous de jouer !

Pour les exercices **4** et **5**, on considère les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-2 ; 5]$.



4 Résoudre.
a) $f(x) \geqslant 2$ **b)** $f(x) \leqslant g(x)$

5 Résoudre.
a) $f(x) \geqslant -1$ **b)** $f(x) > 0$

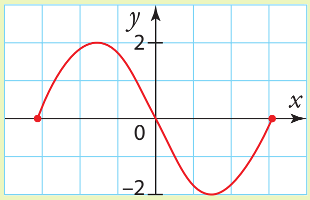
Exercices 40 à 43 p. 201-202

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-16

3 Conjecturer la parité d'une fonction

Cours 3 p. 194

On considère une fonction *f* dont on donne ci-contre la courbe représentative.
Conjecturer la parité de la fonction *f*.



Solution

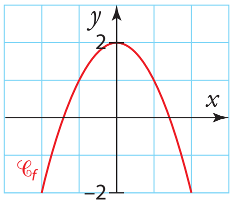
D'après la symétrie de la courbe par rapport à l'origine, on peut conjecturer que la fonction f est impaire. **1**

Conseils & Méthodes

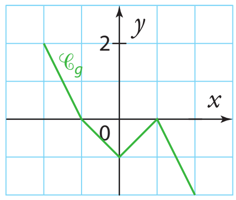
1 Une symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées permet de supposer que la fonction est paire, une symétrie de la courbe par rapport à l'origine permet de supposer que la fonction est impaire.

À vous de jouer !

6 On considère la fonction *f* dont on donne la courbe représentative ci-contre. Conjecturer la parité de *f*.



7 On considère la fonction *g* dont on donne la courbe représentative ci-contre. La fonction *g* semble-t-elle paire ? impaire ?



Exercice 44 p. 202

4 Résoudre graphiquement des inéquations avec des fonctions de référence

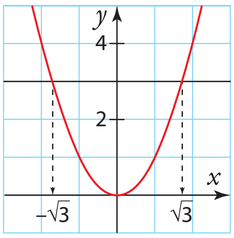
Cours 4 p. 195

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.

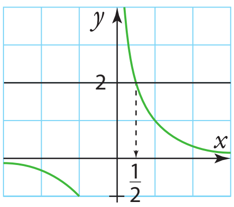
a) $x^2 > 3$ **b)** $\dfrac{1}{x} < 2$ **c)** $\sqrt{x} \leqslant 2$

Solution

a) Les solutions de $x^2 = 3$ sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. **1**
On repère les points au-dessus de la droite d'équation $y = 3$ dans le schéma. On a donc :
$S =]-\infty\,;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}\,;+\infty[$.



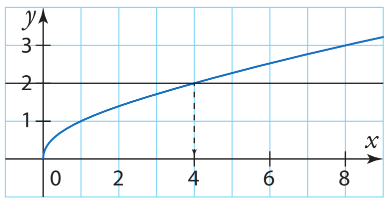
b) La solution de $\dfrac{1}{x} = 2$ est $\dfrac{1}{2}$. **2**
On repère les points en dessous de la droite d'équation $y = 2$ dans le schéma. On a donc
$S =]-\infty\,;0[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.



Conseils & Méthodes

1 On résout d'abord $x^2 = 3$ (voir le chapitre 4).
2 On résout d'abord $\dfrac{1}{x} = 2$ (voir le chapitre 4).
3 On résout d'abord $\sqrt{x} = 2$ (voir le chapitre 4).

c) La solution de $\sqrt{x} = 2$ est $x = 4$. **3**



On repère les points sur et en dessous de la droite d'équation $y = 2$ dans le schéma. On a donc $S = [0\,;4]$.

À vous de jouer !

8 Résoudre dans ℝ.

a) $x^2 \leqslant 2$ **b)** $\sqrt{x} > 5$ **c)** $x^2 \geqslant 9$

9 Résoudre dans ℝ.

a) $x^2 \geqslant 4$ **b)** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{3}$ **c)** $\sqrt{x} \leqslant 100$

Exercice 52 p. 202

Apprendre à apprendre

10 Chercher deux chapitres dans le manuel dont les exercices résolus sont utilisés dans ce chapitre.

11 Construire, de mémoire, une fiche permettant de résumer la définition et les propriétés de la fonction inverse, puis comparer avec le cours.

Questions - Flash

Diapo — Diaporama Ressource professeur

12 Calculer $f(2)$ pour la fonction f définie par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

13 h est définie par $h(x) = (2x - 6)(2x + 1)$.
Calculer $h(3)$.

14 On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = -7x + 9$.
Calculer :
a) $k(10)$ **b)** $k(-4)$ **c)** $k\left(\dfrac{3}{7}\right)$ **d)** $k(\sqrt{5})$

15 Voici un tableau de valeurs de la fonction m. Par la fonction m, donner :
a) l'image de -5. **b)** un antécédent de -1.

x	2	-5	10	-1
$m(x)$	-1	4	-1	-5

16 Quel est l'antécédent de 5 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 10x$?

17 On donne $f(3) = 5$. Déterminer les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de la fonction f.

18 Le point A$(-1 ; 2)$ appartient à la courbe représentative de la fonction k.
Compléter : $k(\ldots) = \ldots$.

19 Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(1) = 4$ et $f(-1) = -3$.
La fonction f est-elle impaire ?

20 On considère la fonction carré $h : x \mapsto x^2$.
Déterminer par h les images de 2 ; -6 et 100.

21 Calculer.
a) 1^3 **b)** $(10^4)^3$ **c)** $(-3)^3$
d) $\sqrt{36}$ **e)** $\sqrt{1}$ **f)** $\sqrt{10^4}$

22 On considère la fonction inverse $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Déterminer les éventuels antécédents par i de 100 ; -1 et 0,2.

Image et antécédents

AP

23 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$.
Calculer les images des nombres suivants.
a) 2 **b)** -3 **c)** 0 **d)** $\sqrt{5}$

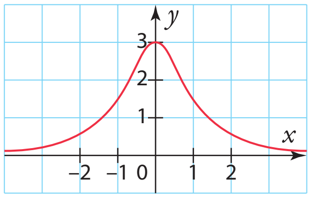
24 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3x - 8$.
Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants.
a) 3 **b)** -5 **c)** $\dfrac{1}{2}$ **d)** 0,1

25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{4}{3}x + 5$.
1. Calculer $f(6)$ et $f(7)$.
2. Quelle est l'image de -5 par f ?

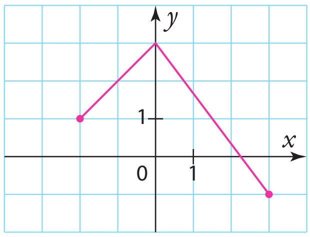
26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (3 - 2x)(5x - 1)$.
Déterminer les antécédents de 0 par f.

27 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \dfrac{4x + 2}{1 + x^2}$.
1. A-t-on $f(3) = 1$?
2. Les images de 2 et de 0 par f sont-elles égales ?
3. Déterminer l'image de $\dfrac{1}{2}$ par f.
4. Déterminer les antécédents de 0 par f.

28 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Par lecture graphique, déterminer :
a) l'image de -1 par f.
b) l'image de 0 par f.
c) le (ou les) antécédent(s) de 1 par f.
d) le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.



29 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-2 ; 3]$.
Par lecture graphique, déterminer :
a) $g(0)$.
b) les images de 1 et -2 par g.
c) les antécédents éventuels de -1 ; 1 et 5.



30 Soit la fonction u définie par $u(n) = 4 + 3n$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer, si possible, les images par u de 2 ; -4 et $\dfrac{1}{2}$.
2. Calculer les antécédents éventuels par u de 40 et 147.

Équation d'une courbe

31 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. a) Calculer l'image de 10 par f.
b) Le point A(10 ; 1 005) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse –2 qui appartient à $\mathscr{C}_f$.

32 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.
1. Calculer l'image de 2.
2. En déduire les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de g.
3. Proposer les coordonnées d'un deuxième point appartenant à cette courbe.

33 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point $M\left(\frac{2}{3} ; 5\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Calculer l'abscisse du point T appartenant à $\mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de T soit nulle.

34 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
1. Le point A(0 ; 5) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'abscisse du point B appartenant à $\mathscr{C}_f$ tel que l'ordonnée de B soit nulle.

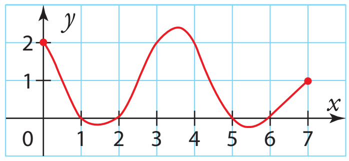
35 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Écrire l'équation de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Les points suivants appartiennent-ils à $\mathscr{C}_f$?
a) A(1 ; 1) **b)** $B\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ **c)** C(–3 ; – 30) **d)** $D(-10^2 ; -170)$

36 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 6$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point A(–1 ; 9) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse 4 qui appartient à $\mathscr{C}_f$.
3. Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est égale à 33 ? Si oui, donner leurs coordonnées.

37 **1.** Soit la fonction h définie sur [0 ; 5] par :
$h(x) = 4 - (x - 3)^2$.
a) Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de 0,5.
b) Tracer un repère et placer plusieurs points appartenant à la courbe de h.
Prendre comme unité 1 cm pour l'axe des abscisses et 1 cm pour l'axe des ordonnées.
c) Tracer à main levée la courbe de la fonction h.
2. Reprendre la question **1.** avec la fonction $h : x \mapsto \dfrac{3}{x+1}$ sur [0 ; 5].

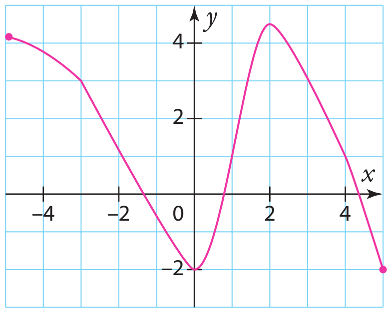
Résolution graphique d'équations et inéquations

38 Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 7].
Estimer les solutions des équations suivantes.



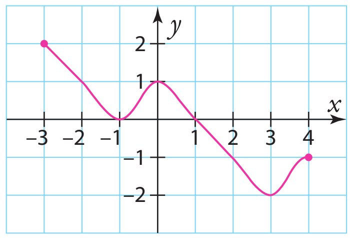
a) $f(x) = 2$ **b)** $f(x) = 0$ **c)** $f(x) = -1$ **d)** $f(x) = 1$

39 Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur [–5 ; 5].
Estimer les solutions des équations.



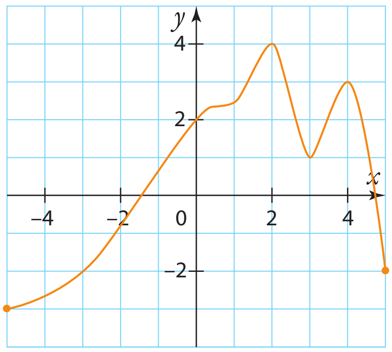
a) $g(x) = 2$
b) $g(x) = -3$
c) $g(x) = 4$
d) $g(x) = -1$

40 Voici la courbe représentative d'une fonction k définie sur [–3 ; 4].
Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes.



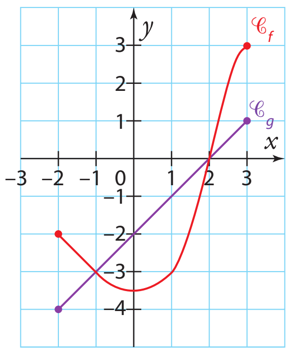
a) $k(x) = 1$
b) $k(x) = 0$
c) $k(x) > -1$ **d)** $k(x) < 0$
e) $k(x) \geqslant -2$ **f)** $k(x) \geqslant 2$

41 Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur [–5 ; 5].
Estimer les solutions des inéquations suivantes.



a) $h(x) \geqslant 0$
b) $h(x) < -4$
c) $h(x) < -2$
d) $h(x) > 2$

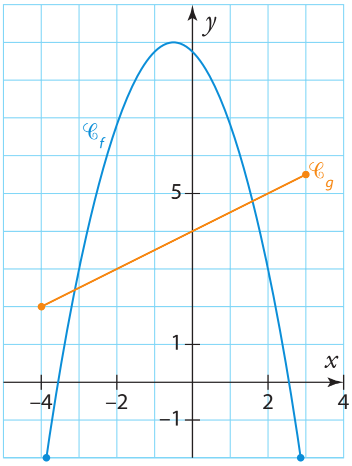
42 Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur [–2 ; 3].
Résoudre graphiquement les équations et inéquations.



a) $g(x) = f(x)$
b) $g(x) \leqslant f(x)$
c) $f(x) < -3$
d) $g(x) < 2$
e) $f(x) \geqslant -2$

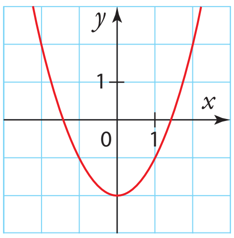
Exercices d'application

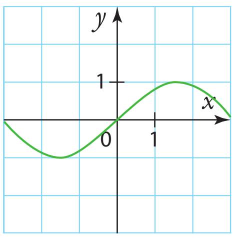
43 Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-4\ ;3]$.
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
a) $f(x) = 8$
b) $f(x) < 0$
c) $f(x) = g(x)$
d) $f(x) \leqslant g(x)$

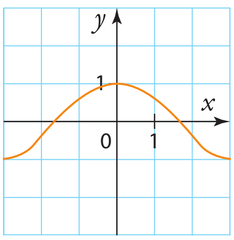


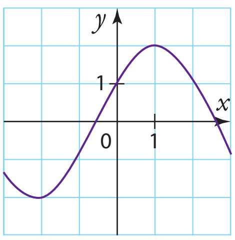
Fonctions paires et impaires

44 Pour chacune des courbes ci-dessous, dire si elle semble être la courbe représentative d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire.

a)


b)


c)


d)


Fonctions de référence

45 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré.
a) 4 **b)** –3 **c)** 10^3 **d)** $\frac{1}{2}$

46 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction carré.
a) 6 **b)** 64 **c)** –2 **d)** 10^6

47 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction inverse.
a) 5 **b)** 10^2 **c)** –3 **d)** $\frac{1}{4}$

48 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction inverse.
a) 6 **b)** 1 **c)** –2 **d)** 10^4

49 Déterminer si possible les images des nombres suivants par la fonction racine carrée.
a) 4 **b)** 18 **c)** 10^8 **d)** –3

50 Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction racine carrée.
a) 6 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** –5 **d)** 10^2

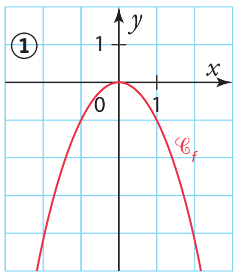
51 Déterminer les images des nombres suivants par la fonction cube.
a) 2 **b)** –3 **c)** 10^4 **d)** $\frac{1}{2}$

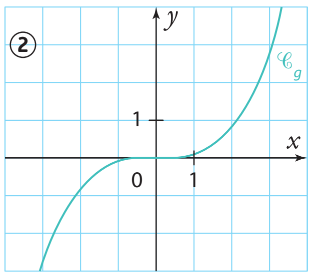
52 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.
a) $x^2 \geqslant 9$ **b)** $x^2 < 5$ **c)** $\frac{1}{x} < 5$
d) $\frac{1}{x} \geqslant -2$ **e)** $\sqrt{x} \leqslant 3$ **f)** $\sqrt{x} > 9$

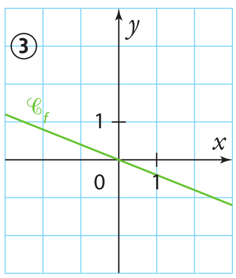
53 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines (préciser m et p de $mx + p$) ?
a) $f : x \mapsto -2x + 8$ **b)** $g : x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$
c) $h : x \mapsto -3 + \frac{1}{x}$ **d)** $i : x \mapsto \frac{2x+8}{4}$

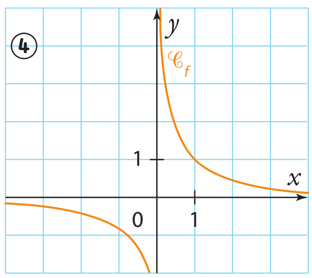
54 Dans un repère, représenter graphiquement les fonctions affines suivantes.
a) $f : x \mapsto -2x + 3$ **b)** $g : x \mapsto \frac{1}{2}x - 4$
c) $h : x \mapsto 2 - x$ **d)** $m : x \mapsto 3x - 3$

55 Indiquer, si possible, à quelle fonction ou famille de fonctions ces courbes vous font penser.









Calculs et automatismes

56 Soit g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty]$ par $g(t) = \frac{5t}{1+t}$.
Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(9)$.

57 Soit $A = 3(x-1)^2 - 12$ et $B = 3(x-3)(x+1)$ pour tout réel x. Développer les expressions A et B.

Ensemble de définition et modélisation

58 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.

1. Résoudre $x-1=0$.

2. De quel(s) nombre(s) ne peut-on pas calculer l'image par f ?

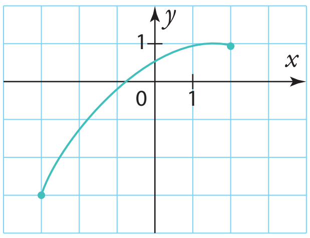
3. En déduire l'ensemble de définition de f.

59 Pour chacune des fonctions dont on donne les expressions ci-dessous, essayer d'établir le plus grand ensemble de définition possible.

a) $f(x)=\dfrac{5+x}{10-x}$ **b)** $g(x)=2\sqrt{x}+3$

c) $h(x)=\dfrac{3x+x^2}{2}$ **d)** $i(x)=4x+\dfrac{1}{x}$

60 Voici la courbe représentative d'une fonction f. Par lecture graphique, déterminer l'ensemble de définition de f.



61 Le prix de l'essence sans plomb est de 1,40 euro le litre. Marius veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre x litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 litres.

La station dans laquelle il se sert ne délivre pas moins de 5 litres.

On considère la fonction P qui à chaque valeur de x associe le prix payé par Marius.

1. D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle x appartient-il ?

2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction P ?

3. Déterminer l'expression algébrique de la fonction P.

62 On considère un rectangle de longueur 7 et de largeur 5.

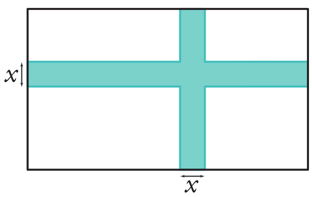
On trace à l'intérieur de celui-ci une croix de largeur x variable comme indiqué ci-dessous.

On s'intéresse à l'aire de la croix bleue.

1. À quel intervalle x appartient-il ?

2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la croix bleue en fonction de x.

3. Avec la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de $\mathscr{A}$ avec un pas de 1.



63 On considère le programme ci-dessous. Algo & Prog

```
x=float(input("Saisir une valeur de x:"))
if x>=-1 and x<=5:
    y=3*x*x-2*x+12
    print("L'image de",x,"par g est",y)
else:
    print("La fonction n'est pas définie en",x)
```

Ce programme permet d'afficher l'image d'un nombre par une fonction g.

Donner $g(x)$ et l'ensemble de définition de g.

64 Soit une fonction r définie par $r(x)=\sqrt{x^2+1}$.

1. Expliquer pourquoi cette fonction peut être définie pour tout nombre réel x.

2. Avec la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de r sur $[-10\ ;\ 10]$ avec un pas de 1.

65 On considère la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{6x+12}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.

1. Qu'est-ce qui pourrait éventuellement poser problème dans le calcul d'une image par cette fonction ?

2. En déduire l'ensemble de définition de g.

Recherche d'antécédents

66 Soit la fonction f définie par $f(t)=2(t+7)^2-4$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Trouver les antécédents de 6 par f.

67 On considère la fonction m définie par $m(x)=\dfrac{2x}{x-5}$ et dont l'ensemble de définition est le plus grand possible.

1. Quel est l'ensemble de définition de m ?

2. Trouver les éventuels antécédents de 6 et de -2 par m.

68 Même exercice que le précédent avec la fonction m définie par $m(x)=\sqrt{x}-1$.

69 **1.** À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction h définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par $h(x)=(3x+1)(5-x)$.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									

2. Déterminer tous les antécédents de 0 par h.

70 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+5$. Algo & Prog

1. Déterminer le ou les antécédents de -2 par f.

2. Écrire un algorithme ou un programme qui :

– demande une valeur b à l'utilisateur ;

– calcule puis affiche le ou les antécédents de b par la fonction f.

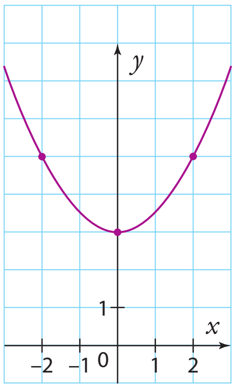
Exercices d'entraînement

71 **1.** Déterminer a et b pour que le tableau ci-dessous soit un tableau de valeurs d'une fonction h définie par $h(x) = x^2 + ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1	0	1	2
$h(x)$	-9	-7	-3	3

2. La fonction h est-elle paire ? impaire ?
3. Déterminer les antécédents de -7 par h.

72 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe ci-dessous.



Sachant que la fonction f a une expression de la forme $f(x) = ax^2 + b$, déterminer les antécédents de 10 par f.

73 **Chimie** La concentration massique C_m d'un soluté est égale à la masse en grammes de soluté par litre de solution (elle s'exprime donc en grammes par litre). Elle se calcule avec la formule $C_m = \dfrac{m}{V}$ où m est la masse en grammes de soluté et V le volume en litre de la solution.
On dissout 10 g de chlorure de sodium (sel) dans un volume V en litre d'eau avec $V \in [0{,}2 ; 0{,}5]$.
1. Écrire la formule donnant la concentration massique $C_m(V)$ du chlorure de sodium en fonction du volume V de la solution.
2. Résoudre $C_m(V) = 30$.
3. Traduire le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

74 Pour tout nombre réel k, la solution de l'équation $x^3 = k$ s'appelle la racine cubique de k et se note $\sqrt[3]{k}$.

Exemple : La racine cubique de 8 est égale à 2 car $2^3 = 8$.
La calculatrice peut en donner une valeur exacte ou approchée en utilisant par exemple l'exposant $\dfrac{1}{3}$: $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}71$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
a) $x^3 = -8$ **b)** $x^3 = 20$ **c)** $x^3 = 10^6$
2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par la fonction cube.
a) 125 **b)** 0 **c)** 20 **d)** 10^9
3. En vous aidant de la courbe de la fonction cube, résoudre les inéquations suivantes.
a) $x^3 \geqslant 8$ **b)** $x^3 < 1$ **c)** $x^3 \leqslant 4$

Courbes et équations

75 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + p$ où p est un nombre.
Trouver p sachant que A(5 ; 22) appartient à la courbe de f.

76 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+6}{1+x}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
1. Le point A(–2 ; 2) appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. B(x_B ; 5) appartient à $\mathscr{C}_g$. Déterminer l'abscisse x_B du point B.

77 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 15$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes du repère.

78 Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $3x^2 + 2y - 4 = 0$.
1. Montrer que le point A(–2 ; –4) appartient à cet ensemble.
2. B appartient à cet ensemble et son abscisse est égale à 0. Calculer l'ordonnée de B.
3. Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction f puis préciser $f(x)$.

79 Montrer que l'ensemble d'équation $yx^2 + y - 1 = 0$ est la courbe d'une fonction h puis préciser $h(x)$.

80 Dans un repère, on considère l'ensemble d'équation $xy = 5$.
1. Le point Z(2 ; 1,5) appartient-il à cet ensemble ?
2. Existe-il un point d'abscisse nulle appartenant à cet ensemble ?
3. Montrer que cet ensemble est la courbe d'une fonction f, puis préciser son ensemble de définition et son expression.

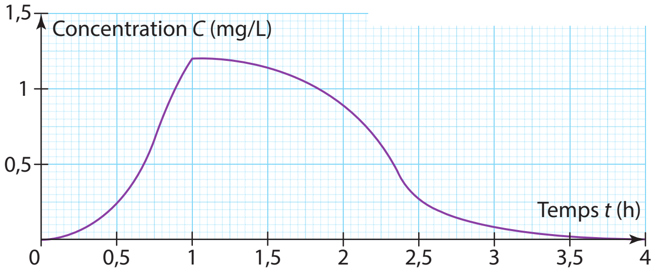
Fonction et nombre entier

81 On étudie le processus p qui à tout entier compris entre 1 et 199 associe son chiffres des dizaines.
1. Donner $p(124)$.
2. Trouver, si possible, un réel x tel que :
• $p(x) = 6$
• $p(x) = 0$
3. Donner le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de 2 par p.

82 Malo a 150 euros sur un compte en banque. Tous les ans, il rajoute 20 euros sur celui-ci.
On note $u(n)$ la somme qu'il a sur son compte l'année numéro n.
Ainsi $u(1) = 150$ et $u(2) = 170$.
1. Calculer $u(4)$.
2. Trouver une formule pour $u(n)$ et préciser les valeurs de n possibles.
3. Déterminer le numéro de l'année où il pourra acheter avec l'argent de son compte une console de jeu qui coûte 350 euros.

Résolution d'équations et inéquations

83 Chimie On a mesuré, en continu pendant quatre heures, la concentration C d'un médicament dans le sang d'un patient. La fonction C est représentée ci-dessous.



1. Quelle est la concentration du médicament dans le sang au bout de 2 h ?

a) environ 0,5 **b)** environ 1
c) environ 1,5 **d)** environ 0,9

2. Laquelle (lesquelles) de(s) (in)équations suivantes a pour solution l'intervalle de temps où la concentration du médicament est au plus égale à 1 ?

a) $C(t) > 1$ **b)** $C(t) = 1$
c) $C(t) < 1$ **d)** $C(t) \leqslant 1$

3. Au bout de combien de temps la concentration dans le sang est-elle de 0,5 mg/L ?

a) ≈ 40 min **b)** ≈ 2 h 20 min **c)** ≈ 0,667 h

4. Ce médicament est jugé efficace quand la concentration dans le sang dépasse 0,75 mg/L.
Quelle est donc sa période d'efficacité ? (Arrondir grossièrement.)

a) jusqu'à 2 h **b)** jusqu'à 4 h
c) dès 45 min **d)** entre 0,75 et 2,2 h

5. Au bout de combien de temps le médicament est-il le plus concentré ?

a) ≈ 1 h **b)** ≈ 1 h 30 min
c) ≈ 1 h 50 min **d)** ≈ 6 h

6. Quelle est alors la concentration du médicament dans le sang en mg/L ?

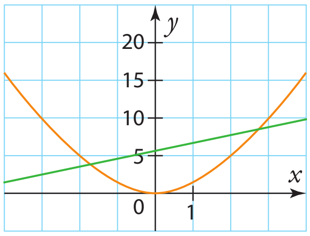
a) ≈ 1 **b)** ≈ 1,2
c) ≈ 1,25 **d)** ≈ 5,8

84 Une fonction f a les propriétés suivantes :
– elle est définie sur $[0 ; 8]$;
– l'équation $f(x) = 3$ a deux solutions : 1 et 3 ;
– l'image de 0 est 1 ;
– l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution $[5 ; 7]$.
Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

85 **1.** Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes d'équations $y = 2x^2 + 2x + 6$ et $y = 2x^2 - 3x + 7$.

2. Même question pour les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2 + 3x}{x}$.

86 On considère les courbes représentatives de la fonction carré, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 6$. Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.

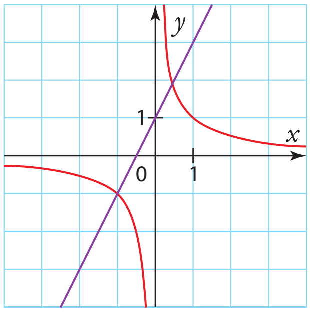


1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.

2. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = x + 6$.

3. a) Développer l'expression $(x - 3)(x + 2)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **2.**

87 On considère les courbes représentatives de la fonction inverse, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$. Elles sont tracées dans le repère ci-contre.

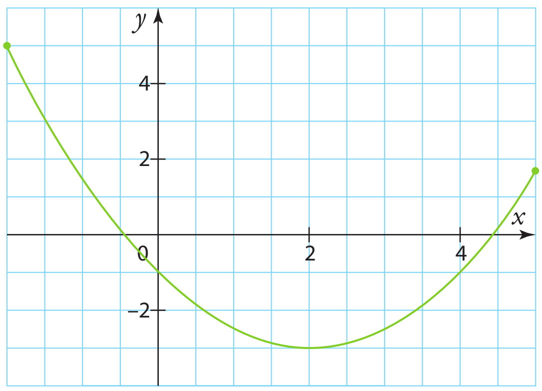


1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.

2. Résoudre graphiquement l'équation $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$.

3. a) Développer l'expression $(2x - 1)(x + 1)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question **2.**

88 On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-2 ; 5]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$.



1. Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation $f(x) = 1$.

2. Voici un tableau de valeurs de la fonction f.

x	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
$f(x)$	0,125	0,38	0,645	0,92	1,205	1,5

a) Donner un encadrement d'une des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
b) Quelle est la précision de cette approximation ?

3. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près, puis au centième près de l'autre solution.

Exercices d'entraînement

89 Sandra a tracé à l'aide de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$ par $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1$.
Elle affirme que l'équation $-0{,}5x^2 - 3x + 1 = 0$ a trois solutions.
1. Que peut-on penser de son affirmation ?
2. Donner un encadrement à 0,1 près de chacune des solutions de cette équation.

90 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 0{,}5(x + 1)^2 - 1$.
1. Construire un tableau de valeurs de f pour x allant de -4 à 3 avec un pas de 1.
2. Tracer dans un repère la courbe représentative de f. Prendre comme unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
3. Résoudre graphiquement $f(x) > 2$.

91 **1.** Tracer dans un même repère les courbes représentatives de la fonction carré f et de la fonction affine $g : x \mapsto 0{,}5x + 1$ sur $[-1 ; 3]$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant g(x)$.

Avec la forme la plus adaptée

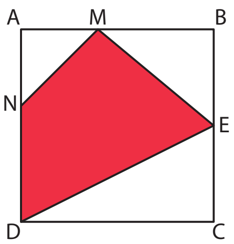
92 Soit f, g, h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$
- $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$

1. Montrer que $f(x)$, $g(x)$, et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme la plus adaptée.
a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et de -6.
b) Calculer les images de 0, de 1 et de $\sqrt{3} - 1$.
c) Trouver les abscisses des points de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f.

93 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)(x + 5)$.
1. Développer $f(x)$.
2. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
a) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
b) Résoudre $f(x) = x + 5$.

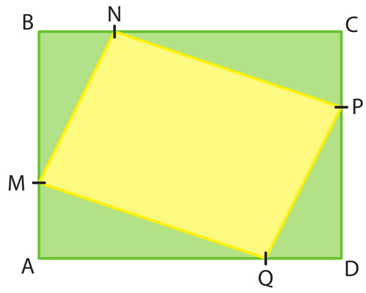
Modélisation et problèmes

94 ABCD est un carré de côté 6.
E est le milieu de [BC].
M est un point du segment [AB] et N est le point du segment [AD] tel que AN = AM. On pose AM = x. On s'intéresse à l'aire rouge.



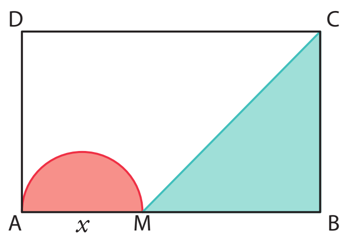
1. À quel intervalle x appartient-il ?
2. Exprimer en fonction de x les aires des triangles AMN et MBE.
3. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}$ de NMED.
4. Construire un tableau de valeurs de $\mathcal{A}(x)$ avec un pas de 0,5 à la calculatrice.

95 On considère un rectangle ABCD de dimensions AB = 6 cm et BC = 8 cm.
Sur le côté [AB], on place un point M quelconque. On considère ensuite les points N sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.
On pose AM = x. On appelle f la fonction qui à x associe la valeur de l'aire de MNPQ.



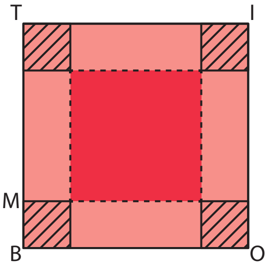
1. AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
3. À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f. Ajuster la fenêtre d'affichage.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire de MNPQ est-elle supérieure ou égale à 24 cm² ?

96 Soit ABCD un rectangle. On place un point M libre sur le segment [AB]. Comme sur la figure ci-contre, on trace un demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC. On note x la distance AM.



Le graphique représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du demi-disque et du triangle.
1. Identifier les courbes de f et de g. Justifier.
2. Retrouver les dimensions du rectangle ABCD.
3. Estimer graphiquement la valeur de x pour que le demi-disque et le triangle aient la même aire, puis en donner une valeur approchée au centième.

97 On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boite sans couvercle.



A. Un cas particulier

1. Construire le patron d'une boite en choisissant BM = 3 cm.

2. Calculer son volume.

3. Peut-on réaliser une boite sachant que BM = 8 cm ? Expliquer.

B. Une fonction

On pose BM = x et on appelle V la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1. Déterminer une expression de la fonction V.

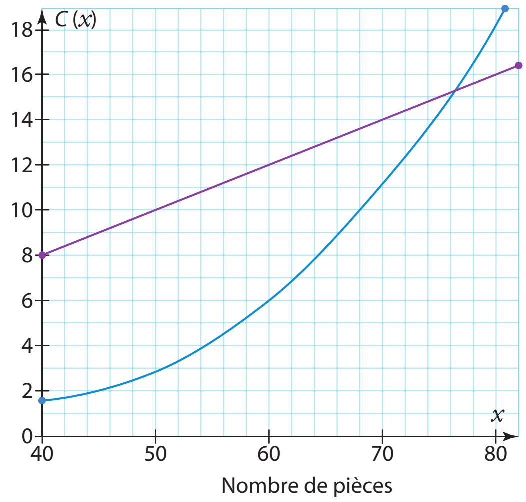
2. Quel est l'ensemble de définition de V ?

3. À l'aide d'une calculatrice, ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction V.

4. Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 cm^3 ?

5. Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ?
Si oui, donner les dimensions d'une boite vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

98 SES Une entreprise fabrique des pièces détachées pour automobiles.
On note x le nombre de pièces fabriquées au cours d'une journée. Le coût de production, en centaines d'euros, de x pièces est noté $C(x)$.
On a représenté en bleu la courbe de la fonction C sur l'intervalle [40 ; 80].



À l'aide du graphique, répondre aux deux questions suivantes.

1. Quel est le coût de production de 50 pièces ?

2. Pour un coût de production de 1 400 euros, combien de pièces l'entreprise va-t-elle fabriquer ?

On suppose que, sur l'intervalle [40 ; 80], la fonction C est définie par $C(x) = 0{,}01x^2 - 0{,}79x + 17{,}40$.

3. Chaque pièce est vendue 20 euros. Déterminer la recette $R(x)$, en centaines d'euros, de l'entreprise pour x pièces fabriquées.

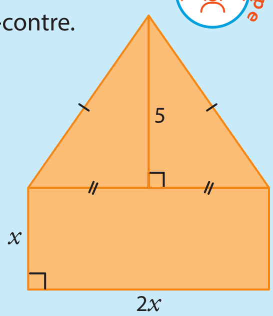
4. Vérifier que la droite tracée en violet est bien la représentation graphique de la fonction R.

5. Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de pièces vendues, est la différence entre la recette et le coût de production.
Quel nombre de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice positif ?

99 Problème ouvert ABC est un triangle rectangle en A dont les trois côtés ont pour longueurs des nombres entiers. On sait que AB mesure moins de 100 cm et AC = AB + 2.
Déterminer les mesures des deux triangles satisfaisant ces conditions.

Travailler autrement

100 Problème ouvert En groupe Chaque groupe écrira un compte-rendu détaillant la démarche effectuée et une conclusion au problème.
On considère la figure ci-contre.
Quelles valeurs peut-on donner à x pour que l'aire de cette figure ne dépasse pas 100 ?



101 À l'oral Chercher le nom d'un mathématicien célèbre dont l'année de naissance est donnée par l'énigme suivante :

– l'image de 100 par la fonction f est le premier nombre ;

– l'ordonnée du point d'abscisse –1 de la courbe de g est le deuxième nombre ;

– le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ est le troisième nombre ;

– la solution de $x^3 = 343$ est le quatrième nombre ;

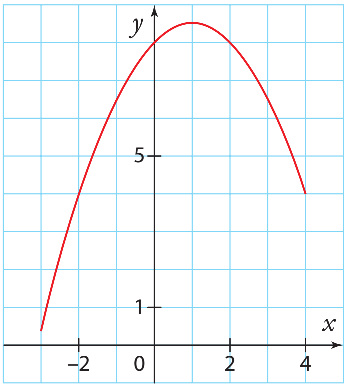
sachant que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire, telle que $f(-100) = 1$ et que $f(x) \geqslant 3$, pour tout réel x, et g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x(-4 + 3x)$.

Exercices bilan

102 Lecture graphique et calcul

A. Lecture graphique

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique sur $[3;4]$.



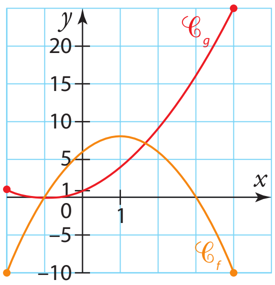
1. Déterminer l'image de 2.
2. Donner la valeur de $f(-2)$.
3. Donner une valeur approchée des antécedents de 5.
4. Résoudre $f(x) = 4$.
5. Résoudre $f(x) < 6$.
6. Résoudre $f(x) \geqslant 8$.

B. Calcul algébrique

On admet que $f(x) = -0{,}5x^2 + x + 8$ pour tout réel x.
1. Calculer l'image de 3.
2. Le point $A(-1;6{,}6)$ appartient-il à la courbe de f ?

103 Lecture et calcul

On donne ci-contre les courbes représentatives de deux fonctions f et g sur $[-2 ; 4]$.



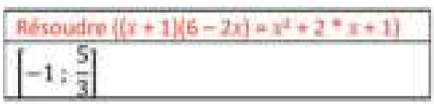
A. Lecture graphique

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = -10$ **b)** $f(x) > 5$
c) $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) = g(x)$

B. Calcul algébrique

Dans cette partie, on admet que les fonctions f et g sont définies sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = (x + 1)(6 - 2x)$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.
1. Développer $f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$ pour tout réel x de $[-2 ; 4]$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
a) Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer les antécédents de 4 par la fonction f.
4. On donne la capture d'écran ci-dessous.



Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes des fonctions f et g.

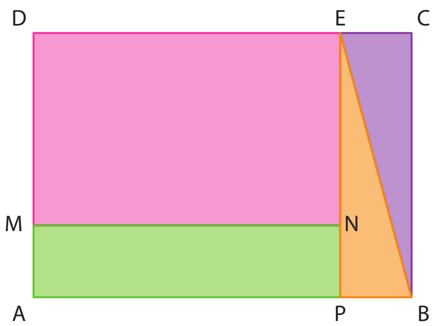
104 Hauteur d'une fusée Physique

Dans le cadre d'un projet, un groupe a lancé un petit prototype de fusée. La hauteur h en mètres du projectile en fonction du temps t en secondes a pu être modélisée par la fonction h définie par $h(t) = 25t - 5t^2$.

1. Quelle est la hauteur du projectile au bout de 3 secondes ?
2. Au bout de combien de temps la fusée retombe-t-elle au sol ?
3. Construire un tableau de valeurs de la fonction h avec un pas de 0,5.
4. Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la durée pendant laquelle la fusée reste à une altitude supérieure ou égale à 10 m.

105 Avec des aires

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 et AD = 7. M est un point de [AD]. P est le point de [AB] tel que BP = AM.
N est le point tel que AMNP est un rectangle et (NP) coupe (DC) en E.
On pose $x = AM$.
On s'intéresse à la fonction $\mathscr{A}$ donnant l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle AMNP en fonction de x.



1. Montrer que $\mathscr{A}(x) = 10x - x^2$ et préciser l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$.
2. Construire un tableau de valeurs pour x allant de 0 à 7 avec un pas de 1.
3. Concernant la fonction $\mathscr{A}$, déterminer les valeurs suivantes que l'on peut saisir dans la calculatrice afin d'avoir une fenêtre adaptée :
- Xmin = … • Xmax = …
- Ymin = … • Ymax = …

4. Tracer avec la calculatrice la courbe de la fonction $\mathscr{A}$.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle AMNP est-elle supérieure ou égale à 20 cm² ?
6. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle AMNP est égale à l'aire du triangle BEP ? Expliquer la démarche.

Exercices d'approfondissement

Démonstration

106 Symétrie et fonction impaire

Démontrer que dans un repère la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Coup de pouce
On pourra s'appuyer sur la démonstration de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de la courbe d'une fonction paire (voir le cours).

107 Parité et calcul

Soit la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(x) = 9x^2 - 4$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses.

2. A-t-on $m(-x) = m(x)$ pour tout réel x ?

3. La fonction m est-elle paire ou impaire ?

108 Paire ou impaire ?

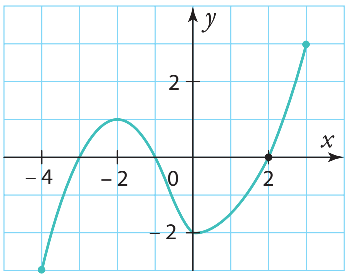
Déterminer si chacune des fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, suivantes est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

a) $f(x) = 2x^3 + 4$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$

c) $f(x) = 4x + 2$ **d)** $f(x) = 3x + x^3$

109 Avec un paramètre

On considère une fonction f définie sur $[-4 ; 3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.



1. Résoudre $f(x) = 0$.

2. Résoudre $f(x) = 2$.

3. Donner un nombre réel t, différent de 2, tel que l'équation $f(x) = t$ ait une seule solution.

4. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m.

110 Non linéarité de fonctions

On considère l'affirmation suivante où f est une fonction : pour tous nombres x_1 et x_2, on a $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

1. La fonction carré vérifie-t-elle cette affirmation ?

2. La fonction inverse vérifie-t-elle cette affirmation ?

111 Parabole

Soit un point $A(x_A ; y_A)$ fixé avec $y_A \neq 0$ et $M(x ; y)$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que M est à égale distance de A et (Ox) si et seulement si $y^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$.

2. En déduire que M appartient à la courbe d'une fonction f dont on donnera l'expression en fonction de x_A et y_A.

112 Vrai ou faux ?

Logique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - a)^2 + 4$$

où a est un paramètre (a un nombre réel quelconque).

Pour chacune des propositions ci-dessous, dire, en justifiant, si elle est vraie.

a) Si $f(x) = 4$ alors $x = a$.

b) Pour toute valeur de a, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

c) Pour toute valeur de a, le point de coordonnées $(3a ; 4(1 + a^2))$ appartient à la courbe de f.

d) Il existe une valeur de a pour laquelle la fonction f est paire.

113 Somme des chiffres

On considère la fonction qui à tout nombre entier naturel associe la somme de ses chiffres.

1. Qu'obtient-on à partir du nombre 13 717 ?

2. Proposer un antécédent de 22.

3. Combien de nombres de l'intervalle $]0 ; 10\ 000]$ permettent d'obtenir 3 ?
Expliquer.

4. Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

114 Lien des fonctions carré et racine carrée

1. Dans un repère orthonormé d'unité 1 cm, tracer la représentation de la fonction racine carrée sur $[0 ; 9]$.

2. Tracer la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Tracer la courbe symétrique par rapport à la droite Δ de la représentation graphique de la fonction racine carrée.

4. Cette courbe est une portion de la courbe d'une fonction connue. Laquelle ?

5. a) Pour tout réel x positif, que vaut $\sqrt{x^2}$?

b) Pour tout réel x positif, que vaut $\left(\sqrt{x}\right)^2$?

Remarque : On dit que les fonctions carré et racine carrée sur $[0 ; +\infty]$ sont réciproques. Graphiquement, cela se traduit par la symétrie observée dans l'exercice.

Vers la 1re

Orientation

115 Spécialité Maths

On considère la fonction carré f.

1. Calculer $f(a + h)$ en fonction de a et h.

2. Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est donné par $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Montrer que ce taux d'accroissement est égal à $2a + h$.

116 STMG STL STI2D

Soit u la fonction qui à tout entier naturel n associe $u(n) = 3 \times 2^n$.

1. Calculer $u(1)$ et $u(2)$.

2. Édith dit que $u(n)$ ne peut pas être supérieur à 1 000. Que peut-on en penser ?

Travaux pratiques

Chercher, calculer

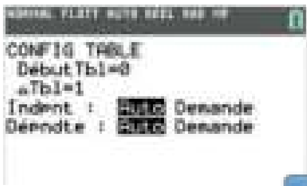
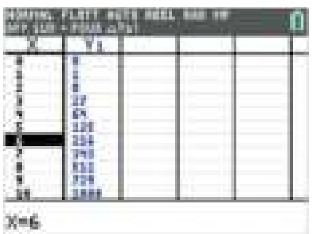
30 min

1 Tableaux de valeurs, courbes et calculatrices

On considère la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(x) = x^3$.
On souhaite donner un encadrement entre deux entiers consécutifs de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x) = 100$.

A ▸ Construction d'un tableau de valeurs

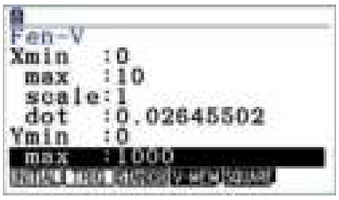
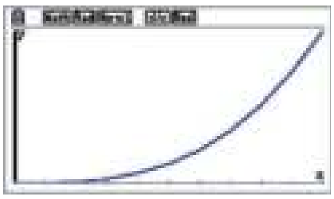
Dans cette partie, on va construire avec la calculatrice un tableau de valeurs de la fonction f pour x entre 0 et 10 avec un pas de 1 (ce qui signifie que les valeurs de x vont de 1 en 1).

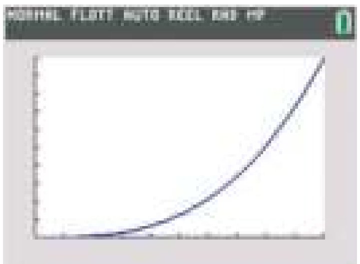
Casio Graph 90+E	TI-83 Premium CE	Numworks
On appuie sur la touche MENU et on choisit **Table**. On saisit l'expression de la fonction. x est obtenu avec la touche X,θ,T. On valide avec la touche EXE.  On donne les caractéristiques de x pour le tableau en choisissant **SET** avec la touche F5. **Start** correspond à la plus petite valeur de x, **End** à la plus grande et **Step** au pas.  On ressort avec la touche EXIT puis on choisit **Table** avec la touche F6 pour obtenir le tableau de valeurs.  	On appuie sur la touche f(x). On saisit l'expression de la fonction. X est obtenu avec la touche X,T,θ,n. On valide avec la touche entrer.  On donne les caractéristiques de x pour le tableau en choisissant **déf table** avec les touches 2nde puis fenêtre. **DébutTbl** correspond à la plus petite valeur de x et **ΔTbl** au pas.  On choisit **Table** avec les touches 2nde puis graphe pour obtenir le tableau de valeurs.  	On appuie sur la touche home puis on choisit l'application **Fonctions**. On saisit l'expression de la fonction. x est obtenu avec la touche x,n,t. On valide avec la touche EXE.  On choisit ensuite la rubrique **Tableau** à l'aide des flèches. On donne les caractéristiques de x pour le tableau dans la rubrique **Régler l'intervalle**. **X début** correspond à la plus petite valeur de x et **X fin** à la plus grande.  On valide pour obtenir le tableau. 

Dans un premier temps, on peut observer grâce au tableau de valeurs que les images semblent avoir 0 comme valeur minimale (pour $x = 0$) et 1 000 comme valeur maximale (pour $x = 10$).
Attention : Ce n'est pas forcément à partir des valeurs de Xmin et Xmax que les valeurs de Ymin et Ymax sont déterminées. Il faut parcourir le tableau pour les évaluer.

B ▸ Affichage d'une courbe

Pour afficher la courbe sur l'écran de la calculatrice, suivre les instructions suivantes selon le modèle de calculatrice.

<table>
<tr><th>Casio Graph 90+E</th><th>TI-83 Premium CE</th><th>Numworks</th></tr>
<tr>
<td>On appuie sur la touche MENU et on choisit Graphe.
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On règle la fenêtre graphique en choisissant V-Window avec la touche SHIFT puis F3.
On choisit les valeurs minimales et maximales de x : Xmin = 0 et Xmax = 10.
Xscale = 1 est la graduation sur l'axe des abscisses.
On choisit les valeurs minimales et maximales de y : on peut prendre Ymin = 0 et Ymax = 1 000
(voir la remarque ci-dessous).
On choisit Yscale = 100 pour avoir une graduation adaptée sur l'axe des ordonnées.

On ressort avec la touche EXIT puis on choisit DRAW avec la touche F6 pour obtenir la courbe.
</td>
<td>On appuie sur la touche f(x).
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On règle la fenêtre graphique en appuyant la touche fenêtre.
On choisit les valeurs minimales et maximales de x : Xmin = 0 et Xmax = 10.
Xgrad = 1 est la graduation sur l'axe des abscisses.
On choisit les valeurs minimale et maximale de y : on peut prendre Ymin = 0 et Ymax = 1 000
(voir la remarque ci-dessous).
On choisit Ygrad = 100 pour avoir une graduation adaptée sur l'axe des ordonnées.

On appuie sur la touche graphe pour obtenir la courbe.
</td>
<td>On utilise l'application Fonctions.
Si elle n'est pas présente, on saisit l'expression de la fonction.
On choisit ensuite la rubrique Graphique à l'aide des flèches.
On donne les caractéristiques de la fenêtre graphique en sélectionnant Axes.
On choisit les valeurs minimales et maximales de x : Xmin = 0 et Xmax = 10.
Puis on choisit Y auto.

On valide pour obtenir la courbe.
</td>
</tr>
</table>

C ▸ Bilan

1. D'après la courbe obtenue avec la calculatrice, combien de solution(s) a l'équation $f(x) = 100$?

2. Donner un encadrement de cette (ou ces) solution(s) entre deux entiers consécutifs.

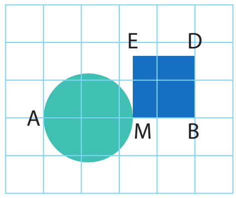
3. Modifier le tableau de valeurs de la fonction avec un pas de 0,5.
Que peut-on en déduire pour la solution de l'équation $f(x) = 100$?

Remarques • La solution dont on a trouvé un encadrement s'appelle la racine cubique de 100 : on la note $\sqrt[3]{100}$.
• En général, pour régler la fenêtre des courbes représentatives, on prend une valeur plus petite que la plus petite des images et une valeur plus grande que la plus grande des images pour mieux observer la courbe. C'est pourquoi on peut par exemple choisir Ymin = –100 au lieu de 0 et Ymax = 1 100 au lieu de 1 000.

Travaux pratiques

TICE — Chercher, modéliser — 45 min

2 La quadrature du cercle



On considère la figure ci-contre où AB = 4 cm. M est un point libre sur le segment [AB]. Le diamètre du disque est [AM] et MBDE est un carré. On note x la longueur AM.

A ▶ Faire des simulations

1. Reproduire la figure ci-contre sur un logiciel de géométrie dynamique et la présenter au professeur.

2. En déplaçant le point M, expliquer comment varient l'aire du disque et l'aire du carré suivant la position de M.

3. Existe-t-il une valeur x_0 de x pour laquelle ces deux aires sont égales ? Si oui, en donner une valeur approchée.

B ▶ Obtenir une valeur approchée

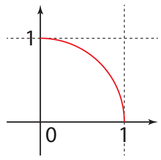
1. Déterminer, en fonction de x, l'aire $d(x)$ du disque et l'aire $c(x)$ du carré.
Préciser les ensembles de définition des fonctions ainsi définies.

2. Tracer les représentations graphiques de ces deux fonctions.

3. Retrouver une valeur approchée de x_0 et en déterminer un encadrement à 0,001 près.

Algo & Prog — Représenter, calculer — 50 min

3 Longueur d'une portion de courbe



On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dont on donne ci-contre la courbe représentative. On considère le programme ci-dessous.

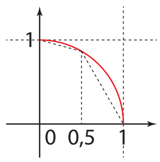
1. Recopier le tableau puis le compléter en exécutant l'algorithme, et donner la valeur de la variable longueur à la fin de l'exécution (on pourra utiliser des valeurs approchées à 0,001 près).

i		0	1		
x_1		0			
x_2		$\frac{1}{2} = 0{,}5$			
longueur	0	$\sqrt{0{,}5^2 + (f(0{,}5) - f(0))^2} \approx 0{,}518$			

```
import math

def f(x):
    y=math.sqrt(1-x**2)
    return y

def norme(a,b):
    dist=math.sqrt(a**2+b**2)
    return dist

n=2
longueur=0
for i in range(0,n):
    x1=i/n
    x2=x1+1/n
    longueur=longueur+norme(1/n,f(x2)-f(x1))
print(longueur)
```

2. Recopier ce programme dans un éditeur PYTHON puis vérifier le résultat obtenu.

3. En utilisant le graphique ci-contre, expliquer ce que fait l'algorithme.



4. Illustrer ce que fait le programme, comme à la question **3.**, dans le cas où $n = 4$.

5. Que va-t-il se passer si on augmente n ?

6. Exécuter le programme pour $n = 1\ 000$ avec l'ordinateur.
Sachant que la courbe de la fonction f est un quart de cercle de rayon 1, de quel nombre l'ordinateur affiche-t-il une valeur approchée ?

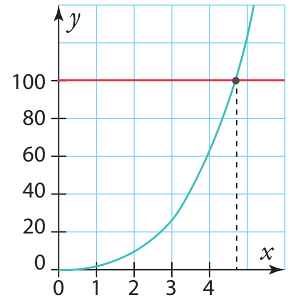
7. Modifier le programme précédent pour qu'il affiche une valeur approchée de la longueur de la portion de la parabole d'équation $y = x^2$ pour x compris entre 0 et 2.

Raisonner, chercher

60 min

4 Méthodes par balayage et par dichotomie

L'objectif de ce TP est d'utiliser deux méthodes de recherche de solutions approchées : la méthode par balayage et la méthode par dichotomie.
Dans les parties A et B, on cherche une valeur approchée de la solution de l'équation (E) : $x^3 = 100$. On pourra observer et admettre que l'unique solution α de (E) se trouve dans l'intervalle [4 ; 5].



A ▸ Méthode par balayage

1. Du tableau de valeurs ci-dessous, quel encadrement déduit-on pour α ?

x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
x^3	64	68,92	74,09	79,51	85,18	91,13	97,34	103,82	110,59	117,64	125

Quelle est la précision obtenue ?
2. Réaliser un tableau de valeurs de x^3 sur l'intervalle trouvé à la question **1.** avec un pas de 0,01.
Quel encadrement de α trouve-t-on ? Quelle est la précision obtenue ?
3. Poursuivre la méthode pour donner un encadrement à 10^{-3} près de α.

B ▸ Méthode par dichotomie Algo & Prog

La méthode de la dichotomie suit le principe suivant : au lieu d'établir un tableau de valeurs avec un pas fixe sur un intervalle [a ; b] qui contient la solution, il s'agit de partager l'intervalle en deux intervalles de moindre amplitude, [a ; c] et [c ; b], de repérer celui des deux qui contient la solution puis de recommencer avec cet intervalle qui contient la solution.

En général, on choisit c au milieu de a et b, c'est-à-dire $c = \dfrac{a+b}{2}$.

1. On considère l'algorithme de dichotomie ci-dessous.
Recopier le tableau. Faire fonctionner l'algorithme pas à pas,
vérifier les premières valeurs obtenues et compléter le tableau d'états des variables.

	Initialisation			
c	X	4,5	4,75	…
c^3	X	91,125	…	…
a	4	4,5	…	…
b	5	5	…	…
$b - a$	1	0,5	…	
Condition $b - a > 10^{-2}$	Vérifiée	Vérifiée		

```
a ← 4
b ← 5
Tant que b - a > 10⁻²
   c ← (a + b)/2
   Si c³ > 100 alors :
      b ← c
   Sinon :
      a ← c
   Fin si
Fin Tantque
Afficher a
Afficher b
```

2. Combien de tests « $b - a > 10^{-2}$ » ont été effectués pour obtenir un encadrement à 10^{-2} près de α ?

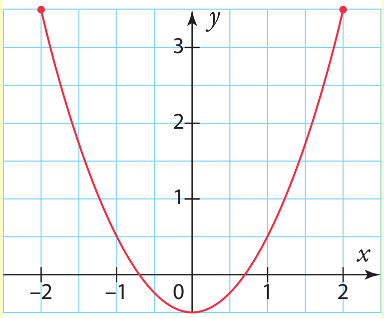
3. a) Que faut-il modifier dans cet algorithme pour obtenir un encadrement de la solution de l'équation (E) à 10^{-3} près ?
b) Écrire un programme sous Python pour obtenir un encadrement de la solution à 10^{-3}.
c) Combien de tests « $b - a > 10^{-3}$ » le programme a-t-il effectués pour obtenir cette précision ?

En autonomie

1 Utiliser la courbe représentative d'une fonction

QCM

Pour les exercices 117 à 120, on utilise la courbe représentative d'une fonction donnée ci-contre.



117 L'équation $f(x) = 2$ a pour solution(s) :

a 3,5 b 2
c 1,6 et –1,6 d aucune des réponses

118 L'inéquation $f(x) \leqslant 0$:

a n'a pas de solution.
b a pour solution 0.
c a graphiquement pour ensemble de solutions $[-0{,}7 : 0{,}7]$.
d a graphiquement pour ensemble de solutions $[-2 ; -0{,}7] \cup [0{,}7 ; 2]$.

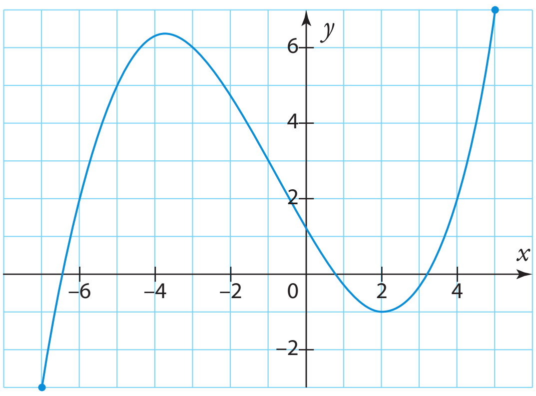
119 La fonction semble :

a paire.
b impaire.
c ni paire ni impaire.

120 ✶ Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

121 ✶ On considère une fonction f, définie sur $[-7 ; 5]$, représentée graphiquement ci-dessous. Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant -2$

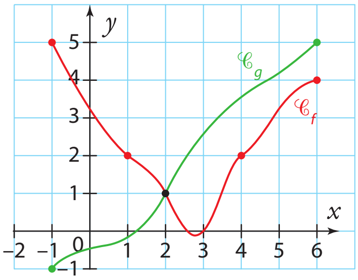


122 ✶ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 2)(3x + 1)$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Le point A(–2 ; –20) appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Quelle est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des ordonnées ?
3. Trouver les coordonnées des points de $\mathscr{C}_g$ d'ordonnée égale à 0.

123 ✶ Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 6 - \dfrac{5}{x+1}$ sur $[0 ; 10]$.

124 ✶ On considère deux fonctions f et g définies sur $[-1 ; 6]$. On a tracé leurs courbes représentatives dans le repère ci-contre.



1. Résoudre $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre $f(x) < g(x)$.

125 ✶ On considère le tableau de valeurs d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ donné ci-dessous.

x	–3	–1	–0,5	0	1	3
$h(x)$	5	–10	1	2	10	2

1. Donner les coordonnées d'un point d'ordonnée égale à 1 appartenant à la courbe de h.
2. La fonction h est-elle paire ? impaire ?

126 ✶✶ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ et $g(x) = 3x + 6$ et leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère.

1. Montrer que le point A(1 ; 9) est un point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Existe-t-il d'autres points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

127 ✶✶ On considère la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par $f(x) = 4x^2 - 12x + 5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Trouver l'ordonnée du point M d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ qui appartient à $\mathscr{C}_f$.
2. Trouver les antécédents de 5 par f.

128 ✶✶ Trouver les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection des courbes d'équations $y = \dfrac{2x}{x-5}$ et $y = \dfrac{4x+2}{2x+3}$.

2 Reconnaître et utiliser des fonctions de référence

QCM

129 L'image de 4 par la fonction carré est :

a 16 b 2 c −16 d −2

130 Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des antécédents de 9 par la fonction carré ?

a 81 b −3 c −81 d 3

131 L'image de 3 par la fonction inverse est :

a 0,33 b $\frac{1}{3}$ c −3 d 1

132 Un antécédent de 5 par la fonction racine carrée f est :

a $\sqrt{5}$ b 25 c 2,5 d 2,2

133 L'image de 4 par la fonction racine carrée est :

a 16 b 2 c −16 d −2

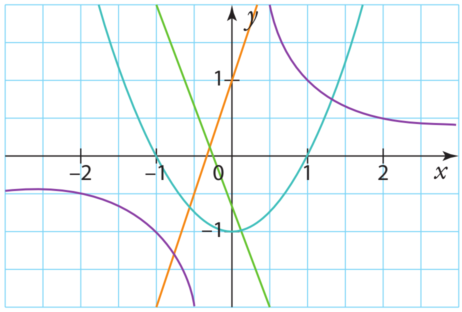
134 L'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction cube est :

a $\frac{1}{8}$ b $\frac{1}{6}$ c 2 d $\frac{3}{8}$

135 La représentation graphique de la fonction carré est :

a une parabole b une hyperbole c une droite

136 ✶ On considère les courbes représentatives de quatre fonctions ci-dessous.



Pour chacune des fonctions représentées, déterminer quelle fonction elle représente parmi les choix ci-dessous.

a) une fonction affine. **b)** la fonction carré.
c) la fonction inverse. **d)** une autre fonction.

137 ✶ Déterminer les éventuels antécédents par les fonctions carré et inverse des nombres suivants.

a) 4 **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** −20

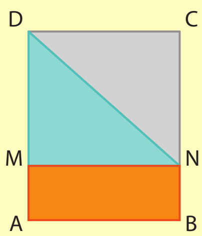
138 ✶✶ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\sqrt{x} > 4$ **b)** $\frac{1}{x} \geqslant 5$ **c)** $x^2 < 50$ **d)** $x^3 \leqslant 64$

3 Utiliser une fonction

QCM

Pour les exercices 139 et 140, on considère la figure ci-contre.



ABCD est un rectangle tel que AB = 4 et AD = 5. M est un point du segment [AD] et N est le point de [BC] tel que ABNM est un rectangle.

On pose x = AM. On modélise l'aire du triangle DMN en fonction de x par une fonction f.

139 L'ensemble de définition de f est :

a [0 ; 4] b [0 ; 5] c 5 d [AD]

140 L'aire du triangle DMN en fonction de x est :

a $4x$ b $(5 - x)x$ c $10 - 2x$ d $20 - 4x$

141 ✶ Quelle fonction f donne le résultat $f(x)$ en fonction de x pour le programme de calcul suivant : « Je choisis un nombre x dans [0 ; 10], j'y ajoute 5 et mets le résultat au carré » ?

142 ✶ Carlos s'est abonné au service de location de vélo dans sa ville. L'abonnement annuel lui revient à 15 euros auxquels s'ajoute 2 euros par heure de location (les prix pouvant alors être calculés à la minute près par proportionnalité). Modéliser cette situation à l'aide d'une fonction P donnant le prix payé annuellement $P(t)$ par Carlos en fonction de t, la durée en heures de location.

143 ✶✶ ABCD est un rectangle tel que AB = 9 – AD. Déterminer les dimensions pour lesquelles l'aire de ABCD est supérieure ou égale à 15.

Coup de pouce Faire un schéma. Poser x = AD, puis exprimer l'aire de ABCD en fonction de x.

9

Variations et extremums

Trajectoire d'un saut effectué par le skieur acrobatique Candide Thovex

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Décrire les variations d'une fonction.	1 p. 223	1 2 p. 223 15 16 p. 226
Comparer des images en utilisant un tableau de variations.	2 p. 224	3 4 p. 224 21 22 p. 227
Déterminer le minimum ou le maximum de fonctions à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.	4 p. 225	7 8 p. 225 34 35 p. 228
Déterminer les variations des fonctions affines.	Act 2 p. 218	13 p. 226 74 p. 232
Utiliser les variations des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.	3 p. 225	5 6 p. 225 26 à 33 p. 227-228
Résoudre des inéquations à l'aide des variations.	2 p. 224	4 p. 224 22 à 25 p. 227
Résoudre un problème d'optimisation.	Act 4 p. 219	104 p. 235
Démonstration Démontrer les variations des fonctions carré, inverse et racine carrée.	Cours p. 222	
Algo & Prog Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, utiliser des algorithmes d'approximation numérique d'un extremum.	103 p. 235	

1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Logique & Démonstration

p. 221, 222, 234

Algo & Prog

p. 234, 235

TICE

p. 218, 219, 229, 234, 236, 237

Les autres disciplines

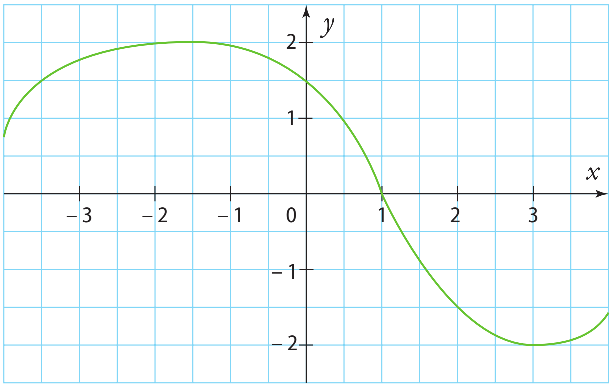
p. 235, 236

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-17

1. Lire l'image d'un nombre par une fonction

La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous.



1. Sur quel axe lit-on l'image d'un nombre par la fonction f ?

2. Lire :

a) $f(-1)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f(4)$ **d)** $f(-4)$

2. Calculer l'image d'un nombre par une fonction

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$.

Par la fonction g, quelle est l'image de :

a) 0 ? **b)** $\frac{2}{3}$? **c)** 2 ?

3. Reconnaître une fonction

1. Parmi les expressions suivantes, déterminer quelles sont celles de fonctions affines.

a) $f(x) = 2x$ **b)** $g(x) = \frac{5x - 7}{4}$

c) $h(x) = (4x - 1)^2$ **d)** $m(x) = (x + 5)^2 - x^2$

2. Parmi les expressions suivantes, reconnaître celles de fonctions de référence.

a) $n(x) = x(x - 3) + 3(x + 2) - 6$

b) $p(x) = \frac{x + 1}{x} - 1$

4. Donner un encadrement d'une fonction

1. Donner un encadrement de $3x - 5$ lorsque :

a) $1 \leqslant x \leqslant 7$ **b)** $-2 \leqslant x \leqslant 3$

2. Donner un encadrement de $-4x + 1$ lorsque :

a) $0 \leqslant x \leqslant 10$ **b)** $-3 \leqslant x \leqslant 1$

5. Connaître les fonctions de référence

Donner l'expression et tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.

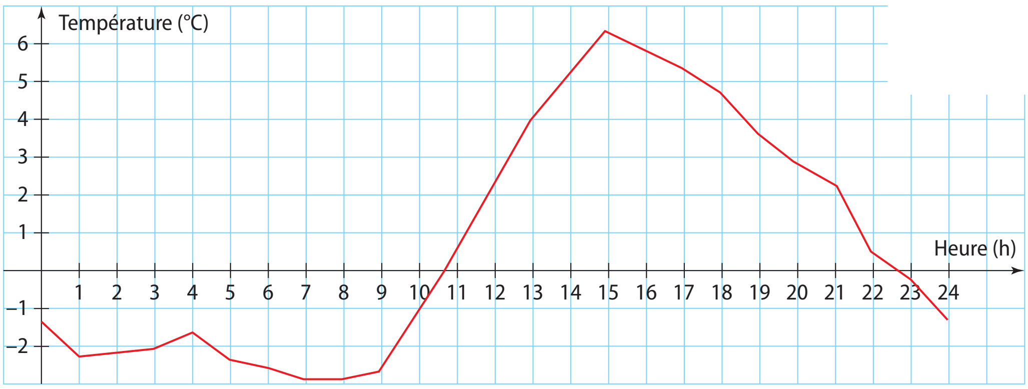
Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

Activités

1 Vers le tableau de variations

20 min

À partir de relevés de température réalisés chaque heure dans la station météorologique de Grenoble-Le Versoud, le 4 février 2018, on a obtenu le tracé suivant donnant la température $f(x)$ en fonction de l'heure x ce jour-là.



1. Déterminer la température à 11 h.

2. À quel moment la température augmente-elle ? diminue-t-elle ?

3. Les informations précédentes peuvent être regroupées dans un tableau appelé tableau de variations dont le début est tracé ci-dessous. Recopier et compléter le tableau.

x	0		1		4		…		
f	−1,3		−2,2		−1,6	↘	…	↗	…

↳ Cours 1 p. 220

2 Sens de variation des fonctions affines

TICE 45 min

1. a) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

b) Créer un curseur pour un nombre a et un curseur pour un nombre b.

c) Dans la barre de saisie, écrire $f(x) = a*x+b$.

d) Faire varier les valeurs de a et de b, puis compléter.

Si … alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si … alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est ….

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.

a) x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1 \leqslant x_2$. Recopier et compléter avec les symboles $\leqslant$ ou $\geqslant$.

$x_1 \ldots x_2$ $\quad$ $3x_1 \ldots 3x_2$ $\quad$ $3x_1 - 4 \ldots 3x_2 - 4$ $\quad$ $f(x_1) \ldots f(x_2)$

b) Que peut-on en conclure pour f ?

3. Reprendre la question précédente pour g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 8$.

4. Soit a et b deux réels et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax + b$.

a) Démontrer que si $a > 0$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que si $a < 0$ alors h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

↳ Cours 2 p. 221

3 Variations des fonctions de référence

25 min

Le but de cette activité est de tracer les tableaux de variations des fonctions de référence.

1. a) On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'une calculatrice, obtenir le tracé de la courbe de la fonction carré.

b) Compléter le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \to x^2$		…		…	

2. En procédant de la même manière, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

a) Fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to \sqrt{x}$.

b) Fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to x^3$.

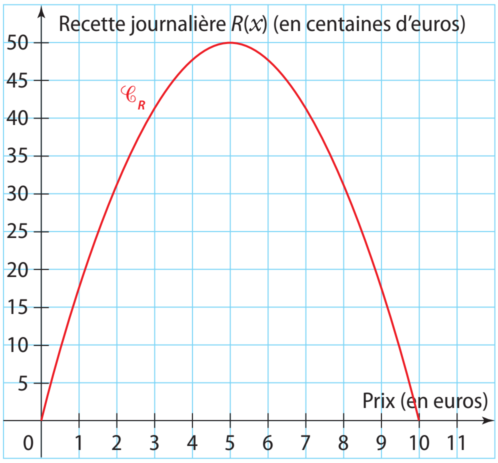
c) Fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \to \dfrac{1}{x}$.

Cours 2 p. 221

4 Minimum et maximum d'une fonction

25 min

Une entreprise produit et vend des boules de Noël. Le prix de vente unitaire peut être fixé entre 1 et 10 €. En fonction de celui-ci, le nombre de ventes, et donc la recette journalière, varient. Après une étude de marché, le gérant a modélisé la recette journalière en fonction du prix de vente par une fonction R dont voici la courbe représentative.



1. Quelle est la recette journalière pour un prix de vente de 9 € ?

2. a) Quelle est la recette maximale ? Pour quel prix est-elle atteinte ?

b) Compléter : f a pour maximum 50 car, pour tout $x \in [0 ; 10]$, on a $f(x) \leqslant$ ….

C'est ainsi que l'on définit le maximum d'une fonction.

3. Une fonction g définie sur $[-5 ; 5]$ a pour minimum 2 atteint en $x = a$.

Écrire la traduction mathématique de cet énoncé sur le modèle de la question précédente.

Cours 3 p. 222

Cours

1 Variations d'une fonction

Définition **Fonction croissante et fonction décroissante**

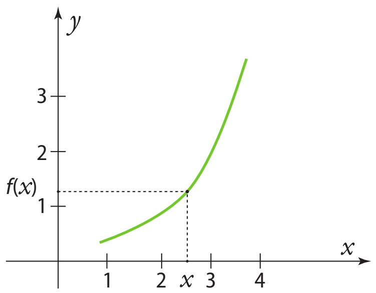
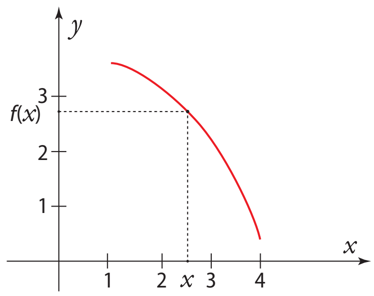
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que f est croissante sur I si lorsque x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.

Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

• On dit que f est décroissante sur I si lorsque x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Fonction croissante sur I	Fonction décroissante sur I
	

Remarques

• Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I, alors $\mathscr{C}_f$ « monte ».
Inversement, si f est décroissante sur I, alors $\mathscr{C}_f$ « descend ».

• Si, sur un intervalle I, f garde la même valeur, on dit que f est constante sur cet intervalle.
Alors sa courbe est horizontale sur cet intervalle.

Définition **Fonction monotone**

Si f ne change pas de variation sur I, on dit que f est monotone sur I.

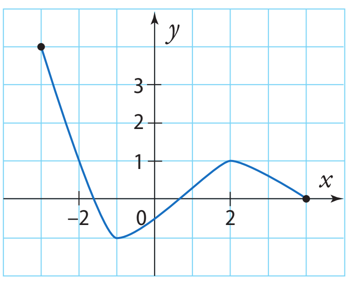
Remarque Si, sur un intervalle I, f est croissante (respectivement décroissante) sans être constante sur une partie de I, on dit que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Propriété **Tableau de variations**

Un tableau de variations regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

Exemple

f est une fonction définie sur [–3 ; 4] dont voici la courbe ci-dessous.



Son tableau de variations est le suivant.

x	-3		-1		2		4
f	4	↘	-1	↗	1	↘	0

On peut lire que f est décroissante sur [–3 ; –1], croissante sur [–1 ; 2] et décroissante sur [2 ; 4].

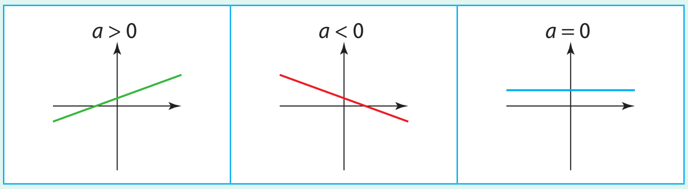
Exercices résolus 1 et 2 p. 223-224

2 Variations de fonctions de référence

Propriété Fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.

- **Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.**



Exemples

① $x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 4 > 0$.

② $x \mapsto -2x + 8$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -2 < 0$.

Remarques

- Si $a > 0$, f est représentée par une droite avec une **pente positive**.
- Si $a < 0$, f est représentée par une droite avec une **pente négative**.

Démonstration

Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

- On suppose que $a < 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
  $a < 0$ donc $ax_1 \geqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- On suppose que $a > 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
  $a > 0$ donc $ax_1 \leqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

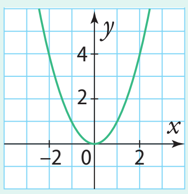
Propriétés Fonctions de référence

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	↘	0	↗

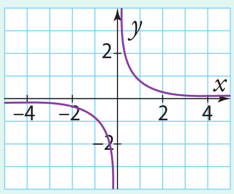


Fonction inverse

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

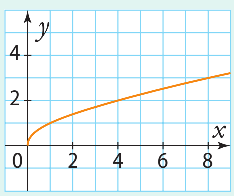


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗

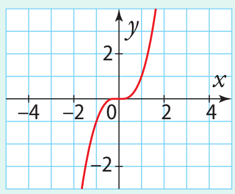


Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	↗	



Cours

● **Exemple**

La fonction carré, comme la fonction racine carrée, admet 0 pour minimum et il est atteint pour $x = 0$.
Elle n'admet pas de maximum.

Démonstrations

① Soit x_1 et x_2 deux réels. Alors $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \leqslant 0$ (somme de réels négatifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \leqslant 0$ par la règle des signes.
  On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \leqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$.
  La fonction carré est décroissante sur$]-\infty\ ;\ 0]$.
- Sur $[0\ ;\ +\infty[$, si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \geqslant 0$ (somme de réels positifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geqslant 0$.
  On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \geqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$.
  La fonction carré est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

② Soit x_1 et x_2 deux réels non nuls. Alors $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_1x_2} - \dfrac{x_2}{x_1x_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, si $x_1 \leqslant x_2 < 0$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2x_1 > 0$ (produit de réels strictement négatifs), donc $\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} \leqslant 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} \leqslant 0$ et donc que $\dfrac{1}{x_2} \leqslant \dfrac{1}{x_1}$.
  La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
- Sur $]0\ ;\ +\infty[$, si $x_1 \leqslant x_2 < 0$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2x_1 > 0$ (produit de réels strictement positifs), donc $\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} \leqslant 0$. On en déduit que et donc que $\dfrac{1}{x_2} \leqslant \dfrac{1}{x_1}$.
  La fonction inverse est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

③ Soit x_1 et x_2 tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
On a $x_1 = \sqrt{x_1}^2$ et $x_2 = \sqrt{x_2}^2$ donc $\sqrt{x_1}^2 \leqslant \sqrt{x_2}^2$.
Or $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$ sont positifs donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}+$, on déduit que $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$.
Autrement dit, la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

↪ Exercice résolu ③ p. 225

3 Extremum d'une fonction

Définition Maximum et minimum d'une fonction

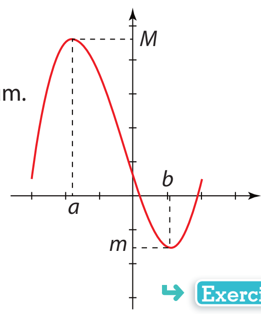
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que f a pour maximum M sur I s'il existe a dans I tel que $f(a) = M$ et $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in$ I.
Autrement dit, M (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de f sur I.

• On dit que f a pour minimum m sur I s'il existe b dans I tel que $f(b) = m$ et $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in$ I.
Autrement dit, m (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe de f sur I.

Remarques

- Un extremum est un minimum ou un maximum.
- Une fonction peut ne pas avoir de minimum ou de maximum.



↪ Exercice résolu ④ p. 225

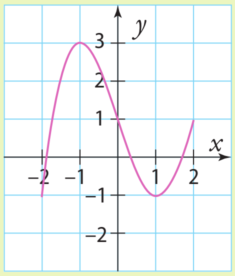
1 Dresser un tableau de variations

Cours 1 p. 220

f est une fonction définie sur $[-2 ; 2]$, dont voici la courbe représentative tracée dans un repère.

1. Décrire par des phrases les variations de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variations de f.



Solution

1. f est croissante sur $[-2 ; -1]$, puis décroissante sur $[-1 ; 1]$ et enfin croissante sur $[1 ; 2]$. 1

2. Son tableau de variations est le suivant. 2 3 4 5 6

x	-2		-1		1		2
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	1

Conseils & Méthodes

1 Pour décrire graphiquement les variations d'une fonction, on repère sur l'axe des abscisses chaque intervalle où la courbe représentative « monte » ou « descend ».

2 Un tableau de variations comporte deux lignes, une pour la variable x et l'autre pour les variations de f.

3 Aux extrémités de la première ligne, on trouve les bornes de l'ensemble de définition de la fonction. Entre les bornes, on place les éventuelles valeurs particulières pour lesquelles f change de sens de variation.

4 Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la seconde ligne par une ou plusieurs flèches sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.

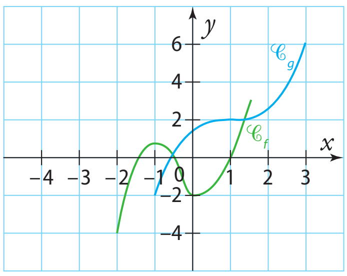
5 On indique au bout des flèches les images des valeurs de la première ligne.

6 On vérifie, lorsque cela est possible, la cohérence entre le sens des flèches et la valeur des images. Ici, on constate une augmentation de -1 à 3, ce qui est cohérent, puis une baisse de 3 à -1 et enfin une augmentation de -1 à 1.

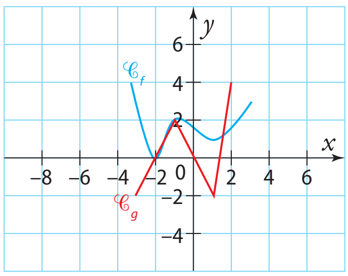
À vous de jouer !

1 On considère une fonction f définie sur $[-2 ; 1{,}5]$ et une fonction g définie sur $[-1 ; 3]$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.

Dresser leurs tableaux de variations.



2 On considère les fonctions f et g définies sur $[-4 ; 4]$ dont voici les courbes représentatives dans un repère.



1. Déterminer leurs ensembles de définition.
2. Dresser leurs tableaux de variations.

Exercices 15 à 20 p. 226-227

Exercices résolus

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-18

2 Utiliser les variations d'une fonction

Cours 1 p. 220

f est une fonction dont voici le tableau de variations.

1. **Comparer les nombres $f(0)$ et $f(1)$ en justifiant.**

2. **Même question pour les nombres $f(2)$ et $f(3)$.**

3. **On sait, de plus, que $f(3) = f(4{,}2) = 4$.**

Résoudre :

a) $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$

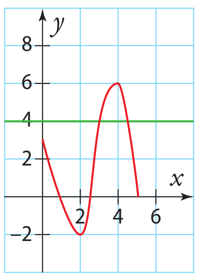
x	0		2		4		5
f	4	↘	−2	↗	6	↘	0

Solution

1. 0 et 1 sont des nombres de l'intervalle [0 ; 2]. f est décroissante sur cet intervalle et $0 \leqslant 1$ donc $f(0) \geqslant f(1)$. 1 2 3

2. 2 et 3 sont des nombres de l'intervalle [2 ; 4]. f est croissante sur cet intervalle et $2 \leqslant 3$ donc $f(2) \leqslant f(3)$.

3. a) D'après le tableau de variations, $f(0) = 4$. 4 5
De plus f est croissante sur [2 ; 4] et $f(3) = 4$ donc [2 ; 4]. $f(x) = 4$ a une solution qui est 3.
On trouve de même une unique solution 4,2 sur [4 ; 5].
Finalement, les solutions sont 0 ; 3 et 4,2.
b) En utilisant le résultat de la question précédente et les variations de f, on trouve que les solutions de cette équation sont les nombres de l'intervalle [3 ; 4,2].



Conseils & Méthodes

1 La première ligne du tableau de variations correspond à la variable x en abscisse.

2 La seconde ligne fait apparaître les images $f(x)$ en ordonnées.

3 Pour obtenir des informations concernant $f(a)$, on repère a dans la première ligne avant de lire par correspondance les informations sur $f(a)$ en dessous.

4 Attention à ne pas oublier des informations de l'énoncé.

5 On peut tracer une courbe représentative possible pour la fonction f et s'appuyer sur elle pour résoudre les équations et inéquations.

À vous de jouer !

3 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	−2		−1		3
f	5	↘	−2	↗	4

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Comparer $f(0)$ et $f(2)$.

3. Comparer $f(-2)$ et $f(-1{,}5)$.

4 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	−4		−1		1		3
f	1	↘	−1	↗	5	↘	4

On sait de plus que $f(0) = 1$ et $f(0{,}5) = 4$.
Résoudre les équation et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$

c) $f(x) \leqslant 1$ **d)** $f(x) > 1$

Exercices 21 à 25 p. 227

3 Utiliser les variations d'une fonction de référence

Cours 2 p. 221

1. **Comparer les nombres $2{,}1^2$ et 4^2 sans effectuer de calcul.**

2. **Résoudre $x^2 < 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.**

Solution

1. Il s'agit ici de comparer des nombres qui sont les images de 2,1 et de 4 par la fonction carré. **1**

2,1 et 4 sont des nombres de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. **2**
Sur cet intervalle, la fonction carré est croissante et $2{,}1 < 4$ donc $2{,}1^2 < 4^2$.

2. $x^2 = 4$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -2$. **3**
D'après les variations de la fonction carré, $x^2 < 4$ pour $x \in]-2\ ;2[$.

Conseils & Méthodes

1 On identifie les nombres à comparer comme images d'une fonction de référence. Ici, il s'agit de la fonction carré.

2 On utilise alors les variations de la fonction identifiée pour comparer les images.

3 On combine les informations liées à l'expression de la fonction de référence avec celles liées aux variations.

À vous de jouer !

5 Comparer les nombres suivants sans calcul.

a) 2^3 et 5^3 **b)** $(-3)^3$ et 11^3 **c)** $(-2{,}4)^3$ et $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ les inéquations suivantes.

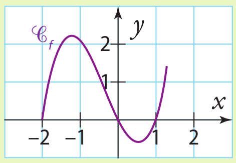
a) $\sqrt{x} < 4$ **b)** $\sqrt{x} > 7$

Exercices 26 à 33 p. 227-228

4 Déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction

Cours 3 p. 222

***f* et *g* sont deux fonctions dont on donne ci-contre respectivement la courbe représentative dans un repère et le tableau de variations.**



x	-1		3		5		7
g	4	↘	-1	↗	4	↘	3

1. **Déterminer le minimum de *f* sur $[-2\ ;1{,}3]$ et la valeur de x pour laquelle il est atteint.**

2. ***g* admet-elle un maximum sur $[-1\ ;7]$? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?**

Solution

1. f admet un minimum qui vaut $-0{,}6$ et qui est atteint pour $x = 0{,}5$. **1**

2. g a un maximum qui vaut 4 ; il est atteint pour $x = -1$ et pour $x = 5$. **2**

Conseils & Méthodes

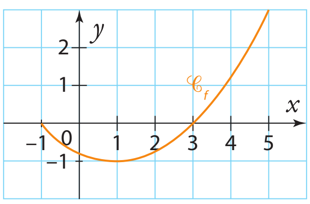
1 On repère le ou les points de la courbe les plus bas. L'ordonnée correspond au minimum de la fonction, l'abscisse correspond aux valeurs de x pour lesquelles il est atteint.

2 On lit dans la deuxième ligne du tableau l'image la plus grande ; l'abscisse correspondante située dans la première ligne indique pour quelle valeur de x le maximum est atteint.

À vous de jouer !

7 *f* est une fonction dont voici la courbe.

f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?



8 *g* est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	0		1		3		4
g	2	↘	-1	↗	1	↘	0

g admet-elle un maximum ? Pour quelle(s) valeur(s) de x ?

Exercices 34 à 37 p. 228

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

9 On suppose que l'on dispose de la courbe représentative d'une fonction.

1. Comment déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ? décroissante ?

2. En dressant son tableau de variations, quel axe va-t-on utiliser pour compléter la première ligne ?

10 **1.** Quel est le sens de variation possible d'une fonction affine ?

2. Comment le déterminer ?

11 **1.** Dresser l'allure de la courbe représentative des fonctions carré, inverse, cube et racine carrée.

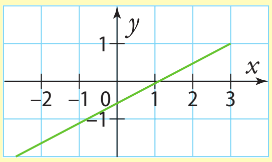
2. Dresser leurs tableaux de variations.

Questions - Flash

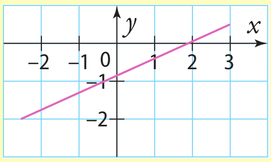
Diapo
Diaporama
Ressource professeur

12 Associer à chaque courbe son tableau de variations.

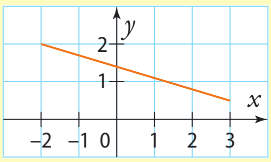
a)



b)



c)



①

x	-2		3
f	2	↘	$0{,}5$

②

x	$-2{,}5$		3
f	-2	↗	$0{,}5$

③

x	$-2{,}5$		3
f	-2	↗	1

13 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f_1(x) = 2x - 5$ **b)** $f_2(x) = 7x$ **c)** $f_3(x) = -0{,}9x + 1$

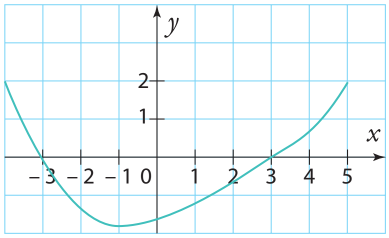
14 Tracer dans un repère une courbe possible d'une fonction ayant pour tableau de variations :

x	-2		-1		2
f	-3	↗	1	↘	0

Dresser un tableau de variations

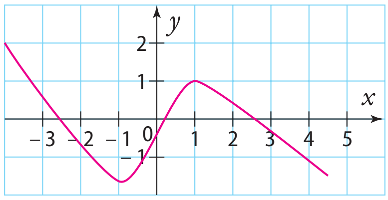
15 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	-4		...		5
f	2	↘	...	↗	2



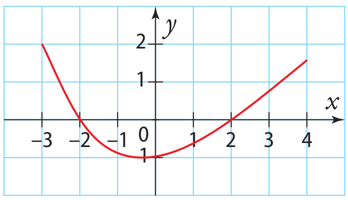
16 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	-4		...		...		...
f	...	↘	...	↗	1	↘	$-1{,}5$

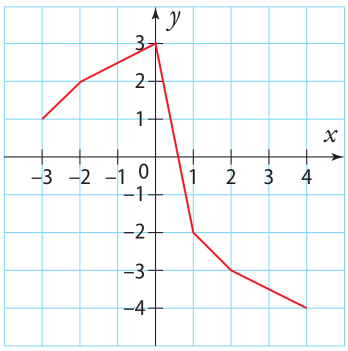


17 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	-3		...		...
f		↘	...	↗	



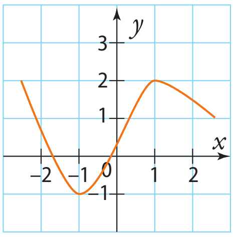
18 f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.

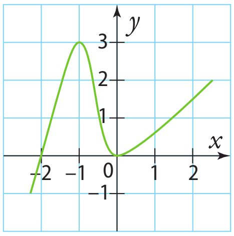


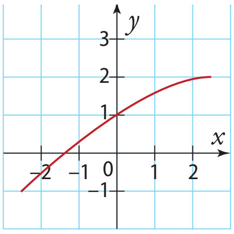
1. Décrire les variations de f à l'aide de phrases.

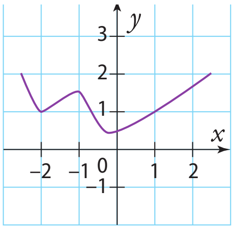
2. Dresser le tableau de variations à l'aide de phrases.

19 Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions représentées.

a)


b)


c)


d)


20 Une fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 4]$ et croissante sur $[4\ ;\ +\infty[$. On sait de plus que $f(4) = -3$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Interpréter un tableau de variations

21 g est une fonction dont on connaît le tableau de variations.

x	-3		1		2		5
g	4	↘	3	↗	5	↘	-3

1. a) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
b) En déduire quel est le nombre le plus grand entre $g(3)$ et $g(4)$.
2. Sur le modèle de la question précédente, comparer $g(1)$ et $g(1{,}5)$.
3. Même question pour $g(-2)$ et $g(0)$.

22 g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-2		1		2		10
g	8	↘	-3	↗	1	↘	-4

On sait de plus que $g(0) = 1$.
1. Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation $g(x) \leqslant 1$.
3. Comparer $g(3)$ et $g(5)$.

23 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-3		2		4
f	7	↘	-1	↗	2

Indiquer sur quel intervalle f est croissante et sur quel intervalle f est décroissante.

24 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-6		-1		2		4
f	-3	↗	2	↘	-1	↗	4

Comparer si possible les nombres suivants, en justifiant.
a) $f(-2)$ et $f(-1)$ **b)** $f(0)$ et $f(2)$ **c)** $f(3)$ et $f(3{,}5)$

25 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-2		0		1		7
f	5	↘	1	↗	4	↘	0

1. Comparer si possible les nombres suivants en justifiant.
a) $f(2)$ et $f(4)$
b) $f(-2)$ et $f(-1)$
2. Résoudre $f(x) \geqslant 0$.
3. On sait de plus que $f(-1{,}5) = 4$.
Résoudre $f(x) \leqslant 4$ et $f(x) > 4$.

Comparer des nombres avec les fonctions de référence

26 Soit f la fonction carré.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(1)$ et $f(4)$
b) $f(-3)$ et $f(-2)$

27 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction carré.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $3{,}2^2$ et $3{,}5^2$
b) $(-2)^2$ et $(-2{,}4)^2$

28 Soit f la fonction inverse.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(2)$ et $f(9)$
b) $f(-1)$ et $f(-0{,}5)$

29 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction inverse.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3{,}2}$
b) $\dfrac{1}{-2}$ et $\dfrac{1}{-1{,}5}$

30 Soit f la fonction racine carrée.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(1)$ et $f(4)$
b) $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ et $f(3{,}2)$

Exercices d'application

31 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction racine carrée.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.

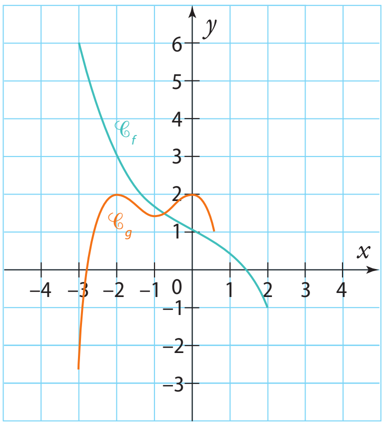
a) $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2{,}7}$ **b)** $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{4}{3}}$

32 Soit f la fonction cube.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(0)$ et $f(4)$ **b)** $f(-3)$ et $f(2)$

33 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction cube.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $4{,}015^2$ et $4{,}1^3$ **b)** $(-2)^2$ et $(-\sqrt{2})^2$

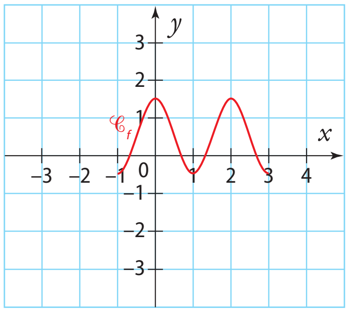
Déterminer un maximum ou un minimum

34 f et g sont des fonctions dont voici les courbes représentatives.



1. f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?
2. Même question pour la fonction g.

35 f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le maximum éventuel de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
3. Déterminer le minimum éventuel de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.

36 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		3		6
f	1	↗	5	↘	-2

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. f admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?
3. f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

37 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		1		3		6
f	0	↘	-3	↗	1	↘	-5

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le minimum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Calculs et automatismes

38 Développer et simplifier les expressions suivantes.
a) $(x+1)^2 - 5$
b) $-2(x+1)^2 + 3$

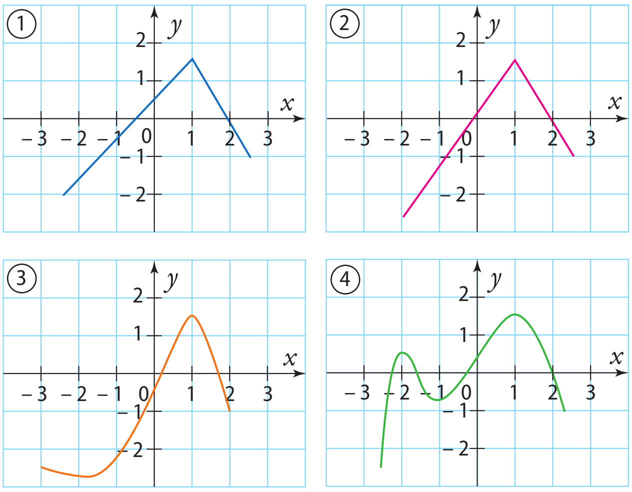
39 Donner les variations des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = -3x + 5$
b) $g(x) = x^2$
c) $h(x) = 6x$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$.
a) $x^2 = 9$
b) $x^2 = 5$
c) $4x + 5 = 0$
d) $-3x + 2 = -7x + 4$

Courbe et tableau de variations

40 Voici le tableau de variations d'une fonction f.
Choisir la courbe correspondant à ce tableau.

x	$-2{,}5$		1		$2{,}5$
f	-2	↗	$1{,}5$	↘	-1



41 Une fonction f possède les propriétés suivantes :
- elle est définie sur $[-3 ; 5]$;
- elle est croissante sur $[-3 ; -1]$;
- elle est décroissante sur $[-1 ; 4]$;
- elle est croissante sur $[4 ; 5]$;
- sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, son maximum vaut 6 ;
- sur l'intervalle $[-1 ; 5]$, son minimum vaut -3 ;
- l'image de -3 est 1 ;
- 5 est un antécédent de 7.

Dresser le tableau de variations de cette fonction.

42 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		-1		1		3		7
f	-4	↗	4	↘	-5	↗	2	↘	-1

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'ensemble de définition de f.
3. L'équation $f(x) = 3$ peut-elle avoir trois solutions ?

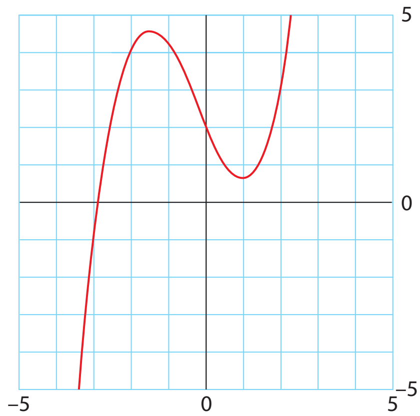
43 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.
a) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2{,}5$ pour $x \in [-1 ; 2]$
b) $g(x) = \dfrac{3x - 6}{x + 2}$ pour $x \in [0 ; 6]$

44 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.
a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ pour $x \in [-2 ; 2]$
b) $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$ pour $x \in [0 ; 9]$

45 TICE Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = x^3 + 0{,}75x^2 - 4{,}5x + 2$.
1. À l'aide du logiciel Xcas, on a entré la commande :

```
plotfunc(0.5x^3+0.375x^2-2.25x+2, x =-5..5)
```

Voici ce qui est affiché.



Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. En vous appuyant sur Xcas, ou sur une courbe obtenue à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.
a) f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ pour $x \in [-3 ; 3]$
b) g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$ pour $x \in [0 ; 5]$
c) h définie par $h(x) = 0{,}001x^5 + 4x - 2$ pour $x \in [-5 ; 4]$

46 Associer à chaque fonction son tableau de variations parmi les suivants.
a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 4$
b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$
c) h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$
d) k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x} + 1$

x	0		$+\infty$
u_1	1	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u_2		↘	0	↗	

x	$-\infty$		$+\infty$
u_3		↘	

x	$-\infty$		$+\infty$
u_4		↗	

Exercices d'entraînement

47 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;6]$ tels que :
- f est croissante sur $]-\infty\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;6]$;
- $f(4)=-2$ et l'image de 6 est -6.

48 **1.** f est une fonction paire définie sur $[-3\,;3]$ dont voici l'ébauche de son tableau de variations.

x	-3		-2		0		…
f	2	↘	-1	↗	4		

Le recopier et le compléter.

2. g est une fonction impaire définie sur $[-5\,;5]$ dont voici l'ébauche de son tableau de variations.

x	-5		-1		0		…
f	-1	↘	-3	↗	0		

Le recopier et le compléter.

49 f est une fonction non monotone définie sur $[-3\,;4]$ telle que $f(-3)=4$ et $f(2)=0$.
Dresser un tableau de variations possible pour cette fonction.

50 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
- décroissante sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]9\,;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- qui coupe l'axe des abscisses en 4 et 11.

51 Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f dont voici le tableau de variations.

x	-7		0		1		3
f	2	↘	0	↗	1	↘	-3

52 f est une fonction dont voici le tableau de variations. Dans un repère, tracer une courbe représentative possible pour cette fonction.

x	-5		-1		5
f	2	↘	0	↗	3

Variations et extremums

53 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

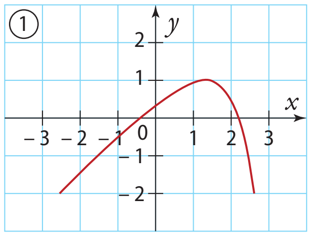
x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
f	-4	↗	-2	↘	-5	↗	0	↘	-1

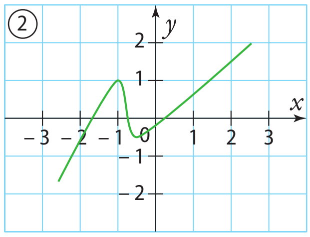
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Décrire par des phrases le sens de variation de la fonction f.
3. Préciser les extremums éventuels de la fonction f et les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.
4. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

54 Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;5]$:
- $f(-1)=f(5)=0$; $f(2)=3$; $f(4)=-2$;
- f est croissante sur $[-1\,;2]$ et sur $[4\,;5]$;
- f est décroissante sur $[2\,;4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.
3. Préciser les extremums éventuels de la fonction f et les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

55 Pour chacune des courbes suivantes :
a) déterminer si la fonction représentée admet un maximum.
b) dresser le tableau de variations correspondant.





56 Pour chaque tableau de variations, déterminer si la fonction représentée admet un maximum et/ou un minimum avec les informations disponibles.

a)

x	$-\infty$		0		9
f		↘	8	↗	

b)

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
g		↘	-10	↗	8	↘	

c)

x	$-\infty$		-2		7		10
h		↗	0	↘	-30	↗	7

d)

x	$-\infty$		15		30
m		↗	25	↘	0

e)

x	1		$+\infty$
p	-5	↗	

57 Les tableaux de variations suivants comportent des incohérences. Lesquelles ? Justifier.

x	-10		-2		0		7,5
f		↗	2	↘	$\frac{10}{3}$	↗	8

x	-10		-5		2
g	7	↗	25	↗	9

x	-3		-4		2
h	0	↘	-1	↗	4

Comparer deux images

58 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-5		-3		1		4
f	-4	↗	3	↘	1	↗	7

1. Donner son ensemble de définition.

2. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-5 ; -3]$.

3. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-3 ; 4]$.

4. Comparer si possible, les nombres suivants.
a) $f(-4)$ et $f(-3)$ **b)** $f(-2)$ et $f(3)$

59 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	3		5		6		10
f	4	↗	9	↘	-4	↗	8

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

a) $f(3) < f(4)$
b) $f(4{,}9) > f(5{,}9)$
c) $f(5{,}1) < f(5{,}9)$
d) $f(10) > f(3)$
e) f est définie sur $[-2 ; 10]$.
f) 5 est le maximum de f sur $[3 ; 10]$.
g) f admet un minimum en 3 sur $[3 ; 10]$.
h) Si $x \in [3 ; 6]$, alors $4 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

60 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-10		-2		0		7,5
f	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

Comparer si possible les nombres suivants en justifiant.

a) $f(-2)$ et $f(-1)$ **b)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$ **c)** $f(-1)$ et $f(1)$

d) $f(3{,}6)$ et $f(3{,}7)$ **e)** $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(4)$ **f)** $f(-5)$ et $f(-3)$

61 Soit f une fonction définie sur $[-2 ; 5]$ telle que :
• $f(-2) = 2$ • $f(2) = -3$ • $f(5) = 0$
• f est décroissante sur $[-2 ; 2]$ et croissante sinon.

1. Encadrer $f(x)$ quand :
a) $x \in [-2 ; 2]$ **b)** $x \in [2 ; 5]$

2. Si $x \in [-2 ; 5]$, donner un encadrement de $f(x)$.

3. Quels sont les extremums de f ?

Variations des fonctions de référence

62 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction carré.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.
a) $1{,}5^2$ et 6^2 **b)** $(-0{,}7)^2$ et $(-0{,}082)^2$
c) $(\pi - 1)^2$ et 16 **d)** $(-1{,}25)^2$ et $2{,}25^2$

63 Sans utiliser de calculatrice, comparer :
a) $3{,}5^2$ et $4{,}2^2$ **b)** $(-4{,}5)^2$ et $(-2{,}5)^2$
c) π^2 et $(3{,}2)^2$ **d)** $\frac{1}{5^2}$ et $\frac{1}{3^2}$ **e)** $(-5)^2$ et $(3{,}5)^2$

64 Encadrer x^2 quand :
a) $2 < x < 5$ **b)** $-7 < x < -1$
c) $0 < x < 3$ **d)** $x \in [-2 ; 0[\cup]0 ; 3[$

65 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.
a) $-\frac{1}{2{,}05}$ et $-\frac{1}{1{,}95}$ **b)** $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1}{3}$ et 0,5

66 Sans utiliser de calculatrice, comparer :
a) $\frac{1}{2^2}$ et $\frac{1}{3^2}$ **b)** $-\frac{1}{41}$ et $-\frac{1}{92}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $-\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{3}$

Exercices d'entraînement

67 Encadrer $\frac{1}{x}$ quand :

a) $2 \leqslant x \leqslant 5$ **b)** $-7 < x < -1$

c) $0 < x < 3$ **d)** $x \in [-2 ; -0{,}1]$

68 Donner un encadrement de x quand :

a) $1 < \frac{1}{x} < 3$ **b)** $-4 < \frac{1}{x} < -2$

c) $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < \frac{7}{6}$ **d)** $-2 < \frac{1}{x} < 0$

69 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction cube.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $2{,}5^3$ et 4^3 **b)** $(-4)^3$ et $(-7)^3$

c) $3{,}5^3$ et 27 **d)** $\left(\frac{5}{9}\right)^3$ et $\left(\frac{8}{7}\right)^3$

70 Donner un encadrement de x^3 quand :

a) $0 \leqslant x \leqslant 2$ **b)** $-1 \leqslant x < 0$

c) $-3 < x < 6$ **d)** $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1{,}5$

71 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $\sqrt{5}$ et $\sqrt{5{,}7}$ **b)** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\frac{5}{2}}$

c) $\sqrt{50}$ et 7 **d)** $\sqrt{\frac{10}{3}}$ et $\sqrt{2{,}7}$

72 Résoudre les inéquations suivantes pour $x \in [0 ; +\infty[$.

a) $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ **b)** $4 < \sqrt{x} \leqslant 5$

c) $\sqrt{x} < 9$ **d)** $\sqrt{x} > 1$

73 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f_1(x) = -3x + 10$ **b)** $f_2(x) = \frac{x}{2} - 4$

c) $f_3(x) = -3 + 2x$ **d)** $f_4(x) = -\frac{2x}{7} + \frac{3}{5}$

74 Décrire les variations des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -2x + 13$ **b)** $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$

c) $l(x) = (\sqrt{5} - 3)x + 4$ **d)** $j(x) = \frac{-7x - 5}{3}$

e) $m(x) = (2x + 3)^2 - (5 - 2x)^2$

75 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$.
1. Montrer que $f(x) = (x - 4)^2 - 13$.
2. Calculer que $f(5)$ et $f(1)$.
3. Montrer que $f(x) \geqslant -13$ pour x réel.
4. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

76 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
1. Montrer que $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$ pour tout réel x.
2. Montrer que $f(x) \leqslant 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
Préciser le nombre x pour lequel il est atteint.

77 On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 4]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x} + 5$.
1. Déterminer l'image de 4 par f.
2. Montrer que f a pour minimum 5.
Préciser pour quelle valeur de x ce minimum est atteint.

78 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$.
1. Calculer $f(1)$ et $f(-3)$.
2. Déterminer le minimum de f et en quelle valeur il est atteint.

79 f est une fonction affine décroissante définie sur $\mathbb{R}$ dont la droite représentative passe par le point A(– 3 ; 2).
Donner une expression possible pour f.

80 f est une fonction linéaire dont la droite représentative passe par le point A(– 6 ; – 1).
Déterminer son sens de variation.

81 f est une fonction affine telle que $f(2) = -4$ et $f(5) = -\frac{5}{2}$.
Déterminer son sens de variation.

Travailler autrement

82 Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $y = 2x + 1$ et le point A(3 ; 0). Pour quel point M de d la distance AM est-elle minimale ?

En groupe

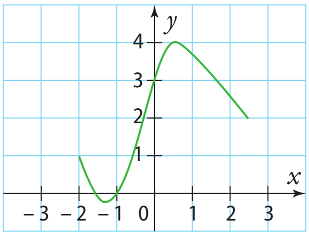
83 f est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que sa droite représentative passe par le point B(–1 ; 2).
Donner trois expressions possible pour $f(x)$.

À l'oral

84 Tableaux de variations

Déterminer les variations des fonctions suivantes.

a) f est une fonction dont voici la courbe représentative.



b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x + 3$.

c) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.

d) k est une fonction qui donne la note obtenue par Jonas à un devoir en fonction de son temps de révision, en heures, durant la journée précédente.

85 Variations, comparaisons et tracés

f est une fonction définie sur $[-3 ; 4]$ telle que :

• f est croissante sur $[-3 ; -1]$;
• f est décroissante sur $[-1 ; 0]$;
• f est croissante sur $[0 ; 4]$.

On sait de plus que $f(-3) = f(0) = -2$ et $f(-1) = 3$.
Le maximum de f est 6.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Quel est le minimum de la fonction f ?
Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

3. Comparer $f(2)$ et $f(3)$. Justifier.

4. Comparer $f(-2)$ et $f(4)$.

5. Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

86 Résolution d'inéquations

f et g sont des fonctions dont voici les tableaux de variations.

x	-1		0		3		5
f	3	↗	5	↘	4	↗	6

x	-1		$-0{,}5$		4		5
g	0	↗	1	↘	-2	↗	4

1. Donner leurs ensembles de définition.

2. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0 ; 5]$.

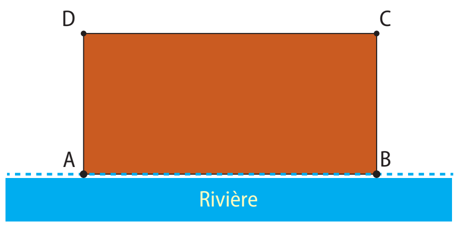
3. Donner un encadrement de $g(x)$ lorsque $x \in [-0{,}5 ; 5]$.

4. Comparer, si possible, les nombres suivants.
a) $f(-0{,}5)$ et $f(4)$
b) $g(-0{,}75)$ et $g(4)$

5. Résoudre $f(x) > g(x)$ pour $x \in [-1 ; 5]$.

87

Aya dispose d'une clôture de longueur 40 m. Elle souhaite construire pour ses lamas un enclos rectangulaire, adossé à une rivière. Ainsi, seuls les côtés [AD], [DC] et [CB] nécessiteront une clôture.



Aya se demande comment laisser le plus d'espace possible à ses animaux.
On note $x = \text{AD}$ et $f(x)$ l'aire du rectangle ABCD.

1. Déterminer l'aire du rectangle si $x = 5$.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

3. Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une estimation de l'aire maximale qu'Aya pourrait obtenir.

5. a) Montrer que $f(x) = -(x - 20)^2 + 400$.
b) Retrouver le résultat de la question **4.** par le calcul.

88 Vrai ou faux ?

On considère le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-5 ; 8]$.

x	-5		0		1		3		8
g	1	↘	0	↗	4	↘	0	↘	-5

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie, fausse ou si l'on ne peut pas conclure.

a) 0 a pour image 3.

b) 0 a deux antécédents.

c) $g(-4) \geqslant g(-3)$

d) $g(-2) \geqslant g(0{,}5)$

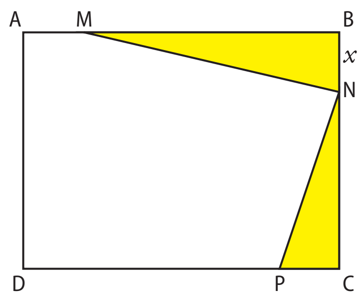
e) Le maximum de g sur $\left[-5 ; \dfrac{1}{2}\right]$ est 1.

f) Si $a \in [-5 ; 1]$ alors $g(a) \geqslant 0$.

g) Si $g(a) \geqslant 0$ alors $a \in [-5 ; 1]$.

89 Surface maximale

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm.
N est un point mobile sur le segment [BC]. On note x la longueur en centimètres de [BN].
M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que
AM = BN = CP = x.



Le but de cet exercice est de déterminer où placer N sur le segment [BC] pour que l'aire de la surface jaune, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

1. Justifier que $x \in [0 ; 8]$.

2. Exprimer BM en fonction de x.

3. Exprimer CN en fonction de x.

4. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.

5. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire totale de la surface jaune.
Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.

6. a) Montrer que $f(x) = -(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25$.
b) En déduire la solution au problème posé.

Exercices d'approfondissement

90 Reconnaissance de fonctions

f, g, h et k sont quatre fonctions.
On sait que :
- g est croissante sur son ensemble de définition ;
- 0 n'a pas d'antécédent par k ;
- 4 a plusieurs antécédents par f.

Associer chacune de ces fonctions à leur expression parmi les suivantes.

① $3x-2$ ② $-2x+6$. ③ x^2 ④ $\frac{1}{x}$

Démonstrations

91 Variations de la fonction carré

1. Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.
Recopier et compléter.
a) $a \leqslant b$ donc a^2 … ab.
b) $a \leqslant b$ donc ab … b^2.
c) Soit a^2 … b^2.
d) Donc la fonction carré est … sur $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer de même, les variations de la fonction carré sur $]-\infty\,;0]$ en prenant cette fois a et b deux réels négatifs tels que $a \leqslant b \leqslant 0$.
3. Établir le tableau de variations de la fonction carré.

92 Variations de la fonction inverse

1. Soit a et b avec $0 < a \leqslant b$.
a) Montrer que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.
b) Quel est le signe de $b-a$?
c) Quel est le signe de ab ?
d) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit a et b avec $a \leqslant b < 0$.
a) Quel est le signe de $b-a$?
b) Quel est le signe de ab ?
c) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.

93 Enchaînement de fonctions (1)

Algo & Prog

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

1. Conjecturer les variations de la fonction f.
2. a) Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$$x \rightarrow \ldots \rightarrow \ldots \rightarrow \frac{1}{x^2+4}$$

b) Recopier et compléter le raisonnement suivant.
Soit a et b deux nombres positifs tels que $a < b$.

$a < b$	$\Rightarrow$	$a^2 \ldots b^2$	car …
	$\Rightarrow$	$a^2+4 \ldots b^2+4$	car …
	$\Rightarrow$	$\frac{1}{a^2+4} \ldots \frac{1}{b^2+4}$	car …

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

94 Enchaînement de fonctions (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \frac{3x-5}{-x+2}$.

1. Conjecturer les variations de la fonction f sur $]-\infty\,;2[$ puis sur $]2\,;+\infty[$.
2. a) Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -3 + \frac{1}{-x+2}$.
b) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \rightarrow -x+2 \rightarrow \ldots \rightarrow \ldots$$

c) Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
d) Démontrer que f est croissante sur $]2\,;+\infty[$.
3. Démontrer que f est croissante sur $]-\infty\,;2[$.

95 Sûr ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
Que penser des affirmations suivantes ? Argumenter.
1. Émilie affirme que f est croissante sur $[-3\,;-1]$.
2. Paul calcule $f(0)$ et $f(3)$ et vérifie que $f(3) > f(0)$.
Il conclut alors que f est croissante sur $[0\,;3]$.
3. Zohra affirme que 4 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$.

96 Maximum de fonction

TICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.
1. Conjecturer la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Calculer $f(x) - 6$.
b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

factoriser(– x^2 + 4x – 4)
– (x – 2)^2

Justifier que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est bien 6.

Démonstrations

97 Démontrer l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Soit a et b deux réels positifs.
1. Développer $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
2. Justifier que $\sqrt{a+b}^2 \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.
3. Conclure.

98 Comparer deux moyennes

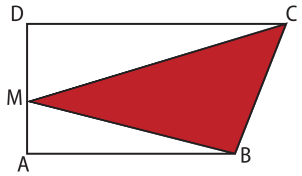
Soit x_1 et x_2 deux nombres réels positifs.
La moyenne arithmétique de ces nombres est $x_A = \frac{x_1+x_2}{2}$.
La moyenne géométrique de ces deux nombres réels est donnée par $x_G = \sqrt{x_1x_2}$.

1. Montrer que $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - \sqrt{x_1x_2}^2 = \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$.

2. Justifier que $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{x_1x_2}^2$.

3. Comparer les deux moyennes.

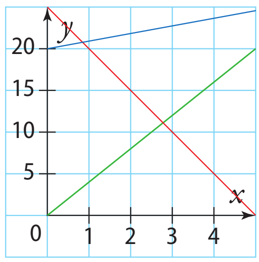
99 Aire et trapèze



On considère un trapèze rectangle ABCD, comme sur la figure ci-contre. On place un point libre M sur le segment [AD].

La distance AM en cm est notée x.

On a représenté les courbes des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.



1. À quelle aire correspond chacun des graphiques ? Justifier.

2. Retrouver les expressions des fonctions représentées.

3. En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

100 Aires

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et BC = 3 cm. On place un point M libre sur [AB].

À l'intérieur du rectangle, on construit le demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC.

1. Comment varie l'aire de la figure composée du demi-cercle et du triangle en fonction de la position de M ?

2. a) L'aire atteint-elle un maximum ? Si oui, préciser pour quelle position de M.

b) L'aire atteint-elle un minimum ? Si oui, préciser pour quelle position de M.

101 Variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de f.

1. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.

Montrer que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)$.

2. a) Montrer que si $-1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$.

b) Que peut-on en déduire pour f sur $[-1\,;+\infty[$?

3. Montrer que f est décroissante sur$]-\infty\,;-1]$.

102 Balayage

Algo & Prog

On considère la fonction f définie par $f(x) = -7x^2 + 3x + 1$ pour $x \in [-1\,;2]$ dont on donne le tableau de variations.

x	-1	...	2
f	-9	↗ ↘	-21

On considère l'algorithme suivant.

```
x←-1
a←-7*x*x+3*x+1
b←-7*(x+0,1)^2*(x+0,1)^2+3*(x+0,1)+1
Tant que a<b :
    x←x+0,1
    a←b
    b←-7*(a+0,1)^2*(a+0,1)^2+3*(a+1)+1
Fin Tant que
Afficher x
```

1. Que renvoie cet algorithme ?

2. Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie une valeur approchée au millième de la valeur de x pour laquelle f est maximale.

3. Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie également une valeur approchée du maximum de la fonction.

103 Trajectoire d'une balle

Une joueuse de handball lance une balle devant elle.

Au bout de x mètres parcourus, la hauteur de la balle (en mètres) avant qu'elle ne touche le sol est donnée par :

$h(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}9x + 2$.

1. Quelle est la hauteur de la balle après 20 mètres parcourus ? Que peut-on en déduire pour la balle ?

2. a) Montrer que $h(x) = -0{,}05\,(x - 9)^2 + 6{,}05$.

b) Que peut-on dire du signe de $(x - 9)^2$?

c) En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle.

Vers la 1re

Orientation

104 Spécialité Maths

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2$.

1. Conjecturer le sens de variation de la fonction f à l'aide de la calculatrice.

2. Démontrer que $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 4)$.

3. On suppose que $a < b < 2$.

a) Quel est le signe de $b - a$?

b) Comparer $a + b$ et 4 puis $f(b)$ et $f(a)$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\,;2[$.

4. On suppose que $2 < a < b$.

Quel est le sens de variation de la fonction f ?

5. La fonction f admet-elle un extremum ? Lequel ?

105 STMG SES

Un fabricant produit dans une usine des tee-shirts. Après la fabrication et la vente de x centaines de tee-shirts en un mois, le bénéfice net réalisé en centaines d'euros est donné par la fonction :

$B(x) = -0{,}5x^2 + 50x - 800$ pour $x \geqslant 0$.

1. Déterminer le bénéfice obtenu pour 4 000 tee-shirts produits et vendus.

2. Montrer que $B(x) = -0{,}5(x - 50)^2 + 450$.

3. En déduire le bénéfice maximal que peut obtenir le fabricant. Pour combien de tee-shirts fabriqués et vendus est-il atteint ?

Travaux pratiques

Français TICE Modéliser, conjecturer, démontrer 50 min

1 Roméo et Juliette

Roméo et Juliette sont tombés amoureux.

Juliette est assise sur un banc dans le jardin des Capulet à l'ombre d'un mur couvert d'un rosier grimpant.

Roméo l'aperçoit au loin et voudrait la rejoindre le plus rapidement possible tout en lui cueillant une rose en chemin.

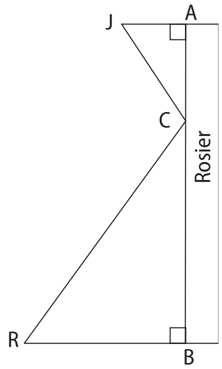
A ▸ Modélisation en géométrie dynamique

1. Reproduire la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Le point J représente Juliette et le point R Roméo.

   Le segment [AB] représente le mur couvert du rosier grimpant.

   Le point C, mobile sur ce segment, représente l'endroit où Roméo devra cueillir la rose.
   - AB = 6
   - JA = 2
   - RB = 5
   - (JA) et (RB) sont perpendiculaires à (AB).
   - C est un point libre sur le segment [AB].



2. Grâce aux fonctionnalités du logiciel, décrire comment varie la longueur du trajet RC + CJ en fonction de la position du point C sur le segment [AB].
3. Conjecturer où doit être situé le point C pour que ce trajet soit le plus court possible.

B ▸ Étude mathématique

Dans cette partie, on pose x = AC et on étudie la fonction f qui à x associe le chemin parcouru par Roméo, c'est-à-dire la longueur RC + CJ sur le schéma.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, déterminer une approximation à 10^{-2} près de la position du point C qui minimise le trajet RC + CJ.
4. Comparer avec le résultat conjecturé dans la partie **A**.

C ▸ Recherche de la valeur exacte

Dans cette partie, on détermine géométriquement la position du point C.

1. Reproduire la figure et y placer le point R′, symétrique du point R par rapport au point B.
   On appelle I l'intersection des segments [AB] et [R′J].
2. Justifier que RI + IJ = R′I + IJ.
3. Expliquer pourquoi, si C ∈ [AB], la longueur RC + CJ est minimale lorsque C est en I.
4. Quel théorème étudié au collège peut s'utiliser dans les triangles AIJ et BIR′ ?
5. Calculer AC et comparer avec la valeur trouvée dans la partie **B**.

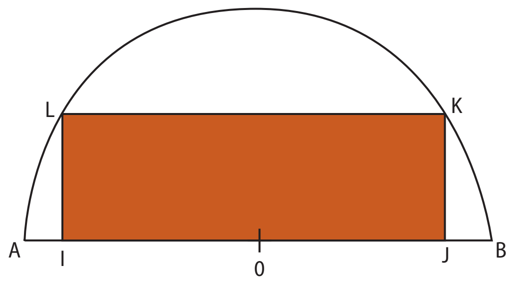
TICE — Modéliser, conjecturer — 45 min

2 Pour construire une salle de spectacle

Monsieur Sphéro, architecte, souhaite répondre à un appel d'offres pour construire une salle de spectacle. Il propose une salle sphérique et voudrait une approximation de la taille maximale possible d'un écran de cinéma dans ce type de salle.

Voici ci-dessous le schéma qu'il fournit à Matéo son assistant.

- [AB] est un segment tel que AB = 10 m ;
- O est le milieu de [AB], I un point mobile sur [OA] ;
- IJKL est un rectangle tel que OJ = OI et que K et L soient sur le cercle de diamètre [AB].



A ▸ À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Lancer un logiciel de géométrie dynamique et réaliser la figure précédente.
2. Conjecturer la position du point I pour que l'aire du rectangle IJKL soit maximale.

B ▸ Avec la calculatrice

On pose $x = \text{OI}$ et on appelle $f(x)$ l'aire du rectangle IJKL.

1. Expliquer pourquoi x varie dans [0 ; 5].
2. Déterminer, en fonction de x, la longueur IL.
3. En déduire l'aire du rectangle IJKL en fonction de x.
4. En utilisant une calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

5. Observer la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice.
6. Donner une valeur approchée au dixième près de l'aire maximale, ainsi que la valeur de x pour laquelle cette aire semble être maximale.

C ▸ Affinage numérique

Pour être plus précis, il vaut mieux utiliser la table en fixant la valeur initiale de x ainsi que son pas d'avancement.

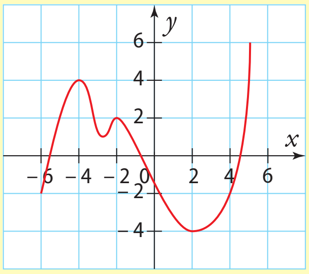
1. En utilisant la table, dresser un nouveau tableau qui doit permettre de donner une valeur approchée au centimètre près de la valeur de x pour laquelle l'aire semble être maximale.
2. Donner cette valeur ainsi que celle de l'aire correspondante.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième près de la valeur pour laquelle l'aire semble être maximale.

En autonomie

1 Décrire des variations de fonctions

QCM

Pour les exercices 107 et 108, on considère la courbe représentative d'une fonction f donnée ci-contre.



107 La fonction f est croissante sur :

[a] $[-4\,;-2]$ [b] $[-6\,;-4]$ [c] $[3\,;4]$ [d] $[0\,;1]$

108 Par quelles valeurs compléter le tableau de variations pour qu'il corresponde à cette courbe ?

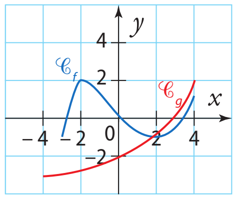
[a] $a = 2$ et $b = -4$ [b] $a = 3{,}5$ et $b = 0$

x	-6		-4		$-2{,}8$		-2		a		5
f	-2	↗	4	↘	$1{,}2$	↗	2	↘	b	↗	6

109 ✶ **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.

110 ✶ Dresser les tableaux de variations des fonctions représentées par les courbes ci-contre.



111 ✶✶ Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction dont voici le tableau de variations.

x	0		3		4
f	0	↗	2	↘	-1

112 ✶✶ Étudier les variations des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 4x - 2$ **b)** $g(x) = x(x - 1) + x$

c) $h(x) = x(3 - 2x) + 2(x^2 - x - 1)$

113 ✶✶ À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, déterminer la valeur du maximum de la fonction f définie sur $[-10\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 4x + 6}$.

2 Utiliser les variations de fonctions

QCM

Pour les exercices 114 à 117, on considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-6		-2		-1		3		7
f	7	↘	-5	↗	2	↘	-4	↗	0

114 Sur l'intervalle $[-5\,;-3]$, la fonction est :

[a] monotone [b] croissante

[c] décroissante [d] On ne peut pas savoir.

115 La fonction f est croissante sur :

[a] $[3\,;7]$ [b] $[0\,;1]$

[c] $[2{,}1\,;2{,}5]$ [d] $[-1{,}5\,;-1]$ et sur $[4{,}5\,;7]$

116 $f(-2)$ est :

[a] supérieur ou égal à $f(-5)$

[b] inférieur ou égal à $f(-5)$

117 Si $x \in [-6\,;3]$, alors :

[a] $6 \leqslant f(x) \leqslant 3$ [b] $2 \leqslant f(x) \leqslant -4$

[c] $-5 \leqslant f(x) \leqslant 7$ [d] $-4 \leqslant f(x) \leqslant 7$

118 ✶ **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction carré.

2. Comparer les nombres suivants sans aucun calcul.

a) $2{,}5^2$ et $2{,}5015^2$ **b)** $(-3{,}1)^2$ et $(-2{,}75)^2$

3. Donner un encadrement de x^2 si :

a) $x \in [1\,;4]$ **b)** $x \in\,]-1\,;2]$

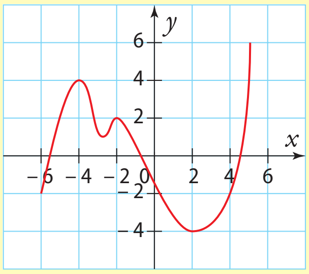
119 ✶✶ Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ lorsque :

a) $x \in [1\,;3]$ **b)** $x > 2$ **c)** $x \in\,]0\,;3]$

3 Déterminer un minimum ou un maximum

QCM

Pour les exercices 120 à 123, on considère la courbe représentative d'une fonction donnée ci-dessous.



120 Sur [–6 ; 2], le maximum de f est :

a 4 b 1 c 2 d 6

121 Sur [–6 ; 5], –4 est :

a un minimum
b un maximum
c un extremum

122 f a un minimum qui est atteint pour :

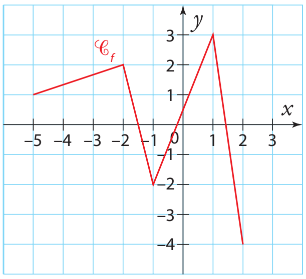
a $x = -4{,}5$ b $x = 2$ c $x = -4$ d $x = 6$

123 Si $x \in [-2 ; 2]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle :

a [–2 ; 2] b [–4 ; 4] c [–4 ; 2]

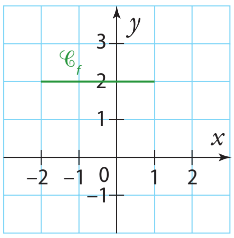
124 ✶ La courbe représentative d'une fonction f est tracée dans le repère ci-contre.

Déterminer le maximum et le minimum de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x ils sont atteints.



125 ✶ La courbe représentative d'une fonction f est tracée dans le repère ci-contre.

Déterminer le maximum et le minimum de f.



126 ✶ f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	–2	5	6
f	–3 ↗	3	↘ –2

1. Déterminer le maximum de f et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.

2. Déterminer le minimum de f.

127 ✶ g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	–4	3	6	7	7,5
g	1 ↗	5	↘ –2 ↗	5	↘ –2

1. g admet-elle un maximum ?
Si oui, pour quelles valeurs de x est-il atteint ?
2. g admet-elle un minimum ?
Si oui, pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

128 ✶ La fonction carré admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

129 ✶ La fonction racine carrée admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

130 ✶ La fonction inverse admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

131 ✶ La fonction cube admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

132 ✶✶ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$.
Justifier que f a pour minimum –3.

133 ✶✶ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.
1. Montrer que $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$.
2. Démontrer que f a un maximum.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x ce maximum est-il atteint ?

10

Le nombre de bouquets de fleurs qui doivent être produits pour être vendus peut être calculé en résolvant des inéquations.

Signe d'une fonction et inéquations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.	1 p. 248 1 2 p. 248 19 20 p. 252
Déterminer algébriquement le signe d'une fonction affine.	2 p. 249 3 4 p. 249 23 24 p. 253
Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient.	3 p. 250 5 6 p. 250 28 30 31 p. 253
Interpréter un tableau de signes.	4 p. 251 42 43 p. 254
Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signe.	4 p. 251 10 11 p. 251 36 38 p. 254
Démonstration Étudier la position relative des courbes d'équations $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.	Cours p. 247 73 p. 256

1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 245, 247, 256

Algo & Prog
p. 242, 262

TICE
p. 259, 261, 262, 263

Les autres disciplines
p. 257

Pour prendre un bon départ

Exo — Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-19

1. Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $2x - 3 = 0$ **b)** $2x + 3 = -7$ **c)** $8x + 7 = 10x - 2$

2. Résoudre des inéquations

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $4x - 5 \geqslant 0$ **b)** $2x + 9 < 5x - 4$

3. Factoriser des expressions en utilisant les identités remarquables

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 2x + 1$ **b)** $25x^2 + 60x + 36$

c) $49x^2 - 64$ **d)** $(x - 2)^2 - 9$

4. Factoriser des expressions en utilisant un facteur commun

Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x - 8$ **b)** $7x^2 - 2x$

c) $2(x + 1) - x(x + 1)$ **d)** $(2x + 1)(3x - 4) + (3x - 4)(5x + 3)$

5. Réduire au même dénominateur

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

$\mathrm{A}(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{2}$ $\mathrm{B}(x) = \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3}{-x+1}$

6. Représenter graphiquement des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -x + 3$.

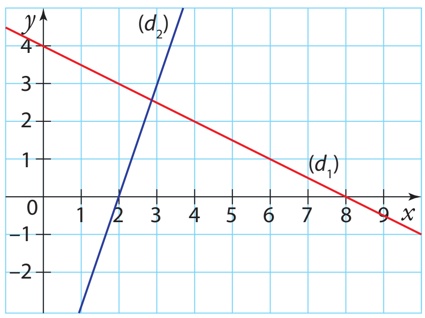
Tracer leur représentation graphique dans un repère.

7. Interpréter la courbe d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 3x - 6$
- $g(x) = -0{,}5x + 4$

Leurs droites représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.



1. Associer chaque fonction à sa droite représentative.

2. Résoudre par le calcul $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.

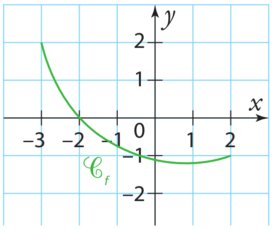
Doc — Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

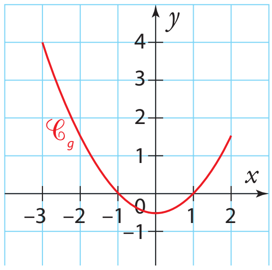
Activités

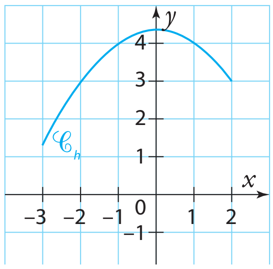
1 Tableaux de signes

25 min

f, g et h sont des fonctions définies sur $[-3 ; 2]$, dont voici les courbes représentatives dans un repère.







1. a) Résoudre $f(x) = 0$.

b) Résoudre $f(x) > 0$.

c) Résoudre $f(x) < 0$.

d) Recopier et compléter les phrases suivantes.

• $f(x)$ est strictement positif si $x \in$ …

• $f(x)$ est nul si …

• $f(x)$ est … si $x \in$ …

e) Les informations précédentes peuvent être récapitulées dans un tableau, appelé tableau de signes.
Compléter les pointillés avec des signes + ou –.

x	-3		-2		2
$f(x)$		…	0	…	

2. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ et de $h(x)$ sur le modèle précédent.

Cours 1 p. 244

Algo & Prog

2 Signes et viennoiseries

45 min

Une boulangerie propose des brioches à 80 centimes. Assia possède un avoir de 4 euros dans cette boulangerie.

Elle entre et décide d'acheter un nombre x de brioche(s). On note $R(x)$ le montant restant en euros (on considère que la boulangerie fait crédit et que l'avoir d'Assia peut donc être négatif).

1. Expliquer pourquoi $R(x) = -0{,}8x + 4$ pour $x \in \mathbb{N}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}8x + 4$.

2. Écrire un algorithme qui, lorsque l'on donne une valeur x en entrée, renvoie si l'expression $f(x)$ est positive ou négative.

3. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Résoudre l'équation $f(x) > 0$.

c) Dans le tableau de signes ci-contre, compléter les pointillés avec des + ou des –.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		…	0	…	

4. Au bout de combien de jours Assia sera-t-elle endettée auprès de sa boulangerie ?

5. Dresser le tableau de signes d'une fonction g définie par $g(x) = 3x - 12$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Coup de pouce Utiliser la même démarche que dans la question **3.**

Cours 2 p. 245

3 Signes à déterminer

40 min

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.
Dresser son tableau de signes.

2. Déterminer de même le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5$.

3. Sans calcul, déterminer le signe de $f(1) \times g(1)$ et de $\dfrac{f(2)}{g(2)}$.

4. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (-2x + 3)(2x + 5)$.

a) Quels doivent être le signe de $-2x + 3$ et de $2x + 5$ pour que $P(x)$ soit positif ?

b) Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		…		…		$+\infty$
$-2x+3$					0		
$2x+5$			0				
$P(x)$				+		−	

5. On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \dfrac{-2x + 3}{2x + 5}$.

a) La fonction Q est-elle définie pour tout nombre réel ?

b) Étudier le signe de la fonction Q en présentant les résultats sous forme de tableau.

↪ Cours 3 p. 246

4 Résolution d'inéquation et lecture graphique

35 min

On considère l'inéquation $\dfrac{4}{x + 2} < 4$.

1. -3 est-il une solution de cette inéquation ?

2.

> Je sais résoudre cette inéquation.
> Je multiplie de chaque côté par
> $x + 2$ et cela donne $4 < 4x + 8$,
> ce qui est facile à résoudre : les
> solutions sont les nombres $x > -1$.

Pourquoi Freddie a-t-il tort ?

3. À l'aide d'une calculatrice, observer les courbes d'équations $y = \dfrac{4}{x + 2}$ et $y = 4$ et lire graphiquement les solutions de $\dfrac{4}{x + 2} < 4$.

4. a) Expliquer pourquoi l'inéquation de départ revient à résoudre $\dfrac{-4x - 4}{x + 2} < 0$.

b) En déduire les solutions du problème posé.

↪ Cours 3 p. 246

Cours

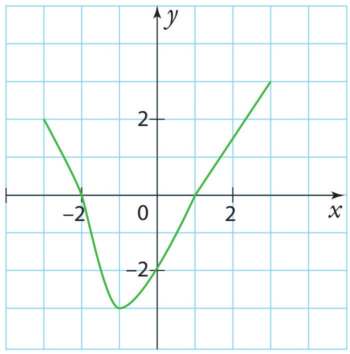
1 Étude du signe d'une fonction

Définition Signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement positif, nul ou strictement négatif.
Le signe est souvent présenté sous la forme d'un tableau de signes.

Exemples

① f est une fonction définie sur $[-3\,;3]$ dont voici la courbe représentative dans un repère.



- $f(x)$ est strictement positif si $x \in [-3\,;-2[\cup]1\,;3]$;
- $f(x)$ est strictement négatif si $x \in]-2\,;1[$;
- $f(x)$ est nul si $x = -2$ ou $x = 1$.

On présente les résultats précédents dans un tableau de signes :

x	-3		-2		1		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

② g est la fonction définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$g(x)$ est toujours positif sauf en $x = 0$ où $g(x)$ est nul.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

③ h est la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
$h(x)$ est du même signe que x.
On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

Exercice résolu 1 p. 248

Remarques

① Le tableau de signes d'une fonction comporte deux lignes.
Sur la **première ligne**, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ s'annule.
Sur la **deuxième ligne**, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule.

② Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation dont le second terme est 0.
Résoudre l'inéquation revient alors à chercher pour quel nombre l'expression est positive ou négative.

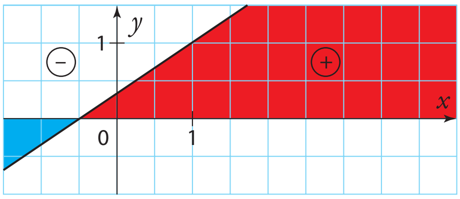
2 Étude du signe d'une fonction affine

Propriété Signe d'une fonction affine

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.

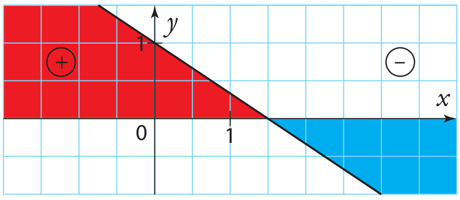
$a > 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f est négative puis positive.

$a < 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f est positive puis négative.

Démonstrations

① Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Pour $x > -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Pour $x = -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

Donc f est négative sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}\right[$ puis positive sur $\left]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$: on en déduit le tableau de signes qui précède.

② Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Pour $x > -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Pour $x = -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$. Donc f est positive sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}\right[$ puis négative sur $\left]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$.

Exemple

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -3x + 4$.

$g(x) = ax + b$ avec $a = -3$, a est négatif, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On recherche la valeur qui annule $g(x)$:

$-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{-4}{-3}$ soit $x = \dfrac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

Exercice résolu 2 p. 249

Cours

3 Signe et opérations

Règle Signe d'un produit ou d'un quotient

Pour déterminer le signe du produit (ou du quotient) de deux fonctions, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

① La 1e ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent, c'est-à-dire pour lesquelles leur produit s'annule.
Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.

② Les 2e et 3e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.

③ La 4e ligne se remplit avec la règle des signes du produit (ou du quotient) de deux nombres relatifs :

- **des facteurs de même signe donnent un produit (ou un quotient) positif ;**
- **des facteurs de signes contraires donnent un produit (ou un quotient) négatif.**

Exemples

① Étudier le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x + 4)(-2x + 6)$.

h est un produit de deux fonctions affines. On recherche les valeurs qui annulent $3x + 4$ et $-2x + 6$:

- $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ et $x \mapsto 3x + 4$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x \mapsto -2x + 6$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x + 6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

② Déterminer le signe de la fonction k définie par $k(x) = \frac{3x - 5}{2x + 7}$.

k est un quotient de deux fonctions affines.

On recherche les valeurs pour lesquelles les fonctions affines s'annulent :

- $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ et $x \mapsto 3x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ et $x \mapsto 2x + 7$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
$k(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Remarques

① Lorsque $x = \frac{5}{3}$, alors $3x - 5 = 0$ et $2x + 7 > 0$ donc $\frac{3x-5}{2x+7} = 0$, comme indiqué dans la dernière ligne.

En revanche, lorsque $x = -\frac{7}{2}$, alors $3x - 5 < 0$ et $2x + 7 = 0$ donc la fonction k n'est pas définie (puisque son dénominateur s'annule) : $-\frac{7}{2}$ est une **valeur interdite**, on la signale par une **double barre**.

② Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer le signe de la somme, sauf lorsque les deux termes sont de même signe.

Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 4 \geqslant 0$.

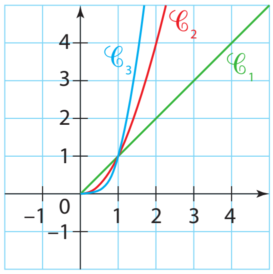
Exercice résolu 3 p. 250

4 Position relative de courbes de référence

Propriété Positions relatives des courbes de référence

On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

- **Si $x \in [0 ; 1[$, alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.**
- **Si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent au point de coordonnées (1 ; 1).**
- **Si $x \in]1 ; +\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.**



Démonstration

- Pour comparer x^2 et x, on va étudier le signe de leur différence.

$x^2 - x = x(x - 1)$

On étudie le signe du produit dans le tableau de signes ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
x	0	+		+	
$x - 1$		–	0	+	
$x(x-1)$	0	–	0	+	

Si $x \in]0 ; 1[$, $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$ et $\mathscr{C}_2$ est située en dessous de $\mathscr{C}_1$.

Si $x \in]1 ; +\infty[$, $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.

Si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se croisent.

- De même, on étudie le signe de $x^3 - x^2$.

$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

On étudie le signe du produit dans le tableau ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
x^2	0	+		+	
$x - 1$		–	0	+	
$x^2(x-1)$	0	–	0	+	

Si $x \in]0 ; 1[$, $x^3 - x^2 < 0$ donc $x^3 < x^2$ et $\mathscr{C}_3$ est située en dessous de $\mathscr{C}_2$.

Si $x \in]1 ; +\infty[$, $x^3 - x^2 > 0$ donc $x^3 > x^2$ et $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$.

Si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_2$ se croisent.

Ces points mis ensemble démontrent la propriété.

Exercice résolu 4 p. 251

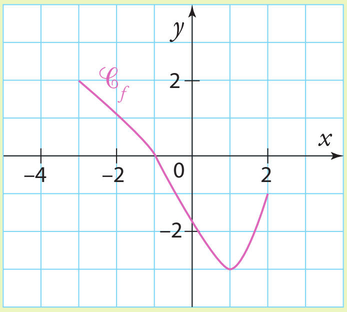
Exercices résolus

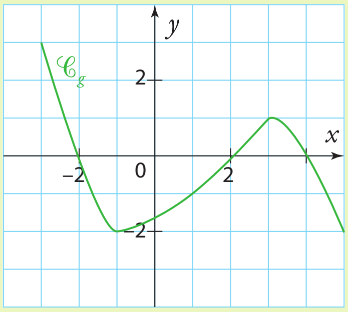
Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-20

1 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

Cours 1 p. 244

On considère les fonctions f et g dont voici les courbes représentatives dans des repères.





1. a) Résoudre $f(x) = 0$.
b) Résoudre $f(x) > 0$.
c) Dresser le tableau de signes de la fonction f.
2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction g.

Solution

1. a) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$. 1
b) $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3\,;-1[$. 2
c) On obtient le tableau de signes suivant : 3 4 5

x	-3		-1		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. $g(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$.

$g(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3\,;-2[\cup]2\,;4[$.

x	-3		-2		2		4		5
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conseils & Méthodes

1 Résoudre $f(x) = 0$ revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses.

2 Résoudre $f(x) > 0$ revient à chercher l'abscisse des points de f situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

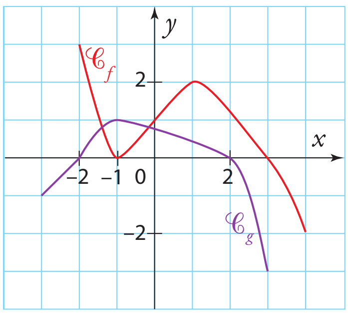
3 On indique dans la première ligne du tableau l'ensemble de définition de la fonction ainsi que les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

4 On indique les 0 correspondants dans la seconde ligne du tableau.

5 Enfin, on complète le tableau avec des + ou des – selon les solutions des inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

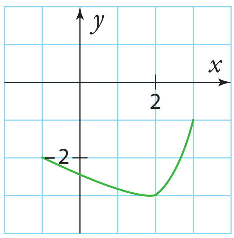
À vous de jouer !

1 Dans chaque cas, déterminer le signe de la fonction dont on donne la courbe représentative dans un repère.

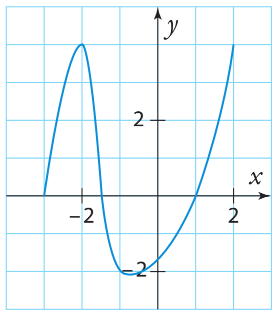


2 Dans chaque cas, déterminer le signe de la fonction f dont on donne la courbe représentative dans un repère.

a)



b)



Exercices 19 à 22 p. 252

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-20

2 Déterminer le signe d'une fonction affine

Cours 2 p. 245

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -x + 4$.

1. Résoudre $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

2. a) Déterminer le sens de variations des fonctions f et g.
b) Tracer leurs courbes représentatives dans un repère.
c) En déduire les tableaux de signes de ces fonctions.

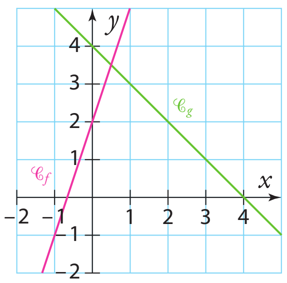
3. a) Résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.
b) Retrouver les tableaux de signes des fonctions f et g.

Solution

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. **1**
$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

2. a) f et g sont des fonctions affines.
Pour f, $a = 3 > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour g, $a = -1 < 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$. **2**

b) On trace leurs courbes en calculant deux ou trois images ou en utilisant les ordonnées à l'origine et coefficients directeurs des droites les représentant.



c) On en déduit les tableaux de signes suivants. **3**

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

3. a) • $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$
• $g(x) > 0 \Leftrightarrow -x + 4 > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$ **4**

b) On retrouve le fait que f est positive sur $\left]-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ et nulle en $-\frac{2}{3}$, donc strictement négative sur $\left]-\infty ; -\frac{2}{3}\right[$.
De même, g est strictement positive sur $]-\infty ; 4[$, nulle en 4 et strictement négative sinon.

Conseils & Méthodes

1 Quelle que soit la méthode utilisée, on cherche d'abord la valeur de x qui annule la fonction affine.

2 $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$, on observe le signe de a pour en déduire les variations de la fonction affine.

3 À l'aide des variations (ou de l'allure de leur droite représentative), on détermine le signe de la fonction affine en fonction des valeurs de x.

4 Lors de la résolution des inéquations, il faut faire attention au fait que multiplier ou diviser par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.

À vous de jouer !

3 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 3$ et $g(x) = -2x + 7$.

1. a) Résoudre $f(x) = 0$.
b) Déterminer les variations de f.
c) Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

2. Reprendre les questions précédentes pour $g(x)$.

4 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x - 12$ et $g(x) = 3x - 1$.

1. a) Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.
b) Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

2. Reprendre les questions précédentes pour $g(x)$.

Exercices 23 à 27 p. 253

Exercices résolus

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-20

3 Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

Cours 3 p. 246

1. Étudier le signe de $2x+4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier le signe de $-x+3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire le signe de $A(x) = (2x+4)(-x+3)$ et de $B(x) = \dfrac{2x+4}{-x+3}$.

Solution

1. $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{2}=-2$ 1

De plus, $a=2>0$ donc $x \mapsto 2x+4$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes suivant. 2

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

2. $-x+3=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$

De plus, $a=-1<0$ donc $x \mapsto -x+3$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$	0	$-$	

3. On compile les informations précédentes dans un tableau pour en déduire le signe du produit et du quotient. 3 4 5

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on commence par étudier le signe de chaque terme du produit ou du quotient.

2 On indique les différents signes dans un même tableau de signes, en faisant attention à l'ordre des nombres dans la première ligne.

3 On déduit le signe du produit ou du quotient en utilisant la règle des signes.

4 Il ne faut pas oublier d'indiquer les « 0 » du produit ou du quotient.

5 Lorsque le quotient n'est pas défini pour une valeur de x (lorsque le dénominateur s'annule), on place une double barre dans le tableau.

À vous de jouer !

5 **1.** Étudier le signe des expressions $2x+1$; $-3x-1$ et $5x+2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire le signe de :

a) $A(x) = -2x-1$

b) $B(x) = (2x+1)(-3x-1)$

c) $C(x) = \dfrac{2x+1}{-3x-1}$

d) $D(x) = (2x+1)(-3x-1)(5x+2)$

6 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $x(-3x+6)$

b) $2(-3+4x)(7+x)$

c) $-3x(-4x+4)$

7 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{4x+8}$ **b)** $\dfrac{x+2}{9+x}$ **c)** $\dfrac{7x+6}{x^2}$

8 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $(5x+10)(-3x+6)$

b) $(2x+4)(-x-6)$

c) $(-4x+5)(6x+7)(-0{,}5x+9)$

9 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $-3x(x-6)$ **b)** $\dfrac{5x-2}{-x}$ **c)** $\dfrac{4-x}{6+0{,}1x}$

Exercices 28 à 35 p. 253-254

4 Résoudre une inéquation avec une étude de signe

Cours 3 p. 246

1. a) Étudier le signe de $(2x+4)(x+1)$.

b) En déduire l'ensemble des solutions des inéquations $(2x+4)(x+1)<0$ et $(2x+4)(x+1)\geqslant 0$.

2. On considère l'inéquation $x^2-x>6$.

a) Montrer que $x^2-x>6 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)>0$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de $x^2-x>6$.

3. On considère l'inéquation $\dfrac{3+4x}{x+1}\leqslant 2$.

a) Montrer que $\dfrac{3+4x}{x+1}\leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+1}\leqslant 0$. **b)** En déduire les solutions de $\dfrac{3+4x}{x+1}>2$.

Solution

1. a) $2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $x \mapsto 2x+4$ est croissante sur $\mathbb{R}$. **1**

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $x \mapsto x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes et le signe du produit.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $(2x+4)(x+1)<0 \Leftrightarrow x\in]-2\,;-1[$

$(2x+4)(x+1)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty\,;-2]\cup[-1\,;+\infty[$

2. a) $(x-3)(x+2)=x^2+2x-3x-6=x^2-x-6$

donc $x^2-x>6 \Leftrightarrow x^2-x-6>0 \Leftrightarrow$
$(x-3)(x+2)>0$. **2**

b) On étudie le signe de $(x-3)(x+2)$ pour lire les solutions dans le tableau de signes.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que les solutions sont les nombres x tels que $x\in]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$. D'après le tableau de signes, les solutions de $\dfrac{3+4x}{x+1}\leqslant 2$ sont donc les nombres x tels que $x\in\left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$.

Conseils & Méthodes

1 Connaître le signe d'une expression $A(x)$ permet de résoudre des inéquations du type $A(x)>0$ ou $A(x)\leqslant 0$.

2 Résoudre des inéquations revient le plus souvent à étudier le signe d'une fonction lorsque le second terme est nul.

3 Une fois ramené à un second terme nul, on factorise, éventuellement en reconnaissant une identité remarquable ou un facteur commun.

4 Une fois ramené à un second terme nul, on réduit au même dénominateur.

3. a) $\dfrac{3+4x}{x+1}\leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{3+4x}{x+1}-2\leqslant 0 \Leftrightarrow$ **3**
$\dfrac{3+4x-2(x+1)}{x+1}\leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+1}\leqslant 0$ **4**

b) On étudie le signe de $\dfrac{2x+1}{x+1}$ pour lire les solutions de l'inéquation.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x+1}{x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

À vous de jouer !

10 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(7x+14)(5x+1)>0$ **b)** $3x(-6x+2)\geqslant 0$

c) $x^2(6x+1)<0$ **d)** $(-5x+15)(6x+7)(5-7x)>0$

11 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x}{x+3}\geqslant 0$ **b)** $\dfrac{x+1}{x}<\dfrac{4x+5}{x}$

Exercices 36 à 41 p. 254

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

12 Quelle démarche doit-on mettre en œuvre pour déterminer le signe d'une fonction dont la courbe est donnée ?

13 Donner les différents tableaux de signes possibles pour une expression affine $ax + b$.

14 On considère l'inéquation $(2x + 1)(-3x + 8) < 0$. Indiquer la méthode à mettre en œuvre pour résoudre cette inéquation, en précisant les différentes étapes.

Questions - Flash

Diapo — Diaporama — Ressource professeur

15 Voici le tableau de signes d'une fonction f définie sur $[-5\ ;5]$.
Que dire du signe de :

a) $f(0)$? **b)** $f(4)$?
c) $f(3)$? **d)** $f(-4)$?

x	-5		-4		3		5
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

16 Compléter les tableaux de signes suivants.

a)

x	$-\infty$		…		$+\infty$
$2x - 9$		…	0	…	

b)

x	$-\infty$		…		$+\infty$
$-11x - 5$		…	0	…	

17 Compléter le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 5)(-x + 1)$.

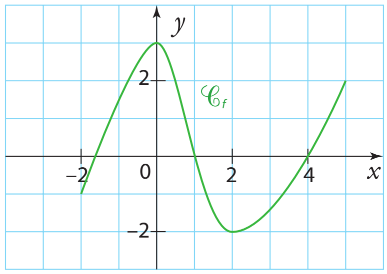
x	$-\infty$		…		…		$+\infty$
$x - 5$		…		…		…	
$-x + 1$		…		…		…	
$f(x)$		…		…		…	

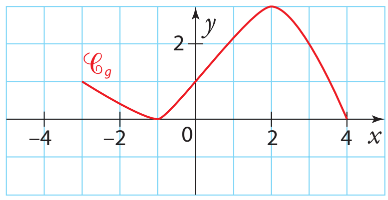
18 Voici un tableau de signes incomplet de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 8$.
Calculer $f(0)$ et $f(4)$ puis compléter le tableau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x + 8$		…	0	…	

Lire le signe d'une fonction

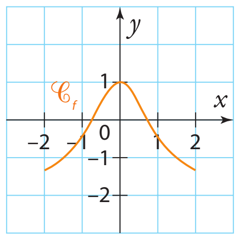
19 f et g sont deux fonctions dont voici les courbes représentatives.

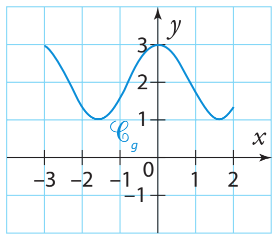




Dresser leurs tableaux de signes.

20 Dresser le tableau de signes des fonctions f et g dont voici les courbes représentatives dans un repère.

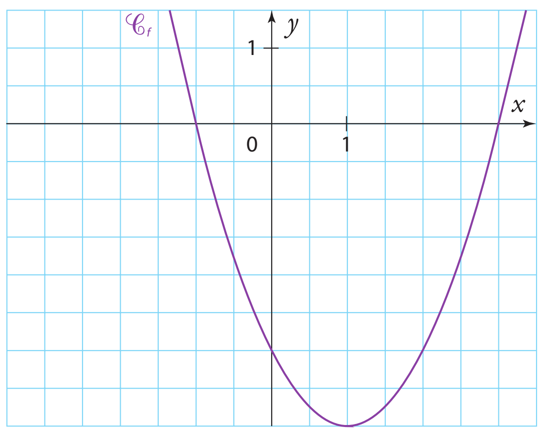




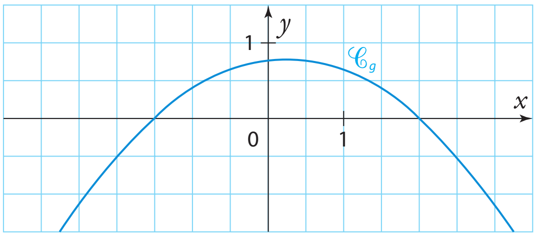
21 Une fonction h est définie sur $[-5\ ;8]$.
Elle s'annule en -2 ; 0 et 5 et est positive pour tout x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;5]$. Elle est négative sinon.
Dresser le tableau de signes de cette fonction.

22 Dresser les tableaux de signes des fonctions f, g, h et m définies sur $\mathbb{R}$ et représentées ci-dessous.

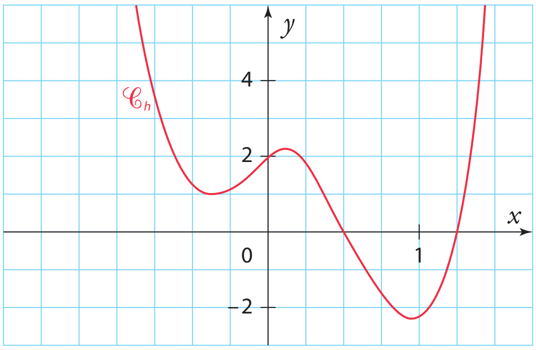
a)



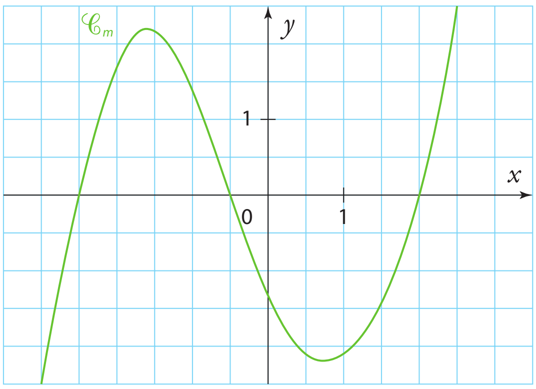
b)



c)



d)



Déterminer le signe d'une fonction affine

23 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $2x + 4$ **b)** $8x - 5$ **c)** $-3x + 12$ **d)** $-7x - 2$

24 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $3x + 5$ **b)** $-x + 4$ **c)** $-2x$ **d)** $\dfrac{1}{2}x + 4$

25 f et g sont deux fonctions affines dont voici les tableaux de signes.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Donner une expression possible pour chacune de ces fonctions.

26 Étudier les signes des fonctions affines suivantes et dresser leurs tableaux de signes.

a) $f(x) = 9x + 7$ **b)** $h(x) = -0{,}8x + 2$

c) $g(x) = x - \sqrt{2}$ **d)** $m(x) = -0{,}125x - 3$

27 Étudier les signes des fonctions affines suivantes et dresser leurs tableaux de signes.

a) $f(x) = -3x - 7$ **b)** $h(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}$

c) $g(x) = 4\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ **d)** $m(x) = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{12}{7}$

Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

28 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) x **b)** x^2 **c)** $x^4 + 1$ **d)** $\dfrac{1}{x}$

29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)(x + 2)$.

1. Déterminer le signe de $3x - 4$ et de $x + 2$.

2. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

3. Représenter graphiquement f sur l'écran de la calculatrice et contrôler le résultat de la question précédente.

30 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

a) $h(x) = (-2x + 3)(-3x - 5)$

b) $u(x) = (2x + 14)(6x + 24)$

c) $v(x) = (5x - 65)(7 - 2x)$

d) $w(x) = (-3x - 72)(-4x - 96)$

31 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

a) $h(x) = \dfrac{x + 2}{-x^3}$ **b)** $u(x) = \dfrac{2x + 3}{6x - 4}$

c) $v(x) = \dfrac{-3x - 9}{-2x + 7}$ **d)** $w(x) = \dfrac{x}{8 - x}$

32 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $\dfrac{6}{-2x + 1}$ **b)** $\dfrac{x + 2}{3 - x}$

c) $\dfrac{-7x + 14}{3x}$ **d)** $\dfrac{x}{6 - 3x}$

33 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3(x - 7)$

b) $g(x) = -2(2 + x)(3 - x)$

34 **1.** Étudier le signe de $2x - 1$ et de $x - 3$.

2. En déduire le tableau de signes des expressions suivantes.

a) $\mathrm{O} = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$

b) $\mathrm{L} = \dfrac{2x - 1}{3 - x}$

c) $\mathrm{S} = \dfrac{-5(2x - 1)}{3 - x}$

Exercices d'application

35 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x - 5)(x + 7)$.

1. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

2. En déduire les signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -2(4x - 5)(x + 7)$

b) $h(x) = x^2(4x - 5)(x + 7)$

c) $k(x) = -3(4x - 5)(x + 7)$

d) $t(x) = (5 - 4x)(x + 7)$

e) $p(x) = (5 - 4x)(-x - 7)$

Résoudre une équation ou une inéquation à l'aide d'une étude de signe

36 f est une fonction dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		-5		1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) < 0$

37 Voici deux tableaux de signes.

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		6		11		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

1. Dans un repère, tracer une courbe représentative possible pour chacune de ces fonctions.

2. À l'aide de ces tableaux, résoudre :

a) $f(x) \geqslant 0$

b) $g(x) < 0$

3. Peut-on comparer f et g ?
Si oui, sur quel intervalle ?

38 **1.** Étudier le signe de $(x - 2)(-2x + 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de $(x - 2)(-2x + 3) > 0$.

39 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide d'études de signe.

a) $(9x - 1)(4 - x) < 0$ **b)** $(3x + 2)(4x - 8) \geqslant 0$

c) $3x^2 - 6x > 0$ **d)** $x^2 - 9 < 0$

40 Sur le modèle de l'exercice **38**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{4x + 1} > 0$ **b)** $\dfrac{-2x}{x + 8} \leqslant 0$

c) $\dfrac{4x + 4}{-5x - 10} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{3x + 7}{5x + 8} < 0.$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x}{x + 2} > 1$ **b)** $\dfrac{-x}{3x + 1} > -3$ **c)** $\dfrac{x + 2}{x - 1} > \dfrac{x + 1}{x}$

Interpréter un tableau de signes

42 À partir du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

1. donner les signes des nombres suivants.

a) $f(5)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f(-7)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $f(x) > 0$ **b)** $f(x) \geqslant 0$ **c)** $f(x) < 0$

3. Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

43 À partir du tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

1. donner les signes des nombres suivants.

a) $g(12)$ **b)** $g(-25)$ **c)** $g(0)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $g(x) > 0$ **b)** $g(x) \geqslant 0$ **c)** $g(x) < 0$

3. Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction g.

Calculs et automatismes

44 Simplifier.

a) $\dfrac{4}{6}$ **b)** $\dfrac{32}{10}$ **c)** $\dfrac{14}{35}$ **d)** $2^3 - 3^3$ **e)** $\sqrt{8} - \sqrt{2}$

45 Résoudre les équations et inéquation suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $3x + 9 = 0$ **b)** $-2x = 7$ **c)** $2x + 1 > 0$

46 Factoriser.

a) $x^2 - 4$ **b)** $-3x^2 - 5x$ **c)** $-x^2 - x$

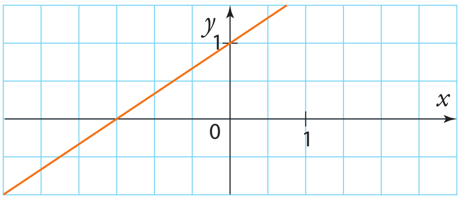
47 Donner le tableau de signes des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

a) $x + 6$ **b)** x^2 **c)** $-x + 2$

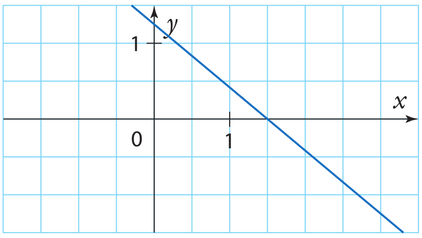
Interpréter un tableau de signes

48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
1. Dresser son tableau de signes.
2. Sans faire de calcul, que dire du signe de :
a) $f(0{,}219)$? **b)** $f(-0{,}517)$?

49 À partir de la représentation graphique ci-dessous de la fonction affine f, déterminer :
a) l'expression algébrique de la fonction f.
b) le tableau de signes de la fonction f.



50 Même exercice que le précédent avec la représentation graphique suivante.



Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

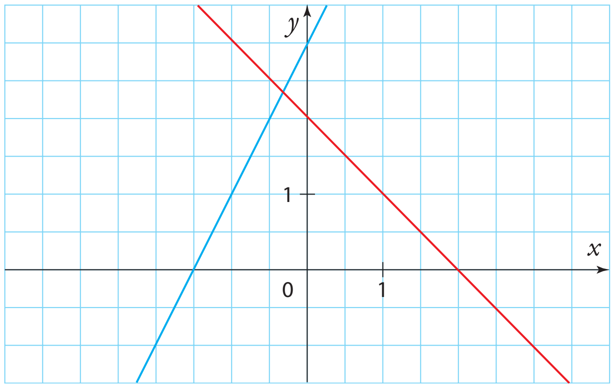
51 Déterminer les signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = (x + 6)^2 - 25$
b) $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$
c) $h(x) = x^2 - 7x$
d) $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$

52 Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible, puis étudier le signe des expressions obtenues.
a) $V = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$ **b)** $I = \dfrac{5}{2x-1} + 1$
c) $T = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x-1}{3x+5}$ **d)** $E = \dfrac{x}{1-5x} + \dfrac{2}{x+1}$

53 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$
c) $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$ **d)** $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$
e) $m(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$ **f)** $p(x) = \dfrac{x}{(x-6)(7x+8)}$

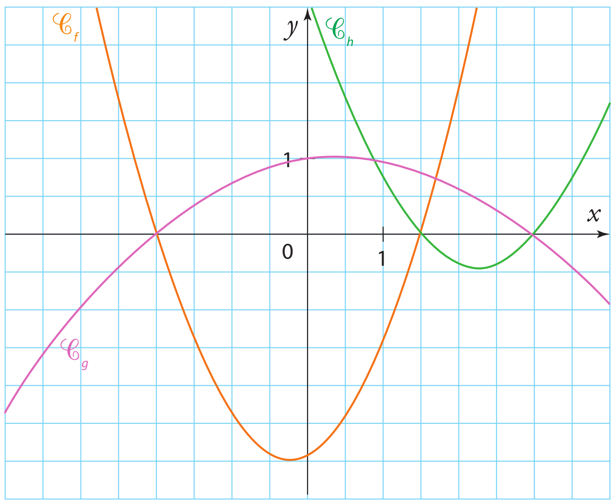
54 Dresser les tableaux de signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = (8x - 1)^2(2 - 7x)$
b) $g(x) = (x - 4)(9x + 2)(5 - x)$
c) $h(x) = -3(5x - 1)(x + 1)(4 - 6x)$

55 Le graphique ci-dessous donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
• $f(x) = 2x + 3$ • $g(x) = -x + 2$



On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = (2x + 3)(-x + 2)$.
1. Attribuer chaque courbe à sa fonction.
2. Déterminer graphiquement les valeurs pour lesquelles la fonction h s'annule.
3. Résoudre graphiquement $h(x) \geqslant 0$.
4. En déduire le tableau de signes de h.
5. Proposer une courbe représentative possible de la fonction h.

56 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions f, g et h.
Elles sont le produit de deux fonctions parmi les fonctions affines suivantes.
• $u_1(x) = 2x - 3$ • $u_2(x) = 0{,}5x + 1$
• $u_3(x) = \dfrac{1}{3}x - 1$ • $u_4(x) = 3 - 2x$
• $u_5(x) = -0{,}5x - 1$ • $u_6(x) = -\dfrac{1}{3}x + 1$
Retrouver les expressions des fonctions f, g et h.



Exercices d'entraînement

Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signes

57 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^2 > 16$ **b)** $16x^2 + 8x + 1 > 0$

c) $64x^2 - 121 > 0$ **d)** $49 - (3 + x)^2 \leqslant 0$

58 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$ **b)** $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$ **c)** $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$

59 Résoudre : **a)** $\dfrac{3x-1}{x+2} < 3$ **b)** $\dfrac{-x+1}{5x+2} \geqslant 2$

60 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{2x-5}{-x+7} \geqslant 1$ **b)** $\dfrac{2}{2x+3} \leqslant 5$ **c)** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{-7+6x}$

61 f et g sont deux fonctions dont voici les tableaux de variations.

x	-4		-1		1
f	1	↘	0	↗	3

x	-7		5		9
g	-2	↗	4	↘	1

On sait de plus que $g(3) = 0$. Dresser leurs tableaux de signes.

Inéquations et fonctions de référence

62 On souhaite résoudre l'inéquation $x^2 < 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x^2 < 9 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) < 0$.

2. Étudier le signe de $(x-3)(x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré.

63 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^2 \geqslant 4$ **b)** $x^2 \leqslant 5$ **c)** $x^2 > \dfrac{3}{4}$

64 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $3x^2 - 18 < 0$ **b)** $-2x^2 + 1 < 11$

65 On souhaite résoudre l'inéquation $x^3 \leqslant 8$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que 2 est solution de $x^3 = 8$.

2. Rappeler le tableau de variations de la fonction cube.

3. En déduire les solutions de l'inéquation $x^3 \leqslant 8$.

4. Contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction cube.

66 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^3 < 1$ **b)** $x^3 \geqslant 4^3$ **c)** $x^3 > -8$

67 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^3 > 0$ **b)** $2x^3 + 2 < 0$

68 On souhaite résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} > 0$.

2. Étudier le signe de $\dfrac{1-2x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

3. Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction inverse.

69 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x} < 3$ **b)** $\dfrac{1}{x} \geqslant -1$ **c)** $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{2}{3}$

70 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x} + 3 < \dfrac{2}{x} - 1$ **b)** $\dfrac{-2}{x} < -8 - \dfrac{3}{x}$

71 On souhaite résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant 2$ pour $x \in \mathbb{R}+$.

1. Trouver x tel que $\sqrt{x} = 2$.

2. Rappeler les variations de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}+$.

3. Conclure.

4. Contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction racine carrée.

72 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}+$ les inéquations suivantes.

a) $\sqrt{x} < 3$ **b)** $\sqrt{x} > \dfrac{1}{2}$ **c)** $\sqrt{x} \geqslant 25$

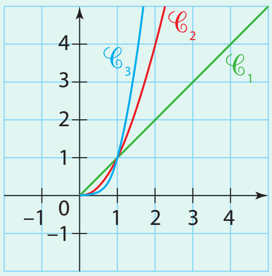
Positions relatives

Démonstration

73 On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$.

Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante.

- Si $x \in [0\,;\,1]$, alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.
- Si $x \in]1\,;\,+\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.



1. a) Factoriser $x^2 - x$.

b) Étudier le signe de $x^2 - x$.

c) En déduire les solutions de $x^2 \geqslant x$ pour $x \geqslant 0$.

2. Résoudre de la même façon $x^3 \geqslant x^2$ pour $x \geqslant 0$.

3. Conclure.

74 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$ et $g(x) = -4x - 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère.

1. Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de x pour $x \in \mathbb{R}$.

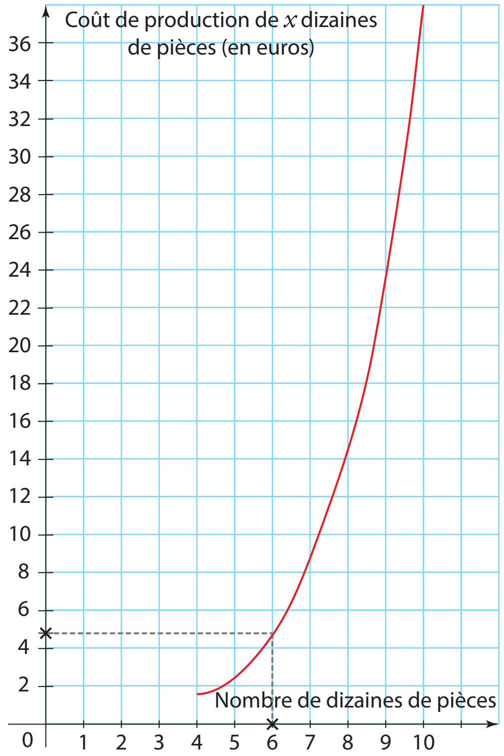
2. Factoriser $f(x) - g(x)$.

3. En déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. Que peut-on en déduire concernant $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

Résoudre des problèmes

75 SES Une entreprise fabrique des pièces mécaniques.
On note x le nombre de dizaines de pièces fabriquées au cours d'une journée.
Le coût de production, en euros, de x dizaines de pièces est noté $f(x)$.
La partie de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 10] est donnée dans le repère ci-dessous.



Coup de pouce On peut lire sur le graphique que, si $x = 6$, l'entreprise produit 60 pièces pour un coût de 4,4 euros.

A. Lecture graphique

1. À l'aide du graphique, déterminer le cout de production de 50 pièces.

2. Chaque pièce est vendue 0,30 euro. On note $R(x)$ la recette de l'entreprise lorsqu'elle produit x dizaines de pièces. Expliquer pourquoi $R(x) = 3x$.

3. Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de dizaines de pièces vendues, est la différence entre la recette et le cout de production. On note $B(x)$ce bénéfice. À l'aide du graphique et de la règle (sans faire aucun tracé), déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

B. Étude algébrique

On suppose que la fonction f est définie par :
$f(x) = x^2 - 8x + 18$ sur l'intervalle [4 ; 10].

1. On rappelle que, lorsque l'entreprise produit x dizaines de pièces, sa recette est $R(x) = 3x$.
Vérifier que le bénéfice de l'entreprise est alors :
$B(x) = -x^2 + 11x - 18$.

2. Montrer que $B(x) = (2 - x)(x - 9)$.

3. Retrouver le résultat de la question **3.** de la partie **A** par le calcul.

76 SES Le prix x d'une paire de baskets est compris entre 20 € et 50 €.
L'offre est le nombre de paires de baskets qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de x €.
La demande est le nombre probable de paires de baskets achetées par les consommateurs quand la paire de baskets est proposée à ce même prix de x €.
La demande se calcule avec $d(x) = -750x + 45\,000$ pour x en milliers de paires de baskets.

L'offre se calcule avec $f(x) = -\dfrac{500\,000}{x} + 35\,000$.

Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

1. Écrire une inéquation traduisant le problème posé.

2. Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ revient à $\dfrac{3x^2 - 40x - 2\,000}{x} > 0$.

3. a) Démontrer que, pour tout x :
$3x^2 - 40x - 2\,000 = (x + 20)(3x - 100)$.

b) En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.

c) Conclure.

Travailler autrement

77 En groupe — f est une fonction telle que
$f(x) = x^2 + bx + c$ où b et c sont des réels.
Voici son tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Déterminer les valeurs de b et de c.

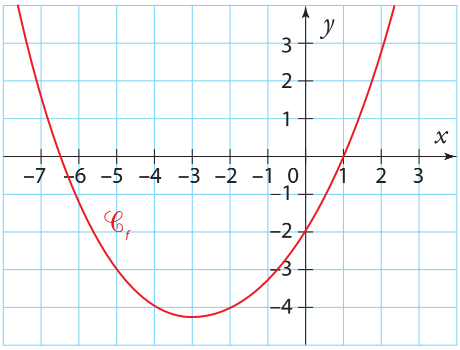
78 En groupe — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 12x + 11$.
Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Coup de pouce Développer $(2x - 3)^2$.

Exercices bilan

79 Courbe et signe d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}3x^2 + 1{,}7x - 2$.
Sa courbe représentative est tracée dans le repère suivant.



1. À l'aide de sa courbe, déterminer le signe de $f(x)$.
2. a) Montrer que $f(x) = (x - 1)(0{,}3x + 2)$ si $x \in \mathbb{R}$.
b) Retrouver le résultat de la question **1.** par le calcul.

80 Mise en forme et étude de deux fonctions

On considère les fonctions f et g définies par :
• $f(x) = 3x^2 - 4x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
• $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{4 - x}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$.

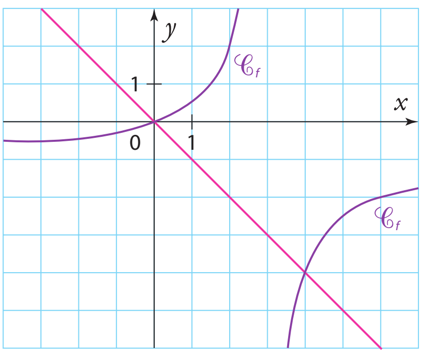
1. a) Factoriser $f(x)$.
b) Dresser son tableau de signes.
c) Résoudre $f(x) > 0$.
2. a) Écrire $g(x)$ sous la forme d'une seule fraction.
b) Dresser son tableau de signes.
c) Résoudre $g(x) \leqslant 0$.

81 Inéquation et étude de signe

On considère l'inéquation $\dfrac{2}{x + 2} \geqslant 3$.
1. Quelle est la valeur que x ne peut pas prendre ?
2. Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

82 Résolution graphique et par le calcul

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{-x}{x - 3}$.



1. En utilisant le graphique précédent, résoudre :
a) $f(x) \leqslant 1$ **b)** $f(x) > -x$
2. Résoudre ces inéquations par le calcul.

83 Extremum d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
1. À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de variations de f.
2. f admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?
3. Étudier le signe de $f(x) + 1$.
4. En déduire que -1 est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

84 Deux tableaux sans courbe

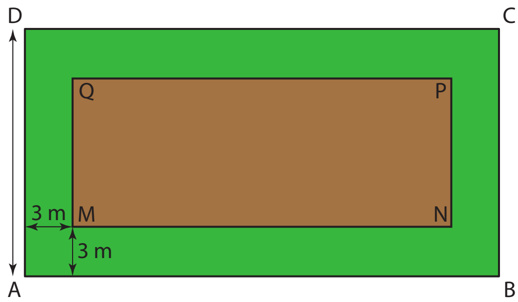
f est une fonction définie sur $[-2\,;3]$ dont voici le tableau de variations.

x	-2		0		2		3
$f(x)$	2	↘	-3	↗	-1	↘	-2

On sait de plus que l'unique antécédent de 0 par f est -1.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

85 Le potager de Khadija

Khadija souhaite faire aménager un potager dans son jardin. Elle souhaite que le potager soit entouré d'un chemin sur une largeur de 3 m et que la surface totale (potager et chemin) soit un rectangle d'aire 300 m².



A. Aménagement du potager
On pose $AD = x$.
1. Exprimer MQ en fonction de x.
2. a) Expliquer pourquoi $AB = \dfrac{300}{x}$.
b) En déduire MN en fonction de x.
3. On note S la fonction qui à la longueur $x = AD$ (en mètres) associe l'aire du potager, donc du rectangle MNPQ (en m²).
Montrer que $S(x) = 336 - 6x - \dfrac{1\,800}{x}$.

Dans la suite, on admet que S est définie sur l'intervalle $[6\,;50]$.

B. Conditions pour un grand potager
On cherche à déterminer comment choisir x pour que l'aire du potager soit supérieure à 63 m².
1. Montrer que $S(x) > 63 \Leftrightarrow \dfrac{-6x^2 + 273x - 1800}{x} > 0$.
2. Montrer que $-6x^2 + 273x - 1\,800 = -3(x - 8)(2x - 75)$.
3. En déduire le tableau de signes de $\dfrac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Conclure.

86 Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition le plus grand possible de ces fonctions.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

b) $g(x) = \sqrt{5 - x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$

e) $m(x) = \sqrt{-x^2 + 9}$

f) $n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

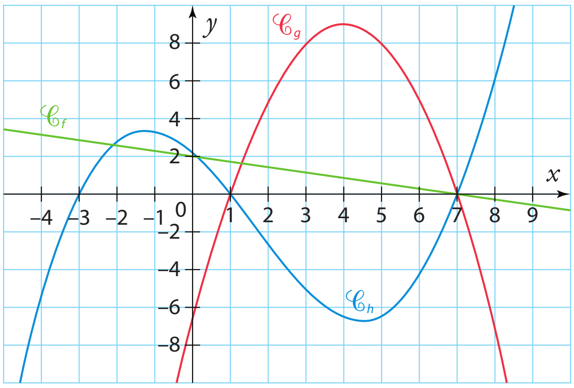
87 Au 3e degré

Résoudre $4x^3 - 12x^2 + 9x > 0$.

88 Trois fonctions TICE

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -0{,}3(x - 7)$
- $g(x) = -x^2 + 8x - 7$
- $h(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 - 1{,}7x + 2{,}1$



1. a) Montrer qu'étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ équivaut à étudier le signe de l'expression $-x^2 + 8{,}3x - 9{,}1$.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

factoriser (– x^2 + 8,3*x – 9,1)
– (– 1,3 + x)*(x – 7)

En déduire le signe de $-x^2 - 8{,}3x + 9{,}1$ et les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, étudier les positions relatives des courbes :

a) $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$

b) $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$

89 Variations d'une fonction (1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

1. Conjecturer le sens de variations de f.

2. Vérifier que $f(b) - f(a) = \dfrac{5(a - b)}{(b - 2)(a - 2)}$.

3. Soit a et b deux nombres réels tels que $2 < a < b$.

Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

4. Que peut-on en déduire sur les variations de f ?

90 Variations d'une fonction (2)

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que :

a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x - 5)^2}$ est strictement croissante sur $]5\,;+\infty[$.

b) $g(x) = 3(x + 2) - \dfrac{2}{x}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

91 Fonction inverse

1. Déterminer le tableau de signes de la fonction inverse.

2. Déterminer une expression de fonction f dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		–	0	+	

3. Déterminer une expression de fonction g dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$g(x)$		–	‖	+	0	–	

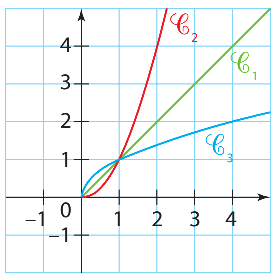
92 Égalité et étude de signe

1. Démontrer que $x^2 - 6x - 7 = (x - 3)^2 - 16$.

2. Déterminer le signe de $T(x) = x^2 - 6x - 7$.

93 Positions relatives

On note $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$; $x = x^2$ et $y = \sqrt{x}$. Ces courbes ont été représentées dans le repère ci-contre.



Le but de cet exercice est d'étudier la position de relative de ces trois courbes sur $[0\,;+\infty[$.

1. Comparer x et x^2, pour $x \in \mathbb{R}+$, en étudiant le signe de leur différence.

2. Montrer que $x - \sqrt{x} = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

3. Comparer x et $\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

94 Calcul formel (1) TICE

Renée cherche à résoudre l'inéquation :

$x^3 + 2x^2 + x > x^2 + 3x + 2$.

Elle utilise un logiciel de calcul formel et obtient :

simplifier(x^3 + 2*x^2 + x – (x^2 + 3*x + 2))
x^3 + x^2 – 2*x – 2
factoriser(x^2 + 3*x + 2)
(x + 1) * (x + 2)
factoriser(x^3 + x^2 – 2*x – 2)
x*(x^2 – 2)
factoriser(x^3 + 2*x^2 + x)
x*(x + 1)^2

Aider Renée à résoudre cette inéquation.

Exercices d'approfondissement

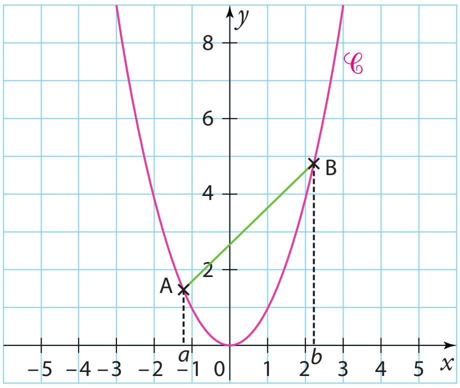
95 Fonctions convexe et concave

Une fonction est convexe si sa représentation graphique « est tournée vers le haut ».

Mathématiquement, cela signifie que, si A et B sont deux points de la représentation graphique de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus de la courbe. Si le segment [AB] est entièrement situé en-dessous, la fonction est dite concave.

A. Un exemple pour la fonction carré

On considère $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction carré.
On appelle A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b.



On cherche à vérifier, sur deux exemples, que le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

1. Dans cette question, on prendra $a = 1$ et $b = 2$.

a) Donner l'expression de la fonction affine n dont la représentation graphique est la droite (AB).

b) Développer $(x - 1)(x - 2)$.

c) En déduire que $\mathscr{C}$ est en dessous de (AB) sur l'intervalle [1 ; 2].

2. Démontrer que, pour $a = -1$ et $b = 1$, le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

B. En toute généralité

Dans cette partie, on considère que $a < b$ et on souhaite démontrer que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

2. Donner un encadrement de l'abscisse d'un point du segment [AB].

3. Déterminer l'expression de la fonction affine f dont la droite (AB) est la représentation graphique.

4. Quelle inéquation faut-il résoudre pour prouver que la fonction carré est convexe ?

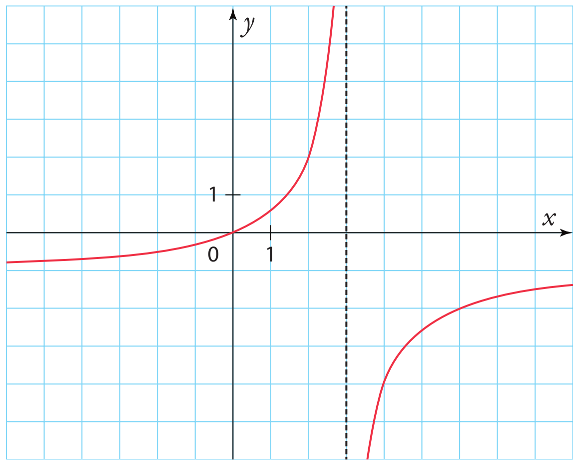
5. Montrer que : $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$.

6. Établir le tableau de signes de l'expression $x^2 - f(x)$.

7. Conclure.

C. Une autre fonction !

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$ et sa représentation graphique.



1. Sur quel intervalle la fonction g semble-t-elle concave ? convexe ?

Soit A et B deux points de la représentation graphique de g. Leurs abscisses respectives sont notées a et b telles que $a < b < 3$.

2. Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (AB).

a) Quel est le signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?

b) Peut-on déterminer le signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

3. Quelle inéquation faut-il résoudre pour démontrer que la fonction g est convexe sur $]-\infty ; 3[$?

4. Démontrer que cela revient à résoudre :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) < 0$.

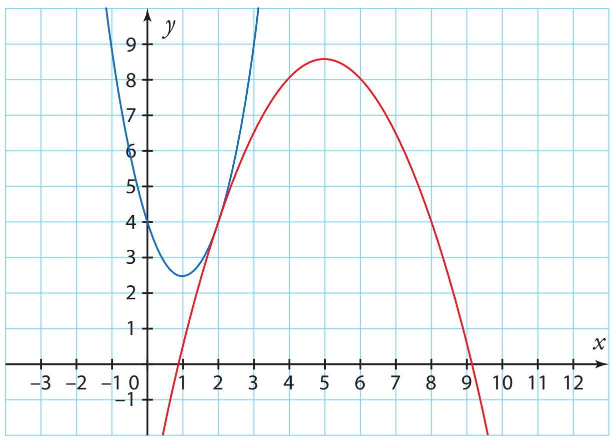
5. En développant, prouver que :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) = 3(x - a)(x - b)$.

6. Conclure.

96 Courbes représentatives

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 4$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative ; leur courbe a été tracé dans le repère ci-dessous.



1. a) Associer à chaque courbe sa fonction.

b) Lire graphiquement la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

2. a) Déterminer une expression de $f(x) - g(x)$.
b) Factoriser l'expression précédente.
c) Démontrer le résultat de la question **1. b)**.

97 Calcul formel (2) TICE

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la position relative des courbes représentatives de f et de g dans un repère.

98 À la recherche d'une expression

1. Déterminer le signe de $(x - 2)^2$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer une expression $f(x)$ pouvant avoir les signes suivants.

a)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

c)

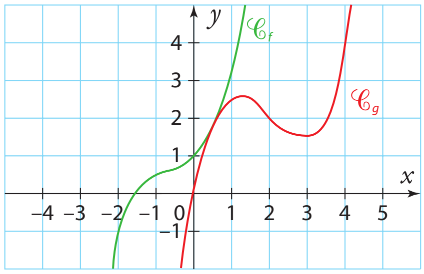
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

99 Positions relatives (2)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$.
Le repère ci-dessous donne leurs courbes représentatives, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



1. Calculer $f(x) - g(x)$.
2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

Vers la 1re Orientation

100 Spécialité Maths

On considère l'inéquation $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ (I).

A. Existence de l'inéquation (I)
1. Étudier le signe de $x^2 - 2x$.
2. Pour quel intervalle de x l'inéquation est-elle définie ?

B. Plus simple !
1. Établir le tableau de signes de l'expression $X - X^2$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $X < X^2$.

C. Encadrement
1. Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$, c'est résoudre $X < X^2$. Expliciter X.
2. En déduire l'inégalité que doit vérifier $\sqrt{x^2 - 2x}$.

D. Résolution de $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$
1. Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$, c'est résoudre $\left(\sqrt{x^2 - 2x} + 1\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} - 1\right) > 0$.
2. Établir que cela revient à résoudre $x^2 - 2x - 1 > 0$.

E. Résolution de $x^2 - 2x - 1 > 0$
1. Conjecturer la solution à l'aide de la calculatrice.
2. Développer $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$.
3. Déterminer les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 > 0$.
4. En déduire les solutions de $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ (I).

101 STMG

Une usine produit de l'acier. Elle peut produire jusqu'à 20 tonnes d'acier chaque jour.
Produire x tonnes d'acier pendant une journée coûte $C(x) = 30x^2 - 150x + 3\,780$ euros.

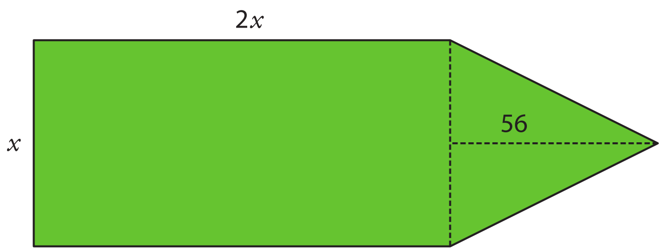
1. À quel intervalle appartient x ?
2. Déterminer le coût de production pour 5 tonnes produites.
3. On suppose que chaque tonne produite est vendue au prix de 600 euros la tonne.
a) Quelle est la recette pour 5 tonnes d'acier produites ?
b) Déterminer la recette $R(x)$ (en euros) en fonction du nombre x de tonnes produites.
4. a) Déterminer les bénéfices réalisés pour 5 tonnes produites.
b) Montrer que les bénéfices journaliers réalisés pour x tonnes produites sont de :
$B(x) = -30x^2 + 750x - 3\,780$ euros.
5. Montrer que $B(x) = 30(x - 7)(18 - x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$.
6. Déterminer la quantité d'acier produite pour laquelle un bénéfice est réalisé.

Travaux pratiques

TICE — Chercher, expérimenter — 45 min

1 Pour rassembler des vaches

Le père Bono n'arrive pas à regrouper ses vaches quand il faut les ramener à l'étable. Il souhaite placer un enclos rectangulaire adossé à une parcelle triangulaire sur son champ, comme sur le schéma ci-dessous, pour faciliter le regroupement de ses bêtes.
Il déclare alors : « Mon champ aura cette forme ou je ne m'appelle pas Jean ! »
Cependant, il est nécessaire de prévoir une surface minimale de 11 152 m^2 pour que les vaches puissent paitre.



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le résultat.

2. Montrer que le père Bono doit résoudre l'inéquation $2x^2 + 28x - 11\,152 \geqslant 0$.

3. Démontrer que $2x^2 + 28x - 11\,152 = (2x - 136)(x + 82)$.
Déterminer les dimensions possibles du champ du père Bono.

Algo & Prog — Raisonner — 30 min

2 Signe d'une fonction affine

On considère l'algorithme suivant.

```
a=float(input("Saisir la valeur de a:"))
b=float(input("Saisir la valeur de b:"))
c=-b/a
if a>0:
    print("f(x)=ax+b est négatif jusqu'à",c,"et positif après")
else:
    print("f(x)=ax+b est ... jusqu'à",c,"et ... après")
```

1. **a)** Que renvoie cet algorithme si on donne `a = 2` et `b = – 6` ?
b) À quoi cet algorithme peut-il servir ?
c) Compléter les pointillés de cet algorithme.

2. **a)** Que renvoie l'algorithme pour la fonction $f(x) = -2$?
b) Modifier l'algorithme pour qu'il prenne en compte le cas des fonctions constantes.

TICE — Raisonner, expérimenter — 55 min

3 Inéquations et calcul formel

Le but de ce TP est de maitriser quelques fonctionnalités du logiciel de calcul formel Xcas.

A ▶ Développer

Dans son devoir maison à rendre pour demain, Sheïma devait développer $(x-3)^2(x+2)^2-5$.
Ce matin, au petit-déjeuner, elle a fait une tache de thé en relisant son devoir (pour s'assurer qu'il n'y avait pas d'erreur), il y est maintenant écrit :

$(x-3)^2(x+2)^2-5 = x^4$ $+ 31$.

Aidons Sheïma à retrouver le résultat de son développement.

1. Ouvrir le logiciel Xcas.

2. Dans cette question, nous allons voir deux spécificités importantes de la syntaxe à respecter avec Xcas.

a) Dans la zone de saisie écrire :

```
développer ((x – 3)^2(x+2)^2 – 5)
```

Le « résultat » affiché parait-il satisfaisant ?

b) Dans la zone de saisie, écrire :

```
developper ((x – 3)^2(x+2)^2 – 5)
```

Le résultat affiché parait-il satisfaisant ?

c) Dans la zone de saisie, écrire :

```
developper ((x – 3)^2*(x+2)^2 – 5)
```

d) Quels enseignements nous ont appris les trois questions précédentes sur la syntaxe à respecter avec Xcas ?

3. À l'aide d'Xcas, développer :

a) $x^6-4x^5-4x+3(x+3)^3$ (le terme constant doit être 81, si ce n'est pas le cas, il y a erreur : attention aux symboles de multiplications non implicites !)

b) $(4(x+1)^2+x+2)^3$

B ▶ Factoriser

1. a) À l'aide de la fonction **developper** d'Xcas, dire si l'égalité suivante est correcte :

$8x^2+6x-5=(4x+7)(2x-2)$.

b) Écrire la commande suivante dans Xcas et corriger la mauvaise égalité précédente :

```
factoriser (8*x^2+6*x – 5)
```

c) En déduire le tableau de signes de $8x^2+6x-5$.

2. À l'aide de la commande d'Xcas, dresser le tableau de signes de $35x^2-3x-2$.

C ▶ Résoudre

1. a) Quelle(s) inéquation(s) doit-on normalement résoudre pour dresser le tableau de signes de $35x^2-3x-2$?

b) Écrire la commande suivante dans Xcas.

```
resoudre (35*x^2 – 3*x – 2>0, x)
```

c) Faire le lien avec la question 2 de la partie **B**.

d) Résoudre $35x^2-3x-2<0$ à l'aide d'Xcas.

2. Utiliser la commande **resoudre** d'Xcas pour dresser le tableau de signes de $-2x^2+5x+4$.

3. Même question avec x^3+3x^2-5x+1.

En autonomie

1 Lire et interpréter un tableau de signes

QCM

Pour les exercices 102 à 107 on considère le tableau de signes de la fonction h suivant.

x	$-\infty$		-5		10		14		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	

102 Sur quel intervalle a-t-on $h(x) > 0$?
a $]-5\,;14[$ b $]-5\,;10[$ c $]-5\,;10]$

103 Sur quel intervalle a-t-on $h(x) < 0$?
a $]-\infty\,;-5[$ b $]10\,;14[$ c $]10\,;+\infty[$

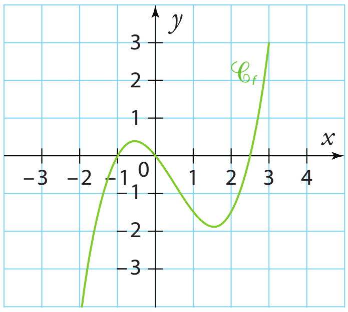
104 Les solutions de $h(x) \leqslant 0$ sont :
a $S =]-\infty\,;-5]\cup[10\,;+\infty[$
b $S =]-\infty\,;-5]\cup[10\,;14[\cup]14\,;+\infty[$

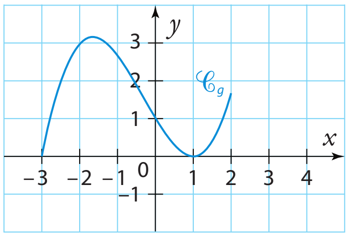
105 Que peut-on dire de $h(10)$?
a $h(10) = -5$ b $h(10) = 0$

106 Que peut-on dire de $h(0)$?
a $h(0)$ est positif. b $h(0) = 4$

107 Que peut-on dire de $h(14)$?
a $h(14)$ est négatif. b $h(14)$ n'existe pas.

108 ✶ Dresser le tableau de signes des fonctions f et g dont voici les représentations graphiques dans un repère.





109 ✶✶ Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f dont voici le tableau de signes.

x	-6		0		1		2
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

2 Étudier le signe d'un produit

QCM

110 Parmi ces tableaux de signes, lequel est celui de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - 3$?

a

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

b

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

c

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

d

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Pour les exercices 109 et 110 on considère le tableau de signes incomplet de la fonction de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (3x+5)(-2x+7)$.

x	$-\infty$		…		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	

111 En quelle valeur s'annule $3x + 5$?
a $-\dfrac{3}{5}$ b $\dfrac{5}{3}$ c $-\dfrac{5}{3}$

112 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $p(x) < 0$?
a $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\right[$ b $\left]\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$

113 ✶ Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x - 20$ et $g(x) = 8x + 2$, puis donner le signe de $(-5x - 20)(8x + 2)$.

114 ✶ Déterminer le tableau de signes des expressions $A(x) = (3x + 4)(-x + 3)$ et $B(x) = 2x(-7x + 9)$.

115 ✶✶ Étudier le signe de $(6 - 9x)(2x + 3)$.

3 Étudier le signe d'un quotient

QCM

Pour les exercices 116 à 118 on considère le tableau de signes incomplet de la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

116 Que peut-on dire de $q(-4)$?
[a] Il vaut 0. [b] Il n'existe pas.

117 Que peut-on dire de $q(3)$?
[a] Il vaut 0. [b] Il n'existe pas.

118 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $q(x) \geqslant 0$?
[a] $]-\infty ; -4]$ [b] $[-4 ; 3]$ [c] $[3 ; +\infty[$

119 ✶ Déterminer le tableau de signes des expressions $C(x) = \dfrac{-3x+9}{2x+4}$ et $D(x) = \dfrac{2+8x}{x}$.

120 ✶✶ Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $\dfrac{-7x+1}{x^2}$ **b)** $\dfrac{4x+2}{(2x+1)(-x-3)}$ **c)** $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{8+x}$

4 Inéquation et signe

QCM

Pour les exercices 121 à 124 on considère le tableau de signes d'une expression $A(x)$.

x	$-\infty$		0		3		5
$A(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

121 L'équation $A(x) = 0$:
[a] n'a pas de solution.
[b] a pour solution 0 et 3.
[c] a pour solution 0.

122 L'équation $A(x) > 0$ a pour ensemble de solution :
[a] $]0 ; 3[$ [b] $[0 ; 3[$ [c] $[0 ; 3]$

123 L'équation $A(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution
[a] $]-\infty ; 0[\cup[3 ; 5]$
[b] $]-\infty ; 0]$
[c] $]-\infty ; 0]\cup]3 ; 5]$

124 Si $A(x) > 1$, alors x appartient à :
[a] $[0 ; 3]$ [b] $[1 ; 2]$
[c] $[1 ; +\infty[$ [d] On ne peut pas savoir.

125 ✶ Résoudre les inéquations suivantes.

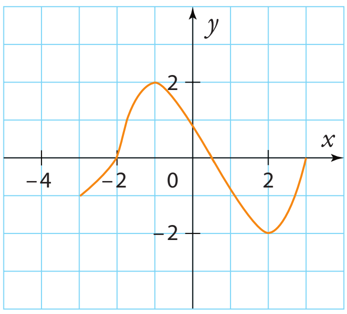
a) $(x+3)(x-6) < 0$ **b)** $x^2 + 4x - 6 < -6$

c) $\dfrac{-2x+3}{-4x-1} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{1}{4-2x} < 1$

126 ✶ **1.** Résoudre $x^2 < 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre $\dfrac{1}{x} < 2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

127 ✶✶ f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.



g est la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $g(x) = -2x + 5$.

1. Déterminer le signe de :

a) $f(x)$ **b)** $g(x)$ **c)** $f(x)g(x)$ **d)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $g(x) \leqslant 0$

d) $f(x)g(x) < 0$ **e)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ **f)** $\dfrac{g(x)}{f(x)} > 0$

PARTIE 5

Statistiques et probabilités

Blaise Pascal (1623 – 1662)
Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Christian Huygens (1629 – 1695)

Les recensements de bétail sous l'Antiquité constituent les prémices des statistiques. Plus tard, les jeux d'argent à la cour du Roi Soleil conduisent aux idées d'optimisation du gain et aux probabilités.

Pascal et Fermat, en ayant des raisonnements différents, donnent la même réponse au problème du chevalier de Méré : si un jeu s'arrête avant la fin, comment les joueurs se répartissent-ils la mise ? La correspondance entre ces deux mathématiciens aboutit à l'émergence de la théorie des probabilités.
↪ Dicomaths p. 350 et p. 352

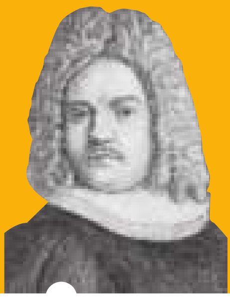
Christian Huygens publie en 1657 *De ratiociniis in ludo aleae*, premier traité sur la théorie des probabilités.
↪ Dicomaths p. 350

Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai appris à interpréter et à représenter des données à travers des tableaux et des graphiques, à traiter ces données en calculant des effectifs, des fréquences puis en déterminant des caractéristiques de position (moyenne, médiane) ou de dispersion (étendue) d'une série statistique. J'ai découvert la notion de probabilité, ainsi que certaines de ses propriétés, et également la notion de proportionnalité en résolvant des problèmes de quatrième proportionnelle et de pourcentage.

En 2de, je vais découvrir en statistiques la moyenne pondérée, l'écart interquartile et l'écart-type. Je vais également étudier la notion de loi de probabilité et je vais calculer des probabilités dans des cas simples et au sein de modèles de référence : dé, pièce équilibrée, etc. Enfin, je vais définir la notion d'échantillon et découvrir la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.

Jacques Bernoulli
(1654 – 1705)



Florence Nightingale
(1820 – 1910)

Andreï Kolmogorov
(1903 – 1987)

Jacques Bernoulli, dans son *Ars Conjectandi*, définit la notion de probabilité et introduit les notations encore utilisées au XXIe siècle. Ses neveux Nicolas et Daniel poursuivent son œuvre.
↪ Dicomaths p. 347

Au XIXe siècle, Florence Nightingale utilise les statistiques afin de moderniser les techniques médicales de l'époque.
↪ Dicomaths p. 351

Andreï Kolmogorov formalise la théorie des probabilités dans son ouvrage *Fondements de la théorie des probabilités*.
↪ Dicomaths p. 351

En 1re générale, j'apprendrai ce que sont une probabilité conditionnelle, l'indépendance de deux événements, une variable aléatoire. Je découvrirai les notions d'espérance, de variance et d'écart-type d'une variable aléatoire.

En 1re technologique, j'étudierai le schéma de Bernoulli et la loi binomiale.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **SES**, à représenter des données, à modéliser des situations économiques, à évaluer la pertinence d'un sondage.
- En **démographie**, à établir des bilans et à faire des études sur une population.
- En **SVT**, à calculer des risques génétiques, des prévalences.
- En **médecine**, à évaluer la fiabilité de protocoles médicaux et la sensibilité de tests ou la spécificité de tests.
- En **sciences de l'ingénieur**, à tester la fiabilité de certaines machines.

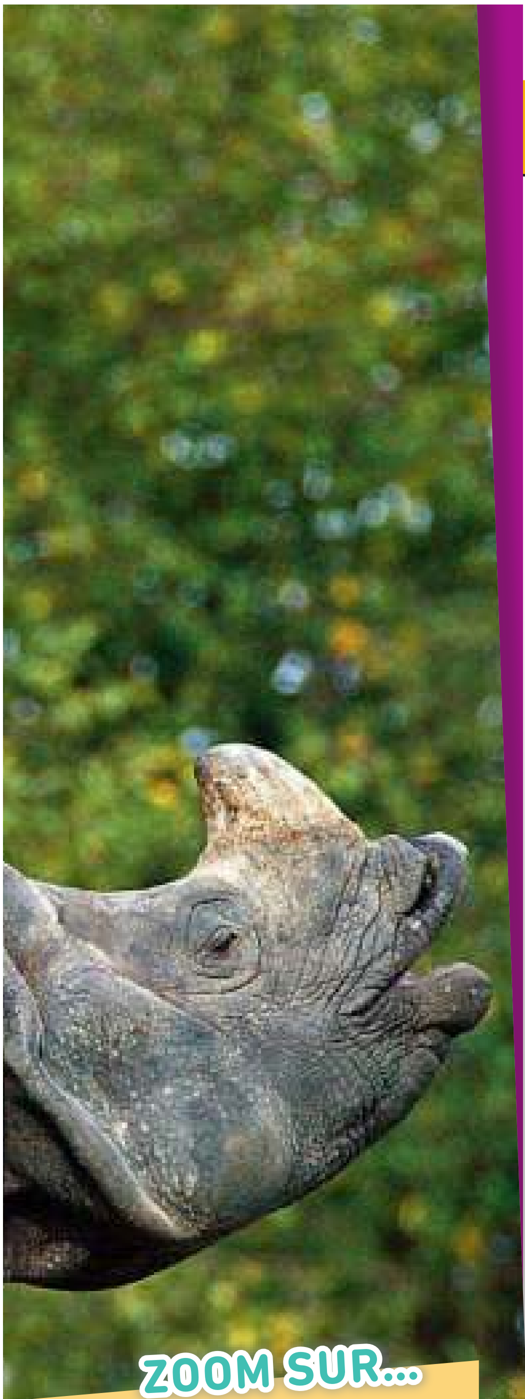
11

En 1910, on ne comptait plus que 100 rhinocéros indiens sur Terre. Leur nombre a désormais augmenté de 3 400 %. Malgré tout, l'espèce est encore menacée, 85 % de la population vivant au sein d'une même réserve.

Proportions et évolutions en pourcentage

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Déterminer une proportion de proportion (ensembles emboîtés).	1 p. 274 — 1 2 p. 274 22 23 p. 276
Traduire une évolution en pourcentage par un coefficient multiplicateur et réciproquement.	28 à 31 p. 277
Déterminer un taux d'évolution global à la suite de plusieurs évolutions successives.	2 p. 274 — 3 4 p. 274 34 35 p. 277
Déterminer un taux d'évolution réciproque.	3 p. 275 — 5 6 p. 275 37 38 p. 277

1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés



Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-21

1. Calculer avec des fractions

Calculer.

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ **b)** $\frac{1}{6} \times \frac{3}{7}$ **c)** $0{,}1 \times \frac{3}{4}$

d) $\frac{30}{\frac{4}{5}}$ **e)** $\frac{\frac{8}{3}}{6}$

2. Relier effectifs et proportions

Pour faire un gâteau, on fait fondre une tablette de 100 g de chocolat, dont la teneur en cacao est de 70 %, avec une tablette de 200 g, dont la teneur en cacao est de 85 %.

1. Calculer la masse de cacao contenu dans le mélange.

2. Quel est le pourcentage de cacao dans ce mélange ?

3. Déterminer des proportions à partir d'effectifs

Une classe de seconde compte 32 élèves, dont 12 garçons.

1. Déterminer la proportion de garçons dans la classe.
Donner le résultat sous forme décimale.

2. Déterminer la proportion de filles dans la classe.
Donner le résultat sous forme de pourcentage.

4. Calculer des évolutions données en pourcentage

1. Le prix d'un vêtement est de 30 euros. Il augmente de 20 %.
Déterminer son nouveau prix.

2. Un téléphone coutant 200 euros voit son prix baisser de 40 % lors d'une promotion.
Déterminer son nouveau prix.

5. Déterminer des effectifs à partir de proportions

Un lycée compte 1 200 élèves, dont 37 % sont en classe de seconde.

1. Déterminer le nombre d'élèves qui sont en classe de seconde.

2. Parmi eux, le tiers suit sa scolarité dans la voie professionnelle.
Déterminer le nombre d'élèves de la voie générale et technologique.

6. Associer opérations et pourcentages

Regrouper les propositions qui consistent à faire les mêmes calculs parmi les suivantes.

a) Prendre 20 %. **b)** Diviser par 4.

c) Prendre la moitié. **d)** Prendre 25 %.

e) Multiplier par 0,5. **f)** Prendre un quart.

g) Prendre un cinquième.

Doc Corrigés Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Algo & Prog
p. 278, 279, 282, 283

TICE
p. 280, 283

Les autres disciplines
p. 276-279, 282

Activités

1 Proportion de proportion

30 min

Un club d'échec compte 200 membres. Le tableau ci-dessous indique la répartition des adhérents selon leur âge et leur sexe.

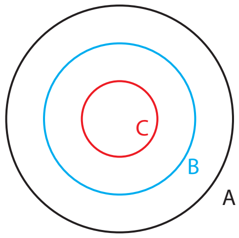
	Hommes	Femmes	Total
Entre 18 ans et 30 ans	65	60	125
Entre 30 et 60 ans	10	20	30
Plus de 60 ans	10	35	45
Total	85	115	200

Dans toute cette activité, on gardera les valeurs exactes.

1. a) Déterminer la proportion p_1 de femmes qui ont entre 18 et 30 ans parmi l'ensemble des femmes.
b) Déterminer la proportion p_2 de femmes parmi l'ensemble des adhérents.
c) Déterminer la proportion p_3 de femmes qui ont entre 18 et 30 ans parmi l'ensemble des adhérents.
d) Calculer $p_1 \times p_2$. Que peut-on remarquer ?

2. a) Déterminer la proportion p_1' d'hommes parmi l'ensemble des adhérents qui ont plus de 60 ans.
b) Déterminer la proportion p_2' d'adhérents de plus de 60 ans parmi l'ensemble des adhérents.
c) Déterminer la proportion p_3' d'hommes de plus de 60 ans parmi l'ensemble des adhérents.
d) Calculer $p_1' \times p_2'$. Que peut-on remarquer ?

3. On considère trois ensembles emboités $C \subset B \subset A$.
A est l'ensemble des adhérents du club, B est l'ensemble des hommes, C est l'ensemble des hommes qui ont entre 18 et 30 ans. On note p (respectivement p' et p'') la proportion de C dans B (respectivement de B dans A et de C dans A).
Quelle relation peut-on trouver entre ces proportions ?



↪ Cours 1 p. 272

2 Variations absolue et relative

15 min

Le prix du timbre vert est passé de 80 centimes à 88 centimes le premier janvier 2019.

1. a) De combien de centimes le prix du timbre a-t-il augmenté ?
Cette augmentation est la **variation absolue** du prix du timbre.
b) Quelle proportion cette augmentation représente-t-elle par rapport au prix de départ du timbre ?
Ce taux est appelé **variation relative** (ou taux d'évolution en pourcentage).

2. Calculer le quotient $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$ où V_D est la valeur de départ du timbre et V_A sa valeur d'arrivée.
Vérifier que l'on retrouve ainsi la variation relative du prix du timbre.

3. Peut-on avoir une variation relative négative ? supérieure à 1 ? strictement inférieure à – 1 ?

↪ Cours 2 p. 272

30 min

3 Évolutions successives, coefficient multiplicateur global

1. Un journal compte 5 000 abonnés en 2016.

a) L'année suivante, le nombre d'abonnés augmente de 10 %.
Déterminer le nombre d'abonnés en 2017.

b) En 2018, le nombre d'abonnés augmente à nouveau de 30 % par rapport à l'année précédente. Déterminer le nombre d'abonnés en 2018.

c) Manu affirme que cela fait une augmentation de 40 % en deux ans.
A-t-il raison ? Si non, donner l'évolution en pourcentage entre 2016 et 2018.

2. Dans un magasin, un pantalon est vendu 45 euros. Juste avant la période des fêtes de fin d'année, son prix augmente de 20 % puis il diminue de 20 % en janvier.
À l'issue de ces deux évolutions, son prix aura-t-il augmenté ou baissé ?

3. *Vers une méthode générale*

Une quantité augmente de 15 % puis de 40 %.

a) Donner les coefficients multiplicateurs associés à chacune de ces évolutions.

b) Par combien cette quantité a-t-elle été multipliée à l'issue de ces deux évolutions ?

c) En déduire le taux d'évolution correspondant à ces deux évolutions.

d) Indiquer la méthode générale permettant de déterminer l'évolution en pourcentage à l'issue de plusieurs évolutions successives.

↪ Cours 2 p. 272

20 min

4 Évolutions réciproques

1. Jérôme possède un lot d'actions cotées à 6 500 euros.
Un jeudi, le cours de l'action chute de 5 %.

a) Pas grave se dit Jérôme, il lui faut juste une augmentation de 5 % pour que son cours revienne à son niveau de départ, et je retrouverai alors mes parts.

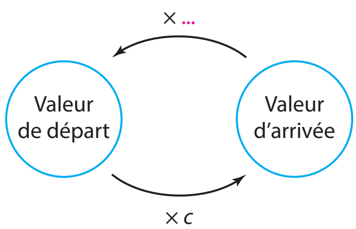
Expliquer pourquoi Jérôme se trompe.

b) Quelle évolution son cours doit-il subir pour revenir à son niveau de départ ?

2. *Vers une méthode générale*

a) Compléter : « Diviser par un nombre c revient à multiplier par … »

b) Compléter : « Si une quantité est multipliée par un coefficient c, il faut la multiplier par $c_{\text{réciproque}} = \ldots$ pour revenir à son niveau de départ. »



3. *Application* Dans chacun des cas suivants, déterminer le coefficient multiplicateur réciproque, puis le taux d'évolution réciproque, associés à ces évolutions.

a) $c = 0{,}8$ **b)** $c = 0{,}9$ **c)** $c = 1{,}36$ **d)** $c = 2$

4. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'évolution en pourcentage réciproque qui permet de revenir à la valeur de départ.

a) une hausse de 25 % **b)** une baisse de 37,5 %

c) une baisse de 50 % **d)** une hausse de 525 %

↪ Cours 2 p. 272

Cours

1 Proportion de proportion

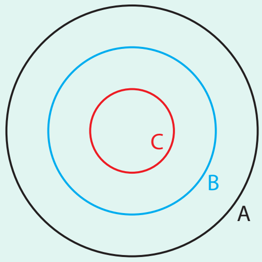
Propriété Proportions d'ensembles emboités

On considère trois ensembles A, B et C emboités tels que $C \subset B \subset A$.

On note p la proportion de la population de B dans la population de A.

On note p' la proportion de la population de C dans la population de B.

Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à $p \times p'$.



Exemple

La moitié des pages d'un magazine est constituée de publicités.

Parmi celles-ci, 25 % sont consacrées à la mode.

Ici, A est l'ensemble des pages du magazine, B est l'ensemble des pages de publicités et C est l'ensemble des pages de publicités consacrées à la mode.

La proportion des pages de publicités de mode parmi toutes les pages du magazine est donc de :

$\frac{1}{2} \times \frac{25}{100} = 0{,}125$, soit 12,5 %.

Remarque : Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.

Ainsi, la proportion de l'exemple précédent peut s'écrire :

– sous forme de fraction : $p = \frac{25}{200}$ ou $p = \frac{1}{8}$ sous forme irréductible ;

– sous forme décimale : $p = 0{,}125$;

– sous forme de pourcentage : $p = 12{,}5$ %.

↪ Exercice résolu 1 p. 274

2 Évolutions en pourcentage

Définitions Variations absolue et relative

On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A.

La variation absolue est $V_A - V_D$.

La variation relative, ou taux d'évolution, est $\frac{V_A - V_D}{V_D}$.

Ainsi, la variation relative indique ce que représente la variation absolue par rapport à la valeur de départ.

Exemple

La population d'une ville passe de 55 000 à 74 250 habitants.

La variation absolue de cette population est de 74 250 – 55 000 = 19 250.

La variation relative est de $\frac{74\ 250 - 55\ 000}{55\ 000} = \frac{7}{20} = 0{,}35$ soit 35 %.

Remarque : Dans l'exemple précédent, le taux d'évolution de 55 000 à 74 250 est de 35 %, cela veut dire que $55\,000 \times \left(1+\dfrac{35}{100}\right) = 74\,250$ où $1+\dfrac{35}{100} = 1{,}35$ est appelé le coefficient multiplicateur.

Réciproquement, comme $\dfrac{74\,250}{55\,000} = 1{,}35$, on peut trouver directement le taux d'évolution à partir du coefficient multiplicateur en calculant 1,35 – 1 = 0,35, soit 35 %.

Définition Évolutions successives

Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à une valeur V_3, le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre V_1 et V_3. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global et est égal à $c \times c'$ où c (respectivement c') est le coefficient multiplicateur de la première (respectivement de la seconde) évolution.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\times c"] \arrow[rr, bend right, "\times c_{\text{global}}"'] & V_2 \arrow[r, "\times c'"] & V_3 \end{tikzcd}$$

Exemple

Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30 % avant de baisser de 10 %. Il est donc multiplié par 1,3 puis par 0,9. Alors $c_{\text{global}} = 1{,}3 \times 0{,}9 = 1{,}17$; cela correspond à un taux de $1{,}17 - 1 = 0{,}17$.
Le taux d'évolution global est donc $t_{\text{global}} = 1{,}17 - 1 = 0{,}17$ soit 17 %.

Exercice résolu 2 p. 274

Définition Évolution réciproque

Lorsqu'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A, le taux réciproque est le taux permettant de revenir de V_A à V_D. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque et est égal à $\dfrac{1}{c}$ où c est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\text{Valeur}\\ \text{de départ}\\ V_D\end{array} \arrow[r, bend right, "\times c"'] & \begin{array}{c}\text{Valeur}\\ \text{d'arrivée}\\ V_A\end{array} \arrow[l, bend right, "\times \frac{1}{c}"'] \end{tikzcd}$$

Exemple

Un prix augmente de 25 % : il a donc été multiplié par $1+\dfrac{25}{100} = 1{,}25$.

Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est de :
$\dfrac{1}{1{,}25} = 0{,}8$.

Or 0,8 – 1 = –0,2 ce qui correspond donc à une baisse de 20 %.

Exercice résolu 3 p. 275

Exercices résolus

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-22

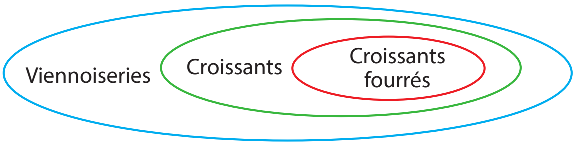
1 Calculer des proportions de proportions

Cours 1 p. 272

Dans une boulangerie, 40 % des viennoiseries sont des croissants et 20 % des croissants sont fourrés à la confiture. Déterminer la proportion de croissants fourrés parmi toutes les viennoiseries.

Solution

L'énoncé indique la proportion de croissants parmi les viennoiseries et la proportion de croissants fourrés parmi les croissants.
On est dans la situation de trois ensembles imbriqués.
La proportion de croissants fourrés parmi toutes les viennoiseries est donc de $\frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = 0,4 \times 0,2 = 0,08$ soit 8 %. 1 2 3



Conseils & Méthodes

1 Il faut faire attention à quel ensemble de référence se rapporte chacune des proportions de l'énoncé.

2 Il faut reconnaître la situation où les différentes proportions se rapportent à des ensembles différents.

3 Lorsqu'une proportion est donnée sous forme de pourcentage, il ne faut pas oublier la division par 100.

À vous de jouer !

1 Dans un jeu de Scrabble®, 45 % des lettres sont des voyelles. Parmi ces dernières, $\frac{1}{3}$ sont des E. Déterminer la proportion de E dans le jeu.

2 Un fabricant de meubles dispose d'un stock. Parmi les meubles en bois, un dixième est fait de chêne, alors qu'au total trois quarts des meubles sont en bois. Déterminer la proportion de meubles en chêne dans ce stock.

Exercices 22 à 24 p. 276

2 Calculer des évolutions successives

Cours 2 p. 272

La population d'une ville augmente de 1 % entre 2017 et 2018, puis de 2 % entre 2018 et 2019.
1. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à chacune de ces évolutions.
2. Déterminer le coefficient multiplicateur global.
3. En déduire le taux d'évolution global entre 2017 et 2019.
4. La ville comptait 15 000 habitants en 2017. Déterminer le nombre d'habitants en 2019.

Solution

1. Augmenter de 1 % revient à multiplier par $1 + \frac{1}{100} = 1,01$;
augmenter de 2 % revient à multiplier par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$.

2. $c_{\text{global}} = 1,01 \times 1,02 = 1,0302$. 1

3. $t_{\text{global}} = c_{\text{global}} - 1 = 1,0302 - 1 = 0,0302 = \frac{3,02}{100}$. 2
L'évolution globale est une hausse de 3,02 %.

4. $15\,000 \times 1,0302 = 15\,453$. La ville compte 15 453 habitants en 2019.

Conseils & Méthodes

1 Le coefficient multiplicateur global s'obtient en multipliant tous les coefficients multiplicateurs successifs.

2 Le taux d'évolution global s'obtient à partir du coefficient multiplicateur global : on ne peut pas ajouter ou soustraire des pourcentages d'évolution.

À vous de jouer !

3 La température moyenne journalière dans un village augmente de 15 % puis diminue de 14 %.
1. Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à ces deux évolutions, puis le taux d'évolution global.
2. Déterminer la température moyenne à l'issue de ces deux évolutions sachant qu'elle était au départ de 10 °C.

4 John étudie le nombre de paniers réussis lors de ses séries de cent lancers. Il a remarqué que son total avait augmenté de 10 % puis diminué de 30 %. Déterminer l'évolution globale du nombre de ses lancers réussis.

Exercices 34 à 36 p. 277

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-22

3 Calculer des évolutions réciproques

Cours 2 p. 272

1. **Une usine produit des pièces pour machine à laver. Le gérant a noté que le nombre de pièces défectueuses avait augmenté de 25 % pour atteindre 600 unités.**
a) Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette hausse de 25 %.
b) Le gérant souhaite revenir au niveau précédent de pièces défectueuses. Par combien le nombre de pièces défectueuses doit-il être multiplié ?
c) Quelle est l'évolution en pourcentage correspondant à cette évolution ?

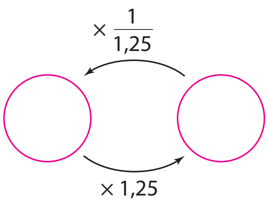
2. **Dans une autre usine, la gérante a remarqué une hausse de 60 % du nombre de pièces présentant un défaut. Quelle évolution en pourcentage ce nombre doit-il subir pour revenir à la valeur de départ ?**

Solution

1. a) $c = 1 + \dfrac{25}{100} = 1,25.$

b) $\dfrac{600}{1,25} = 600 \times \dfrac{1}{1,25}.$

Il doit être multiplié par $c_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1,25} = 0,8.$ **1**



c) $t_{\text{réciproque}} = c_{\text{réciproque}} - 1 = 0,8 - 1 = -0,2$
$-0,2 \times 100 = -20.$
L'évolution correspondante est une baisse de 20 %.

2. Augmenter de 60 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{60}{100} = 1,6.$

Pour revenir à la valeur de départ, il faut donc multiplier ce nombre par $c_{\text{réciproque}} = \dfrac{1}{1,6} = 0,625.$ **2**

$t_{\text{réciproque}} = c_{\text{réciproque}} - 1 = 0,625 - 1 = -0,375$

$-0,375 \times 100 = -37,5.$ Ce nombre doit donc subir une baisse de 37,5 % pour revenir à sa valeur de départ.

Conseils & Méthodes

1 Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

2 Il faut nécessairement traduire les évolutions en pourcentage par des coefficients multiplicateurs pour déterminer le coefficient multiplicateur réciproque avant de revenir à l'évolution en pourcentage.

À vous de jouer !

5 Le nombre de communes en France métropolitaine a baissé de 5,17 % entre 2012 et 2019.
Il était alors de 34 851 en 2019.
1. Déterminer le coefficient multiplicateur associé à la baisse de 5,17 %.
2. En déduire le nombre de communes en France métropolitaine en 2012.

6 À la suite de mauvaises récoltes de blé, le prix de la farine augmente de 30 %.
1. Par combien doit-on multiplier son prix pour revenir à sa valeur de départ ?
Arrondir le résultat au millième.
2. Quelle est l'évolution en pourcentage correspondante ?

7 Un artisan a décidé d'augmenter son tarif horaire de 10 %.
Quelle évolution devrait-il subir pour revenir à son niveau de départ ?

Exercices 37 à 39 p. 277

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

8 Expliquer comment passer d'une évolution en pourcentage à un coefficient multiplicateur, et réciproquement.

9 Expliquer pourquoi deux hausses successives de 20 % ne correspondent pas à une hausse de 40 %.

10 Indiquer les différentes manières de déterminer une évolution en pourcentage.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

11 Une classe de seconde compte 30 élèves.
1. 40 % des élèves sont externes.
Déterminer le nombre d'externes dans la classe.
2. Cette classe regroupe 10 % des élèves de seconde du lycée.
Déterminer le nombre total d'élèves de seconde.

12 Gina possède 10 cahiers.
1. 4 d'entre eux sont à petits carreaux.
Déterminer la proportion de cahiers à petits carreaux parmi tous ses cahiers.
2. La moitié des cahiers à petits carreaux sont bleus.
Déterminer la proportion de cahiers bleus à petits carreaux parmi tous ses cahiers.

13 Dans chacun des cas suivants, donner le coefficient multiplicateur associé à l'évolution en pourcentage t.
a) $t = 0{,}43$ **b)** $t = -20$ % **c)** $t = -0{,}5$
d) $t = 0{,}3$ **e)** $t = 300$ % **f)** $t = 5{,}2$ %
g) $t = -0{,}4$ %

14 Dans chacun des cas suivants, on donne le coefficient multiplicateur c d'une évolution. Indiquer s'il s'agit d'une hausse ou d'une baisse et donner l'évolution en pourcentage correspondante.
a) $c = 1{,}43$ **b)** $c = 0{,}96$ **c)** $c = 1{,}034$
d) $c = 2$ **e)** $c = 0{,}943$

15 **1.** Un prix augmente de 10 % puis baisse de 10 %. Déterminer le coefficient multiplicateur global, puis le taux d'évolution global, associés à ces deux évolutions successives.
2. Même question pour une hausse de 20 % suivie d'une baisse de 20 %.

16 Déterminer l'évolution réciproque (qui permet de revenir à la valeur initiale) des évolutions suivantes données en pourcentage.
a) $t = -50$ % **b)** $t = 200$ %
c) $t = -90$ % **d)** $t = 50$ %

Effectifs et proportion

AP

17 Le directeur d'un conservatoire étudie le profil des 500 étudiants inscrits. Il a remarqué que 320 pratiquaient le piano.
Déterminer la proportion d'étudiants pratiquant le piano parmi tous les étudiants de ce conservatoire.

18 Un maraicher finit de remplir sa camionnette de fruits et de légumes. Il a remarqué que sur les 70 cageots chargés, 49 comportaient des fruits.
Déterminer la proportion de cageots de fruits parmi l'ensemble des cageots.

19 EMC L'Assemblée nationale élue en juin 2017 comportait 224 femmes députées sur les 577 élus. Déterminer la proportion de femmes députées, sous forme de fraction puis sous forme de pourcentage en arrondissant à 0,01 % près.

20 Un paquet de pates de 500 g contient 60 % de pates de couleur. Déterminer la masse de pates de couleur dans le paquet.

21 SES En 2018, le projet de budget de la France prévoyait 42,55 milliards de dépense concernant le ministère de la Défense, ce qui représentait 6 % des dépenses du budget.
Quel est le montant des dépenses total prévu par le projet de budget 2018 ? (source : *Le Monde*)

Proportion de proportion

22 La carte d'un restaurant est composée pour moitié de plats. Parmi eux, 20 % sont végétariens. Déterminer la proportion de plats végétariens dans la carte de ce restaurant.

23 80 % des ventes d'un concessionnaire sont des utilitaires. Parmi ceux-ci, 35 % sont de couleur blanche.
Déterminer la proportion d'utilitaires blancs parmi les ventes de ce concessionnaire.

24 Dans une classe, 45 % des élèves sont des garçons. Parmi eux, 20 % portent des lunettes de vue. Déterminer la proportion de garçons portant des lunettes de vue dans l'ensemble de la classe.

Variations absolue et relative

25 Le taux horaire brut du SMIC (en euros) est passé de 9,76 en 2017 à 9,88 en 2018 (source : Insee).
Déterminer l'évolution en pourcentage du SMIC entre 2017 et 2018. Arrondir le résultat à 0,1 % près.

26 Un journal voit son nombre d'abonnés passer de 6,3 milliers à 5,4 milliers.
1. Déterminer la variation absolue du nombre d'abonnés.
2. Déterminer son évolution en pourcentage.

27 Voici l'évolution des moyennes générales obtenues par un élève.

1er trimestre	2e trimestre	3e trimestre
12,3	13,5	10,4

1. a) Déterminer la variation absolue de sa moyenne générale entre le premier et le deuxième trimestre.
b) Déterminer la variation relative (évolution en pourcentage) de sa moyenne générale entre le premier et le deuxième trimestre.
2. Déterminer l'évolution en pourcentage de sa moyenne générale entre le deuxième et le troisième trimestre.

Coefficient multiplicateur et évolution en pourcentage AP

28 Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.
a) hausse de 30 % **b)** baisse de 10 %
c) hausse de 45 % **d)** hausse de 2,3 %
e) baisse de 0,3 % **f)** hausse de 100 %

29 Déterminer les coefficients multiplicateurs associés aux évolutions suivantes.
a) baisse de 5 % **b)** hausse de 1,03 %
c) hausse de 300 % **d)** baisse de 95 %

30 Déterminer les évolutions en pourcentage associées aux coefficients multiplicateur suivants.
a) $c = 1{,}2$ **b)** $c = 0{,}89$
c) $c = 1{,}03$ **d)** $c = 2$

31 Déterminer les évolutions en pourcentage associées aux coefficients multiplicateur suivants.
a) $c = 0{,}3$ **b)** $c = 1{,}0087$
c) $c = 3{,}32$ **d)** $c = 0{,}876$

32 **1.** Un adolescent mesure 1,60 m lors de son arrivée au lycée. Au cours de l'année de seconde, sa taille augmente de 5 %. Déterminer sa taille à la fin de l'année.
2. Pendant les vacances scolaires, Arthur passe deux heures par jour sur sa console. Ses parents lui ont demandé de réduire ce temps de 80 % lorsque ses cours recommenceraient. Quel temps pourra-t-il espérer jouer lorsque ses cours reprendront ?

33 Une veste coute 120 euros. Lors d'une promotion, son prix diminue de 30 %.
1. a) Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette évolution.
b) En déduire le nouveau prix de la veste.
2. Lors d'une deuxième démarque, le prix baisse à nouveau de 30 %. Déterminer son nouveau prix.

Évolutions successives

34 **1.** Un prix augmente de 10 % puis baisse de 40 %.
a) Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à ces deux évolutions.
b) En déduire l'évolution globale en pourcentage.
2. Reprendre les questions précédentes pour les cas suivants.
a) une baisse de 20 % suivie d'une baisse de 10 %
b) une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 12 %
c) une baisse de 13 % suivie d'une hausse de 24,3 %
d) une baisse de 70 % suivie d'une hausse de 200 %

35 Déterminer l'évolution globale en pourcentage associée aux évolutions successives suivantes.
a) une hausse de 12 % suivie d'une baisse de 5 %
b) une baisse de 50 % suivie d'une baisse de 60 %
c) deux hausses successives de 45 %

36 SES Le cours d'une action s'écroule en bourse. Après avoir baissé de 20 % le lundi, voilà que son cours baisse à nouveau de 30 %. Déterminer l'évolution globale subie par le cours de cette action.

Évolution réciproque

37 Un élève fournit un travail acharné pour améliorer ses résultats. Quand il reçoit sa copie de SVT avec la note de 18, il s'exclame : « Tout ce travail pour une hausse de seulement 12,5 % ! »
Déterminer sa note précédente.

38 Une valeur est multipliée par 1,5625.
1. Par combien doit-on la multiplier pour revenir à la valeur de départ ?
2. Quelle est l'évolution en pourcentage correspondante ?

39 Déterminer l'évolution réciproque associée à chacune des évolutions suivantes.
a) une hausse de 100 %
b) une baisse de 20 %

Calculs et automatismes

40 Simplifier les fractions suivantes.
a) $\frac{4}{6}$ **b)** $\frac{16}{20}$ **c)** $\frac{40}{48}$ **d)** $\frac{18}{81}$

41 Calculer.
a) $1{,}1 \times 1{,}3$ **b)** $0{,}9 \times 0{,}4$
c) $0{,}9 \times 1{,}2$ **d)** $0{,}8 \times 1{,}3$

Exercices d'entraînement

Proportion et effectifs

42 Le montant minimum de la retraite de base était de 634,66 euros en 2017/2018. Le loyer d'un retraité représente 40 % du montant du minimum retraite. Quel est le montant de son loyer ?

43 Dans un lycée, la classe de 2^de^ 1 compte 24 élèves.
1. 15 élèves de la classe sont des filles. Déterminer la proportion de filles dans la classe. Donner le résultat sous forme de pourcentage arrondi au centième.
2. Deux tiers des élèves sont demi-pensionnaires. Déterminer le nombre de demi-pensionnaires dans la classe.
3. La classe représente 2 % des effectifs du lycée. Déterminer le nombre total d'élèves dans le lycée.

44 On comptait, en 2018, 232 lycées (dont 60 privés) dans l'académie de Créteil, et 125 lycées (dont 64 privés) dans l'académie d'Aix-Marseille. Laquelle des deux académies compte en proportion le plus de lycées publics ?

Proportion de proportion

45 Lorsque Noah prend une boisson à la machine automatique, il prend la moitié du temps un café. Lorsqu'il prend un café, il y ajoute du sucre une fois sur trois.
Déterminer la proportion de cafés sucrés bus par Noah à cette machine à café.

46 Fanta utilise un site de vidéos en streaming. Elle a remarqué que 7 % des vidéos qu'elle visionnait étaient des séries françaises. Par ailleurs, 35 % des vidéos qu'elle a vues sont des séries.
Déterminer la proportion de séries françaises parmi les séries regardées par Fanta.

47 En 2016, selon une étude de l'Insee, 19,3 % des salariés travaillaient à temps partiel. Toujours selon cette même étude, la proportion de femmes salariées à temps partiel parmi l'ensemble des salariés était alors de 15,4 %.
Déterminer la proportion de femmes parmi les salariés à temps partiel en 2016.

Variations absolue et relative

48 Après un long entrainement, Marvin a remarqué qu'il courrait le 800 m en 2 minutes et 18 secondes, contre 3 minutes auparavant.
Déterminer le taux d'évolution de son temps de parcours. Arrondir le résultat à 0,1 % près.

49 **Géographie** Le tableau suivant donne le PIB du Brésil et des États-Unis en 2000 et en 2010 (en milliards de dollars) (source : Banque mondiale).

	2000	2010
Brésil	655	2 209
États-Unis	10 285	14 964

1. Déterminer la variation absolue du PIB entre 2000 et 2010 pour chacun de ces pays.
2. Déterminer leur évolution relative.
3. Quel PIB a progressé le plus rapidement entre ces deux dates en pourcentage ?

50 Le tableau ci-dessous donne le montant du SMIC horaire et de l'indice des prix le 01/01/15 et le 01/01/18 (base 100 le 1^er^ janvier 2015).

	01/01/2015	01/01/2018
SMIC (en euros)	9,61	9,88
Indice des prix	100	102,85

Peut-on affirmer que le SMIC a augmenté plus vite que les prix entre 2015 et 2018 ?

Coefficient multiplicateur

51 En 2010, la population française était estimée à 62 765 milliers d'habitants.
1. La population française a augmenté de 3,2 % entre 2010 et 2015.
Déterminer une estimation de la population française en 2015.
Arrondir le résultat au millier.
2. Déterminer une estimation de la population française en 2020 si elle augmente au même rythme en pourcentage.
3. La population française a augmenté de 2,96 % entre 2005 et 2010.
a) Déterminer le coefficient multiplicateur associé à cette évolution.
b) Déterminer la population française en 2005.

52 On considère l'algorithme suivant. **Algo & Prog**

```
Saisir t
c ← 1 + t
Afficher c
```

1. Que renvoie cet algorithme si on donne $\frac{35}{100}$ en entrée ?
2. À quoi cet algorithme peut-il servir ?
3. Que doit-on donner en entrée pour qu'il affiche 1,071 ?
4. a) Que renvoie l'algorithme si on donne –1,2 en entrée ?
b) Modifier l'algorithme pour qu'il affiche un message d'erreur si on donne une proportion inférieure à –1 en entrée.

53 Algo & Prog Sur le modèle de l'exercice précédent, écrire un algorithme qui renvoie l'évolution en pourcentage correspondant au coefficient multiplicateur donné en entrée.

54 **1.** Dans une boulangerie, une baguette coûte 90 centimes.

a) Son prix augmente de 10 %. Par quel nombre a-t-il été multiplié ?
b) Quel est son nouveau prix ?
c) Dans la boulangerie située en face, le prix du pain a baissé de 2 %.
Par combien a-t-il été multiplié ?
2. a) Un élève a remarqué que sa moyenne avait été multipliée par 1,42 par rapport au trimestre précédent.
Déterminer l'évolution en pourcentage associée à cette évolution.
b) Un autre élève a remarqué que sa moyenne avait été multipliée par 0,9.
Déterminer l'évolution en pourcentage associée à cette évolution.

Évolutions successives

55 Dans un pays, les prix augmentent chaque année de 2 %. Le salaire de Nora n'a pas augmenté depuis trois ans, quelle hausse doit-il subir pour rattraper l'évolution des prix ?

56 SES Un gérant d'entreprise engage un plan de développement pour que son chiffre d'affaires augmente d'au moins 10 % sur l'année.
Au bout de six mois, il a remarqué que son chiffre d'affaires n'avait augmenté que de 4,1 %. Doit-il remettre en cause sa stratégie sur l'année ?

57 Compléter.
a) Une hausse de 6 % suivie d'une hausse de … % correspondent à une hausse de 21,9 %.
b) Trois baisses de 30 % correspondent à une baisse de … %.
c) Une baisse de … % suivie d'une baisse de 12 % correspondent à une baisse de 34 %.

58 Le nombre de morts dus aux accidents de circulation en France en 2011 était de 63 par million d'habitants.
Ce taux a diminué de 7,9 % en 2012 puis de 12,1 % en 2013.
Déterminer le nombre de morts par million d'habitants en France en 2013.

Évolution réciproque

59 Déterminer l'évolution réciproque de chacune de ces évolutions.
Arrondir à 0,01 %.

a) $t = 24$ % **b)** $t = -7$ %
c) $t = 0{,}056$ % **d)** $t = -45$ %

60 La TVA sur les biens et services s'élève à 20 %. Déterminer le prix hors taxe d'un canapé dont le prix affiché en magasin est de 642 euros.

61 Après trois baisses successives de 10 % de la fréquentation de son cinéma, un gérant de salle souhaite réagir. Il veut rattraper son niveau de fréquentation précédent. Après une large campagne de publicité, voilà qu'il a gagné 12 % de spectateurs.
Quelle nouvelle évolution en pourcentage permettrait au gérant d'atteindre son objectif ?

Travailler autrement

62 À l'oral Rosa dispose de 5 000 euros à placer. Une banque lui propose différentes formules. Classer les différentes offres, de la plus intéressante à la moins intéressante :
- Offre A : une hausse annuelle de 4 % en début d'année.
- Offre B : une hausse de 2 % tous les six mois.
- Offre C : une hausse de 200 euros en début d'année.

63 En groupe **1.** Chercher les différents taux de TVA existants.
2. Pour chaque taux, indiquer l'évolution que doit subir le montant du prix TTC pour retrouver le prix HT.

64 En groupe Un nouveau stade est construit. La saison suivant son inauguration, il n'a été rempli qu'à moitié (en moyenne).
Mais chaque année sa fréquentation moyenne augmente de 2 %.
Au bout de combien de temps, le taux de remplissage moyen du stade dépassera-t-il 90 % ?

Exercices bilan

65 Budget

Une femme vit seule dans un appartement.

1. a) En 2018, le loyer de son appartement s'élevait à 500 euros. Il représente 40 % de son salaire. Déterminer le montant de son salaire.

b) Le reste des charges représente 8 % de son salaire. Déterminer le montant du reste des charges.

2. Son employeur lui accorde une augmentation de 100 euros. Déterminer l'évolution en pourcentage que cela représente.

3. Le montant de son loyer augmente de 2 % chaque année.

a) Déterminer le montant de son loyer en 2019.

b) Déterminer en quelle année l'augmentation de son loyer absorbera son augmentation de salaire.

66 Question d'orientation

À l'issue du conseil de classe du troisième trimestre, le professeur principal d'une classe de seconde, qui compte 32 élèves, fait le bilan des orientations de ses élèves pour l'année de première.

Il a noté que :

– parmi les 20 filles de la classe, une se dirige vers la voie professionnelle alors qu'un quart d'entre elles poursuivront leurs études en classe de première technologique ;

– la moitié des garçons iront en première générale ;

– il y a deux fois plus de garçons que de filles qui iront en première professionnelle.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, qui indique l'orientation des élèves de cette classe selon les voies, avec les informations de l'énoncé.

	1re générale	1re techno	1re pro	Total
Garçons				
Filles				
Total				

2. Déterminer la proportion de filles dans la classe.

3. Déterminer la proportion d'élèves se dirigeant vers la voie technologique dans la classe.

4. Déterminer la proportion de filles se dirigeant vers la voie technologique.

5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Argumenter.

a) Plus de trois quarts des filles iront dans la voie générale.

b) Un tiers des garçons se dirigent vers la voie technologique.

c) Il y a plus de garçons que de filles qui se dirigent vers la voie technologique.

67 Bilan des évolutions

Un maraicher suit l'évolution de ses stocks de fruits et légumes. Compléter le tableau suivant.

	Stock initial (en kg)	Stock final (en kg)	Évolution en %	Coeff. multiplicateur
Tomates	45,2			1,12
Oranges	80	97		
Citrons		12		0,6
Oignons	16		–8 %	
Carottes		115	–20 %	

68 Culture bio *(d'après Bac)* TICE

La feuille de calcul suivante, extraite d'un tableur, donne la part de la surface agricole couverte par l'agriculture biologique (en pourcentage de la surface agricole totale) en Suède, entre 2010 et 2016 (source : ec. europa. eu/ eurostat).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
2	Part de l'agriculture biologique	14,3	15,7	15,76	16,5	16,53	17,09	18,21
3	Taux d'évolution par rapport à 2010							

1. Quelle formule peut-on saisir en C3 pour obtenir, par recopie vers la droite, les valeurs de la plage de cellules C3 : H3 ?

2. Déterminer le taux d'évolution global de la part de la surface agricole couverte par l'agriculture biologique en Suède entre 2010 et 2016. L'exprimer en pourcentage.

3. Le gouvernement suédois a pour objectif, d'ici 2025, qu'un quart de la surface agricole totale soit occupé par l'agriculture biologique. On suppose, qu'à partir de 2016, la part de la surface agricole couverte par l'agriculture biologique augmente de 4 % par an. L'objectif du gouvernement sera-t-il atteint au vu de cette hypothèse ? Justifier la réponse.

69 Objectif à atteindre

Geoffroy est directeur d'une agence bancaire.

1. Il souhaite diminuer de 20 % le nombre de photocopies réalisées dans son agence durant l'année. Au 1er trimestre, ce nombre a diminué de 7 %, avant d'augmenter de 2 % au 2e trimestre et de diminuer à nouveau de 6 % au 3e trimestre.

a) Déterminer le taux d'évolution global pour les trois premiers trimestres.

b) En déduire l'évolution que doit subir le nombre de photocopies lors du dernier trimestre pour que Geoffroy puisse atteindre son objectif.

2. Durant cette même année, la masse salariale a augmenté de 8 %. Quelle évolution doit-elle subir pour revenir à sa valeur initiale ?

70 Fonction linéaires et évolution en pourcentage

1. a) Un gérant de supermarché décide d'augmenter tous les prix de ses produits de 2 %. On note x le prix d'un de ses produits. On note $f(x)$ son nouveau prix. Déterminer une expression de $f(x)$.

b) Quelle est la nature de la fonction f ?

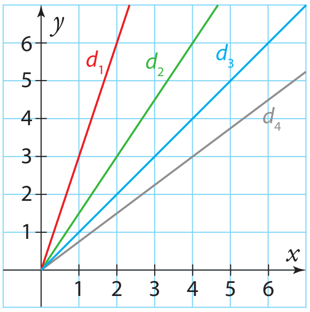
2. Associer chaque droite représentant une fonction linéaire à l'évolution en pourcentage correspondante.

a) hausse de 50 %

b) baisse de 25 %

c) hausse de 200 %

d) hausse de 5 %



3. À quelle condition une droite va-t-elle représenter une hausse en pourcentage ? une baisse en pourcentage ?

71 Fonction et taux d'évolution

Un prix d'un montant de x euros subit une évolution de t %. On note $f(x)$ le nouveau prix en euros après cette évolution.

1. Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

2. Quelle est la nature de la fonction f ?

3. Déterminer le sens de variation de la fonction f.

4. Déterminer le taux d'évolution associé à la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4}{5}x$ pour $x \in \mathbb{R}+$.

72 Croissance du PIB

Un chef d'état souhaiterait que la croissance du PIB de son pays atteigne 2 % sur l'année.

Les études comptables montrent que le PIB a augmenté de 0,5 % au premier trimestre, diminué de 0,2 % au deuxième trimestre puis augmenté de 1,1 % au troisième trimestre.

Quelle doit être l'évolution minimale au cours du dernier trimestre de l'année pour que le chef d'état atteigne ses objectifs ? Arrondir le résultat à 0,1 % près.

73 Bonnes affaires

Deux magasins situés en face l'un de l'autre se livrent une concurrence acharnée. Chacun propose le kilo de pommes à 2 euros, mais avec des offres différentes.

• Le premier annonce : « Pour deux kilos minimum de pommes achetés, 10 % de réduction immédiate ! »

• Le second propose : « Pour deux kilos minimum de pommes achetés, 10 % de produit en plus ! »

Les offres sont-elles équivalentes ?

74 Inflation

Samuel a constaté que le prix de la maison qu'il convoitait était passé de 150 milliers d'euros en 2016 à 157,6 milliers deux ans plus tard.

Samantha lui fait remarquer : mais c'est bien plus que l'inflation annuelle de 2 % annoncée !

1. Déterminer le coefficient multiplicateur global associé à cette évolution. Arrondir le résultat à 10^{-4} près.

2. On cherche à déterminer l'évolution annuelle moyenne en pourcentage.

a) Expliquer pourquoi le coefficient multiplicateur annuel moyen c doit vérifier l'équation $c^2 = 1{,}0507$.

b) En déduire le taux d'évolution annuel moyen.

c) Que penser de l'affirmation de Samantha ?

75 Bonne résolution

À la rentrée, Yannick se lance un défi : il veut réduire son temps passé devant les jeux vidéo de 30 % avant le mois de décembre. Pour faire les choses en douceur, il veut étaler cette réduction sur trois mois : il souhaite diminuer son temps d'un même pourcentage t chaque mois de septembre, octobre et novembre.

1. Expliquer pourquoi appliquer trois baisses successives de 10 % ne sera pas suffisant.

2. Montrer que le problème revient à résoudre $(1 + t)^3 = 0{,}7$.

3. a) On pose $X = 1 + t$. Résoudre l'équation $X^3 = 0{,}7$. Donner une valeur approchée au millième.

b) En déduire la solution au problème de Yannick.

76 Extinction ?

On comptait environ 20 000 lions en Afrique en 2015. Une estimation réalisée par des chercheurs indique que cette population baisserait de 3 % chaque année.

1. Quelle était cette population en 2016 selon cette estimation ?

2. On suppose que la population de lions baisse de 3 % chaque année. On note $U(0)$ la population de lions en Afrique en 2015, $U(1)$ la population en 2016, et plus généralement $U(n)$ la population l'année 2015 + n. Ainsi, $U(0) = 20\,000$ et $U(1) = 19\,400$.

a) Donner une interprétation concrète de $U(2)$ et en donner sa valeur.

b) Déterminer $U(5)$.

c) Déterminer au bout de combien d'années le nombre de lions sera inférieur à 15 000.

d) Une autre étude, datant de 2015, prévoyait une division par deux du nombre de lions en 20 ans. Cette étude est-elle encore plus pessimiste sur l'évolution du nombre de lions ?

3. a) Déterminer une expression de $U(n)$ en fonction de n.

b) Déterminer en quelle année cette espèce s'éteindrait, selon ce modèle.

Exercices d'approfondissement

Vers la 1re

77 STMG SES

Au cours du mois d'août 2018, un parc de loisirs a vendu 16 000 billets d'entrée au prix unique de 50 euros.

On définit le chiffre d'affaires comme le produit du prix du billet d'entrée par le nombre de billets vendus. Ainsi, le chiffre d'affaires du mois d'août 2018 s'élève à 800 000 euros.

Suite à une étude de marché, on émet l'hypothèse suivante : une diminution de x % du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur au mois d'août 2018 (50 euros) entraîne une augmentation de $(2x)$ % du nombre d'entrées par rapport à sa valeur au mois d'août 2018 (16 000 entrées).

L'objectif de l'exercice est de calculer le pourcentage de diminution du prix du billet qui maximise le chiffre d'affaires.

A. Étude d'un exemple

Pour le mois d'août 2019, on envisage de diminuer le prix du billet d'entrée de 10 % par rapport à sa valeur en août 2018.

1. Quel serait alors le prix du billet d'entrée en août 2019 ?

2. Quel serait alors le nombre d'entrées en août 2019 ?

3. Vérifier que le chiffre d'affaires du mois d'août 2019 serait alors de 864 000 euros.

B. Utilisation d'un tableur

On se propose d'étudier l'évolution du chiffre d'affaires en fonction du taux de diminution du prix du billet d'entrée par rapport à sa valeur en août 2018.

Ce taux, exprimé en pourcentage, apparaît dans la première ligne du tableau suivant, extrait d'une feuille de calcul.

Toutes les lignes du tableau sont au format *Nombre*.

	A	B	C	D	E
1	Taux de diminution (en pourcentage)	0	10	20	30
2	Prix du billet d'entrée (en €)	50	45	40	35
3	Nombre d'entrées	16 000	19 200	22 400	25 600
4	Chiffre d'affaires (en €)	800 000	864 000	896 000	896 000

	A	F	G	H	I
1	Taux de diminution (en pourcentage)	40	50	60	70
2	Prix du billet d'entrée (en €)	30	25	20	15
3	Nombre d'entrées	28 800	32 000	35 200	38 400
4	Chiffre d'affaires (en €)	864 000	800 000	704 000	576 000

1. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B4 pour obtenir, par recopie vers la droite, les chiffres d'affaires de la plage C4 : I4 ?

2. Compte tenu des résultats donnés par le tableur, conjecturer des pourcentages de diminution du prix du billet d'entrée qui maximisent le chiffre d'affaires.

78 Spécialité Maths — Algo & Prog

Une espèce de tortues invasives a été introduite sur une île d'Océanie. L'année 2010, on comptait une centaine d'individus. En l'absence de prédateur, sa population augmente chaque année de 20 %.

On note $U(n)$ la population de tortues l'année $2010 + n$. Ainsi, $U(O) = 100$.

1. Déterminer la population de tortues en 2011.

2. Donner l'interprétation concrète de $U(3)$.

3. On considère l'algorithme suivant.

```
  u ← 100
  n ← 0
Tant que u < 200
  u ← 1,2*u
  n ← n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

a) Quelle valeur cet algorithme affiche-t-il ? Que représente cette valeur ?

b) Modifier l'algorithme pour qu'il renvoie en sortie l'année où la population de tortues aura été multipliée par 10 selon ce modèle.

4. Expliquer quelles seront les limites de cette modélisation.

1 Variations absolue et relative

TICE — Modéliser, raisonner — 25 min

A ▸ Étude des variations du prix du baril

Le tableau suivant indique le prix du baril brut de pétrole brent, en euros par baril (source : Insee).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Nov. 2017	Déc. 2017	Janv. 2018	Fév. 2018	Mars 2018	Avr. 2018	Mai 2018	Juin 2018	Jui. 2018	Aou. 2018	Sep. 2018	Oct. 2018	Nov. 2018
2	Cours en € par baril	53,4	54,4	56,6	52,9	53,5	58,7	65,2	63,7	62,5	62,8	67,7	70,6	57,0
3	Variation absolue													
4	Variation relative													

1. Reproduire la feuille de calcul.
2. Entrer dans la cellule C3 la formule =C2–B2 puis la recopier vers la droite pour obtenir les variations absolues.
3. Compléter de même la ligne suivante pour obtenir les variations relatives.
4. Entre quels mois a eu lieu la plus forte baisse ? la plus forte hausse ?

B ▸ Projections en suivant le même rythme en pourcentage

1. On suppose que l'évolution en pourcentage se poursuit au même rythme que lors de la dernière évolution. Quelle serait alors la valeur du brent en septembre 2019 ?
2. Comparer avec la vraie valeur que l'on peut trouver sur Internet. Est-ce un modèle réaliste ? Expliquer.

2 Algorithme d'évolution

Algo & Prog — Modéliser, expérimenter — 50 min

A ▸ Variation relative

On considère l'algorithme ci-contre, écrit en langage naturel.

```
Saisir V_D
Saisir V_A
t ← (V_A − V_D) / V_A
Afficher t
```

1. Cet algorithme comporte une erreur. Corriger cet algorithme et l'écrire dans le langage PYTHON.
2. Tester cet algorithme pour $V_D = 40$ et $V_A = 55$, puis pour $V_D = 15$ et $V_A = 13$.
3. Modifier cet algorithme pour qu'il indique si l'évolution est une hausse ou une baisse.

B ▸ Un deuxième algorithme

On considère l'algorithme ci-contre, écrit en langage naturel et en langage PYTHON.

En langage naturel	En PYTHON

t_1 ← valeur saisie
t_2 ← valeur saisie
c ← (1 + t_1) * (1 + t_2)
t ← …
Afficher t
	`t1=float(input("t1="))`
	`t2=float(input("t2="))`
	`c=(1+t1)*(1+t2)`
	`t=...`
	`print(t)`

1. À quoi cet algorithme pourrait-il servir ? Compléter les pointillés pour le rendre fonctionnel en langage naturel et en langage PYTHON.
2. Que renvoie cet algorithme si on donne en entrée $t_1 = 0{,}1$ et $t_2 = -0{,}2$?
3. a) Que renvoie-t-il si on donne en entrée $t_1 = 0{,}2$ et $t_2 = -2$?
b) Modifier l'algorithme pour qu'il renvoie un message d'erreur dans ce cas.

C ▸ Et que ça double !

Marta place 1 000 euros sur un compte en banque rémunéré à un taux annuel de 2 %. Elle se demande au bout de combien de temps ce montant aura doublé.
Écrire un algorithme pour qu'il réponde à la question posée en langage PYTHON et l'exécuter.

En autonomie

1 Déterminer des proportions

QCM

Pour les exercices 79 à 81, on considère l'énoncé suivant.
Naïma a gagné un sachet de billes lors d'une fête foraine. Férue de rouge, elle décide de trier les billes de son sachet. Le tableau ci-dessous donne la composition du sachet en fonction de la couleur et de la matière des billes.

	Rouge	Bleu	Vert	Jaune	Total
Verre	5	9	8	2	24
Terre	1	3	2	0	6
Total	6	12	10	2	30

79 La proportion de billes rouges dans l'ensemble du sac est de :

a 6 b 0,2 c 20 % d $\frac{20}{100}$

80 La proportion de billes en verre parmi les billes vertes est de :

a 0,2 b 0,8 c $\frac{4}{15}$ d $\frac{1}{3}$

81 La couleur qui comporte la plus grande proportion de billes en terre est :

a le rouge b le bleu
c le vert d le jaune

82 ✶ Une classe comporte 40 % de garçons. La moitié de ceux-ci ont eu la moyenne au dernier contrôle. Déterminer la proportion de garçons ayant eu la moyenne parmi tous les élèves de la classe.

83 ✶ Selon l'Insee, on comptait au 1er janvier 2018, en France, 22 % de personnes nées dans les années 2000. Parmi celles-ci, 48,88 % étaient de sexe féminin.
Déterminer la proportion de personnes de sexe féminin nées dans les années 2000 dans l'ensemble de la population française.

84 ✶✶ Nour est statisticien. Il a relevé que son bébé se réveille une nuit sur quatre. Il a aussi remarqué que la proportion des nuits où son bébé devait boire un biberon pour se rendormir était de 0,08.
Déterminer la proportion de nuits où Nour doit préparer un biberon parmi les nuits où son bébé se réveille.

2 Travailler avec des évolutions en pourcentage

QCM

85 Une population de bactéries cultivées en laboratoire augmente chaque jour de 20 %. Le premier jour, on estimait à 10 milliers le nombre de bactéries. Au bout d'un jour, la population de bactéries est de :

a 10 000,2 b 12 milliers c 2 000

86 Effectuer une baisse de 13 % revient à multiplier par :

a 0,13 b 1,13 c 0,87 d –0,13

87 Multiplier par 1,051 revient à effectuer une hausse de :

a 1,051 % b 51 % c 5,1 %

88 Multiplier par 0,2 revient à faire une baisse de :

a 0,2 % b 20 % c 80 % d 0,8 %

89 ✶ Donner le coefficient multiplicateur associé aux évolutions suivantes.

a) $t = +78$ % **b)** $t = -31$ %
c) $t = +5{,}6$ % **d)** $t = -7$ %

90 ✶ Donner l'évolution en pourcentage correspondant aux coefficients multiplicateurs suivants.

a) $c = 1{,}15$ **b)** $c = 1{,}07$
c) $c = 0{,}7$ **d)** $c = 0{,}892$
e) $c = 2$ **f)** $c = 0{,}02$

91 ✶ Kaly a eu 8 au premier contrôle, puis 13 au second.
Déterminer l'évolution en pourcentage de ses résultats.

92 ✶✶ Pour un restaurant, la TVA s'élève à 10 %.
1. Combien sera facturé un plat à 10 euros hors taxes ?
2. Quel était le prix hors taxes d'un plat facturé 15,4 euros ?

3 Déterminer des évolutions successives

QCM

93 Après une hausse puis une baisse de 5 %, on retrouve une valeur finale :
- a plus grande que la valeur de départ
- b égale à la valeur de départ
- c plus petite que la valeur de départ

94 Après une hausse de 10 % puis une hausse de 20 %, l'évolution globale est une hausse de :
a 32 % b 30 % c 2 %

95 Après une baisse de 40 % puis une hausse de 10 %, l'évolution globale est :
- a une hausse de 34 %
- b une baisse de 34 %
- c une hausse de 66 %
- d une baisse de 66 %

96 ✶ Le loyer de Myriam, d'un montant de 700 €, a augmenté de 2 % chaque année.
1. Déterminer le montant du loyer au bout de deux ans.
2. Déterminer l'évolution en pourcentage correspondante.

97 ✶ Une population augmente de 10 % puis diminue de 10 %.
1. Est-elle revenue à sa valeur de départ ?
2. Déterminer son taux d'évolution global.

98 ✶✶ Déterminer le pourcentage d'évolution associé aux évolutions suivantes.

a) une baisse de 10 % puis de 6 %

b) trois hausses successives de 5 %

99 ✶✶ À la suite de deux démarques, un ordinateur se trouve soldé à –44 %.
Un autocollant indique que la deuxième baisse était de 20 %.
Quel était le taux en pourcentage de la première baisse ?

4 Déterminer des évolutions réciproques

QCM

100 Un prix passe de 4 à 5 euros.
Pour revenir à sa valeur de départ, il doit subir une baisse de :
a 1 % b 100 % c 20 % d 25 %

101 Une quantité augmente de 35 %. Pour revenir à sa valeur de départ, elle devra subir une baisse :
- a supérieure à 35 %
- b de 35 %
- c inférieure à 35 %

102 Le nombre de pièces défectueuses produites par une usine a doublé. Pour revenir à son niveau de départ, ce nombre doit subir une baisse de :
a 50 % b 2 % c 0,5 % d 100 %

103 Le taux réciproque associé à une hausse de 150 % est une baisse de :
a 60 % b 150 % c 40 %

104 ✶ Le stock de chaussures d'un magasin a diminué de 55 % durant la période des soldes : il ne reste plus que 990 pièces. Le gérant souhaite reconstituer le stock.

Quelle évolution en pourcentage le nombre de chaussures doit-il subir ?

105 ✶✶ Le taux de réussite à un examen a baissé de 10 % pour arriver à 0,75.
Quelle évolution doit-il subir pour revenir à son niveau de départ ?

106 ✶✶ Déterminer l'évolution réciproque associée aux évolutions suivantes.

a) $t = -20$ % **b)** $t = +4{,}3$ %

c) $t = +300$ % **d)** $t = -80$ %

12

Statistiques descriptives

Le championnat de WNBA fait partie de ceux qui font l'objet des statistiques les plus poussées.

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Calculer une moyenne.	1 p. 294	1 2 p. 294 18 20 22 p. 296
Utiliser la linéarité de la moyenne.		23 24 26 p. 296-297
Utiliser et interpréter un écart-type.	2 p. 294 TP 1 p. 304	3 4 p. 294 27 29 31 p. 297
Utiliser et interpréter un écart interquartile.	3 p. 295	5 6 p. 295 33 35 p. 297
Décrire et différencier des séries.		61 62 p. 301
Algo & Prog Lire et comprendre une fonction PYTHON renvoyant la moyenne m, l'écart-type s et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s\ ;\ m + 2s]$.	TP 3 p. 306	

1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 291, 298, 299, 303

Algo & Prog
p. 303, 306

TICE
p. 288, 289, 305

Les autres disciplines
p. 294, 298, 300, 302, 305

Problème ouvert
p. 301

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-23

1. Travailler avec une série en ligne

On considère la série statistique 2 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13.

1. Déterminer sa moyenne, sa médiane et son étendue.

2. Même question avec 12 ; 1 ; 44 ; 35 ; 5 ; 18 ; 7 ; 102.

2. Travailler avec des effectifs

Valeur	0	1	2	3
Effectif	2	3	1	2

Tous les week-ends, Kirushika va pêcher et elle note dans un carnet le nombre de poissons qu'elle a pris. Les résultats après deux mois sont donnés dans le tableau ci-contre.

1. Recopier et compléter la phrase suivante afin d'interpréter la dernière colonne.

Il y a eu **…** week-ends durant lesquels Kirushika a pris **…** poissons.

2. Quel est l'effectif de la valeur 1 ?

3. Calculer la fréquence de la valeur 1 exprimée en pourcentage.

4. Calculer l'étendue, la médiane et la moyenne de cette série statistique.

3. Écrire un « programme statistique »

On considère le programme Scratch ci-contre.

1. Que dit le lutin si l'utilisateur saisit successivement 3 et 11 comme valeurs demandées ?

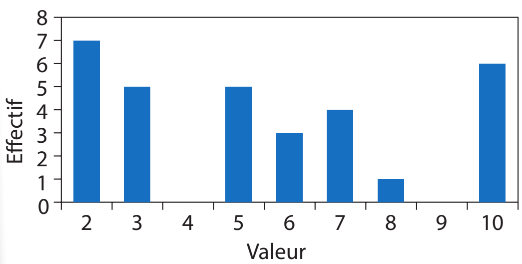
2. Décrire ce que fait ce programme.

3. Comment le modifier pour qu'il calcule la moyenne de trois valeurs ?

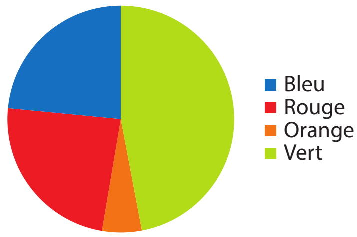
4. Représenter une série statistique

1. Comment s'appellent ces deux représentations graphiques de séries statistiques ?

Graphique 1



Graphique 2



2. Compléter le tableau suivant à l'aide du graphique 1.

Valeur							
Effectif							

3. Compléter le tableau suivant à l'aide du graphique 2 sachant que l'effectif total de la série est 17 (donner l'angle au degré près et les effectifs sont entiers).

Couleur				
Angle				
Effectif				

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

Activités

Orientation

20 min

1 Calculer une moyenne pondérée

1. Établir une liste de cinq métiers qui paraissent intéressants en menant éventuellement des recherches au CDI.

2. Par groupes de deux ou trois, établir quatre critères qui semblent importants pour le choix d'un métier.

3. Attribuer des coefficients à chacun de ces critères selon son importance aux yeux du groupe.

4. Recopier le tableau ci-contre en complétant :
- la 1re ligne avec les noms des quatre critères choisis ;
- la 1re colonne avec les noms des cinq métiers choisis ;
- l'intérieur du tableau avec une note sur 10 pour chaque critère selon le métier.

Critères / Métiers				

5. Pour chaque métier, calculer sa moyenne pondérée, c'est-à-dire la moyenne des notes sur 10 en considérant que le coefficient donne le nombre de fois où la note du critère « compte » dans le calcul.

6. Établir un classement de ces cinq métiers à partir des résultats de la question précédente.

7. a) Recommencer avec les mêmes métiers mais les critères et coefficients d'un autre groupe.
b) Le classement est-il identique ?

↪ Cours 1 p. 290

TICE

35 min

2 Découvrir la linéarité de la moyenne

1. Préparer une feuille de calcul avec les en-têtes ci-contre.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Valeurs	Valeurs*k	Valeurs+k	Valeurs/k	Valeurs–k		k=	2

2. Dans la cellule A2, générer un entier aléatoire entre 1 et 100 avec la commande = `ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)` puis recopier vers le bas jusqu'à la cellule A21.

3. a) Saisir une formule dans la cellule B2 permettant de compléter la colonne B dans laquelle sont inscrites les valeurs de la colonne A multipliées par la valeur présente dans la cellule H1. Attention, le contenu de la cellule B2 doit s'adapter si celui de H1est modifié.

Coup de pouce Quand on utilise l'adresse d'une cellule dans une formule et que l'on souhaite qu'un élément de cette adresse (colonne et/ou ligne) ne soit pas modifié quand la formule est étendue, on écrit le symbole $, devant la lettre donnant la colonne et/ou le nombre donnant la ligne, qui permet de figer cette lettre ou ce nombre.

b) Recopier vers le bas jusqu'à la cellule B21.

4. Faire de même pour les colonnes C, D et E (adapter au titre de la colonne !).

5. Saisir = `MOYENNE(A2:A21)` dans la cellule A22. À quoi la valeur obtenue correspond-elle ?

6. Quelle va être la moyenne des valeurs de la colonne B ? Vérifier en tirant la formule en A22 d'**une (seule)** cellule vers la droite.

7. Reprendre cette question avec chacune des colonnes.

8. a) Modifier la valeur de *k* en H1 et observer les différentes moyennes dans la ligne 22.
b) Énoncer des règles que l'on peut conjecturer sur la moyenne d'une série pour laquelle on multiplie (respectivement ajoute, divise, etc.) toutes les valeurs par un même nombre.

↪ Cours 1 p. 291

TICE 30 min

3 Découvrir et comprendre l'écart-type

On donne le tableau des scores de certaines joueuses de bowling durant les qualifications du Championnat du monde de 2017 qui s'est joué en six manches successives (source : www.bowling-wm.de).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Manche 1	Manche 2	Manche 3	Manche 4	Manche 5	Manche 6	Score Moyen	Écart-type
2	Robert, Nadine	148	137	166	165	209	200		
3	Goron, Nadia	201	153	160	179	162	172		
4	Tamminen, Tuula	171	163	164	181	176	174		
5	Nordenson, Kristina	239	157	205	232	205	171		
6	Yoshida, Yumiko	194	212	205	198	211	197		

1. Saisir = `MOYENNE(B2:G2)` dans la cellule H2 puis recopier vers le bas afin de remplir la colonne H.

2. a) Peut-on considérer que les trois premières joueuses sont du même niveau ?

b) Classer ces trois joueuses de la moins régulière à la plus régulière.

c) L'écart-type est un indicateur permettant de mesurer si les valeurs d'une série statistique sont plus ou moins proches de sa moyenne : plus il est petit, plus elles en sont proches.
Saisir = `ECARTYPE(B2:G2)` dans la cellule I2 et recopier vers le bas jusqu'à I4 (**et pas plus loin**).

d) Les résultats affichés confirment-ils la réponse à la question **2. b)** ?

3. Laquelle des deux séries de six valeurs des scores de Kristina Nordensen et de Yumiko Yoshida paraît avoir le plus grand écart-type ? Expliquer pourquoi. Vérifier avec le tableur.

↪ Cours 2 p. 292

TICE 45 min

4 Étudier une série avec les quartiles

1. À votre avis, si l'on prend n'importe quel pays appartenant au quart des pays mondiaux les moins peuplés et n'importe quel pays appartenant au quart des pays mondiaux les plus peuplés, par combien au moins faut-il multiplier la population du premier pour obtenir celle du deuxième ?

2. Récupérer le fichier `chapitre12_activite4.ods` sur le site compagnon. Celui-ci contient les populations de la plupart des pays du monde en 2017 (source : banque mondiale).

Doc — Fichier TICE — Lienmini.fr/maths2-37

3. Quelle plage de données contient les populations de tous ces pays ?

4. Dans la cellule E3, saisir = `MIN(B3:B219)`. À quoi la valeur affichée correspond-elle ?

5. Saisir une formule dans la cellule E7 permettant d'obtenir la population la plus élevée en 2017.

6. Sélectionner la plage A3 : B219, puis sélectionner l'onglet Données puis Trier, faire un tri croissant selon la colonne B puis donner les noms des pays ayant les populations minimale et maximale.

8. Saisir = `MEDIANE(B3:B219)` dans la cellule E5. Calculer le pourcentage de valeurs comprises entre le minimum (inclus) et la médiane (incluse) de la série. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?

9. a) Saisir = `QUARTILE(B3:B219;1)` dans la cellule E4. Cette valeur est appelée 1^{er} quartile, notée Q_1.

b) Calculer le pourcentage de valeurs comprises entre le minimum (inclus) et Q_1 (inclus).

c) Proposer une définition du 1er quartile d'une série statistique.

10. Reprendre et adapter la question **9.** pour le 3e quartile Q_3 dans la cellule E6.

11. Que penser de la réponse à la question **1.** ?

↪ Cours 3 p. 293

Cours

1 Moyenne

a Moyenne et moyenne pondérée

Propriété Moyenne avec effectifs

Soit une série statistique de p valeurs distinctes x_1 ; x_2 ; … ; x_p d'effectifs respectifs n_1 ; n_2 ; … ; n_p donnée dans le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

La moyenne de cette série est $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.

Exemple

Audrey prend souvent le train venant de Rouen en direction de Paris. En rentrant dans le wagon, elle compte le nombre de places assises disponibles.

Valeur	0	1	2	5	6	7	10
Effectif	5	1	3	1	5	4	1

Après 20 trajets, elle obtient les résultats ci-contre.

Le nombre moyen de places assises disponibles sur ces 20 trajets est :

$$\frac{5\times 0+1\times 1+3\times 2+1\times 5+5\times 6+4\times 7+1\times 10}{5+1+3+1+5+4+1}=4$$

Remarque Dans la propriété précédente, en posant $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$, on obtient la fréquence de x_1 :

$f_1 = \dfrac{\text{effectif de } x_1}{\text{effectif total}} = \dfrac{n_1}{n}$; celle de x_2 : $f_2 = \dfrac{n_2}{n}$, etc.

On déduit donc la formule $m = \dfrac{n_1}{n} \times x_1 + \dfrac{n_2}{n} \times x_2 + \ldots + \dfrac{n_p}{n} \times x_p = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + \ldots + f_p \times x_p$.

Propriété Moyenne pondérée

On considère une série statistique constituée de p valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_p affectées de p coefficients (ou poids) c_1 ; c_2 ; … ; c_p.
La moyenne pondérée de cette série est $m = \dfrac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$.

Remarque La formule est la même que pour la moyenne d'une série donnée sous forme de tableau d'effectifs, mais il est important de comprendre que les séries sont de natures différentes :

– dans le 1er cas (avec un tableau d'effectifs) la série est constituée de $n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ valeurs, précisément :
$\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{n_1 \text{ fois}} ; \underbrace{x_2;\ldots;x_2}_{n_2 \text{ fois}} ; \ldots ; \underbrace{x_p;\ldots;x_p}_{n_p \text{ fois}}$;

– dans le 2e cas (avec les coefficients ou poids) la série est constituée de p valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_p (éventuellement identiques) auxquelles on attribue un coefficient (ou poids) c_1 ; c_2 ; … ; c_p qui correspond à l'importance de la valeur.

Exemple

Ce trimestre, Émilia a eu quatre contrôles de mathématiques (notés sur 20) de coefficients 1 ; 1,5 ; 4 et 0,5 auxquels elle a obtenu respectivement les notes 8 ; 9 ; 20 et 5.

Sa moyenne en mathématiques est donc $m = \dfrac{1\times 8 + 1{,}5\times 9 + 4\times 20 + 0{,}5\times 5}{1 + 1{,}5 + 4 + 0{,}5} \approx 14{,}9$.

Remarque On constate que, bien qu'elle ait eu 3 notes sur 4 en dessous de 10, sa moyenne est bonne : ceci est dû au fait qu'elle ait eu une très bonne note (20) à un devoir ayant un grand « poids » (donc une plus grande importance) par rapport aux autres.

Exercice résolu 1 p. 294

b Linéarité de la moyenne

Propriété Linéarité de la moyenne

Soit a et b deux nombres réels et x_1 ; x_2 ; … ; x_n une série statistique de moyenne m.

- **Si on multiplie par a toutes les valeurs de la série, on obtient la moyenne de la nouvelle série en multipliant par a la moyenne de la série de départ.**
  Autrement dit, la moyenne de la série ax_1 ; ax_2 ; … ; ax_n est am.
- **Si on ajoute b à toutes les valeurs de la série, on obtient la moyenne de la nouvelle série en ajoutant b à la moyenne de la série de départ.**
  Autrement dit, la moyenne de la série $x_1 + b$; $x_2 + b$; … ; $x_n + b$ est $m + b$.
- **Les deux points précédents assurent également que la moyenne de la série $ax_1 + b$; $ax_2 + b$; … ; $ax_n + b$ est $am + b$.**

Démonstration

- Démontrons directement le dernier point.

On appelle $m = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ la moyenne de la série statistique constituée des n valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n.

La moyenne de la série statistique constituée des n valeurs $ax_1 + b$; $ax_2 + b$; … ; $ax_n + b$ est :

$$\frac{ax_1 + b + ax_2 + b + \ldots + ax_n + b}{n} = \frac{ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_n + b + b + \ldots + b}{n}$$

$$= \frac{a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n \times b}{n} = \frac{a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} + \frac{n \times b}{n}$$

$$= a\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b = am + b.$$

- Pour $b = 0$, le point précédent justifie bien que la moyenne de la série ax_1 ; ax_2 ; … ; ax_n est $am + 0 = am$.
- Pour $a = 1$, le premier point justifie bien que la moyenne de la série $x_1 + b$; $x_2 + b$; … ; $x_n + b$ est $1 \times m + b = m + b$.

Exemple

La semaine dernière, pour se préparer le matin, Juan a mis 20 minutes en moyenne :

– s'il avait mis deux minutes de plus chaque jour, il aurait mis en moyenne $20 + 2 = 22$ minutes pour se préparer ;

– s'il avait mis 5 % de temps en plus chaque jour, c'est-à-dire si son temps de préparation avait été multiplié par $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$ chaque jour, alors il aurait mis en moyenne $20 \times 1{,}05 = 21$ minutes pour se préparer.

Remarque La propriété de linéarité de la moyenne reste vraie lorsque :

– on soustrait un même nombre à toutes les valeurs de la série, puisque soustraire un nombre est équivalent à ajouter son opposé ;

– on divise toutes les valeurs de la série par un même nombre, puisque diviser par un nombre est équivalent à le multiplier par son inverse.

Exemples

1. Si l'on soustrait 5 à toutes les valeurs d'une série statistique de moyenne m_1 alors cela revient à ajouter -5 à toutes ses valeurs. Ainsi, la moyenne de la nouvelle série est $m_1 + (-5) = m_1 - 5$.
2. Si l'on divise par 4 toutes les valeurs d'une série statistique de moyenne m_2 alors cela revient à multiplier par $\dfrac{1}{4}$ toutes ses valeurs. Ainsi, la moyenne de la nouvelle série est $m_2 \times \dfrac{1}{4} = m_2 \div 4$.

Cours

2 Écart-type

Définition Écart-type

L'écart-type s **d'une série statistique est un indicateur de dispersion de cette série statistique autour de la moyenne. Concrètement il donne une certaine mesure de l'écart entre les valeurs de la série et la moyenne de celle-ci :**

– plus l'écart-type s d'une série est petit, plus les valeurs de la série sont concentrées autour de la moyenne, donc plus la série est homogène ;

– plus l'écart-type s d'une série est grand, plus les valeurs de la série sont éloignées de la moyenne, donc moins la série est homogène.

Remarque Nous utiliserons la calculatrice pour déterminer l'écart-type (voir le TP 1) mais il existe des formules pour le calculer.

- **Pour** la série $x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n$ de moyenne m, l'écart-type est :

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \ldots + (x_n - m)^2}{n}}.$$

- Pour la série donnée par le tableau ci-contre, de moyenne m et d'effectif total $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, l'écart-type est :

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

$$s = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - m)^2 + n_2(x_2 - m)^2 + \ldots + n_p(x_p - m)^2}{n}}.$$

Exemple

On considère deux entreprises de 10 employés :

– l'entreprise 1 dans laquelle 5 employés gagnent 2 500 € et 5 employés gagnent 3 500 € par mois ;

– l'entreprise 2 dans laquelle 9 employés gagnent 1 200 € et 1 employé gagne 19 200 € par mois.

Le salaire moyen dans l'entreprise 1 est de $\frac{5 \times 2500 + 5 \times 3500}{10} = 3000$ € et le salaire moyen dans l'entreprise 2 est de $\frac{9 \times 1200 + 1 \times 19\,200}{10} = 3\,000$ € également.

On comprend pourtant bien que la répartition des salaires dans les deux entreprises est extrêmement différente : la moyenne seule ne fournit pas une information suffisante pour résumer la série de manière satisfaisante. On utilise alors un indicateur permettant de mesurer l'homogénéité des salaires dans les deux entreprises : l'écart-type.

Avec la calculatrice, on obtient :

– l'écart-type de la série des salaires de l'entreprise 1, qui est de 500 € ;

– l'écart-type de la série des salaires de l'entreprise 2, qui est de 5 400 €.

On constate donc que, bien que le salaire moyen soit le même dans les deux entreprises, 3 000 € :

– dans l'entreprise 1, les employés ont globalement des salaires proches de cette moyenne ;

– dans l'entreprise 2, les employés ont globalement des salaires éloignés de cette moyenne.

Remarques

- On peut utiliser le couple (moyenne ; écart-type) pour résumer une série et en comparer plusieurs.
- Les valeurs éloignées de la moyenne ont de l'influence sur l'écart-type, plus précisément elles le font augmenter.
- Pour les séries dont le diagramme en bâtons (ou l'histogramme) est en forme de cloche, on peut s'attendre à trouver l'essentiel des valeurs de la série (environ 95 %) dans l'intervalle $[m - 2s ; m + 2s]$ où m désigne la moyenne et s l'écart-type de la série (voir le TP 2).

Exercice résolu 2 p. 294

3 Quartiles et écart interquartile

Définition Quartiles

Le 1er quartile Q_1 (resp. le 3e quartile Q_3) d'une série statistique est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % (resp. 75 %) des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.

Exemple

On considère la série ordonnée de 9 valeurs 1 ; 3 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 58. On a alors :

Plus de 25 % des valeurs

$\overbrace{1;3;7}$;8;10;11;12;12;58 donc $Q_1 = 7$ — $\underbrace{1;3}$: Moins de 25 % des valeurs

Plus de 75 % des valeurs

$\overbrace{1;3;7;8;10;11;12}$;12;58 donc $Q_3 = 12$ — $\underbrace{1;3;7;8;10;11}$: Moins de 75 % des valeurs

Propriété Rang des quartiles

Pour une série ordonnée d'effectif n, Q_1 (resp. Q_3) est la k-ième valeur où k est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{n}{4}$ (resp. $\frac{3n}{4}$).

Exemple

On reprend la série du nombre de places disponibles dans un train sur 20 trajets du paragraphe **1. a.**

Valeur	0	1	2	5	6	7	10
Effectif	5	1	3	1	5	4	1

- Pour trouver Q_1, on calcule $\frac{n}{4} = \frac{20}{4} = 5$ donc Q_1 est la 5e valeur, c'est-à-dire $Q_1 = 0$ (car la série est 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; etc.).
- Pour trouver Q_3, on calcule $\frac{3n}{4} = \frac{3 \times 20}{4} = 15$ donc Q_3 est la 15e valeur, c'est-à-dire $Q_3 = 6$.

Propriété Médiane

Pour une série ordonnée d'effectif n, la médiane est :
- **la valeur de rang $\frac{n}{2} + 0,5$ si n est impair ;**
- **la moyenne des valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$ si n est pair.**

Exemple

Dans l'exemple précédent, la série a pour effectif $n = 20$ qui est pair. $\frac{20}{2} = 10$ et $\frac{20}{2} + 1 = 11$ donc la médiane est la moyenne des 10e et 11e valeurs, c'est-à-dire $\frac{5+6}{2} = 5,5$.

Remarque Pour une série statistique de valeur minimale x_{min} et de valeur maximale x_{max}, chacun des intervalles $[x_{min} ; Q_1]$, $[Q_1$; médiane], [médiane ; $Q_3]$ et $[Q_3 ; x_{max}]$ contient au moins 25 % des valeurs de la série (et environ 25 % si la série est de grand effectif et constituée essentiellement de valeurs différentes).

Définition Écart interquartile

L'écart interquartile d'une série statistique est $Q_3 - Q_1$. Il s'agit d'un indicateur de dispersion.

Exercice résolu 3 p. 295

Remarques
- Plus l'écart interquartile est petit, plus les valeurs « centrales » de la série (celles dans l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$) sont proches les unes des autres. Les valeurs supérieures à Q_3 ou inférieures à Q_1 n'ont pas d'influence sur l'écart interquartile.
- On peut utiliser le couple (médiane ; écart interquartile) pour résumer une série et en comparer plusieurs.

Exercices résolus

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-24

1 Calculer une moyenne

Cours 1 p. 290

1. **Le tableau donne les températures à Sète les 15 premiers jours d'octobre 2018.**

Température (en °C)	20	21	22	23	24	25	26	27
Nombre de relevés	1	3	4	2	1	2	1	1

Déterminer la température moyenne durant cette période.

2. **Calculer la moyenne pondérée de 5 ; 12 et 2 affectés respectivement des coefficients 7 ; 1,5 et 1.**

Solution

1. La température moyenne est :

$$\frac{1 \times 20 + 3 \times 21 + \ldots + 1 \times 26 + 1 \times 27}{1 + 3 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1} \approx 22{,}9\ °\text{C}.$$ 1 2

2. Cette moyenne pondérée est $\dfrac{7 \times 5 + 1{,}5 \times 12 + 1 \times 2}{7 + 1{,}5 + 1} \approx 5{,}8.$

Conseils & Méthodes

1 Cette série peut s'écrire 20 ; 21 ; 21 ; 21 ; 22 ;… donc la 1re ligne du tableau contient les valeurs et la 2de les effectifs.

2 On applique la formule du cours en respectant les priorités de calculs dans la calculatrice.

À vous de jouer !

1 On considère la série donnant le nombre de jours de congés payés (JCP) par pays de l'Union européenne.

Nombre de JCP	20	22	24	25	28
Nombre de pays	17	2	2	5	2

Calculer le nombre moyen de jours de congés payés par pays dans l'Union européenne.

2 **Physique** Sara a mesuré la fréquence d'une onde : 10,2 GHz. Deux collègues ont effectué la même mesure et ont trouvé 10,4 et 9 GHz. Sara calcule la moyenne pondérée des trois valeurs affectées des coefficients : 5 pour sa mesure et 4 pour les autres. Combien obtient-elle ?

Exercices 17 à 22 p. 296

2 Utiliser l'écart-type

Cours 2 p. 292

1. **Calculer l'écart-type s_1 de la série des températures de l'exercice résolu 1.**

2. **Du 16 au 31 octobre 2018, l'écart-type de la série des températures à Sète était $s_2 = 5{,}2$ °C. Durant quelle quinzaine d'octobre les Sétois ont-ils utilisé le plus de manteaux différents ?**

Solution

1. La calculatrice donne $s_1 \approx 2$. 1

2. $s_2 > s_1$ implique que les températures lors de la deuxième partie du mois étaient réparties de façon moins homogènes autour de la moyenne, autrement dit qu'elles étaient plus changeantes, ce qui explique des choix de manteaux différents (plus ou moins chauds !). 2

Conseils & Méthodes

1 Pour calculer un écart-type, on utilise la calculatrice (voir le TP 1).

2 On l'interprète en termes d'homogénéité des valeurs. Les manteaux différents s'interprètent comme des températures plus variables, soit une série moins homogène.

À vous de jouer !

3 Calculer l'écart-type de la série de l'exercice 1.

4 La série suivante donne le nombre de fois où Jody est allée courir durant 8 semaines : 3 ; 7 ; 5 ; 0 ; 1 ; 1 ; 7 ; 6.

1. Calculer l'écart-type et la moyenne de cette série.

2. Jonas a couru 3 ou 4 fois par semaine en alternant une semaine sur deux.
Qui a couru le plus régulièrement ?

Exercices 27 à 32 p. 297

3 Utiliser les quartiles

Cours 3 p. 293

L'espérance de vie dans les pays européens en 2015 est résumée dans le tableau ci-dessous (source : Ined).

Espérance de vie (en années)	71	72	73	74	75	76	77	78	79	81	82	83
Nombre de pays	1	1	1	1	5	2	4	4	1	9	9	5

1. **Calculer la médiane et les 1er et 3e quartiles Q_1 et Q_3 de cette série.**

2. **En déduire l'écart interquartile.**

3. **Les données pour l'Asie la même année montrent que $Q_1' = 69$, médiane' = 74 et $Q_3' = 76$.**
Comparer les séries des espérances de vie en Europe et en Asie en 2015.

Solution

1. On peut écrire la série $\underbrace{71}_{1^{re}}$; $\underbrace{72}_{2^e}$; $\underbrace{73}_{3^e}$; $\underbrace{74}_{4^e}$; $\underbrace{75}_{5^e}$; … ; $\underbrace{75}_{9^e}$; $\underbrace{76}_{10^e}$; $\underbrace{76}_{11^e}$; $\underbrace{77}_{12^e}$; … ; $\underbrace{77}_{15^e}$; … 1

Espérance de vie	71	72	73	74	75	76	77	78	79	81	82	83
Nombre de pays	1	1	1	1	5	2	4	4	1	9	9	5
Effectifs cumulés croissants	1	2	3	4	9	11	15	19	20	29	38	43 2

On constate que l'effectif total est $n = 43$.

- $\frac{43}{4} = 10{,}75$ donc Q_1 est la 11e valeur : $Q_1 = 76$. 3
- $\frac{3 \times 43}{4} = 32{,}25$ donc Q_3 est la 33e valeur : $Q_3 = 82$. 3
- 43 est impair donc on calcule $\frac{43}{2} + 0{,}5 = 22$: 4

la médiane est la 22e valeur, c'est-à-dire 81.

2. L'écart interquartile est $Q_3 - Q_1 = 82 - 76 = 6$. 5

3. La médiane et les quartiles des pays européens sont supérieurs à ceux d'Asie, donc les espérances de vie y sont globalement plus élevées. 6

Par exemple $Q_3' = Q_1 = 76$, donc il y a environ 25 % des pays d'Asie qui ont une espérance de vie supérieure à 76 ans et environ 75 % en Europe.

En revanche, les écarts interquartiles sont proches (6 pour l'Europe et $76 - 69 = 7$ pour l'Asie), donc, sur ces deux continents, les espérances de vie par pays sont globalement similairement réparties autour de leurs médianes. 6

Conseils & Méthodes

1 On calcule les effectifs cumulés croissants (ECC) qui correspondent, pour chaque valeur, au nombre de valeurs de la série qui lui sont inférieures ou égales (l'ECC de la valeur 76 est 11 car il y a 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 2 = 11 valeurs inférieures ou égales à 76).

2 On lit l'effectif total n dans la dernière case du tableau.

3 On calcule $\frac{n}{4}$ (resp. $\frac{3n}{4}$) puis le plus petit entier qui lui est supérieur ou égal : c'est le rang de Q_1 (resp. Q_3) que l'on détermine à l'aide des ECC.

4 Suivant si l'effectif est impair ou non, on calcule $\frac{n}{2} + 0{,}5$ (cas impair) qui donne le rang de la médiane ou $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$ (cas pair) qui donne les rangs des deux valeurs dont on prend la moyenne pour calculer la médiane.

5 L'écart interquartile est égal à $Q_3 - Q_1$.

6 On compare les indicateurs des deux séries et on interprète. On compare les écarts interquartiles pour discuter l'homogénéité autour de la médiane.

À vous de jouer !

5 On a réalisé un sondage auprès de 100 adultes sur leur nombre d'enfants. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4
Effectif	16	26	31	2	25

1. Calculer la médiane, Q_1 et Q_3.
2. En déduire l'écart interquartile.
3. Un autre sondage fait apparaître $Q_1' = 1$, médiane' = 2 et $Q_3' = 3$. Comparer les deux groupes sondés.

6 On a demandé à un échantillon de personnes combien de fois elles avaient pris le bus ce jour.
Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre de trajets	0	1	2	3	4	5
Effectif	51	5	36	1	12	2

1. Calculer la médiane, Q_1 et Q_3.
2. En déduire l'écart interquartile.
3. Déterminer le pourcentage de valeurs entre Q_1 et Q_3.

Exercices 33 à 37 p. 297

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

7 Expliquer avec des mots (sans formule) comment calculer une moyenne pondérée.

8 Pour calculer le 1er quartile d'une série d'effectif $n = 41$, Joseph calcule $\frac{41}{4} = 10{,}25$ puis se dit que, 10,25 étant plus proche de 10 que de 11, Q_1 est la 10e valeur.
1. Le raisonnement de Joseph est-il correct ?
2. Recopier la définition du 1er quartile et expliquer pourquoi la 10e valeur d'une série d'effectif $n = 41$ ne vérifie pas cette définition.

9 **1.** Dans un dictionnaire, chercher la définition du mot *dispersé*.
2. Quels sont les indicateurs de dispersion dans le cours de ce chapitre ? Expliquer le lien avec la définition trouvée à la question **1.**

Questions - Flash

Diapo
Diaporama
Ressource professeur

10 Calculer les moyennes des séries suivantes.
a) 5 ; 7 ; 8 ; 14 ; 14 ; 17 ; 36.
b)

Valeur	2	5	6	12	14
Effectif	5	15	22	14	4

11 Calculer la moyenne pondérée des valeurs 4 ; 7 et 12 affectées des coefficients 3 ; 5 et 1.

12 La moyenne de la série 2 ; 7 ; 8 ; 15 ; 22 est 10,8.
1. Donner de tête la moyenne de la série 5 ; 10 ; 11 ; 18 ; 25.
2. Donner de tête la moyenne de la série 4 ; 14 ; 16 ; 30 ; 44.

13 **1.** On reprend la série de l'exercice **10** question **a)**. Calculer son écart-type.
2. On reprend la série de l'exercice **10** question **b)**. Calculer son écart-type.

14 Dans deux classes, la moyenne des notes à un devoir est la même, 11,3, mais les écarts-types sont différents : 5,2 dans un cas et 1,3 dans l'autre.
Dans laquelle de ces deux classes le niveau est-il le plus homogène ?

15 Calculer la médiane, les quartiles puis l'écart interquartile des deux séries de l'exercice **10**.

16 Dans deux villes, le revenu annuel médian par habitant est similaire : 21 200 €.
Dans la ville 1, l'écart interquartile de la série des revenus annuels des habitants est de 2 000 € alors qu'il est de 8 000 € dans la ville 2. Comment peut-on interpréter ces deux écarts interquartiles ?

Calculer une moyenne

17 AP On donne les temps (en minutes) des 10 derniers du Marathon de Paris 2018 : 452 ; 454 ; 455 ; 458 ; 460 ; 463 ; 466 ; 471 ; 481 ; 494.
Calculer la moyenne des temps de ces 10 coureurs.

18 AP Dans un village, on réalise pendant deux mois une étude portant sur le nombre de camions passant par jour. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nombre de camions	125	126	127	128	131
Effectif	15	12	13	11	9

Cela veut dire, par exemple, qu'il y a eu 15 jours lors desquels 125 camions sont passés dans le village.
Calculer le nombre moyen de camions étant passés dans ce village par jour pendant ces deux mois.

19 AP Une ville compte 2 341 logements. La répartition du nombre d'habitants par logement est donnée par le tableau ci-dessous.

Nombre d'habitant(s)	0	1	2	3	4	5
Nombre de logements	41	823	796	314	268	99

Calculer le nombre moyen d'habitants par logement.

20 Calculer la moyenne pondérée de la série suivante.

Valeur	5	10	21	36
Coefficient	2	4,5	3	1

21 Najat a obtenu 14,5 coeff. 2 ; 17 coeff. 1 et 12 coeff. 0,5 à ses contrôles de français du trimestre.
Calculer sa moyenne trimestrielle en français.

22 En vue d'un voyage en Chine, Manujaa a changé des euros en yuans :
- 180 € le 14/11/2018 à 7,8543 ¥/€ ;
- 220 € le 28/11/2018 à 7,8464 ¥/€ ;
- 125 € le 14/12/2018 à 7,788 ¥/€.

Calculer son taux de change moyen, c'est-à-dire la moyenne des taux de changes, pondérée par les sommes changées.

Linéarité de la moyenne

23 **1.** Calculer de tête la moyenne de 9 ; 8 ; 3 et 4.
2. En déduire sans calcul la moyenne de :
a) 9 000 ; 8 000 ; 3 000 et 4 000 **b)** 59 ; 58 ; 53 et 54

24 Dans une académie, le nombre moyen de livres par CDI est de 2 148.
Un éditeur souhaitant faire la promotion de sa nouvelle collection envoie 4 livres à tous les CDI de cette académie. Quel sera le nombre moyen de livres par CDI après cet envoi ?

25 Dans une entreprise, le salaire moyen est de 1 671 €. L'entreprise annonce qu'elle va augmenter les salaires de tous ses employés de 1 %.
Quelle sera le salaire moyen dans cette entreprise après cette augmentation ?

26 La veille des soldes, Esteban a repéré un certain nombre d'articles dans une boutique dont l'achat lui reviendrait en moyenne à 35,40 € par article.
Quel serait le cout moyen par article pendant les soldes si la boutique solde tous ses articles :
a) à –50 % ? **b)** à –30 % ?

Utiliser l'écart-type

27 On considère le tableau ci-dessous donnant les ventes moyennes par mois et l'écart-type de la série des ventes mensuelles sur trois années d'un magazine de jeux vidéo.

Année	2016	2017	2018
Moyenne des ventes mensuelles	5 097	5 214	4 139
Écart-type	497	811	213

Le directeur de publication de ce magazine explique : « Notre journal a besoin de revenus assez fixes, nous préférons donc faire un peu moins de ventes mais qu'elles soient plus stables d'un mois sur l'autre. »
Discuter de l'année la plus favorable pour ce magazine.

28 Les températures moyennes dans les villes de Quimper et Grenoble sont relativement similaires mais le climat y est très différent : à Quimper, les températures sont relativement douces toute l'année, alors qu'à Grenoble il fait très froid l'hiver et très chaud l'été.
Laquelle de ces deux villes a le plus grand écart-type sur ses températures ?

29 Calculer l'écart-type de chaque série.
a) 125 ; 36 ; 12 ; 5 ; 52 ; 64 ; 1
b)

Valeur	–5	–2	1	6	8
Effectif	3	4	15	1	9

30 Les résultats d'une enquête portant sur 891 individus auxquels on a demandé « Combien de fruits et légumes avez-vous mangé hier ? » sont donnés ci-après.

Nbre de fruits et légumes	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif	54	124	97	109	243	178	51	35

Calculer la moyenne et l'écart-type du nombre de fruits et légumes mangés la veille par les participants à cette enquête.

31 Siraba joue au handball. Son nombre de buts marqués par match lors de la saison 2017-2018 est donné ci-dessous.

Nombre de buts	2	3	4	5	6	9
Nombre de matchs	4	6	6	7	6	1

1. Calculer le nombre de buts moyen par match et l'écart-type sur cette saison.
2. Pendant l'été 2018, elle a fait un stage afin d'améliorer ses performances. Lors de la saison 2018-2019, elle a marqué en moyenne 5,1 buts par match, avec un écart-type de 2,5. Est-elle devenue plus régulière grâce à ce stage ?

32 Un producteur bio vend son jus de pomme en ligne. Les avis reçus (en nombre d'étoiles sur 5) sont donnés ci-dessous.

Nombre d'étoiles	0	1	2	3	4	5
Nombre d'avis	1	2	1	5	22	36

1. Calculer la moyenne m et l'écart-type s des avis.
2. Quel pourcentage des avis se trouvent dans l'intervalle $[m - 2s\ ;\ m + 2s]$?

Calculer des quartiles

33 Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de la série de la question **b)** de l'exercice **29**.

34 Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de la série de l'exercice **30**.

35 On reprend l'énoncé de l'exercice **31**.
1. Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de cette série.
2. En 2017-2018, une coéquipière de Siraba a un nombre de buts médian par match de 5 pour un écart interquartile de 4. Laquelle des deux joueuses est la plus régulière ?

36 On reprend l'énoncé de l'exercice **32**.
1. Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de cette série.
2. Quel pourcentage des avis sont dans l'intervalle $[Q_1\ ;\ Q_3]$?

37 Trouver une série de 6 valeurs de médiane 15 et d'écart interquartile 4.

Calculs et automatismes

38 Développer et réduire $(4x + 3)^2 - 12$.

39 Simplifier $(3^{12})^2 \times 3^{-5}$.

40 Écrire $\sqrt{63}$ sous la forme $a\sqrt{7}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

41 Calculer la moyenne de 2 ; 4 et 18.

Exercices d'entraînement

Autour de la moyenne

42 Un jeu radio promet aux vainqueurs de faire en sorte qu'ils gagnent ce mois-ci trois fois ce qu'ils gagnent habituellement.
La moyenne des salaires mensuels des 10 vainqueurs de ce jeu est de 1 437 €.
1. Quelle sera le salaire moyen de ces 10 personnes avec le gain du jeu ?
2. Combien cela coûte-t-il à la radio ?

43 On considère la série statistique suivante.

Valeur	5	12	15	x
Coefficient	1,5	4	2	c

1. Si $c = 5$, quelle doit être la valeur de x pour que la moyenne pondérée de la série soit 22 ?
2. Si $x = 36$, quelle doit être le coefficient c pour que la moyenne pondérée de la série soit 20,625 ?

44 On peut lire sur la brochure de la Sorbonne Université que le premier semestre de L1 du portail MIPI est constitué de six disciplines : maths, informatique, physique, une autre discipline scientifique au choix (biologie, chimie ou ingénierie), OIP (orientation et insertion professionnelle) et méthodologie.
Chacune de ces disciplines rapporte respectivement 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 3 et 3 crédits (ECTS) qui sont également les coefficients des différentes notes sur 100 dans la moyenne générale.
1. Calculer la moyenne de Tony qui a obtenu 74 en mathématiques, 92 en informatique, 74 en physique, 61 en biologie, 75 en OIP et 79 en méthodologie.
2. Combien aurait-il dû avoir en mathématiques pour avoir mention très bien, c'est-à-dire 80/100 de moyenne, pour ce semestre ?

45 Un fournisseur d'électricité propose un tarif heures creuses (HC)/heures pleines (HP) : 0,123 € par kWh en HC et 0,156 € par kWh en HP.
1. Une famille a calculé que 30 % de sa consommation se fait en heures creuses et 70 % en heures pleines.
Calculer le prix moyen du kWh pour cette famille.
2. Ce fournisseur d'électricité propose un autre tarif dit « de base » où tout kWh coute 0,147 €. Par ailleurs, pour le tarif de base, il faut payer un abonnement annuel de 130 € et, pour le tarif HC/HP, il faut payer un abonnement de 150 €.
À partir de combien de kWh consommés cette famille est-elle gagnante avec le tarif HC/HP ?

Démonstration

46 Pour une série d'effectif n et de moyenne m, démontrer que $n \times m$ est égal à la somme des valeurs.

47 SES On considère l'évolution de la cote d'une action sur 10 jours.

Jour n°	1	2	3	4	5
Cote (en €)	20	21,2	22,7	22	21,3
Jour n°	6	7	8	9	10
Cote (en €)	19,8	20,5	21,2	20,1	20,8

1. Dans un repère, tracer les points donnant l'évolution de la cote de cette action puis les relier par des segments. Graduer l'axe des ordonnées à partir de 19,5 € en prenant 1 cm pour 0,4 €.
2. Afin de visualiser la tendance globale de l'évolution de la cote d'une action, les analystes financiers peuvent lisser sa courbe en calculant la moyenne mobile sur les trois dernières cotes : la cote du jour est pondérée par 3, celle de la veille par 2 et celle de l'avant-veille par 1.
a) Expliquer pourquoi on ne peut pas calculer de moyenne mobile les deux premiers jours.
b) Justifier que la moyenne mobile de la cote de cette action le troisième jour est 21,75 €.
c) Calculer les moyennes mobiles des 7 jours suivants (on pourra présenter les résultats dans un tableau).
d) Tracer les points donnant l'évolution de la moyenne mobile de la cote de cette action entre les jours 3 et 10, puis les relier par des segments.
3. Sur quelle courbe la tendance est-elle la plus lisible ?

48 Lorsqu'une série statistique est donnée sous forme de classes, on peut considérer que sa moyenne est la moyenne des centres des classes (les « milieux » des intervalles) pondérée par les effectifs ou fréquences correspondants.

A. Effectifs
On a demandé à 100 personnes le nombre de SMS qu'elles envoyaient par jour.
Les résultats sont donnés ci-dessous.

Nbre de SMS	[0 ; 25]	]25 ; 50]	]50 ; 75]	]75 ; 100]
Effectif	21	12	42	25

Calculer le nombre moyen de SMS envoyés chaque jour par ces personnes.

B. Fréquences
Le temps d'accès, en min, de la population française à l'ophtalmologiste le plus proche est réparti comme suit (source : Idres).

Temps d'accès (en min)	[0 ; 3[	[3 ; 17[	[17 ; 31[	[31 ; 150[
% de la population	50 %	25 %	20 %	5 %

Calculer le temps d'accès moyen de la population française à un ophtalmologiste.

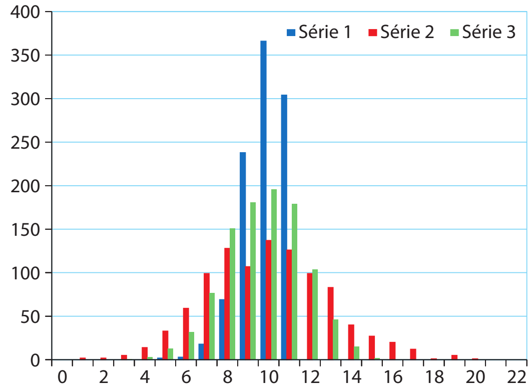
49 Tous les termes d'une série statistique ont augmenté de t % de sorte que sa moyenne est passée de 11,2 à 12,768. Déterminer t.

Autour de l'écart-type

50 Quand on ajoute le même nombre a à toutes les valeurs d'une série statistique d'écart-type s, l'écart-type de la nouvelle série est-il $s + a$? **Logique**

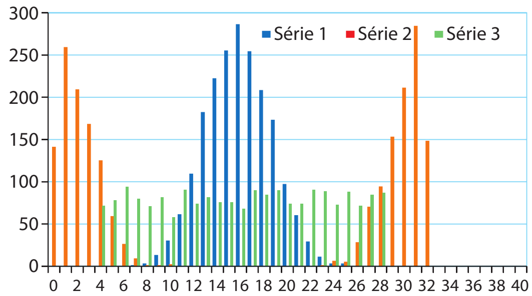
51 En utilisant la même méthode que pour la moyenne, calculer l'écart-type de la série donnée sous forme de classe à l'exercice **48** partie **A**.

52 On considère trois séries de valeurs dont la moyenne est approximativement la même, 10, et on donne ci-dessous les diagrammes en barres les représentant.



Comparer s_1, s_2 et s_3, les écarts-types des trois séries.

53 On considère trois séries de valeurs dont la moyenne est approximativement la même, 16, et on donne ci-dessous les diagrammes en barres les représentant.



Comparer s_1, s_2 et s_3, les écarts-types des trois séries.

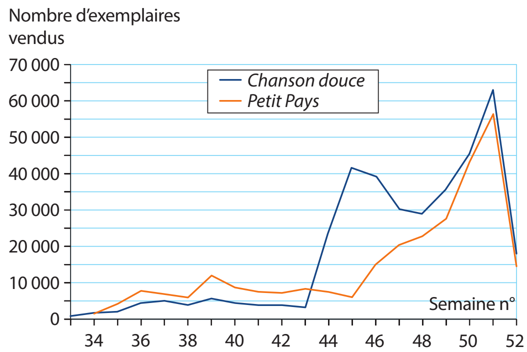
54 15 élèves ont mesuré un même angle avec leur rapporteur. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Angle (en °)	11	12	13	91
Effectif	4	5	5	1

1. a) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
b) La moyenne obtenue semble-t-elle une estimation acceptable de la mesure de l'angle ?
2. Un des élèves propose de retirer une des valeurs qui lui paraît aberrante. Laquelle est-ce ?
3. Reprendre la question **1.** avec la nouvelle série.
4. Au vu des questions précédentes, les valeurs extrêmes d'une série ont-elles de l'influence sur la moyenne et l'écart-type de cette série ?

Représentations graphiques et comparaison de séries

55 On donne ci-dessous les évolutions des ventes hebdomadaires de deux livres parus en 2016, *Chanson douce* de Leïla Slimani et *Petit Pays* de Gaël Faye, depuis leur parution et jusqu'à la fin de l'année 2016 (source : Panelmarket Gfk livres, France 2016)



1. Déterminer approximativement le nombre d'exemplaires de ces deux romans vendus pendant la semaine 39.
2. Calculer approximativement le nombre de ventes réalisées par le roman *Petit Pays* durant ses 4 premières semaines de parution (semaines 34, 35, 36 et 37).
3. Lequel de ces deux livres semblait parti pour avoir le plus de succès si l'on observe leurs ventes durant les deux premiers mois ? Et durant toute la période étudiée ?
4. À partir de quelle semaine les ventes de *Chanson douce* ont-elles connu un bond ? Et celles de *Petit Pays* ?
5. Durant la semaine 44, l'un de ces deux romans a reçu le célèbre prix Goncourt et durant la semaine 46, l'autre a reçu le prix Goncourt des lycéens.
Attribuer chaque prix au roman qui l'a reçu.
6. Lequel de ces deux prix a-t-il le plus fait augmenter les ventes du livre l'ayant obtenu ?
7. Sur le site slate.fr, on peut lire, dans un article de novembre 2017 : « […] On offre le Goncourt, mais on ne le lit pas. » Quelle(s) évolution(s) semble(nt) valider cette affirmation ?

Coup de pouce
Que se passe-t-il durant la semaine 51 ?

56 On donne le tableau donnant les participations au 2nd tour des élections présidentielles de 1981, 1995 et 2017.

Année	1981	1995	2017
Abstention	5 149 210	8 131 125	12 101 366
Votes exprimés	30 350 568	29 943 671	31 381 603
Votes nuls	898 984	1 902 148	4 085 724

1. Dresser les diagrammes circulaires représentant ces trois séries (utiliser la même couleur pour chaque catégorie sur chaque diagramme).
2. Que peut-on observer lorsque l'on compare ces trois diagrammes circulaires ?

Exercices d'entraînement

Choisir un bon indicateur

57 Fatima a reçu des offres d'emploi pour un poste d'ingénieure dans deux entreprises. Elle souhaite travailler dans une entreprise éthique dans laquelle les écarts de salaires entre employés ne sont pas trop importants.
Après des recherches sur internet, elle trouve que le salaire médian dans l'entreprise 1 est de 2 316 € pour un écart interquartile de 517 € et que ce salaire médian est de 2 298 € dans l'entreprise 2 pour un écart interquartile de 501 €.
1. Expliquer pourquoi son choix est difficile.
2. En regardant plus précisément les statistiques, elle constate que le salaire moyen est de 2 789 € pour un écart-type de 411 € dans l'entreprise 1 et de 2 314 € pour un écart-type de 198 € dans l'entreprise 2.
a) Expliquer ce qui pourrait expliquer une moyenne et un écart-type si élevé dans l'entreprise 1.
b) Quelle entreprise devrait-elle choisir ?

58 Lorsque l'on réalise une étude statistique, le caractère étudié peut être un nombre (par exemple la taille, le nombre de frères et sœurs…), on parle alors de série quantitative, ou non (par exemple le prénom, l'animal préféré…), on parle alors de série qualitative.

A. Enquête de satisfaction
On a mené une étude auprès de 144 personnes sur leur satisfaction sur le réseau de transport de leur ville. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Avis	pas du tout satisfait	peu satisfait	satisfait	très satisfait
Effectif	12	45	36	51

1. Expliquer pourquoi l'on ne peut pas calculer la moyenne de cette série.
2. Représenter cette série par un diagramme adapté.
3. a) En considérant qu'une personne pas du tout satisfaite attribue la note de 0, une personne peu satisfaite la note de 1, etc., calculer la moyenne et l'écart-type correspondant.
b) Ces deux indicateurs vous semblent-ils représenter correctement la série des avis ?

B. Au péage
Pour les vacances, Tao a obtenu un job d'été dans un péage autoroutier. Comme il s'ennuie, il relève pendant 10 minutes les numéros de départements sur les plaques d'immatriculation des voitures et il obtient :

Numéro	25	39	68	70	90
Effectif	54	12	4	22	41

1. Calculer la moyenne de cette série et interpréter si possible son résultat.
2. Sa grande sœur Zia, étudiante en statistique, lui explique que le caractère qu'il étudie n'est pas vraiment quantitatif, puisque c'est un numéro plutôt qu'un nombre (et qu'il pourrait aussi bien le remplacer par le nom du département). Représenter cette série par un diagramme adapté.

59 Sur le site lefigaro.fr, le 27 février 2018, on pouvait lire le titre suivant « En France, le salaire mensuel net moyen s'élève à 2 250 euros », introduisant un article sur les résultats publiés par l'Insee sur les salaires en France. Sur les réseaux sociaux, de nombreuses personnes ont critiqué le choix de l'indicateur servant au titre de l'article.
1. Quel autre indicateur aurait pu être utilisé à la place de la moyenne pour résumer la série des salaires en France ?
2. En plus du salaire moyen, le site de l'Insee donne le tableau suivant pour illustrer son étude.

Salaire (en euros)	1 213	1 357	1 490	1 630
Part de la pop. ayant un salaire inférieur ou égal	10 %	20 %	30 %	40 %
Salaire (en euros)	1 797	2 004	2 286	2 752
Part de la pop. ayant un salaire inférieur ou égal	50 %	60 %	70 %	80 %

En déduire le salaire médian.
3. Donner un encadrement de la proportion des salariés dont le salaire est inférieur au salaire moyen.
4. Quel pourcentage du salaire moyen le salaire médian représente-t-il ?

60 Français La police enquête suite à un vol. La personne suspecte s'est enfuie en voiture.
Dix témoins ont assisté à la scène et ont décrit le suspect suivant quatre critères. Les résultats de cette description sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Témoin n°	Taille (en m)	Âge	Couleur de la voiture	Sexe
1	1,45	29	rouge	F
2	1,40	22	orange	F
3	1,60	33	rouge	F
4	1,50	22	rouge	F
5	1,45	34	rouge	F
6	1,45	27	orange	F
7	1,55	24	vert	F
8	1,70	27	noir	F
9	2,45	30	rouge	F
10	1,60	23	rouge	F

1. Écrire un avis de recherche correspondant à la personne suspecte.
2. Pour chaque critère, expliquer le choix de l'indicateur utilisé dans cet avis de recherche.

Études de séries statistiques

61 *(D'après bac)* On donne ci-dessous les prix moyens au m² pour l'achat d'un appartement dans différentes régions françaises en 2018, hors Île-de-France (source : efficity).

Région	Prix au m² (en euros)
Bourgogne-Franche-Comté	1 490
Centre-Val de Loire	1 830
Grand Est	1 870
Normandie	2 050
Bretagne	2 160
Hauts-de-France	2 340
Occitanie	2 580
Pays de la Loire	2 640
Auvergne-Rhône-Alpes	2 690
Nouvelle-Aquitaine	2 970
Corse	3 170
Provence-Alpes-Côte d'Azur	3 640

1. a) Calculer la médiane Me, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile EQ de cette série.
b) On considère qu'une valeur est aberrante si elle n'appartient pas à l'intervalle $[Q_1 - 1{,}5EQ\ ;\ Q_3 + 1{,}5EQ]$.
Quel pourcentage des valeurs de la série sont considérées comme aberrantes ?
2. a) Calculer la moyenne m et l'écart-type s de cette série.
b) Quel pourcentage des valeurs de la série sont dans l'intervalle $[m - 2s\ ;\ m + 2s]$?
3. Reprendre les questions précédentes en ajoutant le prix au m² en Île-de-France en 2018 qui était de 4 520 €.

62 Un médecin a relevé la fréquence cardiaque de 135 patients en battements par minute (bpm). Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Fréq. card (en bpm)	71	72	73	74	75	76	77
Effectif	5	4	8	7	10	9	12
Fréq. card (en bpm)	78	79	80	81	82	83	90
Effectif	13	5	10	13	12	18	9

1. a) Calculer la médiane Me, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile EQ de cette série.
b) Quel pourcentage des valeurs sont supérieures ou égales à 80 bpm ?
2. Calculer la moyenne m et l'écart-type s de cette série.
3. Ce médecin a demandé aux mêmes patients de relever leur fréquence cardiaque à la maison.
Il obtient alors une série de 135 valeurs avec minimum = 70, Q_1 = 75, médiane = 77, Q_3 = 79, maximum = 87, moyenne = 77,1 et écart-type = 3,7.
a) Justifier que moins de 25 % de ses patients ont une fréquence cardiaque supérieure à 80 bpm chez eux.
b) En comparant avec le résultat de la question **1. b)** quel semble être l'effet de la présence du médecin sur la fréquence cardiaque ?
c) Les indicateurs donnés par les deux séries semblent-ils confirmer cela ? Expliquer.
Info : Ce phénomène est appelé l'effet « blouse blanche ».

63 On donne ci-dessous les séries du nombre de paniers à 3 points marqués par le joueur NBA Klay Thompson lors des 35 premiers matchs des saisons 2017-2018 et 2018-2019.

Nombre de 3 points	0	1	2	3	4	5	6	7	14
Nombre de matchs (2017-2018)	0	4	5	9	11	4	1	1	0
Nombre de matchs (2018-2019)	6	9	5	6	5	2	1	0	1

1. a) Représenter les deux séries par des diagrammes en bâtons de deux couleurs différentes sur le même graphique.
b) À la vue de ces diagrammes en bâtons, lors de quelle saison Thompson semble-t-il avoir été le plus performant à 3 points ? le plus régulier ?
2. a) Calculer les moyennes m_1 et m_2 et les écarts-types s_1 et s_2 de ces séries.
b) Ces résultats confirment-ils la réponse à la question **1. b)** ? Expliquer.
c) Quelle proportion des valeurs de la série de 2018-2019 sont dans l'intervalle $[m_2 - 2s_2\ ;\ m_2 + 2s_2]$?
d) Choisir les bons mots pour que ce commentaire sportif soit pertinent : « Certes, Thompson a réalisé un match fabuleux/décevant mais ce début de saison 2018-2019 est globalement bien plus satisfaisant/décevant que celui de la saison précédente, notamment en termes de régularité. »
3. a) Calculer les médianes, quartiles et écarts interquartiles de ces deux séries.
b) Expliquer pourquoi ces indicateurs confirment la tendance observée dans les questions précédentes.

Travailler autrement

64 Problème ouvert — À l'oral

« Quand Bill Gates rentre dans un bar, tout le monde devient millionnaire… en moyenne. »
Trouver des informations permettant de soutenir cette citation.

65 À l'oral

Effectuer une enquête (choisir une population, les questions à poser, le mode de réponse – anonyme ou non –, etc.) et réaliser une affiche présentant les résultats.

Exercices bilan

66 Augmentation de salaire

A. Une entreprise, où le salaire mensuel moyen est de 2 339,50 €, propose une augmentation généralisée du salaire de ses employés, selon deux modalités possibles :
- modalité 1 : tous les salaires augmentent de 10 % ;
- modalité 2 : tous les salaires augmentent de 200 €.

1. Déterminer quel serait le nouveau salaire mensuel moyen si la modalité 1 est choisie.
2. Même question avec la modalité 2.
3. L'entreprise réalise un vote auprès de ses employés pour savoir quelle modalité choisir. À votre avis, quelle modalité va être choisie par les employés ?

B. La répartition des salaires dans l'entreprise est la suivante.

Salaire	1 450	1 510	1 925	5 125
Nombre d'employés	15	10	15	10

1. Justifier que le salaire mensuel moyen est bien de 2 339,50 € puis calculer l'écart-type associé.
2. Calculer la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart interquartile de cette série des salaires dans l'entreprise.
3. De manière « très surprenante », le résultat du vote montre que les employés préfèrent la modalité 2. Expliquer pourquoi.

67 Univers virtuel

Dans un jeu vidéo, les joueurs peuvent acheter auprès d'un marchand un coffre vert pour 1 écu ou un coffre bleu pour 2 écus et découvrir ce qu'ils ont gagné. Pour un lot de 3 000 000 coffres verts, la répartition des gains est la suivante.

Gain (en écus)	0	1	2	4
Nombre de coffres verts	2 244 973	323 000	295 000	60 000
Gain (en écus)	10	100	400	4 000
Nombre de coffres verts	77 000	20	5	2

Pour un lot de 1 500 000 coffres bleus, la répartition des gains est la suivante.

Gain (en écus)	0	3	5
Nombre de coffres bleus	1 089 647	191 308	191 308
Gain (en écus)	15	150	15 000
Nombre de coffres bleus	27 709	26	2

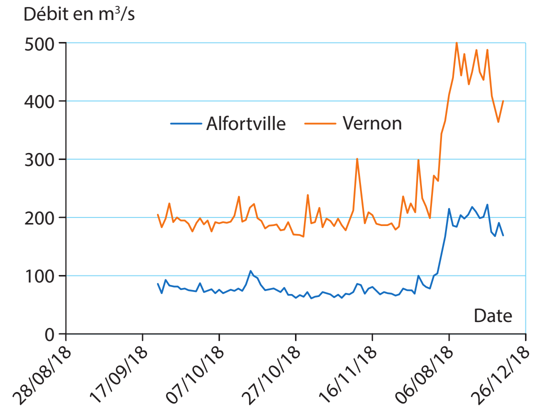
1. Reproduire les deux tableaux précédents en remplaçant la ligne des gains par les gains algébriques, c'est-à-dire le gain réellement obtenu en tenant compte du prix du coffre (par exemple, si un coffre vert affiche un gain de 10 écus, le gain algébrique est 9 écus puisque le coffre a couté 1 écu).
2. Calculer le gain algébrique moyen et l'écart-type des gains algébriques avec ces deux types de coffres.
3. a) En utilisant les tableaux de la question **1.**, expliquer intuitivement pourquoi l'écart-type des gains des coffres bleus est aussi élevé, comparé à celui des gains des coffres verts.
b) Contrôler votre réponse à la question précédente en calculant l'écart-type des gains des coffres bleus si les programmateurs décidaient de remplacer les coffres à 15 000 écus par des coffres à 4 000 écus.
c) La médiane et l'écart interquartile des gains algébriques des coffres bleus seraient-ils autant modifiés par ce changement du gain maximal ?
d) Que peut-on dire de l'influence d'un changement des valeurs extrêmes sur l'écart-type ? l'écart interquartile ?

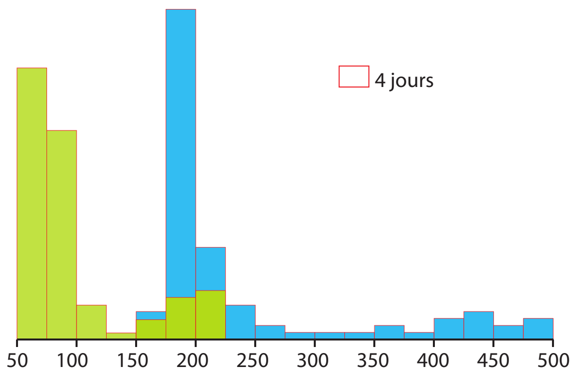
68 Une question de débit

Géographie

Les courbes et histogrammes ci-dessous donnent les débits de la Seine en m³/s durant tout l'automne 2018 dans les stations hydrométriques d'Alfortville (A) et de Vernon (V).

1. a) Dans laquelle ce ces deux villes le débit moyen est-il le plus élevé ? le débit semble-t-il être le plus homogène ?





b) Associer chaque histogramme à sa ville.

2. a) Donner un encadrement du 3ᵉ quartile de la série des débits quotidiens de la Seine à Alfortville durant l'automne à l'aide d'un des tableaux ci-dessous.

Débit à A. (en m³/s)	[50 ; 75[	[75 ; 100[	[100 ; 225[
Nombre de jours	43	29	19

Débit à V. (en m³/s)	[150 ; 200[	[200 ; 250[	[250 ; 500]
Nombre de jours	52	18	21

b) En déduire que le débit de la Seine à Vernon a été supérieur à celui d'Alfortville au moins 75 % de l'automne 2018. Comment l'expliquer ?

Coup de pouce
Alfortville se trouve juste avant Paris et Vernon un peu avant Rouen sur le parcours de la Seine.

Exercices d'approfondissement

69 Moyenne des sous-groupes

1. Soit deux séries statistiques x_1 ; … ; x_n et y_1 ; … ; y_p de moyennes respectives $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
Justifier que la moyenne de la série x_1 ; … ; x_n ; y_1 ; … ; y_p (c'est-à-dire la série constituée de toutes les valeurs des deux séries de départ) est $\dfrac{n\overline{x}+p\overline{y}}{n+p}$.

2. Dans une course à pied, 51 concurrents sont inscrits en tant que professionnels et 1 026 en tant qu'amateurs.
Le temps moyen pour les professionnels est de 21 minutes contre 52 minutes pour les amateurs.
Calculer le temps moyen mis par les participants.

70 Notation de la somme

La notation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ utilisée plusieurs fois dans ce chapitre n'étant pas très rigoureuse, on définit :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

qui se lit « somme pour i allant de 1 à n des x_i ».

1. Écrire $x_5 + x_6 + \ldots + x_{10}$ à l'aide de cette notation.

2. Écrire $\sum_{i=1}^{8} x_{2i+1}$ en faisant apparaître tous les termes.

3. Calculer $\sum_{i=0}^{5} i^2$.

71 Formule de l'écart-type

Soit x_1 ; x_2 ; … ; x_n une série statistique et s son écart-type.
En utilisant la formule de l'écart-type écrite dans le cours, justifier que l'on peut également écrire :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}.$$

Démonstration

72 Moyenne pondérée et effectifs

On considère une série statistique donnée par le tableau d'effectifs ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

Démontrer que la moyenne de cette série où les valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n sont respectivement pondérées par les coefficients c_1 ; c_2 ; … ; c_p est égale à la moyenne de la série des valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_p pondérées par les coefficients $n_1 \times c_1$; $n_2 \times c_2$; … ; $n_p \times c_p$.

73 Quel quartile ?

Algo & Prog

On considère le programme suivant.

```
n = input("Saisir effectif : ")
n = int(n)
print("Votre série doit être triée !")
x = input("Saisir 1re valeur : ")
x = float(x)
i=1
while i<n/4:
    x = input("Saisir valeur : ")
    x = float(x)
    i = i + 1
print(x)
```

1. Que fait ce programme ?

2. Le modifier pour qu'il affiche le 3e quartile d'une série ordonnée rentrée par l'utilisateur.

3. Le modifier pour qu'il affiche la médiane d'une série ordonnée rentrée par l'utilisateur.

Coup de pouce
L'instruction *p%2* donne le reste de la division euclidienne de *p* par 2.

Vers la 1re

Orientation

74 Spécialité Maths

Lorsque l'on réalise une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres, on dit que l'espérance associée à cette expérience aléatoire est la moyenne des issues, pondérée par leurs probabilités. Calculer l'espérance associée à chacune des expériences aléatoires suivantes.

a) On lance un dé à 6 faces non truqué : on gagne 10 € si le résultat est 6 et on perd 2 € sinon : le résultat est le gain algébrique (qui peut être négatif) réalisé.

b) On joue 10 € à quitte ou double sur le noir à la roulette et on considère le gain algébrique (on rappelle que dans une roulette standard, il y a 18 cases rouges, 18 cases noires et 1 case verte, le 0).

c) Lorsque l'on prend le bus, on attend 1 ; 2 ; 3 ou 4 minutes avec les probabilités respectives 0,2 ; 0,35 ; 0,15 et 0,3 : on considère le temps passé à attendre.

75 STL Chimie

Lorsque l'on réalise n fois une mesure expérimentalement (avec $n \geqslant 10$), il y a environ « 95 % de chance » que la quantité mesurée soit dans l'intervalle $\left[m - 2\dfrac{s}{\sqrt{n-1}} ; m + 2\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$ où m est la moyenne des mesures réalisées et s l'écart-type associé.
Les élèves d'une classe ont mesuré le pH d'une même solution.
On donne leurs mesures ci-dessous :
2,98 ; 2,86 ; 3,04 ; 2,94 ; 3,02 ; 2,88 ; 3,08 ; 3,09 ; 2,85 ; 3,07 ; 2,83 ; 3,1 ; 3,06 ; 2,89 ; 3,1 ; 2,82 ; 3,13 ; 3,07 ; 2,95 ; 2,92.
Dans quel intervalle est-on « sûr à 95 % » que se trouve le pH de la solution ?

Travaux pratiques

Calculer

10 min

1 Calculatrice, moyenne et écart-type

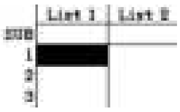
On considère la série suivante donnant les prix d'un même smartphone sur différents sites marchands.

Valeur	499,90	517,90	600
Effectif	3	4	1

On souhaite déterminer la moyenne de cette série à l'aide de la calculatrice.

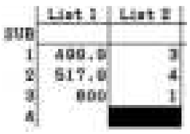
Casio Graph 90+E

Appuyer sur la touche MENU.
Choisir le menu **Statistique**.



Si la liste List1 (resp. List2) n'est pas vide, se déplacer sur List1 (resp. List2) avec les flèches, puis appuyer sur F6 pour obtenir le choix de menu suivant.

Puis choisir **DEL-ALL** avec F4 et sélectionner **oui** avec F1.
Compléter les colonnes List1 (pour les valeurs) et List2 (pour les effectifs).



Appuyer deux fois sur F6 puis accéder au menu CALC.
Sélectionner **SET** et compléter les deux premières lignes comme ci-dessous.

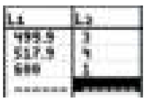
Pour inscrire List1 dans 1Var XList, appuyer sur F1 puis 1 et valider ; pour inscrire List2 dans 1Var Freq, appuyer sur F2 puis 2 et valider. S'il n'y a pas d'effectif, on règle 1 Var Freq sur 1.
On vient ainsi de dire à la calculatrice que List1 contient les valeurs et List2 les effectifs.

TI-83 Premium CE

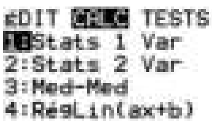
Appuyer sur la touche stats.

Puis choisir 1 : Modifier.

Si les listes L1 et L2 ne sont pas vides, se déplacer sur L1 et L2 avec les flèches puis appuyer sur annul puis entrer.
Compléter les colonnes L1 (pour les valeurs) et L2 (pour les effectifs).



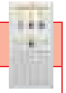
Appuyer sur la touche stats puis accéder au menu CALC (avec la flèche de droite) et choisir 1 : Stats 1 Var.



Compléter comme ci-dessous. S'il n'y a pas d'effectif, on règle ListeFréq sur 1.

On vient de dire à la calculatrice que L_1 contient les valeurs et L_2 les effectifs.

Numworks

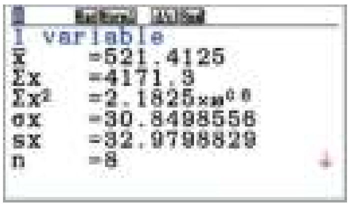


Appuyer sur la touche ⌂.
Choisir le menu **Statistiques**.
Avec les flèches, se déplacer sur **Données** et valider avec EXE.

Si les listes ne sont pas vides, on se place sur la première case de la colonne **Valeurs** et on supprime les valeurs une à une en appuyant sur la touche ⌫.
Compléter les colonnes des valeurs et effectifs.

Avec les flèches, se déplacer sur **Stats** et valider avec EXE.

On peut lire directement la moyenne et l'écart-type.

Casio Graph 90+E	TI-83 Premium CE
Appuyer sur EXIT puis choisir **1-Var** avec F1.  La moyenne est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type est la quatrième valeur σx.	Puis aller sur calculer et valider.  La moyenne est la première valeur $\overline{x}$ et l'écart-type est la cinquième valeur σx.

Dans ce cas, la moyenne est environ 521 et l'écart-type environ 31.

Remarque On peut remplacer les effectifs par des coefficients pour calculer des moyennes pondérées.

TICE

Représenter, communiquer

15 min

2 « Forme » d'une série

Aller chercher le fichier `tp2.ods` sur le site compagnon.

On considère trois séries statistiques dont les diagrammes en bâtons (ou en barres) sont donnés dans le fichier.

Doc Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-38

1. a) Intuitivement, donner la moyenne de chacune de ces séries. Expliquer.

b) Intuitivement, classer dans l'ordre croissant s_1, s_2 et s_3, les écarts-types respectifs des séries 1, 2 et 3.
Expliquer ce choix.

2. Les valeurs constituant les différentes séries sont données dans la feuille 2, dans les plages A2:A2001, B2:B2001 et C2:C2001, et résumées dans un tableau d'effectifs sur la plage I1:L43.
Cliquer sur la feuille 2 (en bas à gauche de la feuille de tableur).

3. Vérifier vos réponses aux questions précédentes dans la feuille 2.

4. On peut décrire chacune de ces séries en disant que son diagramme en bâtons est « uniformément réparti », en « forme de cloche » ou en « forme de creux ».
Associer chacune de ces dénominations à l'une des séries représentées.

5. Dans les cellules J54, K54 et I54 de la feuille 2, on a calculé le pourcentage des valeurs de la série qui sont dans l'intervalle $[m - 2s\,;\, m + 2s]$ lui correspondant.

a) Relancer quelques simulations avec CRTL+MAJ+F9.

b) Les pourcentages de valeurs de chaque série qui sont dans l'intervalle $[m - 2s\,;\, m + 2s]$ évoluent-ils significativement ?
Si non, de quelles valeurs sont-ils respectivement proches ?

c) Vérifier que, quand on relance des simulations, les formes des diagrammes en bâtons décrites à la question **4.** sont respectées.

d) Modifier les valeurs de a et b dans les cellules G1 et G2 (choisir deux entiers positifs avec $a < b$, $a + b \leqslant 40$, et $b - a > 10$) et relancer quelques simulations.
La réponse à la question **5. b)** reste-t-elle valable (vérifier également les formes des diagrammes en bâtons) ?

e) Donner une règle sur le pourcentage de valeurs dans l'intervalle $[m - 2s\,;\, m + 2s]$ selon la forme du diagramme en bâtons représentant la série statistique.

Travaux pratiques

Algo & Prog | Calculer | 50 min

3 Calcul de la moyenne et de l'écart-type

Pour ce TP, on admet que la formule permettant de calculer l'écart-type de n valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n est :

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2}.$$

A ▶ Comprendre la formule

En utilisant cette formule, calculer l'écart-type de la série formée des trois valeurs 2 ; 12 et 15.

B ▶ Principe général

On va écrire une fonction admettant un paramètre n (égal au nombre de valeurs) et calculant la moyenne et l'écart-type.

Le début du principe de son fonctionnement est le suivant :

– on introduit deux variables somme1 et somme2 initialisées à 0 en début de fonction ;

– la fonction va demander n fois consécutivement à l'utilisateur de saisir une valeur de la série ;

– à chaque nouvelle valeur x_i saisie, la fonction va l'ajouter à somme1 (de sorte qu'après n valeurs saisies somme1 soit égale à $0+x_1+x_2+\ldots+x_n$) et la fonction va ajouter x_i^2 à somme2 (de sorte qu'après n valeurs saisies somme2 soit égale à $0+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$).

1. Programmer le début de la fonction décrite ci-dessus.

On pourra s'appuyer sur l'ébauche de fonction suivante.

```
import math
def calcul_moyenne_ecarttype(...):
    somme1 = ...
    somme2 = ...
    for i in range(1,...+1):
        x = float(input("nouvelle valeur ?"))
        somme1 = ...
        somme2 = ...
```

2. a) Exprimer la moyenne de la série en utilisant une variable de cette fonction en fin de boucle for.

b) Même question pour l'écart-type.

3. Terminer d'écrire la fonction de sorte qu'elle affecte la moyenne à une variable m et l'écart-type à une variable s puis qu'elle les affiche (en précisant laquelle est la moyenne et laquelle est l'écart-type).

Coup de pouce La racine carrée d'un nombre s'obtient avec la commande `math.sqrt`.
Par exemple $\sqrt{2}$ s'écrit `math.sqrt(2)`.

4. Tester la fonction avec la série donnée dans la partie **A**.

5. Tester la fonction avec une autre série et comparer les résultats à ceux donnés par la calculatrice (voir le TP 1).

6. Compléter la fonction pour qu'elle :

– redemande à l'utilisateur de saisir les n valeurs déjà saisies ;

– vérifie pour chacune d'entre elles si elle est dans l'intervalle $[m-2s\,;\,m+2s]$, c'est-à-dire si elle est supérieure ou égale à $m-2s$ et (and) inférieure ou égale à $m+2s$;

– compte dans une variable compteur_intervalle le nombre de valeurs qui vérifient cette condition ;

– calcule puis affiche le pourcentage des valeurs dans $[m-2s\,;\,m+2s]$.

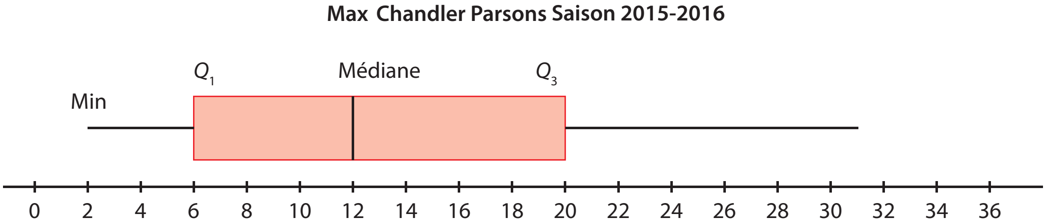
Représenter, calculer, communiquer

30 min

4 Le bon contrat ?

A ▸ Saison 2015-2016

Lors de la saison 2015-2016, le joueur de basketball Chandler Parsons évoluait dans la franchise NBA des Dallas Mavericks.
On donne ci-dessous le graphique appelé « diagramme en boîtes » représentant la série des points marqués par match par Parsons lors de cette saison.



1. Lire le minimum, Q_1, la médiane, Q_3 et le maximum de cette série, puis recopier le diagramme (laisser de la place au-dessus pour pouvoir superposer trois autres diagrammes en boîtes sur le même graphique).
2. Cette même saison, Harrison Barnes jouait aux Golden States Warriors, au même poste (ailier) que Chandler Parsons. On donne ci-dessous les mêmes indicateurs de la série de ses points marqués par match.

• minimum = 4 • $Q_1 = 8$ • médiane = 11
• $Q_3 = 14$ • maximum = 21.

Tracer le diagramme en boîtes correspondant à cette série au-dessus du précédent.
3. a) De Parsons et Barnes, lequel est le plus constant dans ses performances ?
Argumenter.
b) Comment cela se manifeste-t-il sur les diagrammes en boîtes représentant ces deux séries ?

B ▸ Saison 2016-2017

En juillet 2016, Harrison Barnes et Chandler Parsons ont tous les deux signé un nouveau contrat auprès d'une nouvelle franchise (les Dallas Mavericks pour Barnes et les Memphis Grizzlies pour Parsons) pour près de 94 millions de dollars pour 4 ans.
On donne les informations suivantes sur la série des nombres de points marqués par match au cours de la saison 2016-2017.

Joueur	Min	Q_1	Médiane	Q_3	Max
Parsons	0	2	6	9	14
Barnes	4	15	19	23	31

1. Tracer les diagrammes en boîtes correspondant à ces séries au-dessus des précédents.
2. Discuter la « progression » des deux joueurs.
3. a) L'affirmation « Pendant au moins 75 % de ses matchs, Barnes a marqué plus que le meilleur score de la saison de Parsons » est-elle vraie ?
b) Comment cela se manifeste-t-il sur les diagrammes en boîtes représentant ces deux séries ?
4. a) Dans un article du 01/07/2016 du site spécialisé trashtalk.co sur la signature de Parsons à Memphis, on peut lire : « Ce ne sont pas 13,7 points […] qui vont satisfaire […] Memphis. »
Que peut-on en penser au vu de la saison 2016-2017 ?
b) Au vu des indicateurs connus pour l'année 2016-2017, est-il possible que Parsons ait atteint une moyenne de 13,7 points par match cette saison-là ?

En autonomie

1 Utiliser la moyenne

QCM

76 On considère les valeurs ci-contre et leurs pondérations associées. La moyenne pondérée de cette série est :

Valeur	12	24	36	47
Coefficient	1,5	7	3,5	8

a 119 b 29,75 c 34,4 d 5,78

Pour les exercices 77 et 78, on considère une série statistique de moyenne *m*. Que peut-on dire de la moyenne de la série obtenue dans les cas suivants ?

77 On soustrait 3 à tous ses termes.

a Elle est égale à $m - 3$.

b On ne peut pas savoir sans la calculer.

78 On ajoute 10 % à tous ses termes.

a Elle est égale à $1,1\,m$.

b Elle est égale à $m + 10$.

79 ✶ Francisco a mis 31,4 litres d'essence à 1,58 euro/litre dans sa voiture. Au retour, il remet 13,3 litres à 1,45 euro/litre.

Quel est le prix moyen d'un litre d'essence sur le trajet ?

80 ✶ On donne ci-dessous le nombre de buts marqués par journée de Ligue 1 lors de la saison 2017-2018.

Nombre de buts	14	15	17	21	23	24	25	26
Effectif	1	1	1	1	1	6	3	2
Nombre de buts	27	28	29	30	31	32	34	
Effectif	1	2	7	1	4	3	4	

Calculer le nombre de buts moyen marqués par journée de Ligue 1 durant cette saison.

81 ✶ En multipliant tous les termes d'une série par *c*, sa moyenne est passée de 10 à 17. Déterminer *c*.

82 ✶✶ On considère la série statistique suivante.

Valeur	1	6	7	x
Coefficient	0,5	1,2	3,8	c

1. Si $c = 2$, quelle doit être la valeur de x pour que la moyenne pondérée de la série soit 6 ?

2. Si $x = 8$, quelle doit être le coefficient c pour que la moyenne pondérée de la série soit 7,03 ?

83 ✶✶ Déterminer de tête la moyenne des séries suivantes.

a) 52 ; 53 ; 57 **b)** 1 200 ; 100 ; 500

2 Utiliser l'écart-type

QCM

Pour les exercices 84 et 85, on reprend la série de l'exercice 80.

84 L'écart-type s de cette série, à 0,01 près, est :

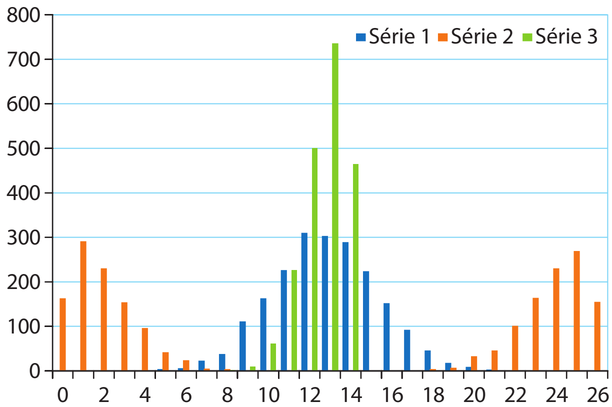
a 4,94 b 4,88 c 4,95 d 4,89

85 Le nombre moyen de buts marqués par journée étant $m \approx 27,18$, quel pourcentage des journées le nombre de buts marqués n'a-t-il pas été dans l'intervalle $[m - 2s\,;\,m + 2s]$, à 0,01 % près ?

a 7,89 % b 0 % c 100 % d 5,26 %

86 ✶ Julie et Fabio relèvent le nombre de pompes faites par jour et ils en font tous les deux en moyenne environ 50, avec un écart-type de 10 pour Julie et de 2 pour Fabio. Interpréter.

87 ✶✶ Trois séries sont représentées ci-dessous.



Elles ont la même moyenne (13) et pour écarts-types 1,1 ; 2,5 et 11,1.
Associer son écart-type à chaque série.

3 Utiliser l'écart interquartile

QCM

Pour les exercices 88 à 92, on considère les temps réalisés par les concurrents ayant fini la course dans la catégorie Class40 à la Route du Rhum 2014.

Temps (en j)	17	18	19	20	21	22	24	25	30
Nombre de concurrents	4	5	6	5	5	2	3	1	1

88 L'effectif total de cette série est :
a 9 b 32 c 196 d 648

89 L'effectif cumulé croissant associé à 19 j est :
a 6 b 11 c 15 d 54

90 La médiane de cette série est :
a 18 b 20 c 21 d 20,5

91 Le premier quartile Q_1 de cette série est :
a 18 b 19 c 21 d 24

92 L'écart interquartile de cette série est :
a 1 b 2 c 3 d 13

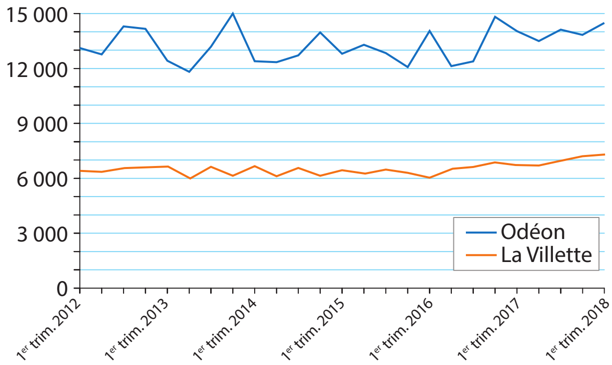
93 ✶ Lors de la Route du Rhum 2010, dans cette même catégorie Class40, la série des temps réalisés par les concurrents (en jours) avait pour minimum 18, pour premier quartile $Q_1 = 20$, pour médiane 21, pour troisième quartile $Q_3 = 22$ et pour maximum 28.
1. Peut-on dire qu'au moins 75 % des concurrents ont mis 22 jours ou moins pour boucler la course en 2010 ? Justifier.
2. Peut-on dire qu'au moins 75 % des concurrents ont mis 20 jours ou plus pour boucler la course en 2010 ? Justifier.
3. Expliquer pourquoi l'on peut penser que le niveau de la course était plus homogène en 2010 qu'en 2014.

94 ✶✶ Trouver une série de 10 valeurs de médiane 15, de premier quartile $Q_1 = 2$ et d'écart interquartile 32.

4 Décrire et différencier deux séries

QCM

Pour les exercices 95 et 96, on donne le graphique de l'évolution trimestrielle du prix du m² dans les quartiers parisiens d'Odéon et La Villette de 2012 à 2018.



95 Le prix moyen du m² dans le quartier de La Villette sur cette période est d'environ :
a 6 000 € b 6 500 € c 13 500 €

96 La série trimestrielle des prix du m² ayant le plus grand écart-type est celle du quartier :
a d'Odéon b de La Villette

97 ✶✶ *(D'après bac)* Le directeur d'une école de journalisme cherche à comparer les promotions 2017 et 2018 avec leurs notes en français et histoire.

	2017		2018	
	Français	Histoire	Français	Histoire
Moyenne	11	12		12,5
Écart-type	2,5	2,3		3
1er quartile	9	10		10
Médiane	11	12		13
3e quartile	13	14		14

1. Compléter la colonne correspondant au français pour la promotion 2018 avec les résultats donnés ci-dessous.

Note	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Effectif	1	2	4	6	7	6	4	2	1

2. a) En utilisant la médiane et l'écart interquartile, quels enseignements peut-on tirer de la comparaison des notes de français entre les promotions 2017 et 2018 ?
b) Reprendre la question **a)** avec les notes d'histoire.
3. En utilisant moyennes et écarts-types, quels enseignements peut-on tirer de la comparaison des deux promotions en termes de niveau et d'hétérogénéité ?

13

On appelle « cygne noir » un événement imprévisible ayant une très faible probabilité d'avoir lieu mais qui, s'il se réalise, a un impact considérable.
Internet peut ainsi être considéré comme un cygne noir.

Probabilités et échantillonnage

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Modéliser une expérience aléatoire.	1 p. 321	1 2 p. 321 25 26 p. 326
Calculer des probabilités : • en utilisant la loi de probabilité associée à l'expérience aléatoire. • en utilisant un tableau à double entrée. • en utilisant un arbre de dénombrement.	2 p. 321 3 p. 322	3 4 p. 321 32 33 p. 327 5 6 p. 322 31 36 p. 326-327 37 39 p. 327
Utiliser les notions de réunion, d'intersection et de contraire d'événements.	4 p. 323	8 9 p. 323 42 43 p. 327
Simuler une expérience aléatoire ou un échantillon.	5 p. 324	10 11 p. 324 47 48 p. 328 52 p. 328
Estimer une proportion ou une probabilité.	6 p. 325	12 13 p. 325 57 58 p. 329
Comparer fréquence observée et probabilité.		107 108 p. 335

1 exercices résolus
16 exercices corrigés
14 exercices non corrigés

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-25

1. Calculer des fréquences

Le tableau suivant présente le nombre de pots de peinture vendus en un mois selon la couleur.

Couleur	Jaune	Blanc	Rouge	Bleu	Vert	Noir
Effectif	256	7 489	458	156	785	4 123

1. Calculer les fréquences arrondies au centième.

2. Exprimer les fréquences en pourcentage arrondies à l'unité.

2. Calculer des pourcentages

Dans une boulangerie, Mariette achète :

- 15 pains au chocolat ;
- 22 éclairs ;
- 8 pains aux raisins ;
- 12 tartelettes ;
- 10 croissants ;
- 20 brioches.

1. Déterminer le pourcentage de viennoiseries parmi ses achats.

2. Parmi les desserts, quelle est la proportion d'éclairs ?

3. Calculer des effectifs

En 2013, 778 200 candidats se sont présentés à la série générale de l'examen du Diplôme National du Brevet, 84,5 % ont été reçus et 9 candidats sur 10 maîtrisaient le socle commun de compétences.

1. Combien de candidats ont été reçus ?

2. Combien de candidats ont la maîtrise du socle commun de compétences ?

4. Dénombrer

1. Le code d'un cadenas est composé de trois chiffres.
Déterminer le nombre de codes possibles.

2. Le code d'entrée d'un immeuble est composé de quatre chiffres et d'une lettre.
Déterminer le nombre de codes possibles.

5. Calculer des probabilités

En week-end dans une station de ski, Guilhem se trouve en haut des pistes. Il a en face de lui deux pistes noires, deux pistes rouges et une piste bleue, qui arrivent toutes à un restaurant d'altitude. Bon skieur, il emprunte une piste au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la piste empruntée soit une piste rouge ?

2. À partir du restaurant, sept autres pistes mènent au bas de la station : trois pistes noires, une piste rouge, une piste bleue et deux pistes vertes. Quelle est la probabilité qu'il emprunte alors, au hasard, une piste bleue ?

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 319, 332

Algo & Prog
p. 314, 315, 324, 328, 329, 334, 335, 338, 340-342, 345

TICE
p. 314, 343

Les autres disciplines
p. 333

Activités

1 Modéliser une expérience aléatoire

20 min

A ▸ Pile ou face

Marvin dispose d'une pièce de monnaie qu'il laisse rouler sur une table avant qu'elle ne tombe.

1. Quelle serait la probabilité qu'elle tombe sur Pile ?

2. Compléter le tableau suivant.

Issue	Pile	Face
Probabilité		

Ce tableau indique une loi de probabilité possible pour l'expérience « Laisser rouler la pièce et regarder sur quelle face elle tombe ».

3. En observant la pièce avec une loupe, Marvin remarque que la face Pile comporte plus de dessins en relief que l'autre face. La modélisation de la question **2.** correspond-elle précisément à la réalité ?

B ▸ Modéliser une loi à partir d'une étude fréquentielle

Marvin dispose également d'un dé tétraédrique, avec des faces numérotées de 1 à 4. La face 4 est lestée d'un poids : le dé n'est donc pas équilibré.
Armé de patience, il note le résultat de 1 000 lancers, dont la répartition est donnée dans le tableau suivant.

Numéro de la face	1	2	3	4
Nombre d'apparitions	198	208	185	409

1. Proposer une loi de probabilité pour l'expérience « Lancer le dé et observer quelle face est obtenue ».

2. Cette modélisation correspond-elle précisément à la réalité ?

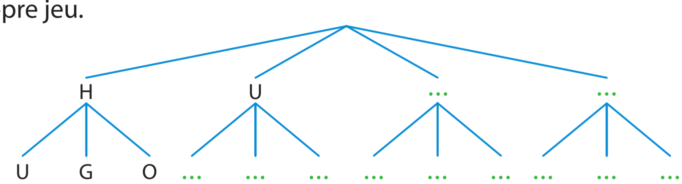
Cours 1 p. 316

2 Utiliser un arbre de dénombrement

20 min

Hugo et Sara jouent au jeu suivant : le joueur dispose de quatre jetons sur lesquels figurent les lettres de leur nom. Le joueur choisit au hasard, successivement et sans remise, un jeton parmi les siens, et constitue ainsi un mot de deux lettres.

1. On s'intéresse à Hugo. Il a commencé à constituer l'arbre des possibles (ou arbre de dénombrement) suivant pour son propre jeu.



a) Recopier et compléter cet arbre.

b) Déterminer le nombre d'issues de cette expérience aléatoire.

c) Que peut-on dire de la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire ?

2. On s'intéresse désormais au jeu de Sara.

a) Construire un arbre de dénombrement sur le modèle du précédent.

b) Combien d'issues cette expérience aléatoire possède-t-elle ?

c) Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

Cours 1 p. 316

3 Travailler avec un tableau à double entrée

20 min

Au self d'un lycée, les 1 230 élèves demi-pensionnaires avaient le choix entre du bœuf et du colin, accompagné soit de frites, soit de haricots verts, soit de navets.

Le cuisinier, qui tient ses statistiques à jour, a remarqué que :

- 840 élèves ont mangé des frites dont 70 % avec du bœuf ;
- 108 élèves ont préféré les haricots verts avec du colin, et autant avec du bœuf ;
- au total, 464 parts de colin ont été servies.

1. Proposer un tableau avec des effectifs regroupant l'ensemble des informations précédentes.

2. On choisit un élève au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait mangé :

a) du navet ? **b)** du colin et des frites ? **c)** du colin ou des frites ?

3. a) On choisit un élève qui a mangé du colin.
Quelle est la probabilité qu'il ait mangé des frites ?

b) On choisit un élève qui a mangé des frites.
Quelle est la probabilité qu'il ait mangé du colin ?

↪ Cours 1 p. 316

4 Travailler les notions d'union et d'intersection

30 min

Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12.

On tire un jeton au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair. »
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3. »

1. Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?

Recopier et compléter : A = {. . .} et B = {. . .}.

2. Décrire de même les événements suivants en listant les issues qui les réalisent.

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{A \cup B}$

e) $\overline{A \cap B}$ **f)** $\overline{A} \cap B$ **g)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **h)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

3. Certains de ces événements sont-ils identiques ?

4. Décrire les événements suivants par une phrase.

a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{A \cup B}$ **e)** $\overline{A \cap B}$ **f)** $\overline{A} \cap B$

↪ Cours 3 p. 318

Activités

Algo & Prog — 20 min

5 Simuler une expérience aléatoire

1. Écrire le programme PYTHON ci-contre puis l'exécuter plusieurs fois.
Que fait la commande `random.random()` ?

```
import random
print(random.random())
```

2. Quelle est la probabilité que le résultat de la commande `random.random()` soit inférieur ou égal à 0,5 ? à 0,25 ? à $\frac{1}{5}$?

3. Recopier et compléter : « Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la probabilité d'obtenir 6 est $p =$ …, c'est-à-dire la même que la probabilité que le résultat de `random.random()` soit inférieur ou égal à …. »

4. Écrire et compléter le programme ci-contre permettant de simuler le lancer d'un dé suivant que le résultat soit 6 ou non.

```
import random
if random.random() <= ... :
  print("Le résultat est 6")
else:
  print("Le résultat n'est pas 6")
```

5. a) Reprendre la question **1.** en remplaçant `random.random()` par `random.randint(1,4)` puis par `random.randint(5,12)`.

b) Écrire un programme simulant le lancer d'un dé à 10 faces à l'aide de la commande `random.randint()`.

↪ Cours 4 p. 319

TICE — 30 min

6 Découvrir la fluctuation d'échantillonnage

On rappelle que la fonction ALEA() du tableur renvoie un nombre décimal dans l'intervalle [0 ; 1[.

Dans la population française, il y a 24,5 % de personnes âgées de moins de 20 ans.

1. Si l'on tire au sort 500 personnes dans la population, combien de personnes de moins de 20 ans peut-on s'attendre à trouver dans cet échantillon ?

2. a) Écrire :
- Echantillon 1 dans la cellule A1 ;
- =SI(ALEA()<=0,245;"MOINS DE 20";"20 OU PLUS") dans la cellule A2 (cette commande signifie que si la condition ALEA()<=0,245 est vérifiée alors le tableur affiche MOINS DE 20 sinon il affiche 20 OU PLUS).

b) Recopier et compléter.
Dans la cellule A2, on a simulé le tirage au sort d'une personne dans la population française en tirant au hasard un nombre décimal entre … et … et en considérant que si ce nombre est … alors la personne tirée au sort a moins de 20 ans.

c) En recopiant le contenu de la cellule A2 vers le bas jusqu'à la cellule A501, compléter la simulation de l'échantillon (préciser sa taille).

d) Saisir = NB.SI(A2:A501;"MOINS DE 20") en cellule A502. À quoi ce résultat correspond-il ?

e) Comparer le résultat en cellule A502 et la réponse faite à la question **1.**

f) Relancer quelques fois les tirages avec la touche F9 et commenter les résultats obtenus.

g) Saisir une formule dans la cellule A503 faisant référence à la cellule A502 et qui permet d'obtenir la fréquence d'individus de moins de 20 ans dans l'échantillon.

3. On va maintenant effectuer 200 simulations du tirage de 500 individus dans la population, dont on observe s'ils ont moins de 20 ans ou non.

a) Sélectionner la plage A1:A503 puis la recopier vers la droite (à partir de la cellule A503) jusqu'à la cellule GR503.

b) Sélectionner la plage des fréquences et faire un graphique de type Ligne (points seuls) ou nuages de points.

c) Dans quel intervalle la plupart des fréquences se situent-elles ?

↪ Cours 5 p. 320

Algo & Prog

25 min

7 Estimer un paramètre

A ▸ Principe de l'estimation

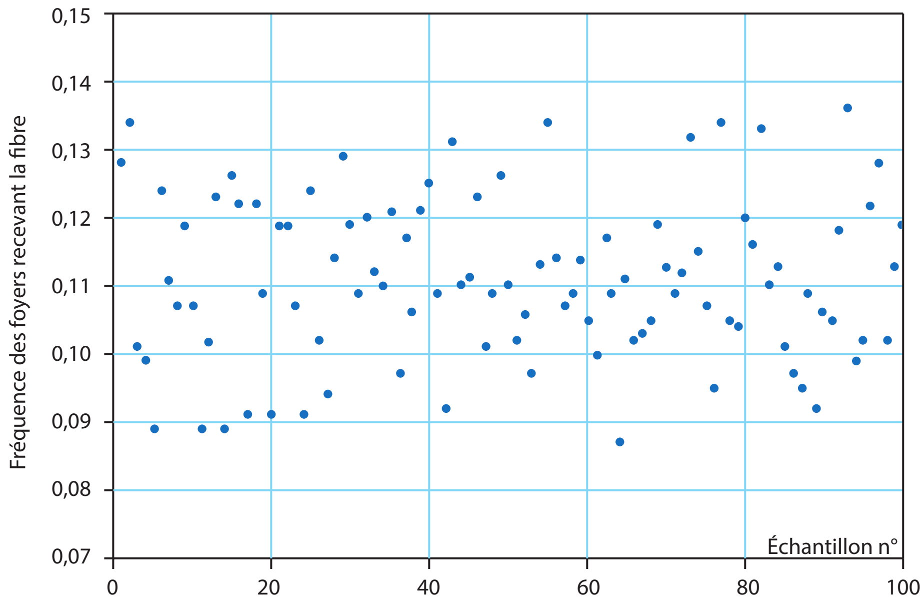
En France, 11 % des foyers reçoivent la fibre optique. On souhaite simuler un échantillon de taille 1 000 associé à l'expérience aléatoire consistant à tirer un foyer français au hasard et à observer s'il reçoit la fibre optique ou non.

1. Écrire et compléter le programme ci-contre simulant un échantillon puis l'exécuter.

```
import random
effectif = 0
for i in range(1,1001):
    if random.random() <= 0.11:
        effectif = effectif + 1
print(effectif,"foyers reçoivent la fibre optique dans cet échantillon")
```

2. Modifier le programme afin qu'il affiche la fréquence de foyers recevant la fibre optique dans l'échantillon plutôt que l'effectif, puis l'exécuter.

3. En simulant 100 tels échantillons de taille 1 000, on obtient le graphique ci-dessous.



a) Lire approximativement la fréquence des foyers recevant la fibre optique dans l'échantillon 80 puis dans l'échantillon 20.

b) Sur quelle valeur semblent être approximativement « centrées » ces fréquences dans les 100 échantillons ?

c) À quoi cette valeur correspond-elle dans l'énoncé ?

B ▸ Estimation d'une probabilité *p*

Le programme `programme_activite7_trouver_p` reprend le principe de la partie précédente : il simule 100 échantillons de taille 1 000 associés à une expérience aléatoire dont l'une des issues a pour probabilité *p* inconnue et affiche la fréquence de cette issue dans chacun des 100 intervalles.

1. Aller chercher le programme `programme_activite7_trouver_p` sur le site compagnon.

Doc — Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-39

2. Exécuter le programme.

3. Observer le graphique ainsi généré et estimer la valeur de *p*, puis la saisir dans la console de Python.

4. Réessayer jusqu'à avoir au moins 3 bonnes estimations (pas forcément parfaites !) successives (penser à bien fermer la fenêtre contenant le graphique après chaque essai).

↪ Cours 5 p. 320

Cours

1 Loi de probabilité et modélisation

Définition Expérience aléatoire et univers

Une expérience aléatoire est une expérience dont les issues sont connues sans que l'on puisse déterminer laquelle sera réalisée.

L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles de cette expérience.

Notation L'univers se note souvent Ω et se lit « oméga ».

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on regarde de quel côté elle tombe.
Les résultats sont Pile et Face. Pour cette expérience aléatoire, l'univers est $\Omega = \{\text{Pile, Face}\}$.

Définition Loi de probabilité

Donner une loi de probabilité associée à une expérience aléatoire, c'est en donner toutes les issues et attribuer une probabilité (un nombre compris entre 0 et 1) à chacune d'elles de sorte que la somme des probabilités des issues est égale à 1.
On peut présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

Exemples

1. Une étude menée sur la répartition des groupes sanguins en France a montré que 45 % de la population est du groupe A, 9 % du groupe B, 4 % du groupe AB et 42 % du groupe O.
On choisit au hasard une personne en France et on note son groupe sanguin.
Cette expérience aléatoire peut être modélisée à l'aide du tableau des fréquences suivant.

Issue	A	B	AB	O
Probabilité	0,45	0,09	0,04	0,42

2. On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. *A priori*, on peut estimer que chaque face a la même probabilité d'apparaître, égale à $\frac{1}{6}$. Cela ne signifie pas que l'on représente exactement la situation réelle : tout dé présente des imperfections physiques, aucun n'est parfaitement équilibré.

Exercice résolu 1 p. 321

Définition Loi équirépartie

Une loi est dite équirépartie lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est alors :

$$\frac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{n}$$

Exemple

Lors d'un lancer d'un dé cubique équilibré à 6 faces, aucune des faces n'est favorisée, donc chacune des 6 faces a autant de chances qu'une autre d'être obtenue.
Chaque face a donc une probabilité d'apparition de $\frac{1}{6}$.

Exercice résolu 3 p. 322

Remarque On dit aussi qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

2 Événement

Définition Événement

Un événement est un sous-ensemble de l'univers. Il peut s'écrire à l'aide d'issues ou être décrit à l'aide d'une phrase.

Exemple

On lance un dé cubique équilibré et on observe le résultat.
Alors l'univers associé est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » est $A = \{2;4;6\}$.

Remarque Si une issue appartient à un événement, on dit qu'elle réalise cet événement.

Définition Probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet événement.

Vocabulaire

Un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais : **sa probabilité vaut 0**.

Un **événement certain** est un événement qui est sûr de se réaliser : **sa probabilité vaut 1**.

Exemple

Dans le cas de la répartition des groupes sanguins (voir l'exemple page précédente), la probabilité qu'une personne en France ait un groupe sanguin différent de A est égale à :
$0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}42 = 0{,}55$.

Exercice résolu 2 p. 321

Propriété Cas d'équiprobabilité

Dans une situation d'équiprobabilité, où il y a *n* issues, la probabilité d'un événement A réalisé par *k* issues est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}$$

Exemple

Dans le cas du lancer d'un dé cubique équilibré à 6 faces, la loi peut se modéliser par une loi équirépartie sur l'ensemble $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
Le nombre total d'issues est $n = 6$.
L'événement A : « Obtenir un nombre pair » s'écrit $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
Le nombre d'issues qui réalisent l'événement A est $k = 3$.

La probabilité de l'événement A est donc :

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

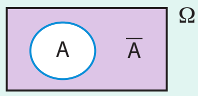
Cours

3 Opérations sur les événements

Définition Événement et événement contraire

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.

Soit A un événement. L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A, autrement dit $\overline{A}$ est réalisé par les issues de Ω qui ne sont pas dans A.



Propriété Probabilité de l'événement contraire

Soit A un événement, on a $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple

Dans le cas du lancer de dé à 6 faces, le contraire de l'événement A : « Obtenir un nombre pair » est $\overline{A}$: « Obtenir un nombre impair ».

On a donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

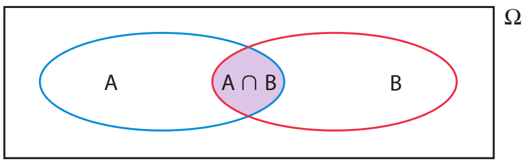
Définition Union et intersection de deux événements

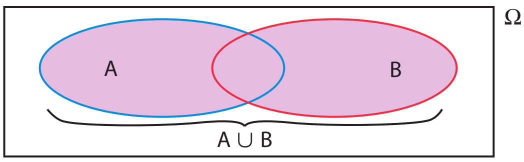
Soit A et B deux événements.

L'événement $A \cup B$ (se lit « A union B ») est la réunion de A et de B : c'est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (ou les deux à la fois).

L'événement $A \cap B$ (se lit « A inter B »)est l'intersection de A et de B : c'est l'ensemble des issues qui réalisent A et B.

Remarque Le diagramme de Venn permet de représenter les différents événements.





Exemple

On lance un dé à 6 faces et on considère les événements A : « Obtenir un nombre pair » et B : « Obtenir un multiple de 3 ». $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{3;6\}$. Alors $A \cap B = \{6\}$ et $A \cup B = \{2;3;4;6\}$.

Propriété Relation entre union et intersection

On a $p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$. En particulier, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple

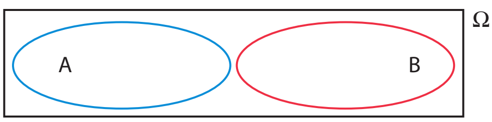
Dans l'exemple précédent, on a :

$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$

On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Exercice résolu 4 p. 323

Remarque On dit que A et B sont des **événements disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.
On a alors, **dans ce cas seulement**, $p(A \cap B) = 0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.



4 Échantillon et simulation

Définition Échantillon

Lorsque l'on réalise plusieurs fois une même expérience aléatoire de manière indépendante (c'est-à-dire que les différentes réalisations n'ont pas d'influence les unes sur les autres), l'ensemble des résultats obtenus est appelé échantillon.
Le nombre de fois où l'expérience est réalisée est appelée taille de l'échantillon.

Exemples

① Si l'on lance 10 fois un dé équilibré à 6 faces et qu'on observe le résultat obtenu, on obtient un échantillon de taille 10.

② Si l'on tire au sort 1 000 personnes dans la population française et que l'on observe si la personne est droitière ou non, on obtient un échantillon de taille 1 000.

Propriété Simulation

On peut simuler informatiquement une expérience aléatoire à deux issues x_1 et x_2 de probabilités respectives p et $1 - p$ en générant un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 et en considérant que :

- **x_1 est réalisée si ce nombre aléatoire est inférieur ou égal à p ;**
- **x_2 est réalisée sinon.**

Démonstration

La probabilité que la **simulation** donne x_1 (resp. x_2) est bien p (resp. $1 - p$), c'est-à-dire la même probabilité que l'**expérience aléatoire** donne x_1 (resp. x_2).

Remarque

Pour mettre en œuvre cette propriété, il faut disposer de commandes permettant de générer un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 dans différents langages :

- avec la calculatrice : **NbrAléat**, **Ran#** et **random()** (respectivement pour les calculatrices TI, Casio et Numworks) génèrent un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
- avec le tableur : **ALEA()** génère un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
- avec Python : On peut également générer des nombres aléatoires de différents types.
  Pour cela, il faut écrire `import random` en début de programme puis :
  – `random.random()` renvoie un nombre **réel** aléatoire dans [0 ; 1[;
  – `random.randint(a,b)` renvoie un nombre **entier** aléatoire entre a et b inclus.

Exemples

① Dans la population, il y a 88 % de droitiers, ce qui signifie que la probabilité qu'une personne soit droitière est 0,88. On souhaite simuler l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une personne dans la population et à regarder si elle est droitière ou non à l'aide d'un tableur.
On saisit = **ALEA()** dans une cellule et on considère que :
– la personne est droitière si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 0,88 ;
– la personne n'est pas droitière sinon.

② Avec Python, on peut simuler un échantillon de 1 000 personnes selon qu'elles sont droitières ou non (voir ci-contre).

```
import random
for i in range (1,1001):
    if random.random() <= 0.88:
        print("Droitière")
    else:
        print("Non droitière")
```

Exercice résolu 5 p. 324

Cours

5 Fluctuation et estimation

Définition Fluctuation d'échantillonnage

Deux échantillons (obtenus par l'expérience ou simulés) de même taille associés à une même expérience aléatoire ne sont, *a priori*, pas identiques : ce phénomène s'appelle la fluctuation d'échantillonnage.

Exemple

Si l'on lance dix fois un dé à 6 faces puis que l'on recommence, les résultats des dix premiers lancers ne seront pas identiques aux dix suivants.

Propriété Échantillon

On considère un échantillon de taille n associé à une expérience aléatoire dont l'une des issues (ou l'un des événements) a pour probabilité p.
Pour n grand, sauf exception, la fréquence observée f de cette issue (ou événement) dans l'échantillon est proche de sa probabilité p (la plupart du temps, l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$).

Exemple

On a lancé 1 000 fois un dé à 6 faces et on a obtenu 159 fois le nombre 6. La fréquence observée de 6 est donc $f = \frac{159}{1000} = 0{,}159$, ce qui est assez proche de la probabilité d'obtenir 6 qui est $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$.
L'écart entre p et f est $\frac{1}{6} - 0{,}159 \approx 0{,}008$, qui est bien inférieur à $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}032$.

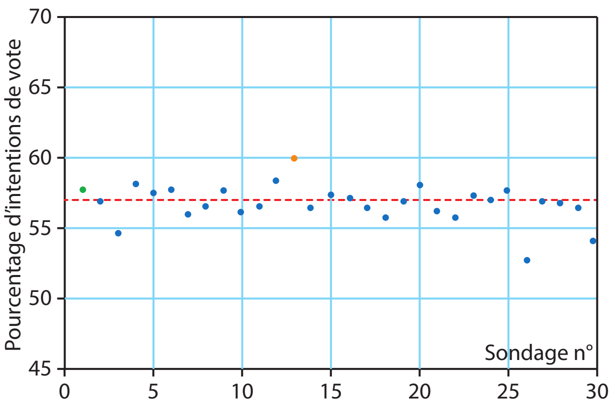
Propriété Estimation

On considère un échantillon de taille n associé à une expérience aléatoire dont l'un des événements a pour probabilité p et où f est la fréquence observée de cet événement dans l'échantillon.
Pour n grand, f et p sont proches donc, si l'on ne connaît pas la valeur de p, on peut considérer que f en constitue une estimation.
On utilise généralement plusieurs échantillons de même taille pour réaliser une bonne estimation.

Exemple

On donne ci-dessous les pourcentages d'intentions de vote pour une candidate selon 30 sondages portant sur 1 000 personnes, réalisés le même jour, c'est-à-dire 30 échantillons de taille 1 000 associés à l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une personne dans la population et à lui demander si elle souhaite voter pour cette candidate ou non.
On constate que, dans le 1er sondage (point vert), la candidate a environ 58 % d'intention de vote, soit une fréquence observée de 0,58 : on peut penser que la probabilité p qu'une personne vote pour elle est proche de 0,58.

Dans le 13e sondage (point orange), la fréquence observée est environ 60 % donc on peut penser que p est proche de 0,60, etc. En observant globalement ce graphique, on peut estimer cette probabilité p à environ 0,57 qui semble correspondre « au milieu » (voir droite en pointillés rouges) du nuage de points (mais cela reste une estimation !).



Exercice résolu 6 p. 325

1 Modéliser une expérience aléatoire par une loi

Cours 1 p. 316

Une urne opaque contient dix boules indiscernables au toucher : quatre noires, trois rouges, deux bleues et une jaune. On tire une boule de l'urne et on regarde sa couleur.

1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?

2. Modéliser cette expérience aléatoire par une loi de probabilité.

Solution

1. Les issues sont « noir », « rouge », « bleu », « jaune ». 1

2. On peut modéliser cette expérience aléatoire par la loi de probabilité suivante. 2 3

Issue	Noir	Rouge	Bleu	Jaune
Probabilité	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	$\frac{2}{10} = 0{,}2$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$

Conseils & Méthodes

1 Attention à ne pas oublier d'issues de l'expérience aléatoire.

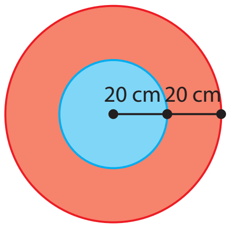
2 En analysant l'expérience aléatoire, on associe à chaque issue une probabilité.

3 On contrôle le modèle proposé en vérifiant que la somme des probabilités vaut bien un.

À vous de jouer !

1 Un dé cubique comporte deux faces rouges, une face bleue ; les faces restantes sont jaunes. On lance le dé et on observe la couleur obtenue. Proposer une loi de probabilité qui permettrait de modéliser le résultat de cette expérience aléatoire.

2 Mona lance une fléchette sur la cible ci-contre et note la couleur obtenue. Proposer une loi de probabilité qui modéliserait cette expérience aléatoire.



Exercices 25 à 30 p. 326

2 Calculer une probabilité à partir d'une loi

Cours 1 p. 316

On a étudié le moyen de transport utilisé par des élèves pour venir au lycée. On choisit au hasard un élève au lycée et on s'intéresse à son moyen de locomotion. Un sondage réalisé en début d'année a permis de définir la loi de probabilité ci-contre.

Moyen de transport	Vélo	Marche	Bus	Voiture	Tram
Probabilité	0,05	0,55	0,15	0,2	0,05

Déterminer la probabilité que l'élève soit venu en transport motorisé.

Solution

Les véhicules motorisés sont le bus, la voiture et le tram. 1

Cette probabilité vaut 0,15 + 0,2 + 0,05 = 0,4. 2

Conseils & Méthodes

1 On identifie les issues qui réalisent l'événement.

2 On ajoute leur probabilité.

À vous de jouer !

3 Loane possède un dé pipé. Le tableau suivant donne la probabilité d'apparition de chaque face.

Résultat	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

On lance le dé.

Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre impair.

4 Lorsque Killian démarre sa voiture, le levier de vitesse peut être dans les états suivants.

État	Marche arrière	Point mort	Première
Probabilité	0,35	0,45	0,2

1. Déterminer la probabilité que la marche arrière soit enclenchée.
2. Déterminer la probabilité qu'une vitesse soit enclenchée.

Exercices 31 à 36 p. 326-327

Exo Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-26

3 Utiliser un arbre de dénombrement ou un tableau

Cours 1 p. 316

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée en notant à chaque fois sur quelle face elle est tombée (l'ordre est important). Le résultat de l'expérience aléatoire est la suite des faces obtenues dans l'ordre, par exemple PF.

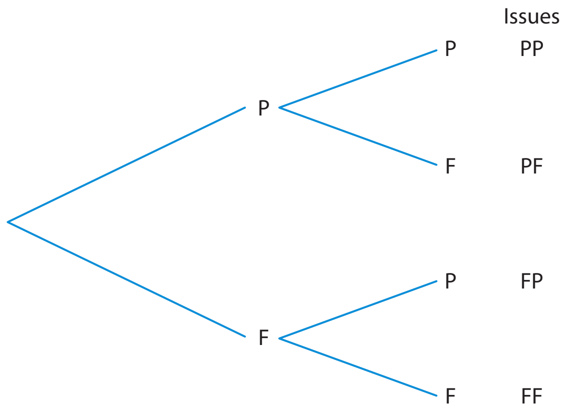
1. Représenter la situation par un arbre de dénombrement ou un tableau.

2. Combien d'issues cette expérience aléatoire possède-t-elle ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux Face après ces deux lancers ?

Solution

1. On peut utiliser un arbre ou un tableau pour modéliser la situation.



1

Deuxième lancer / Premier lancer	Pile	Face
Pile	PP	PF
Face	FP	FF

2. Cette expérience possède quatre issues. 2

3. Cette probabilité est de $\frac{1}{4}$. 3

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer toutes les issues possibles, on peut utiliser un arbre de dénombrement qui permet d'explorer toutes les possibilités. Dans une situation d'équiprobabilité, chaque issue a la même probabilité d'apparition.

2 Il suffit de connaître le nombre d'issues pour déterminer la probabilité de chaque issue.

3 Pour déterminer la probabilité d'un événement, on compte le nombre d'issues qui réalisent cet événement et on divise cela par le nombre total d'issues.

À vous de jouer !

5 On lance deux dés cubiques équilibrés. Déterminer la probabilité que la somme des deux dés soit un nombre pair.

6 Adrien possède un jeton sur lequel figurent le nombre 1 sur une face et le nombre 2 sur l'autre.
Il lance trois fois de suite ce jeton en relevant le nombre obtenu. Le résultat de cette expérience aléatoire est le produit des trois nombres obtenus.
Proposer une loi de probabilité qui permettrait de modéliser le résultat de cette expérience aléatoire.

7 Myriam a quatre pièces dans sa poche, d'un montant de deux euros, un euro, 50 centimes, 20 centimes. Elle en prend au hasard une première, puis une deuxième sans remise.
Elle calcule alors le montant obtenu en additionnant leur valeur.

1. Proposer une loi de probabilité qui permettrait de modéliser le résultat de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité que ces deux pièces soient suffisantes pour acheter un pain aux raisins à 1,30 €.

Exercices 37 à 41 p. 327

Exo
Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-26

4 Travailler avec l'intersection, la réunion et l'événement contraire

Cours 3 p. 318

Dans une usine, on produit en série 10 000 pièces par jour. Ces pièces passent un contrôle qualité pour éliminer une partie des pièces défectueuses. Le gérant décide de réaliser une étude complète et minutieuse de la production du jour. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Pièces conformes	Pièces défectueuses	Total
Pièces acceptées au contrôle qualité	8 280	60	8 340
Pièces rejetées au contrôle qualité	720	940	1 660
Total	9 000	1 000	10 000

On tire une pièce de la production au hasard et on note :

- **A l'événement : « La pièce tirée est acceptée par le contrôle qualité. »**
- **C l'événement : « La pièce tirée est conforme. »**

1. Calculer la probabilité de l'événement A puis de l'événement $\overline{A}$.

2. Définir par une phrase la probabilité de l'événement $A \cap C$ puis calculer sa probabilité.

3. Définir par une phrase $A \cup C$ puis calculer sa probabilité.

4. Définir par une phrase l'événement $C \cap \overline{A}$.

Solution

1. On est dans une situation d'équiprobabilité sur chacune des pièces donc : $p(A) = \dfrac{8\,340}{10\,000} = 0{,}834$ puis $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}834 = 0{,}166$

2. $A \cap C$: « La pièce tirée est conforme **et** acceptée au contrôle qualité. »
$p(A \cap C) = \dfrac{8\,280}{10\,000} = 0{,}828.$ 1

3. $A \cup C$: « La pièce tirée est conforme **ou** acceptée au contrôle qualité. »
$p(A \cup C) = \dfrac{8\,280 + 60 + 720}{10\,000} = 0{,}906.$ 2
On pouvait aussi utiliser l'égalité $p(A) + p(C) = p(A \cap C) + p(A \cup C)$.

4. $C \cap \overline{A}$: « La pièce tirée est conforme et refusée au contrôle qualité. »

Conseils & Méthodes

1 Deux conditions doivent être réalisées : il s'agit d'une intersection. On regarde dans le tableau : une seule case correspond à cette intersection, puis on calcule la probabilité correspondante en divisant ce nombre par le nombre total d'issues.

2 Une condition **ou** une autre doit être réalisée : il s'agit d'une réunion. On regarde dans le tableau : trois cases correspondent à cette réunion. On calcule la probabilité correspondante en additionnant ces nombres et en divisant par le nombre total d'issues.

À vous de jouer !

8 Dans un club de danse, chaque adhérent pratique une danse. La répartition des danses pratiquées est donnée dans le tableau suivant.

	Rock	Tango	Swing	Valse
Femme	21	13	26	25
Homme	35	15	17	28

On choisit au hasard une personne dans le club de danse. On considère les événements suivants :

- F : « La personne est une femme ».
- R : « La personne danse le rock ».
- S : « La personne danse le swing ».

1. Déterminer la probabilité de F, de S, de $\overline{F}$ et de $\overline{R}$.
2. Définir à l'aide d'une phrase les événements $F \cap S$ et $F \cup S$, puis déterminer leur probabilité.

9 Une urne contient quatre boules numérotées ① ② ③ ④ indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement deux boules, en remettant la première boule tirée dans l'urne.

- A est l'événement : « La somme des points obtenus est égale à 4. »
- B est l'événement : « Le produit des points obtenus est égale à 4. »

1. Représenter la situation par un tableau ou un arbre.
2. Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.
3. Définir à l'aide d'une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
4. Déterminer $p(A \cap B)$ et en déduire $p(A \cup B)$.

Exercices 42 à 46 p. 327-328

Exercices résolus

Exo — Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-26

5 Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire à deux issues

Cours 4 p. 319

Algo & Prog

D'après un rapport de l'ONU, 16,6 % de la population mondiale vit en Afrique.

1. **Expliquer comment simuler le tirage au sort d'un individu dans la population mondiale selon qu'il vit en Afrique ou non avec une fonction statistique Alea() renvoyant un réel aléatoire entre 0 et 1.**

2. **Écrire un programme Python simulant un échantillon de 500 individus tirés au sort dans la population mondiale selon qu'ils vivent en Afrique ou non.**

3. **Modifier le programme précédent afin d'obtenir une fonction simul1() renvoyant le nombre des individus qui vivent en Afrique dans l'échantillon simulé.**

Solution

1. La proportion 16,6 % est égale à 0,166 sous forme décimale 1 donc, quand on tire au hasard une personne dans la population mondiale, la probabilité qu'elle vive en Afrique est 0,166.

Pour simuler ce tirage au sort, on génère donc un réel aléatoire entre 0 et 1 avec `Alea()` et : 2

– si le réel obtenu est inférieur ou égal à 0,166, on considère que la personne vit en Afrique ;

– sinon, on considère qu'elle ne vit pas en Afrique.

2. 3

```
for i in range (1,501):
    if random.random() <= 0.166:
        print("Afrique")
    else:
        print("Pas Afrique")
```

3. 4 5

```
def simul1():
    effectif=0
    for i in range (1,501):
        if random.random() <= 0.166:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

Conseils & Méthodes

1 Lorsque l'on a une population dans laquelle le caractère étudié est présent dans une certaine proportion p, on commence par exprimer p sous forme décimale (ou fractionnaire).

2 On simule le tirage au sort en disant que l'individu vérifie la propriété si Alea() $\leqslant p$ et ne le vérifie pas sinon.

3 On répète 500 fois le même tirage au sort, donc on utilise une boucle `for`.

4 On crée une variable `effectif` donnant le nombre d'individus vivant en Afrique dans l'échantillon, initialisée à 0.

5 La valeur de la variable `effectif` augmente de 1 à chaque fois que le nouvel individu simulé vit en Afrique (c'est-à-dire quand le nombre réel aléatoire entre 0 et 1 `random.random()` est inférieur ou égal à 0,166).

À vous de jouer !

Algo & Prog

Dans les deux exercices 10 et 11, pour les algorithmes en langage naturel, on pourra utiliser une fonction `Alea()` renvoyant un réel aléatoire entre 0 et 1.

10 Dans la population mondiale, il y a 49,6 % de femmes. Écrire un algorithme en langage naturel, ou une fonction Python, simulant le tirage au sort d'un échantillon de 400 personnes dans la population mondiale, selon que ce sont des femmes ou des hommes, et affichant ou renvoyant le nombre de femmes dans l'échantillon.

11 Écrire un algorithme en langage naturel, ou une fonction Python, simulant le tirage au sort d'un échantillon de 899 résultats d'un lancer de dé à 12 faces, numérotées de 1 à 12, selon que le résultat obtenu est pair ou non, et affichant ou renvoyant le nombre de résultats **impairs** obtenus.

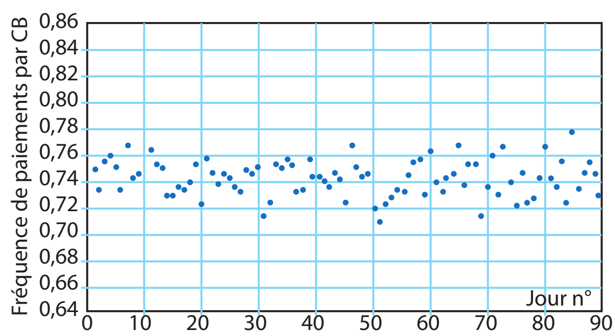
Exercices 47 à 56 p. 328-329

6 Estimer une probabilité ou une proportion

Cours 5 p. 320

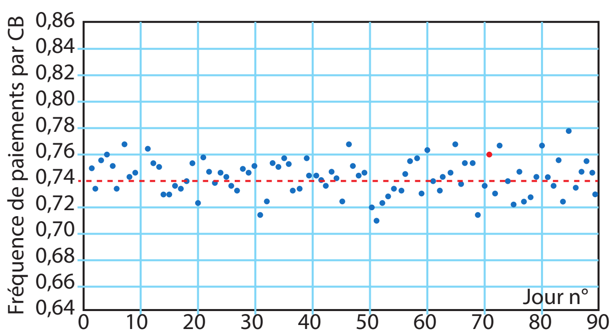
Un supermarché souhaite estimer la proportion de ses clients qui paient par carte bancaire (CB). Pour cela, pendant 90 jours, on relève la fréquence de clients payant par CB sur les 1 000 premiers clients, de sorte que l'on a 90 échantillons de taille 1 000. Les résultats sont donnés par le graphique ci-contre.

Estimer la proportion des clients payant par CB dans ce supermarché.



Solution

On observe que les fréquences de paiements par CB sont toutes regroupées autour d'une même valeur : 0,74 (environ !) : cela veut dire que la probabilité qu'un client paie par CB est proche de 0,74 **1**, on peut donc penser qu'il y a environ 74 % des clients qui paient par CB dans ce supermarché. **2**



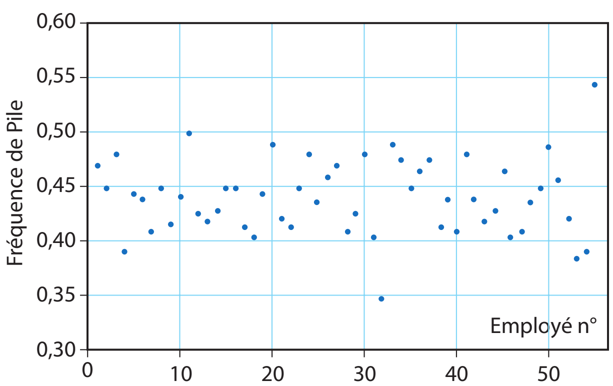
Conseils & Méthodes

1 On trace une droite horizontale passant « au mieux » au milieu du nuage de points et on lit l'ordonnée correspondante pour estimer la probabilité cherchée (il n'y a pas une seule bonne réponse, cela reste une estimation).

2 Dans le cas d'un tirage dans une population, on traduit la probabilité en proportion dans la population.

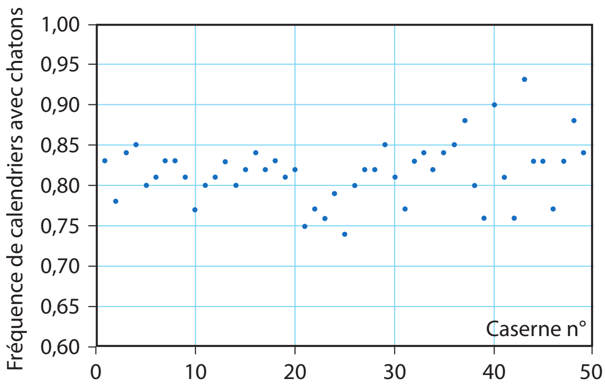
À vous de jouer !

12 Pour s'assurer qu'une de ses pièces n'est pas bien équilibrée, Picsou a demandé à ses 56 employés de la lancer 200 fois. Les fréquences de Pile obtenues par ses employés sont données par le graphique ci-dessous.



Estimer la probabilité que la pièce tombe sur Pile quand on la lance.

13 Au moment de Noël, on recense la fréquence de calendriers vendus sur lesquels figurent des chatons, parmi les 100 premiers calendriers vendus dans 50 casernes de pompiers. Les résultats sont donnés ci-dessous.



Estimer la proportion de calendriers avec chatons vendus par les pompiers.

Exercices 57 et 58 p. 329

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

14 Quelles propriétés doit vérifier une loi de probabilité pour modéliser une expérience aléatoire ?

15 Quelle égalité relie la probabilité d'un événement et celle de son contraire ?

16 **1.** Chercher la définition du mot *fluctuer*.
2. Quel est le lien avec la définition de la fluctuation d'échantillonnage présente dans le cours ?

Dans tous les exercices de simulation, on considère que :
- **la fonction `Alea()` renvoie un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 ;**
- **pour tous les programmes Python, le module `random` est importé.**

Questions - Flash

Diapo — Diaporama — Ressource professeur

17 On considère un dé pipé.
En utilisant le tableau suivant, calculer $p(6)$.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,1	0,15	0,25	

18 On considère deux événements A et B tels que :
$p(A) = 0{,}6$; $p(B) = 0{,}5$; $p(A \cap B) = 0{,}3$. Calculer $p(A \cup B)$.

19 On considère deux événements A et B tels que :
$p(A) = 0{,}5$; $p(B) = 0{,}8$; $p(A \cap B) = 0{,}4$. Calculer $p(\overline{A \cup B})$.

20 On tire au hasard une pièce d'un échiquier.
Soit C l'événement : « La pièce est une tour ou elle est blanche. » Exprimer $\overline{C}$ par une phrase.

21 Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils soient de sexes différents ?

22 Lenny répond au hasard à un QCM comportant cinq questions. Quel est l'événement contraire de « Lenny a répondu juste à au moins deux questions » ?

23 Expliquer comment simuler le tirage au sort d'une boule dans une urne suivant sa couleur sachant qu'il y a 5 boules rouges et 11 boules vertes dans l'urne.

24 Julien possède 10 montres dont 3 avec un bracelet en cuir. Tous les soirs, il enlève sa montre, la remet avec les autres puis, le matin, il en choisit une au hasard. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il simule l'échantillon correspondant aux montres portées par Julien pendant 30 jours.

```
Pour i allant de 1 à …
 si Alea() ⩽ …
  Afficher "CUIR"
 sinon
  Afficher "…"
 Fin si
Fin pour
```

Modéliser une expérience aléatoire

25 Jean choisit au hasard un nombre pair entre 1 et 15.
1. a) Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
b) Combien d'issues cette expérience aléatoire possède-t-elle ?
2. Reprendre les questions précédentes si Jean choisit un multiple de 6 entre 1 et 35.

26 Un enseignant choisit au hasard un élève de sa classe de 2de et lui demande quel est le moyen de transport qu'il a utilisé pour venir au lycée. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire en complétant $\Omega = \{\text{marche} ; \ldots\}$.

27 On lance un dé bien équilibré à six faces dont trois sont bleues, deux sont blanches et une est rouge.
1. Les trois couleurs sont-elles équiprobables ?
2. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur.

28 Voici le cycle d'allumage d'un feu tricolore : 45 s pour le feu vert ; 5 s pour le feu orange ; 20 s pour le feu rouge. On admet qu'un automobiliste arrive par hasard devant un feu tricolore fonctionnel. Proposer une loi de probabilité associée à cette expérience.

29 On lance cinq fois une pièce de monnaie.
La sortie de Pile rapporte 1 point. La sortie de Face ne rapporte rien. On s'intéresse à la somme des points obtenus à la suite des cinq lancers.
1. Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2. Préciser le nombre d'issues qui le composent.
3. Est-on dans une situation d'équiprobabilité ?

30 On lance deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on soustrait le plus petit résultat obtenu du plus grand. Le résultat est nul si le lancer produit un double.
1. Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2. Préciser le nombre d'issues qui le composent.

Déterminer une probabilité dans un cadre non équiprobable

31 Une entreprise emploie des cadres, des ouvriers et des employés de bureau. La répartition des emplois selon le sexe des salariés est donnée par le tableau suivant.

	Cadre	Ouvrier	Employé
Femme	3 %	5 %	21 %
Homme	5 %	60 %	6 %

On tire au sort une personne de l'entreprise pour lui faire gagner un voyage.
Déterminer la probabilité que le voyage soit gagné par :
a) une femme.
b) un cadre.
c) une femme cadre ou un homme employé ou une femme ouvrière.

32 Thomas est un habitué d'un restaurant. Les serveurs le connaissent si bien qu'ils ont modélisé l'expérience aléatoire « l'accompagnement choisi par Thomas avec son plat » par la loi de probabilité suivante.

Issue	Riz	Pates	Patates sautées	Purée	Frites	Haricots verts
Probabilité	0,2	0,3	0,05	0,15	0,28	0,02

1. Déterminer la probabilité que Thomas ait pris un accompagnement composé de légumes verts.
2. Déterminer la probabilité que Thomas ait pris un accompagnement constitué de pommes de terre.

33 En minutant la durée de chaque feu, Sonia a modélisé la probabilité de tomber en voiture sur une certaine couleur par la loi suivante.

Couleur	Vert	Orange fixe	Rouge	Orange clignotant
Probabilité	0,55	0,05	0,395	0,005

1. Déterminer la probabilité qu'elle doive s'arrêter à ce feu.
2. Déterminer la probabilité de tomber sur la couleur orange.

Déterminer une probabilité dans une situation d'équiprobabilité

34 Léa prend une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
1. Déterminer la probabilité que la carte soit l'as de pique.
2. Déterminer la probabilité que la carte soit un pique.
3. Déterminer la probabilité que la carte soit une figure (roi, reine ou valet).

35 Manu possède un dé tétraédrique. Sur chacune des face est inscrit un numéro : 2 ; 3 ; 7 et 10. Il lance le dé.
1. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 7.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre premier.

36 Un magasin d'électroménager dispose de machines à laver, de sèche-linge et de grille-pain, tous fabriqués en Chine, au Japon ou en Allemagne. Le tableau suivant indique le nombre d'objets produits dans chaque pays.

	Machine à laver	Sèche-linge	Grille-pain
Allemagne	230	70	40
Chine	180	15	120
Japon	50	300	240

Après avoir remporté un concours, un client gagne un produit tiré au sort dans ce magasin.
1. Déterminer la probabilité que ce soit une machine à laver fabriquée en Europe.
2. Déterminer la probabilité que ce soit un sèche-linge.
3. Déterminer la probabilité que le produit ait été fabriqué en Asie.

Utiliser un arbre ou un tableau

37 Gabriel possède deux dés tétraédriques équilibrés. Il lance les deux dés et note la somme obtenue.
Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 5.

38 Une pièce équilibrée porte une face avec la lettre X et une face avec la lettre Y. On lance trois fois de suite la pièce, en notant à chaque fois la lettre obtenue. Le résultat est le mot formé par les trois lettres.
1. Faire un arbre pour représenter l'expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité d'avoir un mot contenant trois fois la même lettre.

39 On lance trois fois une pièce bien équilibrée.
1. Représenter la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
a) d'avoir trois Face ?
b) que le deuxième lancer soit Face ?
c) que le troisième lancer soit différent du premier ?

40 Au restaurant scolaire, les élèves ont le choix :
- entre deux entrées (artichaut ou betterave) ;
- entre trois plats (cheval, daube ou escalope) ;
- entre deux desserts (fromage ou gâteau).

Un menu se compose :
- d'une entrée ;
- d'un plat ;
- d'un dessert.

1. En utilisant un arbre, représenter tous les menus possibles.
2. Combien de menus différents sont possibles ?
3. On choisit un menu au hasard.
Quelle est la probabilité :
a) qu'il comporte une escalope ?
b) qu'il comporte de l'artichaut et du fromage ?
c) qu'il ne comporte pas de cheval ?

41 Un groupe de quatre amis, Émile, Zora, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.
1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
a) C'est un garçon qui rame.
b) Hélène écope.
c) Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Réunion, intersection et événements contraires

42 A et B sont deux événements incompatibles.
- $p(A) = 0{,}4$ • $p(B) = 0{,}22$

Déterminer la probabilité des événements suivants.
a) $\overline{A}$ **b)** $\overline{B}$ **c)** $A \cup B$

43 On considère un événement A tel que $p(A) = \frac{2}{7}$.
Déterminer $p(\overline{A})$.

Exercices d'application

44 On choisit au hasard un élève dans une classe.
On considère les événements suivants :
- A : « Il porte des chaussures noires. »
- B : « Il n'utilise jamais de parapluie. »

Décrire à l'aide d'une phrase les événements suivants.
a) $\overline{A}$ **b)** $A \cap B$ **c)** $A \cup B$

45 A et B sont deux événements tels que $p(A) = 0{,}2$; $p(B) = 0{,}7$ et $p(A \cap B) = 0{,}15$.
1. Déterminer $p(\overline{A})$.
2. Déterminer $p(A \cup B)$.

46 Raphaël observe sa pile de livres à lire, constituée de livres achetés ou empruntés à la bibliothèque. La répartition de ces livres par genre est donnée par le tableau suivant.

	Roman	Théâtre	Poésie	Total
Livre acheté	1	2	4	7
Livre emprunté	4	1	0	5
Total	5	3	4	12

Motivé, il décide de choisir un livre au hasard afin d'entamer sa lecture. On note :
- R l'événement : « Le livre choisi est un roman. »
- E l'événement : « Le livre choisi est emprunté. »

1. a) Décrire à l'aide d'une phrase les événements $R \cap E$ et $R \cup E$.
b) Déterminer la probabilité des événements précédents.
2. a) Définir à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{R}$.
b) Déterminer sa probabilité.

Simuler une expérience aléatoire à deux issues

Algo & Prog

47 En 2016, 27 % des Français ont téléchargé un contenu illégalement (source : *L'Expansion*).
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de simuler le tirage au sort d'un Français selon qu'il a téléchargé ou non un contenu illégalement en 2016.

```
Si Alea() ⩽ …
   Afficher "A téléchargé illégalement"
Sinon
   Afficher "…"
Fin si
```

48 Lors de la saison 2016-2017 de Ligue 1 de football, 3 % des buts marqués l'ont été « contre-son-camp (CSC) » (source : lfp).
Recopier et compléter le programme Python ci-contre afin qu'il permette de simuler le type d'un but selon si c'est un CSC ou non.

```
if random.random() <= ...:
   print("...")
else:
   print("CSC")
```

49 **1.** Le taux d'obésité chez les hommes adultes aux États-Unis est de 35 % (source : wikipedia).
Expliquer comment simuler le tirage au sort d'un homme aux États-Unis selon qu'il souffre d'obésité ou non.
2. Même question pour les femmes, dont le taux d'obésité est de 40 %.

50 En 2017, 58,2 % des bacheliers n'ont pas poursuivi leurs études à l'université (source : www.enseignement-sup-recherche.gouv.fr).
Expliquer comment simuler le tirage au sort d'un bachelier de 2017 au hasard selon qu'il a poursuivi ses études à l'université ou non.

51 Dans une classe, on compte 17 filles et 15 garçons.
1. Écrire en langage naturel un algorithme permettant de simuler le tirage au sort d'un élève de la classe suivant qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon.
2. Écrire le programme Python correspondant.

Simuler un échantillon associé à une expérience aléatoire à deux issues

Algo & Prog

52 Le joueur de basketball Stephen Curry a un taux de réussite de 90,4 % au lancer-franc.

```
effectif ← 0
Pour i allant de 1 à 5
    Si Alea() ⩽ 0.904
        effectif ← effectif + 1
    Fin si
Fin pour
```

1. On considère l'algorithme ci-contre.
a) Quelle est la valeur de la variable `effectif` en fin d'algorithme si `Alea()` a pris successivement les valeurs (arrondies à 0,01 près) 0,52 ; 0,89 ; 0,23 ; 0,28 et 0,95 ?
b) À quoi ce résultat correspond-il en termes de simulation de lancers-francs tentés par S. Curry ?
2. Modifier l'algorithme afin qu'il affiche le nombre de lancers-francs réussis lorsque l'on en simule un échantillon de 350 tirés par S. Curry.

53 On reprend l'énoncé de l'exercice **50**.
1. a) Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il simule un échantillon de 100 bacheliers de 2017 suivant s'ils ont poursuivi leurs études à l'université ou non.

```
Pour i allant de 1 à …
   si Alea() ⩽…
      Afficher "Université"
   sinon
      Afficher "Pas université"
   Fin si
Fin pour
```

b) Le modifier pour qu'il calcule et affiche le nombre de bacheliers ayant poursuivi leurs études à l'université dans l'échantillon de 100 bacheliers.
2. Reprendre la question **1. b)** pour un échantillon de 1 316 bacheliers.

54 On reprend l'énoncé de l'exercice **49**.

1. Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il simule un échantillon de 200 hommes américains suivant qu'ils souffrent d'obésité ou non.

```
for i in range (1,...):
    if random.random() <= ...:
        print("Souffre d'obésité")
    else:
        print("ne souffre pas d'obésité")
```

2. Le modifier pour qu'il calcule et affiche le nombre d'hommes américains souffrant d'obésité dans l'échantillon.

3. Adapter le programme précédent à un échantillon de 300 **femmes** américaines.

55 On reprend l'énoncé de l'exercice **47**.

1. Écrire un algorithme en langage naturel ou un programme Python permettant de simuler un échantillon de 2 000 Français suivant qu'ils ont téléchargé un contenu illégalement ou non en 2016 (l'affichage doit être « a téléchargé » ou « n'a pas téléchargé »).

2. L'adapter afin d'écrire une fonction `non_telecharge()` renvoyant le nombre de personnes n'ayant **pas** téléchargé illégalement dans l'échantillon.

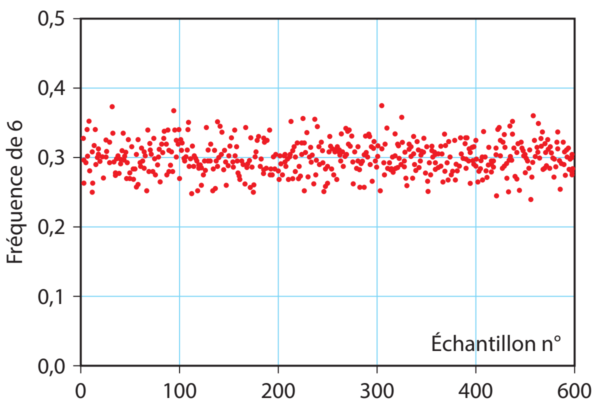
56 On reprend l'énoncé de l'exercice **48**.

1. Écrire un algorithme en langage naturel ou un programme Python permettant de simuler un échantillon de 991 buts suivant que ce sont des CSC ou non (l'affichage doit être « CSC » ou « pas CSC »).

2. L'adapter afin d'écrire une fonction `csc()` renvoyant le nombre de CSC dans l'échantillon.

Estimer une probabilité ou une proportion

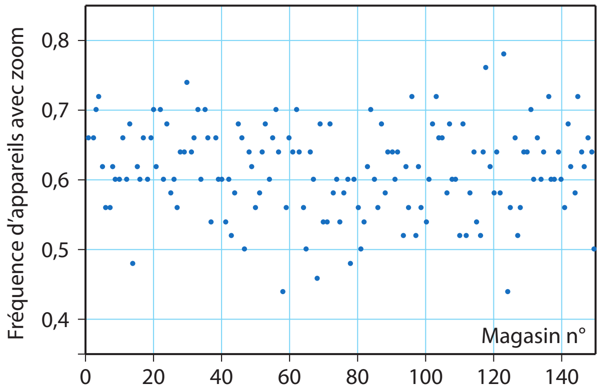
57 Un escroc a fabriqué un dé truqué (il en a légèrement limé un coin) afin que la face 6 soit favorisée.
Afin de connaître la probabilité d'obtention de cette face, il a demandé à son neveu de lancer 400 fois le dé et de calculer la fréquence de 6 obtenus sur les 400 lancers.
Il lui a ensuite demandé de recommencer 499 fois de sorte qu'il a obtenu 500 fréquences représentées ci-dessous.



1. Estimer la probabilité d'obtention du 6.

2. Il souhaitait tripler la probabilité d'obtention du 6, est-ce réussi ?

58 Une chaîne de magasins de photographie veut estimer le pourcentage p d'acheteurs d'appareils avec zoom dans sa clientèle.
Pour cela, elle demande aux 150 magasins de sa franchise de lui faire remonter la fréquence d'appareils avec zoom sur les échantillons constitués des 50 derniers appareils vendus.
Le graphique regroupant toutes les fréquences obtenues est donné ci-dessous.



1. Donner une approximation de la fréquence d'appareils avec zoom vendus dans l'échantillon du magasin 40.

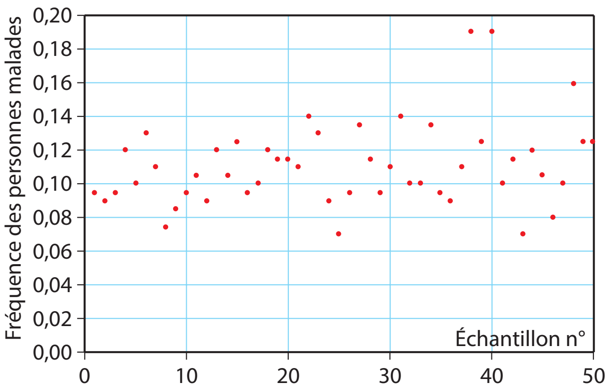
2. Estimer la proportion p d'acheteurs d'appareils avec zoom dans sa clientèle. Donner le résultat en pourcentage.

3. Comment améliorer la précision de cette estimation ?

Modéliser à partir de fréquences

59 Dans un pays, une partie de la population est touchée par une épidémie.

1. On cherche à estimer la proportion de la population touchée par l'épidémie. Pour cela, on teste 50 échantillons de 200 personnes à divers endroits du pays et on relève la fréquence des malades dans ces échantillons. Les résultats sont donnés dans le graphique ci-dessous.



Estimer la proportion de personnes souffrant de la maladie dans ce pays.

2. a) On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort un habitant de ce pays et à regarder s'il souffre de la maladie ou non.
Proposer une modélisation de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire proposer une loi de probabilité pour celle-ci.

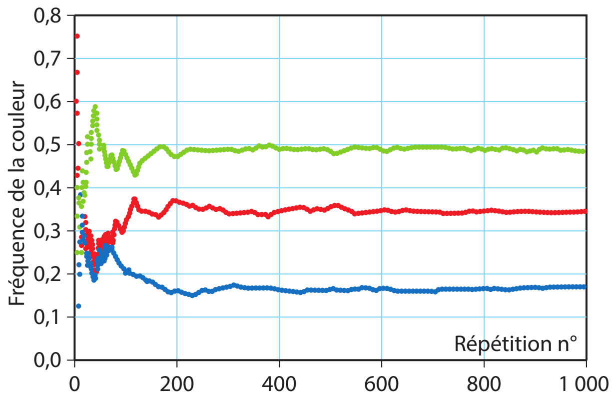
b) Cette modélisation est-elle la seule possible ? Discuter.

Exercices d'application

60 Dans une urne, il y a des boules rouges, des boules bleues et des boules vertes indiscernables au toucher.

1. On réalise 1 000 fois l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans l'urne, noter sa couleur et la remettre dans l'urne.

L'évolution des fréquences des boules obtenues de chaque couleur au fil de ces 1 000 répétitions est donnée ci-dessous.



Estimer la probabilité d'obtenir une boule verte.

2. Donner $p(\text{rouge}) + p(\text{bleu}) + p(\text{vert})$.

3. Proposer une modélisation de l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule dans cette urne.

4. On a réalisé une autre série de 1 000 tirages et on a obtenu :

Couleur	Rouge	Bleu	Vert
Nombre de boules tirées	330	510	160

a) Proposer une autre modélisation de l'expérience aléatoire.

b) Quel phénomène ces deux séries de 1 000 tirages illustrent-elles ?

61 Un possible candidat A à une élection souhaite mesurer sa popularité et commande un sondage. On pose ainsi à 1 000 personnes la question suivante : « Envisageriez-vous de voter pour le candidat A ? »

Les réponses sont reportées dans le tableau ci-dessous.

Réponse	Oui	Non	Peut-être
Nombre	256	471	273

On choisit au hasard une personne inscrite sur les listes électorales. On s'intéresse à son intention de vote pour le candidat A. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

62 À l'approche d'un match capital de son équipe fétiche, Jalila étudie les statistiques des rencontres passées avec leur adversaire. Les résultats sont compilés dans le tableau suivant.

Victoires	Matchs nuls	Défaites
5	7	68

Proposer une loi de probabilité qui modéliserait le résultat du match à venir.

63 Max passe beaucoup de temps dans une piscine à balles multicolores.

Un échantillon de 150 balles prélevées donne la répartition de couleurs suivantes.

Couleur	Rouge	Bleu	Vert	Jaune
Nombre de balles	41	47	38	24

Max se bande les yeux, plonge dans la piscine, attrape une balle au fond, retire son bandeau et regarde la couleur obtenue.

Proposer une loi de probabilité qui modéliserait le résultat de cette expérience aléatoire.

Calculs et automatismes

64 Simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{6}{8}$ **b)** $\dfrac{9}{15}$ **c)** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ **d)** $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{2}{9}$

65 Trouver $p(A)$ dans les cas suivants.

a) $p(A) + 0{,}2 = 1$ **b)** $0{,}5 + p(A) = 0{,}25 + 0{,}7$

c) $1 - p(A) = 0{,}15$ **d)** $5p(A) + 0{,}2 = 1$

Modéliser une expérience aléatoire

66 Imaginer des expériences aléatoires pouvant être modélisées par les lois de probabilité suivantes.

a)

Issue	Noire	Bleue	Rouge	Jaune
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b)

Issue	Vert	Rouge	Orange
Probabilité	0,6	0,35	0,05

c)

Issue	Chemise	Tee-shirt	Polo
Probabilité	0,35	0,5	0,15

67 À partir du lancer simultané de deux dés tétraédriques, imaginer cinq expériences aléatoires conduisant à cinq univers différents.

68 Une personne répond au hasard à un sondage. Deux questions sont posées et, pour chacune, on donne le choix entre favorable, opposé et sans opinion.
De combien de façons la personne peut-elle répondre ?

Événements et issues

69 On considère l'expérience : « Lancer deux dés tétraédriques et observer le produit des résultats obtenus. »
1. Donner l'univers de cette expérience aléatoire sous la forme $\Omega = \{...\}$.
2. Écrire sous forme d'ensembles les événements suivants.
a) « Obtenir un résultat impair. »
b) « Obtenir un résultat supérieur ou égal à 6. »
c) « Obtenir un nombre premier. »

70 On regarde à un instant au hasard l'heure affichée par une horloge à affichage numérique, et on note le chiffre des dizaines du nombre des minutes.
1. Décrire l'univers associé à l'expérience aléatoire.
2. Décrire l'événement « obtenir un multiple de 3 » à l'aide d'un ensemble d'issues.

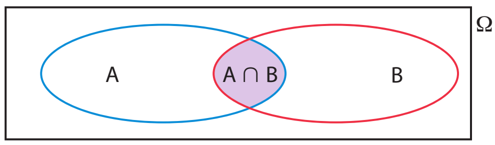
71 On lance deux dés à quatre faces équilibrés et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus. On définit les évènements suivants :
• E : « Le résultat est pair. »
• F : « Le résultat est au moins égal à 5. »
• G : « Le résultat est au moins égal à 6. »
Préciser les issues qui composent chacun des événements précédents.

Vocabulaire des événements

72 On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On appelle :
• C l'événement : « La carte tirée est un cœur. »
• F l'événement « La carte tirée est une figure. »
Décrire par une phrase et donner le nombre d'issues de chacun des événements suivants.
a) $C \cap F$ **b)** $C \cup F$ **c)** $\overline{C} \cap F$ **d)** $\overline{C \cup F}$

73 Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée : une gastroentérite et un rhume.
On choisit un élève au hasard et on nomme :
• G l'événement : « L'élève a la gastroentérite. »
• R l'événement : « L'élève a un rhume. »
Décrire à l'aide de ces deux événements :
a) « L'élève a la gastroentérite et le rhume. »
b) « L'élève a le rhume mais pas la gastroentérite. »
c) « L'élève a au moins une des deux maladies. »
d) « L'élève n'a aucune des deux maladies. »

74 On a représenté sur le diagramme de Venn l'événement $A \cap B$. Construire un diagramme de Venn sur le même modèle pour chacun des événements suivants.



a) $A \cap \overline{B}$ **b)** $A \cup \overline{B}$ **c)** $\overline{A \cap B}$
d) $\overline{A \cup B}$ **e)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **f)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

75 **1.** On lance un dé cubique. Exprimer simplement le contraire des événements suivants.
a) A : « Le résultat du dé est pair. »
b) B : « Le résultat du dé est supérieur ou égal à 5. »
c) C : « Le résultat du dé est un multiple de 3 ou de 5. »
2. Exprimer plus simplement les événements suivants.
a) $A \cap B$ **b)** $\overline{A} \cap C$ **c)** $\overline{A \cup C}$

Expériences aléatoires multiples

76 On lance deux dés à quatre faces et on regarde la somme obtenue.
1. Donner l'univers des possibles.
2. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

Exercices d'entraînement

77 Trois CD notés a, b et c ont respectivement des boîtes nommées A, B et C. On range les trois CD au hasard dans les boîtes sans voir leur étiquette.

1. Combien de rangements sont possibles ?

2. Quelle est la probabilité :

a) que les trois CD soient bien rangés ?

b) qu'exactement un CD soit bien rangé ?

c) qu'exactement deux CD soient bien rangés ?

3. En déduire la probabilité qu'aucun CD ne soit bien rangé.

78 Sur une table sont posés deux pots de peinture : l'un contient de la peinture jaune et l'autre de la peinture bleue. On plonge au hasard un pinceau dans un des pots, puis on peint une feuille de papier.
On plonge un autre pinceau au hasard dans l'un des pots et on peint une deuxième couche de couleur sur la même feuille, sans attendre que la première couche soit sèche.

1. De quelle couleur la feuille peut-elle être ?
Ce sont les issues de l'expérience aléatoire.

2. Déterminer une loi de probabilité qui modélise cette expérience aléatoire à l'aide d'un tableau.

Calcul de probabilités avec réunion, intersection et événement contraire

79 Soit A et B deux événements tels que :
• $p(\mathrm{A}) = 0{,}7$ • $p(\mathrm{B}) = 0{,}5$ • $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}3$
Calculer les probabilités suivants.
a) $p(\overline{\mathrm{A}})$ **b)** $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ **c)** $p(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$

80 Soit S et T deux événements tels que :
• $p(\mathrm{S}) = 0{,}5$ • $p(\mathrm{T}) = 0{,}6$ • $p(\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) = 0{,}9$
Calculer les probabilités suivantes.
a) $p(\mathrm{S} \cap \mathrm{T})$ **b)** $p(\overline{\mathrm{S} \cup \mathrm{T}})$ **c)** $p(\overline{\mathrm{S} \cap \mathrm{T}})$

81 Robin des Bois atteint sa cible avec une probabilité de 0,7.
Quelle est la probabilité qu'il rate sa cible ?

82 On considère des événements A et B incompatibles tels que $p(\overline{\mathrm{A}}) = 0{,}4$ et $p(\mathrm{B}) = 0{,}2$.
Déterminer $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

83 A et B sont deux événements tels que :
• $p(\mathrm{A}) = 0{,}8$ • $p(\mathrm{B}) = 0{,}53$

1. A et B sont-ils incompatibles ?

2. Sachant que $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}95$, calculer :
a) $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ **b)** $p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$

84 On considère deux événements V et F tels que :
• $p(\mathrm{V}) = 0{,}4$ • $p(\mathrm{F}) = 0{,}3$ • $p(\mathrm{V} \cup \mathrm{F}) = 0{,}8$
Aïssatou prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

85 On considère deux événements V et F tels que :
• $p(\mathrm{V}) = 0{,}6$ • $p(\mathrm{F}) = 0{,}4$ • $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{F}) = 0{,}5$
Simon prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

86 Logique
On considère deux événements V et F tels que :
• $p(\mathrm{V}) = 0{,}6$ • $p(\mathrm{F}) = 0{,}4$ • $p(\mathrm{V} \cap \mathrm{F}) = 0{,}4$
Allister prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

87 Logique
On considère deux événements V et F tels que $p(\mathrm{V}) = 0{,}6$ et $p(\mathrm{V} \cup \mathrm{F}) = 0{,}55$.
Zoé prétend que ce n'est pas possible.
Confirmer ou infirmer sa déclaration.

88 Un grossiste commande des poissons pêchés dans différentes mers. Le tableau suivant en indique la provenance selon leur origine.

	Mer du Nord	Océan Atlantique	Mer Méditerranée
Sardine	0	125	75
Daurade	260	80	345
Merlan	25	45	45

1. On choisit un poisson au hasard dans son stock.
Déterminer la probabilité que le poisson :
a) soit une daurade de l'Atlantique.
b) vienne de l'océan Atlantique.
c) soit un merlan.

2. Le poisson choisi est une daurade.
Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la mer Méditerranée ?
On arrondira le résultat au centième.

3. Déterminer la probabilité que le poisson vienne de la mer Méditerranée ou soit une daurade.

4. Le poisson choisi vient des eaux glacées de la mer du Nord ou de l'Atlantique.
Quelle est la probabilité qu'il soit une sardine ?

89 Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone.
On considère les événements :
• O_1 : « La première ligne est occupée. »
• O_2 : « La seconde ligne est occupée. »
Une étude statistique montre que :
• $p(\mathrm{O}_1) = 0{,}4$ • $p(\mathrm{O}_2) = 0{,}3$ • $p(\mathrm{O}_1 \cap \mathrm{O}_2) = 0{,}2$
Calculer la probabilité des événements suivants.
a) « La ligne 1 est libre. »
b) « Au moins une des lignes est occupée. »
c) « Au moins une des lignes est libre. »

90 Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts :
- un défaut de clavier ;
- un défaut d'écran.

Une étude statistique montre que :
- 2 % présentent un défaut d'écran ;
- 2,4 % présentent un défaut de clavier ;
- 1,5 % présentent les deux défauts.

1. On choisit au hasard un ordinateur.
Définir une loi de probabilité pour modéliser ce tirage.

2. On considère les événements suivants :
- E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran. »
- C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier. »

Déterminer $p(E)$, $p(C)$ et $p(E \cap C)$.

3. On considère les événements suivants.
- « L'ordinateur présente au moins un défaut. »
- « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran. »

a) Traduire ces deux événements à l'aide de E et C.
b) Calculer leur probabilité.

EMC

91 La gendarmerie a relevé, sur les 2 400 accidents corporels en voitures comptabilisés en 2011 dans le Val-de-Marne, que 24 % des conducteurs étaient des femmes.
Parmi elles, 25 % conduisaient sous l'emprise de l'alcool.
Par ailleurs, 574 conducteurs hommes conduisaient sous l'emprise de l'alcool.

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

Le conducteur…	était un homme	était une femme	Total
était sous l'emprise de l'alcool	574	144	
n'était pas sous l'emprise de l'alcool			
Total		576	2 400

2. On tire au hasard un conducteur parmi les victimes d'accidents corporels dans le Val-de-Marne en 2011 et on note :
- F l'événement : « Le conducteur était une femme. »
- A l'événement : « Le conducteur était sous l'emprise de l'alcool. »

Dans la suite de l'exercice, les probabilités seront données sous forme décimale arrondie à 0,01 près.
a) Déterminer la probabilité de l'événement F.
b) Déterminer la probabilité de l'événement A.
c) Décrire par une phrase l'événement $A \cap F$. Calculer $p(A \cap F)$.
d) Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup F$.
e) Quel est le contraire de l'événement $A \cup F$?
Calculer sa probabilité.

3. Un contrôle d'alcoolémie sur un conducteur accidenté révèle qu'il était sous l'emprise de l'alcool.
Quelle est la probabilité que ce conducteur soit un homme ?

92 Lors d'un devoir commun de mathématiques ayant lieu un jour entre 8 h à 10 h, on a relevé les résultats des élèves en fonction de l'heure à laquelle ils sont partis.

L'élève…	est parti avant 9 h 15	est parti entre 9 h 15 et 9 h 45	est parti après 9 h 45	Total
a eu plus de 10	49	151	150	350
a eu strictement moins de 10	1	49	100	150
Total	50	200	150	500

On choisit alors un élève au hasard.
On considère les événements suivants :
- M : « L'élève a eu plus de 10 au contrôle. »
- B : « L'élève est parti entre 9 h 15 et 9 h 45. »
- A : « L'élève est parti avant 9 h 15. »
- C : « L'élève est parti après 9 h 45. »

1. Déterminer la probabilité des événements C et M.
2. a) Définir avec une phrase les événements $\overline{A}$, $M \cup A$ et $\overline{M} \cap B$.
b) Déterminer la probabilité des événements précédents.
3. Un élève a été aperçu allongé dans l'herbe à 9 h 05.
Quelle est la probabilité qu'il ait la moyenne au contrôle ?

Situations de non équiprobabilité

93 Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de t qui permet de définir une loi de probabilité.

a)

Issue	P	F
Probabilité	0,3	t

b)

Issue	Vert	Orange	Rouge
Probabilité	0,5	t	0,3

c)

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,25	t	0,2	0,4

d)

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	t	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$	$6t$

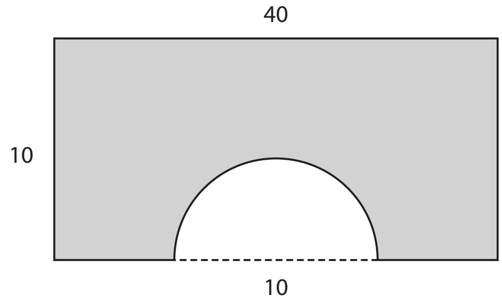
94 On lance un dé pipé. Le tableau suivant regroupe les probabilités de sortie de chaque face.

F	1	2	3	4	5	6
$p(F)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	?

1. Calculer $p(6)$.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
a) « La face obtenue est paire. »
b) « La face obtenue est supérieure ou égale à 5. »

Exercices d'entraînement

95 La façade d'un pont est constitué d'un rectangle dont les dimensions sont données sur le graphique ci-dessous. Sur cette façade, un demi-disque est creusé pour laisser passer une rivière.



Avec son arc, Alexandre tire une flèche sur cette façade.
1. Quelle est la probabilité qu'elle rebondisse sur le pont ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle tombe dans la rivière (directement ou après avoir rebondi sur le pont) ?

96 Une usine produit des vis. L'objectif est d'obtenir des vis de 3 cm de longueur, mais un certain nombre de vis sortent de l'usine avec des imperfections.
Un stock de 600 vis est étudié pour tester la qualité de la production.
Le résultat des mesures est récapitulé dans le tableau ci-dessous.

Longueur (en mm)	29,9	30	30,1	30,2
Nombre	45	501	39	15

On choisit au hasard une vis dans le stock de 600 pièces et on note sa longueur.
1. Proposer une loi de probabilité pour modéliser cette expérience aléatoire.
2. Selon cette loi, quelle est la probabilité d'obtenir une vis parfaitement calibrée ?
3. Une pièce est acceptable si sa longueur ne présente pas un écart à la longueur souhaitée supérieur à 0,1 mm.
Quelle est la probabilité que la vis tirée au sort ne soit pas acceptable ?

97 Jean possède un dé pipé.
Il lui semble que la face 6 tombe trois fois plus que les autres faces.
1. Proposer une loi de probabilité pour modéliser cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité que le résultat d'un lancer du dé soit pair.

98 Un univers associé à une expérience aléatoire est constitué de trois issues A, B et C.
La loi de probabilité vérifie :
$p(\text{A}) = t^2 \qquad p(\text{B}) = t \qquad p(\text{C}) = \frac{1}{4}$
Déterminer t.

Simuler une expérience aléatoire ou un échantillon

Algo & Prog

Pour les exercices 99 et 100 on dispose d'une fonction `EntAlea` telle que, pour deux entiers *a* et *b*, `EntAlea(a,b)` renvoie un entier au hasard entre *a* inclus et *b* inclus.

99 **1.** Expliquer comment simuler le lancer d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 à l'aide de la fonction `EntAlea`.
2. Que permet de simuler l'algorithme ci-contre ?

```
Pour i allant de 1 à 10
    Afficher EntAlea(1,6)
Fin pour
```

3. Modifier l'algorithme pour qu'il simule un échantillon de 100 lancers d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et en considérant que le résultat de l'expérience est GAGNÉ si le résultat est 4 et PERDU autrement.

100 **1.** Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et on note sa couleur. Expliquer comment simuler cette expérience aléatoire.
2. On répète l'expérience en remettant la boule tirée à chaque fois. Écrire un algorithme permettant de simuler un échantillon de 30 tirages avec remise et qui affiche les couleurs obtenues.

101 **1.** Que permet de simuler la fonction Python ci-contre ?

```
def deux_des():
    a=random.randint(1,6)
    b=random.randint(1,6)
    return a+b
```

2. Modifier cette fonction afin que sa première ligne soit **`def trois_des(n):`**, qu'elle simule trois lancers de dés à *n* faces et qu'elle renvoie le **produit** des résultats des trois lancers.
3. Expliquer ce que fait la fonction Python ci-contre.

```
def echantillon_deux_des(n,p):
    for i in range (1,p+1):
        print(deux_des(n))
```

102 On considère une expérience aléatoire dont on ne connaît que la loi de probabilité.

Issue	Rouge	Jaune	Vert
Probabilité	0,42	0,27	0,31

1. Compléter les conditions pour que la fonction ci-contre permette de simuler cette expérience aléatoire.

```
def f1():
    a=random.random()
    if a <= 0.42:
        print("Rouge")
    if ... and ...:
        print("Jaune")
    if ... and ...:
        print("Vert")
```

2. Écrire une fonction Python réalisant l'affichage correspondant à un échantillon de taille 100 associé à cette expérience aléatoire.

Simulation avec effectifs ou fréquences

Algo & Prog

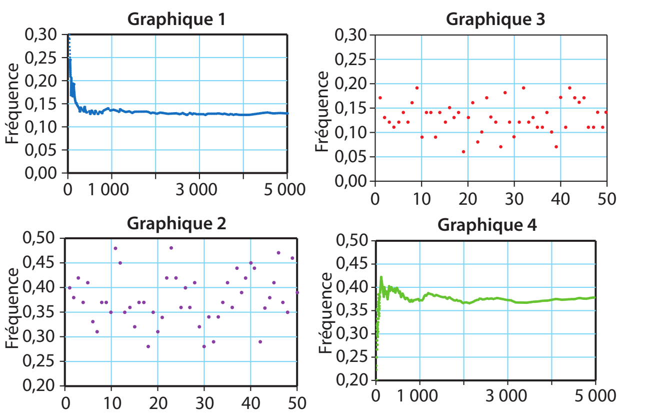
103 À midi, dans un restaurant, le plat du jour est commandé par 64 % des clients.
1. Écrire un algorithme ou une fonction PYTHON simulant un service de 50 couverts dans ce restaurant et affichant ou renvoyant le nombre de personnes simulées prenant le plat du jour sur ce service.
2. Modifier l'algorithme ou la fonction précédente afin qu'il ou elle affiche ou renvoie la fréquence des personnes prenant le plat du jour sur ce service plutôt que l'effectif.

104 **1.** Écrire un algorithme ou une fonction PYTHON affichant ou renvoyant le nombre de résultats obtenus supérieurs ou égaux à 7 lorsque l'on simule un échantillon de 98 lancers d'un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12.
2. Même question avec la fréquence plutôt que l'effectif du nombre de résultats obtenus supérieurs ou égaux à 7.

105 Au Canada, le français est la langue maternelle de 21,3 % des habitants. Écrire un algorithme ou une fonction PYTHON affichant ou renvoyant la fréquence d'individus ayant le français pour langue maternelle lorsque l'on simule un échantillon de 1 324 Canadiens.

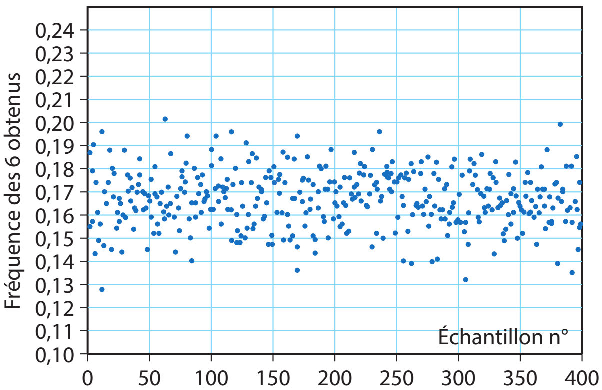
Stabilisation des fréquences

106 Sofiane et Andréa ont lancé (en se relayant) 5 000 fois un dé équilibré à 8 faces et ont regardé le nombre de 3 obtenus.
• Sofiane a pris les résultats par tranches de 100 afin de constituer 50 échantillons puis il a tracé le nuage de points de coordonnées $(i\,;f_i)$ où i est le numéro de l'échantillon et f_i la fréquence de 3 dans celui-ci ;
• Andréa a tracé le nuage de points de coordonnées $(j\,;f'_j)$ où j est le numéro du lancer et f'_j la fréquence de 3 obtenus entre le premier et le j-ième lancer.
Parmi les graphiques, deux correspondent à ceux tracés par Sofiane et Andréa. Les trouver et les associer à la bonne personne.



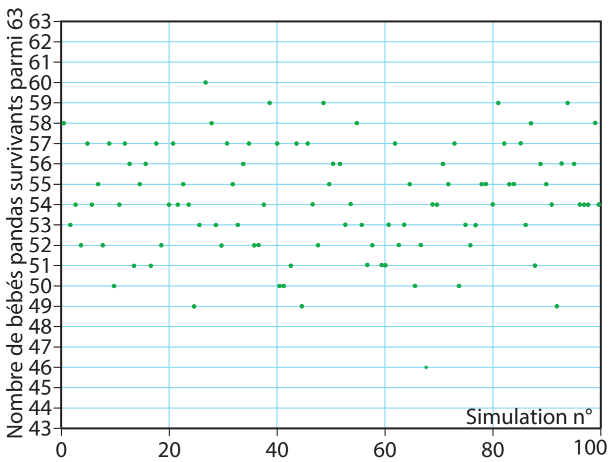
« Normalité » d'un échantillon

107 Le propriétaire d'un casino a un doute sur l'équilibre d'un dé : il a l'impression que le 6 tombe trop souvent !
1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 lorsque l'on lance un dé à 6 faces normalement équilibré ?
2. Il fait lancer 1 000 fois ce dé par un croupier qui obtient 191 fois le nombre 6.
Comparer la fréquence de 6 obtenus dans cet échantillon et la probabilité d'obtenir un 6.
Que peut-on en penser ?
3. On simule 400 échantillons de 1 000 lancers d'un dé équilibré à 6 faces et on s'intéresse aux fréquences de 6 obtenus dans chaque échantillon.
On obtient le graphique ci-dessous.



Le dé semble-t-il équilibré ? Expliquer.

108 Au vu des statistiques, on considère qu'un bébé panda né en captivité a 87 % de chance de survivre.
1. 58 des 63 bébés pandas nés en 2017 ont survécu.
Quelle est la fréquence f des pandas survivants parmi ceux nés en 2017 ?
2. Cela semble-t-il exceptionnel ?
3. On a simulé 100 échantillons de 63 bébés pandas suivant qu'ils survivent ou non.



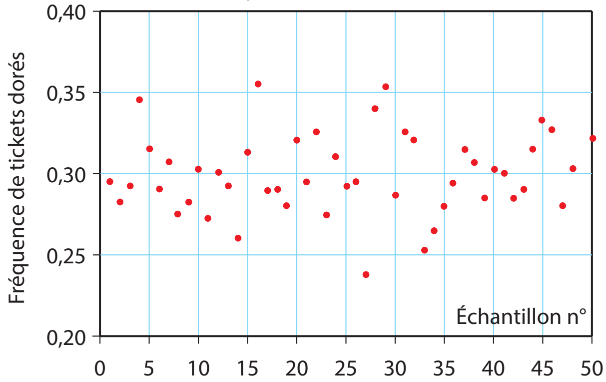
Reprendre la question précédente en argumentant à partir de ces résultats.

Exercices d'entraînement

109 Un chocolatier décide de proposer une édition spéciale de ses barres chocolatées : 30 % d'entre elles contiennent un ticket doré donnant droit à une visite de sa chocolaterie.

1. Donner p, la probabilité qu'une barre chocolatée contienne un ticket doré.

2. On simule ci-dessous 50 échantillons de 400 barres chocolatées et on donne la fréquence de barres contenant des tickets dorés dans chaque échantillon.



Combien y a-t-il de tickets dorés dans l'échantillon 41 ?

3. Pour un échantillon de n barres chocolatées, on note f la fréquence de tickets dorés obtenus.
Déterminer la proportion des 50 échantillons de la question **2.** pour lesquels l'écart entre p et f est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

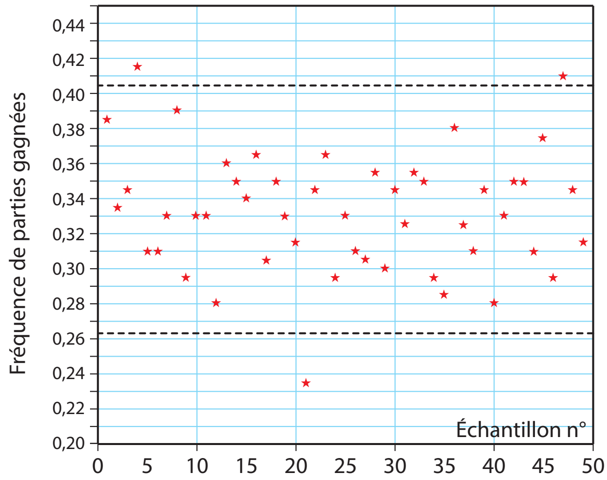
4. Charlie achète 400 barres chocolatées.

a) Sur son réseau social préféré, il a 88 amis. Au vu du graphique précédent, est-il presque sûr de pouvoir les amener avec lui à la chocolaterie ?

b) Même question s'il avait 140 amis sur ce réseau social.

110 On s'intéresse au jeu Pierre-Feuille-Ciseau.

1. On a simulé 50 échantillons de 200 parties de Pierre-Feuille-Ciseau selon que l'on gagne ou non, puis on a calculé les fréquences de parties gagnées pour chaque échantillon que l'on a représentées par des étoiles sur le graphique suivant.



a) Donner approximativement la fréquence de parties gagnées dans l'échantillon 20.

b) Donner une estimation de la probabilité de gagner à ce jeu. Expliquer.

2. Soumaya et Ssisi ont fait 200 parties de Pierre-Feuille-Ciseau et Ssisi en a gagné 88 : Soumaya l'accuse de tricher.

a) Quelle est la fréquence de parties gagnées par Ssisi ?

b) Sur les 50 échantillons simulés à la question **1.**, combien de fois obtient-on une fréquence au moins aussi grande ?

c) Que peut-on penser de l'accusation de Soumaya ?

3. a) On admet que la probabilité de gagner au jeu Pierre-Feuille-Ciseau est $p = \frac{1}{3}$. Normalement, on peut s'attendre à ce que l'écart entre p et f, la fréquence des parties gagnées dans un échantillon de 200 parties, soit inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{200}}$. Déterminer dans quel intervalle devrait normalement se trouver f.

b) Pour quel pourcentage des échantillons simulés est-ce le cas ?

Coup de pouce
Les pointillés délimitent l'intervalle trouvé à la question précédente sur l'axe des ordonnées.

Travailler autrement

111 A et B sont deux événements. Trouver une égalité qui relie les probabilités suivantes : $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $p(A \cap B)$.

À l'oral

112 Un code est constitué de trois lettres suivis de trois chiffres. Un code est tapé au hasard, quelle est la probabilité que ce soit le bon ?

À l'oral

113 Définir une loi de probabilité et des événements A et B telle que $P(\overline{A}) = 0{,}2$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ et $P(\overline{A \cap B}) = 0{,}25$.

À l'oral

114 Le jeu de yams se joue avec 5 dés. On essaie de faire des combinaisons diverses et on a le droit de relancer deux fois tout ou une partie des dés.
Lucas a obtenu au premier lancer trois 4, un 2 et un 5. Il voudrait faire un full (trois dés d'une valeur et deux dés d'une autre). Il hésite entre garder les trois 4 et le 5 et relancer le dé indiquant 2 ou garder les trois 4 et relancer les deux autres dés. L'aider à résoudre ce dilemme.

En groupe

115 Probabilités pour filtrer des messages

Un nouveau logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique. Les concepteurs l'ont testé pour 2 000 messages et voici leurs conclusions :
• 70 % des courriels sont des spams ;
• 95 % des spams sont éliminés ;
• 2 % des courriels bienvenus sont éliminés.

1. Compléter le tableau suivant.

	Spams	Courriels bienvenus	Total
Courriels éliminés			
Courriels conservés			
Total			2 000

On tire au sort un message parmi les 2 000 messages, et on considère les événements suivants :
• B : « Le courriel est un courriel bienvenu. »
• E : « Le courriel est éliminé. »

2. Calculer la probabilité des événements B et E.
3. Déterminer la probabilité que le courriel soit un spam.
4. Décrire à l'aide d'une phrase les événements $B \cap E$ et $E \cap \overline{B}$.
5. Calculer la probabilité des événements précédents.
6. Le logiciel échoue lorsqu'un courriel bienvenu est éliminé ou quand un spam est conservé. Quelle est la probabilité que le logiciel échoue ?

116 Tirage sans remise

Une urne contient trois boules, numérotées ②, ③ et ④. On tire une boule, puis, sans la remettre, on en tire une deuxième. Le résultat de l'expérience aléatoire est le nombre formé par les deux chiffres obtenus. Par exemple, si on tire un ④ puis un ②, le résultat de l'expérience est 42.

1. À l'aide d'un arbre, décrire toutes les issues de l'expérience aléatoire.
2. Quelle est la loi de probabilité ?
3. Déterminer la probabilité des événements suivants :
• A : « La première boule tirée est un nombre pair. »
• B : « La deuxième boule tirée est un nombre impair. »
• C : « Le produit des nombres obtenus est un nombre pair .»
4. Définir les événements $A \cap B$ et $A \cup B$ à l'aide d'une phrase, puis calculer leur probabilité.
5. Soit D l'événement : « Au moins un des chiffres tirés est un nombre impair. »
a) Définir l'événement $\overline{D}$ à l'aide d'une phrase.
b) Calculer $p(\overline{D})$.
c) En déduire $p(D)$.

117 Lancer de dé tétraédrique

Anna possède un dé tétraédrique (avec des faces numérotées de 1 à 4). Elle lance ce dé deux fois de suite.

1. Déterminer la probabilité que le dé ne tombe aucune fois sur 4 (on pourra s'aider d'un arbre judicieusement construit).
2. Déterminer la probabilité que le dé tombe au moins une fois sur 4.
3. Déterminer la probabilité que le dé tombe exactement une fois sur 4.

118 Boisson chaude

A. Dans une poche

Solal a des pièces de monnaie dans les deux poches de son jean. Il possède :
• dans sa poche gauche : une pièce de 5 centimes, une de 10 centimes, une de 20 centimes et une de 50 centimes ;
• dans sa poche droite : une pièce de 5 centimes, une de 10 centimes, une de 20 centimes et une de 1 euro.
Il prend dans chaque poche, au hasard, une pièce. Le résultat de l'expérience aléatoire est le montant des deux pièces. Par exemple, s'il tire une pièce de 5 centimes et une pièce de 1 euro, le résultat est 1,05 euro.

1. À l'aide d'un tableau à double entrée (ou d'un arbre), déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Un café coûte 35 centimes : quelle est la probabilité que Solal ait assez d'argent pour s'en acheter un avec les deux pièces sorties au hasard de ses poches ?

B. Dans un porte-monnaie

Florian a une autre stratégie. Il possède un porte-monnaie avec dedans une pièce de 10 centimes, une pièce de 20 centimes et une pièce de 50 centimes. Il décide de tirer au hasard deux pièces de son porte-monnaie.

1. Un café coûte toujours 35 centimes. À l'aide d'un tableau à double entrée, ou d'un arbre, déterminer la probabilité que Florian ait assez d'argent pour s'en acheter un avec les deux pièces sorties au hasard de son porte-monnaie.
2. Qui, de Solal ou de Florian, a le plus de chance de boire un café ?

119 Tirage avec remise

Une urne contient cinq boules numérotées de ① à ⑤. On tire une boule au hasard, on note son numéro puis on la remet dans l'urne. On tire alors à nouveau une boule au hasard et on note son numéro. On obtient alors un nombre entier à deux chiffres.

1. Compter le nombre d'issues.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir le même numéro lors des deux tirages successifs ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 3 ? Et celle d'obtenir un multiple de 9 ?

120 En phase d'apprentissage

Le petit Théo connaît les quatre lettres de son prénom sans se rappeler exactement leur ordre.

1. Il écrit les quatre lettres au hasard.
a) Combien Théo a-t-il de possibilités d'écriture ?
b) Quelle probabilité a-t-il d'écrire son prénom correctement ?
c) Quelle est la probabilité que le mot écrit commence par T ?
2. S'il sait que son prénom commence par T, quelle est la probabilité qu'il l'écrive correctement ?
3. Reprendre les mêmes questions avec Bob.

121 Résultats du bac

On considère un établissement scolaire de 2 000 élèves, regroupant des collégiens et des lycéens :
• 380 élèves sont en terminale ;
• parmi ces élèves de terminale, 55 % sont des filles ;
• le taux de réussite au baccalauréat dans cet établissement est de 85 % ;
• parmi les candidats ayant échoué, la proportion des filles est de $\frac{8}{19}$.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant regroupant les résultats au baccalauréat.

Élèves	Garçons	Filles	Total
Réussite			
Échec		24	
Total			380

Après la publication des résultats, on choisit au hasard un élève parmi l'ensemble des élèves de terminale. On considère les événements suivants :
• G : « L'élève est un garçon. »
• R : « L'élève a eu son baccalauréat. »
Dans la suite, on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis à 10^{-2} près.

1. Définir les événements suivants par une phrase.
a) $\overline{R}$ **b)** $\overline{G}\cap R$

2. Calculer les probabilités des événements suivants.
a) $\overline{R}$ **b)** $\overline{G}\cap R$ **c)** $\overline{G}\cup R$

3. On choisit un élève au hasard parmi les bacheliers. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

122 À l'urne

Une urne contient quatre jetons :
• deux jaunes ; • un rose ; • un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
• R : « Le premier jeton tiré est rose. »
• J : « Le deuxième jeton tiré est jaune. »
a) Déterminer $p(R)$ et $p(J)$.
b) Traduire par une phrase $R\cap J$, puis calculer $p(R\cap J)$.
c) Calculer $p(R\cup J)$.
4. On considère l'événement N : « Aucun jeton tiré n'est jaune. »
a) Calculer $p(N)$.
b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
c) Calculer $p(\overline{N})$.

123 Le mauvais lot ? Algo & Prog

Une marque de téléviseur a un taux de retour au service après-vente (SAV) de 7,3 %.

1. Expliquer comment simuler le fait qu'un téléviseur de cette marque passe par le SAV ou non.

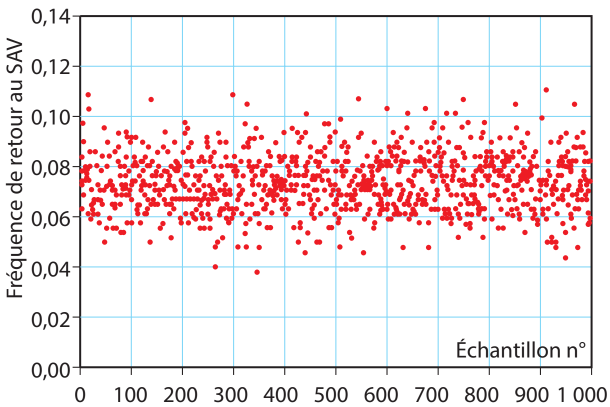
On pourra utiliser une fonction `Alea()` (en langage naturel) générant un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 ou la commande Python équivalente `random.random()`.

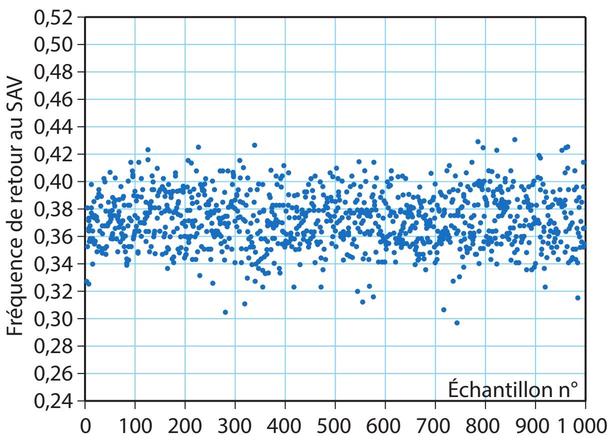
2. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle simule un échantillon de 524 téléviseurs de cette marque et renvoie la fréquence de ceux qui retournent au SAV.

```
def sav():
    effectif = ...
    for j in range(1,525):
        if random.random() <= ... :
            effectif = effectif + 1
    return effectif / ...
```

3. En lançant 1 000 fois cette fonction, on simule 1 000 échantillons de 524 téléviseurs.

a) Un des deux graphiques suivants donne les fréquences des téléviseurs passant par le SAV dans chacun des 1 000 échantillons, lequel ?





b) En utilisant le bon graphique, donner un encadrement de la fréquence attendue des téléviseurs passant par le SAV dans un échantillon de taille 524.

4. Une grande surface a vendu 524 téléviseurs de cette marque et a dû gérer 63 retours vers le SAV.

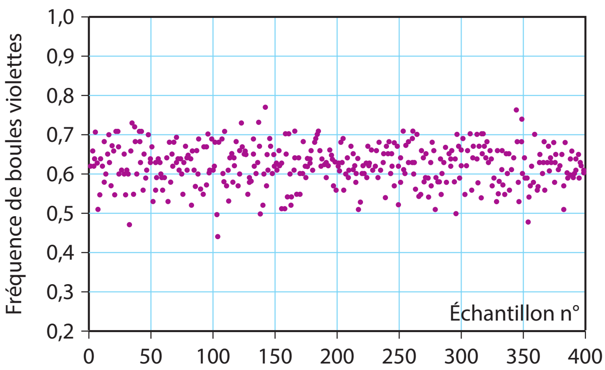
a) Expliquer pourquoi la directrice de cette grande surface pense que ce lot de 524 téléviseurs a un taux de retour anormalement élevé.

b) En aurait-il été de même si seulement 45 téléviseurs avaient dû repasser par le SAV ?

Exercices d'approfondissement

124 Trouver n

Une urne contient 8 boules, dont n violettes, les autres étant orange.
On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au sort une boule, noter sa couleur et la remettre dans l'urne.
On réalise 400 fois 100 tirages au sort, de sorte que l'on obtient 400 échantillons de taille 100.
Le graphique ci-dessous donne la fréquence de boules violettes obtenues dans chacun de ces échantillons.



Déterminer n.

125 Joyeux anniversaire !

Quelle est la probabilité d'être né un 29 février ?

126 Lancer de trois dés

On lance trois dés cubiques simultanément.
Quelles combinaisons ont la plus forte probabilité de sortie ?

a) un 1, un 2 et un 3 ? **b)** deux 1 et un 2 ?
c) un 2, un 3 et un 5 ? **d)** trois 4 ?

127 En trois dimensions

On lance trois dés cubiques simultanément, puis on calcule le produit des trois dés obtenus.
Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

128 Plusieurs jeux possibles

Une pièce de monnaie à deux faces, Pile et Face, est bien équilibrée, c'est-à-dire qu'à chaque lancer, chaque face a la même probabilité d'apparition.
Modéliser chacune des expériences suivantes par une loi de probabilité.

1. On effectue un seul lancer de la pièce et on note le résultat obtenu.

2. On effectue deux lancers de la pièce et on note, dans l'ordre d'apparition, les deux faces obtenues.

3. On effectue deux lancers de la pièce et on note le résultat sans tenir compte de l'ordre d'apparition des deux faces obtenues.

129 De la logique jusqu'au bout des doigts

On choisit au hasard un doigt d'une des deux mains. On considère les événements suivants :

- I : « Le doigt est un index. »
- G : « Le doigt est sur la main gauche. »

Calculer les probabilités des événements suivants.

a) I **b)** G **c)** $\overline{I}$
d) $I \cup G$ **e)** $I \cap G$ **f)** $\overline{I \cup G}$
g) $\overline{I \cap G}$ **h)** $\overline{I} \cap \overline{G}$ **i)** $\overline{I} \cup \overline{G}$

130 À la piscine

Le mercredi à la piscine municipale, 42 % des entrées vendues l'ont été au « tarif moins de 12 ans », 37 % au « tarif étudiant » et les autres « plein tarif ». On rencontre au hasard une personne sortant de la piscine.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 12 ans ?

2. Quelle est la probabilité que la personne ait payé « plein tarif » ?

Vers la 1re

Orientation

131 STMG

On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. On note X le nombre de Pile obtenus à l'issue des trois lancers.

1. Construire un arbre pour modéliser la situation.

2. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

3. Proposer une loi de probabilité pour X.

132 Spécialité Maths

Le tableau suivant indique le nombre de personnes pratiquant chaque sport dans un club sportif, en fonction du sexe des adhérents.

	Football	Baseball	Rugby
Femmes	50	35	115
Hommes	70	87	123

1. On choisit au hasard un adhérent dans le club. Déterminer la probabilité que ce soit un homme.

2. On choisit au hasard une personnes pratiquant le football dans le club. Déterminer la probabilité que ce soit un homme.

3. Un entraîneur cherche une personne qui pratique le football. Il choisit une personne au hasard et remarque que c'est une femme. Devrait-il changer son choix ?

Travaux pratiques

Algo & Prog

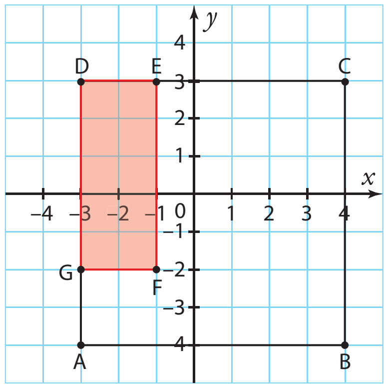
Modéliser, raisonner

45 min

1 Algorithme de Monte-Carlo

A ▸ Un point au hasard dans un rectangle

Dans un repère orthonormé, on considère le carré ABCD ci-contre.
Soit E(–1 ; 3), F(–1 ; –2) et G(–3 ; –2).



1. Soit M(x ; y) un point du plan.

a) À quelles conditions, portant sur x et y, M est-il situé à l'intérieur du carré ABCD ?

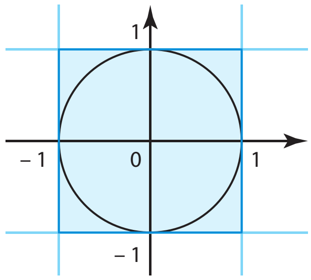
b) À quelles conditions, portant sur x et y, M est-il situé à l'intérieur du rectangle AFED ?

2. On place au hasard un point à l'intérieur du carré ABCD. Quelle est la probabilité qu'il soit situé également à l'intérieur du rectangle DEGF ?

3. Compléter le programme suivant pour qu'il simule tirage au sort d'un point dans le carré ABCD et qu'il indique en sortie s'il appartient ou non au rectangle DEGF.

```
import random
x=random.uniform(-3,4)
y=random.uniform(...,...)
if x<-1 and ... :
    print("...")
else:
    print("...")
```

B ▸ Une estimation



1. Dans un repère orthonormé, on considère un disque de centre O et de rayon 1, et un carré de centre O et de côté 2 comme sur le graphique ci-contre.

a) Déterminer l'aire du disque et l'aire du carré.

b) Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées d'un point M pour qu'il soit à l'intérieur du carré ?

c) Quelles conditions doivent vérifier les coordonnées de M pour que OM $\leqslant$ 1 ? Dans ce cas, que peut-on en déduire pour M ?

2. L'algorithme de Monte-Carlo calcule une valeur approchée de π en créant un grand nombre de points aléatoires dans le carré, et en observant combien se trouvent dans le disque. Le rapport du nombre de points dans le disque sur le nombre total de points devrait être proche du rapport de l'aire du disque sur l'aire du carré et doit permettre de calculer π.

a) Déterminer la probabilité qu'un point choisi au hasard dans le carré tombe à l'intérieur du cercle.

b) Compléter l'algorithme ci-dessous.

```
import random
n=int(input("n="))
eff_interieur_disque =0
for i in range(0,n):
    x=random.uniform(-1,1)
    y=random.uniform(-1,1)
    if ... :
        eff_interieur_disque =eff_interieur_disque +1
Pi=...
print(Pi)
```

c) Implémenter ce programme sur un ordinateur ou sur une calculatrice.
Le tester pour n = 1000 ; n = 10 000 ; n = 100 000.

d) Trouve-t-on toujours la même valeur approchée pour π ?

Algo & Prog

Modéliser, calculer, raisonner

40 min

2 Le chevalier de Méré

A ▸ Avec quatre dés

Le problème dit du « chevalier de Méré » opposa ce dernier à Fermat et à Pascal.
Il consiste en le fait de savoir si l'affirmation suivante est vraie ou non :
« Si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il y a plus de chances qu'on obtienne un 6 plutôt qu'on n'en obtienne pas. »

1. Intuitivement, que penser de cette affirmation ?

2. a) On considère le programme Python ci-dessous (ne pas l'écrire ni l'exécuter pour le moment).

```
import random

nb_essais = int(input("Nombre d'essais ? "))
effectif_6 = 0
for i in range(1,nb_essais+1):
    de1 = random.randint(1,6)
    de2 = random.randint(1,6)
    de3 = random.randint(1,6)
    de4 = random.randint(1,6)
    if de1 == 6 or de2 == 6 or de3 == 6 or de4 == 6:
        effectif_6 = effectif_6+1
    frequence_6 = effectif_6/i
    print(frequence_6)
```

Compléter les deux dernières lignes du tableau suivant correspondant à une exécution de ce programme pour un nombre d'essais égal à 10.

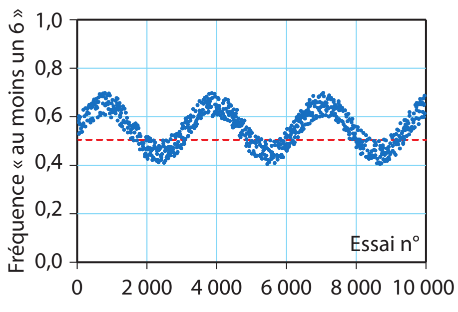
i	×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
de1	×	5	2	4	3	3	6	1	4	2	1
de2	×	1	1	3	6	3	5	2	1	2	1
de3	×	2	6	2	1	2	1	4	4	2	1
de4	×	1	2	6	6	5	3	4	6	4	6
effectif_6	0	0	1								
frequence_6	×	0	1/2								

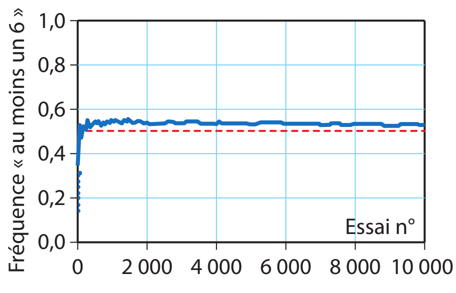
b) Dans un repère, tracer le nuage de 10 points de coordonnées (i ; fréquence_6) obtenus dans le tableau précédent.

3. Écrire et exécuter le programme (le sauvegarder sous le nom mere1.py) en choisissant 20 comme nombre d'essais.

4. Recommencer avec 100, puis 1 000, puis 10 000.

5. Un de ces deux nuages de points a été obtenu en traçant un graphique similaire à celui de la question **2. b)** pour 10 000 essais, lequel ? Expliquer pourquoi.





6. Répondre au problème du chevalier de Méré (on pourra effectuer d'autres simulations).

B ▸ Avec trois dés

On cherche à répondre au problème suivant : quand on lance trois dés équilibrés à six faces, quelle est la probabilité que la somme des résultats soit 12 ?

1. Sauvegarder le programme précédent sous le nom mere2.py et le modifier pour qu'il simule des répétitions du lancer de 3 dés et affiche après chaque répétition la fréquence de l'événement « la somme des résultats des 3 dés est 12 ».

2. Estimer la probabilité que la somme de 3 dés soit 12.

Travaux pratiques

Algo & Prog

Modéliser, représenter, calculer

45 min

3 Surréservation

Lors d'un vol Madrid-Barcelone pouvant accueillir 360 passagers, une compagnie aérienne s'aperçoit que seulement 85 % des personnes ayant acheté un billet se présentent effectivement à l'embarquement.
Elle décide alors, qu'à l'avenir, elle vendra plus de billets qu'il n'y a de places dans l'avion.
Dans tout le TP, on désigne par le mot *passager* une personne ayant acheté son billet et se présentant effectivement à l'embarquement.

1. On considère la fonction Python ci-contre (ne pas se préoccuper de la ligne **`import matplotlib.pyplot as plt`** pour l'instant).
La compléter afin qu'elle renvoie la fréquence de passagers dans un échantillon simulé de n personnes ayant acheté un billet.
Écrire ensuite cette fonction sur un ordinateur.

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt

def freq_echantillon(n):
    nb_passager = 0
    for j in range(1,...):
        if random.random() <= ...:
```

2. a) En dessous de la fonction précédente, revenir à la ligne sans indentation et écrire le programme ci-contre (sans l'exécuter pour l'instant), où la commande **`plt.plot([i],[f],'r.')`** permet de placer le point de coordonnées $(i\,;f)$ (en rouge) dans un repère et **`plt.show()`** permet d'afficher le graphique final (la ligne **`import matplotlib.pyplot as plt`** en début de programme permet d'utiliser ces deux fonctions).

```
for i in range(1,201):
    f=freq_echantillon(400)
    plt.plot([i],[f],'r.')

plt.show()
```

b) Recopier et compléter.
Ce programme simule **...** échantillons de **...** personnes ayant acheté un billet pour ce vol selon que ce sont des passagers ou non, puis affiche le nuage de points de coordonnées $(i\,;f_i)$ où i est le numéro de **...** et f_i la **...** de passagers dans l'échantillon.

c) Commencer à tracer un tel graphique pour les 10 premiers échantillons en admettant que les 10 premiers résultats simulés sont ceux correspondant aux effectifs donnés dans le tableau ci-dessous.

Échantillon numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de passagers	344	336	350	334	341	349	332	323	345	339

d) Exécuter le programme. Entre quelles valeurs les fréquences de passagers semblent-elles se trouver la plupart du temps ?

e) Étant donné la capacité d'un avion, quelle est la fréquence maximale de passagers dans un échantillon de 400 personnes ayant acheté un billet afin que tous les passagers puissent embarquer ?

f) En déduire la proportion des 200 échantillons simulés à la question **2. d)** pour lesquels des passagers seront refusés.

3. Une propriété mathématique dit que : « La plupart du temps, l'écart entre la probabilité p d'un événement et la fréquence f de cet événement dans un échantillon de taille n est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. »

a) Quelle est la probabilité p qu'une personne ayant acheté un billet soit réellement un passager ?

b) Calculer $\frac{1}{\sqrt{400}}$.

c) D'après la propriété énoncée en début de question **3.**, dans quel intervalle doit se trouver, la plupart du temps, la fréquence de passagers parmi 400 personnes ayant acheté un billet pour un vol ?

d) À partir du graphique généré par Python à la question **2. d)**, déterminer pour quelle proportion des échantillons l'écart entre p et la fréquence des passagers est inférieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{400}}$.

TICE — Modéliser, calculer — 30 min

4 Une marche aléatoire sur une pente glissante

Léa se trouve sur une large planche inclinée de longueur 100 m et de largeur 20 m, au point L.
À chaque étape, elle se déplace d'un mètre vers le haut, et de manière équiprobable d'un mètre à droite ou à gauche. On s'intéresse au fait de savoir si elle a une chance d'atteindre le bout opposé du rectangle sans tomber en dehors de la planche.

1. Combien de déplacements seront nécessaires pour atteindre l'autre bout ?

2. On va tenter de répondre à la question à l'aide du tableur.

a) Réaliser la feuille de calcul suivante.

	A	B	C
1	Numéro du déplacement	Déplacement latéral	Déplacement latéral cumulé
2			
3			
4			

b) Compléter la colonne A jusqu'à atteindre 100 déplacements.
c) Entrer dans la cellule B2 la formule = IF(RAND()<0,5;1;–1). Cette formule permet de tirer au hasard un nombre entre –1 et 1.
d) Recopier cette formule vers le bas.
e) Dans la cellule C2, entrer la formule =B2.
f) Entrer dans la cellule C3 une formule qui va permettre d'obtenir les déplacements cumulés de Léa.
g) Relancer 20 fois l'expérience, en notant à chaque fois si Léa a pu ou non atteindre l'autre bord sans tomber.
h) Conclure.

TICE — Modéliser, communiquer — 35 min

5 L'affaire Partida

En novembre 1976, dans le comté de Hidalgo (Texas), Rodrigo Partida fut condamné à huit ans de prison. Il attaqua ce jugement, affirmant que la désignation des jurés de ce comté était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine : 79,1 % de la population du comté était d'origine mexicaine mais, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés les 11 années précédentes, seules 339 d'entre elles étaient d'origine mexicaine.

1. Sur cette période, quand une personne est tirée au sort au hasard dans la population de ce comté, quelle est la probabilité qu'elle soit d'origine mexicaine ?

2. On procède à une simulation de la désignation de 870 jurés tirés au hasard dans la population de ce comté.
a) Saisir en A1 la formule =SI(ALEA()<=0,791;1;0) puis recopier cette formule vers le bas jusqu'à A870, et saisir en A871 la formule =SOMME(A1:A870).
b) Pourquoi le nombre en A871 correspond-il au nombre de jurés d'origine mexicaine parmi les 870 jurés simulés ?
c) Pouvait-on s'attendre à obtenir en A871 une valeur proche de celle effectivement obtenue ? Expliquer pourquoi.

3. On procède à une simulation de 100 séries de désignation de 870 jurés.
a) Sélectionner la plage A1:A871 puis la recopier vers la droite (à partir de la cellule A871) jusqu'à la cellule CV871.
b) Écrire en A873 la formule =MIN(A871:CV871), puis interpréter le résultat affiché et le mettre en lien avec le nombre minimal de jurés d'origine mexicaine dans ce comté entre 1965 et 976.
d) Relancer la simulation avec F9 afin de l'avoir effectuée 20 fois et noter le nombre minimal de jurés d'origine mexicaine obtenu sur ces 20 simulations de 100 séries de 870 jurés.
e) Obtient-on un nombre de jurés d'origine mexicaine relativement proche de celui de l'affaire Partida ? Que peut-on en penser ?

En autonomie

1 Utiliser une loi de probabilité et modéliser

QCM

133 Lequel de ces tableaux définit une loi de probabilité ?

a

Issue	f	G	h
Probabilité	0,25	$\frac{2}{5}$	0,55

b

Issue	Noir	Jaune	Rouge
Probabilité	0,1	$\frac{5}{3}$	0,005

c

Issue	Oui	Non	Peut-être
Probabilité	$0,5-\sqrt{2}$	0,4	$0,1+\sqrt{2}$

d

Issue	Pile	Face	Tranche
Probabilité	0,5	0,5	0,5

134 ✶ Une urne contient 15 boules. On compte autant de boules rouges que de boules vertes, alors qu'il n'y a que trois boules bleues.
On tire au sort une boule de l'urne et on regarde la couleur obtenue.
Proposer une loi de probabilité permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

135 ✶ Arthur a relevé avec soin l'espèce des oiseaux qui sont venus se nourrir des graines déposées dans son jardin.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

	Mésange	Merle	Rouge-gorge	Non identifié
Nombre de passages	24	57	13	26

À nouveau, un oiseau vient se nourrir de graines.
Proposer une loi de probabilité permettant de modéliser l'espèce de cet oiseau.

136 ✶ Un jeu permet de gagner ou de perdre de l'argent. On considère l'expérience aléatoire correspondant au nombre d'euros gagnés à l'issue de ce jeu.

Issue	-5	-3	-2	10
Probabilité	0,5	0,15	0,3	?

1. Compléter le tableau avec la probabilité manquante.
2. Quelle est la probabilité de perdre de l'argent en jouant à ce jeu ?

137 ✶✶ Meriem dispose d'une pièce qui tombe deux fois plus souvent sur Face que sur Pile.
Déterminer la loi de probabilité de l'expérience associée au lancer de cette pièce.

2 Calculer une probabilité

QCM

138 On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité que la carte soit un cœur est de :

a $\frac{1}{32}$ b $\frac{4}{32}$

c $\frac{8}{32}$ d $\frac{16}{32}$

139 ✶ On observe la trotteuse d'une horloge à aiguilles qui affiche les chiffres de 1 à 12.
La probabilité qu'elle soit à un instant donné sur un entier est de :

a $\frac{1}{5}$ b $\frac{1}{12}$

c $\frac{1}{60}$ d $\frac{12}{60}$

140 ✶ On lance deux dés cubiques simultanément. Quelle est la probabilité d'avoir deux faces identiques ?

141 ✶ Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire une première boule puis une deuxième (sans avoir remis la première dans l'urne), puis on considère le nombre formé par les deux chiffres tirés dans l'ordre. Déterminer la probabilité que ce nombre soit un multiple de 7.

142 ✶✶ Au self de la cantine, un menu est constitué d'une entrée, un plat, un fromage ou un dessert.
Il y a deux entrées possibles, trois plats possibles, deux desserts possibles et trois fromages possibles.
Déterminer le nombre de menus différents.

143 ✶✶ On lance deux dés cubiques équilibrés. A-t-on plus de chance d'obtenir un nombre premier en faisant la somme ou le produit des résultats obtenus ?

3 Travailler avec réunion, intersection et contrarie

QCM

144 Un concessionnaire propose deux options sur les voitures qu'il vend : la peinture métallisée (M) et l'autoradio bluetooth (B).
On choisit une voiture au hasard.
L'événement M∪B peut s'énoncer ainsi :

a La voiture a les deux options.
b La voiture a au moins une option.
c La voiture a l'option M ou l'option B.
d La voiture a l'option M et l'option B.

145 ✶ On donne $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cap B) = 0{,}3$.
1. Déterminer $p(A \cup B)$.
2. En déduire $p(\overline{A \cup B})$.

146 ✶ On donne $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}2$ et $p(A \cup B) = 0{,}5$. Déterminer $p(\overline{A} \cup \overline{B})$.

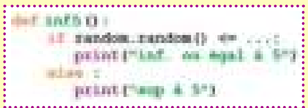
147 ✶✶ On s'intéresse au contrôle technique des véhicules de marques A et B.
En 2013, sur 571 870 véhicules contrôlés, 266 430 sont de marque A et 305 440 de marque B.
Pour 8 % des véhicules de marque A et 6 % des véhicules de marque B, le contrôle technique est non conforme.
On choisit un de ces véhicules au hasard et on note :
- A l'événement : « Le véhicule est de la marque A. »
- C l'événement : « Le contrôle technique est conforme. »

1. Déterminer $p(A)$.
2. **a)** Décrire par une phrase l'événement $C \cap A$.
b) Calculer la probabilité $p(C \cap A)$.
3. Justifier que $p(C)$ est égale à 0,93, à 10^{-2} près.

4 Comprendre les notions de simulation et fluctuation

QCM Algo & Prog

Pour les exercices 148 et 149, on considère la fonction Python simulant le tirage au sort d'un dé équilibré à 8 faces, numérotées de 1 à 8, suivant que le résultat est inférieur ou égal à 5 ou non.



148 Que faut-il écrire à la place des pointillés pour que la fonction soit correcte ?

a 5 b 5/8 c 8/5 d 8

149 La deuxième ligne peut être remplacée par :

a `if random.randint(1,8) <= 5:`
b `if random.randint(1,8) > 5:`
c `if random.randint(1,5) <= 8:`
d `if random.randint(1,5) > 8:`

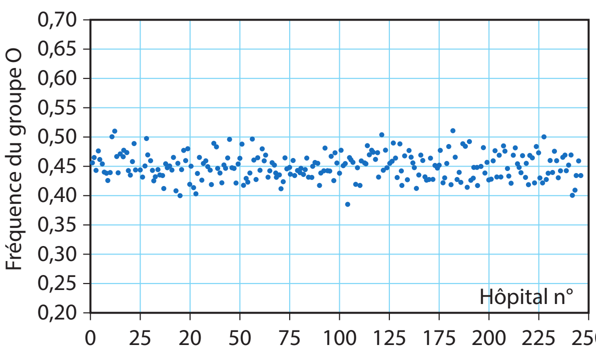
150 ✶ Dans la population mondiale, on compte 12 % de gauchers. Algo & Prog

1. Compléter l'algorithme afin qu'il simule un échantillon de 200 personnes tirées au sort dans la population mondiale suivant qu'elles soient gauchères ou non et affiche le nombre de gauchers dans l'échantillon.

```
eff_gaucher ← 0
Pour i allant de 1 à ...
    Si alea() ⩽ ...
        eff_gaucher ← ...
    Fin si
Fin pour
Afficher eff_gaucher
```

2. Le modifier pour qu'il affiche la fréquence et non le nombre de gauchers dans l'échantillon.

151 ✶✶ Pour des raisons de santé publique, on souhaite évaluer la proportion p de la population qui est du groupe sanguin O dans un pays.
Pour cela, les hôpitaux de ce pays sont invités à donner la fréquence du groupe O sur leur 500 premières prises de sang de l'année 2019.
Les fréquences sont données ci-dessous.



1. En déduire une valeur possible de p.
2. Un hôpital envoie ses résultat en retard et, sur ses 500 prises de sang, 324 correspondent au groupe O. Expliquer pourquoi on peut penser qu'il y a une erreur dans l'échantillon issu de cet hôpital.

Dicomaths

Lexique

A

Abscisse p. 119
Première coordonnée.

Affectation p. 18

Al-Kashi p. 130
(1380-1429) Mathématicien et astronome perse. On donne son nom au théorème de Pythagore généralisé.

Al Khwarizmi (780-850) p. 40
Mathématicien, géographe, astronome perse. Il est l'auteur de nombreux ouvrages en langue arabe, introduisant l'algèbre, classant les algorithmes et décrivant le système de numération décimale. C'est grâce à la diffusion de ses livres, traduits en latin, que l'Algèbre a été introduite en Europe.

Aléatoire ↪ Expérience p. 316

Algèbre p. 94
Science des équations, du calcul littéral.

Algorithme p. 18
Suite d'instructions finies à exécuter.

Allure (d'une courbe) p. 226
Schéma ou phrases décrivant simplement la courbe représentative d'une fonction.

Amplitude (d'un intervalle) p. 81
Écart entre les deux bornes.

Antécédent p. 192

Archimède de Syracuse (287-212 av. J.-C.) p. 40
Physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (Grande Grèce). Il étudia particulièrement la géométrie la numération et la notion d'infini. Il a déterminé un encadrement de π en utilisant des polygones inscrits et exinscrits.

Arithmétique p. 55
Étude des propriétés de l'ensemble des nombres rationnels.

B

Base dans un triangle
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Base du plan p. 140
Couple de vecteurs non colinéaires du plan.

Base d'un solide
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Base orthonormée p. 140

Bénéfice p. 257
Différence entre la recette et les coûts.

Bernoulli (Jean) (1667-1748) p. 186
Mathématicien et physicien suisse, petit frère de Jacques. Un des premiers à étudier le calcul infinitésimal. Il donne une première définition de la notion de fonction d'une grandeur variable.

Bernoulli (Jacques) (1654-1705) p. 267
Mathématicien et physicien suisse, grand frère de Jean. Dans son œuvre la plus originale, il définit la notion de probabilité et introduit les notations encore utilisées au XXI^e siècle. Ses neveux Nicolas et Daniel poursuivent par la suite son œuvre.

Boucle bornée, boucle non bornée p. 20

Brahmagupta (598-670) p. 40
Mathématicien et astronome indien. Il définit le zéro et les règles des signes sur les entiers relatifs. Il utilise l'algèbre pour résoudre des problèmes astronomiques.

C

Carré
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Carré parfait p. 46

Cercle circonscrit p. 131
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 356

Certain (événement) p. 317

Chaîne p. 18

Coefficient directeur p. 167

Coefficient multiplicateur p. 273

Colinéarité p. 142

Combinaison p. 169

Consignes (vocabulaire des)

Associer Unir des éléments dans lesquels on voit des points communs.

Balayer Observer des tableaux de valeurs successifs en réduisant au fur et à mesure le pas pour avoir un encadrement de plus en plus précis de la valeur cherchée.

Calculer Fournir une valeur numérique à l'aide des règles de calculs.

Chercher Tester plusieurs possibilités à partir des informations données dans l'énoncé, essayer de faire le lien avec des propriétés connues, utiliser la calculatrice ou un logiciel.

Communiquer Expliquer un raisonnement à l'écrit ou à l'oral, expliquer une démarche même si celle-ci n'aboutit pas à l'aide de phrases, de formule, de schémas…

Comparer Comparer deux nombres signifie déterminer s'ils sont égaux ou lequel est plus grand que l'autre.

Conjecturer Émettre une supposition à partir d'observations.

Démontrer À partir des éléments connus, effectuer un raisonnement ou un calcul pour obtenir le résultat ou la propriété cherchée.

Développer Écrire un produit sous forme d'une somme équivalente.

Encadrer Encadrer un nombre c'est donner un couple de valeurs (a ; b) entre lesquelles on est sûr que ce nombre se trouve. On écrit une double inégalité : $a \leqslant x \leqslant b$.

Expliquer Rendre compréhensible un raisonnement, une idée.

Interpréter Faire une phrase situant le résultat obtenu dans le contexte (souvent concret) de l'exercice.

Modéliser Décrire une situation concrète en utilisant les connaissances mathématiques, par exemple : écrire une équation ou une fonction permettant d'étudier la situation proposée.

Représenter Fournir une information sous forme graphique : figures codées en géométrie, courbe d'une fonction, arbre ou schéma en probabilité,…

Résoudre Trouver toutes les solutions possibles.

Optimiser Résoudre un problème consistant à trouver le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.

Raisonner ↪ **Démontrer**

Simplifier (une fraction) Opération qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles

Concourantes (droites) p. 130

Droites qui ont un point d'intersection commun.

Cône

↪ Formulaire de géométrie p. 359

Contraire (évènement) p. 318

Coordonnées p. 119

Dans un repère du plan, ce sont les 2 nombres qui permettent de définir la position d'un point par rapport à l'origine du repère.

Cosinus

↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 357

Courbe représentative d'une fonction p. 193

Coût p. 257

Somme dépensée pour créer un produit.

Critère de divisibilité p. 43

Particularité d'un entier permettant de déterminer si un nombre est divisible par un autre.

Croissante (fonction) p. 220

Cube

↪ Formulaire de géométrie p. 359

Cylindre

↪ Formulaire de géométrie p. 359

D

D'Alembert (Jean Le Rond) (1717-1783) p. 186

Mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Il utilise les fonctions de plusieurs variables, ainsi que les calculs différentiel et intégral, pour modéliser des phénomènes physiques.

Décroissante (fonction) p. 220

Delambre (Jean-Baptiste) (1749-1822) p. 112

Astronome et mathématicien français. Durant 7 années, il effectue une expédition avec Pierre Méchain pour mesurer la longueur du méridien de Paris entre Dunkerque et Barcelone à l'origine du mètre universel.

Demande p. 257
Quantité de biens et de services que les agents économiques sont disposés à acheter sur un marché

Dénominateur p. 46
Dans une fraction, le dénominateur est le nombre en dessous de la barre de fraction, c'est lui qui permet de nommer la fraction.

Descartes(René) (1596-1650) p. 112
Mathématicien, physicien et philosophe français. Il est à l'origine de la géométrie analytique, dans celle-ci, les objets sont représentés par des équations ou des inéquations à l'aide d'un repère du plan dans lequel les objets ont des coordonnées.

Déterminant p. 142

Dichotomie p. 192-195
La méthode de dichotomie est un algorithme de recherche qui consiste à répéter les partages d'un intervalle en deux parties égales puis à sélectionner le sous intervalle contenant la solution cherchée.

Diophante d'Alexandrie (IIᵉ ou IIIᵉ s. ap. J.-C.) p. 40
Mathématicien grec qui a vécu à Alexandrie. Son ouvrage le plus important *Arithmétique* porte en partie sur l'étude des équations dont les solutions sont cherchées parmi les nombres entiers, voire rationnels.

Direction (d'un vecteur) p. 138

Dispersion p. 292

Disque
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Distance p. 119
Plus petite mesure entre 2 éléments de géométrie.

Distance (entre deux nombres) p. 74

Distributivité p. 140

Diviseur p. 44

Division euclidienne p. 46
Division entière avec quotient et reste.

Droite des réels p. 47

E

Écart interquartile p. 293

Écart-type p. 292

Échantillon p. 321

Écriture décimale p. 43
Écriture d'un nombre à l'aide de la virgule permettant de distinguer la partie entière de la partie décimale.

Écriture scientifique p. 43
C'est une façon de représenter les nombres décimaux qui consiste à écrire le nombre sous la forme $\pm a \times 10^n$ où a est un nombre décimal de l'intervalle [1 ; 10[et n un entier relatif.

Effectif (d'une valeur) p. 290
Dans une série statistique, c'est le nombre de fois où la valeur apparaît.

Effectif total p. 290
Nombre de valeurs dans la série statistique.

Ensemble
Collection d'objets.

Ensemble de définition p. 192

Ensemble solution p. 73

Entier p. 47

Équation p. 95
Égalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues).

Équation cartésienne p. 166

Équation réduite p. 167

Équidistant p. 356
Qui est à égale distance de.

Équiprobabilité p. 317

Ératosthène (vers IIIᵉ siècle av J-C) p. 10
Astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec. Il est connu pour avoir calculé la mesure de la circonférence de la Terre. En mathématiques, il a établi une méthode pour établir la liste des nombres premiers : le crible.

Estimation p. 319

Euclide (vers -300 av. J.-C.) p. 10
Mathématicien de la Grèce Antique, auteur d'un célèbre ouvrage en 13 volumes : *Les Eléments*, qui est le premier à formaliser les connaissances de géométrie de l'époque. Ce livre sert de base à la géométrie euclidienne depuis 2000 ans.
C'est également l'auteur d'un algorithme servant à déterminer le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels. Son nom est donné à la division entière avec quotient et reste.

Euler(Leonhard) (1707-1783) p. 186
Mathématicien et physicien suisse. Il introduit une grande partie des notations des mathématiques modernes. Il classifie les fonctions et distingue les notions de fonctions continues et discontinues.

Événement p.317

Évolution p. 272

Évolution réciproque, évolutions successives p. 273

Expérience aléatoire p. 316

Exposant p. 45

Extremum p. 222
Maximum ou minimum.

F

Factoriser p. 94
Écrire une somme sous forme d'un produit équivalent.

Fermat (Pierre de) (1607-1665) p. 40
Magistrat, poète et mathématicien français. Il appliqua l'algèbre à la géométrie et est l'auteur de plusieurs théorèmes ou conjecture en théorie des nombres. La plus connue fut démontrée 300 ans plus tard par Andrew Wiles.

Fibonacci (Leonardo) (1175-1250) p. 34
Mathématicien Italien qui a étudié les travaux d'algèbre d'Al-Khwarizmi, les chiffres arabes et la notation algébrique puis les a introduit en Occident. Il est aujourd'hui connu pour la suite qui porte son nom, tirée d'un problème d'un de ses livres Liber abaci publié en 1202, qui décrit la croissance d'une population de lapins.

Flottant p. 18

Fluctuation p. 319

Fonction p. 192

Fonction (algorithme) p. 21

Fonction affine, fonction cube, fonction racine carrée p. 196

Fonctions de référence, fonction carrée,fonction inverse p. 195

Fraction irréductible p. 46

Fréquence p. 290

H

Hauteur p. 118

Hauteur (dans un triangle) p. 118

Homothétie
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 358

Huygens (Christian) (1629-1695) p. 266
Mathématicien, physicien et astronome néerlandais. Après avoir entendu parler de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat, il publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard.

Hyperbole p. 195

I

Identités remarquables p. 94
Égalités qui s'appliquent à des nombres et qui servent en général à accélérer les calculs, à simplifier certaines écritures, à factoriser ou à développer des expressions.

Image (d'une transformation) p. 138

Image (fonction) p. 192

Impair p. 46

Impaire (fonction) p. 194

Inégalité p. 73
Énoncé permettant de comparer l'ordre de deux expressions.

Inéquation p. 73

Instruction conditionnelle p. 19

Intersection p. 72

Intersection (d'évènement) p. 318

Intervalle p. 72

Irrationnel p. 47
Nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'un rationnel.

Isométrique
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 355

K

Kolmogorov (Andreï) (1903-1987) p. 266
Mathématicien russe qui a développé la formalisation de la théorie des probabilités.

L

Leibniz (Gottfried Wilhelm) (1646-1716) p. 186
Philosophe, mathématicien et diplomate allemand. Il introduit le terme de fonction et invente le calcul infinitésimal.

Loi de probabilité p. 316

Lovelace (Ada) (1815-1852) p. 10
de son nom complet Augusta Ada King, comtesse de Lovelace Pionnière anglaise de la science informatique. Elle a réalisé le premier programme informatique et a compris les possibilités offertes par les calculateurs universels. Elle est également connue comme étant la fille du poète anglais Lord Byron.

M

Mandelbrot (Benoît) (1924-2010) p. 112
Mathématicien franco-américain. Il est le découvreur des fractales (objets mathématiques dont la structure est invariante par changement d'échelle) et il a étudié la modélisation statistique des finances.

Maximum p. 222

Méchain (Pierre François André) (1744-1804) p. 112
Astronome français qui effectua avec Jean-Baptiste Delambre une expédition pour mesurer la longueur du méridien de Paris entre Dunkerque et Barcelone à l'origine du mètre universel.

Médiane p. 293

Médiatrice p. 131
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 354

Milieu
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 354

Monotone (fonction) p. 220

Moyenne, moyenne pondérée p. 290

Multiple p. 46

N

Nature (d'un polygone) p. 120
Nom qui englobe toutes les caractéristiques d'un polygone.

Naturel (entier) p. 47

Nightingale (Florence) (1820-1910) p. 266
Infirmière britannique, c'est une pionnière de l'utilisation des statistiques dans le domaine de la santé. Elle présente ses résultats sur les causes saisonnières de mortalité sous forme visuelle (diagrammes circulaires, histogrammes).

Nombre d'or p. 60
Nombre irrationnel, unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Il vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nombre impair, nombre pair, nombre premier p. 46

Nombre réel p. 47

Norme (d'un vecteur) p. 138

Notation scientifique p. 41
↪ Écriture scientifique

Numérateur p. 46
Dans une fraction, le numérateur est le nombre au-dessus de la barre de fraction, il sert à dénombrer le nombre de parts.

O

Offre p. 257
Quantité de biens et de services que les agents économiques sont disposés à vendre sur le marché.

Ordonnée p. 119
Deuxième coordonnée.

Ordonnée (à l'origine) p. 167

Orthogonal ↪ Projeté ↪ Repère p. 118

P

Pair p. 46

Paire (fonction) p. 194

Parabole p. 195

Parallélépipède rectangle
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Parallélogramme
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Paramètre
Symbole désignant une grandeur donnée qui peut prendre des valeurs différentes.

Parfait p. 46

Parité (d'une fonction) p. 194

Pascal (Blaise) (1623-1662) p. 266
Mathématicien physicien, inventeur et théologien français. Il conçoit et fabrique une machine arithmétique, la Pascaline. Il entretient une correspondance avec Pierre de Fermat avec lequel il développe un nouveau champ de recherche en mathématiques : les calculs de probabilités.

Pavé droit
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Pente ↪ Coefficient directeur p. 167

Périmètre
Le périmètre d'une figure plane est la longueur du contour de cette figure.

Position relative (de courbes) p. 247
Déterminer sur quel(s) intervalle(s) une courbe est au dessus de l'autre.

Possible p. 317

Pourcentage p. 272
Proportion exprimée à l'aide d'une fraction de dénominateur 100, on note alors le numérateur suivi du signe %.

Prisme droit
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Probabilité p. 316

Projeté orthogonal p. 118

Proportion p. 272

Puissance d'un nombre p. 45

Pyramide
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Pythagore (de Samos) (569-475 av. J.-C.) p. 357
Astronome, philosophe et mathématicien Grec. Disciple de Thalès, il ne laisse aucun écrit mais est connu par ses disciples et successeurs. On lui attribue l'origine du mot "mathématiques" : celui qui veut apprendre. Il fait progresser l'étude des nombres. Le théorème qui porte son nom était connu bien avant lui sur des cas particulier, il le généralise à tout triangle rectangle.

Q

Quartile p. 293

Quotient p. 44

R

Racine carrée p. 46

Rationnel p. 49

Recette p. 257
Somme d'argent encaissée.

Rectangle
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Rectangle d'or p. 60
Rectangle dont le rapport de la longueur par la largeur est égale au nombre d'or.

Réel p. 47

Relatif (entier) p. 47

Repère du plan, repère orthogonal, repère orthonormé p. 119

Réunion p. 72

Riemann (Georg Friedrich Bernhard) (1826-1866) p. 112
Mathématicien allemand. Il crée une géométrie non euclidienne, la géométrie différentielle qui ouvrira par la suite la voie à la théorie de la relativité générale.

Rotation
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 358

S

Sens d'un vecteur p. 138

Signe d'une fonction p. 244

Simulation p. 319

Sinus
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 357

Sphère
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Srinivasa (Ramanujan) (1887-1920) p. 131
Mathématicien indien autodidacte qui, à sa mort à l'âge de 32 ans, laisse derrière lui des cahiers contenant une quantité impressionnante de résultats non démontrés qui continuent à être étudiés à l'heure actuel.

Substitution p. 169

Symétrie axiale, symétrie centrale
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 358

Système (de deux équations) p. 169

T

Tableau de signes p. 244

Tableau de valeurs p. 192

Tableau de variation p. 220

Tangente
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 357

Taux d'accroissement (d'une fonction affine)
Quotient de la différence des images par la différence des antécédents.

Thalès (de Milet) (624-548 av. J-C) p. 356
Commerçant, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien Grec. Il n'a laissé aucun écrit derrière lui mais on lui attribue de nombreuses propriétés géométriques. Il a utilisé le théorème qui porte son nom pour calculer la hauteur de la grande pyramide de Khéops.

Translation
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 358

Trapèze
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Triangle équilatéral
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Triangle isocèle
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Triangle rectangle
↪ Formulaire de géométrie p. 359

Trigonométrie
↪ Définitions et propriétés de géométrie p. 357

Turing (Alan Mathison) (1912-1954) p. 10
Mathématicien et informaticien anglais, considéré comme l'« inventeur » de l'ordinateur. Durant la Seconde Guerre mondiale, il joue un rôle majeur dans le décryptage de code de la machine Enigma utilisée par les armées allemandes.

Type de variable p. 18

U

Union (d'évènement) p. 318

Univers p. 316

V

Valeur absolue p. 74

Valeur numérique
Valeur de l'expression dans laquelle on a remplacé chacune des variables par des nombres.

Variable (algorithme) p. 18
Symbole qui associe un nom à une valeur. Le nom est unique mais la valeur peut changer.

Variable (fonction) p. 192
Terme d'une fonction dont la valeur est indéterminée mais qui doit appartenir à l'ensemble de définition de la fonction.

Variation absolue p. 272

Variation relative p. 272

Variations p. 220

Vecteur p. 138

Viète (François) (1540-1603) p. 40
Déchiffreurs de deux rois et mathématicien français. Il est le premier à introduire des lettres et des symboles en algèbre, ce qui marquera le début de l'algèbre contemporaine.

Définitions et propriétés de géométrie

Milieu et médiatrice

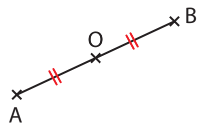
Définition 1

Le milieu d'un segment est le point de ce segment équidistant de ses extrémités.

Exemple

Ici, $O \in [AB]$ et $OA = OB = \dfrac{AB}{2}$.

Donc O est le milieu de [AB].



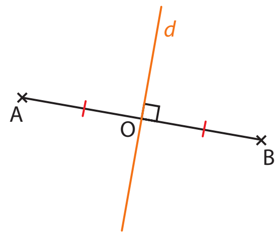
Définition 2

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

Exemple

Ici, d est la médiatrice de [AB], elle coupe [AB] en O.

Donc O est le milieu de [AB] et $d \perp (AB)$.



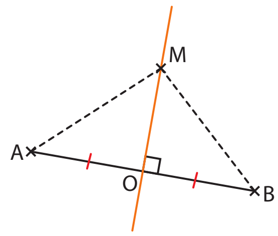
Propriété 3

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Exemple

Ici, M appartient à la médiatrice de [AB].

Donc $MA = MB$.



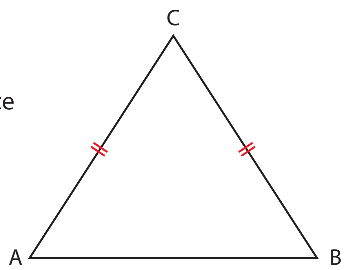
Propriété 4

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

Exemple

Ici, $AC = CB$.

Donc C appartient à la médiatrice de [AB].



Triangles

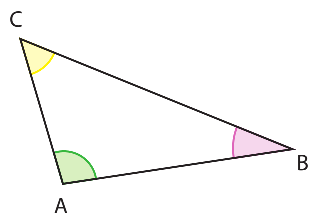
Propriété 5

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

Exemple

Ici, ABC est un triangle.

Donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.



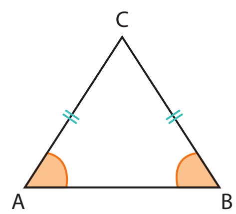
Définition 6

Un triangle isocèle possède deux côtés de même longueur et ses angles à la base ont la même mesure.

Exemple

Ici, ABC est isocèle en C.

Donc $\hat{A} = \hat{B}$.



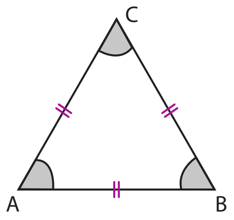
Définition 7

Un triangle équilatéral possède trois côtés de même longueur et tous ses angles mesurent 60˚.

Exemple

Ici, ABC est équilatéral.

Donc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.

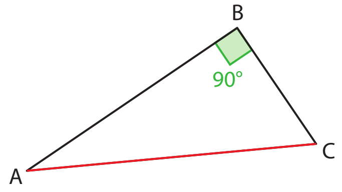


Propriété 8

Un triangle rectangle possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.

Exemple

Ici $\widehat{B} = 90°$ donc le triangle est rectangle en B, son hypoténuse est [AC].

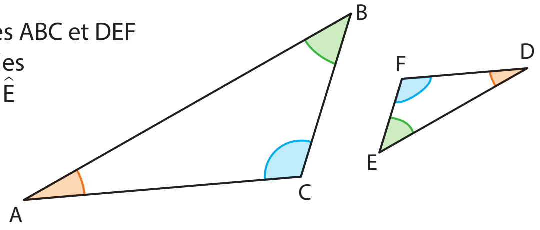


Définition 9

Deux triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Exemple

Ici, les triangles ABC et DEF sont semblables car $\widehat{A} = \widehat{D}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ et $\widehat{C} = \widehat{F}$.

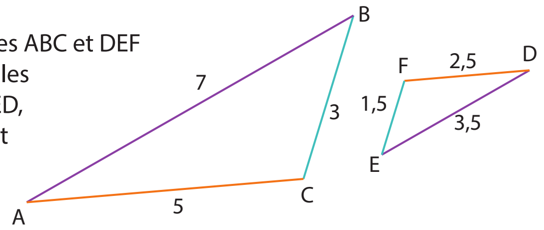


Propriété 10

Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs côtés respectifs sont proportionnels.

Exemple

Ici, les triangles ABC et DEF sont semblables car $AB = 2 \times ED$, $AC = 2 \times FD$ et $BC = 2 \times ED$.

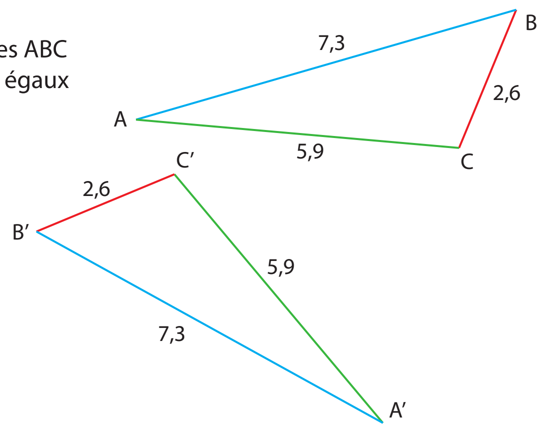


Propriété 11

Deux triangles sont égaux ou isométriques lorsque leurs côtés sont de même longueur.

Exemple

Ici, les triangles ABC et A′B′C′ sont égaux car $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.



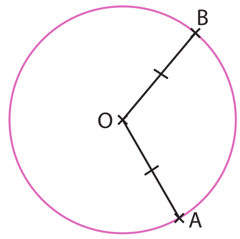
Cercles

Propriété 12

Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.

Exemple

Ici, A et B appartiennent à un cercle de centre O.
Donc OA = OB.

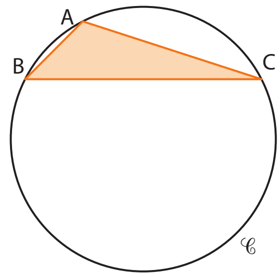


Propriété 13

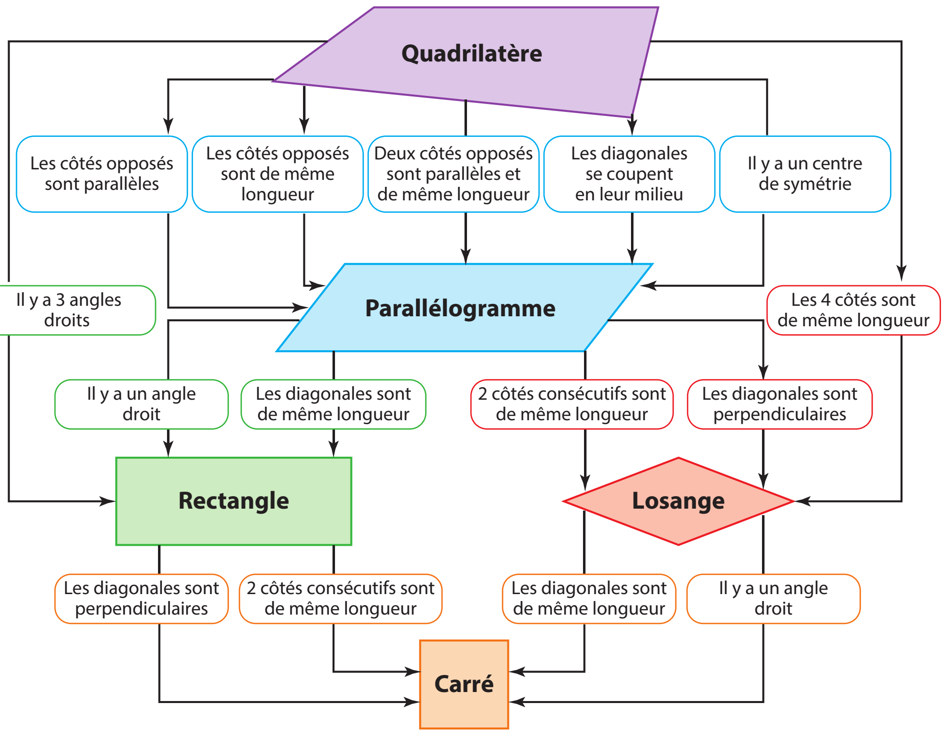
Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les 3 sommets de ce triangle.

Exemple

Ici, le cercle $\mathscr{C}$ est circonscrit au triangle ABC.



Quadrilatère



Thalès

Propriété 14

Théorème de Thalès

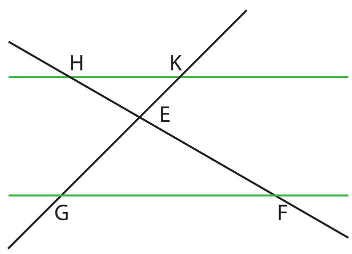
Si M ∈ (AB), N ∈ (BC) et (BC)//(MN) alors

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

Exemple

Ici, H ∈ (EF), K ∈ (EG) et (HK)//(GF).

Donc d'après le théorème de Thalès : $\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{GF}{HK}$



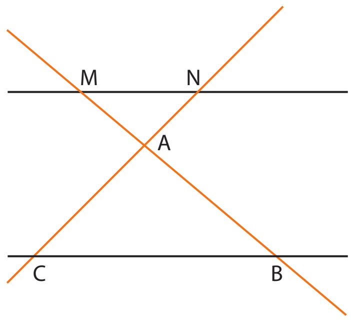
Propriété 15

Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple

Ici, les points M, A, B d'une part et les points N, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.



De plus, $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

et $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès (MN)//(BC).

Pythagore

Propriété 16

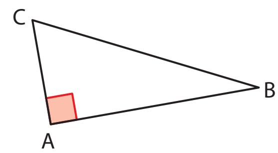
Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple

Ici, ABC est rectangle en A.

Donc, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.



Propriété 17

Réciproque du théorème de Pythagore

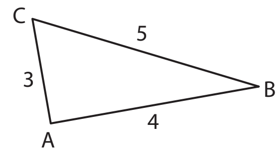
Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et il a ce côté pour hypoténuse.

Exemple

Dans le triangle ABC, $BC^2 = 5^2 = 25$

$BA^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

Donc $BC^2 = BA^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Trigonométrie

Définition 18

Dans un triangle rectangle :

Cosinus d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

Sinus d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

Tangente d'un angle aigu = $\frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

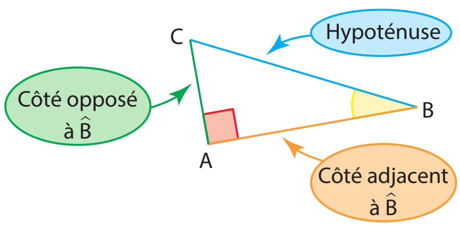
Exemple

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4, AC = 3 et BC = 5.

$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$

$\sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$

$\tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} = 0,75$



Transformations

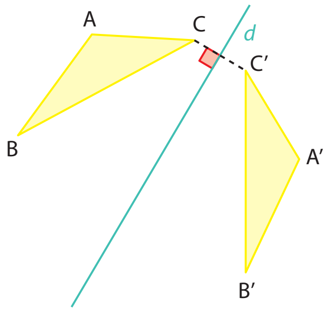
Définition 19

Symétrie axiale

Transformation qui consiste à modéliser un pliage le long d'une droite.

Exemple

Le triangle A'B'C' est le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite *d*.



Propriété 20

Si deux points sont symétriques par rapport à une droite alors cette droite est la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces deux points.

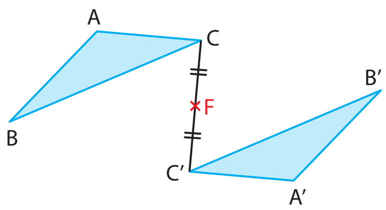
Sur la figure précédente, C et C' sont symétriques par rapport à la droite *d*, donc *d* est la médiatrice de [CC'].

Définition 21

Symétrie centrale

Transformation qui consiste à effectuer un demi-tour autour d'un point fixe.

Le triangle A'B'C' est le symétrique du triangle ABC par rapport au point F.



Propriété 22

Si deux points sont symétriques par rapport à un point alors ce point est le milieu du segment ayant pour extrémités ces deux points.

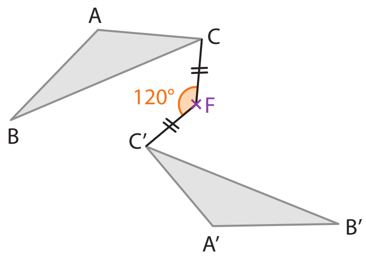
Sur la figure précédente, C et C' sont symétriques par rapport au point F donc F est le milieu de [CC'].

Définition 23

Rotation

Transformation qui consiste à effectuer un mouvement circulaire autour d'un point fixe O selon un sens et un angle donné.

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la rotation de centre F d'angle 120° dans le sens des aiguilles d'une montre.



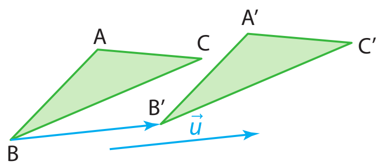
Définition 24

Translation

Transformation qui consiste à effectuer un mouvement rectiligne selon un vecteur donné.

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$.

On a par exemple, $\overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.



Définition 25

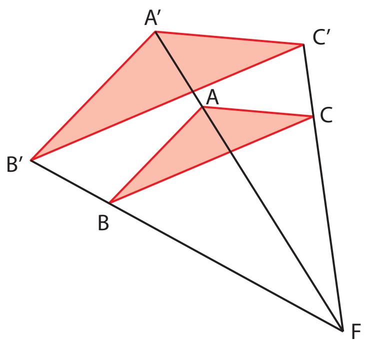
Homothétie

Transformation géométrique qui consiste à effectuer un agrandissement ou une réduction de rapport donné à partir d'un point fixe.

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{3}{2}$.

On a par exemple,

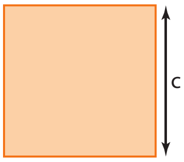
$F'C' = \frac{3}{2}FC$ et $A'C' = \frac{3}{2}AC$.



Formulaire de géométrie

Aires et périmètres

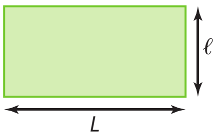
Carré



$\mathcal{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

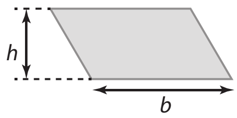
Rectangle



$\mathcal{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

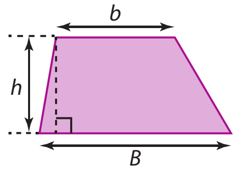
Parallélogramme



$\mathcal{A} = b \times h$

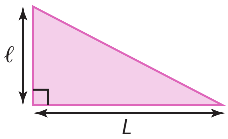
$p = 2 \times (L + \ell)$

Trapèze



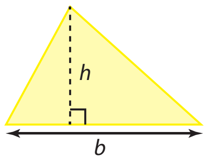
$\mathcal{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

Triangle rectangle



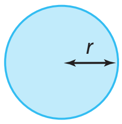
$\mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

Triangle quelconque



$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

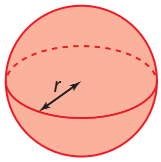
Disque



$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

$p = 2\,\pi\,r$

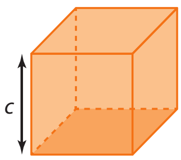
Sphère



$\mathcal{A} = 4\pi \times r^2$

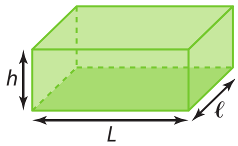
Volumes

Cube



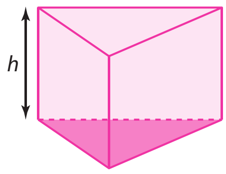
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = c^3$

Parallélépipède rectangle ou pavé



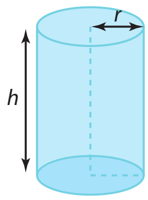
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = L \times \ell \times h$

Prisme droit



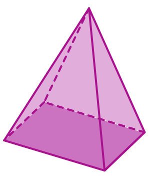
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$

Cylindre



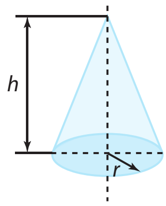
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi \times r^2 \times h$

Pyramide



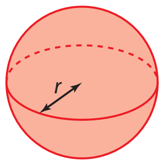
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times h}{3}$

Cône de révolution



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times h}{3} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$

Sphère



$\mathcal{V} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

Logique et raisonnement

1 ET et OU en mathématiques

Définition **Et**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 ET une proposition 2 sont vérifiées, cela veut dire qu'elles sont vérifiées à la fois. Ce "ET" mathématique est très lié au symbole $\cap$.

↪ Logique et raisonnement 5 p. 364

Exemple — Algo & Prog

① On cherche le nombre n tel que n soit un entier pair ET appartienne à l'intervalle [3,5 ; 5,9].
Il s'agit de trouver un nombre n (s'ils existe(nt)) qui vérifie les deux conditions à la fois c'est-à-dire qui est un entier pair ET qui appartient à [3,5 ; 5,9].
Le seul nombre vérifiant ces deux conditions est 4 donc $n = 4$.

② On considère le programme **PYTHON** :

```python
import random
x = random.randint(1,10)
if x > 3 and x <= 7.3:
  print("Dans l'intervalle !")
else:
  print("Pas dans l'intervalle...")
```

Le programme affiche **"`Dans l'intervalle!`"** si le nombre x vérifie à la fois **x > 3 ET x ≤ 7,3** c'est-à-dire si **3 < x ≤ 7,3**.

Définition **Ou**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 OU une proposition 2 est vérifiée, cela veut dire qu'au moins l'une des deux est vérifiée. Ce "OU" mathématique est très lié au symbole $\cup$.

↪ Logique et raisonnement 5 p. 364

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Quelles sont les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 ?
Les nombres entiers entre 1 et 6 qui vérifient la proposition :

- "être pair" sont 2 ; 4 ; 6 ;
- "être strictement supérieur à 2" sont 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 sont donc 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 qui sont tous les entiers entre 1 et 6 qui vérifient au moins l'une des deux conditions (éventuellement les deux pour 4 et 6).

Remarques

- Dans le langage courant, le OU est **exclusif**. Par exemple, quand sur un menu au restaurant il est écrit "fromage ou dessert" cela veut dire que l'on peut prendre soit du fromage, soit un dessert mais pas les deux.
- Dans le langage mathématique, le OU est **inclusif**. Dans l'exemple précédent du dé à 6 faces, les nombres 4 et 6 vérifient les deux conditions à la fois cela veut dire que si on les obtient, le résultat est bien pair OU strictement supérieur à 2.

Exemple — Algo & Prog

L'algorithme suivant illustre l'exemple précédent du dé à 6 faces.

```
x ← Entier aléatoire entre 1 et 6
Si x est pair ou x>2
   Afficher "Pair ou strictement supérieur à 2"
Fin si
```

Il affiche "**`Pair ou strictement supérieur à 2`**" si le l'entier aléatoire **x** a pour valeur 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

2 Implication, contraposée, réciproque et équivalence

Définition Implication

Une implication est une proposition de la forme : SI énoncé 1 ALORS énoncé 2
Symboliquement, cela se note : énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2
Cela veut dire que si l'énoncé 1 est vérifié alors l'énoncé 2 l'est forcément (ou nécessairement) également.
On dit que l'énoncé 1 est une condition suffisante et que l'énoncé 2 est une condition nécessaire.

Exemple

1 La proposition suivante est VRAIE : SI la prise est débranchée ALORS la lampe est éteinte.
On peut la traduire par : la prise est débranchée $\Rightarrow$ la lampe est éteinte (se lit également "la prise est débranchée entraîne la lampe est éteinte").

2 En revanche, la proposition suivante est FAUSSE : SI la lampe est éteinte ALORS la prise est débranchée.
En effet, si la lampe est éteinte, la prise peut être branchée mais l'interrupteur sur OFF.

Définition Contraposée

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, est vraie alors sa contraposée :

contraire de l'énoncé 2 $\Rightarrow$ contraire de l'énoncé 1

est également vraie.

Exemple

La proposition suivante est vraie : SI je viens de manger ALORS je n'ai pas faim.
Sa contraposée : SI j'ai faim (le contraire de "je n'ai pas faim") ALORS je ne viens pas de manger (le contraire de "je viens de manger") est également vraie.

Définition Réciproque

Si l'on considère une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, on dit que :

énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 est sa réciproque.

Cette réciproque peut être vraie ou non.

Exemple

La proposition suivante est VRAIE : SI $x = 3$ ALORS $x^2 = 9$.
En revanche, sa réciproque : SI $x^2 = 9$ ALORS $x = 3$ est FAUSSE.
En effet, si $x^2 = 9$, x peut être égal à 3 ou à -3.

Définition Équivalence

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 et sa réciproque énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 sont vraies, on dit que les énoncés 1 et 2 sont équivalents.
À l'aide d'un symbole mathématique, cela se note :

énoncé 1 $\Leftrightarrow$ énoncé 2.

Exemple

Dans un triangle ABC : le triangle ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$
En effet, on sait d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque que :
- le triangle ABC est rectangle en A $\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow$ le triangle ABC est rectangle en A.

Remarques On pourra également écrire "le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$" (ou "$AB^2 + AC^2 = BC^2$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A").

Définition **Sens de l'implication**

Lorsqu'on doit écrire une démonstration et que l'on utilise un théorème, il faut veiller à utiliser la bonne implication.

Exemple

Considérons l'énoncé suivant puis la démonstration d'un élève :

Énoncé On considère un triangle ABC avec AB = 3, AC = 5 et BC = 4.
Montrer que ABC est rectangle en B.
Démonstration de l'élève
On a $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $AC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ or **on sait que si ABC est rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$ d'après le théorème de Pythagore** donc ABC est rectangle en *B*.

Commentaires Le raisonnement de cet élève est incorrect. En effet, le théorème cité en gras, que l'on peut écrire symboliquement **ABC est rectangle en B$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$**, a pour conclusion "$AB^2 + BC^2 = AC^2$" et non "le triangle est rectangle" comme nous en aurions besoin ici : il y a donc un problème de logique.
Le théorème a utiliser est **$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow$ ABC est rectangle en B**, qui a bien pour conclusion "le triangle est rectangle en B" comme nous le souhaitons dans cet exercice.
Raisonnement correct
On a $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $AC^2 = 5^2 = 25$ donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$ or **on sait que si $AB^2 + BC^2 = AC^2$ alors** ABC **est rectangle en** B **d'après la réciproque du théorème de Pythagore** donc ABC est rectangle en B.

3 Quantificateurs universels

Définition **Il existe**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'il existe un réel x (ou un entier n etc.) qui vérifie une certaine propriété, il s'agit simplement de trouver un exemple pour lequel la propriété est vérifiée.

Exemple

Montrons qu'il existe un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$.
On constate que, pour $x = 1$, on a $2x^2 - 2 = 2 \times 1^2 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc il existe bien un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$, en l'occurrence 1.

Remarques Si on ne voit pas $x = 1$ directement, on peut aussi résoudre l'équation $2x^2 - 2 = 0$ avec les méthodes classiques pour le retrouver : $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
Notons que la résolution de $2x^2 - 2 = 0$ fait plus que montrer qu'il existe une valeur de x pour laquelle $2x^2 - 2 = 0$, elle prouve que 1 et –1 sont les deux seules.

Définition **Pour tout/Quel que soit**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'une propriété est vraie "pour tout réel x" ou "quel que soit le réel x", il faut montrer qu'elle est vraie en tout généralité et non pas uniquement sur quelques exemples.

Exemple

Montrons que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est impaire.
On peut commencer, au brouillon par se convaincre que c'est vrai en calculant $1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$, $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$, $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$, etc.
Ceci dit, nous n'avons rien démontré pour l'instant, puisqu'il faut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers (c'est implicite dans l'énoncé).
Soit donc n un entier (en toute généralité) et $n + 1$ celui qui le suit, il s'agit de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.
On calcule donc $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui est impair quel que soit n (puisque $2n$ est un multiple de 2, donc pair, $2n + 1$ est impair).
On vient de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair pour tout entier n (ou quel que soit l'entier n) donc la différence des carrés de deux entiers consécutifs est bien impaire.

4 Type de raisonnement

Règle Utilisation de la contraposée

Lorsque l'on connaît une propriété, on peut utiliser sa contraposée (qui est également vraie) dans une démonstration.

Exemple

On considère un triangle ABC avec AB = 4, AC = 3 et BC = 2. On souhaite savoir si ce triangle est rectangle (il ne peut être éventuellement rectangle qu'en C car le plus grand côté, l'hypoténuse éventuelle, est [AB]).
On calcule alors $AC^2 + BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$ et $AB^2 = 4^2 = 16$.
On constate que $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ autrement dit que dans ABC, la somme des carrés des deux plus petits côtés est différente du carré du plus grand côté donc ABC n'est pas rectangle.

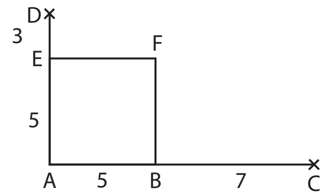
Remarques Le théorème de Pythagore dit que si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des deux plus petits côtés est égale au carré du grand côté.
On a donc bien utilisé sa contraposée ici : si la somme des carrés des deux plus petits côtés est différente du carré du grand côté alors ce triangle n'est pas rectangle, à ne pas confondre avec sa réciproque (dont la conclusion est "le triangle est rectangle").

Règle Raisonnement par l'absurde

L'utilisation de la contraposée est assez proche d'un autre type de raisonnement, le raisonnement par l'absurde.
Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut montrer puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).
On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte donc que la propriété voulue est vraie.

Exemple

Sur la figure ci-contre, où ABFE est un carré dont chaque côté a pour longueur 5, E ∈ [AD] avec DE = 3 et B ∈ [AC] avec BC = 7, montrons que les points D, F et C ne sont pas alignés. Supposons que les points D, F et C soient alignés.
Dans ce cas :



- D, F et C sont alignés ;
- A, B et C sont alignés ;
- (DA) // (FB) (puisque (AE) et (DE) sont confondues et que ABFE est un carré).

On peut donc appliquer le théorème de Thalès, qui affirme que $\frac{FB}{DA} = \frac{BC}{AC}$.

Ici, on a $\frac{FB}{DA} = \frac{5}{8}$ et $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{12}$ donc $\frac{FB}{DA} \neq \frac{BC}{AC}$, ce qui constitue une contradiction.

L'hypothèse de départ (D, F et C C sont alignés) est donc fausse, autrement dit, D, F et C ne sont pas alignés.

Règle **Contre-exemple**

Pour infirmer une proposition (c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse), il suffit d'en donner un contre-exemple.

Exemple

Considérons la proposition suivante : Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers.
Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de trouver un nombre entier impair supérieur à 2 qui ne soit pas premier. C'est le cas de 9 (par exemple), qui est divisible par 3.
La proposition est donc fausse.

Remarques On dit que l'on a nié la proposition "tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers".

Règle **Raisonnement par disjonction des cas**

Lorsque qu'on démontre une propriété, il peut arriver que l'on doive traiter différents cas.
Dans ce cas, on peut procéder par disjonction des cas en faisant attention à bien traiter tous les cas possibles.

Exemple

Annie a souscrit un forfait téléphonique qui s'ajuste automatiquement à son nombre d'heures :
- si elle téléphone moins de 3 heures, elle sera facturée 6 euros au total quel que soit le nombre d'heures ;
- si elle téléphone entre 3 heures et 5 heures, elle sera facturée 2 euros l'heure de communication ;
- si elle téléphone plus de 5 heures, elle sera facturée 10 euros au total, quel que soit le nombre d'heures.

On souhaite montrer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.
Pour cela, on appelle x son nombre d'heures de communication et on va traiter les trois cas suivants :
- si $x < 3$ alors elle paie 6 euros ;
- si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $6 \leqslant 2x \leqslant 10$ or $2x$ est le montant de sa facture qui est donc inférieur ou égal à 10 ;
- si $x > 5$ alors elle paie 10 euros.

On voit que dans les 3 cas possibles, le montant de la facture est inférieur ou égal à 10 donc on peut affirmer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

5 Notations

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre *a* (inclus) et *b* (inclus) est appelé intervalle et se note [*a* ; *b*]

Voir le tableau donné dans le cours p.72

Définition **Ensembles discrets**

Lorsqu'un ensemble de nombres est constitué de valeurs isolées (on dit alors que c'est un ensemble discret), on le note en écrivant tous ses éléments entre accolades, séparés par un point-virgule.

Exemple

L'ensemble des nombres impairs compris entre 0 et 12 est {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11}.

Notations Il ne faut pas confondre les accolades, les crochets et les parenthèses :
- {2 ; 5} désigne l'ensemble constitué des deux éléments 2 et 5 ;
- [2 ; 5] désigne l'intervalle constitué de tous les nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus dans ce cas) ;
- (2 ; 5) désigne un couple dont la première coordonnée est 2 et la deuxième est 5.

Définition Appartenance et inclusion

- Le symbole $\in$ (resp. $\notin$) désigne le fait qu'un élément **appartienne** (resp. **n'appartienne pas**) à un ensemble.
- Le symbole $\subset$ (resp. $\not\subset$) désigne le fait qu'un ensemble soit **inclus** (resp. **non inclus**) dans un autre ensemble.

Exemple

1. $5 \in \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car 5 est bien un élément de l'ensemble $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$.
2. $2{,}3 \notin]5 ; 7[$ car le nombre 2,3 n'est pas strictement compris entre 5 et 7.
3. $[4 ; 5] \subset [0 ; 12]$ car l'ensemble $[4 ; 5]$ est inclus dans l'ensemble $[0 ; 12]$, c'est-à-dire que tous les nombres de $[4 ; 5]$ sont également dans $[0 ; 12]$;
4. $\{1 ; 2 ; 3\} \not\subset \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car $\{1 ; 2 ; 3\}$ n'est pas inclus dans $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ c'est-à-dire qu'au moins un élément de $\{1 ; 2 ; 3\}$, en l'occurrence 1, n'est pas dans $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$.

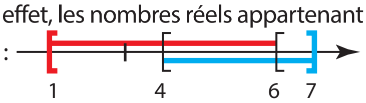
Définition Intersection et réunion

Soit A et B deux ensembles.

- **$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B c'est-à-dire aux deux ensembles à la fois.**
- **$A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B c'est-à-dire à au moins l'un des deux ensembles.**

Exemple

1. $[4 ; 7] \cap [1 ; 6[= [4 ; 6[$ En effet, les nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles $[4 ; 7]$ et $[1 ; 6[$ sont les réels de l'intervalle $[4 ; 6[$:



2. $\{1 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9\} \cup \{2 ; 3 ; 9 ; 11\} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 11\}$ car ce sont tous les nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles (attention : on n'écrit qu'une seule fois les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, ici 3 et 9).

Règle Complémentaire

Soit A un ensemble (inclus dans un ensemble B).
Le complémentaire de A (dans B), noté $\overline{A}$ est l'ensemble des valeurs (de B) qui n'appartiennent pas à A

Exemple

Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{[5 ; 6[} =]-\infty ; 5[\cup [6 ; +\infty[$ c'est à dire tous les réels sauf ceux qui appartiennent à $[5 ; 6[$.

Remarques
La notation du complémentaire est la même que celle de l'événement contraire en probabilités.
Cela est normal puisque dans ce contexte, $\overline{A}$ l'événement contraire de A, est le complémentaire de A dans l'univers.

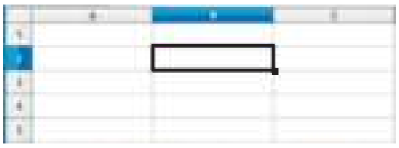
Fiche 1 Tableur

Dans cette fiche, les méthodes ne spécifiant pas le logiciel utilisé sont similaires pour les différents types de tableurs (LibreOffice/OpenOffice/Excel). Dans ce cas, les captures d'écrans seront issues du logiciel LibreOffice.

1 Adresse, cellule et plage

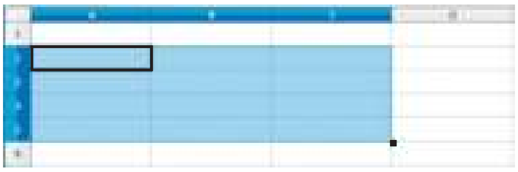
Une feuille de calcul est un tableau dont chacune des cases, appelées cellules, est repérée :
• horizontalement par un nombre entier strictement positif,
• verticalement par une lettre,
Ce qui permet de donner l'adresse de la cellule.

• Ci-dessous, la cellule sélectionnée est la cellule B2 :



On peut également (en maintenant le clic droit appuyé) sélectionner une **plage**, c'est-à-dire plusieurs cellules.

• Ici, on a sélectionné la plage A2 : C5 :



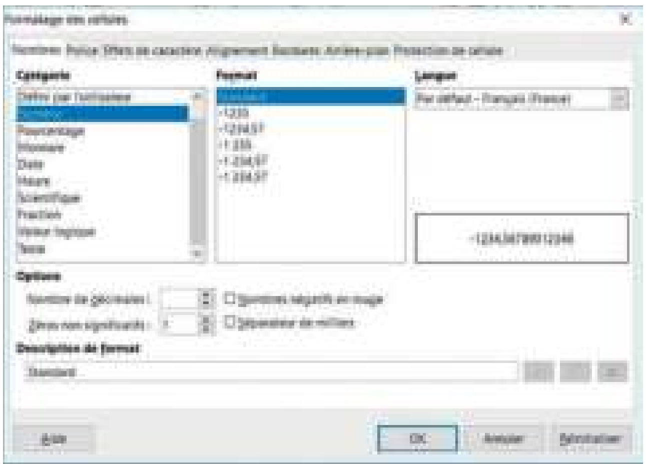
• Là, on a sélectionné la plage A2 ; C4 :

Remarque Attention, A2 ; C4 désigne la plage constituée des cellules A2 et C4 et non pas toutes les cellules de A2 à C4 qui s'écrit A2 : C4.

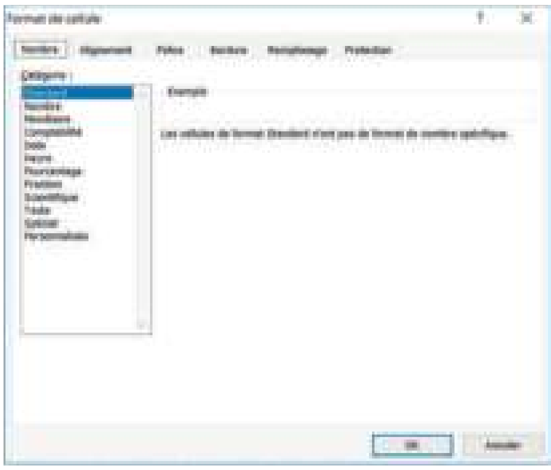
2 Format de la cellule

• Lorsqu'on fait un clic droit sur une cellule ou une plage de cellules, on peut changer son **format** en choisissant `Formater les cellules` (dans LibreOffice et OpenOffice) ou `Format de cellule` (dans Excel). On obtient le menu suivant.

Dans LibreOffice ou OpenOffice



Dans Excel



Remarque

- La catégorie **`Nombre`** permet d'afficher les nombres sous leur forme décimale (ces nombres).

On peut notamment y régler le nombre de chiffres affichés après la virgule dans **`Nombre de décimales`**.

- La catégorie **`Pourcentage`** convertit automatiquement les formes décimales en pourcentage. Par exemple, si l'on saisit 0,1 le tableur affiche 10 %.

On peut également y régler le nombre de chiffres affichés après la virgule.

- La catégorie **`Texte`** permet de saisir du texte.

3 Calcul avec le tableur

Dans une cellule, on peut écrire un calcul précédé du signe = en utilisant les commandes usuelles +, –,*, /ou ^. Le tableur écrira alors le résultat du calcul dans la cellule.

Exemple

Si l'on écrit **`=5+3^2`** dans la cellule A1 et que l'on valide avec la touche **`Entrée`**, le tableur écrira **`14`** dans A1.

Remarque Attention, dans le tableur, un calcul commence toujours par le symbole =.

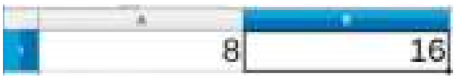
4 Formule et adressage

Dans une feuille de calcul, on peut faire des calculs en faisant référence à une cellule donnée.

Exemple

Si l'on saisit une valeur dans la cellule A1 et que l'on veut afficher son double dans la cellule B1, on sélectionne B1, on y écrit la formule **`=A1*2`** et on valide avec la touche **`Entrée`** :

donne



Remarque Attention, dans le tableur, une formule commence toujours par le symbole =.

L'avantage d'écrire la formule **`=A1*2`** et non pas **`=8*2`** dans la cellule B1 est que la formule s'adapte si l'on change la valeur en A1, par exemple si l'on y écrit 6 :

Avec **`=8*2`** en B1

La valeur en B1 ne s'adapte pas, cela reste **`16`**.

Avec **`=A1*2`** en B1

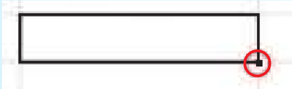
La valeur en B1 s'adapte, cela donne **`12`**.

Remarque Quand on sélectionne une cellule, la formule inscrite dedans est affichée dans la barre de saisie (voir encadré rouge sur les captures d'écrans précédentes).

On peut modifier la formule inscrite dans une cellule en sélectionnant cette cellule et en modifiant directement la formule dans la barre de saisie.

5 Poignée de recopie

Lorsqu'on sélectionne une cellule ou une plage de cellules, un petit carré apparaît en bac à droite : c'est la poignée de recopie. Elle permet d'automatiser les calculs.



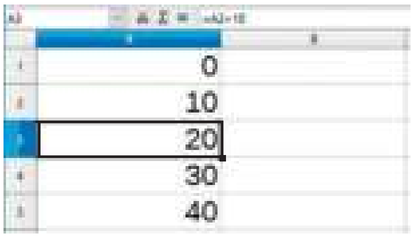
Exemple

Si l'on veut écrire `0, 10, 20, 30,…, 100` dans la colonne A :

- on écrit **0** dans la cellule A1,
- on écrit `=A1+10` dans la cellule A2, on obtient bien **10**,
- on sélectionne la poignée de recopie, on maintient appuyé et on recopie vers le bas jusqu'à obtenir 100.

Lorsque l'on recopie vers le bas, les 1 deviennent 2 **dans les adresses des cellules**, les 2 deviennent 3, etc.

Ici, on observe que les formules se sont bien adaptées dans chaque cellule. Par exemple, en A3, il est inscrit `=A2+10`



	A	B
1	0	
2	10	
3	20	
4	30	
5	40	

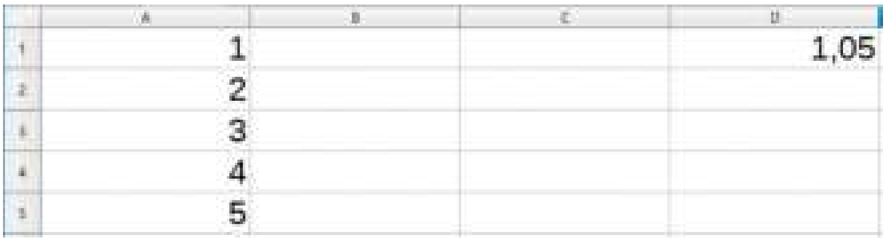
Remarque On peut aussi recopier vers la droite (les A deviennent B, les B deviennent C, etc.), la gauche ou le haut.

6 Utilisation du dollar

Le symbole $ permet de bloquer la lettre ou le nombre d'une adresse dans une formule.

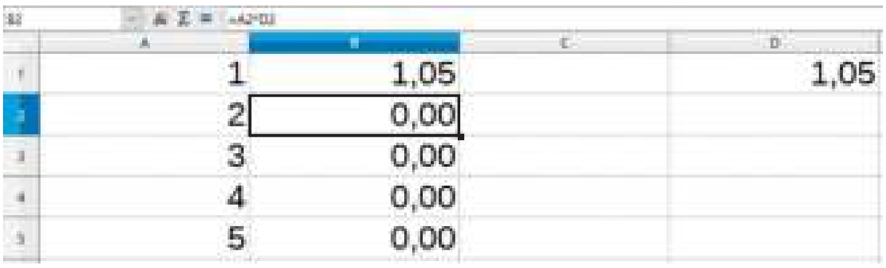
Exemple

Dans la feuille de calcul ci-dessous, on souhaite multiplier tous les nombres de la colonne A par le nombre présent dans la cellule D1 :



	A	B	C	D
1	1			1,05
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			

Si l'on saisit la formule `=A1*D1` dans la cellule B1 et que l'on recopie vers le bas, on obtiendra `=A2*D2` dans la cellule B2 :



	A	B	C	D
1	1	1,05		1,05
2	2	0,00		
3	3	0,00		
4	4	0,00		
5	5	0,00		

Cela ne convient pas (il faudrait `=A2*D1` en B2) : il faut donc bloquer le **1** de D1.
Cela se fait à l'aide du symbole $ qui bloque la lettre ou le nombre qui le suit directement **dans l'adresse d'une cellule** : on saisit donc la formule `=A1*D$1` en B1.

Quand on recopie vers le bas, on constate que le **1** de D1 est bien bloqué dans les cellules recopiées vers le bas, par exemple en B4, on a bien `=A4*D$1` :

	A	B	C	D
1	1	1,05		1,05
2	2	2,10		
3	3	3,15		
4	4	4,20		
5	5	5,25		

Remarque On aurait aussi pu saisir la formule `=A1*$D$1` en B1 mais ce n'est pas utile car le D n'a pas besoin d'être bloqué puisque l'on ne recopie pas la formule vers la droite.

7 Quelques fonctions usuelles

Le tableur dispose de certaines fonctions auxquelles on a accès dans l'onglet `Insertion>Fonction` ou directement grâce au raccourci :
dans LibreOffice et OpenOffice et dans Excel.

En particulier :

- **`ALEA()`** : donne un nombre décimal au hasard entre 0 et 1.
- **`ALEA.ENTRE.BORNES(a;b)`** : donne un nombre entier au hasard entre **a** et **b** inclus.
- **`ECARTYPEP(plage)`** : donne l'écart-type des valeurs de la plage.
- **`MAX(plage)`** : donne le plus grand nombre des valeurs la plage.
- **`MIN(plage)`** : donne le plus petit nombre des valeurs la plage.
- **`MOYENNE(plage)`** : donne la moyenne des valeurs de la plage.
- **`NB.SI(plage;a)`** : donne le nombre de fois où la valeur a apparaît dans la plage
- **`QUARTILE(plage;numéro du quartile)`** : donne le quartile (spécifié par le numéro du quartile : 1 correspond à Q_1, 2 à la médiane et 3 à Q_3) des valeurs de la plage
- **`SOMME(plage)`** : donne la somme des valeurs de la plage.

Remarques

- Quand on utilise ces fonctions dans une formule, il faut nécessairement commencer la formule par le symbole =.
- Pour les fonctions **`ALEA`** et **`ALEA.ENTRE.BORNES`**, on peut relancer une simulation en appuyant sur **CTRL+SHIFT+F9** (dans LibreOffice et OpenOffice) ou **F9** (dans Excel).

8 Graphiques

Le tableur permet de tracer des graphiques. On y a accès :

- **dans LibreOffice ou OpenOffice par l'assistant de diagramme dans l'onglet `Insertion>Diagramme` ou directement grâce au raccourci.** 
- **dans Excel par l'onglet Insertion où l'on choisit directement le type de graphique voulu parmi ceux proposés**

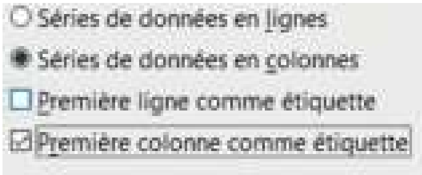
Dans LibreOffice et OpenOffice

① Pour un graphique du type « courbe d'une fonction » c'est-à-dire où la première colonne correspond aux abscisses des points et la deuxième colonne aux ordonnées :

- on sélectionne les deux colonnes (avec éventuellement les en-têtes en première ligne s'il y en a).
- on appelle **`l'assistant de diagramme`**.
- on choisit **`XY`**`(dispersion)` puis le style souhaité (**`points seuls, points et lignes`**, etc.)
- si l'on veut donner des titres, on peut le faire à l'étape 4 : **`Éléments du diagramme`**

② Pour un diagramme en bâtons c'est-à-dire où la première colonne correspond aux valeurs et la deuxième colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique :

- on sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes)
- on appelle **`l'assistant de diagramme`**
- on choisit **`Colonne`** et le premier style  puis **`Suivant>>`**
- on règle ce menu ainsi :



- on va à l'étape 4 : **`Éléments du diagramme`** et on décoche **`Afficher la légende`** (on peut aussi donner des titres aux axes)

Remarque L'axe des abscisses n'est pas régulièrement gradué si les effectifs ne sont pas régulièrement espacés, ce n'est donc pas un « vrai » diagramme en bâtons.

③ Pour un diagramme circulaire (ou camembert) c'est-à-dire où la première colonne correspond aux différentes modalités et la deuxième colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique :

- on sélectionne la plage de données (sans les en-têtes)
- on appelle **`l'assistant de diagramme.`**
- on choisit **`Secteur`** et le premier style puis **`Terminer`**.

Dans Excel

① Pour un graphique du type « courbe d'une fonction » c'est-à-dire où la première colonne correspond aux abscisses des points et la deuxième colonne aux ordonnées :

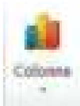
- on sélectionne la deuxième colonne (sans en-tête).
- on choisit l'onglet **`Insertion`** puis le graphique Ligne  puis on choisit le style

- on appuie sur le bouton  puis sur le bouton **`Modifier`** :

et on sélectionne la première colonne (sans en-tête) et on valide

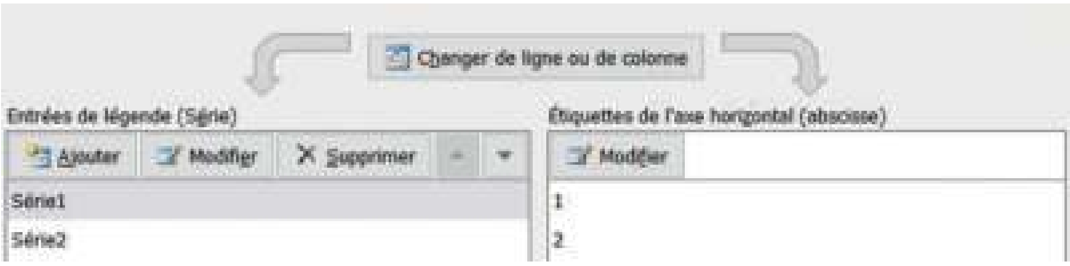
- si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici :

② Pour un diagramme en bâtons c'est à dire où la première colonne correspond aux valeurs et la deuxième colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique :

- on sélectionne la deuxième colonne (sans en-tête)
- on choisit l'onglet **`Insertion`** puis le graphique **`Colonne`** 

 puis le premier style
- on appuie sur le bouton 

 puis sur le bouton **`Modifier`** :



et on sélectionne la plage des valeurs (sans en-tête) et on valide.

- si l'on veut donner des titres, on choisit un modèle parmi ceux proposés ici :

Remarque L'axe des abscisses n'est pas régulièrement gradué si les effectifs ne sont pas régulièrement espacés, ce n'est donc pas un « vrai » diagramme en bâtons.

③ Pour un diagramme circulaire (ou camembert) où la première colonne correspond aux différentes modalités et la deuxième colonne aux effectifs ou aux fréquences d'une série statistique :

- on sélectionne les deux colonnes (sans les en-têtes)
- on choisit l'onglet **`Insertion`** puis le graphique **`Secteurs`** 

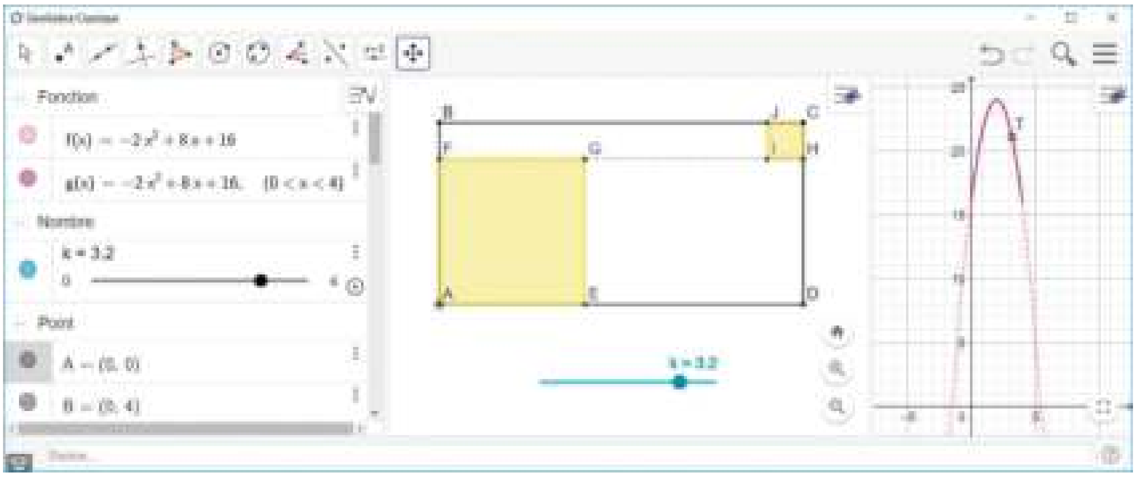
 puis le premier style et on valide.

Fiche 2 GeoGebra

GeoGebra permet d'étudier des figures géométriques et des fonctions, soit à partir de leur représentation graphique, soit à partir de leurs données algébriques. Les fonctionnalités et la présentation pouvant changer selon les versions de Geogebra. Ici, nous utiliserons la version la plus récente : la version 6.

Exemple

On cherche à conjecturer la position du point E sur le segment [AD] pour laquelle l'aire de la partie blanche est maximale.



Ici, l'écran est partagé en plusieurs parties :

① **Fenêtre algèbre**
on y lit les expressions des fonctions tracées, les coordonnées des points,…

② **Première fenêtre graphique**
Un rectangle et des carrés ont été construit dans un repère qui a été caché par la suite.

③ **Deuxième fenêtre graphique**
On y voit la représentation graphique de deux fonctions, l'une définie sur ℝ, l'autre sur [0 ; 4].

Pour faire le lien entre ces 3 fenêtres, on utilise le **curseur k**, lorsqu'on le bouge à l'aide de la souris, le point E se déplace sur le segment [AD], faisant varier les surfaces des carrés et de la partie blanche de la première fenêtre graphique et le point T se déplace sur la courbe représentative de la fonction *g*, représentant l'aire de la partie blanche.

- Pour **créer des objets**, on peut utiliser la barre d'outils ou la barre de saisie.

Dans la barre d'outils, on obtient un menu déroulant en cliquant sur chaque icône. En survolant les icônes, un message d'aide apparaît.

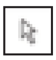
Dans la barre de saisie, il faut respecter scrupuleusement l'écriture : **`majuscule, minuscule, virgule, point, point virgule`**.

Pour créer une fonction sur un intervalle : **`g(x)=Si(0<x<4,-2x²+8x+16)`**

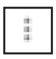
Pour créer un point à partir de ses coordonnées, on utilise une majuscule : **`M=(1,2.3)`**

Attention, une virgule sépare l'abscisse de l'ordonnée. Les nombres décimaux s'écrivent avec un point.

Pour créer un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ à partir de ses coordonnées, on utilise une minuscule : **`u=(2,3)`**


- Pour **déplacer ou effacer un objet**, il suffit de le sélectionner avec la flèche. Pour l'effacer, on peut ensuite utiliser la touche Suppr du clavier.


- Cette icône sert à dérouler le **menu**, vous pourrez par exemple enregistrer votre fichier ou choisir les fenêtres à afficher.


- Cette icône sert à ouvrir le menu des **propriétés** de chaque objet (affichage du nom, de l'étiquette, couleurs,…) ou des fenêtres (axe, grille,…).

Corrigés

1 Algorithmique et programmation

À vous de jouer !

1 `nom` : chaîne de caractères
`longueur1`, `longueur2` et `longueur3` : flottants

3 `a` vaut `34` et `b` vaut `170`

5 Si `x=5` l'algorithme affiche `2x-20 n'est pas positif`
Si `x=15` l'algorithme affiche `2x-20 est positif`

7
```
x ← Valeur saisie
Si x ⩾ 0
    f(x) ← x²
Sinon
    f(x) ← -x³
```

9 `r` prend successivement les valeurs `55`, `77` et `103`.

11
```
Pour i allant de 9 à 784
    Afficher i
```

14 L'algorithme affiche 3 (quand `u=656`).

18
```
a ← 5
Tant que a ⩽ 20
a ← –2 × a + 1
Afficher a
```

22 Cet algorithme affiche $3 \times 0 + 5 \times 2 + 1 = 11$.

Exercices d'application

24
```
fonction moyenne2(x,y)
    moyenne=(x+y)/2
    retourner moyenne
```

35 `nom` : chaîne de caractères
`temps` : entier
`total` : flottant

37 **a)** `a=666`, `b=668` et `c=444888`
b) `x=-4` et `y=-36`

43 **a)** `x=-3` et `z=12` **b)** `x=-3` et `z=7`

48
```
x ← Valeur saisie
Si x > 0
    Afficher 2x
Sinon
    Afficher x³
```

51 `1, 3, 5, . . ., 197, 199`

54
```
Pour i allant de 1 à 1000
    Afficher "mathématiques"
```

58 `u` ≈ `–5618,55` en fin d'algorithme

61
```
j ← 0
Tant que j ⩽ 200
    j ← 3 × j + 5
Afficher j
```

63 `f` retourne `17 (3 × 22 + 5)`

65 **a)**
```
fonction f(x)
    y ← -25 × x + 12
    Retourner y
```
b)
```
fonction g(x)
    y ← 8 × x³ + 5 × x² – 4x + 1
    Retourner y
```

En autonomie

90 b **91** c

92 La valeur de `a` est `180`.
La valeur de `b` est `60`.

93 d

94
```
x ← Valeur saisie
Si x > 5
    Afficher 6 × x – 2
Sinon
    Afficher 4 × x + 8
```
Ou en PYTHON :
```python
x=float(input("x=?"))
if x>5:
    print(6*x-2)
else:
    print(4*x+8)
```

95 d **96** c **97** b

98
```
Pour i allant de 312 à 24381
    Afficher 2 × i
```
Ou en PYTHON :
```python
for i in range(312,24382):
    print(2*i)
```

99
```
x ← 0
Tant que x ⩽ 1 000
    x ← x + nombre entier
    aléatoire entre 1 et 10
```
Ou en PYTHON :
```python
import random
x=0
while x<=1000:
    x=x+random.randint(1,10)
```

100 c

101 La fonction retourne `–4/2 = –2`.

102
```
fonction ecart(x,y)
    Si x>y
        e=x-y
    Sinon
        e=y-x
    retourner e
```
Ou en PYTHON
```python
def ecart(x,y):
    if x>y:
        e=x-y
    else:
        e=y-x
    return e
```

103 Pour `a`, `b`, `c` les dimensions du pavé :
```
fonction volumepave(a,b,c)
    retourner a × b × c
```
Ou en PYTHON
```python
def volumepave(a,b,c):
    return a*b*c
```

104
```
fonction multiples(k,n)
    Pour i allant de 1 à n
        Afficher k × i
    Fin pour
```
Ou en PYTHON :
```python
def fonction(k,n):
    for i in range(1,n+1):
        print(k*i)
```

2 Nombres et calculs numériques

À vous de jouer !

1 $\sqrt{821} \approx 28,7$ et 821 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23) donc 821 est premier.
861 est divisible par 3 car $8 + 6 + 1 = 15 = 3 \times 5$.
762 est divisible par 2.
$\sqrt{83} \approx 9,1$ et 83 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7), donc 83 est premier.
1 023 est divisible par 3 car $1 + 0 + 2 + 3 = 6 = 3 \times 2$.

4 $A = 5^{-10}$ $B = 6^2$ $C = 21^{-23}$ $D = -5^7$ $E = 8^6$

7 $A = -\dfrac{19}{14}$ $B = \dfrac{22}{35}$ $C = \dfrac{15}{26}$

11 $G = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $H = 5$ $I = \dfrac{11}{7}$

Exercices d'application

28 **a)** 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
b) $65u$ est divisible par 9 si et seulement si $6 + 5 + u = 11 + u$ est divisible par 9.

Le seul entier compris entre 0 et 9 tel que 11 + u soit divisible par 9 est 7, donc la seule valeur possible pour u est 7.

32 $\sqrt{157} \approx 12{,}5$ et 157 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11), donc 157 est premier.
231 est divisible par 3 car $2 + 3 + 1 = 6 = 3 \times 2$.
$\sqrt{311} \approx 17{,}6$ et 311 n'est divisible par aucun premier inférieur ou égal à cette valeur (2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17), donc 311 est premier.
468 est divisible par 2.

39 Ils ne pourront pas nécessairement participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 (ils peuvent par exemple être 12 ou 36).

45 **1.** $A = 2^4 \times 5^5$ $B = 5^4 \times 2^9$
2. $E = \dfrac{2^3}{5^4}$ $F = \dfrac{5^2}{2^4}$

51 **a)** $\dfrac{97}{75}$ **b)** $\dfrac{65}{4}$ **c)** $\dfrac{-201}{25}$ **d)** $\dfrac{-61}{108}$

56 **a)** $\sqrt{100} = 10$ **b)** $\sqrt{9} = 3$
c) Impossible car $-36 < 0$. **d)** $\sqrt{(-8)^2} = -(-8) = 8$
e) $\sqrt{169} = 13$ **f)** Impossible car $-1 < 0$.
g) Impossible car $-52 < 0$. **h)** $\sqrt{\pi}$

En autonomie

136 a, c et d **137** b, c et d

138 c

139 **a)** 23 est premier. **b)** 79 est premier.
c) 91 n'est pas premier ($91 = 7 \times 13$).

140 $276 = 2^2 \times 3 \times 23$
$161 = 7 \times 23$ (7 et 23 sont premiers)

141 **1.** $3\,528 = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$
$1\,596 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 19$
2. $\dfrac{3528}{1596} = \dfrac{2^3 \square 3^2 \square 7^2}{2^2 \square 3 \square 7 \square 19} = \dfrac{2 \square 3 \square 7}{19} = \dfrac{42}{19}$

142 b **143** b **144** a et c

145 b et d **146** a, b et c

147 b et c **148** b et c

149 $A = 81$ $B = -100\,000$ $C = 0{,}03125$

150 $A = \dfrac{43}{18}$ $B = -102$ $C = -1$

151 b et d **152** b et d

153 a **154** a et c **155** b

156 $A = -\dfrac{81}{34}$ $B = -\dfrac{1}{3}$

157 $A = \dfrac{99}{4}$ $B = \dfrac{937}{144}$ $C = \dfrac{1}{3}$ $D = \dfrac{1907}{45}$

158 a et c **159** b **160** c

161 b, c et d **162** a et d

163 **1.** $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$G = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$
2. $H = \sqrt{4} \square \sqrt{3} - 7(\sqrt{9} \square \sqrt{3}) + \sqrt{3} = -18\sqrt{3}$

164 En appliquant quatre fois le théorème de Pythagore, on obtient $2\sqrt{4^2 + 2^2} + 2\sqrt{8^2 + 4^2} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}8$ cm soit environ 268 mm.

3 Intervalles et inégalités

À vous de jouer !

1 **1.** Non. **2.** [2 ; 4]

3 L'intersection est [4 ; 5].
La réunion est [−10 ; 12].

5 $2{,}5t \geqslant 25$ et $t - 7 \geqslant 3$

7 $\mathcal{S} =]-\infty\,;4]$

10 C est supérieur à E pour $x \in\,]7\,;+\infty]$, inférieur à E pour $x \in\,]-\infty\,;7[$. C et E sont égaux pour $x = 7$.

12 24 viennoiseries

Exercices d'application

30 **a)** [−3 ; 1] **b)**]0 ; 5] **c)**]−∞ ; 4] **d)**]2 ; +∞[

39 **a)** $1{,}5x \leqslant 1\,500$ **b)** $\dfrac{x}{50} \leqslant 20$
c) $-\dfrac{1}{10}x \geqslant -100$ **d)** $x - 30 \leqslant 970$

46 **a)** $x = 11$ **b)** $x = \dfrac{13}{2}$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = 0$

49 $2x + 8 < 100$ $2x < 100 - 8$
$2x < 92$ $x < \dfrac{92}{2}$ $x < 46$

55 $x > 95{,}5$

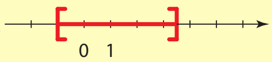
61 $10 + 4\ell \leqslant 120$ avec ℓ la largeur ($\ell \geqslant 0$)

65 **a)** 4 **b)** 3,8 **c)** $\dfrac{100}{3}$ **d)** 1 **e)** $\sqrt{17} - 2$
f) $\sqrt{17} - 2$

En autonomie

126 c **127** b **128** d

129 b **130** b et d

131 **1.**


2. −1 ; 0 ; 1,2 et 3,32, par exemple.
3. 10 ; −6 ; 3,6 et 12, par exemple.

132 **a)** $-3 \leqslant x \leqslant 16$ **b)** $x \geqslant -8$

133 **a)**]5 ; 12] **b)**]−∞ ; 4] **c)**]−1 ; 0[

134 Faux.

135 L'intersection est]−3 ; 5[et la réunion est [−3 ; 8].

136 d **137** a **138** a

139 **a)**]8 ; +∞[**b)**]−∞ ; 0,5[
c)]−∞ ; 20] **d)**]−∞ ; −1[

140 $-10 < 5x \leqslant 50$ et $-14 < x - 12 \leqslant -2$

141 $1{,}2 < \sqrt{5} - 1 < 1{,}3$ et $11 < 5\sqrt{5} < 11{,}5$

142 $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; \dfrac{648}{35}\right]$ **143** $\mathcal{S} = \left[\dfrac{10}{17}\,;+\infty\right[$

144 Oui. **145** $x \in \left]-\dfrac{24}{5}\,; -\dfrac{5}{2}\right[$

146 b **147** b

148 **1.** $x \in [0\,;10]$ **2.** $50 - 2x$ **3.** $50 - 2x \geqslant 37$

149 Par exemple [−5 ; 8].

150 Une inéquation est $500p - 125 > 750$ avec p le prix de vente du ticket.
On doit prendre $p > 1{,}75$.

151 Son nombre de départ est inférieur à 2.

152 $a \in [8\sqrt{3}\,;+\infty[$

153 b **154** a **155** b **156** c

157 $|x - 3|$

158 **1.** 12 **2.** $\dfrac{16}{3}$ **3.** Non

159 **a)** $12 - \sqrt{7}$ **b)** $\sqrt{7} + 3$ **c)** $\sqrt{7} - 2$

160 [−16 ; 8] **161** $\left[-\dfrac{3}{10}\,; \dfrac{7}{10}\right]$

4 Identités remarquables, calculs algébriques et équations

À vous de jouer !

1 **a)** $2x^2 + 17x + 21$ **b)** $x^2 - 2x + 1$
c) $4x^2 + 12x + 9$ **d)** $-x^2 + 6x - 5$

3 **a)** $(2x + 1)(-3x + 9)$ **b)** $(x + 2)^2$
c) $(6 - x)(6 + x)$ **d)** $x(x + 4)$

5 $\dfrac{10x + 51}{2x + 10}$ **7** $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{9}{5}\,; 50\right\}$

11 $\mathcal{S} = \{-3\}$ (La valeur interdite est −1).

Exercices d'application

31 **a)** $3x^2 + 15x$ **b)** $-2x^2 - 12x$
c) $15x^2 - 12x$ **d)** $2x^2 + 3x + 1$
e) $x^3 - x^2 + 2x - 2$ **f)** $-6x^4 + 2x^2$

36 **a)** $3(x - 5)$ **b)** $x(4x - 7)$
c) $x(3x^2 - 5x + 8)$ **d)** $3a(a - 2)$
e) $3x^2(x + 3)$ **f)** $\sqrt{x}\,(2 + x)$

40 **a)** $t + 5$ **b)** $\dfrac{3}{4}x$ pour $x \neq 0$
c) $2x^2 + 4x - 3$ **d)** $\dfrac{1}{2a}$

44 **a)** $\mathcal{S} = \{-4\,; 7\}$ **b)** $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\,; \dfrac{5}{4}\right\}$
c) $\mathcal{S} = \left\{0\,; \dfrac{5}{4}\right\}$ **d)** $= \left\{\dfrac{1}{5}\,; -3\right\}$
e) $\mathcal{S} = \{2\}$ **f)** $= \{0\,; 5\}$

50 **a)** $\mathcal{S} = \{2\}$(La valeur interdite est −9)
b) $\mathcal{S} = \varnothing$ (La valeur interdite est −3)
c) $\mathcal{S} = \varnothing$ (La valeur interdite est 5)
d) $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$ (La valeur interdite est $-\dfrac{3}{2}$)

En autonomie

122 c **123** a **124** b **125** b

126 **1.** $f(t) = 9t^2 + 12t - 5$

2. $(3t-1)(3t+5) = 9t^2 + 12t - 5$ d'où l'égalité.

127 $2(x-7)^2 - 3 = 2x^2 - 28x + 95$

128 $(s-2t)^2 = s^2 - 2\times s\times 2t + (2t)^2 = s^2 - 4st + 4t^2$

129 $A = \frac{1}{2}x^2 + \frac{25}{6}x + \frac{4}{3}$ et $B = 64x^2 - 2x + \frac{1}{64}$

130 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 72x + 36$

$g(x) = 4x^3 - 28x^2 + 60x - 36$

131 $(4-3x)^2 + 8 = 9x^2 - 24x + 24$

132 a **133** d **134** a **135** a

136 a) $a(6a^2 - 7a + 3)$ b) $(5x-2)^2$

137 a) $f(x) = (x+2)(x+8)$ b) $g(x) = 3x(x+11)$

138 $A = \frac{1}{4}x(x-3)$

139 $A = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$ $B = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

140 a) $xy(4 + 6xy + 7y^2)$ b) $(x+1)(x+5)$

141 **1.** $f(x) = -7x^2 + 40x + 12$

2. $f(x) = (7x+2)(-x+6)$

142 b **143** c

144 $\frac{17x+5}{3x+1}$ **145** $\frac{x+8}{2x+8}$

146 $\frac{3x+1}{x+1} - \frac{4x}{2x+2} = 1$

147 $\frac{4x+9}{(x+1)(x+2)}$

148 c **149** d **150** a **151** c

152 4 et $\frac{7}{5}$ **153** $\mathcal{S} = \{4\}$

154 $\mathcal{S} = \{-1 ; 4 ; 38\}$

155 **1.** $\mathcal{S} = \{-3 ; 3\}$ **2.** $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

156 $\mathcal{S} = \left\{-\frac{15}{2} ; \frac{7}{2}\right\}$

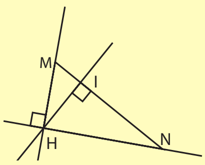
157 a) $\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$ b) $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

158 [AB] mesure 2.

5 Repérage et problèmes de géométrie

À vous de jouer !

1 **1.** et **2.**



3. La hauteur issue de N est la droite (NH).

4. La distance est HI.

6 Le volume du tétraèdre est

$\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AD}{2}\times AE = \frac{1}{3} = \frac{4\times 4}{2}\times 4 = \frac{32}{3}.$

Le volume du cube est 64. Le rapport est de $\frac{1}{6}$.

8 $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Exercices d'application

19 ABCD est un parallélogramme donc (AB) et (CD) sont parallèles et AB = CD.
ABEF est un parallélogramme donc (AB) et (EF) sont parallèles et AB = EF.
Donc (CD) et (EF) sont parallèles et CD = EF d'où CDFE est un parallélogramme.

26 **1.** $AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = AC^2$ donc ABC est rectangle en B.

2. Aire de ABC $= \frac{AB\times BC}{2} = \frac{9\times 12}{2} = 54$

28 **1.** ABC et AHC sont semblables car ils ont deux angles égaux et une longueur identique.
2. ABC et AHB sont semblables car ils ont deux angles égaux et une longueur identique.

32 Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

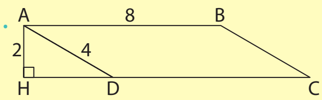
En autonomie

102 c **103** b **104** a **105** b

106 b **107** c **108** c **109** b

110 **1.** Avec le théorème de Pythagore
$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 6^2 + 4^2 = 52$
$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ donc finalement :
$BC = 9$, $AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ et $AC = 5$.
2. $AC^2 + AC^2 = 25 + 52 \neq 81$ donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

111 **1.**



2. Dans le triangle ADH, on a

$\sin\widehat{ADH} = \frac{AH}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ADH} = 30°$

3. Donc $\widehat{ADC} = 30°$

4 Aire de ABCD $= AB\times AH = 8\times 2 = 16$

112 **1.** Volume de ABCDH $= \frac{1}{3}\times AB\times BC\times DH$

$= \frac{1}{3}\times 10\times 3\times 2 = 20$

2. Volume de ABDH $= \frac{1}{3}\times\frac{AB\times AD}{2}\times DH$

$= \frac{1}{3}\times\frac{10\times 3}{2}\times 2 = 10$

113 **1.** L'aire du triangle ABC $= \frac{AB\times BC}{2}$ $= \frac{8\times 6}{2} = 24$ ou aussi $\frac{AC\times BH}{2} = \frac{10\times BH}{2}$ donne BH = 4,8 en ayant calculé AC avec le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
2. Aire de AHBK = AH × BH et on calcule AH avec le théorème de Pythagore dans ABH qui donne : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 8^2 - 4{,}8^2 = 40{,}96$ d'où AH = 6,4 et donc l'aire de AHBK vaut 30,72

114 **1.** $\tan\widehat{CBD} = \frac{CD}{BC} = \frac{3{,}7}{BC}$ donne :

$BC = \frac{3{,}7}{\tan 32°} \approx 5{,}9$

2. $\cos\widehat{BCA} = \frac{BC}{AC} = \frac{5{,}9}{8}$ donne $\widehat{BCA} \approx 42{,}3°$

115 **1.** $AE^2 + DE^2 = 4{,}2^2 + 6^2 = 53{,}64 \neq 7^2$ donc le triangle ADE n'est pas rectangle.

2. Le théorème de Thalès donne $\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AD} = \frac{FG}{DE}$

d'où $FG = DE\times\frac{AF}{AD} = 6\times\frac{2{,}5}{7} = \frac{15}{7} \approx 2{,}1$

116 c **117** b **118** c **119** a

120 a **121** a **122** b **123** c

124 **1.** AC = 5, AH = 4 et CH = 3 donc $AC^2 = AH^2 + CH^2$ et le triangle est ACH rectangle en H.

$BC = \sqrt{45}$ et BH = 6 donc

$CH^2 + BH^2 = BC^2$ et le triangle est rectangle en H.

2. Dans le triangle ACH, $\cos\widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{5}$ donc

$\widehat{CAH} \approx 36{,}9°$ donc $\widehat{ACH} \approx 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$.

Dans le triangle ABH, $\cos\widehat{CBH} = \frac{BH}{BC} = \frac{6}{\sqrt{45}}$ donc

$\widehat{CBH} \approx 26{,}6°$ donc $\widehat{BCH} \approx 90° - 26{,}6° = 63{,}4°$.

3. On en déduit que $\widehat{BCA} = 116{,}5° \neq 90°$ donc le triangle n'est pas rectangle.

125 B milieu de [AC] donc B(–3 ; 8).

126 E milieu de [DF] donc F(5 ; –3).

127 **1.** Le milieu de [MT] est $\left(-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{24}\right)$

2. H est le symétrique de A par rapport au milieu de [MT] donc $H\left(-\frac{22}{15} ; -\frac{29}{12}\right)$

128 Le cercle de diamètre [AD] a pour centre le point O (1 ; –2) et pour rayon $2\sqrt{5}$

On calcule $OB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

et $OC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ donc le cercle passe par B et C.

129 **1.** La médiatrice passe par le milieu de [IB] et donc $H\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$.

2. Le cercle a pour rayon $HI = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$ et on calcule $HB = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$ donc B est sur le cercle.

3. On calcule $CH = \sqrt{\frac{25}{4} + 0} = \frac{5}{2}$ donc C est sur le cercle.

130 **1.** ABCD est un parallélogramme donc D est le symétrique de B par rapport au milieu de [AC] qui est le centre du parallélogramme

soit $O\left(\frac{7}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ donc $\begin{cases}\frac{7}{2} = \frac{6 + x_D}{2}\\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_D}{2}\end{cases}$ alors D (1 ; 4)

2. On a : $AH^2 = 9$, $CH^2 = 121$ et $AC^2 = 130 = AH^2 + CH^2$ donc le triangle est rectangle en H.

3. On a : CH = 11 , CD = AB = 8 et DH = 3 donc C, D et H sont alignés.

4. Par conséquent H est le projeté orthogonal de A sur (CD) et l'aire du parallélogramme ABCD est : AB × AH = 9 × 8 = 72.

6 Vecteurs du plan

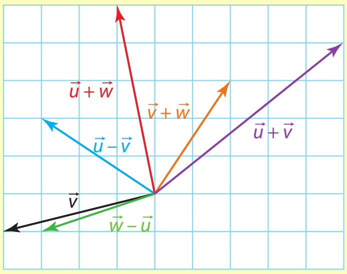
À vous de jouer !

1 **1.** $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DG}$.

2. $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DG}$ donc EHGD est un parallélogramme.

3. E milieu de [FH] car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EH}$.

5.



9 $\frac{1}{3}\vec u=\vec x$, $-\vec u=\vec z$, $3\vec u=\vec w$, $-\frac{2}{3}\vec u=\vec v$ et $-\frac{4}{3}\vec u=\vec y$

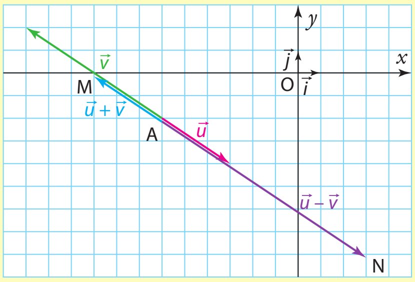
13 **1.** $\vec{NM}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{PM}\begin{pmatrix}-11\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{PN}\begin{pmatrix}-3\\11\end{pmatrix}$

2. $\vec{MN}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$, $\vec{MP}\begin{pmatrix}11\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{NP}\begin{pmatrix}3\\-11\end{pmatrix}$

3. $\vec{PN}+\vec{NM}-\vec{PM}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

16 **1.** M (–8 ; 0) **2.** N (4 ; –8)

3.



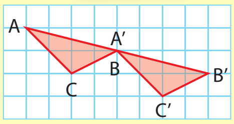
19 **1. a)** $\det(\vec u,\vec v)=-16$ **b)** $\det(\vec v,\vec w)=-4$

c) $\det(\vec w,\vec r)=-8$

2. Les vecteurs colinéaires entre eux sont $\vec u$ et $\vec w$, ainsi que $\vec v$ et $\vec r$.

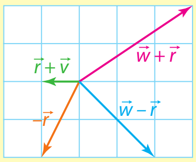
Exercices d'application

35 **1.**

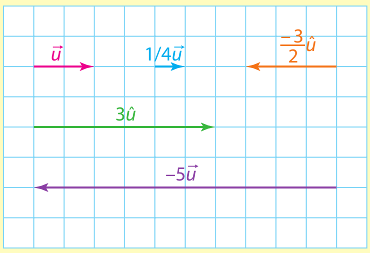


2. $\vec{AB}=\vec{A'B'}=\vec{CC'}$ **3.** $\vec{BC}=\vec{B'C'}$ **4.** $\vec{A'C'}$.

41



45



48 **a)** $1\vec u$ ou $\vec u$ **b)** $-2\vec u-3\vec v$ **c)** $-24\vec v$
d) $-8\vec u+7\vec v$

53 $\vec u\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec v\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\vec w\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec r\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{CD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{KL}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

64 B(3 ; 5)

68 **1. 2. 3. a)** $\det(\vec u,\vec v)=0$, donc les vecteurs sont colinéaires, $k=-\frac{3}{2}$.

b) $\det(\vec s,\vec t)=56$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

c) $\det(\vec u,\vec r)=-18$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

d) $\det(\vec v,\vec w)=0$, donc les vecteurs sont colinéaires, $k=-\frac{8}{3}$.

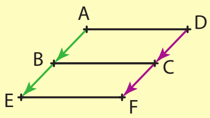
e) $\det(\vec s,\vec m)=-1$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

f) $\det(\vec m,\vec t)=10$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

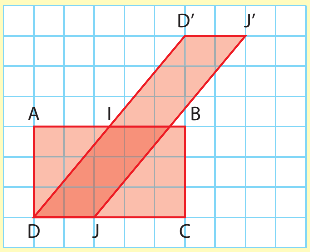
En autonomie

112 b et c **113** b et c

114 **1.** et **2.** ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AB}=\vec{DC}$.
On sait que $\vec{BE}=\vec{AB}$ et $\vec{CF}=\vec{DC}$ donc $\vec{BE}=\vec{CF}$ donc BEFC est un parallélogramme.
D'autre part, ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AD}=\vec{BC}$.
BEFC est un parallélogramme donc $\vec{BC}=\vec{EF}$.
On en déduit que $\vec{AD}=\vec{EF}$ donc AEFD est un parallélogramme.



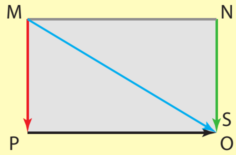
115 ABCD est un rectangle donc $\vec{AB}=\vec{DC}$.
I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] donc $\vec{IB}=\frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{DJ}=\frac{1}{2}\vec{DC}$ donc $\vec{IB}=\vec{DJ}$ donc IBJD est un parallélogramme.
On en déduit que $\vec{DI}=\vec{JB}$.
De plus D′ est le symétrique de D par rapport à I donc $\vec{DI}=\vec{ID'}$ et J′ le symétrique de J par rapport à B donc $\vec{JB}=\vec{BJ'}$. On en déduit que $\vec{DD'}=\vec{JJ'}$ donc D′DJJ′ est un parallélogramme.



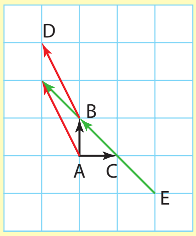
116 c **117** a b d

118 $-\vec{AB}+\vec{CD}+\vec{AC}+\vec{DB}=$
$-\vec{AB}+\vec{CA}+\vec{AD}+\vec{AC}+\vec{DA}+\vec{AB}=\vec 0$.

119 $\vec{MS}=\vec{NO}+\vec{PO}=\vec{MP}+\vec{PO}=\vec{MO}$
Donc les points O et S sont confondus.

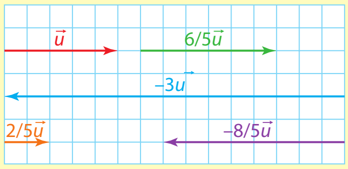


120

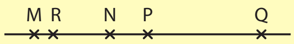


121 c **122** c

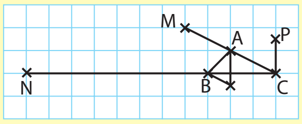
123



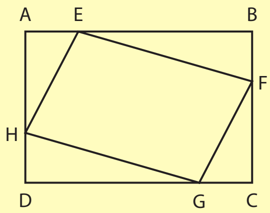
124



125



126



Le quadrilatère EFGH semble être un parallélogramme.

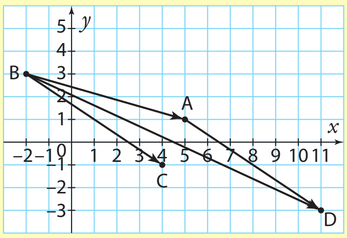
127 b **128** d

129 $\|\vec u\|=\sqrt{13}$, $\|\vec v\|\ \sqrt{26}$, $\vec u+\vec v\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}$,
$\|\vec u+\vec v\|=\sqrt{53}$

130 **1.** $\vec{BA}+\vec{BC}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-6\end{pmatrix}$

2. $\vec{AD}=\vec{BC}$ donc $\begin{cases}x_D-5=6\\y_D-1=-4\end{cases}$ donc D (11 ; –3)

3.



131 $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$ a pour coordonnées

$\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x_Q-6=1\\y_Q-1=-8\end{cases}$

donc Q $(7\,;-7)$

132 b et c **133** b **134** b

135 $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}18\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}42\\-24\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})=-432+420=-12\neq 0$.
Les points D, E et F ne sont pas alignés.

136 $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

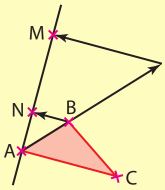
137 **1.** $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires donc DEFG est un trapèze.

2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DG}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (EF) et (DG) ne sont pas parallèles.

138 **1.** $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix}1\\x-2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{TH}$ colinéaires ssi leur déterminant est nul, si $(x-2)^2-1^2=0$, si et seulement si $(x-2)^2=1$ si et seulement si $x-2=1$ ou $x-2=-1$ si et seulement si $x=3$ ou $x=1$.

139

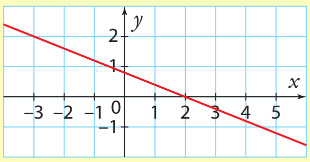


$\overrightarrow{AM}=3\,\overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires et ont un point commun donc les points A, M et N sont alignés.

7 Droites du plan et systèmes

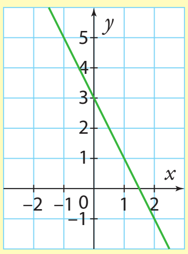
À vous de jouer !

1



3 $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0 \Leftrightarrow 3(x-1)-2(y+2)=0$
$\Leftrightarrow 3x-2y-7=0$

5



7 **1.** $m=2$ **2.** $p=-1$ **3.** $y=2x-1$

9 $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-(-3)}{1-(-2)}=\dfrac{5}{3}$

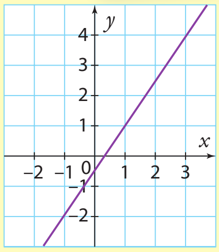
12 Elles sont strictement parallèles.

14 On extrait x de la deuxième équation.

16 On multiplie la deuxième équation par -2

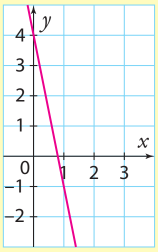
Exercices d'application

27



32 $2x-3y+7=0$

38



41 Pour $d_1 : m_1=-\frac{1}{2}$, pour $d_2 : m_2=3$, pour $d_3 : m_3=6$, pour $d_4 : m_4=0$.

43 Pour $d_1 : y=-\frac{1}{3}x+1$, pour $d_2 : y=\frac{3}{2}x-2$, pour $d_3 : y=-2x+3$

45 $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-1}{4-(-2)}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$

48 $y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}$

52 **1.** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u},\vec{v})=9-(-10)\neq 0$ donc les droites sont sécantes.

56 $\left(-\frac{2}{5}\,;\frac{1}{5}\right)$ **62** $(-2\,;-1)$

En autonomie

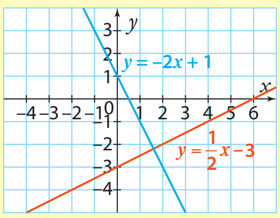
109 d

110 c

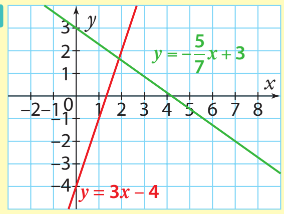
111 b

112 d

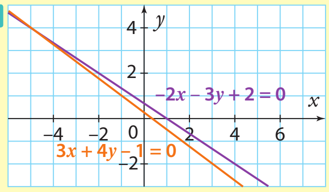
113



114



115



116 d **117** a **118** b **119** b

120 c

121 $y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$ **122** $y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$

123 $x-5y-14=0$ **124** $-6x+y-17=0$

125 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ **2.** $5x+3y+1=0$

126 b

127 d

128 c

129 b

130 a

131 Le système $\begin{cases}-2x-y+5=0\\3x-y-1=0\end{cases}$

a pour solution $\left(\frac{6}{5}\,;\frac{13}{5}\right)$

132 Le système $\begin{cases}\frac{2}{3}x-y-1=0\\-x-2y+4=0\end{cases}$

a pour solution $\left(\frac{18}{7}\,;\frac{5}{7}\right)$

133 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes.

2. On obtient le système $\begin{cases}-6x-3y-3=0\\-2x-5y-11=0\end{cases}$

a pour solution $\left(\frac{3}{4}\,;-\frac{5}{2}\right)$

134 **1.a)** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

b) Leur déterminant est nul.
c) Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles et le quadrilatère ABCD est un trapèze.

2. F$(0\,;4)$ et H$\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

3. a) (AD) : $x=-3$ et (BC) : $3x+3y-24=0$
b) Le système a pour solution E$(-3\,;11)$

4. (BD) : $x+9y-24=0$ et (AC) : $6x-6y+12=0$

qui donnent G$\left(\frac{3}{5}\,;\frac{13}{5}\right)$

5. (EF) : $7x+3y-12=0$

6. Les coordonnées des points G et H vérifient cette équation donc ils sont tous alignés.

8 Généralités sur les fonctions, fonctions de référence

À vous de jouer !

1 a) $S = \{-2 ; 0\}$ b) $S = \{1\}$

4 a) $S = [-2 ; 0]$ b) $S = [1 ; 5]$

6 f semble paire.

8 a) $S = [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ b) $S =]25 ; +\infty[$
c) $S =]-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty[$

Exercices d'application

23 a) 26 b) 6 c) 0 d) $15 + 7\sqrt{5}$

31 1. a) 1 005 b) Oui car $f(10) = 1\,005$.
2. -3

38 a) $S = \{0 ; 3 ; 4\}$ b) $S = \{1 ; 2 ; 5 ; 6\}$
c) $S = \varnothing$ a) $S = \{0,5 ; 2,5 ; 4,4 ; 7\}$

44 a) paire b) impaire
c) paire d) ni paire, ni impaire

45 a) 16 b) 9 c) 10^6 d) $\frac{1}{4}$

En autonomie

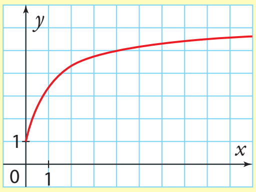
117 c **118** c **119** a

120 $[-2 ; 2]$

121 a) $-6,5$; $0,9$ et $3,1$
b) $]-6,5 ; 0,9[\cup]3,1 ; 5]$
c) $[-7 ; -6,9]$

122 1. Non car $g(-2) = 20$.
2. -2 3. $(2 ; 0)$ et $\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$

123



124 1. $S = \{2\}$ 2. $S =]2 ; 6]$

125 1. $(-0,5 ; 1)$ 2. Ni paire, ni impaire.

126 1. $f(1) = 9$ et $g(1) = 9$
2. Oui : $B(-1 ; 3)$.

127 1. 0 2. 0 et 3

128 $\left(-\frac{5}{12} ; \frac{2}{13}\right)$

129 a **130** b et d **131** b

132 b **133** b **134** a **135** a

136 Courbe verte : a) ; courbe bleue : d) ; courbe rouge : c) ; courbe orange : a)

137 a) 2 et -2 par carré, $\frac{1}{4}$ par inverse.
b) $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ par carré , 9 par inverse.
c) Pas d'antécédent par carré , $-\frac{1}{20}$ par inverse.

138 a) $S =]16 ; +\infty[$ b) $S = \left]0 ; \frac{1}{5}\right[$
c) $S =]-\sqrt{50} ; \sqrt{50}[$ d) $S =]-4 ; 4[$

139 b **140** c

141 $x \mapsto (x+5)^2$ sur $[0 ; 10]$

142 $P(t) = 15 + 2t$ avec t en heures

143 Si $x = AD$ (et donc $AB = 9 - x$), il faut prendre $x \in [2,21 ; 6,79]$.

9 Variations et extremums

À vous de jouer

1

x	-2		-1		0		$1,5$
f	-4	↗	$1,2$	↘	-2	↗	3

x	-1		3
g	-2	↗	6

3 1. $[-2 ; 3]$
2. $0 < 2$ et f est croissante sur $[-1 ; 3]$ donc $f(0) < f(2)$
3. $f(-2) > f(-1,5)$

5 a) $2^3 < 5^3$ b) $(-3)^3 < 11^3$
c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 < (-2,4)^3$

7 f a pour minimum -1, atteint pour $x = 1$.

Exercices d'application

15

x	-4		-1		5
f	2	↘	$-1,7$	↗	2

21 1. a) g est décroissante sur cet intervalle.
b) $3 < 4$ donc $g(3) > g(4)$
2. $g(1) < g(1,5)$ 3. $g(-2) > g(0)$

26 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $f(1) < f(4)$ b) $f(-3) > f(-2)$

34 1. f admet pour maximum 6, atteint en $x = -3$; f a pour minimum -1, atteint en $x = 2$.
2. g a pour maximum 2, atteint en -2 et en 0 ; g a pour minimum $-2,5$ atteint pour $x = -3$.

En autonomie

107 b et c **108** a

109 1.

x	0		$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗	

2.

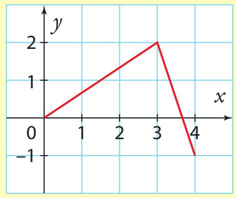
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$		↘	||	↘	

110

x	-3		-2		2		4
f	-1	↗	2	↘	-1	↗	1

x	-4		4
g	-3	↗	2

111



112 a) f est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.
b) g est la fonction carré, décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
c) h est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.

113 Le maximum est 2,5.

114 a et c **115** a et d

116 b **117** c

118 1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$		↘	0	↗	

2. a) $2,5^2 < 2,5015^2$ b) $(-3,1)^2 > (-2,75)^2$
3. a) $x^2 \in [1 ; 16]$ b) $x^2 \in [0 ; 4]$

119 a) $\sqrt{x} \in [1 ; \sqrt{3}]$ b) $\sqrt{x} \in]\sqrt{2} ; +\infty[$
c) $\sqrt{x} \in]0 ; \sqrt{3}]$

120 a **121** a et c **122** b

123 b et c

124 Le maximum est 3, atteint pour $x = 1$; le minimum est -4, atteint pour $x = 2$.

125 Le maximum et le minimum de f sont 2.

126 1. Le maximum de f est 3, atteint en $x = 5$. 2. Le minimum est de -3.

127 1. g a un maximum qui vaut 5, atteint en $x = 3$ et $x = 7$.
2. g a un minimum qui vaut -2, atteint en $x = 6$ et $x = 7,5$.

128 Elle admet seulement un minimum, atteint en $x = 0$.

129 Elle admet seulement un minimum, atteint en $x = 0$.

130 Elle n'a ni minimum, ni maximum.

131 Elle n'a ni minimum, ni maximum.

132 $2\sqrt{x} \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant -3 = f(0)$.

133 1. $-2(x-1)^2 + 3 = -2(x^2 - 2x + 1) + 3 = -2x^2 + 4x + 1 = f(x)$
2. $f(1) = 3$, et pour tout réel x, $-2(x-1)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant f(1)$.
3. Ce maximum est atteint pour $x = 1$.

10 Signe d'une fonction et inéquations

À vous de jouer

1 a)

x	-3		-2		2		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	-2		-1		3		4
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

3 1. a) $x = -\frac{3}{5}$ **b)** f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. a) $x = 3{,}5$ **b)** g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c)

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5 1.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x-1$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	

2. a)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$C(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{2}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

10 a) $x \in]-\infty\,;-2[\cup]-0{,}2\,;+\infty[$

b) $x \in \left]0\,;\frac{1}{3}\right]$ **c)** $x \in \left]\infty\,;-\frac{1}{6}\right[$

d) $x \in \left]\frac{-7}{6}\,;\frac{5}{7}\right[\cup]3\,;+\infty[$

Exercices d'application

19

x	-2		$-1{,}6$		1		4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		-1		4
$g(x)$		$+$	0	$+$	0

23 a)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$8x+4$		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$+\infty$
$-7x-2$		$+$	0	$-$	

28 a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^4		$+$	0	$+$	
x^4+1		$+$		$+$	

d)

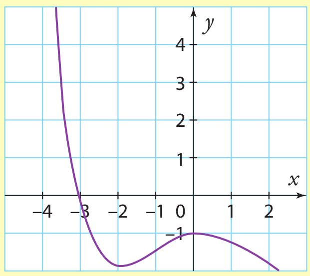
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

36 a) $x = -5$ ou $x = 1$ **b)** $x \in]-5\,;1[$
c) $x \in]-\infty\,;-5] \cup [1\,;2[$
d) $x \in]-\infty\,;-5[\cup]1\,;2[$

42 1. a) négatif **b)** négatif **c)** positif

2. a) $x \in]-\infty\,;-3[$ **b)** $x \in]-\infty\,;-3]$
c) $x \in]-3\,;+\infty[$.

3.



En autonomie

102 b **103** a et b **104** b

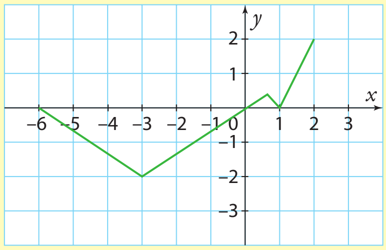
105 b **106** a **107** b

108

x	-2		-1		0		$2{,}5$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-3		1		2
$g(x)$	0	$+$	0	$+$	

109



110 d **111** c **112** b

113

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{4}$		$-\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-5x-20)(8x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

114

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		0		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

115

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$-\infty$
$(6-9x)(2x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

116 b **117** a **118** c

119

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$C(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

120 a)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$\frac{-7x+1}{x^2}$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{4x+2}{(2x+1)(-x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	

c)

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
$\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{8+x}$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

121 c **122** a **123** c **124** a

125 a) $x \in]-3\,;6[$
b) $x \in]-4\,;0[$
c) $x \in]-\infty\,;-0{,}25[\cup [1{,}5\,;+\infty[$
d) $x \in]-\infty\,;1{,}5[\cup]2\,;+\infty[$

126 1. $x \in]-3\,;3[$
2. $x \in]-\infty\,;0[\cup]0{,}5\,;+\infty[$

127 1. a)

x	-3		-2		$0{,}5$		3
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

b)

x	-3		$2{,}5$		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	

c)

x	-3		-2		$0{,}5$		$2{,}5$		3
$f(x)\,g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

d)

x	-3		-2		$0{,}5$		$2{,}5$		3
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	0

2. a) $x = -2$ ou $x = 0{,}5$
b) $x \in]-2\,;0{,}5[$
c) $x \in [-3\,;2{,}5]$
d) $x \in [-3\,;-2[\cup]0{,}5\,;2{,}5[$
e) $x \in [-2\,;0{,}5] \cup]2{,}5\,;3]$
f) $x \in]-2\,;0{,}5[\cup]2{,}5\,;3[$

11 Proportions et évolutions en pourcentage

À vous de jouer

1 $\dfrac{45}{100} \times \dfrac{1}{3} = 0{,}15$

3 1. $c_{\text{global}} = \left(1 + \dfrac{15}{100}\right) \times \left(1 - \dfrac{14}{100}\right) = 0{,}989$
et $t_{\text{global}} = 0{,}989 - 1 = -1{,}1$ %
2. $10 \times 0{,}989 = 9{,}89$ °C.

5 1. $1 - \dfrac{5{,}17}{100} = 0{,}9483$
2. $\dfrac{34\,851}{0{,}9483} \approx 36\,751$

Exercices d'application

17 $\dfrac{320}{500} = 0{,}64$

22 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{20}{100} = 0{,}1$

25 $\dfrac{9{,}88 - 9{,}76}{9{,}76} \approx 1{,}2$ %

28 a) 1,3 b) 0,9 c) 1,45
d) 1,023 e) 0,997 f) 2

34 1. a) $1{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}66$
b) $0{,}66 - 1 = -0{,}34 = -34$ %
2. a) $c_{\text{global}} = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$ donc $t_{\text{global}} = -28$ %
b) $c_{\text{global}} = 1{,}15 \times 0{,}88 = 1{,}012$ donc $t_{\text{global}} = +1{,}2$ %
c) $c_{\text{global}} = 0{,}87 \times 1{,}243 = 1{,}08141$
donc $t_{\text{global}} = +8{,}141$ %
d) $c_{\text{global}} = 0{,}3 \times 3 = 0{,}9$ donc $t_{\text{global}} = -10$ %

37 $\dfrac{18}{1{,}125} = 16$

En autonomie

79 b, c et d **80** b **81** b

82 $\dfrac{40}{100} \times \dfrac{1}{2} = 0{,}2$

83 $\dfrac{22}{100} \times \dfrac{48{,}88}{100} = 0{,}107536$

84 $\dfrac{0{,}08}{\dfrac{1}{4}} = 0{,}32$

85 b **86** c **87** c **88** c

89 a) 1,78 b) 0,69 c) 1,056 d) 0,93

90 a) +15 % b) +7 % c) −30 %
d) −10,8 % e) +100 % f) −98 %

91 $\dfrac{13 - 8}{8} = +\,62{,}5$ %

92 1. $10 \times 1{,}1 = 11$ €
2. $\dfrac{15{,}4}{1{,}1} = 14$ €

93 c **94** a **95** b

96 1. $700 \times 1{,}02^2 = 728{,}28$ euros
2. $1{,}02^2 = 1{,}0404$ et $1{,}0404 - 1 = +4{,}04$ %

97 1. Non.
2. $1{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}99$ et $0{,}99 - 1 = -1$ %.

98 a) $0{,}9 \times 0{,}94 = 0{,}846$
et $0{,}846 - 1 = -15{,}4$ %.
b) $1{,}05^3 = 1{,}157625$ et $1{,}157625 - 1 = +15{,}7625$ %

99 $\dfrac{0{,}56}{0{,}8} = 0{,}7$ et $0{,}7 - 1 = -0{,}3 = -30$ %.

100 c **101** c

102 a **103** a

104 $\dfrac{1}{0{,}45} \approx 2{,}22$ donc $t \approx 122$ %

105 $\dfrac{1}{0{,}9} \approx 1{,}111$ donc $t \approx 11{,}1$ %

106 a) +25 % b) −4,12 %
c) −75 % d) +400 %

12 Statistiques descriptives

À vous de jouer !

1 $\dfrac{17 \times 20 + 2 \times 22 + 2 \times 24 + 5 \times 25 + 2 \times 28}{17 + 2 + 2 + 5 + 2}$
≈ 21,9 JCP en moyenne

3 La calculatrice donne environ 2,62.

5

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4
Effectif	16	26	31	2	25
Effectifs cumulés croissants	16	42	73	75	100

1. • $\dfrac{100}{2} = 50$ donc médiane $= \dfrac{2+2}{2} = 2$
(moyenne des 50ᵉ et 51ᵉ valeurs)
• $\dfrac{100}{4} = 25$ donc $Q_1 = 1$ (25ᵉ valeur)
• $\dfrac{3 \times 100}{4} = 75$ donc $Q_3 = 3$ (75ᵉ valeur)
2. Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$
3. Les indicateurs (médiane et quartiles) sont identiques, donc on peut penser que les groupes sont relativement similaires sur ce critère.

Exercices d'application

18 $\dfrac{15 \times 125 + 12 \times 126 + \ldots + 9 \times 131}{15 + 12 + \ldots + 9} \approx 127$
camions par jour en moyenne.

20 $\dfrac{2 \times 5 + 4{,}5 \times 10 + 3 \times 21 + 1 \times 36}{2 + 4{,}5 + 3 + 1} \approx 14{,}7$.

23 1. Cette moyenne est 6.
2. a) Les valeurs sont multipliées par 1 000, donc la moyenne également (linéarité de la moyenne) et est donc égale à 6 000.
b) On ajoute 50 à toutes les valeurs, donc on ajoute 50 à la moyenne également (linéarité de la moyenne), qui vaut donc 56.

27 On peut éliminer l'année 2018 car il y a nettement moins de ventes.
Entre 2016 et 2017, on privilégie 2016 car, à ventes mensuelles assez similaires en moyenne entre 2016 et 2017, elles sont nettement plus stables en 2016, l'écart-type étant beaucoup plus petit (497 contre 811).

29 a) $s \approx 40{,}5$ b) $s \approx 4{,}2$

33 L'effectif total est 32.
• $\dfrac{32}{2} = 16$, donc médiane $= \dfrac{1+1}{2} = 1$
• $\dfrac{32}{4} = 8$, donc $Q_1 = 1$
• $\dfrac{3 \times 32}{4} = 24$, donc $Q_3 = 8$
• Écart interquartile : $8 - 1 = 7$

En autonomie

76 c **77** a **78** a

79 $\dfrac{31{,}4 \times 1{,}58 + 13{,}3 \times 1{,}45}{31{,}4 + 13{,}3} \approx 1{,}54$ euro/litre

80 $m = \dfrac{1 \times 14 + 1 \times 15 + \ldots + 4 \times 34}{1 + 1 + \ldots + 4}$

$\approx 27{,}2$ buts par journée en moyenne.

81 **1.** $\dfrac{0{,}5 \times 1 + 1{,}2 \times 6 + 3{,}8 \times 7 + 2 \times x}{0{,}5 + 1{,}2 + 3{,}8 + 2} = 6$

$x = 5{,}35$ après résolution.

2. $\dfrac{0{,}5 \times 1 + 1{,}2 \times 6 + 3{,}8 \times 7 + c \times 8}{0{,}5 + 1{,}2 + 3{,}8 + c} = 7{,}03$

$c = 4{,}5$ après résolution

82 Linéarité de la moyenne : la moyenne a été multipliée par c, donc $10 \times c = 17$ donc $c = 1{,}7$.

83 **a)** On considère la série 2 ; 3 et 7 de moyenne 4 ($2 + 3 + 7 = 12$ et $12 \div 3 = 4$). On ajoute 50 aux termes de la série donc la moyenne est $50 + 4 = 54$.
b) On considère la série 12 ; 1 et 5 de moyenne 6 ($12 + 1 + 5 = 18$ et $18 \div 3 = 6$). On multiplie par 100 les termes de la série donc la moyenne est $100 \times 6 = 600$.

84 b **85** a

86 Fabio fait toujours un nombre de pompes proche de 50 (car l'écart-type est petit) et Julie en fait parfois « nettement » plus et parfois « nettement » moins (car l'écart-type est plus grand).

87 Les valeurs de la série 3 sont globalement plus proches de la moyenne, celles de la série 1 un peu moins et celle de la série 2 nettement moins, donc 1,1 est l'écart-type de la série 3 ; 2,5 celui de la série 1 et 11,1 celui de la série 2.

88 b **89** c **90** b

91 a **92** c

93 **1.** Oui car $Q_3 = 22$.
2. Oui car $Q_1 = 20$.
3. L'écart interquartile de 2010 est $22 - 20 = 2 < 3$ qui est l'écart interquartile en 2014.
L'étendue en 2010 est $28 - 18 = 10 < 30 - 17 = 13$ qui est l'étendue en 2014.

94 1 ; 1 ; 2 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 34 ; 34 ; 34 convient.

95 b **96** a

97 **1.** Moyenne = 11, écart-type $\approx 1{,}84$, $Q_1 = 10$, médiane = 11 et $Q_3 = 12$.
2. **a)** En 2017 : médiane = 11 et écart interquartile = 4 ; en 2018 : médiane = 11 et écart interquartile = 2. On peut penser que la promotion 2018 a des résultats plus homogènes en Français car son écart interquartile est plus petit.
b) En 2017 : médiane = 12 et écart interquartile = 4 ; en 2018 : médiane = 13 et écart interquartile = 4. On peut penser que la promotion 2018 a des meilleurs résultats en Histoire (mais aussi homogènes).
3. En Français, la moyenne est la même les deux années et l'écart-type est inférieur en 2017 : cela confirme que la promotion 2018 a des résultats plus homogènes.
En Histoire, la moyenne est légèrement supérieure en 2018 de même que l'écart-type donc on peut penser que la promotion est un peu meilleure mais également un peu moins homogène.

13 Probabilités et échantillonnage

À vous de jouer !

1

Issue	Rouge	Bleue	Jaune
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

3 La probabilité est de $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}6$.

5 On note la somme des résultats des deux lancers dans un tableau.

2ᵉ lancer / 1ᵉʳ lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilité est donc de $\dfrac{18}{36} = 0{,}5$.

8 **1.** $p(S) = \dfrac{43}{180}$ $\quad p(F) = \dfrac{85}{180} = \dfrac{17}{36}$

$p(\overline{F}) = 1 - \dfrac{17}{36} = \dfrac{19}{36}$ $\quad p(\overline{R}) = 1 - p(R) = \dfrac{31}{45}$

2. $F \cap S$: La personne est une femme qui danse le swing. $p(F \cap S) = \dfrac{13}{90}$.

10 **En langage naturel :**

```
effectif ← 0
Pour i allant de 1 à 400
        Si Alea() ⩽ 0,496
                effectif← effectif+1
        Finsi
Fin pour
Afficher effectif
```

En langage PYTHON

```python
def simu12():
    effectif=0
    for i in range(1,401):
        if random.random()<=0.496:
            effectif=effectif+1
    return effectif
```

12 On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,44, donc on peut estimer cette probabilité à $p = 0{,}44$ (mais 0,45 ne serait pas faux par exemple).

Exercices d'application

25 **1.** **a)** L'univers est l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 15, soit $\Omega = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}$
b) Elle comporte 7 issues.
2. **a)** L'univers est $\Omega = \{6 ; 12 ; 18 ; 24 ; 30\}$
b) Il y a 5 issues.

31 **a)** $\dfrac{3}{100} + \dfrac{5}{100} + \dfrac{21}{100} = \dfrac{29}{100}$.

b) $\dfrac{3}{100} + \dfrac{5}{100} = \dfrac{8}{100}$.

c) $\dfrac{3}{100} + \dfrac{6}{100} + \dfrac{5}{100} = \dfrac{14}{100}$.

34 **1.** $\dfrac{1}{52}$ **2.** $\dfrac{1}{4}$ **3.** $\dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$

37 On note la somme des résultats des deux lancers dans un tableau.

2ᵉ lancer / 1ᵉʳ lancer	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

La probabilité est de $\dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

42 **a)** $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$
b) $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$
c) A et B sont incompatibles donc
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}22 = 0{,}62$.

47

```
Si Alea() ⩽ 0,27
    Afficher "A téléchargé illégalement"
Sinon
    Afficher "'N'a pas téléchargé illégalement"
Finsi
```

52 **1.** **a)** La variable effectif vaut 4 en fin d'algorithme (elle est incrémentée 4 fois car 0,52 ; 0,89 ; 0,23 et 0,28 sont inférieurs ou égaux à 0,904 mais pas 0,95).
b) Cela correspond au nombre de lancers-francs réussis sur les 5 simulés.
2.

```
effectif ← 0
Pour i allant de 1 à 350
        Si Alea() ⩽ 0,904
                effectif ← effectif+1
        Finsi
Fin pour
Afficher effectif
```

57 **1.** On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,3 donc on peut estimer cette probabilité d'obtention du 6 à $p = 0{,}3$ (ou une valeur relativement proche de 0,3).
2. Non car pour un dé non truqué, $p(6) = \dfrac{1}{6}$ donc $3p(6) = \dfrac{1}{2} > 0{,}3$.

59 **1.** On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,11 donc on peut estimer cette proportion à $p = 0{,}11$.
2. **a)** On peut modéliser par la loi de probabilité suivante :

Issue	malade	pas malade
Probabilité	0,11	0,89

b) Ce modèle est obtenu par une estimation d'un paramètre qui est imprécise (et d'autres échantillons auraient donné d'autres résultats qui ne représenteraient pas plus « la » réalité) donc d'autres modélisations sont possibles.

En autonomie

133 a

134 Il y a 6 boules rouges, 6 boules vertes et trois boules bleues.

Issue	Rouge	Verte	Bleue
Probabilité	0,4	0,4	0,2

135 Il y a 120 passages en tout.

Issue	Mésange	Merle	Rouge-gorge	Non identifié
Proba-bilité	0,2	0,475	$\frac{13}{120}$	$\frac{13}{60}$

136 **1.** 1 – (0,5 + 0,15 + 0,3) = 0,05.
2. La probabilité est de 0,5 + 0,15 + 0,3 = 0,95.

137

Issue	Pile	Face
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

138 c **139** a et d

140 La probabilité est de $\frac{1}{6}$.

141 La probabilité d'obtenir un multiple de 7 est de $\frac{13}{90}$.

142 Il y a $2 \times 3 \times 5 = 30$ menus différents.

143 Tableau des sommes

1^er lancer \ 2^e lancer	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tableau des produits

1^er lancer \ 2^e lancer	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

La probabilité d'avoir un nombre premier est de $\frac{15}{36}$ avec une somme et de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ avec un produit : on a donc plus de chance d'avoir un nombre premier avec la somme.

144 b et c

145 **1.** $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cup \text{B})$
$= 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}8$

2. $P(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

146 $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) - P(\text{A} \cap \text{B})$
$= 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}1$

$P(\overline{\text{A}} \cup \overline{\text{B}}) = P(\overline{\text{A} \cap \text{B}}) = 1 - P(\text{A} \cap \text{B})$
$= 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

147 **1.** $P(\text{A}) = \frac{266\,430}{571870} \approx 0{,}47$

2. a) C ∩ A : le véhicule choisi est de marque A et a un contrôle technique conforme.

b) $P(\text{C} \cap \text{A}) = \dfrac{\frac{92}{100} \times 266\,430}{571\,870} \approx 0{,}4286$

3. $P(\text{C} \cap \overline{\text{A}}) = \dfrac{\frac{94}{100} \times 305\,440}{571\,870} \approx 0{,}5021$

$P(\text{C}) = P(\text{C} \cap \text{A}) + P(\text{C} \cap \overline{\text{A}}) \approx 0{,}93$

148 b **149** a

150 **1.** On a :

```
eff_gaucher ← 0
Pour i allant de 1 à 200
        Si alea() ⩽ 0,12
              eff_gaucher ← eff_gaucher+1
        Fin si
Fin pour
Afficher eff_gaucher
```

2. On a :

```
eff_gaucher ← 0
Pour i allant de 1 à 200
        Si alea() ⩽ 0,12
              eff_gaucher ← eff_gaucher+1
        Fin si
Fin pour
freq_gaucher = eff_gaucher/200
Afficher freq_gaucher
```

151 **1.** On peut tracer une droite horizontale passant approximativement au milieu du nuage à l'ordonnée 0,45, donc on peut estimer cette proportion à $p = 0{,}45$ soit 45 %.

2. On remarque que sur tous les hôpitaux, la fréquence du groupe O est au maximum 0,51 environ. Dans cet hôpital, elle est de $\frac{324}{500} = 0{,}648$, soit 64,8 %, ce qui est nettement supérieur à 51 %, donc on peut penser qu'il y a une erreur.

Crédits

Couverture: Détourage Magnard ©Mauricio Ramos / Canvas Images/ Alamy / Photo 12 - p. 2 : SSPL / Leemage ; Darnell_vfx / Adobe Stock; Artem / Adobe Stock - p. 3 : Pixelfusion3d / Getty Images ; copyright 2015 Achim Thomae / Getty Images; G. Lacz / Alamy / Photo 12; Jean-Marc Favre-WOOlooMOOloo; Tim Clayton/Corbis via Getty Images - p. 4 : Collection Leemage ; CSP_Reeed - www.agefotostock.com - p. 10 : Lee/Leemage ; Bianchetti / Leemage - p. 11 : SSPL/Leemage ; Collection privée / Prismatic Pictures / Bridgeman Images - p. 12 : SSPL/Leemage - p. 42 : Darnell_vfx / Adobe Stock - p. 62 : lulu / Adobe Stock - p. 114 : Artem /Adobe Stock - p. 131 : Granger / Bridgeman Images - p. 134 : Ints / Adobe stock - p. 162 : Pixelfusion3d / Getty Images - p. 182 : FineArtImages/Leemage - p. 188 : copyright 2015 Achim Thomae / Getty Images - p. 216 : Jean-Marc Favre-WOOlooMOOloo - p. 268 : G. Lacz / Alamy / Photo 12 - p. 282 : Photo 5000 / Adobe stock - p. 286 : Tim Clayton/Corbis via Getty Images - p. 310 : CSP_Reeed - www.agefotostock.com - p. 347 : Peinture de M, Nabiyev, 1982. / Sovfoto/UIG / Bridgeman Images ; Bianchetti / Leemage; Bianchetti/Leemage; Collection Leemage - p. 348 : Photo Josse/Leemage - p. 349 : Science Photo Library / AKG ; Collection Privée ©Bianchetti/Leemage; Ancient Art and Architecture Collection Ltd. / Bridgeman Images; Lee/Leemage - p. 350 : AKG Images / North Wind Picture Archives ; Nimatallah/akg-images ; Bianchetti/Leemage; Fototeca/Leemage - p. 351 : Malyshev / Sputnik / AFP ; Bianchetti/Leemage; RDA/Everett/CSU/Leemage ; SSPL / Leemage; Doris Poklekowski / akg-images; Alamy / Photo 12 - p. 352 : Lee/Leemage ; De Agostini/Leemage; Alamy / Photo 12 - p. 353 : Collection privée / Prismatic Pictures / Bridgeman Images ; Granger / Bridgeman Images; Fonollosa/AIC/Leemage ; Bridgeman Images / Leemage

Autres photos : Adobestock.com

Certains contenus proviennent de l'édition de 2014 du manuel Sesamath 2de dont les auteurs sont :
Élisabeth Argence, Sandrine Baglieri, Catherine Bessaguet, Gilles Bougon,Christian Buso, Daniel Casane, Pauline Chabauty, Gwénaëlle Clément, Noël Debarle, Anne-Marie Dischler, Sébastien Dumoulard, Damien Fourny, Maxime Fourny,Yolande Garouste, Jean-Pierre Gerbal, Didier Goumont, Hélène Gringoz, Stéphane Guyon, Fabrice Houpeau, Pierre-Yves Icard, Michèle Khan,Yves Le Reste, Alexis Lecomte, Liouba Leroux, Benoît Montessinos, Xavier Ouvrard Brunet,Olivier Péault, Frédéric Platzer,Virginie Poirier, Mireille Poncelet,Olivier Pontini, Christophe Rindel, David Rousseau

Responsable éditorial : Adrien FUCHS
Coordination éditoriale : Marilyn MAISONGROSSE et Stéphanie HERBAUT
Maquette de couverture : Primo & Primo
Maquette intérieure : Delphine d'INGUIMBERT
Mise en pages et schémas : Nord Compo
Iconographie : Chloé WILLIAMSON
Numérique : Dominique GARRIGUES et Lucile COLLIN

ISBN : 978-2-210-11165-3

Calculatrice TI-83 Premium CE

Application Python

Pour programmer dans le langage PYTHON, on sélectionne le menu apps avec puis on choisit l'application `PyAdaptr`.

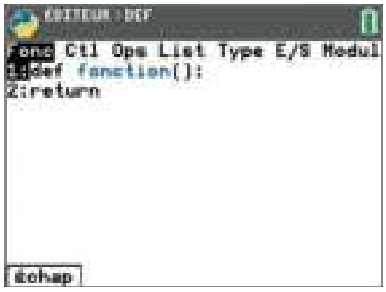
Créer un nouveau script

On sélectionne **Nouv** et on nomme le fichier contenant le futur script (on appelle « script » un bloc contenant des fonctions ou un programme complet)

Remarque : lorsque l'on est dans le menu de départ, on peut ouvrir un fichier existant en se plaçant dessus et en sélectionnant **Édit**.

Écrire un script

On peut l'écrire intégralement avec le clavier, ou accéder aux raccourcis prévus.



- En appuyant sur 0, on accède au catalogue.

On a un accès rapide à une commande en appuyant sur sa première lettre.

- On peut avoir un accès encore plus direct aux commandes usuelles en sélectionnant `Fns`… avec .

Le menu ci-contre s'ouvre.

Remarque : d'une manière générale, **Échap** permet de revenir à l'écran précédent.

– `Fonc` contient les raccourcis pour les fonctions, `def fonction():` et `return`.
– `E/S` contient les commandes `print` et `input`.
– `Ops` contient les symboles d'affectation = et de condition ==, !=, <, >, etc.
– `Ctl` contient des raccourcis vers toutes les instructions en lien avec les instructions conditionnelles `if`, `then`, `else` ainsi que les boucles `for` et `while`.
– **Module** contient les raccourcis pour les modules.

Remarque : on peut utiliser une fonction d'un autre script présent dans la calculatrice.
Par exemple si le script TEST contient une fonction `fonc`, tout script commençant par `from TEST import *` pourra utiliser la fonction `fonc`.

Exécution d'un script

Pour exécuter un script, on appuie sur `Exéc`.

Importation

On peut importer un programme Python (dont l'extension est. py) depuis un ordinateur via TI Connect.

Calculatrice TI-83 Premium CE

Principe général

On accède aux fonctionnalités avancées via les touches du clavier. En particulier :

Les touches [f(x)] [fenêtre] [zoom] [trace] [graphe] permettent de travailler avec les fonctions. Voir détails dans le chapitre 8.

• La touche [stats] ouvre le menu permettant de travailler sur des séries de données. Voir détails dans le chapitre 12.

• La séquence de touches [2nde] [résol] permet d'accéder au menu **`apps`** dans lequel l'application **`PyAdaptr`** permet de programmer dans le langage Python.

Remarque : On peut toujours revenir à l'écran principal en sélectionnant **`quitter`** avec la séquence de touches [2nde] [mode].

Écran principal et calculs

• Il y a deux touches avec le symbole « – » qu'il ne faut pas confondre. La touche [–] qui correspond au symbole de soustraction et la touche [(-)] qui correspond au symbole devant un nombre négatif.

Par exemple `-5-5` `-10` s'obtient avec la séquence de touches [(-)] [5] [–] [5]

• Lorsque le résultat est grand, une valeur approchée sous forme scientifique est affichée.

Par exemple 123456×78910111 donne `123456*78910111` `9.741926664E12`

Attention : **`E12`** dans l'affichage précédent veut dire $\times 10^{12}$.

• Les puissances s'obtiennent avec la touche [^].

Attention : pour « sortir de la puissance », on appuie sur la flèche de droite.

• La racine carrée s'obtient avec la séquence de touches [2nde] [x²].

Attention : pour « sortir de la racine carrée », on appuie sur la flèche de droite.

• Pour obtenir un angle dont on connaît le cosinus (resp. sinus ou tangente), on utilise la fonction **cos**$^{-1}$ (resp. **sin**$^{-1}$ ou **tan**$^{-1}$) obtenue avec la combinaison de touches [trig] [5].

• La touche [n/d] permet d'écrire une fraction et la touche [◂▸] permet d'afficher un résultat sous forme fractionnaire ou décimale au choix.

• La touche [math] donne accès à divers menus dans lesquels on navigue avec les flèches.

– Le menu **`NBRE`** contient la fonction valeur absolue **`abs`**.

– Le menu **`PROB`** contient les fonctions :

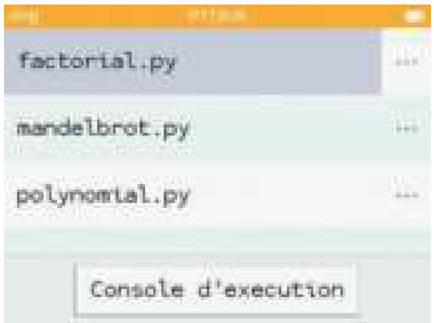
`NbrAléat`, qui permet de simuler un décimal aléatoire dans [0 ; 1[

`nbrAléatEnt` (qui permet de simuler n entiers aléatoires entre a et b inclus

Calculatrice NUMWORKS

Application Python

Pour programmer dans le langage PYTHON, on appuie sur la touche et on choisit l'application Python.



Créer un nouveau script

- On se déplace sur `Ajouter un script` (on appelle « script » un bloc contenant des fonctions ou un programme complet) avec la flèche vers le bas puis on valide. On nomme le fichier puis on valide.

Quand on sélectionne un fichier créé puis que l'on valide, on obtient l'écran ci-contre dans lequel le module math est déjà importé (on peut l'effacer avec la touche si on le souhaite).

Écrire un script

On peut l'écrire intégralement avec le clavier, ou accéder aux raccourcis prévus.

On appuie sur , et on accède au menu ci-contre.

- Le sous-menu **Catalogue** contient la plupart des commandes usuelles.

Remarque : on a un accès rapide à une commande en appuyant sur sa première lettre.

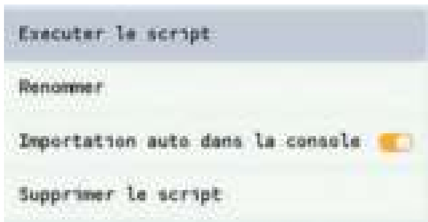
- Le sous-menu **Boucles et tests** contient des raccourcis vers toutes les instructions en lien avec les instructions conditionnelles **if**, **then**, **else** et les conditions ==, <, > etc. (dans **Boucles et tests>Conditions**) ainsi que les boucles **for** et **while**.

- Le sous-menu **Modules** contient des raccourcis vers les instructions d'importations et de commandes des modules usuels, en particulier les modules **math** et **random**.

- Le sous-menu `Fonctions` contient les commandes `def fonction(x)` et `return`.

Exécution d'un script

En face du nom du fichier, il y a une case ... qui permet d'ouvrir le menu ci-contre permettant d'exécuter, renommer ou supprimer un script.



Important : si `Importation auto dans la console` est sélectionnée, le script sera automatiquement lancé si vous allez dans la console d'exécution et vous pourrez utiliser les fonctions apparaissant dans ce script depuis la console (elles sont toutes répertoriées dans un menu qui s'affiche avec la touche).

Importation

On peut importer un programme depuis un ordinateur depuis le site de Numworks.

Calculatrice NUMWORKS

Principe général

On ouvre des « Applications » dans lesquelles on navigue avec

les flèches , on valide avec les touches EXE ou OK et on revient

en arrière avec la touche .

Menu principal

La touche envoie vers un menu donnant accès aux différentes applications.

Calculs : c'est là que l'on fait les calculs classiques.

Fonctions : pour travailler avec les fonctions.
Voir détails dans le chapitre 8.

Python : pour programmer dans le langage Python.

Statistiques : pour travailler sur des séries de données. Voir détails dans le chapitre 12.

Équations : permet de résoudre des équations et systèmes d'équations.

Paramètres : permet de régler certains paramètres de la calculatrice.

Probabilités, Suites et Régressions : ne sont pas utiles en classe de Seconde.

Application Calculs

- Lorsque le résultat est grand, une valeur approchée sous forme scientifique est affichée.

Par exemple `4589·4778` donne

Attention : `E7` dans l'affichage précédent veut dire `×10`^{7}.

- Les puissances s'obtiennent avec la touche .

Attention : Pour « sortir de la puissance », on appuie sur la flèche de droite après avoir saisi l'exposant. Il en est de même pour « sortir d'une racine carrée ».

- Pour obtenir un angle dont on connaît le cosinus (resp. sinus ou tangente), on utilise la fonction `acos` (resp. `asin` ou `atan`) obtenue avec la séquence de touches shift cos.

- La touche donne accès au menu « boîte à outils », on navigue dedans avec les flèches.

– On accède à la fonction valeur absolue `abs(x)` (en premier)

– Le sous-menu `Aleatoire et approximation` donne accès aux fonctions :

`random()` permettant de simuler un décimal aléatoire dans [0 ; 1[

`randint(a, b)` permettant de simuler un entier aléatoire entre *a* et *b* inclus.

Calculatrice CASIO GRAPH 90+

Mode Python

Pour programmer dans le langage PYTHON, on appuie sur la touche MENU et on choisit l'application PYTHON (H).

Créer un nouveau script

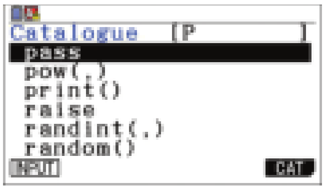
On sélectionne **NEW** et on nomme le fichier contenant le futur script (on appelle « script » un bloc contenant des fonctions ou un programme complet).

Remarques : lorsque l'on est dans le menu de départ, on peut ouvrir un fichier existant en se plaçant dessus et en sélectionnant OPEN.

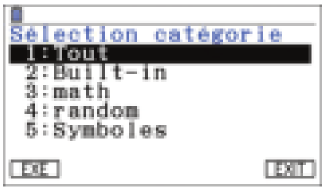
Écrire un script

On peut l'écrire intégralement avec le clavier ou utiliser les raccourcis prévus.

- En appuyant sur SHIFT 4, on accède au catalogue.



On a un accès rapide à une commande en appuyant sur sa première lettre. En sélectionnant **CAT** avec F1, on obtient un menu plus spécifique.



Remarque : dans `2:Built-in`, on trouve le raccourci `def:return` permettant d'écrire rapidement la structure des fonctions.

- On peut accéder encore plus rapidement à certaines commandes en utilisant le menu de bas d'écran :

et (en appuyant sur F1)

– **SYMBOLE** et/ou **CHAR** contiennent la plupart des symboles utiles, en particulier « : », « " », « = », « < », « > » etc.

– **COMMAND** contient des raccourcis vers toutes les instructions en lien avec les instructions conditionnelles **if**, **then**, **else** (les symboles de condition !=, < et > etc. sont dans **OPERAT**) ainsi que les boucles `for` et `while`.

Remarque : on peut utiliser une fonction d'un autre script présent dans la calculatrice.
Par exemple si `test.py` contient une fonction `fonc`, tout script commençant par `from test import*` pourra utiliser la fonction `fonc`.

Exécution d'un script

Pour exécuter un script, on appuie sur **RUN**.

Importation

On peut importer un programme PYTHON (dont l'extension est .py) depuis un ordinateur en branchant la calculatrice en USB et copiant/collant le programme.

Calculatrice CASIO GRAPH 90+

Principe général

On navigue dans le menu de bas d'écran à l'aide des touches

F1 F2 F3 F4 F5 F6

Exemple

List | Lst→Mat | Dim | Fill(| Seq | ▷

- On accède à `List` avec la touche `F1`, à `Lst->Mat` avec `F2`, etc.
- La touche ▷ permet d'afficher d'autres fonctionnalités du menu de bas d'écran.
- On peut toujours revenir en arrière avec la touche EXIT.

Menu principal

- La touche MENU donne accès aux différents modes de la calculatrice.

On navigue avec les flèches et on valide avec la touche EXE.

- Les principaux modes utiles en classe de Seconde sont :

Exe-Mat : c'est là que l'on fait les calculs classiques.

Statistiques : pour travailler sur des séries de données. Voir détails dans le chapitre 12.

Graphe et Table : pour travailler avec les fonctions. Voir détails dans le chapitre 8.

Équation : permet de résoudre des équations et systèmes d'équations.

Python : pour programmer dans le langage PYTHON (ne pas le confondre avec le mode **Programme**).

Mode `Exe-Mat` et calculs

- Lorsque le résultat d'un calcul est grand, une valeur approchée sous forme scientifique est affichée.

Par exemple 123456×78910111 donne

```
123456×78910111
           9.741926664×10^12
```

- Les puissances s'obtiennent avec la touche ^.

Attention : pour « sortir de la puissance », on appuie sur la flèche de droite.

- La racine carrée s'obtient avec la séquence de touches SHIFT x^2.

Attention : pour « sortir de la racine carrée », on appuie sur la flèche de droite.

- Pour obtenir un angle dont on connaît le cosinus (resp. sinus ou tangente), on utilise la fonction `acs` (resp. `asn` ou `atn`) obtenue avec la séquence de touches SHIFT cos.

- La touche ▭/▭ permet d'écrire une fraction et la touche S⇔D permet d'afficher un résultat sous forme fractionnaire ou décimale au choix.

- La touche OPTN donne accès à divers menus utiles (penser à utiliser F6 pour tous les découvrir).

– La fonction valeur absolue `abs` est dans le menu **Numeric**.

– Le menu `PROB` puis `RAND` contient les fonctions :

`Ran#`, qui permet de simuler un décimal aléatoire dans [0 ; 1[.

`Int` qui permet de simuler *n* entiers aléatoires entre *a* et *b* inclus avec **RanInt#(a, b, n)**.