TIN úloha č. 1

Dávid Bolvanský

xbolva00

1. S využitím uzáverových vlastností dokážte alebo vyvráťte nasledujúce vzťahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov.

Riešenie

(a) $L_1 \setminus L_2$ je možné upraviť na ekvivalentný tvar obsahujúci operácie prienik a doplnok: $L_1 \cap \overline{L_2}$. Podľa vety 3.23[1] trieda regulárnych jazykov tvorí množinovú Boolovu algebru. Z Boolovej algebry plynie mimo iné aj uzavretosť voči prieniku a doplnku. Ak $L_2 \in \mathcal{L}_3$, tak aj $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$. Ďalej, ak teda platí $L_1 \in \mathcal{L}_3$, $L_2 \in \mathcal{L}_3$, $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$, potom platí aj $L_1 \cap \overline{L_2}$, resp. $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$.
Zadaný vzťah platí.

(b) Veta 4.27[1] hovorí o tom, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzavrené voči prieniku s regulárnymi jazykmi a doplnku. $L_1 \setminus L_2$ je možné prepísať na tvar $L_1 \cap \overline{L_2}$. Tento tvar obsahuje prienik s regulárnym jazykom a doplnok k bezkontextovému jazyku, o ktorých podľa vety 4.27 je známe, že sú uzavreté.
Zadaný vzťah platí.

(c) Veta 4.24[1] hovorí o tom, že bezkontextové jazyky nie sú uzavrené voči prieniku a doplnku. Keďže tvar $L_1 \cap \overline{L_2}$ obsahuje doplnok bezkontextového jazyka, je táto uzáverová vlastnosť porušená.
Dôkaz sporom:
Predpokladám, že zadaný vzťah platí. Nech L_1 a L_2 sú jazyky nad konečnou abecedou Σ. Za L_1 si zvolím jazyk Σ^*, ktorý je regulárny a je teda možné vytvoriť KA, ktorý tento jazyk prijíma (veta 3.8[1]). Po dosadení do pravej strany vzťahu sa získa $\Sigma^* \setminus L_2$. Tento výraz vyjadruje doplnok jazyka L_2. Keďže doplnok BKJ nie je uzavretý podľa vety 4.24, potom nemusí platiť $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$ a teda ani $L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$.
Zadaný vzťah neplatí.

[1] http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf

2. Nech $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Uvažujme jazyk L nad abecedou $\Sigma \cup \{\#\}$ definovaný následovne:

$L = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_1(w_1) + (2 * \#_2(w_1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w_2))\}$.
Zostrojte deterministický zásobníkový automat M_L taký, že $L(M_L) = L$.

Riešenie

$$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1, 2, \#\}, \{1, z_0\}, \delta, q_0, z_0, \{q_3\})$$

Prechodová funkcia δ je definovaná nasledovne:

$$\begin{array}{ccc}
\delta(q_0, 0, z_0) = \{(q_0, z_0)\} & \delta(q_0, 1, z_0) = \{(q_0, 1z_0)\} & \delta(q_0, 2, z_0) = \{(q_0, 11z_0)\} \\
\delta(q_0, \#, z_0) = \{(q_1, z_0)\} & \delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 1)\} & \delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\} \\
\delta(q_0, 2, 1) = \{(q_0, 111)\} & \delta(q_0, \#, 1) = \{(q_1, 1)\} & \delta(q_1, 0, 1) = \{(q_1, 1)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, 2, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_1, \varepsilon, z_0) = \{(q_3, z_0)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_3, 0, z_0) = \{(q_3, z_0)\} &
\end{array}$$

3. Dokážte, že jazyk L z predchádzajúceho príkladu nie je regulárny.

Riešenie

Predpokladajme, že jazyk L je regulárny jazyk. Potom podľa vety 3.17[1] o Pumping lemme platí:

$$\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* :$$
$$w = xyz \;\wedge\; y \neq \varepsilon \;\wedge |xy| \leq k \;\wedge \forall m \geq 0 : xy^m z \in L$$

Vyberiem si reťazec w:
$w = 1^k \# 1^k, w \in L$
$|w| = 2k + 1 \geq k$

x, y, z si vyberiem nasledovne:

$x = 1^l$	$l \geq 0$
$y = 1^m$	$m > 0$
$z = 1^{k-m-l} \# 1^k$	$l + m \leq k$

Iterácia $m = 0$:
$xy^0 z = 1^l (1^m)^0 1^{k-m-l} \# 1^k = 1^{k-m} \# 1^k$

Ale $1^{k-m} \# 1^k \notin L$ - došlo k sporu. Predpoklad, že jazyk L je regulárny, neplatí. Jazyk L nie je regulárny.

4. Nech $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ je pravá lineárna gramatika. Navrhnite a formálne popíšte algoritmus, ktorý pre zadanú pravú lineárnu gramatiku $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ vytvorí ľavú lineárnu gramatiku G_L takú, že $L(G_P) = L(G_L)$.

Algoritmus demonštrujte na gramatike $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s nasledujúcimi pravidlami:

$$S \to abA \mid bS$$
$$A \to bB \mid S \mid ab$$
$$B \to \varepsilon \mid aA$$

Riešenie

Vstup: pravá lineárna gramatika $G_P = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: ľavá lineárna gramatika $G_L = (N^{'}, \Sigma^{'}, P^{'}, S^{'})$ taká, že $L(G_P) = L(G_L)$
Metóda:
1. $N^{'} = N \cup \{S^{'}\}, S^{'} \notin N$
2. $\Sigma^{'} = \Sigma$
3. $P^{'} =$

$$\{B \to Ax \mid (A \to xB) \in P \wedge A, B \in N \wedge x \in \Sigma^*\}$$
$$\cup$$
$$\{S^{'} \to Ax \mid (A \to x) \in P \wedge A \in N \wedge x \in \Sigma^*\}$$
$$\cup$$
$$\{S \to \varepsilon\}$$

4. $S^{'}$ je štartovací symbol v G_L

Demonštrácia algoritmu na zadanej gramatike G:
1. $N^{'} = N \cup \{S^{'}\}$
2. $\Sigma^{'} = \Sigma$
3. Aplikovanie bodu 3 vytvoreného algoritmu spôsobí nasledovné transformácie:

pravidlo v P	pravidlo v $P^{'}$
$S \to abA$	$A \to Sab$
$S \to bS$	$S \to Sb$
$A \to bB$ $A \to S$	$B \to Ab$ $S \to A$
$A \to ab$	$S^{'} \to Aab$
$B \to \varepsilon$	$S^{'} \to B$
$B \to aA$	$A \to Ba$
	$S \to \varepsilon$

Množina pravidiel $P^{'}$ obsahuje nasledovné pravidlá:

$$S^{'} \to Aab \mid B$$
$$S \to A \mid Sb \mid \varepsilon$$
$$A \to Sab \mid Ba$$
$$B \to Ab$$

Príklad derivácie pomocou pravidiel gramatík G_P a G_L na reťazec $ababb$:
$S \underset{G_P}{\Longrightarrow} abA \underset{G_P}{\Longrightarrow} abS \underset{G_P}{\Longrightarrow} ababA \underset{G_P}{\Longrightarrow} ababbB \underset{G_P}{\Longrightarrow} ababb$

$S^{'} \underset{G_L}{\Longrightarrow} B \underset{G_L}{\Longrightarrow} Ab \underset{G_L}{\Longrightarrow} Sabb \underset{G_L}{\Longrightarrow} Aabb \underset{G_L}{\Longrightarrow} Sababb \underset{G_L}{\Longrightarrow} ababb$

5. Dokážte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 \neq 0 \wedge \#_a(b) > 0\}$ je regulárny. Postupujte nasledovne:

- Definujte $\sim_L$ pre jazyk L.
- Zapíšte rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určite počet tried tohto rozkladu.
- Ukážte, že jazyk L je zjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$.

Riešenie

(a) $\forall u, v \in \Sigma^* : u \sim_L v \Leftrightarrow (\#_a(u) mod\ 3 = \#_a(v) mod\ 3) \wedge [(\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0) \vee (\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0)]$

(b) $\Sigma^*/\sim_L$:
$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\}$
$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 0 \wedge \#_b(w) > 0\}$
$L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\}$
$L_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 1 \wedge \#_b(w) > 0\}$
$L_5 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 2 \wedge \#_b(w) = 0\}$
$L_6 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 = 2 \wedge \#_b(w) > 0\}$

Počet tried rozkladu je 6.

(c) $L = L_4 \cup L_6$

Relácia $\sim_L$ má konečný index (index = 6) a L je zjednotením niektorých tried rozkladu (L_4, L_6). Podľa vety 3.20[1] je potom ekvivalentným tvrdením, že jazyk L je prijímaný DKA. Jazyk L je regulárny jazyk.