PAGE
DATE

محاضرة ١ هندسة تفاضلية Differential Geometry

الهندسة التفاضلية: هو علم دراسة الأشكال الهندسية مثل المنحنيات والسطوح باستخدام التفاضل

الباب الأول

المتجهات (vectors) = مراجعة على الجبر الخطي

* الفضاء الاقليدى R^3

هو فضاء متجه معرف على حقل الأعداد الحقيقية ويرمز له بالرمز R^3 أو E^3 ، 3 = dim

البعد

$$\bar{a} \in R^3 \Rightarrow \bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$R^3 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

طول المتجه $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

مجموع متجهين في R^3

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3)$$

أساس الفضاء المتجه R^3

تعريف ① المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \ldots \bar{V}_n \in R^3$

تسمى مرتبطة خطياً (linear dependent) إذا وجد ثوابت $a_1, a_2, \ldots a_n \in R$ تحقق الشرط

① $a_1 \bar{V}_1 + a_2 \bar{V}_2 + \ldots + a_n \bar{V}_n = 0$ وليس كلها أصفار (على الأقل ثابت واحد لا يساوي صفر)

② المتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots \bar{V}_n \in R^3$ مستقلة خطياً إذا وجد ثوابت تحقق الشرط ١ وكلها أصفار (linearly independent) مستقلة

تعريف = $a_1 \bar{V}_1 + a_2 \bar{V}_2 + \ldots a_n \bar{V}_n$ = التركيب الخطي للمتجهات $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots \bar{V}_n$

تعريف $\phi \neq S \subseteq R^3$ نرمز لمجموعة التراكيب الخطية للفئة S بالرمز $L(S)$

$L(S)$ فضاء جزئي من R^3 ويسمى أيضاً الفضاء المولد S

ملاحظة ← المتجهان $\bar{b}$, $\bar{a}$ لهما نفس الاتجاه إذا كان مرتبطان خطياً (أحدهما يساوي ثابت في الآخر)

$$\boxed{\bar{a} = k\bar{b} \quad , \quad k > 0}$$

الأساس للفضاء R^3

المتجهات $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ تكون أساس لـ R^3 إذا كان

① المتجهات $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ مستقلة خطياً

② " " تولد الفراغ

(يمكن كتابة اي متجه R^3 على الهيئة تركيب خطي من المتجهات $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$)

ex $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$

تكون أساس لـ R^3 و يسمى بالأساس القانوني لـ R^3

① المتجهات مستقلة

$a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 = \bar{0}$

$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = 0$

$(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$

المتجهات $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ مستقلة خطياً

② المتجهات $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ تولد الفراغ

$(a, b, c) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3$

$(a, b, c) \in R^3$

$a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3 = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$

$= (a, b, c) = L.H.S$

من ①، ② $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ أساس لـ R^3

نظرية

1- أي ثلاث متجهات مستقلة خطياً في R^3 تكون أساس له و العكس صحيح أي أساس لـ R^3 يتكون من ثلاثة متجهات مستقلة خطياً

2- اي متجهات في R^3 عددها اربعة أو أكثر تكون مرتبطة خطياً

الضرب القياسي في $\mathbb{R}^3$

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

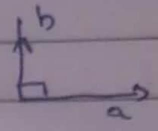
$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

① $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$

② $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Longrightarrow \frac{\theta}{2}$



③ الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$$

④ الاسقاط العددي للمتجه $\bar{a}$ على المتجه $\bar{b}$

$$\bar{P}_{\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

تعريف: أي اساس $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ يسمى أساس متعامد إذا كان فيه كل متجهان متعامدان

$$\boxed{\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{دالتا}} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}}$$

ملاحظة: أي مجموعة من ثلاثة متجهات متعامدة تكون مستقلة خطيا وبالتالي تكون أساس

مرحلة ٢

الضرب الاتجاهي للمتجهات

ليكن $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ أساس متعامد $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$ بحيث

$$\bar{a} = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$$

$$\bar{b} = b_1 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

1. $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\theta$
2. $\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a}$

   $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

$\bar{a} \times \bar{b}$ ، $\bar{b} \times \bar{a}$ متجهين متوازيان ومتضاديان في الاتجاه

3. $\bar{a} \times \bar{a} = 0$

علاقة الضرب الاتجاهي بالمتجهات

نظرية (1) إذا كان $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ فإن a, b مرتبطان خطياً والعكس صحيح

(2) $\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{0}$ إذا كان a, b مستقلان خطياً والعكس صحيح

تعريف ليكن $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ ، $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ أساسان لـ R^3 وليكن

$$J = 1,2,3 \quad , \quad v_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, \bar{u}_i$$

نقول أن الأساس $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ له نفس الاتجاه مثل الأساس $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ إذا كان

محدد المعاملات $\{a_{ij}\} > 0$

(u_i)

الباب الثانى

الدوال المتجهة فى متغير حقيقى

(vector functions of real variable)

الخطوط المستقيمة والمستويات

تعريف المعادلة المتجهة للخط المستقيم المار خلال المتجه $\bar{a}$ ويوازى المتجه $\bar{u}$ فى R^3 هى

$$\bar{x} = k\bar{u} + \bar{a} \rightarrow ①$$

أو $-\infty < k < \infty$

$k \in R$

ملاحظات: ١- المعادلات البارامترية للخط المستقيم

$x_1 = k u_1 + a_1$ المركبة الاولى

$x_2 = k u_2 + a_2$ " الثانية

$x_3 = k u_3 + a_3$ " الثالثة

٢- الخط المستقيم ① يوازى $\bar{u}$: اى متجه يرتبط خطياً مع $\bar{u}$ يوازى المستقيم أيضاً

٣- الخطان

$$\bar{x} = k_1 \boxed{\bar{u}} + \bar{a}$$
$$\bar{y} = k_2 \boxed{\bar{v}} + \bar{a}$$

يكونان متوازيان إذا كان $\bar{v}$ ، $\bar{u}$ مرتبطان خطياً (لهما نفس الاتجاه)

$$\boxed{\bar{u} = k\bar{v}}$$

مثال: أوجد المعادلة الاتجاهية للخط المار خلال المتجه

$\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ ، $\bar{u} = \bar{e}_1 - \bar{e}_3$

$$\bar{x} = k\bar{u} + \bar{a}$$
$$\bar{x} = \bar{e}_1 - \bar{e}_3 + \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$$
$$= 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$$

تعريف معادلة المستوى

المعادلة الاتجاهية للمستوى المار خلال المتجه ويوازي المتجهان المستقلان $\bar{u}, \bar{v}$ (في عكس الاتجاه والضرب الاتجاهي لا يساوي الصفر)

$$\bar{x} = k\bar{u} + h\bar{v} + \bar{a} \qquad h, k \in R$$

الملاحظات :-

① الصورة البارامترية (في صورة مركبات)

$$x_1 = k u_1 + h v_1 + a_1$$

$$x_2 = k u_2 + h v_2 + a_2$$

$$x_3 = k u_3 + h v_3 + a_3$$

② متجه ما $\bar{n}$ يقال عنه أنه يوازي المستوى Q إذا كان تركيب خطي من المتجهين $\bar{u}, \bar{v}$

③ متجه ما $\bar{n}$ عمودي على المستوى (Q) إذا كان عمودياً على كل من $\bar{u}, \bar{v}$