Algemene natuurkunde: Mechanica

H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

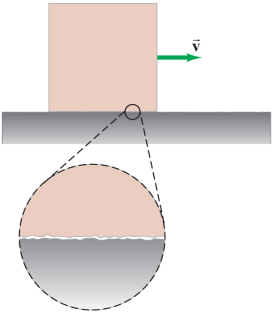
Prof. Dr. Ir. Hans Dierckx

KU Leuven Kulak

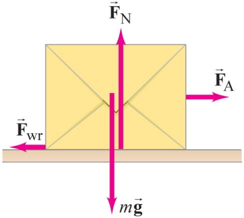
Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Wrijving tussen twee oppervlakken



FIGUUR 5.1 Een voorwerp glijdt naar rechts op een tafel of een vloer. De twee contactoppervlakken zijn ruw, tenminste op microscopische schaal.



FIGUUR 5.2 Wanneer een voorwerp door een erop uitgeoefende kracht ($\vec{\mathbf{F}}$) over een oppervlak getrokken wordt, werkt de wrijvingskracht $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{wr}}$ tegengesteld aan de beweging. De grootte van $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{wr}}$ is rechtevenredig met de grootte van de normaalkracht (F_{N}).

Richting van de wrijvingskracht:

- Evenwijdig met het contactoppervlak
- Tegengesteld aan de bewegingsrichting of trekrichting

Grootte is gerelateerd aan de normaalkracht op het oppervlak: verband tussen F_x en F_y!

Kinetische en statische wrijving

Kinetische en statische wrijving

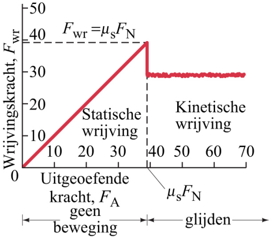
Wanneer een kracht wordt uitgeoefend op een voorwerp, zodat het over een ruw oppervlak gaat glijden is er **kinetische wrijving**:

$$F_{wr} = \mu_k F_N.$$

Wanneer het voorwerp niet gaat glijden, is er **statische wrijving**:

$$F_{wr} \leq \mu_s F_N.$$

- μ_k, μ_s zijn de kinetische en statische **wrijvingscoëfficiënt**.
- μ_k is nagenoeg onafhankelijke van de grootte van het contactoppervlak
- Meestal is $\mu_k < \mu_s$
- μ_k en μ_s zijn dimensieloos en positief



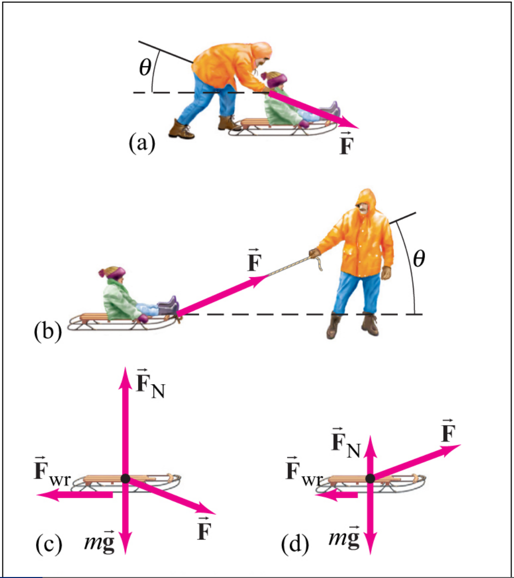
FIGUUR 5.3 Voorbeeld 5.1. De grootte van de wrijvingskracht als functie van de uitwendige kracht die op een voorwerp in rust uitgeoefend wordt. Als de uitgeoefende kracht toeneemt, neemt ook de statische wrijvingskracht toe en beide zijn gelijk tot de uitgeoefende kracht gelijk is aan $\mu_s F_N$. Als de uitgeoefende kracht verder toeneemt zal het voorwerp beginnen te bewegen. De wrijvingskracht neemt dan af tot een ruwweg constante waarde, karakteristiek voor de kinetische wrijving.

Voorbeelden

Poll: voorbeeld 5.4

Wat vraagt het minst inspanning:
een slede duwen of
een slede trekken?

1. Trekken
2. Duwen
3. Zelfde kracht is nodig
4. Niet te bepalen



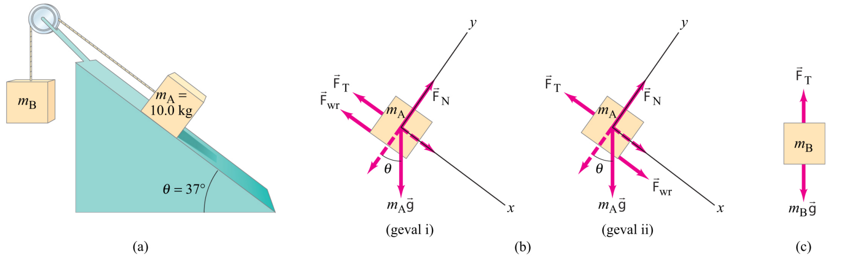
Voorbeelden

Voorbeeld 5.7: Helling, katrol en twee dozen

Een doos rust op een helling en is verbonden met een tweede doos.

1. Stel $\mu_s = 0.40$. Hoe groot mag m_B zijn zodat systeem in rust blijft?
2. Stel $\mu_k = 0.30$. Bepaal versnelling van het systeem als $m_B = 10.0$ kg.

Oplossing: teken eerst de vrijlichaamsschema's; leg X-as || aan helling



FIGUUR 5.9 Voorbeeld 5.7.

Voorbeeld 5.7: oplossing bij statisch geval

Statisch geval, met $\vec{a} = \vec{0}$, werkt zolang $|F_{wr}| < \mu_s F_N$:

- Stel de opwaarste versnelling van blokje B voor als $a_z > 0$ (Z-as omhoog).
- Kies $F_{wr} > 0$ op één van de tekeningen in (b), bv de rechtse. Dan is, met $a_x = a_z$ (verbonden door touw):

$$
\begin{aligned}
0 &= m_A a_x = F_{wr} + m_A g \sin\theta - F_T \\
0 &= m_A a_y = F_N - m_A g \cos\theta \\
0 &= m_B a_z = F_T - m_B g
\end{aligned}
$$

We vinden dat $F_T = m_B g$ en $F_N = m_A g \cos\theta$. De ongelijkheid wordt dan:

$$
\begin{gathered}
|F_{wr}| < \mu_s F_N \\
\Leftrightarrow -\mu_s F_N < F_{wr} < \mu_s F_N \\
\Leftrightarrow -\mu_s m_A \cos\theta < m_B - m_A \sin\theta < \mu_s m_A \cos\theta \\
\Leftrightarrow m_A(-\mu_s \cos\theta + \sin\theta) < m_B < m_A(\mu_s \cos\theta + \sin\theta) \\
\Leftrightarrow 0,28 m_A < m_B < 0,92 m_A \\
\Leftrightarrow 2,8\,\mathrm{kg} < m_B < 9,2\,\mathrm{kg}.
\end{gathered}
$$

Voorbeeld 5.7: oplossing bij beweging

- Zonder wrijving zouden blokjes A en B versnellen als

$$m_A a_x = m_A g \sin\theta - F_T, \qquad m_B a_z = F_T - m_B g$$

Elimineren van F_T levert, met $a_x = a_z = a$:

$$m_A a = m_A g \sin\theta - (m_B a + m_B g) \Rightarrow (m_A + m_B)a = (m_A \sin\theta - m_B)g$$

Uit de opgave is $m_A = m_B$ dus $a < 0$: blokje A glijdt omhoog en B omlaag. De wrijvingskracht werkt dus volgens positieve x.

- Met wrijving vinden we dan (tekening bij geval ii):

$$\begin{aligned} m_A a_x &= m_A g \sin\theta - F_T + \mu_k F_N \\ 0 = m_A a_y &= F_N - m_A g \cos\theta \\ m_B a_z &= F_T - m_B g \end{aligned}$$

Invullen van $F_N = m_A g \cos\theta$ en elimineren van F_T levert:

$$\begin{aligned} m_A a &= m_A g \sin\theta - (m_B a + m_B g) + \mu_k m_A g \cos\theta. \\ \Rightarrow (m_A + m_B)a &= (m_A \sin\theta - m_B + \mu_k m_A \cos\theta)g \\ \Rightarrow a &= -\frac{m_B - m_A \sin\theta - \mu_k m_A \cos\theta}{m_A + m_B} g \end{aligned}$$

- Als $m_A = m_B = m$: $a = -\frac{1 - \sin\theta - \mu_k \cos\theta}{2} g = -0,079g = -0,78\,\mathrm{m/s^2}$.

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Baansnelheid versus hoeksnelheid

Definities bij algemene cirkelbeweging

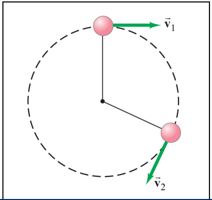
- De **hoeksnelheid** van een deeltje dat een cirkelbaan beschrijft is de tijdsafgeleide van de hoek waaronder het deeltje gezien wordt vanuit het middelpunt.

$$\omega = \dot{\theta} \tag{1}$$

- De **baansnelheid** van een deeltje in een cirkelbaan met straal r is de tijdsafgeleide van de afgelegde weg:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = \omega\, r \tag{2}$$

- De vectoriële baansnelheid raakt aan de cirkel.



Hint: beschouw deze formules als een speciaal geval van de kinematica in 2D in poolcoördinaten (einde H3).

Versnelling

Definities bij algemene cirkelbeweging

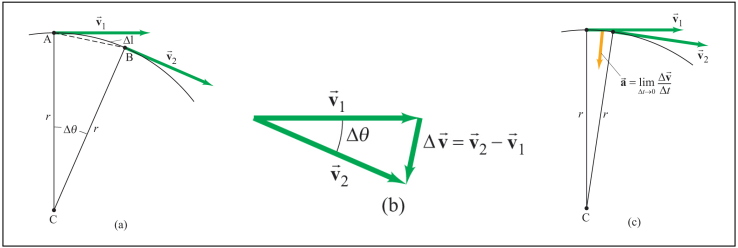
- De **radiale versnelling** of **centripetale versnelling** is: (zie H3 poolcoördinaten met constante r):

$$a_R = \omega^2\, r = \frac{v^2}{r}. \tag{3}$$

- De **circumferentiële versnelling** op een cirkelbaan is:

$$a_\theta = \ddot{\theta} r = \alpha r \tag{4}$$

met α de **hoekversnelling** in rad/s^2



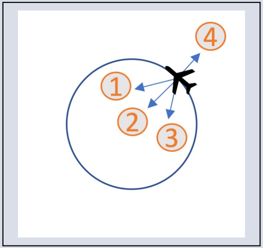
De eenparige cirkelbeweging

Eenparige cirkelvormige beweging

Een eenparig cirkelvormige beweging (ECB) is een beweging op een cirkel met constante hoeksnelheid.

Poll

De versnellingsvector van een deeltje dat een ECB beschrijft wijst naar



Frequentie vs. hoekfrequentie

Grootheden voor de omwentelingssnelheid

Voor een ECB met **periode** van 1 omwenteling gelijk aan T:

- **Frequentie** in Hertz; 1 Hz = 1 omwenteling /s

$$f = \frac{1}{T} \tag{5}$$

- Hoekfrequentie (in rad/s)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{6}$$

Let op want $\omega = 2\pi f$ kan 2 zaken voorstellen:

- Hoeksnelheid van een cirkelbeweging
- Hoekfrequentie van een periodiek verschijnsel

Voor een cirkelbaan zijn beide van toepassing; voor een trilling (zie later) mag je enkel spreken over hoekfrequentie.

De eenparig cirkelvormige beweging

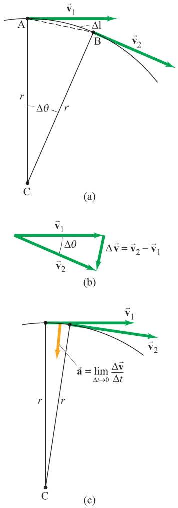
Centripetale of radiale versnelling

Een voorwerp dat een cirkelvormige baan met een straal r beschrijft met een constante snelheid v, heeft een versnelling gericht naar het middelpunt van de cirkel en met grootte

$$a_R = \frac{v^2}{r},$$

met v gegeven door:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$



FIGUUR 5.11 De verandering van de snelheid, $\Delta\vec{v}$, bepalen voor een puntmassa die een cirkelvormige baan beschrijft. De lengte $\Delta\ell$ is de afstand over het cirkelsegment, van A naar B.

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

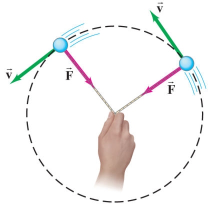
Centripetale kracht en centrifugaalkracht

Eenparig cirkelvormige beweging

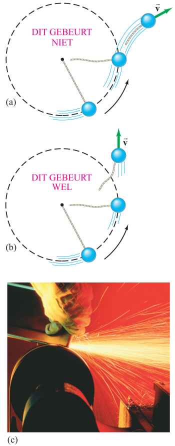
Voor een eenparig cirkelvormige beweging geldt:

$$\sum F_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}.$$

De benodigde nettokracht noemen we soms de **centripetale kracht**.



FIGUUR 5.14 Op een voorwerp dat een cirkelvormige beweging uitvoert moet een kracht uitgeoefend worden. Als de snelheid constant is, is de kracht gericht naar het middelpunt van de cirkel.



FIGUUR 5.16 Als de centrifugaalkracht zou bestaan, zou de ronddraaiende bal wegvliegen op de manier zoals is weergegeven bij (a). Maar in werkelijkheid vliegt hij weg op de manier zoals is weergegeven bij (b). In (c) kun je bijvoorbeeld de vonken zien die in een rechte lijn van de draaiende slijpsteen wegvliegen.

Voorbeelden

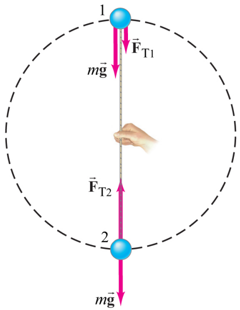
Voorbeeld 5.12: Bal rondslingeren

Een bal met massa van 0.150 kg aan een touw van 1.10 m wordt rondgeslingerd in een verticale cirkelbaan.

1. Wat is de nodige minimumsnelheid op bovenste punt zodat de bal daar niet omlaag valt?
2. Wat is de trekkracht in onderste punt als snelheid onderaan twee keer zo snel is als in het vorige geval?

Oplossing:

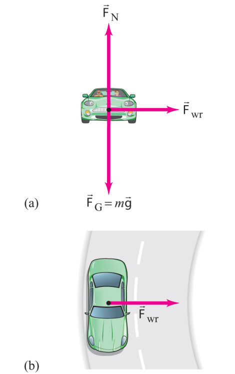
1. Newton II: $ma = mg + F_T$
   Als $F_T < 0$ zou het voorwerp vallen, dus
   $a_{min} = \omega_{min}^2 r = g$.
   $v_{min} = \omega_{min} r = \sqrt{gr} = 3,28 m/s$.
2. Nu is $ma = F_T - mg \Rightarrow F_T = m(a+g)$. Hierbij is $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$ met $v = 2\sqrt{gr}$ uit puntje 1. Na invullen: $F_T = 7,35\,\text{N}$.



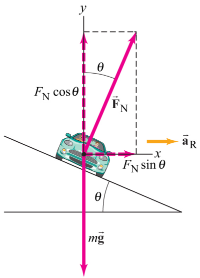
FIGUUR 5.18 Voorbeeld 5.12. Vrijlichaamsschema's voor punt 1 en 2.

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Vlakke en komvormige bochten



FIGUUR 5.23 Voorbeeld 5.14. Krachten op een auto in een bocht op een vlakke weg. (a) Vooraanzicht, (b) bovenaanzicht.



FIGUUR 5.24 De normaalkracht op een auto in een komvormige bocht, opgesplitst in de horizontale en verticale component. De centripetale versnelling is horizontaal (*niet* evenwijdig aan het hellende wegdek). De wrijvingskracht op de banden, die niet weergegeven is, zou omhoog of omlaag gericht kunnen zijn langs de helling, afhankelijk van de snelheid van de auto. De wrijvingskracht zal nul zijn voor een bepaalde snelheid.

Vraag

Voor welke hoek van het wegdek werkt er geen zijwaartse wrijvingskracht op de banden gegeven v en r ?

Vlakke en komvormige bochten

Voorbeeld 5.15

Voor welke hoek van het wegdek werkt er geen zijwaartse wrijvingskracht op de banden gegeven v en r ?

Oplossing:

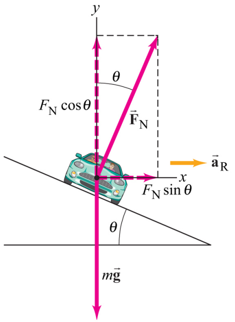
- Leg de X-as in het vlak van de cirkelbeweging

$$m\frac{v^2}{r} = F_N \sin\theta$$
$$mg = F_N \cos\theta$$

- Elimineer F_N:

$$\frac{v^2}{r} = g\tan\theta \qquad \Rightarrow \theta = \mathrm{bgtan}\frac{v^2}{rg}$$

Voor $r = 50\,\mathrm{m}$ en $v = 90\,\mathrm{km/u}$: $\theta = 52^\circ$.



FIGUUR 5.24 De normaalkracht op een auto in een komvormige bocht, opgesplitst in de horizontale en verticale component. De centripetale versnelling is horizontaal (*niet* evenwijdig aan het hellende wegdek). De wrijvingskracht op de banden, die niet weergegeven is, zou omhoog of omlaag gericht kunnen zijn langs de helling, afhankelijk van de snelheid van de auto. De wrijvingskracht zal nul zijn voor een bepaalde snelheid.

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Tangentiële en radiale versnelling

Tangentiële en radiale versnelling

De **tangentiële versnelling** heeft een grootte gegeven door:

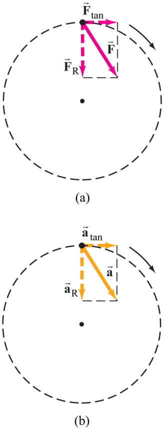
$$a_{tan} = \frac{dv}{dt}$$

en is gericht volgens de raaklijn aan de cirkelbaan.
De **radiale versnelling** heeft een grootte gegeven door:

$$a_R = \frac{v^2}{r}$$

en is gericht naar het middelpunt van de cirkelbaan.
De **totale versnellingsvector** is gegeven door:

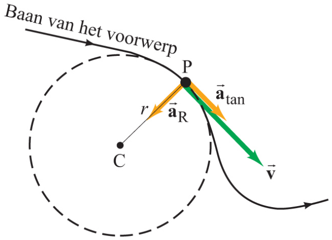
$$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_R.$$



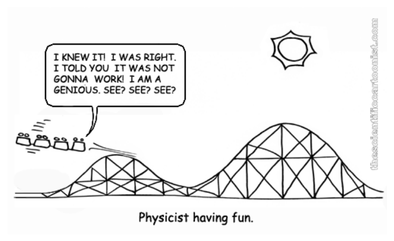
FIGUUR 5.25 De snelheid van een voorwerp dat een cirkelvormige beweging uitvoert verandert als de kracht die erop werkt een tangentiale component F_{tan} heeft. In (a) zijn de kracht $\vec{F}$ en de vectorcomponenten daarvan weergegeven; in (b) de versnellingsvector en de vectorcomponenten daarvan.

Toepassing: kromlijnige beweging

Bij een kromlijnige beweging kan je de formules gebruiken voor a_{tan} en a_R met de ogenblikkelijke waarden van v en r.



FIGUUR 5.26 Een voorwerp volgt een gekromde baan (ononderbroken lijn). Op punt P heeft de baan een kromtestraal r. Het voorwerp heeft een snelheid $\vec{\mathbf{v}}$, een tangentiale versnelling $\vec{\mathbf{a}}_{\text{tan}}$ (de snelheid van het voorwerp neemt hier toe) en een radiale (centripetale) versnelling $\vec{\mathbf{a}}_{\text{R}}$ (grootte $a_{\text{R}} = v^2/r$) in de richting van het kromtemiddelpunt C.



Het dodelijke muntje

Poll

Als je een muntje van het Empire State Building in New York zou gooien, zou dat muntje steeds sneller vallen en beneden op straat iemand kunnen doden door diens hersenen te doorboren. Immers, met $h = 381$ m, is de snelheid beneden $v = \sqrt{2gh} = 301 km/u$.

1. Juist, dit is zeer gevaarlijk.
2. Juist, maar dit is niet snel genoeg.
3. Fout, er zit een fout in de berekening
4. Fout, want er zit een fout de aannames

Algemene natuurkunde: Mechanica
H5 - Newton bij wrijving, cirkelvormige beweging en weerstand

Het dodelijke muntje

Luchtweerstand

Wanneer een voorwerp door een fluïdum reist (vloeistof of gas), is de weerstandskracht afhankelijk van de relatieve snelheid.

- Bij lage snelheid: $F_D = bv$
- Bij hoge snelheid: $F_D = \beta v^2$

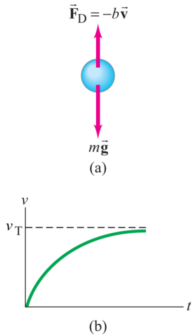
In het eerste geval leert Newton II:

$$mg - F_D = m\dot{v} \tag{7}$$

Zodat er een **eindsnelheid** bestaat:

$$\dot{v} = 0 \Leftrightarrow mg = F_D(v).$$

Bij lage snelheid: $F_D = bv \Rightarrow v_\infty = \frac{mg}{b}$.



FIGUUR 5.27 (a) Krachten op een voorwerp dat verticaal omlaag valt. (b) Grafiek van de snelheid van een voorwerp dat valt als gevolg van de zwaartekracht, wanneer de luchtweerstandskracht F_D gelijk is aan $-bv$. In eerste instantie is $v = 0$ en $dv/dt = g$, maar naarmate de tijd verstrijkt neemt dv/dt (= de richtingscoëfficiënt van de kromme) af vanwege F_D. Uiteindelijk zal v een maximale waarde benaderen, de eindsnelheid, v_T, wanneer F_D een grootte heeft die gelijk is aan mg.

Bepalen van het snelheidsverloop

- Indien $F_D(v)$ gekend is, kunnen we $v(t)$ vinden via 'scheiden der veranderlijken'. Bv. stel $F_D = -bv$, dan is $mg - bv = m\dot{v} = m\frac{dv}{dt}$.
- In een klein tijdsinterval dt geldt dan:

$$dt = \frac{mdv}{mg - bv} \qquad \Rightarrow \int dt = \int \frac{mdv}{mg - bv} \tag{8}$$

- Invullen van de grenzen, met $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$, en $0 \leq v < v_\infty = mg/b$

$$\int_0^t dt = -\frac{m}{b}\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{m}{b}\left[\ln|v - v_\infty|\right]_0^v = -\frac{m}{b}\left[\ln(v_\infty - v)\right]_0^v$$
$$= -\frac{m}{b}\left(\ln(v_\infty - v) - \ln v_\infty\right) = -\frac{m}{b}\ln\left(\frac{v_\infty - v}{v_\infty}\right)$$

- Factor overbrengen en van beide leden de exp nemen:

$$e^{-\frac{bt}{m}} = 1 - \frac{v}{v_\infty} \qquad \Rightarrow v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{bt}{m}}).$$

- Wiskundige 'legitimatie' van overgang (8): via substitutie $v = v(t) \Rightarrow dv = v'(t)dt$.

$$\frac{dv}{dt} = f(v)g(t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} g(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{f(v)}\frac{dv}{dt}dt = \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} \frac{1}{f(v)}dv \tag{9}$$

Terminologie

De begrippen wrijving en weerstand

- **Wrijving** verwijst naar een afremmende kracht door contact tussen twee voorwerpen
- **Weerstand** verwijst naar een afremmende kracht wanneer een voorwerp door een fluïdum (gas, vloeistof) beweegt.

Archimedes vs. Newton

Poll

Volgens Aristoteles was $F \propto v$, volgens Newton was $F \propto a$. Wie heeft er nu gelijk?

1. Enkel Aristoteles
2. Enkel Newton
3. Beiden
4. Geen van beiden