โครงงานคณิตศาสตร์
เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ

จัดทำโดย

สิปปการ แสนชัยชนะ

กฤษฎิ์วริศ รัฐกิตติ์โภคิน

เศรษฐ์ศรุต กตคุณไพศาล

หลักสูตรส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ (Gifted Maths)

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

กันยายน 2567

ใบรับรองโครงงานคณิตศาสตร์

โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

หลักสูตรส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางด้านคณิตศาสตร์ (Gifted Maths)

การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ

ผู้จัดทำ : นายสิปปการ แสนชัยชนะ
นายกฤษฎิ์วิริศ รัฐกิตติ์โภคิน
นายเศรษฐ์ศรุต กตคุณไพศาล

ที่ปรึกษา : นางภรณ์ชภัสร์ โสตถยาคม

ได้รับการเห็นชอบโดย

ลงชื่อ..ที่ปรึกษา
(นางภรณ์ชภัสร์ โสตถยาคม)

ลงชื่อ..กรรมการ
(นางสาวจรรยานุช ยอดสุรินทร์)

ลงชื่อ..กรรมการ
(นางสาวภาภัสสร พัฒนรักษ์)

ลงชื่อ..กรรมการ
(นางสาวอังคณา พละศักดิ์)

ลงชื่อ..กรรมการ
(นายพงศ์พล จินตนประเสริฐ)

....
(นายโสภณ ไทยจีน)
หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

....
(นายจิณณภัทร พิบูลวิทิตธำรง)
ผู้อำนวยการโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

ชื่อโครงงาน การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ

ผู้จัดทำ นายสิปปการ แสนชัยชนะ

นายกฤษฎิ์วริศ รัฐกิตติ์โภคิน

นายเศรษฐ์ศรุต กตคุณไพศาล

ที่ปรึกษา นางภรณ์ชภัสร์ โสตถยาคม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย

บทคัดย่อ

โครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ เริ่มขึ้นจากการที่ผู้จัดทำได้สร้างรูปสามเหลี่ยมหัวกลับมารูปหนึ่งและหาจำนวนวิธีการเดินทางจากจุดซ้ายบนสุดลงมายังจุดล่างสุดของสามเหลี่ยมหัวกลับ และเกิดข้อสงสัยขึ้นมาหาเพิ่มจำนวนชั้นขึ้นภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ จะทำให้จำนวนวิธีในการเดินทางไปยังจุดสุดท้ายนั้นเพิ่มขึ้นเป็นจำนวนเท่าไร

โดยเริ่มทำการศึกษาจากกำหนดรูปแบบของสามเหลี่ยมหัวกลับ รวมถึงวิธีการนับจำนวนวิธีการเดินทางภายในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ พบว่าสามเหลี่ยมหัวกลับในแต่ละชั้นมีรูปแบบการเพิ่มที่เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งในแต่ละชั้นนั้นเกิดการเพิ่มเป็นลำดับเลขคณิตที่ซ้อนกันหลายชั้นเรื่อย ๆ เมื่อทำการคำนวณหารูปแบบพจน์ของแต่ละชั้น จะสามารถนำผลลัพธ์ที่ได้ไปช่วยในการคำนวณจำนวนวิธีการเดินทางไปยังจุดที่ต้องการได้ในสูตรที่ค้นพบจากการสังเกตรูปแบบการเพิ่มขึ้นของวิธีในแต่ละจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยวิธีการนี้จะช่วยให้สามารถระบุจำนวนวิธีการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับได้อย่างชัดเจนและมีประสิทธิภาพ โดยสามารถสรุปออกมาได้เป็นสูตรได้ทั้งหมดจำนวน 3 สูตรดังนี้

เมื่อจุดที่ต้องการไม่ใช่ตำแหน่งแรกของแต่ละชั้น

$$F(x,y)=F(x,y-1)+F(x-1,y)+F(x-1,y+1)\ ;\ y\neq 1$$

เมื่อจุดที่ต้องการหาเป็นตำแหน่งแรกของแต่ละชั้น

$$F(x,1)=F(x-1,1)+F(x-1,2)$$

เมื่อจุดที่ต้องการหาอยู่ในชั้นที่ 1

$$F(1,y)=1$$

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ ประกอบไปด้วยขั้นตอนที่หลากหลาย ซึ่งมีรายละเอียดตั้งแต่การนำเสนอครั้งแรกจนถึงการทำรูปเล่มโครงงาน ตลอดระยะเวลาการทำโครงงานนี้ คณะผู้จัดทำขอขอบคุณและรู้สึกยินดีที่ได้รับคำแนะนำจากบุคคลต่าง ๆ อย่างยิ่งตั้งแต่ทำโครงงานจึงอยากขอขอบคุณทุก ๆ ท่านมา ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ครูภรณ์ชภัสร์ โสตถยาคม ที่ปรึกษาโครงงานของคณะผู้จัดทำ ที่ให้คำแนะนำและติดตามความคืบหน้าของโครงงานอยู่เสมอ และช่วยเหลือเสมอมาจนกระทั่งโครงงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ ครูจรรยานุช ยอดสุรินทร์ ครูภาภัสสร พัฒนรักษ์ ครูอังคณา พละศักดิ์ และครูพงศ์พล จินตนประเสริฐ ในฐานะคณะกรรมการที่ติดตามผลงานการนำเสนอ ให้คำติชมและคอยช่วยดูจุดบกพร่องและให้คำแนะนำอยู่เสมอ ขอขอบคุณพี่ คือ นายบวรวิช ประมวลญาติ และนายปัณพงศ์ แตงฮ่อ ที่ช่วยเสนอแนวคิดที่น่าสนใจ และช่วยแก้ไขปัญหาต่าง ๆ อยู่เสมอมาจนทำให้โครงงานสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ท้ายที่สุด ขอขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ ที่คอยช่วยเหลือเรื่องปัญหาในชีวิตประจำวัน คอยเป็นกำลังใจ พร้อมทั้งคอยดูแลและช่วยเหลืออยู่เสมอ

สิปปการ แสนชัยชนะ
กฤษฏิ์วริศ รัฐกิตติ์โภคิน
เศรษฐ์ศรุต กตคุณไพศาล

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

คณะผู้จัดทำได้เล็งเห็นว่าการศึกษาปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการเดินทางในโครงสร้างสามเหลี่ยมหัวกลับ เป็นปัญหาที่น่าสนใจทั้งในเชิงคณิตศาสตร์และในแง่ของการประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์เส้นทาง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในสถานการณ์จริง การวิเคราะห์จำนวนเส้นทาง ย่อยที่เป็นไปได้ในสามเหลี่ยมหัวกลับที่ประกอบด้วยสามเหลี่ยมจำนวนหลายชั้น สามารถใช้ทฤษฎีคอมบินาทอริก เพื่อหาจำนวนเส้นทางทั้งหมดที่สามารถเดินจากจุดเริ่มต้นถึงจุดปลายทางได้ การศึกษานี้มีความสำคัญในการทำความเข้าใจโครงสร้างและพฤติกรรมของระบบการเดินทางที่เกี่ยวข้องกับการจัดลำดับและการเลือกเส้นทางที่เหมาะสมในเงื่อนไขที่กำหนดไว้ รวมถึงการพัฒนาสูตรหรือสมการที่สามารถใช้ในการพยากรณ์จำนวนเส้นทางสำหรับจำนวนชั้นของสามเหลี่ยมหัวกลับที่แตกต่างกัน

1.2 จุดประสงค์

เพื่อหาสูตรที่สามารถนำไปใช้ในการคำนวณจำนวนเส้นทางสำหรับชั้นของสามเหลี่ยมหัวกลับที่เพิ่มขึ้น

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 การศึกษาจะครอบคลุมเฉพาะสามเหลี่ยมกลับหัวที่มีจำนวนชั้นต่าง ๆ

1.3.2 เป็นการหาจำนวนวิธีการเคลื่อนที่จากจุดซ้ายบนสุดของสามเหลี่ยมไปยังจุดล่างสุดโดยเดินทางผ่านเส้นตรงและสามารถเลี้ยวได้เมื่อผ่านจุดตัด

1.3.3 สามารถเคลื่อนที่ลงได้ทั้งเฉียงลงขวาและซ้าย และสามารถเคลื่อนที่ตามเส้นตรงที่ขนานกับแนวราบไปทางขวาได้ โดยมีเงื่อนไขว่า ไม่สามารถเคลื่อนที่ไปทางซ้ายและขึ้นด้านบนได้

1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ

ชั้นของสามเหลี่ยม หมายถึง จำนวนชั้นที่เกิดขึ้นภายในสามเหลี่ยมหัวกลับเมื่อเพิ่มจำนวนสามเหลี่ยมสามเหลี่ยมย่อยเข้าไปภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยเริ่มนับจากฐานบนสุดของสามเหลี่ยมหัวกลับเป็นชั้นที่ 1

เส้นทางกริด หมายถึง เส้นทางที่ถูกสร้างขึ้นบนตาราง ซึ่งประกอบด้วยจุดตัดหรือช่องซึ่งสามารถเคลื่อนที่ไปมาได้ในทิศทางที่กำหนด

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ ได้มีการรวบรวมแนวคิด ทฤษฎีต่าง ๆ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

(1) ทฤษฎีการนับในคอมบินาทอริก

(2) ทฤษฎีฟังก์ชันการสร้าง

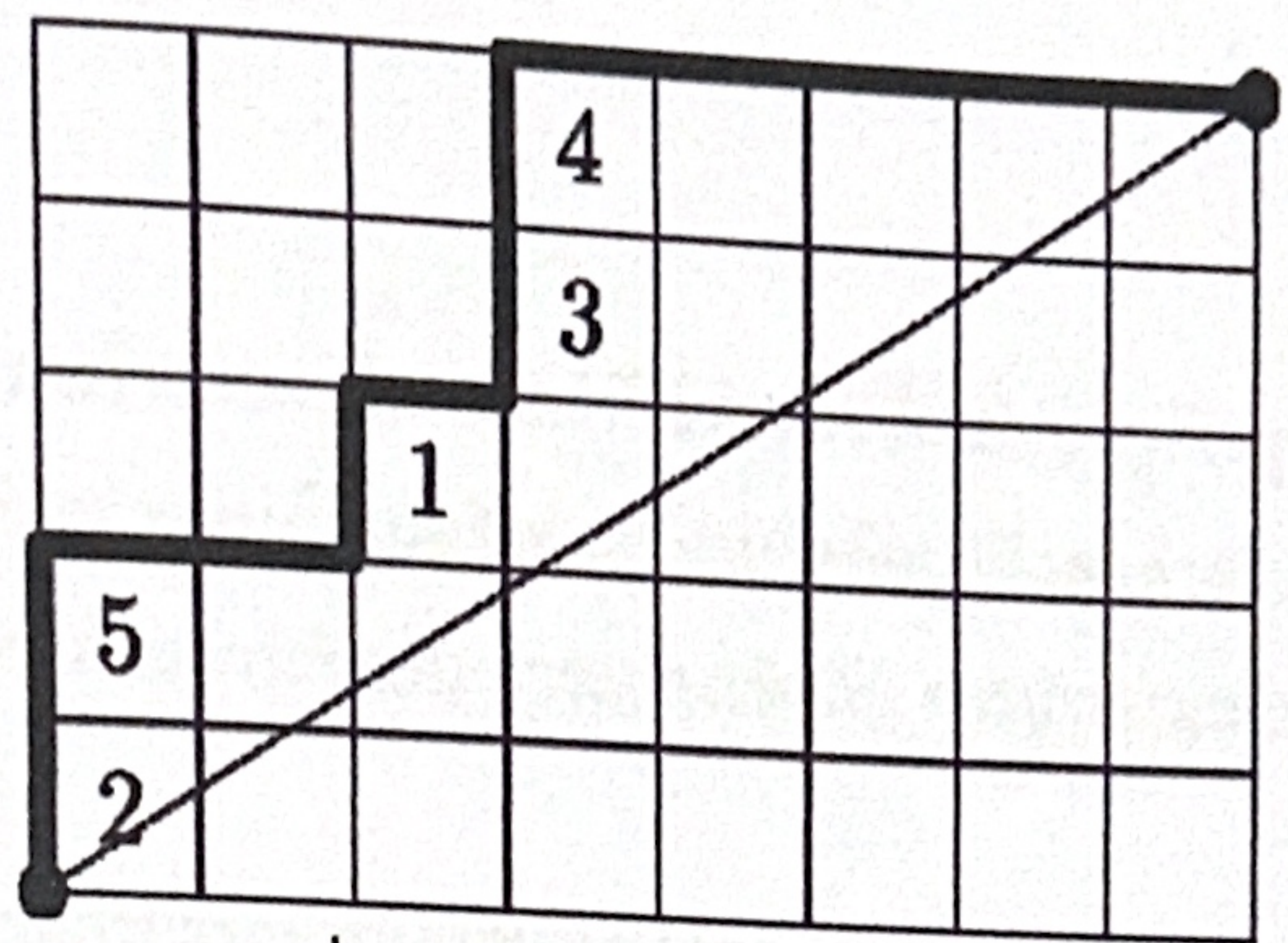
(3) เมทริกซ์

(4) ทฤษฎีลำดับพหุนาม

2.1 ทฤษฎีการนับในคอมบินาทอริก

การนับในคอมบินาทอริกเกี่ยวข้องกับการหาจำนวนวิธีการจัดเรียงหรือการจัดกลุ่มวัตถุทางคณิตศาสตร์ภายใต้ข้อจำกัดต่าง ๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญในการแก้ปัญหาการนับ เช่น การนับเส้นทางในกริด ปัญหานี้มักจะมีเงื่อนไขเฉพาะ เช่น การเดินทางจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยอนุญาตให้เดินไปทางขวาหรือขึ้นบนเท่านั้น การนับเส้นทางแบบนี้สามารถอธิบายได้ด้วยการจัดลำดับการก้าวแต่ละก้าวภายใต้ข้อจำกัดที่กำหนด เช่น จำนวนการก้าวที่มีจำกัดในแต่ละทิศทาง

ในโครงงานนี้ การนับเส้นทางกริดถือเป็นตัวอย่างคลาสสิกที่สามารถขยายไปยังกรณีที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นได้ เช่น การเพิ่มข้อจำกัดต่าง ๆ อย่างการกำหนดให้เส้นทางต้องไม่เกินเส้นพื้นฐานหรือมีการกำหนดจำนวนขั้นตอนแน่นอน การใช้ทฤษฎีการนับในคอมบินาทอริกส์จะช่วยในการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของลักษณะการนับเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข ทำให้สามารถนำทฤษฎีนี้ไปประยุกต์ใช้ในปัญหาอื่นที่มีความซับซ้อนทางโครงสร้างมากขึ้นได้

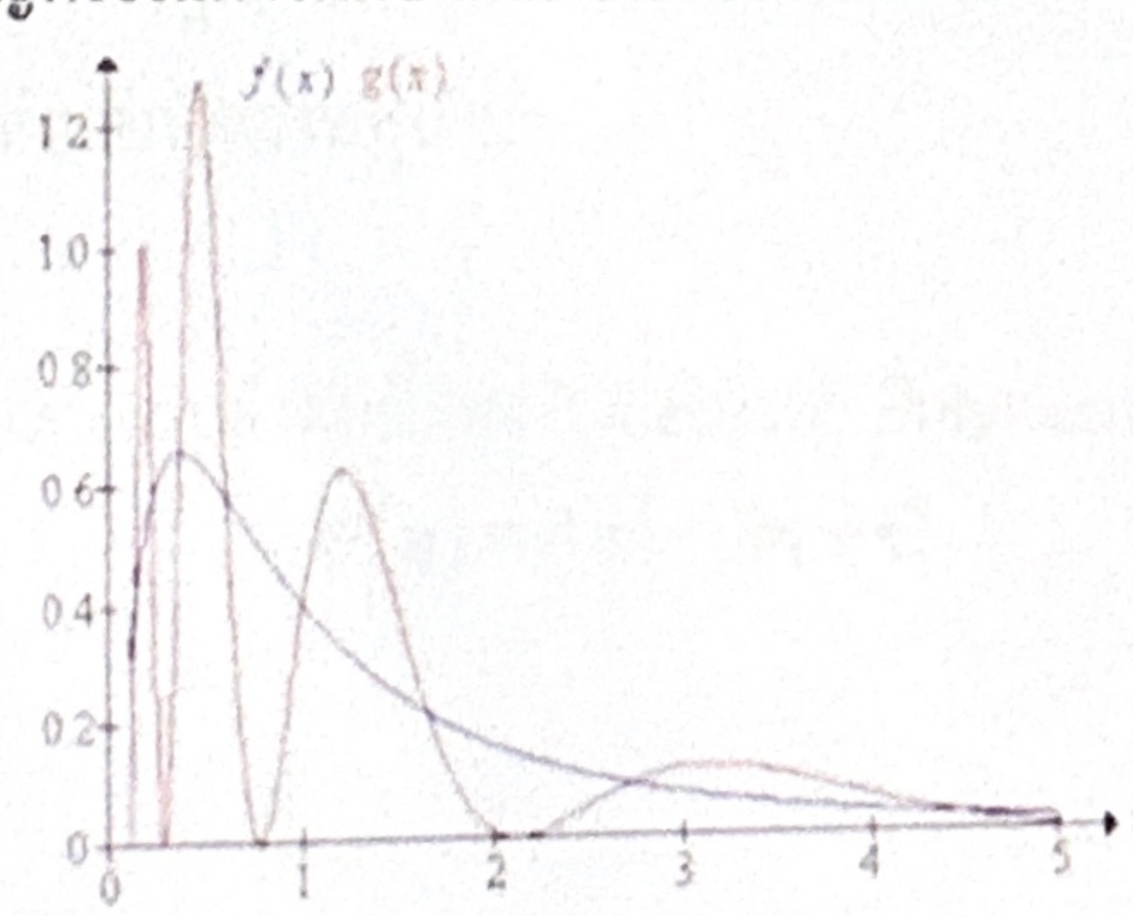


ภาพที่ 1 ตัวอย่างทฤษฎีคอมบินาทอริก

2.2 ทฤษฎีฟังก์ชันการสร้าง

ฟังก์ชันการสร้างเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการเก็บรวบรวมข้อมูลเกี่ยวกับลำดับจำนวนหรือการนับที่สัมพันธ์กัน โดยการใช้ฟังก์ชันการสร้างจะทำให้เราสามารถแทนเส้นทางกริดหรือจำนวนเส้นทางที่เป็นไปได้ในรูปแบบฟังก์ชันเดียวที่รวมข้อมูลทั้งหมดไว้ การสร้างฟังก์ชันจากข้อมูลของเส้นทางกริด เช่น จำนวนการก้าวในทิศทางต่าง ๆ ทำให้เราสามารถใช้เครื่องมือนี้ในการคำนวณหาค่าที่เป็นไปได้ของการนับเส้นทางในลักษณะที่มีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข

การใช้ฟังก์ชันการสร้างยังช่วยให้การคำนวณซับซ้อนน้อยลงเมื่อมีการเพิ่มข้อจำกัดในการเดินทาง เช่น การกำหนดจำนวนขั้นตอนที่แน่นอนหรือการระบุเงื่อนไขของจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด นอกจากนี้ ฟังก์ชันการสร้างยังสามารถใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะการนับในกรณีที่ไม่ต่อเนื่อง ทำให้ทฤษฎีนี้เป็นเครื่องมือสำคัญที่ใช้ในการศึกษาคอมบินาทอริกส์ที่ซับซ้อนและหลากหลายมากขึ้น



ภาพที่ 2 ตัวอย่างทฤษฎีฟังก์ชันการสร้าง

2.3 เมทริกซ์

เมทริกซ์คือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบของตาราง โดยมีแถว และคอลัมน์ ซึ่งแต่ละตำแหน่งในเมทริกซ์จะมีค่าหรือข้อมูลที่แตกต่างกัน เมทริกซ์สามารถใช้ได้ในหลายบริบท เช่น การแก้สมการเชิงเส้น การแปลงเชิงเส้น การประมวลผลภาพ และการวิเคราะห์ข้อมูล

การดำเนินการที่สามารถทำกับเมทริกซ์ ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาพันธะ นอกจากนี้ เมทริกซ์ยังมีหลายประเภท เช่น เมทริกซ์สี่เหลี่ยม, เมทริกซ์เฉพาะ, และเมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งแต่ละประเภทมีคุณสมบัติที่เฉพาะเจาะจง การศึกษาเมทริกซ์จึงเป็นสิ่งสำคัญในหลายสาขาวิชา เช่น วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

2.4 ทฤษฎีลำดับพหุนาม

ทฤษฎีลำดับพหุนาม เป็นลำดับที่นิยามด้วยพหุนามในรูปแบบของสมการพหุนามเชิงเส้นหรือเชิงซ้อน ซึ่งสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$P_n(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$$

โดยที่

$P_n(x)$	คือ ค่าของพหุนามลำดับที่ n
$a_k, a_{k-1}, ..., a_0$	คือ ตัวคูณของพหุนามที่เป็นค่าคงที่หรือขึ้นกับลำดับ n
k	คือ ดีกรีของพหุนาม

ตัวอย่างของลำดับพหุนามลำดับที่สอง (Quadratic Polynomial Sequence)

$$P(n) = An^2 + Bn + C$$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

ในการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ มีวัตถุประสงค์ในการหาสูตรคำนวณจำนวนวิธีการเดินทางของจุดทุกจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยมีขั้นตอนวิธีการดำเนินงาน ดังนี้

3.1 การสร้างและกำหนดรูปแบบของสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.1.1 สร้างสามเหลี่ยมและกำหนดชื่อจุดต่าง ๆ ภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.1.2 กำหนดวิธีการนับจำนวนเส้นทางการเดินภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.2 คำนวณหารูปแบบพจน์ของสามเหลี่ยมหัวกลับแต่ละชั้น

3.2.1 สร้างสมการพหุนามเพื่อหารูปแบบพจน์ในแต่ละชั้นของสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.2.2 ใช้เมทริกซ์ในการแก้สมการพหุนาม

3.2.3 แทนค่าของสัมประสิทธิ์ลงในสมการเพื่อหาผลลัพธ์

3.3 การหาความสัมพันธ์ของจุดในสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.3.1 กำหนดพิกัดของจุดต่าง ๆ บนสามเหลี่ยมหัวกลับ

3.3.2 นำความสัมพันธ์ของการเพิ่มจำนวนวิธีเดินทางของจุดมาเขียนเป็นสมการ

3.3.3 นำสมการที่ได้มาช่วยหาวิธีการของจุดชั้นที่มีข้อมูลไปหาพจน์ไม่พอ

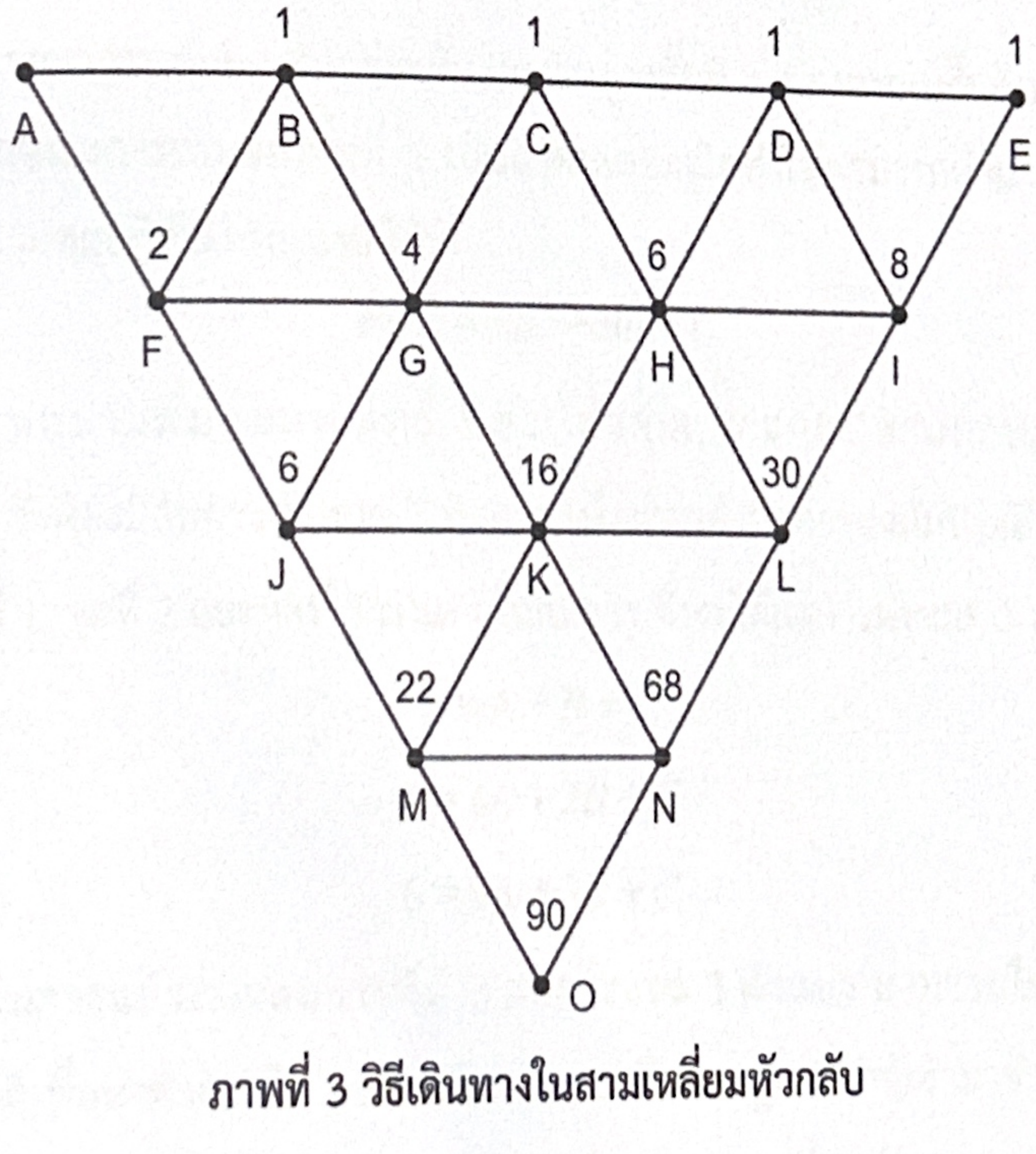
3.3.4 นำพจน์ที่ได้มาแทนในสูตรคำนวณเพื่อหาความสัมพันธ์

บทที่ 4
ผลการดำเนินงาน

ในการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ มีวัตถุประสงค์ในการหาสูตรคำนวณจำนวนวิธีการเดินทางของจุดทุกจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยผลการดำเนินงานออกมา ดังนี้

4.1 การสร้างและกำหนดรูปแบบของสามเหลี่ยมหัวกลับ

4.1.1 สร้างรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ 1 รูป และกำหนดชื่อให้กับจุดแต่ละจุดในสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยเริ่มจากจุด A ที่มุมซ้ายบน จากนั้นตั้งชื่อจุดถัดไปทางขวาในแต่ละชั้น ไล่เรียงลงไปจนถึงจุดสุดท้าย ซึ่งในรูปคือจุด O



ภาพที่ 3 วิธีเดินทางในสามเหลี่ยมหัวกลับ

4.1.2 กำหนดรูปแบบการนับจำนวนวิธีการเดินทาง โดยตัวเลขแสดงจำนวนวิธีของแต่ละจุดเกิดขึ้นจากการนับจำนวนวิธีที่สามารถเดินทางจากจุดเริ่มต้นมายังจุดแต่ละจุด เช่น จากจุดเริ่มต้น A เมื่อเดินทางไปที่จุด B จะสามารถเดินทางไปได้ทั้งหมด 1 วิธี และจากจุด A เมื่อเดินทางไปที่จุด K จะสามารถเดินทางไปได้ทั้งหมด 16 วิธี เป็นต้น

4.2 คำนวณหารูปแบบพจน์ของสามเหลี่ยมหัวกลับแต่ละชั้น

4.2.1 จากการสังเกตรูปแบบการเพิ่มของชั้นแต่ละชั้นภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ จึงได้ความสัมพันธ์ดังนี้

ชั้นที่	จุดที่ 1	จุดที่ 2	จุดที่ 3	จุดที่ 4	จุดที่ 5
1	0 (จุดเริ่มต้น)	1	1	1	1
2	2	4	6	8	-
3	6	16	30	-	-
4	22	68	-	-	-
5	90	-	-	-	-

ตารางที่ 1 การเพิ่มขึ้นของวิธีเดินทางของจุดในชั้นแต่ละชั้น

เมื่อพิจารณาการเพิ่มของชั้นแต่ละชั้น โดยเริ่มจากชั้นที่ 2 เนื่องจากในชั้นที่ 1 ไม่มีการเพิ่มขึ้น จะเห็นได้ว่า ลักษณะการเพิ่มของชั้นที่ 2 เป็นลำดับเลขคณิตทำให้สามารถนำมาคำนวณหาพจน์ โดยอ้างอิงสูตรจากทฤษฎีลำดับพหุนาม ได้ว่า

$$P(n) = An^2 + Bn + C$$

เมื่อได้สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ 3 ตัว ได้แก่ A, B และ C ตามทฤษฎีบทของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งต้องมีสมการทั้งหมด 3 สมการ เพื่อแทนค่าหาค่าของสัมประสิทธิ์ A, B และ C ดังนั้นจึงนำจุดที่ 1, จุดที่ 2 และจุดที่ 3 มาแทนในสมการ ซึ่งจะได้สมการทั้งหมด 3 สมการ ดังนี้

$$2 = A + B + C$$

$$4 = 4A + 2B + C$$

$$6 = 9A + 3B + C$$

4.2.2 ในการแก้ระบบสมการที่มี 3 สมการและ 3 ตัวแปร สามารถใช้วิธีการคำนวณตามขั้นตอนปกติเพื่อหาคำตอบได้ อย่างไรก็ตาม หากนำทฤษฎีเมทริกซ์เข้ามาช่วยในการคำนวณจะทำให้กระบวนการแก้สมการมีความสะดวกและเป็นระบบมากขึ้น ช่วยลดความซับซ้อนในการคำนวณทำให้การหาคำตอบของสมการเป็นไปอย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพมากกว่า โดยสามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

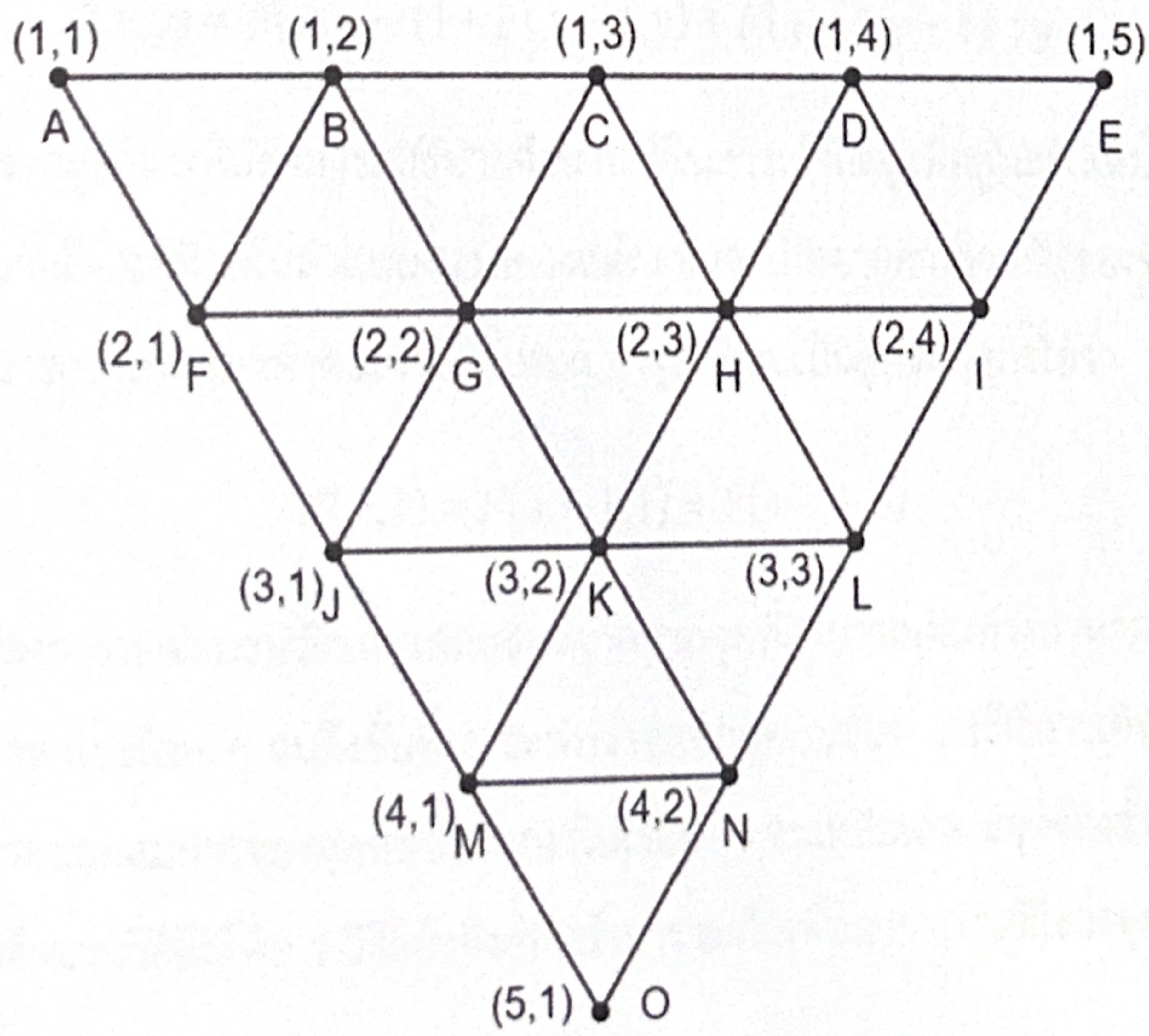
4.2.3 จากการคำนวณโดยใช้เมทริกซ์ ทำให้ได้ค่าของสัมประสิทธิ์ A เป็น 0 ค่าของสัมประสิทธิ์ B เป็น 2 และค่าของสัมประสิทธิ์ C เป็น 0 เมื่อนำค่าที่ได้มาแทนในสมการเดิม จะทำให้สามารถหารูปแบบพจน์ของชั้นที่ 2 ออกมาได้ดังนี้

$$P(n) = 0n^2 + 2n + 0 \text{ หรือ } P(n) = 2n$$

เมื่อได้รูปแบบพจน์แล้ว ทำให้หากต้องการหาจำนวนวิธีการเดินทางของจุดที่ n ในชั้นที่ 2 สามารถนำลำดับของจุด n มาแทนลงในสมการที่ได้ และคำนวณเพื่อหาจำนวนวิธีการเดินทางได้ทันที ซึ่งสามารถใช้วิธีนี้ในการหารูปแบบพจน์ของสามเหลี่ยมหัวกลับได้ทุกชั้น

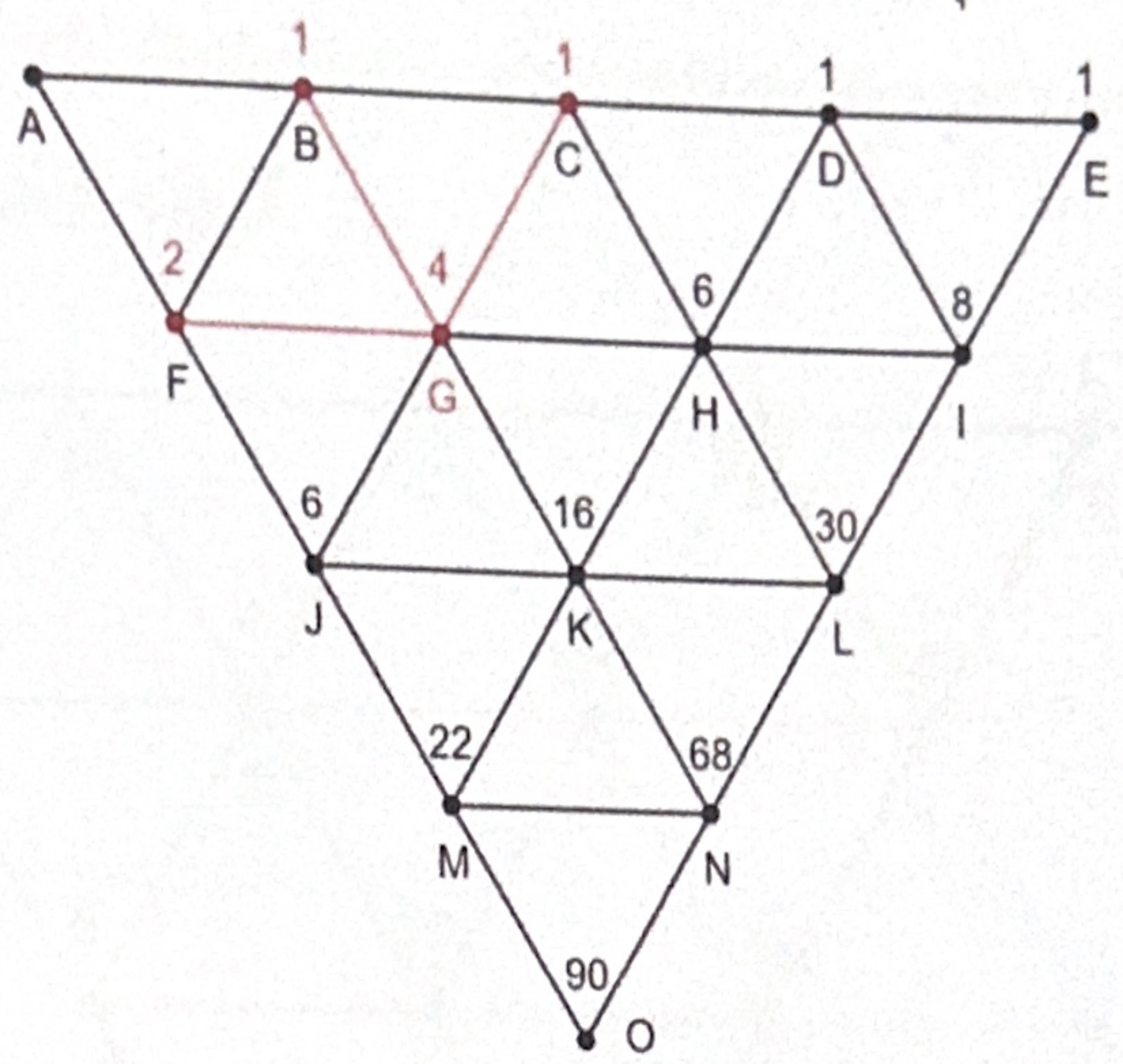
4.3 การหาความสัมพันธ์ของจุดในสามเหลี่ยมหัวกลับ

4.3.1 กำหนดพิกัดของจุดแต่ละจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับเป็นคู่อันดับ (x, y) โดยที่ x แทนลำดับชั้นของจุดและ y แทนลำดับของจุดบนชั้นนั้น โดยกำหนดให้จุดเริ่มต้นอยู่ที่พิกัด (1,1)



ภาพที่ 4 การกำหนดพิกัดของจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับ

4.3.2 เมื่อกำหนดคู่อันดับของแต่ละจุดเป็น (x,y) แล้ว จะสามารถนำพิกัดดังกล่าวมาอธิบายหลักการเพิ่มขึ้นของแต่ละจุดในสามเหลี่ยมหัวกลับได้ โดยสามารถเขียนเป็นสูตรของการเพิ่มขึ้นนี้ในรูปแบบสมการ ซึ่งช่วยให้เข้าใจโครงสร้างและลำดับของจุดต่าง ๆ ได้อย่างชัดเจน ดังนี้



ภาพที่ 5 ภาพแสดงหลักการเพิ่มของจุดโดยจุดที่เดินทางมาหาตัวเอง

เมื่อพิจารณาว่าจุดแต่ละจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับเกิดจากการรวมกันของจุดที่สามารถเดินทางมาหาตนเองได้ 3 จุด ทำให้เกิดจำนวนวิธีในการเข้าถึงจุดนั้น โดยจุดดังกล่าวจะต้องไม่อยู่ที่ตำแหน่งที่ 1เนื่องจากตำแหน่งที่ 1 จะมีจุดที่สามารถเดินทางมาหาได้เพียง 2 จุดเท่านั้น ทำให้ได้สูตรว่า

$$F(x,y) = F(x,y-1) + F(x-1,y) + F(x-1,y+1) \ ; \ y \neq 1$$

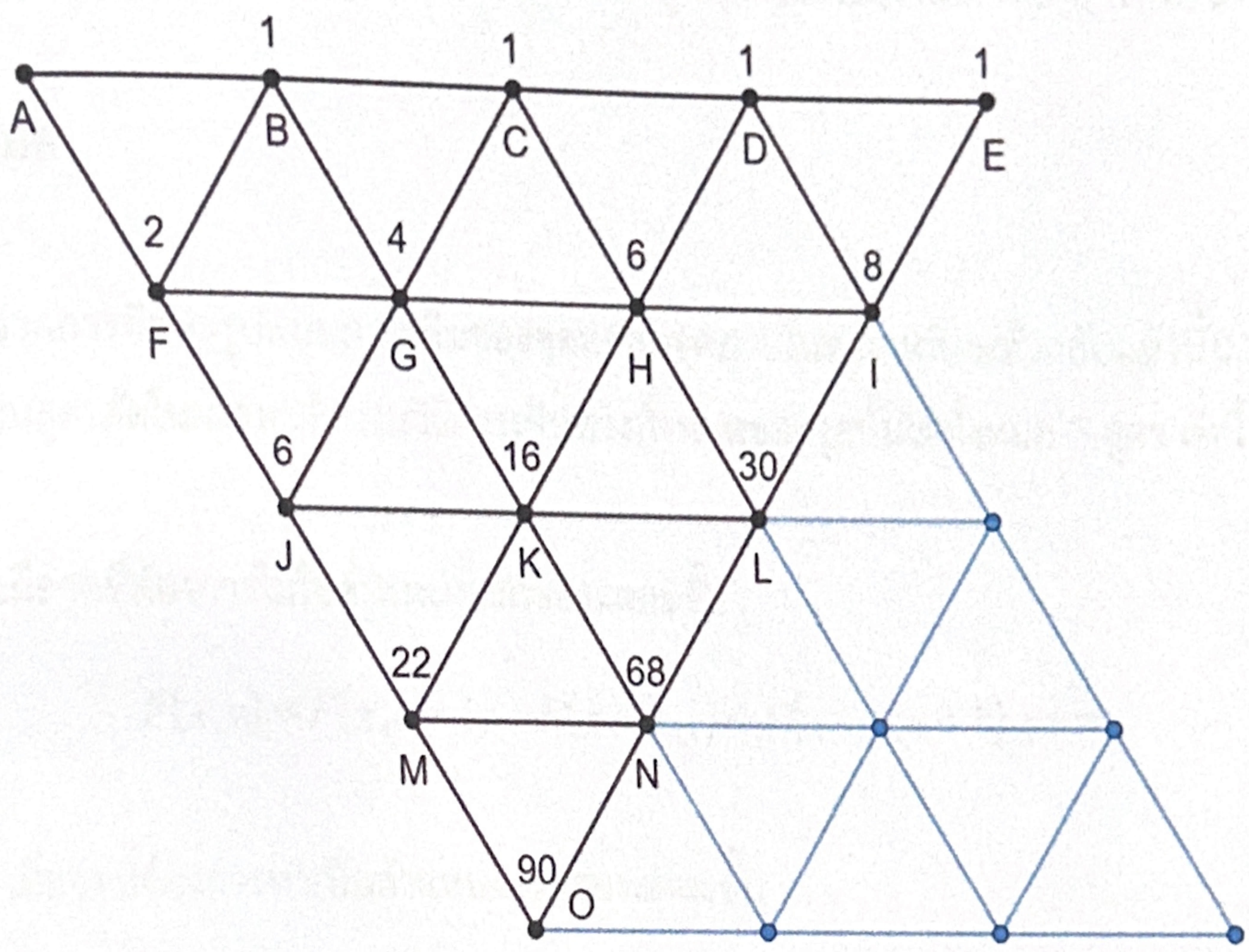
เนื่องจากสูตรแรกไม่สามารถอธิบายจำนวนวิธีในการเข้าถึงจุดที่อยู่ในตำแหน่งแรกได้ จึงเกิดสูตรที่ 2 ซึ่งหมายถึง จุดที่อยู่ในตำแหน่งแรกของแต่ละชั้นจะเกิดจากการรวมกันของจำนวนวิธีในการเข้าถึงจุดที่สามารถเดินทางมาหาตนเองได้ทั้งหมด 2 จุด เขียนเป็นสูตรอีกสูตรได้ว่า

$$F(x,1) = F(x-1,1) + F(x-1,2)$$

เมื่อต้องการหาจำนวนวิธีของแต่ละชั้นที่เกิดจากจุดที่สามารถเดินทางมาหาตนเอง หากค้นหาจุดที่เดินทางมาหาไปเรื่อย ๆ จนถึงชั้นที่ 1 จะพบว่าจุดทุกจุดบนชั้นที่ 1 มีวิธีการเดินทางเพียง 1 วิธี ดังนั้นจึงสามารถย่อยสมการของจุดที่ต้องการหาไปเรื่อย ๆ จนเหลือเฉพาะจุดของชั้นที่ 1 แล้วแปลงค่าออกมาเป็นจำนวนวิธีซึ่งก็คือ 1 วิธีแล้วจึงค่อยนำมารวมกันเพื่อหาจำนวนวิธีของจุดที่ต้องการได้

$$F(1,y) = 1$$

4.3.3 จากข้อมูลวิธีการหารูปแบบพจน์ในข้อ 4.2 นั้นไม่สามารถหาพจน์ตั้งแต่ชั้นที่ 3 เป็นต้นไปได้ เนื่องจากจำนวนข้อมูลของวิธีแต่ละจุดไม่เพียงพอ ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้โดยการต่อจุดออกไปด้านข้างของชั้นที่ต้องการข้อมูลเพิ่มเติม และคำนวณหาวิธีของจุดเหล่านั้นโดยใช้สูตรในข้อ 4.3.2 มาประยุกต์ เพื่อให้ได้ข้อมูลจำนวนวิธีการเดินทางของจุดที่ต่อออกมา ซึ่งสามารถนำไปใช้แทนในสมการเพื่อหาพจน์เพิ่มเติมได้



ภาพที่ 6 การต่อจุดออกไปด้านข้างสามเหลี่ยมหัวกลับ

4.3.4 เมื่อสามารถหาพจน์ของสามเหลี่ยมหัวกลับได้ทุกชั้นแล้ว สามารถนำข้อมูลพจน์ที่ได้มาแทนในสูตรเพื่อลดเวลาในการย่อยสมการไปเรื่อย ๆ จนถึงชั้นที่ 1 ยกตัวอย่างเช่น หากต้องการหาจำนวนวิธีของจุดที่มีคู่อันดับเป็น $(3,2)$ ก็สามารถนำคู่อันดับนี้ไปใส่ในสูตร ซึ่งจะทำให้ได้ว่าจุด $(3,2)$ เกิดจากจุด $(2,1)+(2,2)+(2,2)+(2,3)$ จะสังเกตได้ว่าจุดทั้งหมดอยู่ในชั้นที่ 2 ดังนั้นสามารถนำพจน์ของชั้นที่ 2 มาช่วยในการคำนวณได้โดยไม่ต้องย่อยสมการจนถึงชั้นที่ 1 โดยนำตัวเลขในตำแหน่ง y เข้าไปแทนในตัวแปร n ในพจน์ของชั้นที่ 2 จะได้ว่าจุด $(3,2)$ เกิดจาก 2 + 4 + 4 + 6 ซึ่งคำนวณออกมาได้ผลลัพธ์เท่ากับ 16 วิธี หกล่าวคือ จุด $(3,2)$ มีจำนวนวิธีการเดินทางไปหาทั้งหมด 16 วิธี

บทที่ 5
สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ สามารถนำไปสู่ข้อสรุปของโครงงานได้ คณะผู้จัดทำจึงได้สรุปผลการศึกษาไว้ ดังนี้

5.1 สรุปผล

จากการศึกษารูปแบบการเพิ่มของจุดแต่ละจุดภายในสามเหลี่ยมหัวกลับแล้วนั้น ทำให้สรุปออกมาเป็นสูตรลัดในการหาจำนวนวิธีการเดินทางทั้งหมดของจุดนั้นได้ทั้งหมด 3 สูตร ดังนี้

เมื่อจุดที่ต้องการไม่ใช่ตำแหน่งแรกของแต่ละชั้น

$$F(x,y)=F(x,y-1)+F(x-1,y)+F(x-1,y+1)\ ;\ y\neq 1$$

เมื่อจุดที่ต้องการหาเป็นตำแหน่งแรกของแต่ละชั้น

$$F(x,1)=F(x-1,1)+F(x-1,2)$$

เมื่อจุดที่ต้องการหาอยู่ในชั้นที่ 1

$$F(1,y)=1$$

5.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีในการเดินทางภายในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ โดยนำรูปแบบหลักการเพิ่มของจุดภายในสามเหลี่ยมมาสร้างเป็นสูตรลัดในการคำนวณ และนำหลักการจากทฤษฎีลำดับพหุนามมาหารูปแบบพจน์ในแต่ละชั้น เพื่อนำมาช่วยทำให้การคำนวณของสูตรลัดนั้นรวดเร็วและมีประสิทธิภาพมากขึ้น เนื่องจากสามารถนำรูปแบบพจน์ของชั้นก่อนหน้าจุดที่หา มาหาจำนวนวิธีการเดินทางได้เลย โดยไม่ต้องใช้สูตรเพื่อย่อยสมการลงไปจนถึงสามเหลี่ยมชั้นแรกเพื่อหาค่าเป็นตัวเลข ผ่านการสร้างรูปสามเหลี่ยมหัวกลับขึ้นมาเพื่อศึกษาด้วยโปรแกรม GeoGebra

5.3 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาโครงงานคณิตศาสตร์ เรื่อง การหาจำนวนวิธีในการเดินทางในรูปสามเหลี่ยมหัวกลับ คณะผู้จัดทำมีข้อเสนอแนะในการนำผลการศึกษาไปใช้ ดังนี้

1. สามารถค้นหารูปแบบการเพิ่มที่แน่นอนของพจนในแต่ละชั้น
2. พัฒนาวิธีการเก็บข้อมูลจุดโดยไม่ต้องเพิ่มจุดออกไปด้านข้าง

บรรณานุกรม

Darij Grinberg. (2566). **An introduction to graph theory**. (ออนไลน์). สืบค้นจาก : https://arxiv.org/pdf/2308.04512 [18 กรกฎาคม 2567]

Gabriella Baracchini. (2559). **Dyck Paths and Up-Down Walks**. (ออนไลน์). สืบค้นจาก : https://math.mit.edu/~apost/courses/18.2042016/18.204_Gabriella_Baracchini_final_paper.pdf [18 กรกฎาคม 2567]

Kennada. (2563). **คอมบินาทอริก กฎการบวก**. (ออนไลน์).สืบค้นจาก : https://www.youtube.com/watch?v=7Ur6voCxDvw [16 กรกฎาคม 2567]

Peter Selinger. (2567). **Matrix Theory and Linear Algebra**. (ออนไลน์). สืบค้นจาก: https:/www.mathstat.dal.ca/~selinger/linearalgebra/downloads/LinearAlgebra.pdf [16 กรกฎาคม 2567]

Richard P. Stanley. (2554). **Enumerative Combinatorics.** (ออนไลน์). สืบค้นจาก : https://www.ms.uky.edu/~sohum/putnam/enu_comb_stanley.pdf [18 กรกฎาคม 2567]

Risarat. (2563). **คอมบินาทอริกและความน่าจะเป็นเบื้องต้น**. (ออนไลน์). สืบค้นจาก : https://risararat603.blogspot.com/ [16 กรกฎาคม 2567]

Ziyue Chen. (ม.ป.ป.). **Introduction to generating functions and their applications**. (ออนไลน์). สืบค้นจาก : https://www.math.uchicago.edu/~may/REU2022/REUPapers/Chen,Ziyue.pdf [17 กรกฎาคม 2567]