Ayudantía N.10

Daniel Sánchez

10 de Noviembre 2022

1. Determine si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales:
   (a) $T(x, y) = (x^2, y^2)$
   (b) $T(x, y, z) = (x - y, z - y)$
   (c) $T(x, y) = (\sin(x), y, 0)$
2. Sea $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0 \wedge 2x + 3y - t = 0\}$.
   (a) Determine un conjunto generador y base para A.
   (b) Determine la dimensión de A.
3. Dadas las bases $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ y $C = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 1)\}$
   (a) Determine la matriz cambio base de B a C.
   (b) Determine la matriz cambio base de C a B.
4. Demuestre que la función definida por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a - b, 2c + b)$$

   Es una transformación lineal.

Tips

(a) **Matriz cambio base**:
Sean D y B bases ordenadas de V (espacio de dimensión finita), se tiene que:

$$[D' \mid B'] \approx [I_n \mid P_{D \leftarrow B}]$$
$$[B' \mid D'] \approx [I_n \mid P_{B \leftarrow D}]$$
$$[P]_B = P_{B \leftarrow D} \cdot [P]_D$$
$$[P]_D = P_{D \leftarrow B} \cdot [P]_B$$
$$P_{D \leftarrow C} = (P_{C \leftarrow D})^{-1}$$

(b) **Transformaciones lineales**:
Se debe cumplir que:

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n,\ T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$
$$\forall v \in \mathbb{R}^n \text{ y } \alpha \in \mathbb{R},\ T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

O en su defecto una combinación lineal de estas proposiciones.

(c) **Espacios vectoriales**:
Sea A una matriz de $M_n(\mathbb{R})$:

i. **Fil(A)**: Debemos usar la matriz escalonada y tomar las filas de esa matriz cuyos unos principales existan, se escribe con $\langle\rangle$.

ii. **Col(A)**: Debemos fijarnos en la matriz escalonada y tomar las columnas de la matriz original y formar el espacio, se escribe con $\langle\rangle$.

iii. **Ker(A) o Im(A)**: Debemos tomar la matriz escalonada reducida y despejar según se estime conveniente, reemplazar en el vector de variables asociadas y factorizar. Dependiendo de la cantidad de parámetros es la dimensión final del espacio.