Ayudantía Álgebra Lineal N.6

Daniel Sánchez

7 de Octubre 2022

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
   (a) Determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$, la matriz A es invertible.
   (b) Considerando $k = 2$, calcule, si se puede, A^{-1}, a través del Cof(A) y la Adj(A).
2. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine A^{-1}.
   (b) Escriba A^{-1} como producto de matrices elementales.
   (c) Escriba A como producto de matrices elementales.
3. Dado el SEL:
$$\begin{cases} x + z + w & = & 5 \\ x - z + w & = & 1 \\ x + y + z + w & = & 3 \\ 2x + 2z & = & 2 \end{cases}$$
   (a) Determine su solución particular por medio de factorización LU.
   (b) Determine su solución homogénea.
   (c) Determine su solución general.

Tips

1. Elementales:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Cambio de filas:} & (E_{ij})^{-1} & = & E_{ij} \\ \text{Multiplicación por escalar:} & (E_i(r))^{-1} & = & E_i(\frac{1}{r}) \\ \text{Operación fila:} & (E_{ij}(k))^{-1} & = & E_{ij}(-k) \end{array}$$

2. Estructura de matriz normal e inversa con matrices elementales:

$$\begin{array}{lccc} \text{Matriz normal:} & (E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ... \cdot (E_{(n-1)})^{-1} \cdot (E_{(n)})^{-1} & = & A \\ \text{Matriz inversa:} & (E_{(n)} \cdot E_{(n-1)} \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1) & = & A^{-1} \end{array}$$

3. Aplicación de la inversa:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}(AB)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABCD)^{-1} = (CD)^{-1}(AB)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

4. Cantidad de parámetros:

   n: Número de incógnitas

   r: Rango de la matriz

   p: Parámetros

$$(n - r) = p$$

5. Solución general:

   X_G: Solución general

   X_P: Solución particular

   X_H: Solución homogénea

$$X_G = X_P + X_H$$

6. Determinante y matrices elementales:

$$\begin{array}{lrcc} \text{Propiedades:} & |E_{ij}(k)| & = & 1 \\ & |E_i(r)| & = & r \\ & |E_{ij}| & = & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} |A| &= |(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ... \cdot (E_{(n-1)})^{-1} \cdot (E_{(n)})^{-1}| \\ &= |(E_1)^{-1}| \cdot |(E_2)^{-1}| \cdot ... \cdot |(E_{(n-1)})^{-1}| \cdot |(E_{(n)})^{-1}| \end{aligned}$$