

Ayudantía Matemáticas Avanzadas I N.8

Daniel Sánchez

28 de Abril 2022

1. Sumatorias

(a) Calcule el valor de $\sum_{k=15}^{100} \left[\frac{1}{k^2 + k} + \frac{2^{k+2}}{3^k} \right]$

(b) Calcule el valor de $\sum_{k=1}^n 2\sqrt{3} \left[1 - \frac{1}{2^k} \right]$

(c) Determine el valor de $n \in \mathbb{N}$ para que $\sum_{k=1}^n (2k + 8) = 136$

2. Progresiones

(a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $a_1 = 1$ y para todo $n > 1$ se cumple que $a_{n+1} = (-1)^{n+1} + a_n$. Calcule:

- $\sum_{i=1}^{100} a_i$
- $\sum_{i=1}^{100} a_{2i-1}$

(b) Dada la sucesión de números definida por: $a_1 = 3; a_{n+1} = a_n + 3(n + 1), n \in \mathbb{N}$. Calcule el valor de la siguiente sumatoria: $\sum_{i=1}^{150} a_i$

(c) Si se sabe que: $\sum_{k=1}^{24} 2a_k^2 = 560, \sum_{k=1}^{24} (3a_k - 2) = 125, a_{25} = -4$ y que

$a_{26} = 7$. Calcule el valor de la siguiente sumatoria: $\sum_{k=1}^{26} (2a_k - 3)^2$

3. Números Reales

- (a) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a > b$. Determine usando los axiomas y propiedades de orden de los números reales, si es verdadera o falsa la desigualdad:

$$\frac{a^3b - ab^3}{b - a} > 0.$$

- (b) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a - 2b > 0 \wedge 3c - d > 0$$

Determine usando los axiomas de orden de los números reales, si es verdadera o falsa la desigualdad:

$$3ac + 2bd > ad + 6cb.$$

- (c) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre:

- $(a + b)(a^{-1} + b^{-1}) \geq 4.$
- $a + a^{-1} \geq 1.$

4. Inecuaciones y desigualdades

(a) $\frac{1}{2x - 5} \geq 1$

(b) $\frac{x}{x - 1} \geq \frac{x - 1}{x}$

(c) $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \geq 0$

5. Valor absoluto

(a) $|2x - 1| < 3$

(b) $|5 - |x - 2|| < 7$

(c) $\left| \frac{x}{1 - x} \right| \leq \frac{1}{x}$