Harmonická analýza – shrnutí

Fourierův rozvoj lze zapsat dvěma způsoby, které jsou rovnocenné.

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \ b_n \sin\,(n\omega_0 t)$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\,(n\omega_0 t - \varphi_n)$$

Z jednoho tvaru můžeme vypočítat druhý

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + \ b_n^2} \qquad \varphi_n = arctg\ \frac{b_n}{a_n}$$

a obráceně

$a_n = A_n \cos \varphi_n$ $b_n = A_n \sin \varphi_n$

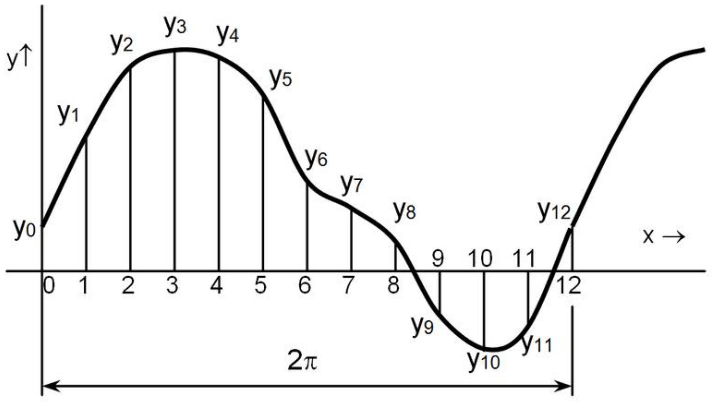
Metody harmonické analýzy

- Matematická metoda
- Numerická metoda
- Grafická metoda

Numerická metoda harmonické analýzy

U průběhů získaných měřením bývá obtížné převést je na analytickou funkci. V takovém případě je možné řešení provést numericky.

Při tomto způsobu nejprve rozdělíme periodu signálu ***2π*** na konečný počet stejných dílků s velikostí ***Δα = 2π/c*** a v jejich koncových bodech určíme hodnoty funkce ***y_k***. Tím vyjádříme spojitou funkcí konečným počtem hodnot, vzorků. Čím je větší počet dílků, tím je přesnější výsledek. Zároveň s tím se ale zvětšuje množství potřebných výpočtů.



Pro určení ***n*** harmonických musíme volit počet dílků ***c ≥ 2n + 2***.

Fourierův rozvoj (upravený, člen a_0 je zvlášť)

$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ (poznámka: suma začíná od jedničky)

Vzorce pro výpočet koeficientů mají tvar:

$$a_n = \frac{2}{c}\sum_{k=1}^{c} y_k \cos(n\alpha_k)$$

$$b_n = \frac{2}{c}\sum_{k=1}^{c} y_k \sin(n\alpha_k)$$

Stejnosměrná složka bude:

$$a_0 = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c} y_k$$

Příklad:

Určete Fourierův rozvoj daného průběhu po čtvrtou harmonickou (n = 0, 1, 2, 3, 4)

Zadané hodnoty: perioda signálu, funkční hodnoty y_k

Postup:

Zvolíme c = 12

Pak je $\Delta\alpha = 2\pi/c = 2\pi/12 = \pi/6$

$\boldsymbol{\alpha_k = k \cdot \Delta\alpha}$ *(tj.* $\boldsymbol{\alpha_1 = 1 \cdot \pi/6;\ \alpha_2 = 2 \cdot \pi/6;\ \alpha_3 = 3 \cdot \pi/6;} \ldots)$

Výpočty koeficientů

$a_0 = 1/12 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ y_{12})$

$a_1 = \frac{2}{12} \sum_{k=1}^{12} y_k \cos(1\alpha_k) = 2/12 \cdot (y_1\cos(1 \cdot \alpha_1) + y_2\cos(1 \cdot \alpha_2) + \ldots + y_{12}\cos(1 \cdot \alpha_{12}))$

nebo pro účely zápisu programu v cyklu lze upravit (rozepsání α_k)

$a_1 = 2/12 \cdot (y_1\cos(1 \cdot 1\,\Delta\alpha) + y_2\cos(1 \cdot 2\,\Delta\alpha) + \ldots + y_{12}\cos(1 \cdot 12\,\Delta\alpha))$

další koeficient

$a_2 = 2/12 \cdot (y_1\cos(2 \cdot \alpha_1) + y_2\cos(2 \cdot \alpha_2) + \ldots + y_{12}\cos(2 \cdot \alpha_{12}))$

$a_2 = 2/12 \cdot (y_1\cos(2 \cdot 1\,\Delta\alpha) + y_2\cos(2 \cdot 2\,\Delta\alpha) + \ldots + y_{12}\cos(2 \cdot 12\,\Delta\alpha))$

Podobně pro další koeficienty.

V programu jsou součty realizovány cyklem.

Zadané hodnoty

f = 50 Hz

$y_0 = 13$	$y_1 = 25$	$y_2 = 43$	$y_3 = 56$
$y_4 = 57$	$y_5 = 28$	$y_6 = 7$	$y_7 = -14$
$y_8 = -28$	$y_9 = -29$	$y_{10} = -28$	$y_{11} = 3$

Naprogramujte výpočet $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$