

2019新生赛AHK、BEF题解

Setsuna

2019.11.03

A

First Blood: 李扬 (+) 5

题意

问你能否把一个质数拆成两个质数的和。

题解

显然奇数加奇数一定为偶数，所以给定的质数一定要是 $2+(p-2)$ 这样的形式才有解，判断下 $p-2$ 是否是质数即可，复杂度 $O(\sqrt{p})$

H

First Blood: 李扬 (+) 52

题意

给有根树染上 k 个颜色，要求每个颜色都用上且相邻两个节点不同色，求方案数。

H

题解

不考虑所有颜色都用上的情况可以发现，除了根的颜色有 k 种选择，其他节点都只有 $k-1$ 种选择。所以方案数为 $k * (k - 1)^{n-1}$ ，和树的形态无关。

为了方便，不妨令 $f(k) = k * (k - 1)^{n-1}$ 。

H

然后考虑如何从中扣掉没有用上所有颜色的方案数。

最多用上 $k - 1$ 个颜色的方案数有 $\binom{n}{1} * f(k - 1)$ ，答案要扣掉它。

H

我们发现重复扣掉了最多用上了 $k - 2$ 个颜色的方案数，我们要把它加回来，也就是把答案加上 $\binom{n}{2} * f(k - 2)$ 。

同理这样做会多加上了最多用上 $k - 3$ 个颜色的方案数.....

.....

H

整个过程就是一个简单的容斥。

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} * f(k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} * (k-i) * (k-i-1)^n \end{aligned}$$

H

这题放了 $O(n * k)$ 过，只要暴力预处理组合数，暴力乘就做完了。

更快的做法是预处理出一行的组合数，幂乘用快速幂，复杂度 $O(k * \log(n))$

K

First Blood: 李扬 (+) 237

题意

给一个有根树，定义子树的贡献为它的众数和，求所有子树的贡献。

题解真的写在题目里了，只要读懂了然后自己实现一个重链剖分，剩下的代码抄抄抄就做完了。

可以百度 dsu on tree 参考一下网上的资料。

B

First Blood: 徐嘉晟 (+1) 57

题意

给一个01矩阵，求满足所有元素值相同且在位置上位于同一行或同一列的方案数。

题解

只要记下一行/列的1/0个数，那这行/列的贡献就是 $2^{cnt_1} + 2^{cnt_0} - 1$ 。我们在计算的时候会把只取一个元素的方案重复计算，减掉这 $n * m$ 种即可。

E

First Blood: 李扬 (+1) 118

题意
求

$$\sum_{i=3}^n gcd_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j}$$

E

题解

如果 i 只有一个素因子，那么 $\gcd_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} = i$ 的唯一素因子。

否则 $\gcd_{j=1}^{i-1} \binom{i}{j} = 1$ 。

暴力分解也能过。

埃筛一下素因子就能得到一个 $O(n \log \log n)$ 的做法。

F

First Blood: 李扬 (+1) 270

题意

给一个排列，每次可以把某个数放到最左边或最右边，求把原排列变成升序最少需要的操作次数。

F

题解

如果一些连续的数在原序列中的相对位置是对的，那么我们可以不用动它们，问题变成了找最长的子序列满足子序列是一个公差为1的等差数列。最终的答案就是原序列长度减掉这个子序列的长度。

F

我们令 $a[i]$ 表示原序列， $dp[i]$ 表示以数值 i 结尾的最长满足条件的子序列。

那么有 $dp[a[i]] = dp[a[i] - 1] + 1$ ，从左往右扫一遍就做完了。

标程的写法在有重复数字的时候也是对的。