

Day7B. Nyan.cat



- First Solved:
- 题意： n 长序列， k 次操作为一轮， 重复执行 m 轮， 操作有单点+1， 单点清零， 两点交换。 ($n, k \leq 100, m \leq 10^9$)
- 看到 m 的范围， 大致能猜出两种解题思路
 - 找规律， 观察做完 k 次操作对序列的影响， 以及重复做的影响是否有规律
 - 考虑 $\log m$ 或 \sqrt{m} 复杂度的做法， 前者有矩阵快速幂， 后者有分块

Day7B. Nyan.cat



- 题意： n 长序列， k 次操作为一轮， 重复执行 m 轮， 操作有单点 $+1$ ， 单点清零， 两点交换。 ($n, k \leq 100, m \leq 10^9$)
- 找规律， 手枚一个两三轮的情形
- $n = 2 \quad m = 2 \quad k = 4$
 - a_1++
 - a_1++
 - a_2++
 - $swap(a_1, a_2)$
 - 一轮结束后 $A = [1, 2]$
 - 两轮结束后 $A = [3, 3]$
- $n = 3 \quad m = 3 \quad k = 6$
 - a_1++
 - a_1++
 - $swap(a_1, a_3)$
 - a_2++
 - $swap(a_1, a_2)$
 - $a_2 = 0$
 - 一轮结束后 $A = [1, 0, 2]$
 - 两轮结束后 $A = [1, 0, 3]$
 - 三轮结束后 $A = [1, 0, 3]$

Day7B. Nyan.cat



- 题意： n 长序列， k 次操作为一轮， 重复执行 m 轮， 操作有单点 +1， 单点清零， 两点交换。 ($n, k \leq 100, m \leq 10^9$)
- 矩阵快速幂， 把 k 次操作整合成一个操作矩阵 $X = [...]$
- 连续做 m 次即 X^m ， 可以用快速幂优化到 $O(\log m \times \text{矩阵乘法代价})$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

- 单点 +1 呢？

Day7B. Nyan.cat



- 题意：n长序列，k次操作为一轮，重复执行m轮，操作有单点+1，单点清零，两点交换。 $(n, k \leq 100, m \leq 10^9)$

- 矩阵快速幂，把k次操作整合成一个操作矩阵 $X = [...]$

$$\bullet \begin{bmatrix} \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Day7B. Nyan.cat



- 题意： n 长序列， k 次操作为一轮， 重复执行 m 轮， 操作有单点+1， 单点清零， 两点交换。 ($n, k \leq 100, m \leq 10^9$)
- 矩阵快速幂， 把 k 次操作整合成一个操作矩阵 $X = [...]$
- 将 k 次操作的对应矩阵依次乘起来， 注意左乘和右乘有区别
- 再对结果矩阵快速幂即可求出答案
- 来算一算复杂度...
- 每一个操作矩阵的维度都是 $(n + 1) \times (n + 1)$ 的
- 共有 $(k + \log m)$ 次矩阵相乘， 朴素矩阵乘是 $O(n^3)$ 的
- 总计达到了 10^8 的级别!

Day7B. Nyan.cat



- 题意： n 长序列， k 次操作为一轮， 重复执行 m 轮， 操作有单点+1， 单点清零， 两点交换。 ($n, k \leq 100, m \leq 10^9$)
- 矩阵快速幂， 把 k 次操作整合成一个操作矩阵 $X = [...]$
- 将 k 次操作的对应矩阵依次乘起来， 注意左乘和右乘有区别
- 再对结果矩阵快速幂即可求出答案
- $\log 10^9 \approx 30$ ， 瓶颈出在了 $O(kn^3)$ 的预处理上
- 考虑到操作矩阵非常简单， 乘操作矩阵只对1~2列造成影响
- 可以对3种操作分别构造出 $O(n)$ 的转移， 避免矩阵乘法