usstsiw第四十六次热身赛题解报告

A题题解（难度：☆）

First solved: 我佛了, 00:35 (+1).

DFS。比较简单的四联通 DFS 题，需要注意的一点是：因为要保证刚好在 T 的时间走到终点，因此可能需要迂回绕道进行，比如:

4	4	6	
S	.	.	.
X	.	.	X
D	.	.	.
X	X	.	.

如上图所示，如果单纯从 S 走到 D，最快只需要 4 步就能到达，但是题目要求 6 步，因此需要迂回行走！这里就涉及到剪枝问题（**奇偶剪枝**）：输入起点和终点的坐标，判断 $T-(|x_S-x_D|+|y_S-y_D|)$奇偶性，如果为奇数则不可能走到（**因为迂回行走多出来的步数必定为偶，可以画图验证**），输出“No”;如果为偶数，则进行判断。

B题题解（难度：☆）

First solved: 立直一发AC, 01:03 (+).

BFS 。当然你也可以用 DFS ，**但是题目涉及最值求解的时候建议使用BFS**。做的时候只需将字符行列坐标转换为数字，这样处理起来比较方便，其它都是常规操作，不再赘述！

C题题解（难度：☆）

First solved: 我佛了, 02:56 (+4).

$1e19$ 刚好爆的 $longlong$，所以只需要开$unsigned\ long\ long$ 答案用 $\%.3f$ 的 $double$ 输出就行了

D题题解（难度：☆）

First solved: 我佛了, 00:16 (+).

比较经典的贪心，读入之后快排，定义两个指针 z,y，分别从 0 和 $n-1$ 开始， 如果左侧的小数加上右侧的大数比规定范围 w 小，就把它们俩分在一组，$ans++,z++,y--$， 不然就把右侧的数单独分在一组，$ans++,y--$ 。

E题题解（难度：☆）

First solved: TREE (3), 01:50 (+).

二项式定理 $(a \times x + b \times y)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (ax)^i (by)^{k-i}$ ，所以答案就是 $C_k^n a^n b^{k-n} \% 10007$ 。

考虑到组数很多，可以先打个组合数的表，再快速幂求 a^n 和 b^{k-n} 。

F题题解（难度：0）

First solved: TREE (3), 00:47 (+).

打表的话本地随便跑。

这里讲一下在线做法。

因为 $T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ ，令 $n = 2h - 1$ 得到 $T_{2h-1} = \frac{(2h-1) \times 2h}{2} = h \times (2h - 1) = H_h$ 。于是你证明了每一个 $Hexagonal$ 数都是 $Triangle$ 数。

因为 $P_n = \frac{n \times (3n-1)}{2}$ ，移项可以发现 $3n^2 - n - 2P_n = 0$ ，反解得 $n = \frac{1+\sqrt{1+24P_n}}{6}$ ，也就是说只要对任意整数 X 是 $Pentagonal$ 数的充要条件是：把 X 当做 P_n 带入上式得到的 n 是一个正整数。

现在你能 $O(1)$ 判 $Triangle$ 数和 $Pentagonal$ 数啦，枚举 $Hexagonal$ 数即可。

G题题解（难度：?）

$Pick$ 定理：对于格点多边形，$2S = 2a + b - 2$ ，其中 a 表示多边形内部的点数，b 表示多边形边界上的点数，S 表示多边形的面积。 于是这题只需要求出面积与每条边上的整点数，任意多边形的面积叉积一下就可以求，一条边上的整点数= $gcd(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ (想想为什么)。

H题题解（难度：☆）

First solved: 我佛了, 01:25 (+).

$dp_{i,j}$ 表示第 j 天后在第 i 个洞的方案数，$dp_{s,0} = 1, dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1} + dp_{i+1,j-1}, ans = dp_{t,m}$ 。

I题题解（难度：☆☆☆）

莫比乌斯反演魔术！

因为蓝桥国赛好像有出过板子题，所以出了一题提高大家的姿势水平。

积性函数

如果一个数论函数 $f(n)$ ，若 m, n 互质，则 $f(n * m) = f(n) * f(m)$ ，我们称 $f(n)$ 是积性函数。

狄雷克利卷积

$f(n), g(n)$ 分别是两个数论函数，则我们定义函数间的运算 $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ 为狄雷克利卷积。

狄雷克利卷积在数论函数集上满足交换律、结合律、分配律、单位元存在、逆元存在。且若 $f(n), g(n)$ 都是积性函数则 $(f*g)(n)$ 也是积性函数。

其中单位元是 $\epsilon(n)=[n==1]$ ，满足 $f*\epsilon=f$ 。

莫比乌斯反演

现在再介绍两种常用的积性数论函数。

$$I(n)=1$$
$$\mu(n)=[max(c_1,c_2,\dots,c_k)\le 1](-1)^k \qquad (n=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_k^{c_k})$$

我们发现 $\mu*I=\epsilon$，即 μ 与 I 互为逆元。

好了，我们开始进入正题。

如果有两个数论函数 $F(n), f(n)$ 满足

$$F=f*I$$

我们把这个式子的两端都乘上 μ ，就得到了

$$f=\mu*F$$

好像看上去不是很神奇，我们把它补全：

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d) \implies f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$$

它也等价于

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d) \implies f(n)=\sum_{n|d}\mu(\lfloor\frac{d}{n}\rfloor)F(d)$$

这就是莫比乌斯反演魔术的两个核心公式啦。

用人话说，这个反演过程就类似一个容斥，而 $\mu(n)$ 就是容斥时的系数，手玩一下就明白啦。

有了莫比乌斯反演，当我们遇到一个不太好求的 $f(n)$ 时，我们可以选择构造更容易求得的 $F(n)$ ，然后打表 $\mu(n)$ ，反演后就能推 $f(n)$ 了。

有关求 $\mu(n)$ ，因为 μ 是个积性函数，线性筛和埃筛魔改一下就行。

本题题解

好起来了，回到这道题，题意是让我们求 $1\le i\le a, 1\le j\le b$ 内最大公约数为 k 的有序数对数。

不妨把它化为 $1\le i\le\lfloor\frac{a}{k}\rfloor, 1\le j\le\lfloor\frac{b}{k}\rfloor$ 内互素的有序数对数，因为很容易发现这两个有序数对集合之间是可以互相一一对应的。

令 $p=\lfloor\frac{a}{k}\rfloor,q=\lfloor\frac{b}{k}\rfloor$，于是题目变成了求

$$f(1)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}[gcd(i,j)==1]$$

根据套路，我们令

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d)=\sum_{n|d}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}[gcd(i,j)==d]$$

关注一下 $F(n)$ 的含义，发现它表示的是满足 $gcd(i,j)==n\text{的倍数}$ 的有序数对数。因为 $n|gcd(i,j) \implies n|i\ or\ n|j$，那么显然有

$$F(n)=\lfloor\frac{p}{n}\rfloor\times\lfloor\frac{q}{n}\rfloor$$

再利用莫比乌斯反演，得

$$f(n)=\sum_{n|d}\mu(\lfloor\frac{d}{n}\rfloor)F(d)$$

$$f(1)=\sum_{1|d}\mu(d)F(d)=\sum_{i=1}^{min(p,q)}\mu(i)\times\lfloor\frac{p}{i}\rfloor\times\lfloor\frac{q}{i}\rfloor$$

单组时间复杂度 $O(min(p,q))$，目前已经足够通过本题了。

事实上我们可以做得更好，因为 $\lfloor\frac{p}{i}\rfloor$ 和 $\lfloor\frac{q}{i}\rfloor$ 的取值是 $O(\sqrt{p}+\sqrt{q})$ 个的，所以预处理 μ 的前缀和后可以 $O(1)$ 求单块的和，单组时间复杂度 $O(\sqrt{p}+\sqrt{q})$。

如果题目更毒瘤你可以杜教筛 $O(n^{\frac{2}{3}})$ 搞出 μ 的前缀和。