В. Г. Визинг, Некоторые нерешенные задачи в теории графов, *УМН*, 1968, том 23, выпуск 6, 117–134

1968 г. ноябрь — декабрь т. XXIII, вып. 6 (144)

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.9

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ГРАФОВ

В. Г. Визинг

Приводятся нерешенные задачи, касающиеся неориентированных графов. Статья содержит разделы: основные понятия, вопросы изоморфизма, метрические задачи, толщина и род графа, задачи раскраски, части с заданными свойствами.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Возникновение теории графов как самостоятельной математической дисциплины обычно связывается с выходом в свет в 1936 г. книги Д. Кёнига [1]. В то время теория графов была предметом занятий узкого круга специалистов. Положение изменилось в последние годы в связи с бурным развитием дискретной математики и широким проникновением математических методов в другие науки. Многие понятия теории графов, казавшиеся ранее узко специальными, имеют теперь непосредственное отношение к ряду технических и теоретических задач, а источником новых постановок задач в теории графов зачастую являются вопросы, возникшие в практике или же в теоретических областях кибернетики. В настоящее время теория графов превратилась в интенсивно развивающуюся область с очень разнообразной тематикой.

Для развития теории графов в СССР большую пользу принес перевод на русский язык книги К. Бержа [2]. Сейчас вышел из печати перевод книги О. Оре [3], а также написанная А. А. Зыковым монография [4].

Следует, однако, отметить, что советские математики не принимают должного участия в развитии теории графов. Возможно, что подключение молодых математиков к этой области в значительной мере затруднено незнанием стоящих задач.

В обзорных статьях по теории графов, которые появляются большей частью на английском языке, обычно указываются нерешенные задачи. Большое количество задач собрано в изданиях международных симпозиумов по теории графов [5] — [7].

Предлагаемая статья посвящена нерешенным задачам, касающимся только неориентированных графов. Но и при таком ограничении нет, разумеется, возможности дать исчерпывающий обзор нерешенных задач. Остались незатронутыми даже целые разделы, важные в практическом и теоретическом отношениях (подсчет графов, случайные графы и др.). Некоторые из приводимых в статье задач имеют интересные приложения. Однако об этом в статье либо упоминается вскользь, либо вовсе не упоминается.

Первый вариант статьи обсуждался на семинарах по теории графов в Киеве, Риге, Москве и Новосибирске. Я сердечно благодарю всех, проявивших внимание к моей работе и оказавших мне большую помощь советами и критическими замечаниями.

§ 1. Основные понятия

Терминология, которая используется в настоящей статье, несколько отличается от обычной. Например, то, что мы будем понимать под графом, в книге А. А. Зыкова [4] называется обыкновенным графом. Подобные же замечания можно было бы сделать и относительно некоторых других используемых нами терминов, но, чтобы не загромождать текста статьи, мы приведем определения без оговорок.

Мультиграф $L = (X, U)$ определяется заданием двух конечных множеств X и U и однозначным отображением множества X во множество неупорядоченных пар, состоящих из различных элементов множества U. Элементы множества X называются вершинами, а элементы U — ребрами мультиграфа L, причем вершины x и y называются концами ребра u, если при отображении ребру u соответствует пара, состоящая из вершин x и y. Если x и y — концы ребра u, то будем говорить, что ребро u соединяет вершины x и y.

Две вершины называются смежными, если они соединены хотя бы одним ребром. В противном случае вершины называются несмежными.

Будем говорить, что ребро u инцидентно вершине x или исходит из вершины x, если вершина x является одним из концов ребра u. Два различных ребра называются смежными, если они исходят из одной вершины, и несмежными в противном случае. Любая совокупность попарно несмежных ребер мультиграфа называется паросочетанием.

Количество ребер, инцидентных вершине x, называется степенью вершины x. Вершина степени 1 называется висячей, вершина степени 0 — изолированной. Мультиграф называется однородным, если степени всех его вершин одинаковы.

Мультиграф $L' = (X', U')$ называется подграфом (порожденным вершинами X') мультиграфа $L = (X, U)$, если $X' \subseteq X$, а U' есть подмножество U, состоящее из тех и только тех ребер мультиграфа L, оба конца которых принадлежат X'. Мультиграф $L' = (X', U')$ называется суграфом мультиграфа $L = (X, U)$, если $X' = X$, а $U' \subseteq U$. Наконец, L' называется частью L, если L' есть суграф некоторого подграфа мультиграфа L. Таким образом, любой подграф и любой суграф мультиграфа являются его частями; в частности, любой мультиграф является (несобственной) частью самого себя.

Последовательность $x_0 u_1 x_1 u_2 \ldots x_{k-1} u_k x_k$, составленная из вершин $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$ и ребер $u_1, u_2, \ldots, u_k$ мультиграфа называется цепью (длины k, $k \geqslant 0$), если вершины x_i и x_{i+1} соединены ребром u_{i+1}, причем $u_i \neq u_j$ при $i \neq j$. Цепь называется циклом, если $k \geqslant 2$ и $x_k = x_0$. Цепь называется простой, если все ее вершины различны. Цикл называется простым, если все его вершины, за исключением начальной и конечной, различны.

Простая цепь (простой цикл) называется гамильтоновой (гамильтоновым), если она (он) проходит через все вершины мультиграфа.

Наименьшая длина (простого) цикла в мультиграфе называется обхватом мультиграфа.

Мультиграф называется связным, если любые две его вершины соединимы цепью, и несвязным в противном случае. Компонентой связности мультиграфа $L = (X, U)$ называется связный подграф $H = (Y, V)$, обладающий тем свойством, что любая вершина из множества $X \setminus Y$ не соединима цепью ни с одной вершиной из множества Y. Очевидно, мультиграф связен тогда и только тогда, когда он имеет единственную компоненту связности.

Связный мультиграф, не имеющий циклов, называется деревом.

Каркасом мультиграфа L называется любой его суграф без циклов с тем же самым числом компонент связности. В частности, любой каркас связного мультиграфа представляет собой дерево.

Количество ребер, которое необходимо удалить из мультиграфа L для получения какого-либо его каркаса, называется цикломатическим числом мультиграфа L.

Мультиграф называется p-графом, если каждая пара его вершин соединена не более чем p ребрами. 1-граф называется графом.

Граф называется полным, если все его вершины попарно смежны. Плотностью графа L называется число вершин в наибольшем полном подграфе.

Дополнительным к графу L называется граф с тем же множеством вершин, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в L.

Граф L называется сопряженным для мультиграфа K, если вершины L можно поставить во взаимно однозначное соответствие с ребрами K так, чтобы две вершины из L были смежными тогда и только тогда, когда смежны соответствующие ребра из K.

Объединением графов $L_1 = (X_1, U_1)$, $L_2 = (X_2, U_2)$, $\ldots$, $L_k = (X_k, U_k)$ называется граф $L = (X, U)$, у которого $X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, причем две вершины графа L смежны тогда и только тогда, когда они смежны хотя бы в одном из графов $L_1, L_2, \ldots, L_k$.

Декартовым произведением графов $L = (X, U)$ и $K = (Y, V)$ называется граф $L \times K$, вершины которого суть всевозможные пары (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$, причем вершины (x, y) и (x', y') смежны, если они удовлетворяют одному из следующих двух условий:

1) $x = x'$, y и y' смежны в K;

2) x и x' смежны в L, $y = y'$.

При изображении на чертеже каждой вершине мультиграфа взаимно однозначным образом отвечает точка, а каждому ребру — простая дуга, соединяющая точки, соответствующие концам ребра.

Граф (или мультиграф) называется плоским, если его можно изобразить на плоскости или на сфере так, чтобы дуги, соответствующие несмежным ребрам, не пересекались.

Если a — действительное число, то через $[a]$ будем обозначать ближайшее не большее целое, а через $]a[$ — ближайшее не меньшее целое.

§ 2. Вопросы изоморфизма

Два графа, $L = (X, U)$ и $K = (Y, V)$, называются изоморфными, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение смежности.

Естественно, что обычно изучаются только такие свойства графов, которые являются общими для изоморфных графов. В качестве первой задачи, удовлетворительного решения которой мы до сих пор не имеем, можно назвать задачу получения алгоритма, вычисляющего, являются два данных графа изоморфными или нет [1]).

Некоторые критерии изоморфизма двух графов имеются. Например, теорема Уитни ([8], а также [3], стр. 248) утверждает, что два графа без изолированных вершин изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют равное количество вершин и сопряженные для них графы изоморфны. Недостаток такого критерия очевиден: он сводит проблему изоморфизма двух графов к проблеме изоморфизма двух других графов. Подобный же недостаток имеется в критерии изоморфизма, изложенном в [9].

В общем случае задача представляется чрезвычайно трудной. Поэтому было бы интересно исследовать проблему изоморфизма для специальных классов графов (скажем, для однородных степени 3).

Вопросы изоморфизма являются центральными в теории графов. Наша беспомощность при решении некоторых экстремальных задач на графах объясняется отсутствием хороших способов распознавания графов, т. е. выделения конкретного графа из множества всех графов. Здесь уместно отметить проблему такого задания графа, при котором можно было бы легко вычислить нужную характеристику. Разумеется, при этом задание должно быть достаточно экономным.

---

[1]) Разумеется, в силу конечности графа такой алгоритм существует. Но можно ли указать алгоритм, существенно отличный от перебора?

Естественна попытка сделать однозначное заключение о структуре графа, обозревая не весь граф, а только некоторые его части. Вопрос о возможности такого заключения не решен даже в том случае, когда известны все собственные подграфы графа. Дадим более точную постановку задачи (см. также [10], стр. 43).

Пусть $L = (X, U)$ и $K = (Y, V)$ — два графа с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. Допустим, что $n \geqslant 3$ и что при любом фиксированном $i = 1, 2, \ldots, n$ подграф графа L, порожденный вершинами $X \setminus x_i$, изоморфен подграфу графа K, порожденному вершинами $Y \setminus y_i$. Изоморфны ли графы L и K?

П. Келли [11] доказал справедливость этой гипотезы для деревьев, Ф. Харари [12] — для несвязных графов. Проверена справедливость утверждения для $n \leqslant 7$. В общем случае задача не решена.

В [12] предлагается следующее ослабление гипотезы: пусть ребра графов L и K суть $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_m$ соответственно и пусть суграфы $L = (X, U \setminus u_i)$ и $K = (Y, V \setminus v_i)$ изоморфны при любом фиксированном $i = 1, 2, \ldots, m$. Изоморфны ли графы L и K? Предполагается, что $m \geqslant 4$.

Задача «восстановления» графа по набору его частей осложняется тем, что мы не умеем определять, могут ли данные графы быть частями одного и того же графа. Как сообщил мне Э. Я. Гринберг, нетривиальной является уже задача нахождения условий, при которых два данных $(n - 1)$-вершинных графа являются подграфами одного и того же n-вершинного графа.

Не решен и такой вопрос. Какими свойствами должен обладать данный граф K для того, чтобы существовал граф L, окружения всех вершин которого изоморфны графу K? (Под окружением вершины x понимается подграф, порожденный смежными с x вершинами.) Эта задача принадлежит А. А. Зыкову и Б. А. Трахтенброту [5]. Она исчерпывающим образом не решена даже в том случае, когда K представляет собой простую цепь или простой цикл.

Немаловажной характеристикой графа является число всех неизоморфных подграфов его. Это число будем называть емкостью графа. Пусть $\nu(n)$ — максимальная емкость, которую может иметь n-вершинный граф. Очевидно, $\nu(n) \leqslant 2^n - 1$. По-видимому, эта оценка очень груба. М. К. Гольдберг предполагает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{2^n} = 0$. Как это доказать?

Обозначим через $\nu_k(L)$ число неизоморфных k-вершинных подграфов графа L. Если L — n-вершинный граф, то очевидно, $\nu_1(L) = \nu_n(L) = 1$. При других значениях k подобная симметрия в общем случае нарушается. Но М. К. Гольдберг предполагает, что график функции $\nu_k(L)$ распадается на два монотонных куска. Исследования в этом направлении представили бы несомненный интерес.

С понятием емкости тесно связано понятие универсального графа. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый класс графов. Граф L (не обязательно принадлежащий классу $\mathfrak{A}$) назовем универсальным для $\mathfrak{A}$, если любой n-вершинный граф из $\mathfrak{A}$ изоморфен некоторому n-вершинному подграфу графа L. Естественна задача построения универсальных графов с минимальным количеством вершин.

Если $\mathfrak{A}$ — класс всех графов и $f(n)$ — число вершин в минимальном n-универсальном графе для $\mathfrak{A}$, то, как показано в [14],

$$2^{\frac{n-1}{n}} \leqslant f(n) \leqslant \begin{cases} n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Более точные оценки для $f(n)$ неизвестны.

Нет никаких оценок числа вершин в минимальном универсальном графе для класса деревьев. Здесь было бы интересно рассмотреть и тот случай, когда универсальный граф сам является деревом. Аналогичная задача для деревьев с корнем решается в [15].

Большой круг вопросов связан с изучением групп автоморфизмов графов. Первой работой в этом направлении следует считать статью Р. Фрухта [16], в которой доказано, что для любой конечной абстрактной группы существует граф, группа автоморфизмов которого изоморфна данной группе. Результат Р. Фрухта явился частичным ответом на поставленный Д. Кёнигом в [1] вопрос: каким условиям должна удовлетворять группа подстановок из n элементов, чтобы существовал n-вершинный граф, группа автоморфизмов которого совпадает с этой группой подстановок? В более общей форме задача формулируется так: дана группа подстановок; найти все графы, для которых данная группа является группой автоморфизмов.

Ни в первой, ни, тем более, во второй постановке задача до сих пор не решена и представляется чрезвычайно сложной. В [17] Э. Г. Давыдовым изучается ослабленный вариант: дана группа подстановок; найти все графы, для которых данная группа является подгруппой группы автоморфизмов.

С точки зрения теории графов естественна тематика, связанная с изучением влияния свойств графа на строение группы автоморфизмов. Неизвестны ответы на такие, например, конкретные вопросы: как описываются группы автоморфизмов деревьев? Как описываются графы, группы автоморфизмов которых абелевы? Какое максимальное количество ребер может иметь n-вершинный граф с тривиальной группой автоморфизмов?

Особый интерес представляют графы с транзитивной группой автоморфизмов. Такие графы будем называть правильными. Правильные графы всегда однородны. Если степени всех вершин правильного графа равны m, то мы будем называть его правильным графом степени m.

Приведем некоторые результаты, касающиеся правильных графов.

В [18] показано, что каждый правильный граф с помощью специально определяемой операции может быть превращен в так называемый групповой граф. Там же и в [19] доказывается, что правильный граф с абелевой группой автоморфизмов имеет не более двух вершин. В [20] доказано, что любой граф изоморфен некоторому подграфу некоторого правильного графа. В [21] указывается, как описать все плоские правильные графы.

Задача описания всех вообще правильных графов до сих пор не решена и является, по-видимому, очень трудной. Было бы интересно уже дать описание всех правильных графов степени 3 или подсчитать количество неизоморфных правильных графов с данным числом вершин.

Можно попытаться сделать и другие частичные заключения о совокупности правильных графов.

Например, пусть $m \geqslant 2$ и $k \geqslant 3$ — два произвольных натуральных числа. Можно ли построить правильный граф степени m с обхватом k?

В [21] доказано, что любой правильный связный граф степени $m \geqslant 3$ является 3-связным [1]). Вероятно, существует нижняя оценка связности, более существенно зависящая от степени правильного графа. Что это за оценка?

Две различные вершины a и b правильного графа называются инволютивными, если существует автоморфизм φ графа, при котором $\varphi(a) = b$ и $\varphi(b) = a$. Можно построить правильный граф, в котором имеются неинволютивные вершины. Но существуют ли правильные графы, у которых нет инволютивных пар вершин? Какие свойства правильного графа обеспечивают инволютивность любых двух его вершин?

При любом автоморфизме каждое ребро графа переводится в ребро. Граф $L = (X, U)$ называется реберно-правильным, если для любых двух ребер u_1 и u_2 существует автоморфизм, переводящий u_1 в u_2. Очевидно, не каждый правильный граф является реберно-правильным. Обратное также верно: существуют реберно-правильные графы, не являющиеся правильными. Легко показать, что такие графы обязательно являются бихроматическими, т. е. допускают такое разбиение множества вершин на два подмножества, при котором вершины каждого подмножества попарно несмежны. Простейший пример реберно-правильного графа, который не является правильным, можно получить, убрав из треугольника одно ребро. Сложнее строится пример однородного реберно-правильного графа, не являющегося правильным. Такие графы будем называть несогласованными. В силу бихроматичности и однородности несогласованные графы могут иметь только четное число вершин. В [22] построен пример несогласованного 20-вершинного графа и доказано, что с меньшим числом вершин несогласованных графов нет. Доказано также, что n-вершинные несогласованные графы существуют при любых $n \geqslant 20$, делящихся на 4, и не существуют при $n = 2p$ или $n = 2p^2$, где p — простое число. Таким образом, вопрос о существовании несогласованных n-вершинных графов полностью решен для любого $n < 30$. Неизвестно, существует ли несогласованный 30-вершиный граф. В [22] предлагаются еще некоторые задачи на эту же тему. Например, существует ли несогласованный n-вершинный граф степени m, если

а) $m \geqslant \frac{n}{4}$?

б) m — простое число?

в) m и $\frac{n}{2}$ взаимно просты?

---

[1]) n-вершинный связный граф называется h-связным, где h — натуральное $\leqslant n-1$, если связен любой его подграф, порожденный $n-h+1$ вершинами.

§ 3. Метрические задачи

Каждый связный граф может рассматриваться как метрическое пространство, элементы которого — вершины графа, а расстояние между двумя вершинами — длина кратчайшей цепи, соединяющей их.

Пусть X' — конечное метрическое пространство с целочисленной метрикой ρ. Тогда существует [23] граф $L=(X, U)$, в котором $X' \subseteq X$ и расстояние между вершинами X' в графе L совпадает с расстоянием ρ. Будем говорить в этом случае, что метрика ρ реализована в графе L. Возникает задача о наиболее экономном (по количеству ребер или вершин) построении графа, реализующего данную метрику. Наиболее интересным представляется тот случай, когда наиболее экономный граф определяется однозначно. Такое положение имеет место, например, тогда, когда заданная метрика может быть реализована на дереве. В этом случае задание расстояний между висячими вершинами дерева определяет дерево с точностью до изоморфизма [24]. Тем самым мы получаем способ более экономного задания дерева, чем с помощью обычной матрицы смежности. Однако способ задания графа должен обеспечивать возможность легкого вычисления хотя бы простых характеристик. Было бы интересно указать приемы нахождения, скажем, степеней вершин или только максимальной степени вершины дерева при условии, что оно задано расстояниями между висячими вершинами. (Эта задача предложена А. А. Зыковым.)

В целом проблема экономной реализации метрики и установления свойств графов, на которых может быть реализована данная метрика, изучена мало. Некоторые результаты о критериях реализуемости метрики на графах специального вида изложены в [25] и [26].

Теперь рассмотрим обратную задачу вложения графа в метрическое пространство.

Будем говорить, что граф $L=(X, U)$ вкладывается в метрическое пространство M, если существует такое взаимно однозначное отображение множества X в M, при котором смежные вершины графа отображаются в элементы множества M, находящиеся на расстоянии 1. Размерностью графа L назовем минимальную размерность евклидова пространства, в которое вкладывается граф L.

Интересно было бы указать алгоритм или критерий, определяющие размерность произвольного графа. Поскольку пока не ясно, как приступать к решению этих вопросов, то приведем более частные задачи, поставленные в [27].

Граф L размерности k называется критическим, если размерность любой собственной части графа L меньше, чем k. Требуется охарактеризовать критические графы размерности k. Задача представляет интерес уже в случае $k=3$.

Пусть L — n-вершинный граф и пусть размерность каждого m-вершинного подграфа графа L не превосходит k. Как велика может быть размерность графа L?

Задача П. Эрдёша. Найти максимальное количество ребер в n-вершинном графе размерности k.

Ряд важных метрических характеристик графа: диаметр, радиус, число внешней устойчивости — можно определить через более общее понятие покрытия.

Подмножество Y вершин графа $L=(X, U)$ называется покрытием мощности m, радиуса r и кратности k (сокращенно: (m, r, k)-покрытием), если $|Y|=m$ и для каждой вершины $x \in X$ существуют по меньшей мере k вершин $y_1, y_2, \ldots, y_k$ из Y таких, что для всех $i=1, 2, \ldots, k$ расстояние в графе L между y_i и вершиной x не превосходит r. На целые числа m, r, k налагаются, по определению, следующие ограничения: $m \geqslant 1$, $r \geqslant 0$, $k \geqslant 1$. (m, r, k)-покрытие графа L называется экономным, если граф L не имеет $(m-1, r, k)$-, $(m, r-1, k)$-, $(m, r, k+1)$-покрытий.

Покажем, как определить с помощью покрытия число внешней устойчивости, радиус и диаметр.

Пусть L — граф, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда число внешней устойчивости $\beta(L)$ графа L равно m, если существует экономное $(m, 1, 1)$-покрытие. Если же L не имеет ни одного ребра, то $\beta(L)=m$, если существует экономное $(m, 0, 1)$-покрытие графа L.

Радиус связного графа L равен r_0, если существует экономное $(1, r_0, 1)$-покрытие.

Диаметр n-вершинного связного графа равен d, если существует экономное (n, d, n)-покрытие.

Ввиду теоретической и практической важности понятия покрытия следовало бы всесторонне изучить его.

Специальный вид покрытий изучается в [28]. В [29] и [30] указывается максимум ребер в n-вершинном графе с данным числом внешней устойчивости и, соответственно, с данным радиусом. Более общая задача определения максимума ребер в n-вершинном графе, имеющем экономное (m, r, k)-покрытие, не решена. Вполне приемлемым было бы решение этой задачи для случая $k=1$.

Задача отыскания экономного покрытия радиуса $r \geqslant 1$ и кратности 1 графа $L=(K, U)$ сводится к отысканию числа внешней устойчивости $\beta(L^r)$ графа $L^r=(X, U')$, который получается из графа L добавлением ребер между вершинами, находящимися в L на расстоянии $\leqslant r$ [1]). Однако до сих пор нет хорошего алгоритма для отыскания числа внешней устойчивости графа. Число внешней устойчивости вообще почти не изучено и не разработано приемов для его исследования. Неизвестно, например, как решить следующие две, на первый взгляд простые, задачи.

Пусть L — n-вершинный граф, $\overline{L}$ — дополнительный к нему граф. Верно ли, что $\beta(L) \cdot \beta(\overline{L}) \leqslant n$?

---

[1]) Предполагается, что граф L имеет экономное покрытие радиуса r и кратности 1. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\beta(L^{r-1}) > \beta(L^r)$.

Вторая задача предлагалась еще в [31]. Пусть L и K — два графа, $L \times K$ — их декартово произведение. Всегда ли справедливо неравенство $\beta(L \times K) \geqslant \beta(L) \cdot \beta(K)$?

Понятие диаметра позволяет ввести еще одну метрическую характеристику.

Пусть $L = (X, U)$ — n-вершинный граф ($n \geqslant 3$) и пусть k — целое число такое, что $0 \leqslant k \leqslant n - 2$. Рассмотрим все ($n - k$)-вершинные подграфы графа L. Обозначим через $d_k(L)$ максимальный диаметр у этих подграфов. В частности, если хотя бы один из ($n - k$)-вершинных подграфов графа L несвязен, то полагаем $d_k(L) = \infty$. Очевидно, что $d_0(L)$ — диаметр графа L и что $d_k(L)$ — монотонно-неубывающая функция от k. Функция $d_k(L)$ никем не исследовалась. Укажем одну из возможных постановок задач.

Пусть $d_k(n)$ — минимальное значение, которое может принимать $d_k(L)$ в классе плоских n-вершинных графов. Ясно, что $d_5(n) = \infty$. Найти значение функции $d_k(n)$ при $k = 1, 2, 3, 4$. Верно ли, что $\lim\limits_{n \to \infty} d_2(n) = \infty$?

В заключение этого параграфа приведем еще три задачи метрического характера.

З а д а ч а О. О р е. ([3], стр. 105). Описать графы, у которых между любыми двумя вершинами существует единственная кратчайшая цепь.

В случае плоских графов задача решена в [32].

Следующие две задачи заимствованы из [5].

Пусть L — n-вершинный граф. Занумеровать вершины графа L числами $1, 2, \ldots, n$ так, чтобы:

а) минимизировать максимум модуля разности между смежными вершинами графа;

б) минимизировать максимум расстояния между вершинами с соседними номерами.

§ 4. Толщина и род графа

Понятия толщины и рода графа связаны с различными обобщениями понятия плоского графа.

Родом графа L называется минимальный род ориентируемой поверхности, на которой можно начертить граф так, чтобы несмежные ребра не пересекались. В частности, род плоского графа равен 0.

Толщиной $t(L)$ графа L называется наименьшее число плоских графов, объединение которых есть граф L. Граф называется k-плоским, если $t(L) \leqslant k$. Плоский граф, например, является 1-плоским, 2-плоским и т. д.

Вопрос о распознавании того, является ли данный граф плоским, можно считать решенным. Для этого имеются удовлетворительные алгоритмы (см., например, [33]), а также критерий Понтрягина — Куратовского ([2], стр. 231—234). Правда, решений некоторых задач, касающихся строения плоских графов, мы не знаем. Например, неизвестны условия, при которых данные n натуральных чисел могут являться степенями вершин n-вершинного плоского графа.

Значительно хуже обстоит дело с нахождением толщины произвольного графа. Ни алгоритмами, ни соответствующими критериями мы здесь не располагаем. Между тем эти вопросы представляют и практическую ценность. Было бы важно сделать хотя бы первый существенный шаг: получить критерий того, является ли граф 2-плоским.

Проводились исследования толщины полного n-вершинного графа L_n. Уже известна толщина любого графа L_n при $n \leqslant 15$, а также установлено, что при $n \geqslant 17$ и $n \not\equiv 4 \pmod 6$ $t(L_n) = \left[\frac{n+7}{6}\right]$ (см. [34]). L_{16} — это минимальный полный граф, толщина которого неизвестна.

Интересной задачей является определение толщины n-мерного куба K_n. Л. С. Мельников высказал гипотезу: $t(k_n) = \left[\frac{n}{4}\right] + 1$.

Что касается рода графа, то мы также не имеем ни алгоритмов, ни критериев для его нахождения.

А. А. Зыков предложил следующую задачу, касающуюся разбиения графом поверхности.

Пусть S — ориентируемая поверхность рода p. Тогда каждый граф с цикломатическим числом $\geqslant 2p+1$, будучи начерченным на поверхности S, разбивает ее (т. е. всегда найдутся две точки поверхности, которые нельзя соединить непрерывной кривой, не пересекая ребер графа). Задача состоит в нахождении условий, при которых граф с цикломатическим числом $\leqslant 2p$ может быть начерчен на поверхности рода p «неразбивающим образом».

§ 5. Задачи раскраски

Классическая задача раскраски вершин графа ставится следующим образом.

Дан граф L; раскрасить минимальным количеством цветов его вершины так, чтобы смежные вершины получили различные цвета. Это минимальное количество цветов называется хроматическим числом графа L и обозначается через $\gamma(L)$.

Понятие хроматического числа возникло в связи с недоказанной до сих пор знаменитой гипотезой четырех красок, но в настоящее время задача раскраски получила особую актуальность благодаря своим многочисленным практическим и теоретическим приложениям (см., например, [35]). Однако мы не только не располагаем алгоритмом минимальной раскраски вершин, но и не умеем быстро раскрашивать графы так, чтобы разность между количеством использованных цветов и истинным хроматическим числом графа оценивалась сверху некоторой функцией от хроматического числа этого графа.

Для изучения хроматического числа удобным является понятие критического k-хроматического графа. Граф L с $\gamma(L) = k$ называется критическим k-хроматическим, если хроматическое число любой собственной части графа L меньше, чем k. Хотя критическим k-хроматическим графам посвящено довольно много работ (инициатива принадлежит Г. А. Дираку [36]), тем не менее задача описания критических k-хроматических графов при $k \geqslant 4$ остается нерешенной.

По-видимому, трудности, с которыми приходится сталкиваться при исследовании хроматического числа, в значительной мере объясняются тем, что не найдено легко обозримых характеристик графа, тесно связанных с хроматическим числом. Так, если $\omega(L)$ — плотность графа L, то, очевидно, $\gamma(L) \geqslant \omega(L)$. Но, с другой стороны, для любого натурального $k \geqslant 2$ существует граф L с $\gamma(L)=k$ и $\omega(L)=2$ [37]. Я. Мыцельский построил такой граф с $3 \cdot 2^{k-2}-1$ вершинами [38]. Неизвестно, минимальный ли это граф. Вообще задача нахождения минимального количества вершин, которое может иметь граф с данным хроматическим числом и с данной плотностью, представляет определенный интерес.

Можно ли для любого наперед заданного натурального числа $k \geqslant 2$ построить граф со сколь угодно большим обхватом и с хроматическим числом k? Можно. Это доказал П. Эрдёш [39], основываясь на мощностных соображениях. Удивительно, что до сих пор нет конструктивного доказательства этого факта. В [40] указан способ построения графов с любым хроматическим числом без циклов длины $\leqslant 7$. Это лучшее, что мы имеем на сегодняшний день.

Если $\sigma(L)$ — максимальная степень вершины графа L, то, очевидно, $\gamma(L) \leqslant \sigma(L)+1$. В 1941 г. Р. Брукс [41] доказал, что при $\sigma(L) \geqslant 3$ и $\omega(L) \leqslant \sigma(L)$ справедлива оценка $\gamma(L) \leqslant \sigma(L)$. Дальнейшие исследования можно проводить, учитывая более точно соотношения между σ и ω. Пожалуй, следует начать с оценки хроматического числа графа без треугольников ($\omega=2$) с данной максимальной степенью вершины.

Другой подход состоит в учете всей совокупности степеней вершин. Будем говорить, что степенна́я вариация графа L равна w, если среди степеней вершин графа встречается ровно w различных чисел. В [42] доказывается, что если L — n-вершинный граф, то $\gamma(L) \leqslant n-\left[\frac{w}{2}\right]$. Л. С. Мельников предполагает, что имеет место следующая нижняя оценка:

$$\gamma(L) \geqslant \left]\frac{\left[\frac{w}{2}\right]}{n-w}\right[+1.$$

Как связано хроматическое число графа со свойствами его подграфов? По этому поводу П. Эрдёш и А. Хайнал высказали недавно [7] заманчивую гипотезу: пусть любой m-вершинный подграф графа L имеет по меньшей мере $\frac{m-k}{2}$ попарно несмежных вершин; верно ли, что $\gamma(L) \leqslant k+2$? Это предположение верно при $k=0$. При $k \geqslant 1$ оно не доказано.

Не исследованы вопросы, касающиеся оценки хроматического числа графа через его толщину. Если L — t-плоский граф, то сумма степеней его вершин $\leqslant 6t(n-2)$. Значит, у L и у любого его подграфа имеется вершина степени $\leqslant 6t-1$. Отсюда вытекает, что $\gamma(L) \leqslant 6t$. Улучшаема ли эта оценка при $t \geqslant 2$? При $t=1$ ее, во всяком случае, можно улучшить до 5. Гипотеза четырех красок утверждает, что хроматическое число любого плоского графа $\leqslant 4$. Но не известно доказательство и более слабого утверждения, состоящего в том, что в любом плоском n-вершинном графе обязательно найдется не меньше чем $\frac{n}{4}$ попарно несмежных вершин.

Хадвигер высказал предположение более общее, нежели гипотеза четырех красок. Чтобы сформулировать гипотезу Хадвигера, приведем определение операции стягивания.

Будем говорить, что граф L стягивается на граф K, если K можно полу чить из L с помощью конечного числа следующих операций:

1) удаление ребра;

2) удаление изолированной вершины;

3) идентификация двух смежных вершин, т. е. замена двух смежных вершин x и y новой вершиной, смежной с теми и только теми вершинами, которые были смежны хотя бы с одной из вершин x и y.

Числом Хадвигера $\eta(L)$ графа L называется наибольшее число вершин в полном графе, на который можно стянуть граф L.

Гипотеза Хадвигера состоит в том, что для любого графа L $\eta(L) \geqslant \gamma(L)$. Справедливость гипотезы Хадвигера легко доказывается при $\gamma(L) \leqslant 4$. Доказано, что при $\gamma(L)=5$ из справедливости гипотезы Хадвигера вытекает справедливость гипотезы четырех красок, и наоборот. Однако в случае $\eta(L) \geqslant 5$ известно лишь [43], что $\gamma(L) \leqslant 3\cdot 2^{\eta(L)-4}+1$.

Число Хадвигера является интересной характеристикой графа, и было бы важно проследить ее связь с другими характеристиками. Пусть степень каждой вершины графа L не меньше, чем k. Как мало может быть $\eta(L)$? Верно ли, что $\eta(L) \to \infty$ при $k \to \infty$?

Какое максимальное число ребер может иметь n-вершинный граф с данным числом Хадвигера?

Обратимся теперь к задаче раскраски ребер мультиграфа, которую можно интерпретировать как задачу раскраски вершин сопряженного графа. Хроматическим классом $\chi(L)$ мультиграфа L называется наименьшее число цветов, необходимое для раскраски всех ребер мультиграфа таким образом, чтобы инцидентные одной вершине ребра получили различные цвета.

К. Э. Шеннон [44] показал, что если $\sigma(L)$ — максимальная степень вершины мультиграфа L, то $\chi(L) \leqslant \left[\frac{3}{2}\sigma(L)\right]$. В [45] мною доказано, что если L — p-граф, то $\chi(L) \leqslant \sigma(L)+p$. Оценка Шеннона неулучшаема в том смысле, что для любого натурального m можно построить мультиграф L с $\sigma(L)=m$ и $\chi(L)=\left[\frac{3}{2}m\right]$. Что же касается моей оценки, то при $p=1$ и $\sigma \geqslant 2$ она также неулучшаема, в то время как при $p \geqslant 2$ и $\sigma \geqslant 2p$ (последнее ограничение вызвано теоремой Шеннона) она в общем случае не точна. В [46], например, показано, что при любом $p \geqslant 2$ хроматический класс p-графа L с $\sigma(L)=2p+1$ не превосходит $\sigma(L)+p-1$. Таким образом, имеется принципиальная возможность для улучшения оценки $\chi(L) \leqslant \sigma(L)+p$.

Алгоритм раскраски ребер мультиграфа L (p-графа L) с помощью $\left[\frac{3}{2}\sigma(L)\right]$ (или $\sigma(L)+p$) цветов можно представить следующим образом.

Пусть имеется раскраска всех ребер мультиграфа L (p-графа L) k цветами, где $k > \left[\frac{3}{2}\sigma(L)\right]$ (или $k > \sigma(L) + p$). Тогда, перекрашивая некоторые максимальные двухцветные цепи (т. е., в максимальных цепях, составленных из ребер двух цветов s и t, перекрашивая ребра цвета s в цвет t и наоборот), мы можем получить раскраску ребер мультиграфа L с помощью $\left[\frac{3}{2}\sigma(L)\right]$ (или $\sigma(L)+p$) цветов. Не решен вопрос [46]: можно ли таким же путем получить минимальную раскраску ребер мультиграфа?

Как уже отмечалось выше, если L — граф и $\sigma(L) \geqslant 2$, то либо $\chi(L) = \sigma(L)$, либо $\chi(L) = \sigma(L) + 1$. Естественна задача нахождения условий, при которых осуществляется каждая из этих двух возможностей. Некоторые результаты в этом направлении получены в [46] и [47]. Однако ряд затронутых там вопросов решен не до конца.

Так, в [47] доказано, что если L — плоский граф и $\sigma(L) \geqslant 8$, то $\chi(L) = \sigma(L)$. Известно, что можно построить плоский граф L с $2 \leqslant \sigma(L) \leqslant 5$ и с $\chi(L) = \sigma(L) + 1$. Не решен вопрос: существует ли плоский граф L с $\sigma(L) = 6$ или $\sigma(L) = 7$, у которого $\chi(L) = \sigma(L) + 1$?

В [47] вводится понятие критического графа степени m. Граф L с $\sigma(L) = m \geqslant 2$ и $\chi(L) = m + 1$ называется критическим степени m, если хроматический класс любой собственной части графа L не превосходит m.

Было бы важно иметь описание всех критических графов любой степени. Вопрос представляется трудным даже для критических графов степени 3: если бы удалось показать, что среди них есть хотя бы один плоский граф, то тем самым был бы получен отрицательный ответ на гипотезу четырех красок.

В связи со сложностью общей задачи имеет смысл исследовать отдельные свойства критических графов.

Сколько ребер может иметь n-вершинный критический граф степени m? Я предполагаю, что не меньше чем $\frac{n\cdot(m-1)+3}{2}$. Если это так, то для плоского графа L с $\sigma(L) \geqslant 7$ выполняется равенство $\chi(L) = \sigma(L)$. Но я не могу решить более легкую задачу: верно ли, что в критическом графе степени m число ребер $> \frac{m^2}{2}$. Неясно, как это доказывать даже в том случае, когда m четно и критический граф имеет $m + 1$ вершин.

Кажется совершенно естественным, что n-вершинный критический граф может иметь не больше чем $\frac{n}{2}$ попарно несмежных вершин. Как это доказать?

Наряду с дальнейшим изучением критических графов следовало бы предпринять исследование критических мультиграфов с данной максимальной степенью вершины и с данным хроматическим классом. Заметим, кстати, что неизвестно, верна ли гипотеза Хадвигера в классе графов, сопряженных для мультиграфов. Справедливость ее в классе графов, сопряженных для графов, легко доказывается с помощью понятия критического графа данной степени.

В заключение этого параграфа упомянем об одном неисследованном виде раскраски мультиграфа.

Хроматическим индексом $\iota(L)$ мультиграфа L назовем минимальное число цветов, необходимое для раскраски всех ребер и вершин мультиграфа таким образом, чтобы:

а) смежные вершины получили различные цвета;

б) смежные ребра получили различные цвета;

в) инцидентные вершина и ребро получили различные цвета.

Гипотеза. Если L — p-граф, то $\iota(L) \leqslant \sigma(L) + p + 1$.

§ 6. Части с заданными свойствами

Большой круг вопросов связан с выявлением в графах частей того или иного вида. Читатель без труда сможет обнаружить, что ряд упоминавшихся в предыдущих параграфах задач может быть отнесен к этой же категории. Сейчас будут приведены еще несколько нерешенных задач, которые можно разделить по постановке на следующие три типа.

Задачи первого типа в общей форме ставятся так: дан граф L; определить, содержит ли он в качестве своей части граф того или иного вида.

Задачи второго типа впервые были рассмотрены П. Тураном, который в 1941 г. [48] нашел максимальное число ребер в n-вершинном графе с данной плотностью k. Если это число ребер обозначить через $f(n, k)$, то результат П. Турана можно сформулировать следующим образом: n-вершинный граф, имеющий более $f(n, k)$ ребер, обязательно содержит полный $(k+1)$-вершинный подграф. Таким образом, в задачах второго типа требуется доказать существование частей определенного вида в таких графах, о структуре которых имеется лишь частичная информация.

Наконец, задачи третьего типа посвящены выяснению возможности представления графа в виде объединения своих частей определенного вида.

Излагая задачи, мы не будем отмечать, к какому из указанных типов они относятся.

1. Указать алгоритм для нахождения гамильтонова цикла или гамильтоновой цепи в графе.

Задача отыскания гамильтонова цикла является частным случаем известной задачи о коммивояжере, в которой требуется совершить круговое путешествие по данным городам, проехав при этом минимальное расстояние. Если дан n-вершинный связный граф L, то, считая вершины его городами и полагая, что расстояние между городами равно расстоянию между соответствующими вершинами в графе L, мы получим, что в графе L существует гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда коммивояжер может объехать все города и вернуться в исходный, проделав путь длины n.

Вопрос о существовании гамильтоновой цепи в графе можно представить как вопрос о возможности такой нумерации вершин графа, при которой расстояние между вершинами с соседними номерами равно 1. Таким образом, задача отыскания гамильтоновой цепи является более частной, нежели задача, приведенная в самом конце § 3.

2. Указать алгоритм для отыскания в графе наибольшего множества попарно несмежных вершин.

Как показано в [49], задача минимальной раскраски вершин графа L сводится к отысканию наибольшего множества попарно несмежных вершин в графе, получаемом в результате декартова произведения графа L на полный граф.

3. Указать алгоритм для выделения в графе каркаса с наименьшим числом висячих вершин.

Эта задача является более общей по сравнению с задачей отыскания гамильтоновой цепи в графе.

4. Указать алгоритм для выделения в графе каркаса с наибольшим числом висячих вершин.

5. Найти максимум ребер в n-вершинном графе, любой каркас которого имеет не более k висячих вершин.

6. Задача П. Эрдёша [5]. Пусть l и k — натуральные $\geqslant 2$. Допустим, что граф L имеет $l \cdot k$ вершин, причем степень каждой вершины $\geqslant (l-1) \cdot k$. Верно ли, что L содержит k полных l-вершинных подграфов без общих вершин?

Задача решена в случаях $l=2$, 3 при произвольном k [50] и в случаях $k=2$, 3 при произвольном l [51].

7. Задача Г. Рингеля [5]. Пусть T — произвольное дерево с k ребрами, L_{2k+1} — полный $(2k+1)$-вершинный граф. Доказать, что граф L_{2k+1} можно представить в виде объединения $2k+1$ графов, каждый из которых изоморфен дереву T.

8. Задача А. Коцига. Пусть L_{2k} — полный $2k$-вершинный граф ($k \geqslant 2$). Можно ли его ребра разбить на паросочетания таким образом, чтобы объединение любых двух паросочетаний давало гамильтонов цикл?

В [52] показано, что это можно сделать, если $2k-1$ — простое число.

9. Пусть L — граф (или мультиграф), в котором выделены две вершины a и b. Систему простых цепей с конечными вершинами a и b будем называть накрывающей, если каждое ребро графа L содержится хотя бы в одной цепи из системы.

Указать алгоритм для отыскания накрывающей системы с минимальным числом цепей или с минимальной суммарной длиной цепей. Интересны усложненные варианты: сначала ищется минимальное число цепей, а потом минимизируется общая длина, или наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936.
[2] К. Берж, Теория графов и ее применения, М., ИЛ, 1962.
[3] O. Ore, Theory of graphs, Amer. Math. Soc., Providence, R. J. (1962). (Перев. на русск. яз. О. Оре, Теория графов, М., «Наука», 1968.)
[4] А. А. Зыков, Теория конечных графов, 1968.
[5] Theory of graphs and its applications, Proc. of the symp. in Smolenice, Prague, 1964, 157—165.
[6] Theory of graphs, Intern. symp. in Rome, Paris — New York, 1967.
[7] Theory of graphs, Proc. of the colloq. at Tihany, Budapest, 1968, 361—370.

[8] H. Whitney,, Congruent graphs and the connectivity of graphs, Amer. Journ. Math. **54** (1932), 150—168.
[9] R. Halin, H. A. Jung, Note on isomorphisms of graphs, Journ. London Math. Soc. **42**, 2, № 166 (1967), 254—256.
[10] С. Улам, Нерешенные математические задачи, М., «Наука», 1964.
[11] P. J. Kelly, A congruence theorem for trees, Pacif. Journ. Math. **7**, № 1 (1957), 961—968.
[12] F. Harary, On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs, Theory of graphs and its applications, Proc. of the symp. in Smolenice, Prague, 1964, 47—52.
[13] С. Я. Агакишиева, О графах с заданными окружениями вершин, Матем. заметки **3**, № 2 (1968), 211—216.
[14] J. W. Moon, On minimal n-universal graphs, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7**, № 1 (1965), 32—33.
[15] М. К. Гольдберг, Э. М. Лившиц, О минимальных универсальных деревьях, Матем. заметки **4**, № 3 (1968), 375—382.
[16] R. Frucht, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstracter Gruppe, Comp. Math. **6** (1938), 239—250.
[17] Э. Г. Давыдов, О конечных графах и их автоморфизмах, Проблемы кибернетики, вып. 17 (1966), 27—39.
[18] G. Sabidussi, Vertex-transitive graphs, Monatsh. Math. **68**, № 5 (1964), 426—438.
[19] Chao Chong-Yun, On a theorem of Sabidussi, Proc. Amer. Math. Soc. **15**, № 2 (1964), 291—292.
[20] H. H. Teh, C. C. Chen, Embedding theorems of homogeneous graphs, Bull. Math. Soc. Nanyang Univ. (1965), 21—30.
[21] В. Г. Визинг, О связности правильных графов (1968).
[22] J. Folkman, Regular line-symmetric graphs, Journ. of Combin Theory **3**, № 3 (1967), 215—232.
[23] Э. Д. Стоцкий, О вложении конечных метрик в графы, Сиб. матем. журн. 5, № 5 (1964), 1203—1206.
[24] Е. А. Смоленский, Об одном способе линейной записи графов, ЖВМ и МФ **2**, № 2 (1962), 371—372.
[25] К. А. Зарецкий, Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами, УМН **20**, вып. 6 (1965), 90—92.
[26] М. Е. Тылкин, О реализуемости матриц расстояний в единичных кубах, Проблемы кибернетики, вып. 7 (1962), 31—42.
[27] P. Erdös, F. Harary, W. T. Tutte, On the dimension of a graph, Mathematika **12**, № 2 (1965), 118—122.
[28] Ф. Я. Ветухновский, Задачи о покрытиях графа системой окрестностей его вершин, Проблемы кибернетики, вып. 19 (1967), 47—74.
[29] В. Г. Визинг, Оценка числа внешней устойчивости графа, ДАН **164**, № 4 (1965), 729—731.
[30] В. Г. Визинг, О числе ребер в графе с данным радиусом, ДАН **173**, № 6 (1967), 1245—1246.
[31] В. Г. Визинг, Декартово произведение графов, Вычислительные системы, вып. 9 (1963), 30—43.
[32] J. G. Stemple, M. E. Watkins, On planar geodetic graphs, Journ. of Combin. Theory, № 2 (1968), 101—117.
[33] Г. С. Плесневич, Расположение графа на плоскости, Вычислительные системы, вып. 6 (1963), 45—53.
[34] F. Harary, Recent results in topological graph theory, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **15**, № 3—4 (1964), 405—412.
[35] А. П. Ершов, Сведéние задачи распределения памяти при составлении программ к задаче раскраски вершин графов, ДАН **142**, № 4 (1962), 785—787.

[36] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. 3, № 2 (1952), 69—81.

[37] А. А. Зыков, О некоторых свойствах линейных комплексов, Матем. сб. **24** (**66**): 2 (1949), 163—188.

[38] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphs, Colloq. Math. **3**, № 2 (1955), 161—162.

[39] P. Erdös, Graph theory and probability, Canad. Journ. Math. **11**, № 1 (1959), 34—38.

[40] Я. Нешетрил, k-хроматические графы без циклов длины $\leqslant 7$, Comment. Math. Univ. Carolinae **7**, № 3 (1966), 373—376.

[41] R. L. Brooks, On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 194—197.

[42] R. E. Nettleton, Some generalized theorems on connectivity, Canad. Journ. Math. **12**, № 4 (1960), 546—554.

[43] K. Wagner, Bewies einer Abschwächung der Hadwiger — Vermutung, Math. Ann. **153**, № 2 (1964), 139—141.

[44] К. Э. Шеннон, Теорема о раскраске ребер графа, Киберн. сборник, вып. 1 (1960), 249—253.

[45] В. Г. Визинг, Об оценке хроматического класса p-графа, Дискретный анализ, вып. 3 (1964), 25—30.

[46] В. Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфа, Кибернетика **3** (1965), 29—39.

[47] В. Г. Визинг, Критические графы с данным хроматическим классом, Дискретный анализ, вып. 5 (1965), 9—17.

[48] P. Turan, On the theory of graphs, Colloq. Math. **3** (1954), 19—30.

[49] В. Г. Визинг, Г. С. Плесневич, К проблеме минимальной раскраски вершин графа, Сиб. матем. журн. **6** № 1 (1965), 234—236.

[50] K. Corradi, A. Hajnal, On the maximal number of independent circuits in a graph, Acta Math. Acad. Scient. Hung. **14**, № 3—4 (1963), 423—439.

[51] B. Zelinka, On the number of independent complete subgraphs, Publs. Math. **13**, № 1—4 (1966), 95—97.

[52] A. Kotzig, Hamilton graphs and Hamilton circuits, Theory of graphs, and its applications, Proc. of the symp. in Smolenice, Prague, 1964, 63—82.

Поступило в редакцию 7 июня 1968 г.