해석개론 및 연습 1 과제 #3

2017-18570 컴퓨터공학부 이성찬

1. (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

2. (1) **거짓**. (반례) $A = (0,1) \cup (1,2)$ 를 생각하면 $\operatorname{int} A = A$ 인데 $\operatorname{int} \overline{A} = (0,2)$ 이다.

(2) **거짓**. $A = \{0\}$ 을 생각하면 $\operatorname{int} A = \emptyset$ 이므로 $\overline{\operatorname{int} A} = \emptyset \neq A$.

(3) **참**.

(4) **참**.

(3), (4) 를 보이기 위해서는 다음 명제를 보이면 된다.

Claim. $\overline{A^C} = (\operatorname{int} A)^C$.

($\subset$) $x \in \overline{A^C}$ 일 때, $x \in A^C$ 라면, $x \notin \operatorname{int} A$ 이므로 ($\operatorname{int} A \subset A$) OK.
$x \notin A^C$ 이고 $x \in (A^C)'$ 이라면, 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이므로 $y \in N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\}$ 를 잡을 수 있다. 그러면 $y \in N(x, \epsilon)$ 인데 $y \in A^C$ 이므로 모든 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon)$ 은 A 의 부분집합이 될 수 없다. $x \notin \operatorname{int} A$.

($\supset$) $x \notin \operatorname{int} A$ 라 가정하자. 우선 $x \in A^C$ 이면 $x \in \overline{A^C}$ 는 당연하다.
$x \notin A^C$ 를 가정하면, x 가 A 의 내점이 아니므로 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon)$ 는 A 의 부분집합이 아니다. 따라서 $y \in N(x, \epsilon) \backslash A$ 가 존재한다. 이는 곧 $y \in N(x, \epsilon) \cap A^C$ 이며, $A^C = A^C \backslash \{x\}$ 이므로 극한점의 정의에 따라 $N(x, \epsilon) \cap A^C \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이 되어 $x \in (A^C)'$ 이다. 따라서 $x \in \overline{A^C}$.

3. (1) $\langle b_n \rangle$ 이 코시 수열이므로 수렴한다. 수렴하는 수열은 유계이므로, 모든 n 에 대해 $|b_n| < A$ 인 $A \in \mathbb{R}$ 이 존재한다. 이제 다음이 성립한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} A \, |a_n| < \infty$$

따라서 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 는 절대수렴한다.

(2) $a_n = n!/n^n$ 으로 정의하자.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

극한값이 존재하며 1 보다 작으므로, $\limsup a_{n+1}/a_n = 1/e < 1$ 이다. 비율판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

4. $\overline{A}$ 가 유계이고 닫힌집합인지 확인하면 된다.

- $\overline{A}$ 는 A 를 포함하는 가장 작은 닫힌 집합이다.
- A가 유계이므로 $x \in A \Rightarrow \|x\| < R$ 인 $R \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.
  (a) $x \in A$ 이면 $\|x\| < R$ 이므로 OK.
  (b) $x \in A' - A$ 인 경우[1] 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N(x, \epsilon) \cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$ 이다. $y \in N(x, \epsilon) \cap A$ 에 대하여 $\|y - x\| < \epsilon$, $\|y\| < R$ 이므로
  $$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|y - x\| + \|y\| < R + \epsilon$$
  이다. 따라서 이 경우에도 $\|x\| < R + 1$ 이다.

  따라서 $\overline{A}$ 는 유계이다.

5. 다음과 같은 집합족 $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ 을 고려한다.
$$U_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + 2|y| < 1 - \frac{1}{k}\right\}$$

- U_k 는 열린집합이다.
  $z = (x_0, y_0) \in U_k$ 라 하면 $\epsilon < \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{k} - |x_0| - 2|y_0|)$ 에 대해
  $$|x - x_0| < \epsilon, |y - y_0| < \epsilon \implies |x| + 2|y| < |x_0| + 2|y_0| + 3\epsilon < 1 - \frac{1}{k}$$
  (삼각부등식: $|x| < |x_0| + \epsilon, |y| < |y_0| + \epsilon$) 이므로 $N(z, \epsilon) \subset U_k$ 임을 알 수 있다.
- 구한 집합족은 cover 가 된다.
  $(x_0, y_0) \in A$ 이면 $|x_0| + 2|y_0| < 1$ 이므로
  $$k = \left\lceil \frac{1}{1 - |x_0| - 2|y_0|} \right\rceil$$
  으로 잡으면
  $$1 - \frac{1}{k} \geq 1 - (1 - |x_0| - 2|y_0|) = |x_0| + 2|y_0|$$
  가 되어 $(x_0, y_0) \in U_k$. 따라서 $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$.
- Open finite subcover 가 존재하지 않는다.
  만약 open finite subcover $\{U_{k_1}, \ldots, U_{k_m}\}$ $(k_1 < k_2 < \cdots < k_m)$ 이 존재한다면 이들의 합집합은 U_{k_m} 이고, $1 - 1/k_m < 2|y_0| < 1$ 인 실수 y_0 를 잡을 수 있다. 그러면 $(0, y_0) \in A - U_{k_m}$ 이므로 subcover 임에 모순이다. Finite subcover 가 존재하지 않는다.

6. (귀류법) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq a$ 라고 가정하자.
적당한 $\epsilon > 0$ 에 대하여 N 이 존재해, $|a_n - a| \geq \epsilon$ 인 $n > N$ 이 무수히 많이 존재한다.
만약 위 조건을 만족하는 n 이 유한하다면, 그러한 n 중 최댓값을 N 으로 잡아주면 $\lim a_n = a$ 가 되게 할 수 있다.
따라서 $|a_n - a| \geq \epsilon$ 인 n 들에 대해 차례대로 $n_1 < n_2 < \cdots$ 로 잡으면[2] 이렇게 얻어진 부분수열 $\langle a_{n_k} \rangle$ 는 절대 a 로 수렴 할수 없으므로 모순이다.

[1] 이러한 원소가 존재하지 않는 경우는 당연히 참이므로 존재한다고 가정한다.
[2] 자연수의 집합은 셀 수 있다. 혹은 well-ordering principle 에 의해 최소의 원소가 항상 존재한다.

8. 주어진 관계식을 다음과 같이 변형한다.

$$na_{n+1} \le na_n - ca_n \implies ca_n \le na_n - na_{n+1} \implies (c-1)a_n \le (n-1)a_n - na_{n+1}$$

이제 $b_n := (n-1)a_n$ $(n \ge 1)$ 으로 정의하면,

- $a_n > 0$ 이므로 $b_n > 0$ 이 되어 아래로 유계이다.
- $b_{n+1} - b_n \ge (c-1)a_n > 0$ $(c > 1)$ 에서 $b_n < b_{n+1}$ 이므로 감소수열이다.

따라서 단조수렴정리에 의해 b_n 은 수렴한다. 그 극한값을 β 로 두자. 이제 $k = N, N+1, \ldots, n$ 에 대해 부등식을 변변 더하면

$$\sum_{k=N}^{n}(c-1)a_k \le \sum_{k=N}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_N - b_{n+1}$$

를 얻고 $n \to \infty$ 인 극한을 취하면 다음 식을 얻는다.

$$0 < \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \sum_{k=N}^{\infty}(c-1)a_k \le b_N - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_N - \beta$$

$\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ 는 비교판정법에 의해 수렴하며, 유한개의 항을 더한 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.