해석개론 및 연습 1 과제 #1

2017-18570 컴퓨터공학부 이성찬

1. 먼저 $m \in S$ 이므로 $\inf S \geq m$ 임은 당연하다. 이제 m이 S의 최대 하계임을 보이자. $\forall \epsilon > 0$ 에 대해, $m+\epsilon$ 이 S의 하계라고 가정하면 $\forall x \in S$ 에 대하여 $m+\epsilon \leq x$ 이다. 그런데 $m \in S$ 이므로 $m+\epsilon \leq m$ 이고 이는 $\epsilon > 0$ 에 모순이다. 따라서 $\inf S = m$.

2. **Claim 1**. *Suppose that a subset S of $\mathbb{R}$ contains a maximum $m \in \mathbb{R}$. Then $\sup S = m$.*

Proof. $m \in S$ 이므로 $\sup S \leq m$ 임은 당연하다. 이제 m이 S의 최소 상계임을 보이자. $\forall \epsilon > 0$ 에 대해, $m-\epsilon$ 이 S의 상계라고 가정하면 $\forall x \in S$ 에 대하여 $m-\epsilon \geq x$ 이다. 그런데 $m \in S$ 이므로 $m-\epsilon \geq m$ 이고 이는 $\epsilon > 0$ 에 모순이다. 따라서 $\sup S = m$.

(1) Let $A = (1, 2)$. $\forall x \in A$ 에 대하여 $x < 2$ 이므로 $\sup A \leq 2$. 이제 2 가 A의 최소 상계임을 보이자. $\forall \epsilon > 0$ 에 대해, $2-\epsilon$ 이 A의 상계라고 하면 $\forall x \in A$ 에 대하여 $2-\epsilon \geq x$ 이다. 그런데 $2-\epsilon/2 \in A$ 이므로 $2-\epsilon \geq 2-\epsilon/2$ 이고 정리하면 $\epsilon \leq 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\sup A = 2$.

$\forall x \in A$ 에 대하여 $x > 1$ 이므로 $\inf A \geq 1$. 이제 1 이 A의 최대 하계임을 보이자. $\forall \epsilon > 0$ 에 대해, $1+\epsilon$ 이 A의 하계라고 하면 $\forall x \in A$ 에 대하여 $1+\epsilon \leq x$ 이다. 그런데 $1+\epsilon/2 \in A$ 이므로 $1+\epsilon \leq 1+\epsilon/2$ 이고 정리하면 $\epsilon \leq 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\inf A = 2$.

(2) Let $B = \left\{\frac{1}{1+n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

먼저 $f(n) = \frac{1}{1+n^2}$ 이 감소함을 보이자. $1+n^2 < 1+(n+1)^2$ 이므로 $f(n) > f(n+1)$. 따라서 B의 최댓값은 $n = 1$ 일 때인 $1/2$ 이다. 이제 Claim 1 에 의하여 $\sup B = 1/2$.

우선 B의 모든 원소들은 양수이므로 $\inf B \geq 0$. 만약 $\epsilon > 0$ 이 B의 하계라고 하면, $n > \sqrt{1/\epsilon}$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$n^2 > \frac{1}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon} - 1, \quad n^2 + 1 > \frac{1}{\epsilon}$$

이므로 $\epsilon > \frac{1}{1+n^2}$ 가 되어 ϵ 이 하계라는 가정에 모순이다. 따라서 $\inf B = 0$.

(3) Let $C = \{(-1)^n + (-1/2)^m : n, m \in \mathbb{N}\}$. C의 최댓값과 최솟값을 찾자.

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1, \quad -\frac{1}{2} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^m \leq \frac{1}{4}$$

이므로

$$\forall x \in C, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

이다. 최댓값은 $(n, m) = (2, 2)$ 일 때 $5/4$, 최솟값은 $(n, m) = (1, 1)$ 일 때 $-3/2$ 이다. $C \subset \mathbb{R}$ 이므로 Claim 1 과 1번 문제의 결과에 의해 $\sup C = 5/4$, $\inf C = -3/2$.

3. **(1)** A, B가 유계이므로 적당한 실수 a, b, c, d 가 존재하여 모든 $x \in A$, $y \in B$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$a \leq x \leq b, \qquad c \leq y \leq d$$

따라서 다음이 성립하고

$$a - d \leq x - y \leq b - c$$

$A - B$ 또한 유계임을 알 수 있다.

(2) **Claim**. $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Proof. 우선 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\inf A \leq x \leq \sup A, \qquad \inf B \leq y \leq \sup B$$

모든 $u \in A - B$ 에 대해 $u \leq \sup A - \inf B$ 이므로 $\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B$.
이제 $k = \sup A - \inf B$ 가 $A - B$ 의 최소 상계임을 보인다. $\forall \epsilon > 0$, $k - \epsilon$ 가 $A - B$ 의 상계라고 가정하자. 그런데, 상한과 하한의 정의로부터 다음을 만족하는 $x \in A, y \in B$ 가 존재한다.

$$\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A, \qquad \inf B \leq y < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$$

따라서 $k - \epsilon < x - y \leq k$ 가 되어 상계라는 가정에 모순이므로 원하는 등식을 얻는다.

4. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이므로 임의의 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대해 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해 $|a_n| < \epsilon$ 이다. $n > N$ 일 때도 $0 \leq |s_n - s| < a_n$ 이므로 $|s_n - s| < |a_n| < \epsilon$ 이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

5. **(1)** Given $\forall \epsilon > 0$, take $N = \dfrac{49}{16\epsilon^2}$. 그러면 $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+7} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{7}{4\sqrt{n}+14}\right| < \frac{7}{4\sqrt{n}} < \epsilon \qquad \left(\because \sqrt{n} > \frac{7}{4\epsilon}\right)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+7} = \dfrac{1}{2}$.

(2) Given $\forall \epsilon > 0$, take $N = \sqrt[5]{\dfrac{3}{\epsilon}}$. 그러면 $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n^5 + \cos(n^8+1)}{n^5+1} - 2\right| &= \left|\frac{\cos(n^8+1) - 2}{n^5+1}\right| \leq \frac{|\cos(n^8+1)| + 2}{n^5+1} \\ &< \frac{3}{n^5+1} < \frac{3}{n^5} < \epsilon \qquad \left(\because n^5 > \frac{3}{\epsilon}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^5 + \cos(n^8+1)}{n^5+1} = 2$.

(3) Given $\forall \epsilon > 0$, take $N = \max\left\{\dfrac{2}{\epsilon}, 6\right\}$. 그러면 $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n^2 + n(-1)^n}{n^2+2} - 3\right| &= \left|\frac{n(-1)^n - 6}{n^2+2}\right| \leq \frac{n\,|(-1)^n| + 6}{n^2+2} \\ &< \frac{n+6}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + n(-1)^n}{n^2+2} = 3$.

6. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = c \in \mathbb{R}$ 이라 하자. 그러면, $\forall\epsilon > 0$ 에 대해 N이 존재하여 $n > \max\{N, 1\}$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해

$$\left|\frac{(-2)^n + n}{2^n} - c\right| < \epsilon$$

를 만족한다. $\epsilon = 1/2$ 라고 해보자.
$m \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $n = 2m$ 일 때, 만족해야 하는 부등식은

$$\left|\frac{2m}{2^{2m}} - c + 1\right| < \frac{1}{2}$$

이고, $n = 2m + 1$ 일 때 만족해야 하는 부등식은

$$\left|\frac{2m+1}{2^{2m+1}} - c - 1\right| < \frac{1}{2}$$

이다. 변변 더하면

$$\begin{aligned} 1 &> \left|\frac{2m+1}{2^{2m+1}} - c - 1\right| + \left|\frac{2m}{2^{2m}} - c + 1\right| = \left|-\frac{2m+1}{2^{2m+1}} + c + 1\right| + \left|\frac{2m}{2^{2m}} - c + 1\right| \\ &> \left|2 + \frac{2m}{2^{2m}} - \frac{2m+1}{2^{2m+1}}\right| = \left|2 + \frac{2m-1}{2^{2m+1}}\right| > 2 \end{aligned}$$

이 되어 모순이다. 따라서 주어진 수열은 발산한다.

7. 수렴하는 수열은 유계임을 이용한다. $\{s_n\}$ 이 수렴하므로 $|s_n| < A$ 인 실수 A가 존재한다.

(1) $\forall\epsilon > 0$ 에 대하여, $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해 $|s_n - s| < \dfrac{\epsilon}{A + |s| + 4}$ 가 되게 하는 N이 존재한다. 그러므로 그 N 에 대하여 $n > N$ 일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left|s_n^2 + 4s_n + 5 - (s^2 + 4s + 5)\right| = \left|s_n^2 - s^2 + 4(s_n - s)\right| &= |s_n - s|\,|s_n + s + 4| \\ &< |s_n - s|\,(|s_n| + |s| + 4) \\ &< \frac{\epsilon}{A + |s| + 4} \cdot (A + |s| + 4) = \epsilon \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$.

(2) $\forall\epsilon > 0$ 에 대하여, $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해 $|s_n - s| < \dfrac{2\epsilon}{A + |s|}$ 가 되게 하는 N 이 존재한다. 그러므로 그 N 에 대하여 $n > N$ 일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{\frac{1}{1+s_n^2}} - \sqrt{\frac{1}{1+s^2}}\right| &= \frac{\left|\sqrt{1+s_n^2} - \sqrt{1+s^2}\right|}{\sqrt{1+s_n^2}\sqrt{1+s^2}} < \left|\sqrt{1+s_n^2} - \sqrt{1+s^2}\right| \\ &= \frac{|1 + s_n^2 - 1 - s^2|}{\sqrt{1+s_n^2} + \sqrt{1+s^2}} < \frac{|s_n^2 - s^2|}{2} \\ &= \frac{|s_n - s|\,|s_n + s|}{2} \le \frac{|s_n - s|\,(|s_n| + |s|)}{2} \\ &< \frac{2\epsilon}{A + |s|}\,\frac{A + |s|}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

첫 번째 부등호는 $\sqrt{1+x^2} > 1$ $(x \in \mathbb{R})$ 으로부터 얻고, 두 번째 부등호는 $x^2 \ge 0$ $(x \in \mathbb{R})$ 으로부터 얻는다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$.

(3) Let $B = \max\{A, |s|\}$. $\forall \epsilon > 0$ 에 대하여, $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해 $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2019B^{2018}}$ 가 되게 하는 N이 존재한다. 그러므로 그 N 에 대하여 $n > N$ 일 때마다 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left|s_n^{2019} - s^{2019}\right| &= |s_n - s| \left|\sum_{i=0}^{2018} s_n^{2018-i} s^i\right| < |s_n - s| \sum_{i=0}^{2018} |s_n|^{2018-i} |s|^i \\ &< |s_n - s| \sum_{i=0}^{2018} B^{2018} < \frac{\epsilon}{2019B^{2018}} 2019B^{2018} = \epsilon \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(s)$.

8. 주어진 명제는 **거짓**이다.

[**반례**] $a_n = (-1)^n$ 일 때[1], $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 은 0 으로 수렴한다.

Claim. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{(-1)^n - 1}{2}$, $b_n = \frac{(-1)^n - 1}{2n}$

Proof. n이 짝수일 때, 좌변, 우변 모두 0이다. n이 홀수일 때, 좌변, 우변 모두 -1 이다.

이제 b_n이 0으로 수렴함을 보이자.

Given $\forall \epsilon > 0$, take $N = 1/\epsilon$. 그러면 $n > N$ 인 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\left|\frac{(-1)^n - 1}{2n} - 0\right| \leq \frac{|(-1)^n| + 1}{2n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이다.

[1] 수열 $(-1)^n$이 발산함은 연습시간에 보였다.