Probeklausur

1)

a) „Ich weiß, was los ist."

b) $1+i=(1,1) \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $]0, 2\pi[$

d) $\sum_{i=1}^{\infty} 0$

e) Involutorische Abbildung: $f(f(x))=x$

$f(z)=\bar{z} \Rightarrow f(f(z)) = f(\bar{z}) = \bar{\bar{z}} \overset{\text{Übung}}{=} z$

f) $\sin(\pi x)$

g) ungerade Funktion: $f(x)=f(-x)$

$f(0)=0 \Leftrightarrow -f(0) = „-0" = 0 \Rightarrow -f(„-0") = 0$ $\square$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\cdot(0-0) = 0$

2) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

A	B	C	$A\Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)$	$A\Rightarrow C$	$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

$\square$

5) $R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid x^2-y^2 \text{ ist durch 5 teilbar}\}$ $n,m \in \mathbb{N}_0$

reflexiv: xRx
$x^2-x^2=5n \Leftrightarrow 0=5n \Leftrightarrow n=0$, 0 ist durch 5 teilbar
symmetrisch: $xRy \Rightarrow yRx$
$x^2-y^2=5n \Leftrightarrow -x^2+y^2=-5n \Leftrightarrow y^2-x^2=-(5n)$, $-5n$ ist durch 5 teilbar $\forall n \in \mathbb{N}_0$
transitiv: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
$x^2-y^2=5n \wedge y^2-z^2=5m \Leftrightarrow y^2=5m+z^2 \Rightarrow x^2-(5m+z^2)=5n \Leftrightarrow x^2-5m-z^2=5n$
$\Leftrightarrow x^2-z^2=5(m+n)$, ist durch 5 teilbar $\forall m,n \in \mathbb{N}_0$
$[0]_R=\{\dots,-10,-5,0,5,10,\dots\}$
$[1]_R=\{\dots,-9,-4,1,6,11,\dots\}$
$[2]_R=\{\dots,-8,-3,2,7,12,\dots\}$
$[3]_R=\{\dots,-7,-2,3,8,13,\dots\}$
$[4]_R=\{\dots,-6,-1,4,9,14,\dots\}$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$

Bildungsvorschrift: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}\pi & \text{für } x \text{ gerade} \\ -\left(\frac{x-1}{2}\right)\pi & \text{für } x \text{ ungerade} \end{cases}$

injektiv: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

x gerade:
Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2}\pi = \frac{x_2}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

x ungerade:
Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -\frac{x_1-1}{2}\pi = -\frac{x_2-1}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-1}{2} \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

surjektiv: $\forall t \in M \ \exists x \in \mathbb{N} \ \ t = f(x)$

x gerade:
Sei $t = f(x) \Rightarrow t = \frac{x}{2}\pi \Leftrightarrow \frac{t}{\pi} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\pi}t = x \quad \forall t \in M$

x ungerade:
Sei $t = f(x) \Rightarrow t = -\frac{x-1}{2}\pi \Leftrightarrow -\frac{t}{\pi} = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}t = x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}t + 1 = x \quad \forall t \in M$

$\Rightarrow f$ ist bijektiv und somit abzählbar unendlich

3) $a_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Induktionsverankerung:

$a_3 = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$ ✓

Induktionsschritt:

$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} = \frac{(n+1)^2 - 3(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 3n - 3}{2} = \frac{(n^2 - 3n) - 2n - 2}{2}$
$= \frac{n(n-3)}{2} - n - 1 \overset{I.A.}{\Rightarrow}$ Anzahl Diagonalen von n-Eck $- n - 1$
$\overset{Skizze}{\Rightarrow}$ Anzahl Diagonalen (n+1)-Ecks.

4)
a) $a_1 = 1, \ a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

Funktionswerte: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{Fib(n+1)}{Fib(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5) Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $> 1 \rightarrow$ divergiert, $< 1 \rightarrow$ konvergiert

harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} \Rightarrow \frac{1}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$

$\rightarrow$ das Quotientenkriterium trifft keine Aussage über Konvergenz

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Partialsummenbildung:

$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i}$

$(s_n) = \sum_{k=1}^{n} > \sum_{i=0}^{k} = 1 + (\frac{k}{2} \Rightarrow (s_n)$ ist also nicht beschränkt: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow \infty$.

5)

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\frac{1}{2}x} = \lim \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{\frac{1}{x}}}{x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{2}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\lim\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\lim\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\lim\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\lim\sqrt{\frac{1}{x}}}{\lim\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+\lim\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\lim\frac{1}{x}}}{\sqrt{\lim\frac{1}{x}+\lim\frac{1}{x^4}}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1}}{\frac{1}{2}} = 2$

b) Die Funktion ist ein Quotient zweier stetigen Funktionen, weshalb sie nur in den Nullstellen des Nenners unstetig ist.

$0 = x^2-2 \Leftrightarrow 2 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Stetig ergänzbar bei $\sqrt{2}$?:

$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-2} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{(x^2-2)(x+\sqrt{2})} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Stetig ergänzbar bei $-\sqrt{2}$?:

$\lim_{x\to-\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2} = \lim_{x\to-\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{(x^2-2)(x+\sqrt{2})} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\uparrow-\sqrt{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}} \Rightarrow -\infty \\ \lim_{x\downarrow-\sqrt{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}} \Rightarrow \infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ ungleich also nicht stetig ergänzbar $\blacksquare$

6) $\mathrm{Re}\, z \geq |z-2-3i|$

$x \geq |x+iy-2-3i| \Leftrightarrow x \geq |x-2+iy-3i| \Leftrightarrow x \geq \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{x^2-4x+4+y^2-6y+9}$

$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13} \Leftrightarrow x^2 \geq x^2+y^2-4x-6y+13 \Leftrightarrow 0 \geq y^2-4x-6y+13$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}(y^2-6y+13)$