3.1 Bildungsvorschriften für Folgen

a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \frac{9}{36}, \dots$ $(\to)$

Bildungsvorschrift: $\frac{2n-1}{(n+1)^2} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Monotonie: $q_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^2}{2n-1} = \frac{(2n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2(2n-1)} = \frac{(2n+1)(n^2+2n+1)}{(n^2+4n+4)(2n-1)} = \frac{2n^3+4n^2+2n+n^2+2n+1}{2n^3+8n^2+8n-n^2-4n-4}$

$= \frac{2n^3+5n^2+4n+1}{2n^3+7n^2+4n-4} = \frac{2n^3+5n^2+4n+1}{2n^3+5n^2+4n+2n^2-4} \Rightarrow \frac{1}{2n^2-4}$

$\Rightarrow q_n < 1$ wenn $1 < 2n^2-4$

$\Rightarrow$ streng monoton fallend für $n \geq 2$

Alternierend: $p_n = a_n \cdot a_{n+1} < 0$; $p_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)^2(n+1)^2} = \frac{4n^2-2n+2n-1}{(n+2)^2(n+1)^2} = \frac{4n^2-1}{(n+2)^2(n+1)^2}$

$> 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, da $4n^2-1 > 0 \; \forall n\in\mathbb{N} \wedge (n+2)^2(n+1)^2 > 0 \to$ trivial

Beschränktheit:

Obere Schranke: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, da streng monoton fallend
$\to \max(a_n) = \frac{1}{3} = \sup(a_n)$

Untere Schranke: $0 = \inf(a_n)$, kein $\min(a_n)$

Gibt es eine größere untere Schranke?

$(a_n) = \frac{2n-1}{(n+1)^2} > 0+\varepsilon \Leftrightarrow 2n-1 > (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n-1 > n^2+2n+1$ ↯

b) $-1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{4}, -3, \frac{1}{8}, -4, \frac{1}{16}$

Bildungsvorschrift: $-\frac{n+1}{2}$ für ungerade
$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ für gerade

Monotonie: $-\frac{n+1}{2} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} = -\frac{n+1}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot 2 = -(n+1) \cdot 2^{\frac{n}{2}} = (-n-1)\sqrt{2^n} < 1 \to$ streng monoton fallend $\to$ logisch nicht monoton, aber rechnerisch nicht

Alternierend: $-\frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} < 0 \to$ Alternierend

Beschränktheit:

Obere Schranke: $\frac{1}{2}$, da $\frac{1}{2} > (a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}}$
$\sup(a_n) = \max(a_n) = \frac{1}{2}$

Untere Schranke: Es gibt keine untere Schranke, da die einzelnen Bildungsvorschriften streng monoton fallen.