2.5 | Abzählbarkeit

a) $M = \mathbb{N}$

Sei $f(x) = x$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in \mathbb{N} \; \exists f(x) \in \mathbb{N} \quad t = f(x)$

Sei $t = f(x) \Rightarrow t = x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

b) $M = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Sei $f(x) = 2x$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in M \; \exists x \in \mathbb{N} \quad t = f(x)$

Sei $t = f(x) \Rightarrow t = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}t \quad \forall t \in M$

c) $M = \mathbb{Z}$

Sei $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & \text{für } x \text{ ungerade} \\ \frac{x}{2} & \text{für } x \text{ gerade} \end{cases}$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 + 1) = \frac{1}{2}(x_2 + 1) \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in G \land \exists x \in \mathbb{N} \quad t=f(x)$

Sei $t=f(x) \Rightarrow t = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2t=x+1 \Leftrightarrow x=2t-1$ für $t \geq 0$

$\Rightarrow t = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=2t$ \qquad für $t < 0$