8.11 Skalarprodukt per Integral

a) $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x) g(x)\, d$ $f,g \in [a,b]$ Skalarprodukt auf $C[a,b]$

Definition Skalarprodukt: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

Axiome Skalarprodukt:

1. Linearität in der ersten Variable
$\langle f_1+f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle + \langle f_2, f_3\rangle$
$\langle \lambda f_1 f_2\rangle = \lambda \langle f_1, f_2\rangle$
2. Symmetrie
$\langle f_1 f_2\rangle = \langle f_2, f_1\rangle$
3. Positive Definitheit
$\langle f_1, f_1\rangle > 0$ mit $f \neq 0$

1. Linearität in der ersten Variable

$\langle f_1+f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle + \langle f_2, f_3\rangle$

$\int_a^b (f_1+f_2) f_3 \, dx \overset{!}{=} \int_a^b f_1 f_3 \, dx + \int_a^b f_2 f_3 \, dx$

$\int_a^b (f_1+f_2) f_3 \, dx = \int_a^b f_1 f_3 \, dx + f_2 f_3 \, dx \overset{\text{Satz}}{=} \int_a^b f_1 f_3 \, dx + \int_a^b f_2 f_3 \, dx$

$\int_a^b \lambda f_1 f_2 \, dx \overset{\text{Satz}}{=} \lambda \int_a^b f_1 f_2 \, dx$

2. Symmetrie

$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_1\rangle$

$\int_a^b f_1 f_2 \, dx \overset{\text{Kommutativgesetz}}{=} \int_b^a f_2 f_1 \, dx$

3. Positive Definitheit

$\langle f,f\rangle > 0, f \neq 0$

$\int_a^b f^2 \, dx > 0, f \neq 0$

$0(x) = 0$ $\qquad f \in C[a,b] \wedge f = 0 \Rightarrow \forall x \in [a,b] : f(x) = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)^2 dx = 0$

$f \in C[a,b] \wedge f \neq 0 \Rightarrow \exists x \in [a,b] : f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)^2 dx > 0$

Da es min 1 $x \in [a,b]$ gibt, gibt es auch ein Teilintervall $[c,d] \subset [a,b]$, auf dem $\int_c^d f^2(x)\, dx > 0$ ist.