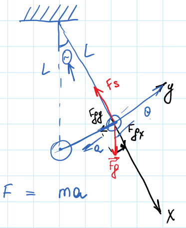
U7_Schwingungen

Freitag, 28. Mai 2021 13:53



Θ - winkel

$\sum F = ma$

$$s = L \cdot \Theta$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a = L \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

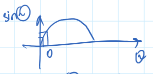
y: $ma = -F_{gy}$

$$ma = -mg \cdot \sin\Theta$$

$$\cancel{m} \cdot \underbrace{L \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2}}_{a} = -\cancel{m}g \cdot \sin\Theta$$

$$L \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2} + g \cdot \sin\Theta = 0$$

Θ = klein



$\sin\Theta \approx \Theta$

$$L \frac{d^2\Theta}{dt^2} + g \cdot \Theta = 0$$

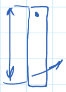
$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{L}\Theta = 0 \qquad \Theta(t) =$$

$$\Theta(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

mathematische Pende

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Physikalischer Pendel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

I - Massenträgheitsmoment

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

Torsionskonstante

Aufgabe 2 - *

Ein Koffer mit einer Masse von 20 kg hängt an zwei elastischen Kordeln, wie in Abbildung gezeigt ist. Im Gleichgewicht ist jede Kordel um 5,0 cm gedehnt. Wie hoch ist die Schwingungsfrequenz, wenn der Koffer ein wenig nach unten gezogen und dann losgelassen wird?

$$F_F = F_g$$

$$k \cdot \Delta y = mg$$

$m = 20\ kg$

$\Delta y = 5\ cm$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Delta y = \frac{mg}{k} \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta y}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\cancel{m}g}{\Delta y \cdot \cancel{m}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{0{,}05\ m}} = 2{,}22\ Hz$$

Aufgabe 3 - *

Ein Körper mit einer Masse von 2,0 kg ist oben an einer vertikalen Feder befestigt, die am Boden verankert ist. Die Länge der nicht komprimierten Feder beträgt 8,0 cm, und im Gleichgewicht beträgt sie 5,0 cm. Hierbei erhält der Körper mit einem Hammer einen nach unten gerichteten Impuls, sodass seine Anfangsgeschwindigkeit 0,30 m/s beträgt.

a) Welche maximale Höhe über dem Boden erreicht der Körper danach?

b) Wie lange braucht er, um zum ersten Mal die maximale Höhe zu erreichen?

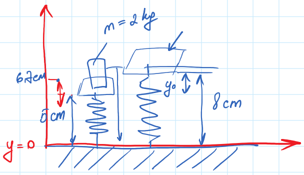
c) Wird die Feder während der Schwingung jemals wieder unkomprimiert? Welche minimale Anfangsgeschwindigkeit muss der Körper erhalten, damit die Feder zu irgendeiner Zeit unkomprimiert ist?

$v = 0{,}30\ m/s$ 0

$m = 2\ kg$

$v = 0{,}30\ m/s$ 0

a) $\boxed{y(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \phi)}$ * $\phi =$



C-?

$v(t) = -C\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t - \phi)$ $\phi =$

$v(t=0) = 0{,}3\ \frac{m}{s}$

$v(t=0) = -C \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 0 - \phi) =$

$-C \cdot \omega_0 = -0{,}3\ m/s$ " Amplitude der geschwindigkeit

$$\frac{\frac{m}{s}}{\sqrt{\frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{m}}} = \frac{\frac{m}{s}}{\sqrt{\frac{1}{s^2}}} = \frac{m/s}{1/s} = \frac{m}{s} \cdot \frac{s}{1} = m$$

$$C = \frac{0{,}3\ m/s}{\omega_0} = \frac{0{,}3\ m/s}{\sqrt{g/y_0}} = \frac{0{,}3\ m/s}{\sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{0{,}03\ m}}} = 0{,}017\ m = 1{,}7\ cm$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \frac{mg}{y_0}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{y_0 \cdot m}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$

b)

$t = \frac{3}{4} T$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{y_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{g}}$

$t = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{y_0}{g}} = \frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{y_0}{g}} =$

$= \frac{3}{2} \cdot \pi \sqrt{\frac{0{,}03 m}{9{,}81 \frac{m}{s^2}}} = 0{,}26\ s + T$

c) $E_{kin} = E_{pot}$ $\Delta y = 3\ cm$

$\cancel{\frac{1}{2}} m v^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k_F \cdot (\Delta y)^2$

$k_F = k = \frac{mg}{\Delta y} \leftarrow 3\ cm$

$\cancel{m} v^2 = \frac{\cancel{m} \cdot g}{\Delta y} \cdot (\Delta y)^2$

$v = \sqrt{\frac{g}{\Delta y} \cdot (\Delta y)^2} = \sqrt{9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (0{,}03\ m)} = \boxed{0{,}54\ \frac{m}{s}}$

Aufgabe 4 - $**$

Eine vertikale Feder dehne sich um 9,6 cm, wenn sie mit einem 1,3 kg schweren Gewicht belastet wird. Dieses Gewicht wird um weitere 5 cm nach unten gezogen und dann losgelassen.

a) Berechnen Sie die Federkonstante?

b) Berechnen Sie die Periode?

c) Berechnen Sie die Frequenz?

d) Berechnen Sie die Amplitude?

Erfasster Bildschirmausschnitt: 29.05.2023 22:16

e) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit der resultierenden harmonischen Schwingung?

Lösung 4- $**$

$k = 133 N/m$
$T = 0.62\ s$
$f = 1{,}6\ Hz$
$A = 5\ cm$
$v = 0{,}51 m/s$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 29.05.2023 22:23

$\Delta y = 9{,}6\ cm$
$m = 1{,}3\ kg$
$y_0 = 5\ cm$

s. Aufgabe 2

a) k-? $k = \frac{mg}{\Delta y} = \frac{1{,}3\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}}{0{,}096\ m} = 133\ \frac{N}{m}$

b) T-? $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{133\ N/m}{1{,}3\ kg}} = 10{,}1\ \frac{1}{s}$ $\frac{2\pi}{T} = \omega_0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}62\ s$

b) T - ? $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{133\ N/m}{1{,}3\ kg}} = 10{,}1\ \frac{1}{s}$ $\quad \frac{2\pi}{T} = \omega_0$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0{,}62\ s$

c) f - ? $\quad f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10{,}1\ \frac{1}{s}}{2 \cdot 3{,}14} = 1{,}6\ Hz$

d) A - ? $\quad A = y_0 = 5\ cm$

e) v - ? $\quad v = A \cdot \omega_0 = 0{,}05\ m \cdot 10{,}1\ \frac{1}{s} = 0{,}51\ m/s$

s. Vorlesung

Aufgabe 5 - **

Ein Federpendel der Masse m = 12.3 kg und Federkonstante k = 125 N/m wird aus der Ruhelage heraus so angestoßen, dass es eine Anfangsgeschwindigkeit von 2.7 m/s hat.

a) Wie groß ist die Gesamtenergie? am Anfang?

b) Wie groß ist die Amplitude der Schwingung?

Lösung 5- **

$E_{mech} = \cancel{33.83}\ 44{,}83\ J$

$x = 0.85\ m$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 30.05.2023 10:01

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{125\ N/m}{12{,}3\ kg}} = 3{,}18\ \frac{1}{s}$

$m = 12{,}3\ kg$

$k = 125\ N/m$

$v_0 = 2{,}7\ m/s$

Am Anfang hat das Pendel nur kinetische Energie.

a) $E_{mech_1} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\, 12{,}3\ kg \left(2{,}7\ \frac{m}{s}\right)^2 = 44{,}83\ J$

b) x - ? $\quad E_{mech_1} = E_{mech_2} = \frac{1}{2} k x^2$ $\quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2 E_{mech_1}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44{,}83\ J}{125\ N/m}} = 0{,}85\ m$

$E_{kin} = E_{pot} = \frac{1}{2} k x^2$

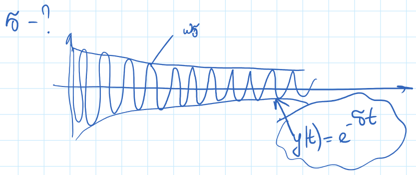
Aufgabe 6 - *

Die Amplitude eines gedämpften Schwingers sei nach 20 Schwingungen auf die Hälfte heruntergegangen. Die Schwingungsdauer betrage T = 2s.

a) Wie groß ist der Abklingkoeffizient δ?

b) Wie groß wäre die Schwingungsdauer ohne Dämpfung?

δ - ?



Dimension von δ - ?

$\frac{D}{2m} = \delta$ $\quad [D] = \frac{kg}{s}$ s. Aufg. 7

$\frac{\frac{kg}{s}}{kg} = \frac{1}{s}$ $\quad [\delta] = \frac{1}{s}$

Erfasster Bildschirmausschnitt: 30.05.2023 13:25

$A_{20} = \frac{1}{2} A_0 \quad \Rightarrow A_0 = 2 A_{20}$

$y(t) = e^{-\delta t}$

$t = 0 \quad e^{-0} = A_0 \quad \Rightarrow 1 = A_0$

$t = 20T \quad e^{-\delta \cdot 20T} = \frac{1}{2} A_0$

$e^{-\delta \cdot 20T} = \frac{1}{2} \quad | \ln$

$\ln e^{-\delta \cdot 20T} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$-\delta \cdot 20T = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$T_\delta = 2s \qquad \delta = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{20\,T} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{20 \cdot 2s} = 0{,}017\ \frac{1}{s}$

b) T_0 - ?

$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ $\qquad T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta}$

$\omega_\delta^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ $\qquad \omega_\delta = \frac{2\pi}{T_\delta}$

$\omega_0 = \sqrt{\omega_\delta^2 + \delta^2}$

$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_\delta}\right)^2 + \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{2s}\right)^2 + 0{,}017^2} = 3{,}14\ \left(\frac{rad}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3{,}14} = 1{,}999\ s \rightarrow T_\delta = 2\ s$

Aufgabe 7 - *

Eine Maschine mit einer Masse von 1.5 t steht auf einer Federung mit der Federkonstanten $k = 3 \cdot 10^4\ N/m$ und dem Dämpfungsgrad ~~D~~ δ/ω_0 $= 0.15$. Durch Bodenvibrationen wirkt eine cosinusförmige Kraft der Frequenz f = 0.8 Hz und der Amplitude 4000 N auf die Maschine. Wie groß ist die Amplitude der Schwingungen, die sie daraufhin ausführt ?

$m = 1{,}5\,t$

$k = 3 \cdot 10^4\ \frac{N}{m}$

$\delta/\omega_0 = 0{,}15$

$f = 0{,}8\,Hz$

$F_0 = 4000\,N$

$A = ?$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + D^2 \cdot \omega^2}}$$

$\frac{D}{2m} = \delta = \omega_0 \cdot 0{,}15$

$D = 2m\omega_0 \cdot 0{,}15$

$\vec{F}_R = -D \cdot \vec{v}$

$N = D \cdot \frac{m}{s}$

$D = \frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{m} = \frac{kg}{s}$

$\frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}15$

$\delta = \omega_0 \cdot 0{,}15$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4 \frac{N}{m}}{1500\,kg}} = 4{,}47\ \frac{rad}{s}$

$\omega_E = 2\pi f_E = 2\pi \cdot 0{,}8\ \frac{1}{s} = 5{,}024\ \frac{rad}{s}$

$D = 2 \cdot 1500\,kg \cdot 4{,}47\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}15 = 2011{,}5\ \frac{kg}{s}$

$A = 0{,}31\ m = 31\ cm$

$$A = \frac{4000\,N}{\sqrt{(1{,}5 \cdot 10^3)^2 \cdot (4{,}47^2 - 5{,}024^2)^2 + (2011{,}5\ \frac{kg}{s})^2 \cdot (5{,}024\ \frac{1}{s})^2}} = \frac{4000\,N}{12820{,}7\ kg/s^2} = 0{,}31\ m$$

$164321139{,}2$

Aufgabe 8 - **

Ein gedämpftes Feder-Masse-System ist gekennzeichnet und festgelegt durch Masse $m = 0,2\ kg$, Federkonstante $k = 80\ N/m$ und Dämpfungskoeffizient $D = 3,2\ kg/s$. Dieses System wird von einer harmonisch erzwingenden Kraft $F = F_E \cos(\omega_E t)$ mit $F_E = 4\ N$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Berechnen Sie für den eingeschwungenen, stationären Zustand, für die beiden Erregerkreisfrequenzen $\omega_{E_1} = 10\ s^{-1}$ und $\omega_{E_2} = 40\ s^{-1}$

a) die jeweils zugehörigen stationären Amplituden A_1 und A_2.

b) die jeweils zugehörigen Phasenverschiebungen α_1 und α_2 zwischen den erzwungenen Schwingungen und der erregenden Kraft.

2

Lösung 8- **

a) $A_1 = 0,06\ m$ und $A_2 = 0,015\ m$.

b) $\alpha_1 = 28°$ und $\alpha_2 = 152°$

$$A_1 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + D^2\omega^2}}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80\,N/m}{0{,}2\,kg}} = 20\ \frac{1}{s}$

$$A_1 = \frac{4N}{\sqrt{(0{,}2\ kg)^2 \left(\left(20\ \frac{1}{s}\right)^2 - \left(10\frac{1}{s}\right)^2\right)^2 + \left(3{,}2\ \frac{kg}{s}\right)^2 \cdot \left(10\frac{1}{s}\right)^2}} = 0{,}059\,m = 5{,}9\ cm$$

$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega D}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) = \tan^{-1}(0{,}53) \Rightarrow \alpha_1 = 28°$

$$A_2 = \frac{4N}{\sqrt{(0{,}2\,kg)^2 \cdot \left(\left(20\frac{1}{s}\right)^2 - \left(40\ \frac{1}{s}\right)^2\right)^2 + \left(3{,}2\ \frac{kg}{s}\right)^2 \cdot \left(40\ \frac{1}{s}\right)^2}} = 0{,}015\,m = 1{,}5\ cm$$

$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega D}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}\right) = \tan^{-1}(-0{,}53) = -27{,}9° + 180° = 152°$

Aufgabe 9 - *

Die Überlagerung zweier Stimmgabeln ergibt eine Frequenz von 441 Hz und eine Schwebung von 2 Hz. Welche Frequenzen haben die Stimmgabeln?

$f = 441\ Hz$

$f = 2\,Hz$

$\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)$

$\underbrace{2 \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t + \omega t}{2}\right)}\ \cos\left(\frac{\omega_0 t - \omega t}{2}\right)$

Schwebung

$\frac{\omega_0 + \omega}{2} = 2\pi \cdot 441\ Hz$

$\frac{\omega_0 - \omega}{2} = 2\pi \cdot 2Hz$

$\begin{cases} \omega_0 + \omega = 4\pi\,441 & (1) \\ \omega_0 - \omega = 8\pi & (2) \end{cases}$

2 Gleichungen 2 unbekannte

$(1)+(2) \Rightarrow 2\omega_0 = 1772\pi$

$\omega_0 = 886\pi$ in (1)

$\omega = 4\pi \cdot 441 - 886\pi = 828\pi$

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{886\pi}{2\pi} = 443\ Hz$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{828\pi}{2\pi} = 439\ Hz$

Aufgabe 10 - **

Zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz haben die Amplituden $A_1 = 5\ cm$ und $A_2 = 3\ cm$ und einen Phasenunterschied von 60°. Welche Amplitude und Phase hat die überlagerte Schwingung? Wählen Sie für die Schwingung 1 die Phase $\varphi = 0$.

Lösung 10- **

$A = 7cm$ und $\phi = 0.3803\ rad$

$f_1 = f_2$

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

$A_1 = 5cm$

$\varphi = 0°$

$A_2 = 3cm$

$\varphi = 60°$

$$A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = C \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

$$a\sin(x+\alpha) + b\sin(x+\beta) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta)} \cdot \sin(x+\delta),$$

bei $\delta = \operatorname{atan2}(a\sin\alpha + b\sin\beta, a\cos\alpha + b\cos\beta)$.

Erfasster Bildschirmausschnitt: 30.05.2023 13:42

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(-60^\circ)}$$

$$= \sqrt{49} = 7\,\text{cm}$$

$$\delta = \operatorname{atan2}\left(\frac{a \cdot \sin\alpha + b \cdot \sin\beta}{a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{5 \cdot \sin 0^\circ + 3 \cdot \sin(60^\circ)}{5 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \cos(60^\circ)}\right) =$$

$$= \operatorname{atan2}\left(\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{13/2}\right) = \operatorname{atan2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{13}\right)$$

$$\delta = 21{,}78^\circ \quad (0{,}38\ \text{rad})$$