6.8 Vektorgeometrie

a) $P_1(1|0|1)$, $P_2(2|1|3)$, $P_3(0|-1|-1)$

Gerade zwischen Punkt P_1 und P_2, der als Richtungsvektor fungiert, sollte diese Gerade existieren:

$\underline{v} = -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Punkt P_1 fungiere als Stützvektor:

$\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Geradengleichung:

$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Test ob P_3 in der Gerade liegt:

$\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

LGS aufstellen:

$0 = 1 + t \Leftrightarrow 0 = 1 - 1 \checkmark$
$-1 = 0 + t \Leftrightarrow t = -1$
$-1 = 1 + 2t \Leftrightarrow -1 = 1 - 2 \checkmark$

Der Punkt liegt für $t = -1$ auf der Geraden!

b) Basis in $\mathbb{R}^3$ mit $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{h}$

Finde Vektor mit dem das Skalarprodukt $= \underline{0}$ ist:

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1a + 1b + 1c \Rightarrow a \stackrel{!}{=} -1, b = 0, c = 1 \Rightarrow \underline{t} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Durch Vektormultiplikation einen dritten orthonormalen Vektor finden:

$\underline{h} \times \underline{t} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\-1-1\\0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ //

c) Orthonormalbasis durch $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

Die Normen der Vektoren müssen 1 ergeben:

$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ //

$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ //

$\left\| \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ //

Skalarprodukte bilden => müssen orthogonal sein:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 1 = 0$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ //

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ //

Die Vektoren bilden eine Orthonormalbasis

d) rechtwinkliges Dreieck aus $\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$:

zwei Vektoren bilden das Skalarprodukt 0 => sie sind orthogonal => 90°

$\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = -2 + 8 - 6 = 0$

Bei einen Rechtwinkligen Dreieck kann man aus den Katheten die Hypothenuse berechnen:

$\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$ //

Die Vektoren bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

e) $P_1(1/1/1), P_2(3/$[illegible]$)$ $P_3($[illegible]$)$ $P_4(12/-4/12)$ in Ebene?

Ebene aus: P_1, P_2 P_3 und P_4:

Richtungsvektor:

$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$P_1 - P_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix} = w$

Stützvektor:

$a = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Ebenengleichung:

$x = a + s \cdot v + t \cdot w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}$

Ist P_4 auf der Ebene?:

$\begin{pmatrix}12\\-4\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}$

$12 = 1 + (-2s) + (-3t) \Leftrightarrow 11 = -2s - 3t \Leftrightarrow 11 = -2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = 2 + 9 = 11$ ✓

$-4 = 1 + (-s) + 2t \Leftrightarrow -5 = -s + 2t \Leftrightarrow s = 2t + 5 \Leftrightarrow s = 2 \cdot (-3) + 5 \Leftrightarrow s = -1$

$12 = 1 + s + (-4t) \Leftrightarrow 11 = s - 4t \Leftrightarrow 11 = 2t + 5 - 4t \Leftrightarrow 6 = -2t \Leftrightarrow -3 = t$

Der Punkt liegt auf der Ebene.

Punktnormalenform:

$\underline{n} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2\\-3-8\\-4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-11\\-8\end{pmatrix}$

$0 = \underline{n} \cdot (\underline{x} - \underline{a}) = \begin{pmatrix}2\\-11\\-8\end{pmatrix} \cdot \left(\underline{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

f) $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$; welches λ damit komplanar?

Die Vektoren müssen linear abhängig voneinander sein!

$\begin{pmatrix}1\\\lambda\\4\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}-2\\4\\11\end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} \quad t, h \in \mathbb{R}$

$1 = -2t - 3h \Leftrightarrow 1 = -2t - 3 \cdot (4 - 11t) = -2t - 12 + 33t \Leftrightarrow 13 = 31t \Leftrightarrow t = \frac{13}{31}$

$\lambda = 4t + 5h \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{13}{31} + 5 \cdot (4 - \frac{143}{31}) \Leftrightarrow \frac{52}{31} + 20 - \frac{715}{31} = \frac{52}{31} + \frac{620}{31} - \frac{715}{31} = -\frac{43}{31}$ //

$4 = 11t + h \Leftrightarrow h = 4 - 11t \Leftrightarrow h = 4 - \frac{143}{31}$

a) Zeige $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{a_1 b_1 c_1} + a_2 b_1 c_2 + a_3 b_1 c_3 - \cancel{a_1 b_1 c_1} - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 \\ a_1 b_2 c_1 + \cancel{a_2 b_2 c_2} + a_3 b_2 c_3 - a_1 b_1 c_2 - \cancel{a_2 b_2 c_2} - a_3 b_3 c_2 \\ a_1 b_3 c_1 + a_2 b_3 c_2 + \cancel{a_3 b_3 c_3} - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 - \cancel{a_3 b_3 c_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3(b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1(b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2(b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sind gleich!}$$

b) Abstand von $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 6 - x - 3y + 2z = 0 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -60 + 3x + 9y - 6z = 0 \right\}$

Punkte auf E_1:

$$0 = 6 - x - 3y + 2z \Rightarrow P_{11} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dadurch dass die Ebenen-gleichungen von E_1 & E_2 (abgesehen von der Konstanten) Vielfache voneinander sind (Faktor -3), kann man schließen, dass sie Parallel sind!

Richtungsvektoren:

$$\underline{v}_1 = P_{11} - P_{12} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_1 = P_{11} - P_{13} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalvektor auf E_1:

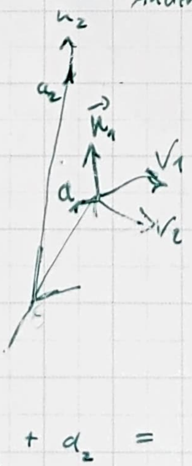
$$\underline{v}_1 \times \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 0 \\ 0 - 18 \\ 0 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \underline{n}$$

Normalenvektor in E_2 einsetzen mit λ:

$$0 = -60 + 3(6 - 6\lambda) + 9(0 - 18\lambda) - 6(0 + 12\lambda)$$ → Aufpunkt des normalenvektors einsetzen

$$0 = -60 + 18 - 18\lambda - 162\lambda - 72\lambda$$

Anderer Weg:



$$0 = -42 - 252\lambda$$

$$-\frac{42}{252} = \lambda = \frac{1}{6}$$

$\lambda \cdot$ Richtungsvektor:

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Norm Richtungsvektor:

$$|\underline{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \vec{n}_2 \cdot t_2 + a_2 = n_1 \cdot t_1 + a_2$$