

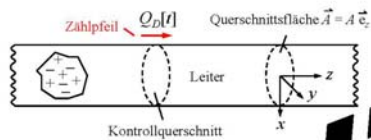


Bilder zur Vorlesung

„Grundgebiete der Elektrotechnik II“

2 V, 1 Ü, 1 P (= 3 Versuche)

1.1.2 Elektrische Stromstärke / Ladungsströmung - II



Die Ladungsströmung in einem Leiter wird durch den (meist zeitabhängigen) Ladungsträgerdurchsatz $Q_D[t]$ beschrieben.

(Der Index D weist darauf hin, dass es sich um sog. *Driftbewegungen* handelt. Damit sind freie Ladungsträger gemeint, die sich in metallischen Leitern durch die Wirkung äußerer elektrischer Felder bewegen.)

Bild 1.1.2-2: Leiter mit Kontroll-Querschnitt und Zählpfeil für den Ladungsdurchsatz $Q_D[t]$

- **Bezugsorientierung.** Zur Berechnung von $Q_D[t]$ benötigt man eine Bezugsorientierung (Zählpfeil) fest. $Q_D[t]$ kann als Anzeiger für die Ladungsummenge betrachtet werden, dessen Polung (wie der oben verwendete Zählpfeil) frei wählbar ist.
- **Ladungssumme.** Man summiert innerhalb einer kleinen Zeitspanne Δt all diejenigen Elementarladungen, die den Kontrollquerschnitt durchschneiden, so, wie in Tabelle 1.1.2-1 angegeben, und erhält die zugehörige kleine Ladungssumme ΔQ_D . Da das Ergebnis dieser Summation davon abhängt, um welchen Zeitpunkt herum man die Zeitspanne Δt legt, ist auch der Wert der Ladungssumme zeitabhängig $\Delta Q_D[t]$.

R. Nitzsche: Grundgebiete der Elektrotechnik I

Stand: 03.12.2019

1 - 1

1.1.2 Elektrische Stromstärke / Strom - I

Tabelle 1.1.2-1 Bewegungsorientierungsabhängige Beiträge zum differentiellen Ladungsdurchsatz dQ_D

Ladung	Bewegung durch den Querschnitt	Beitrag zur Summe dQ_D
positiv	in Zählpfeilorientierung	positiv
positiv	entgegen Zählpfeilorientierung	negativ
negativ	in Zählpfeilorientierung	negativ
negativ	entgegen Zählpfeilorientierung	positiv

- Die Technische Stromrichtung ist die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger. (Physiker hingegen meinen mit der Stromrichtung oft die Bewegungsrichtung der negativen Ladungsträger.)
- Elektrische Stromstärke I ist die zeitliche Änderung des Ladungsdurchsatzes Q_D .

$$I[t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D[t]}{\Delta t} = \frac{dQ_D[t]}{dt}, \quad I[t] = 1 \text{ A} = \text{Ampère.}$$

Wie das Vorzeichen von Q_D , so kann auch das Vorzeichen von I positiv oder negativ sein. Die tatsächliche Bewegungsrichtung der Ladungen erhält man aus dem Vorzeichen des Zahlenwertes in Verbindung mit dem Zählpfeil.

R. Nitzsche: Grundgebiete der Elektrotechnik I

Stand: 03.12.2019

1 - 2

Liebe Studierende,
dies ist eine Bildersammlung, die Ihnen das Abzeichnen komplexer grafischer Darstellungen von der Tafel teilweise ersparen soll, **kein Skript**. Ich empfehle Ihnen, die Bildersammlung wie links dargestellt **auszudrucken** und durch eigene, handschriftliche Aufzeichnungen zu **ergänzen**.

Bitte melden Sie mir Fehler oder Unstimmigkeiten, z. B. unter robert.nitzsche@fh-muenster.de.

Hinweis: Einige Darstellungen sind urheberrechtlich geschützt. Jede über persönliche Aufzeichnungen im Rahmen von Lehrveranstaltungen hinausgehende Vervielfältigung oder kommerzielle Nutzung - auch uploads - bedarf der Zustimmung des jeweiligen Rechteinhabers!

Während Vorlesung, Übung, Labor, Sprechstunden, Prüfungen und Einsichtsterminen zu Prüfungen sind Bild- oder Tonaufzeichnungen unter Benutzung von Aufnahmegeräten **nicht gestattet**.

0.2 Inhalt

- 2 Wechselstrom
 - 2.1 Grundbegriffe der Wechselstromtechnik (siehe 1. Semester)
 - 2.2 Berechnung von Wechselstromnetzwerken (siehe 1. Semester)
 - 2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente
 - 2.4 Leistung im Wechselstromkreis
- 3 Wechselstrom-Anwendungen
 - 3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme
 - 3.2 Äquivalente und duale Netzwerke
 - 3.3 Schwingkreise
- 4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen
 - 4.1 Einführendes Beispiel
 - 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
 - 4.3 Spektrumanalysator
 - 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
 - 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen



2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.3.1 Realer Widerstand

2.3.2 Reale Spule

2.3.3 Realer Kondensator

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

Reale Bauelemente wie Spulen, Kondensatoren und Widerstände besitzen nicht nur das Verhalten reiner Induktivitäten, Kapazitäten bzw. OHMscher Widerstände. Ihr Verhalten lässt sich meist durch ein Ersatzschaltbild beschreiben, in dem die 3 genannten idealen Typen von Bauelementen geeignet zusammengeschaltet sind.

2.3.1 Realer Widerstand - I

Ein **Widerstand** (Bild 2.3.1-1 a) kann z. B. durch Aufwickeln eines Metalldrahtes, mit relativ geringem spezifischen elektrischen Widerstand und möglichst kleinem Temperaturkoeffizienten des Widerstands, auf einen Keramikzylinder realisiert werden. Diese Ausführung besitzt den Nachteil einer relativ großen Induktivität, die insbesondere bei hohen Frequenzen störend wirkt.

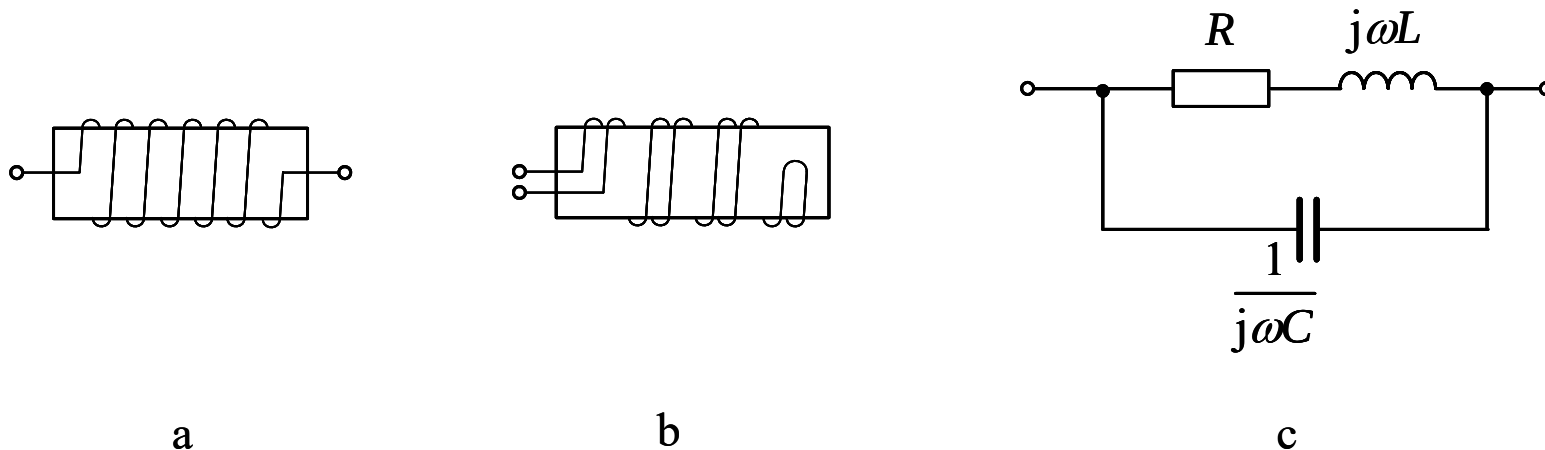


Bild 2.3.1-1 Realisierung eines Widerstands **a** **Drahtwiderstand**, **b** mit bifilarer Wicklung, **c** Ersatzschaltung eines realen Widerstandes

Da man zur Realisierung eines möglichst großen Widerstands in einem gegebenen Bauvolumen auf eine möglichst große Gesamtlänge des Drahtes angewiesen ist (s. Kapitel „Gleichstrom“), gibt man die gewickelte Anordnung nur ungern auf. Eine deutliche Verringerung der Induktivität wird durch eine sog. **bifilare Wicklung** erreicht. Da der Strom in je zwei benachbarten Drähten entgegengesetzt fließt, kompensieren sich die vom Strom hervorgerufenen Magnetfelder nahezu vollständig und die Induktivität ist vergleichsweise gering. Es bleiben die Kapazitäten zwischen den Wicklungen, die zu den resultierenden Größen in Bild 2.3.1-1 c zusammengefasst werden.

2.3.1 Realer Widerstand - II

Eine alternative Bauform sind sog. **Schichtwiderstände**, bei denen ein rohrförmiger Körper aus Isolationsmaterial außen mit einer dünnen leitfähigen Schicht aus Kohle oder Metall überzogen ist. Bei größeren Widerstandswerten wird diese Schicht wendelförmig auf den Träger aufgebracht.

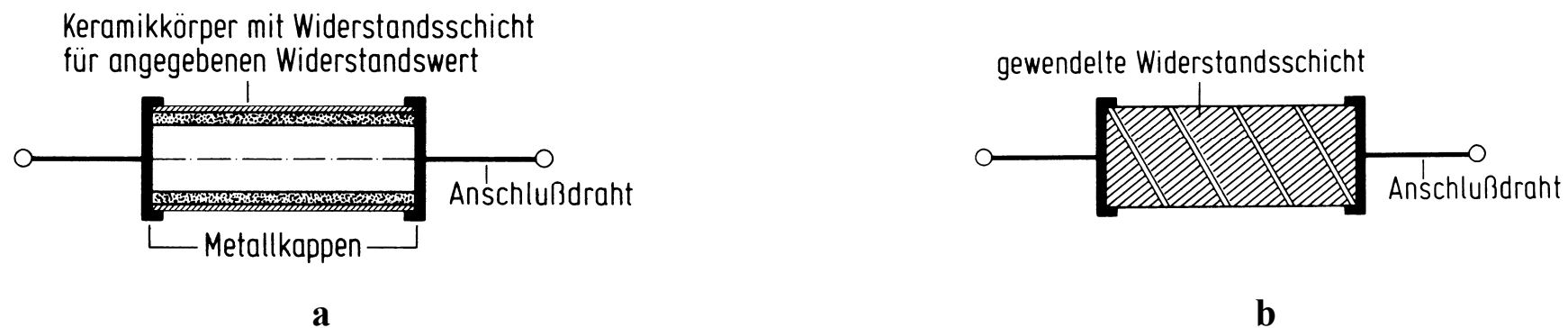


Bild 2.3.1-2 Realisierung von Schichtwiderständen

Quelle: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen und Bauelemente der Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

Die reale Anordnung besitzt abhängig von ihrer Bauform, neben dem gewünschten Wirkwiderstand auch eine Induktivität und Kapazitäten zwischen verschiedenen Stellen des Aufbaus. Die einfachste Möglichkeit zur Modellierung besteht darin, alle Teilinduktivitäten und -kapazitäten in je einem Bauelement, der sog. **Eigeninduktivität** L und der **Eigenkapazität** C , zusammenzufassen, was zum Ersatzschaltbild 2.3.1-1 c führt.

Ob beide zusätzlichen Elemente L und C berücksichtigt werden müssen, hängt von der Frequenz ab, mit der die Schaltung betrieben wird. Bei relativ niedrigen Frequenzen kann C meist vernachlässigt werden. Bei hohen Frequenzen ist der Wirkwiderstand des Leiters größer als bei niedrigen oder Gleichstrom. Der Grund hierfür liegt im Effekt der sog. **Stromverdrängung**.

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.3.1 Realer Widerstand

2.3.2 Reale Spule

2.3.3 Realer Kondensator

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

2.3.2 Reale Spule - I

Eine **Spule** ist eine gewickelte Drahtanordnung, wahlweise ohne oder mit Kern (Bild 2.3.2-1 a).

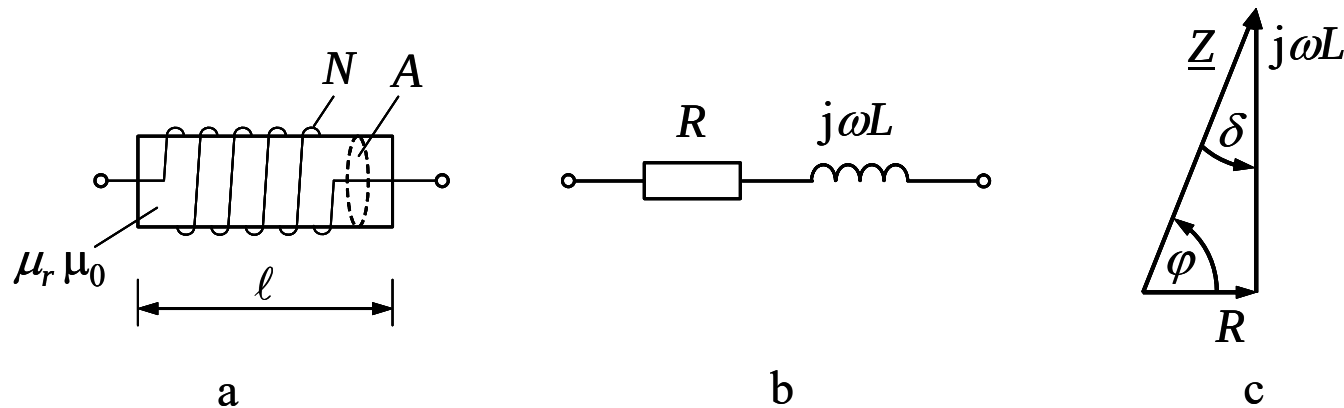


Bild 2.3.2-1 **a** Aufbau einer realen Spule, **b** Ersatzschaltbild, **c** Zeigerbild

Für lange schlanke Spulen berechnet man die Größe **Selbstinduktivität** näherungsweise zu

$$L \approx N^2 \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{A}{\ell}, \quad \{L\}_{SI} = \text{H} = \Omega\text{s}.$$

Darin bedeuten

N

Windungszahl, $\{N\}_{SI} = 1$,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Permeabilität des Vakuums, Magnetische Feldkonstante,

μ_r

Relative Permeabilität des Kernmaterials, $\{\mu_r\}_{SI} = 1$,

A Kernquerschnittsfläche, $\{A\}_{SI} = \text{m}^2$, und

ℓ (Eisen-)Länge des Kerns, $\{\ell\}_{SI} = \text{m}$, nicht die Länge des gewickelten Drahtes.

2.3.2 Reale Spule - II

Obwohl sich die Induktivität einer langen schlanken Spule nur näherungsweise berechnen lässt, gilt:

„Die Induktivität ist nur von Material- und Geometrieparametern abhängig“.

Zur Realisierung einer möglichst großen Induktivität L in gegebenem Bauraum ist eine möglichst große Windungszahl N , eine möglichst große Träger- oder Kernquerschnittsfläche A sowie ein Kern mit möglichst großer relativer Permeabilität μ_r erforderlich.

Da der Draht stets einen Wirkwiderstand besitzt, ist das einfachste Ersatzschaltbild einer realen Spule eine RL-Reihenschaltung (Bild 2.3.2-1 b) mit der Impedanz

$$\underline{Z} = R + j\omega L = Z \cdot e^{j\varphi}.$$

Stellt man diese komplexe Zahl grafisch dar, so erhält man ein Widerstandsdreieck (Bild 2.3.2-1 c). Der Benutzer einer realen Spule strebt an, dass diese sich „so ideal wie möglich“ verhält, was für $R \ll \omega L$ der Fall ist. Dann ist die frequenzabhängige **Spulengüte**

$$Q_L = \frac{\omega L}{R}, \quad \{Q_L\}_{SI} = 1$$

besonders groß und ihr Kehrwert, der **Verlustfaktor**

$$d = \frac{1}{Q_L} = \frac{R}{\omega L} = \tan \delta, \quad \{d\}_{SI} = 1$$

sehr klein. Es heißt **Verlustwinkel**

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Das Ersatzschaltbild einer realen Spule mit Eisenkern zeigt Bild 2.3.2-2. Darin repräsentiert R_{Cu} die Stromwärmeverluste in der Drahtwicklung und R_{Fe} die Umagnetisierungsverluste (Wirbelstrom- und Hystereseverluste) im Eisenkern.

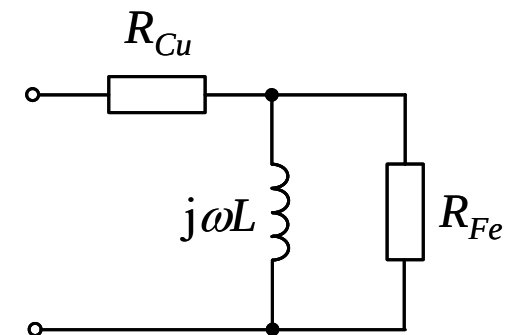


Bild 2.3.2-2: Ersatzschaltung einer realen Spule mit Eisenkern

2.3.2 Reale Spule - III

Zur leichteren mathematischen Behandlung wird die Parallelschaltung aus R_{Fe} und $j\omega L$ meist in eine Reihenschaltung umgerechnet. Diese Umrechnung setzt eine konstante Betriebskreisfrequenz ω voraus. In dem Wert des sog. Ersatz-Reihenwiderstandes lassen sich noch weitere Verlustmechanismen abbilden.

Bei hohen Frequenzen beeinflussen zusätzlich Kapazitäten zwischen den einzelnen Windungen der Spule deren Betriebsverhalten. Die nachstehend dargestellte Unterteilung der Spule in N Windungen stellt bereits eine Vereinfachung dar, da es sich in Wirklichkeit um einen verteilten Kapazitätsbelag handelt und außerdem die Teilkapazitäten nicht nur zur jeweils benachbarten Windung zu berücksichtigen sind.

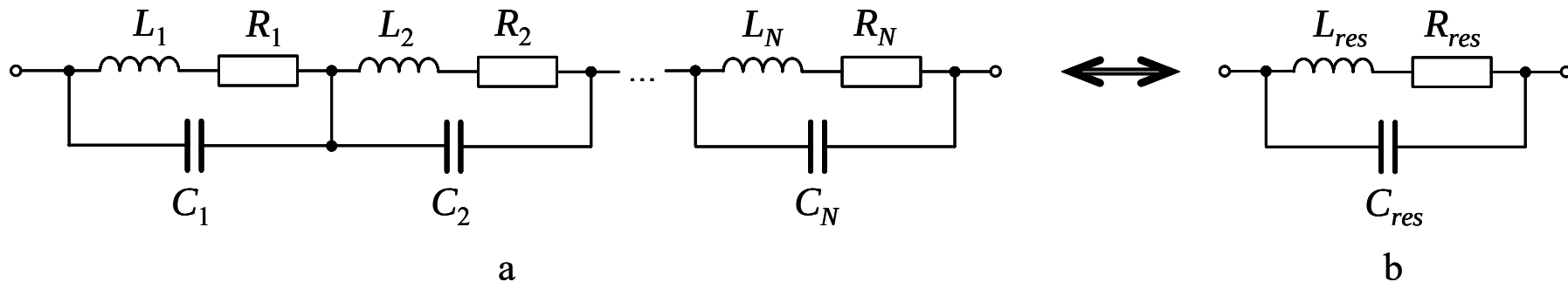


Bild 2.3.2-3 **a** Ersatzschaltung einer realen Spule unter Berücksichtigung der Kapazitäten zwischen den N Windungen, **b** Ersatzschaltung einer realen Spule

Auch für die Ersatzschaltung nach Bild 2.3.2-3 b kann eine Güte nach

$$Q_L = \frac{\text{Im}[\underline{Z}] > 0}{\text{Re}[\underline{Z}]}$$

angegeben werden, solange der Blindwiderstand induktiv und deutlich größer als der OHMsche Widerstand ist.

2.3.2 Reale Spule - IV

Neben kommerziellen Kleinleistungsspulen, etwa mit den Abmessungen eines 1 W-Widerstands bei 1 mH, gibt es vor allem für die Hochfrequenztechnik Spulenbausätze mit verschiedenen Kernmaterialien und -formen.

Die o. a. Gleichung für die Induktivität gilt in Strenge nur für streuungslose Spulen.

Um den Streufluss möglichst gering zu halten, wählt man in der Praxis gern näherungsweise oder vollständig geschlossene Kerne.

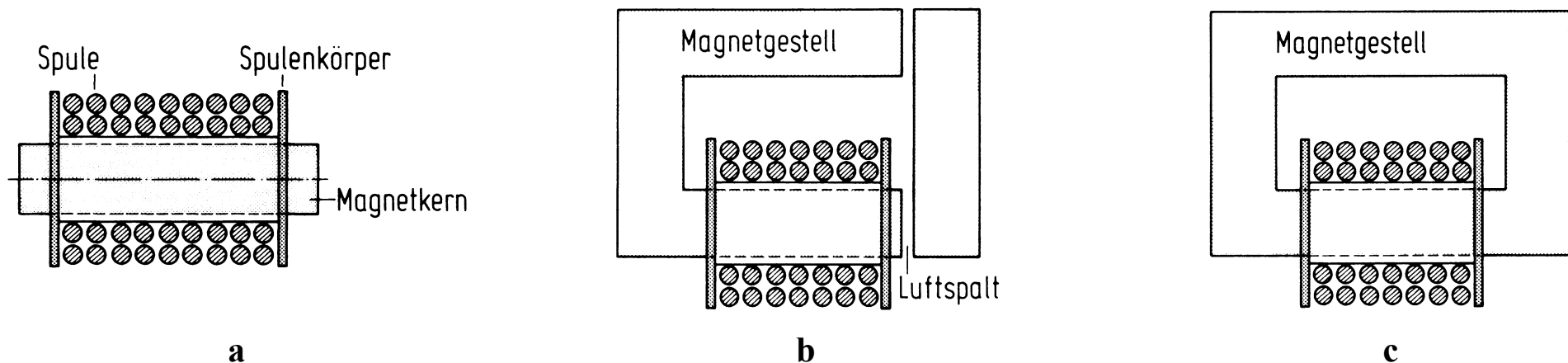


Bild 2.3.2-4 Spulen mit verschiedenen Kernformen: **a** offener Kern, **b** Hufeisenkern mit 2 Luftspalten, **c** geschlossener Kern

Quelle: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen der Bauelemente und Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

2.3.2 Reale Spule - V

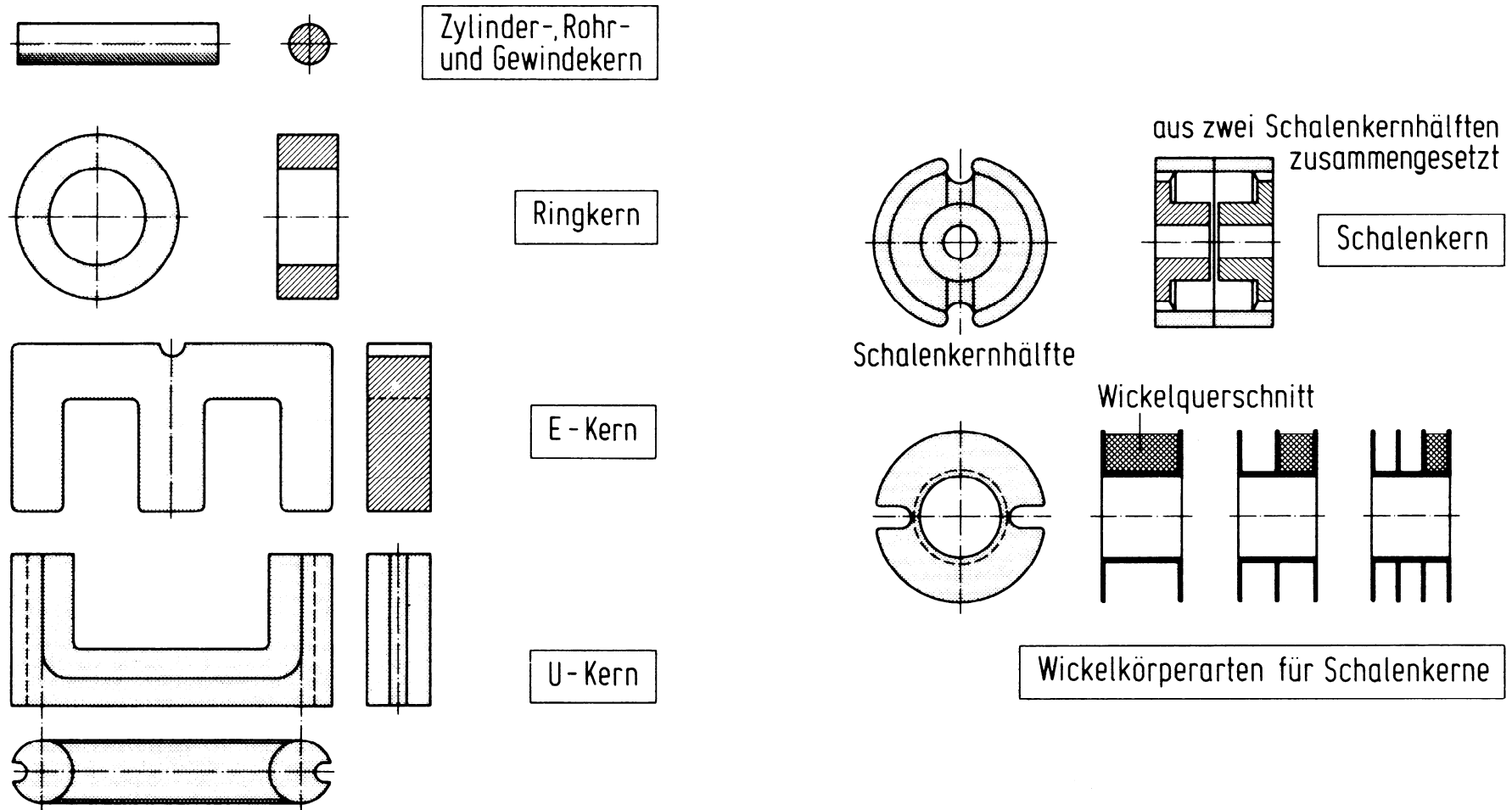


Bild 2.3.2-5 Bauformen für Spulenkerne

Quelle: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen der Bauelemente und Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.3.1 Realer Widerstand

2.3.2 Reale Spule

2.3.3 Realer Kondensator

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

2.3.3 Realer Kondensator - I

Ein **Kondensator** besteht aus zwei elektrisch leitfähigen Körpern, den Elektroden, und einem zwischen diesen Elektroden angeordneten Isolierstoff, dem Dielektrikum, mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Die Zahl $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ heißt elektrische Feldkonstante oder Permittivität des Vakuums. In der einfachsten Ausführung sind die beiden Elektroden rechteckige Metallplatten (schraffiert in Bild 2.3.3-1 a).

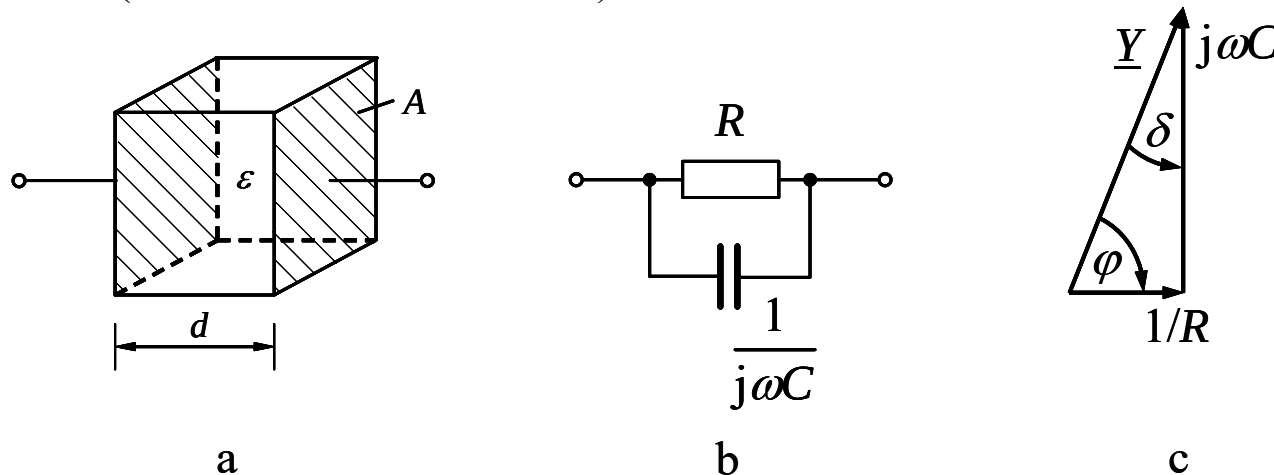


Bild 2.3.3-1 Plattenkondensator: **a** Aufbau, **b** Ersatzschaltbild, **c** Zeigerbild

Tabelle 2.3.3-1 Elektrische Eigenschaften des Dielektrikums

Eigenschaft	ideal	real
Relative Dielektrizitätskonstante ε_r	möglichst groß	3 ... 10000
Isolationswiderstand ρ	∞	$10^{12} \dots 10^{17} \Omega\text{cm}$
Durchschlagsfestigkeit	∞	100 ... 15000 kV/cm

Auch Luft ist ein Dielektrikum mit der relativen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r \approx 1$.

2.3.3 Realer Kondensator - II

Das Dielektrikum besitzt stets eine, wenn auch sehr kleine, elektrische Leitfähigkeit $\kappa = 1/\rho$. Das einfachste Ersatzschaltbild eines realen Kondensators ist deshalb eine RC-Parallelschaltung mit der Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = Y \cdot e^{-j\varphi}.$$

Beim Betrieb des Kondensators an Wechselspannung kommt es zu wechselnder Polarisierung unter der Abgabe von Stromwärmeverlustleistung. Dadurch ist der im Ersatzschaltbild wirksame OHMSche Widerstand R kleiner als der Isolationswiderstand des Dielektrikums. Der Phasenverschiebungswinkel ergibt sich rein formal zu

$$\varphi = \arccos[\underline{Z}] = -\arccos[\underline{Y}] = -\arctan\left[\frac{\omega C}{1/R}\right].$$

Aus dem Leitwertdreieck folgen der **Verlustwinkel**

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\varphi|$$

und der **Verlustfaktor**

$$d_C = \tan \delta = \tan\left[\frac{\pi}{2} - |\varphi|\right] = \frac{1}{\tan[|\varphi|]} = \frac{1/R}{\omega C} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Mit der Fläche *einer* Platte A und dem Plattenabstand d lässt sich für die **Kapazität**

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}, \quad \{C\}_{SI} = F = \frac{s}{\Omega}$$

und für den Widerstand

$$R = \rho \frac{d}{A} = \frac{d}{\kappa A}$$

schreiben. Damit folgt der Verlustfaktor

$$d_C = \tan \delta = \frac{\kappa}{\omega \varepsilon}.$$

d_C ist eine frequenzabhängige Materialgröße, die Auskunft über die Qualität des verwendeten Dielektrikums gibt. Je kleiner d_C ist, umso hochwertiger das Dielektrikum.

Die Kapazität realer Kondensatoren ist durch die Materialeigenschaften der Dielektrika temperatur- und frequenzabhängig. Der Temperaturkoeffizient ist meist betragsmäßig kleiner als $5\%/100\text{ K} = 5 \cdot 10^{-4}/\text{K}$, die Frequenzabhängigkeit betragsmäßig kleiner als $2\%/1\text{ kHz} = 2 \cdot 10^{-5}/\text{Hz}$.

2.3.3 Realer Kondensator - III

Wickel- oder Folienkondensatoren. Zur Realisierung einer möglichst großen Kapazität in gegebenem Bauraum strebt man eine möglichst große Plattenfläche an. Um diese zu erreichen, können z. B. die beiden Platten des Kondensators Metallfolien sein, die gemeinsam mit einem dazwischenliegenden Dielektrikum aufgewickelt werden

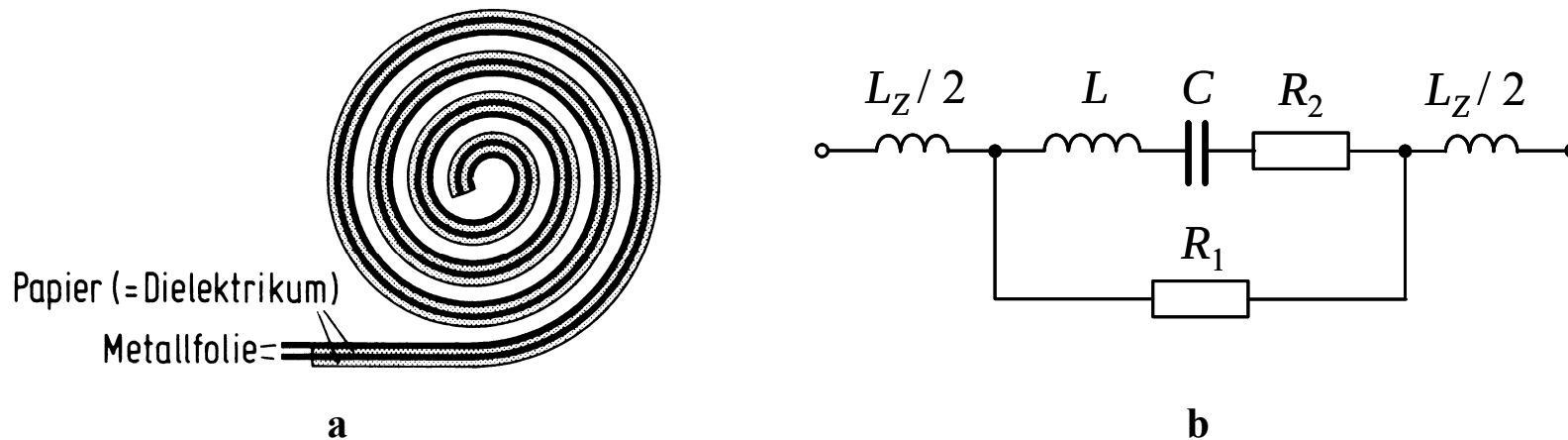


Bild 2.3.3-2 **a** Aufbau und **b** Ersatzschaltung eines realen Wickelkondensators

Quelle zu a: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen und Bauelemente der Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

Im Ersatzschaltbild (Bild 2.3.3-2 b) repräsentieren L die Induktivität des Wickels, L_Z die Zuleitungsinduktivität(en), R_1 den bei Gleichspannung wirksamen Isolationswiderstand und R_2 die oben schon erwähnten Ummagnetisierungsverluste. L_Z kann merklich reduziert werden, indem die Kontaktierung nicht an den Enden des Wickels, sondern an den Stirnflächen des Wickels über alle Windungen gemeinsam erfolgt, wofür die beiden Metallfolien je zu einer Stirnfläche hin überstehen müssen.

2.3.3 Realer Kondensator - IV

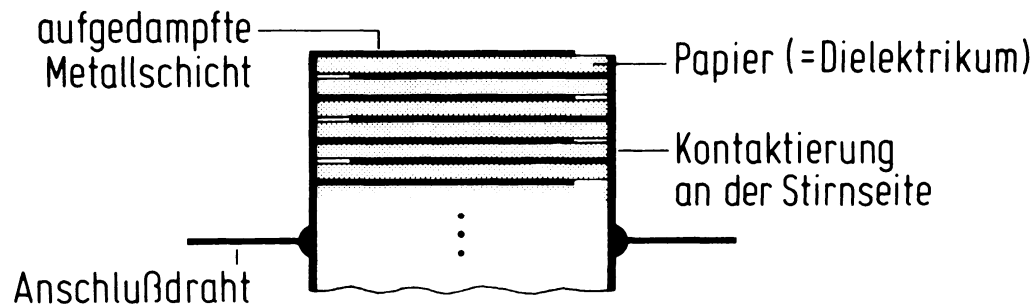


Bild 2.3.3-3: Kontaktierung eines Wickelkondensators

Quelle: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen und Bauelemente der Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

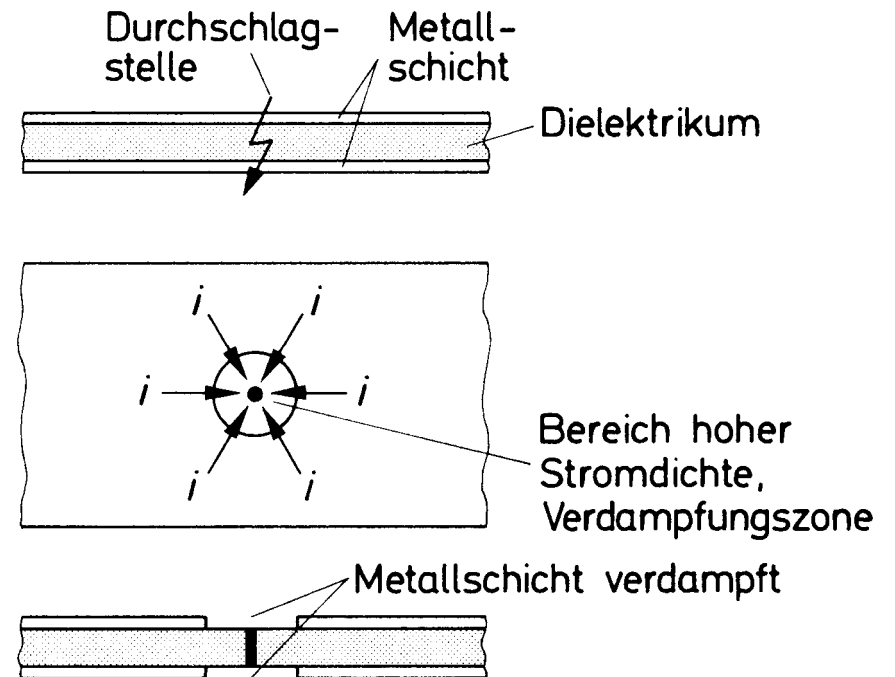


Bild 2.3.3-4: Kontaktierung eines Wickelkondensators

Quelle: Beuth, K.: Bauelemente (Elektronik 2), Vogel Buchverlag, Würzburg

Führen Spannungstöße zu einem lokalen Durchschlag, also einem Kurzschluss zwischen den Kondensatorplatten, so verdampft der dabei entstehende Lichtbogen die Metallschicht auf beiden Platten rund um die Durchschlagstellen. Die so entstandenen metallfreien Stellen isolieren wieder, der Kondensator bleibt durch diesen *Selbstheilungsprozess* mit leicht verringerter Kapazität einsatzfähig.

2.3.3 Realer Kondensator - V

Zur Gruppe der Wickel- oder Folienkondensatoren gehören die Metallpapier- (MP-) und die metallisierten Kunststofffolien- (MK-) Kondensatoren, von denen es wiederum mehrere Ausführungsformen gibt.

Tabelle 2.3.3-2 Ausführungsformen von Wickel- oder Folienkondensatoren

Bauart	Bez.	Inhalt
MP-Kondensator	MP	Metallfolien mit Papier als Dielektrikum
MK-Kondensatoren	MKT	Metallisch bedampfte Kunststofffolien mit Polyethylenerephtalat als Dielektrikum
	MKC	Metallisch bedampfte Kunststofffolien mit Polycarbonat als Dielektrikum
	MKS	Metallfolien mit Polystyrol als Dielektrikum
	MKU	Metallisch bedampfte Kunststofffolien mit Lackfolie als Dielektrikum

Kunststoffkondensatoren können bei gleicher Kapazität kleiner und spannungsfester als Papierkondensatoren aufgebaut werden. Kunststoff verdrängt deshalb Papier als Dielektrikum. Kunststoffkondensatoren werden mit Kapazitäten von bis zu 100 μF hergestellt.

2.3.3 Realer Kondensator - VI

Keramikkondensatoren sind Kondensatoren mit Dielektrika aus Keramikmasse.

Als Grundstoff dient z. B. Titanoxid TiO_2 mit einer relativen Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_r \approx 100$. Durch Mischung mit Metalloxiden können die Keramiken gesintert (= Heißverpressen von pulverisiertem Material) und anschließend mit Metallbelägen versehen werden.

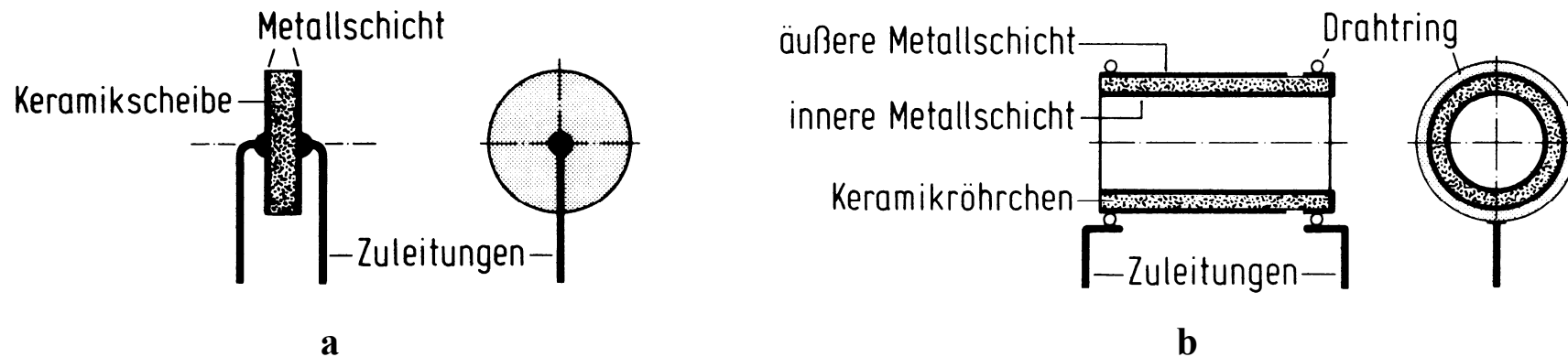


Bild 2.3.3-5 Bauformen von Keramikkondensatoren: **a** Scheibenkondensator, **b** Röhrenkondensator

Quelle: Bauckholt, H.-J.: Grundlagen und Bauelemente der Elektrotechnik, Carl Hanser Verlag, München

Keramikkondensatoren sind durch ihre Dielektrika für hohe Frequenzen und Betriebsspannungen geeignet; lassen sich aber nur mit relativ kleinen Kapazitätswerten ($< 1 \mu\text{F}/30 \text{ V}$ oder $15 \text{ nF}/1000 \text{ V}$) herstellen.

2.3.3 Realer Kondensator - VII

Elektrolytkondensatoren werden als Aluminium- oder Tantal-Elektrolytkondensatoren ausgeführt. Bei *Aluminium-Elektrolytkondensatoren* besteht eine Elektrode aus einem auf Abstand gewickelten Aluminiumband, die zweite aus einem flüssigen Elektrolyten. Zwischen beiden wirkt eine Oxidschicht auf der Aluminiumelektrode als Dielektrikum ($\epsilon_r \approx 7$), die sehr spannungsfest ist und deshalb dünn ausfallen kann, z. B. $0,15 \mu\text{m}/100 \text{ V}$. Durch Aufrauen der Aluminiumfolie lässt sich deren Oberfläche und damit die Kapazität weiter vergrößern. Auf diese Weise lassen sich vergleichsweise große Kapazitäten ($< 25000 \mu\text{F}$) pro Bauvolumen realisieren.

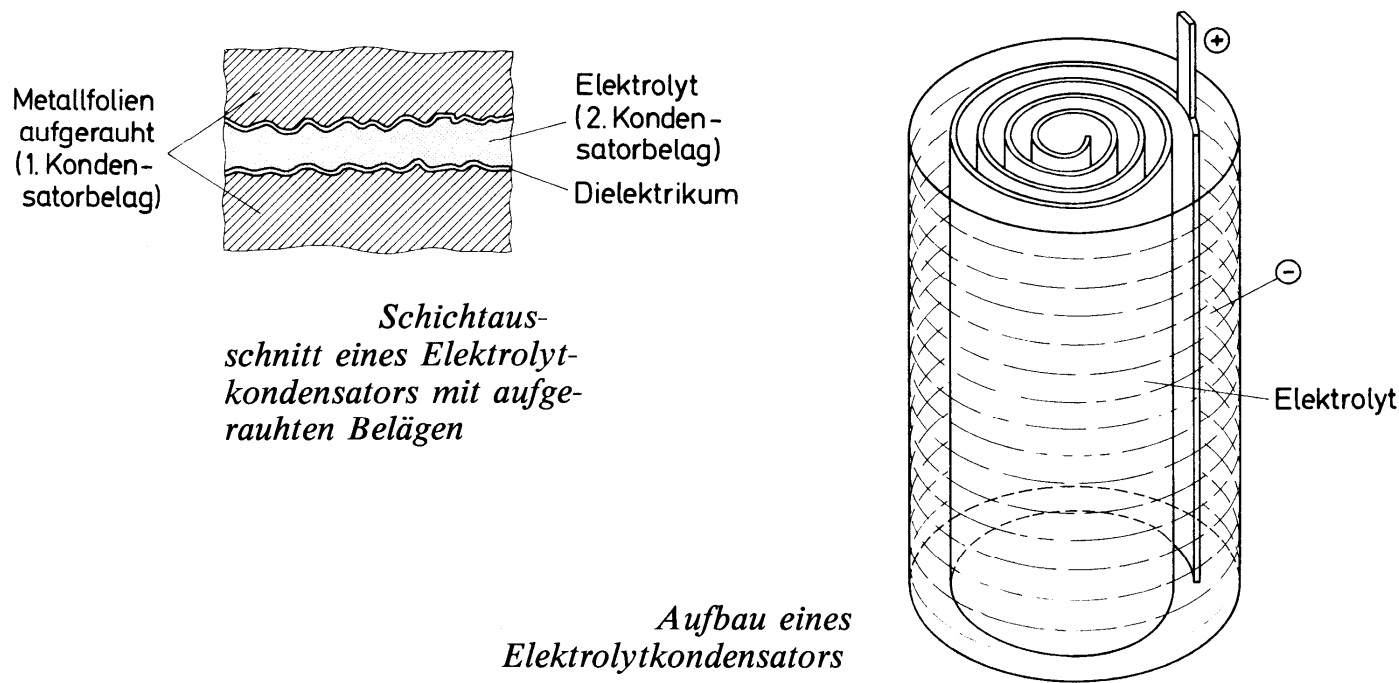


Bild 2.3.3-6 Aufbau eines Elektrolytkondensators

Quelle: Beuth, K.: Bauelemente (Elektronik 2), Vogel Buchverlag, Würzburg

2.3.3 Realer Kondensator - VIII

Aluminium-Elektrolytkondensatoren müssen gepolt betrieben werden; die Aluminiumfolie ist dabei der positive Pol. Wird der Elektrolytkondensator an Spannungen größer 2 V verpolt betrieben, wird die Oxidschicht abgebaut, der Elektrolyt erwärmt sich und es besteht die Gefahr der Explosion des Kondensators.

Auch nach längerer Lagerung kann die Oxidschicht teilweise abgebaut sein. Dies führt zu einem erhöhten Einschaltreststrom, der allerdings meist nach etwa 10 Minuten auf seinen Bemessungswert absinkt.

Durch zu große Strom-Effektivwerte werden Elektrolytkondensatoren stärker als geplant erwärmt und es besteht die Gefahr des Austrocknens des Elektrolyten und damit einer Reduktion der Lebensdauer.

Tantal-Elektrolytkondensatoren benutzen Tantalpentoxid als Dielektrikum ($\varepsilon_r \approx 27$). Die Tantalpentoxidschicht baut sich auch bei längerer Lagerung nicht ab. Die Restströme sind sehr gering. Tantal-Elektrolytkondensatoren besitzen deshalb größere Kapazitätswerte und Spannungsfestigkeiten pro Volumen und genügen höheren Anforderungen als Aluminium-Elektrolytkondensatoren.

Tantal-Elektrolytkondensatoren werden in den Ausführungen

- Tantal-Elektrolytkondensatoren der Bauart F (Geometrie wie bei Aluminium-Elektrolytkondensatoren)
- Tantal-Elektrolytkondensatoren der Bauart S mit Sinteranoden („löchriger Schwamm mit vergrößerter Oberfläche“) und flüssigem Elektrolyten
- Tantal-Elektrolytkondensatoren der Bauart SF mit Sinteranoden und festem (d. h. nicht auslauf- oder verdunstungsgefährdetem) Elektrolyten

hergestellt.

Tantal-Elektrolytkondensatoren sind teurer als Aluminium-Elektrolytkondensatoren und empfindlich gegenüber großen Strömen - auch wenn diese nur kurzzeitig auftreten. Das Laden und Entladen sollte deshalb stets über Vorwiderstände erfolgen; diese Forderung begrenzt das Einsatzgebiet dieser Kondensatortypen zusätzlich.

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 Blindleistung

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung

2.4.5 Leistungsanpassung

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.1 Wirkleistung - I

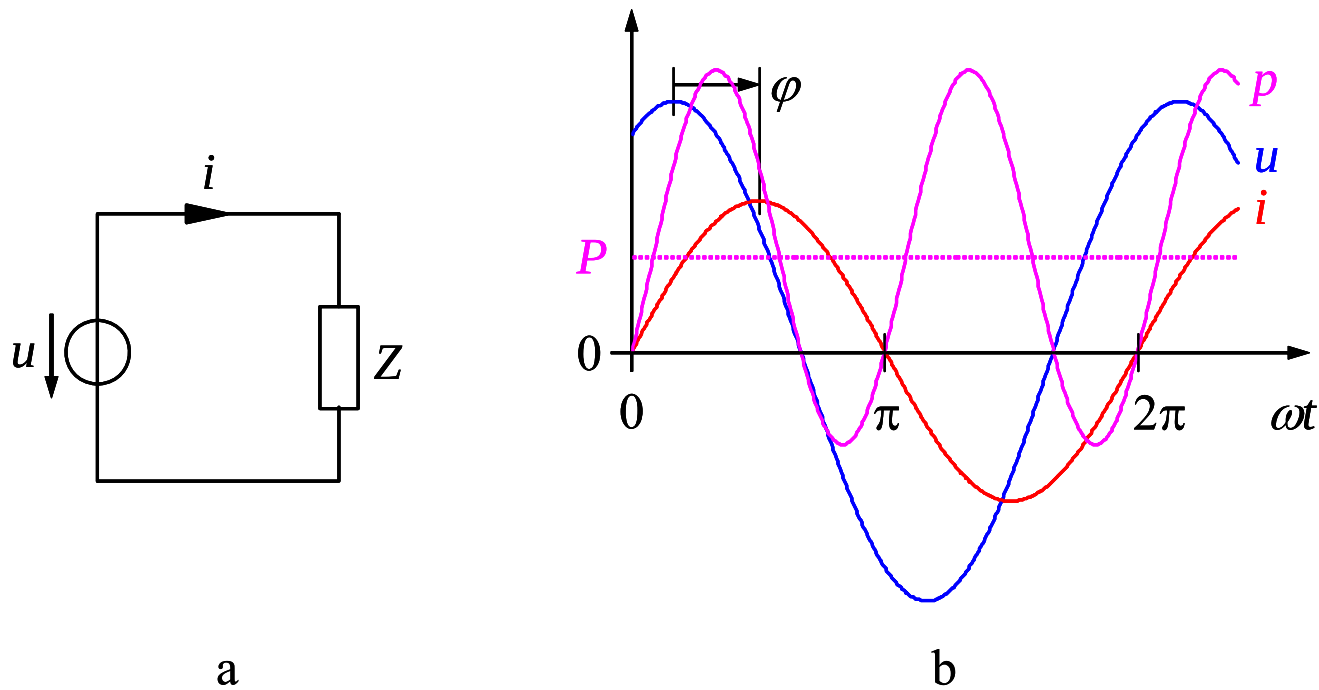


Bild 2.4.1-1 **a** Einfacher Wechselstromkreis, **b** Winkelverläufe von Spannung, Strom und Leistung für $\varphi = 60^\circ$

Besitzen Spannung und Strom die Zeitverläufe

$$u[t] = \hat{u} \cdot \sin[\omega t + \varphi] \quad \text{bzw.} \quad i[t] = \hat{i} \cdot \sin[\omega t],$$

so beträgt der Augenblickswert der an die Verbraucherimpedanz Z gelieferten Leistung (**Augenblicksleistung**)

$$p[t] = u[t] \cdot i[t] = \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \sin[\omega t + \varphi] \cdot \sin[\omega t] = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} (\cos[\varphi] - \cos[2\omega t + \varphi]) = \underbrace{U \cdot I \cdot \cos \varphi}_{\bar{p}=P} - \underbrace{U \cdot I}_{S} \cdot \cos[2\omega t + \varphi].$$

2.4.1 Wirkleistung - II

In der Ansatzfunktion für den Strom wurde hier $\varphi_i = 0$ gewählt, so dass in der Ansatzfunktion für die Spannung anstelle von φ_u kürzer $\varphi = \varphi_u - \varphi_i \stackrel{\text{hier}}{=} \varphi_u$ geschrieben werden kann. Dadurch ergeben sich übersichtlichere Formeldarstellungen.

Die Augenblicksleistung enthält einen zeitlich konstanten Anteil

$$\bar{p} = P = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \cos \varphi = UI \cos \varphi, \quad \{P\}_{SI} = W,$$

welcher als **Wirkleistung** P bezeichnet wird und einen mittelwertfreien Anteil doppelter Quellenfrequenz.

Die Wirkleistung ist der zeitliche Mittelwert der Augenblicksleistung.

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 Blindleistung

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung

2.4.5 Leistungsanpassung

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.2 Scheinleistung

Im Zeitbereich sind nur Augenblicks- und Wirkleistung definiert.

In Zeigerdarstellung sind, ausgehend von der Definition der Wirkleistung, noch zwei weitere Leistungen definiert, und zwar die Amplitude des im Zeitbereich schwingenden Leistungsanteils als

- **Scheinleistung**

$$S = U \cdot I, \quad \{S\}_{SI} = \text{VA}$$

und die

- **Blindleistung** (s. Abschnitt 2.4.3).

Die Scheinleistung ist beispielsweise bei der Bemessung elektrischer Maschinen von Bedeutung, wo die Wicklungsisolation die zulässige Spannungsbeanspruchung und die Leiterquerschnitte die Stromtragfähigkeit bestimmen, unabhängig von der Größe des Phasenverschiebungswinkels.

Die Benutzung der Einheit VA für die Scheinleistung an Stelle von W ist nur eine Schreibweise, die den Unterschied zwischen beiden Größen, *zusätzlich* zu der Verwendung verschiedener Formelzeichen, verdeutlichen soll.

Mit

$$P = S \cdot \cos \varphi$$

folgt das Verhältnis

$$0 \leq \left(\lambda = |\cos \varphi| = \frac{|P|}{S} \right) \leq 1,$$

der (Grundswingungs-) **Leistungsfaktor** oder **Ver-schiebungsfaktor**.

Sonderfall: Ist die unter Abschnitt 2.4.1 eingeführte Last ein OHMscher Widerstand $\underline{Z} = R$, so sind Spannung und

Strom in Phase, so dass gilt $\varphi = \varphi_u - \varphi_i \stackrel{\underline{Z}=R}{=} 0$ und damit folgt $\cos \varphi = \cos[0] = 1 = \frac{P}{S} \Rightarrow P = S$.

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 **Leistung im Wechselstromkreis**

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 **Blindleistung**

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung

2.4.5 Leistungsanpassung

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.3 Blindleistung - I

Aus den Definitionen von Wirk- und Scheinleistung lässt sich eine Größe

$$Q = S \cdot \sin \varphi, \quad \{Q\}_{SI} = \text{VA}$$

ableiten, die **Blindleistung** genannt wird. Ihre Einheit entspricht physikalisch der von Wirk- und Scheinleistung, wird aber zur Verdeutlichung des unterschiedlichen Charakters gelegentlich als „VAr“ oder als „var“ (Volt ampere reactive) geschrieben, was **hier unerwünscht** ist. Ihr Zusammenhang zu den bisher definierten Größen lautet

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2} = S \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Bild 2.4.3-1 zeigt, wie mittels der oben angegebenen Beziehungen

- Die Wirkleistung ist der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung und
- Die Scheinleistung (Betrag der komplexen Scheinleistung) entspricht der Amplitude des schwingenden Leistungsanteils

an einem harmonischen Verlauf der Augenblicksleistung die Blindleistung auf grafischem Wege ermittelt werden kann.

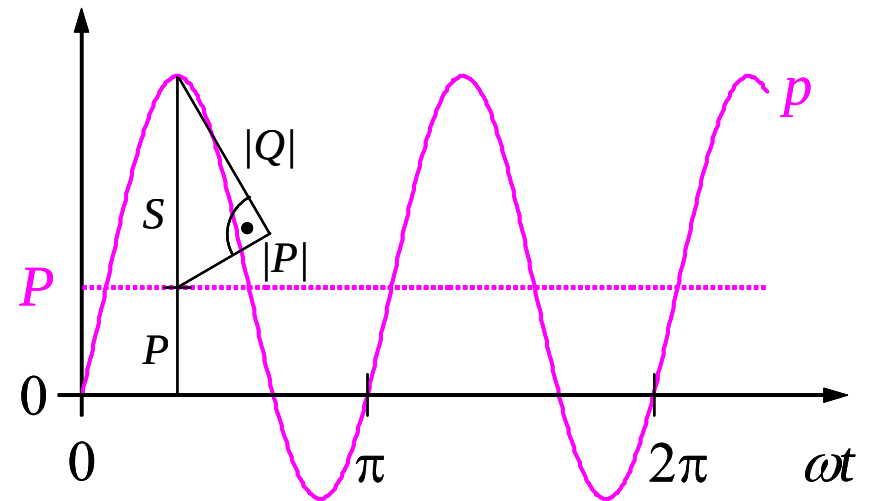
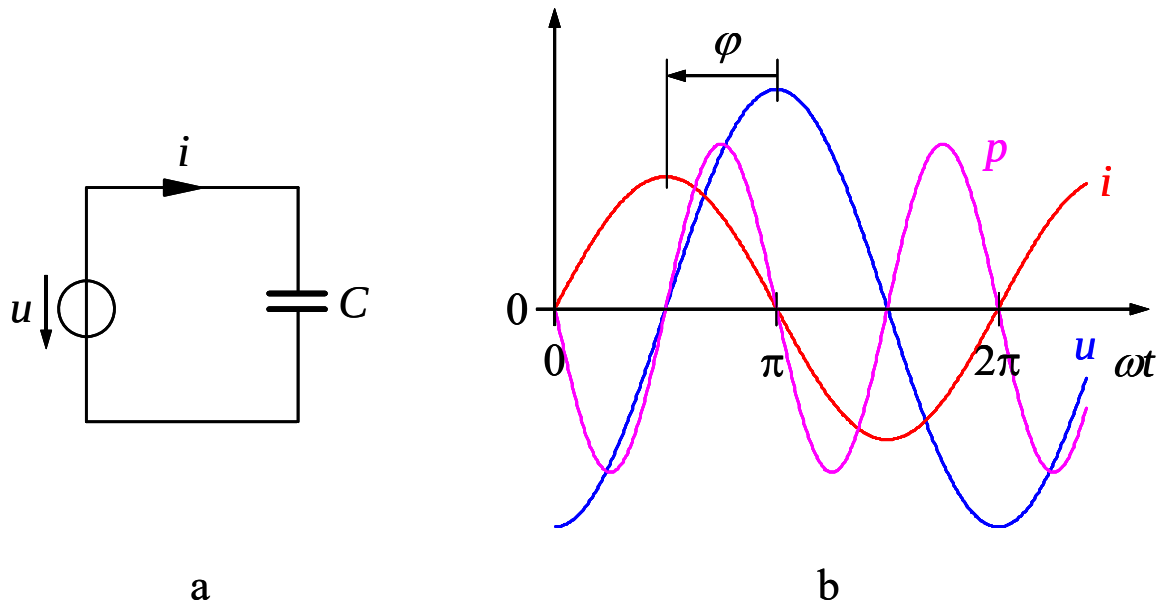


Bild 2.4.3-1: Grafische Ermittlung von Wirk-, Blind- und Scheinleistung an einem harmonischen Verlauf der Augenblicksleistung

Obwohl es in Strenge keine Definition der Blindleistung im Zeitbereich gibt, kann man einen Fall betrachten, in dem die Wirkleistung null ist und deshalb nur Blindleistung auftritt (s. nächste Seite).

2.4.3 Blindleistung - II



Für den in Bild 2.4.3-2 dargestellten Fall $\varphi = -\pi/2$ folgt

$$p[t] = -U \cdot I \cdot \cos\left[2\omega t - \frac{\pi}{2}\right],$$

d. h. der Mittelwert der Augenblicksleistung, und damit die Wirkleistung, ist null.

Der durch $p[t]$ angegebene Zeitverlauf ist nicht die Blindleistung, sondern der schwingende Anteil der Augenblicksleistung.

Die Blindleistung folgt in diesem Fall zu

Bild 2.4.3-2 **a** Einfacher Wechselstromkreis, **b** Winkelverläufe von Spannung, Strom und Leistung bei $\varphi = -\pi/2$

$$Q = S \cdot \sin \varphi \stackrel{\text{hier}}{=} U \cdot I \cdot \underbrace{\sin\left[-\frac{\pi}{2}\right]}_{-1} = -U \cdot I = -U \cdot \frac{U}{1/\omega C} = -U^2 \omega C = -\frac{I^2}{\omega C}.$$

Da die Blindleistung an der Kapazität trotz Verbraucherzählpfeilsystems einen negativen Wert besitzt, spricht man davon, dass die Kapazität (induktive) Blindleistung abgibt. Analog dazu nimmt eine Induktivität (induktive) Blindleistung auf.

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 **Leistung im Wechselstromkreis**

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 Blindleistung

2.4.4 **Komplexe Darstellung der Leistung**

2.4.5 Leistungsanpassung

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - I

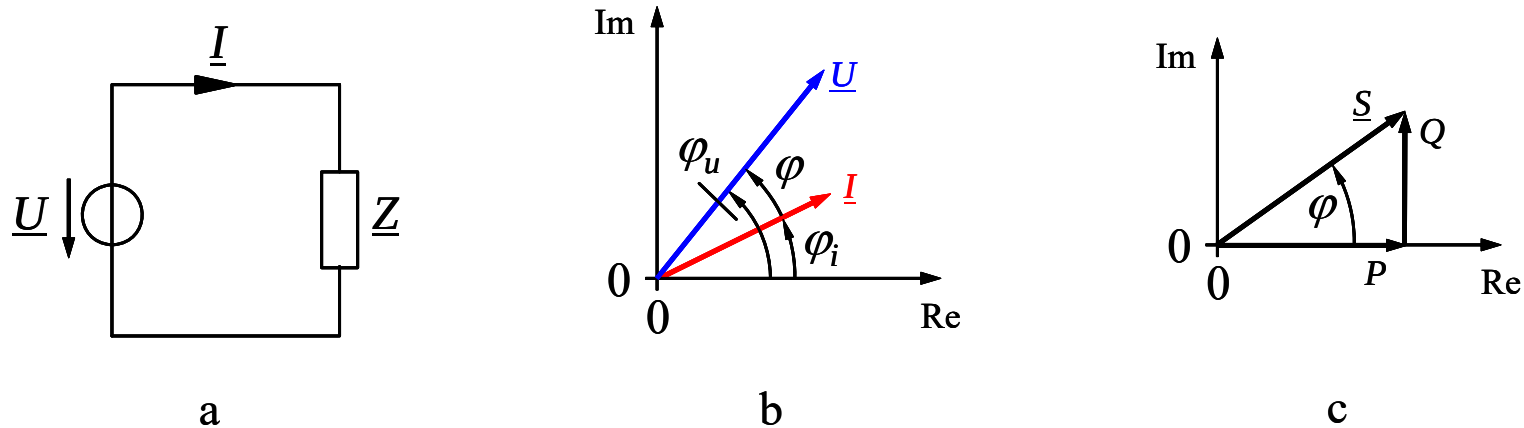


Bild 2.4.4-1 **a** Einfacher Wechselstromkreis, **b** Strom- und Spannungszeiger in der komplexen Ebene, **c** zugehöriges Leistungsdreieck

Spannung und Strom sind in den Darstellungen

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

gegeben. Im Zeigerbild 2.4.4-1 b eilt der Stromzeiger dem Spannungszeiger nach, der hier beispielhaft betrachtete Verbraucher \underline{Z} besitzt also einen induktiven Anteil.

Das Produkt aus dem Spannungszeiger \underline{U} und dem konjugiert komplexen Stromzeiger $\underline{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} = UI \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = S \cdot e^{j\varphi}$$

nennt man **komplexe Scheinleistung**. Ihre Darstellung in kartesischen Koordinaten lautet

$$\underline{S} = S \cdot e^{j\varphi} = \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q = P + j \cdot Q.$$

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - II

Bild 2.4.4-1 c stellt diesen Zusammenhang in der komplexen Zahlenebene dar. Alternativ lässt sich schreiben

$$P = \operatorname{Re}[\underline{S}] = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U \cdot \underbrace{\frac{U}{Z}}_I \cdot \cos[\operatorname{arc}[\underline{Z}]] = \underbrace{ZI}_U \cdot I \cdot \cos[\operatorname{arc}[\underline{Z}]]$$

oder

$$Q = \operatorname{Im}[\underline{S}] = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot \underbrace{\frac{U}{Z}}_I \cdot \sin[\operatorname{arc}[\underline{Z}]] = \underbrace{ZI}_U \cdot I \cdot \sin[\operatorname{arc}[\underline{Z}]].$$

Während \underline{S} eine komplexe Zahl ist, sind P und Q reellwertig, d. h. vorzeichenbehaftete Skalare.

Früher hat man bei Blindleistungen zwischen sog. „induktiver“ und „kapazitiver“ Blindleistung unterschieden.

Die Definitionen lauteten „Eine Induktivität setzt im Verbraucherzählpfeilsystem (positive) induktive, ein Kondensator (positive) kapazitive Blindleistung um.“ Daraus folgte, dass der Kondensator induktive und die Spule kapazitive Blindleistung abgibt.

In dieser Veranstaltung gibt nur eine Art von Blindleistung und diese ist mit der induktiven Blindleistung identisch.

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - III

Im Verbraucherzählpfeilsystem gilt am OHMschen Widerstand

$$\text{arc}[R] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos[\text{arc}[R]] = \cos[0] = 1 \Rightarrow P[R] = \frac{U^2}{R} = R \cdot I^2, \\ \sin[\text{arc}[R]] = \sin[0] = 0 \Rightarrow Q[R] = 0 \end{cases}$$

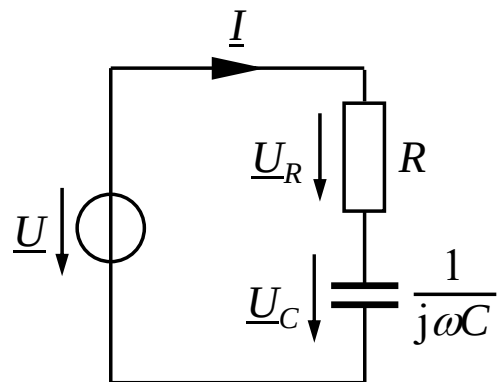
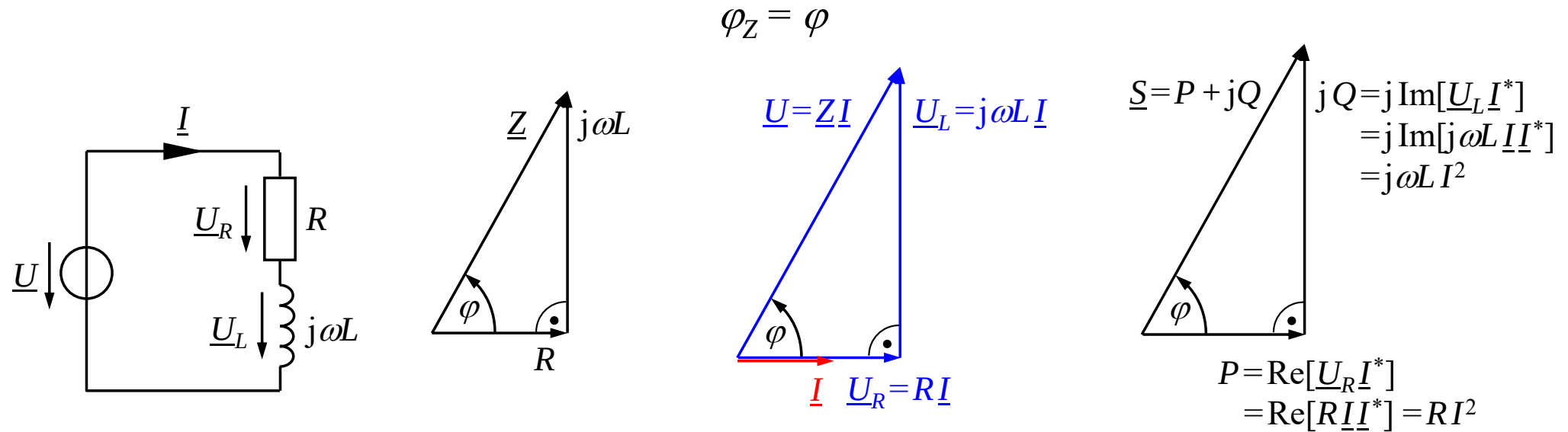
an Induktivität und Kapazität

$$\text{arc}[j\omega L] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos[\text{arc}[j\omega L]] = \cos\left[\frac{\pi}{2}\right] = 0 \Rightarrow P[j\omega L] = 0 \\ \sin[\text{arc}[j\omega L]] = \sin\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1 \Rightarrow Q[j\omega L] = \frac{U^2}{\omega L} = \omega L \cdot I^2 \end{cases}$$

bzw.

$$\text{arc}\left[-j\frac{1}{\omega C}\right] = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left[\text{arc}\left[-j\frac{1}{\omega C}\right]\right] = \cos\left[\frac{-\pi}{2}\right] = 0 \Rightarrow P\left[-j\frac{1}{\omega C}\right] = 0 \\ \sin\left[\text{arc}\left[-j\frac{1}{\omega C}\right]\right] = \sin\left[\frac{-\pi}{2}\right] = -1 \Rightarrow Q\left[-j\frac{1}{\omega C}\right] = -\omega C \cdot U^2 = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - IV

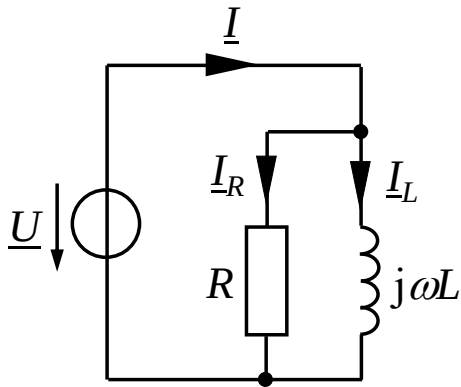


Übung: Ergänzen

Bild 2.4.4-2 Wirk- und Blindleistungsaufnahme einfacher Wechselstromkreise

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - V

$$\varphi_Y = -\varphi$$



Übung: Ergänzen

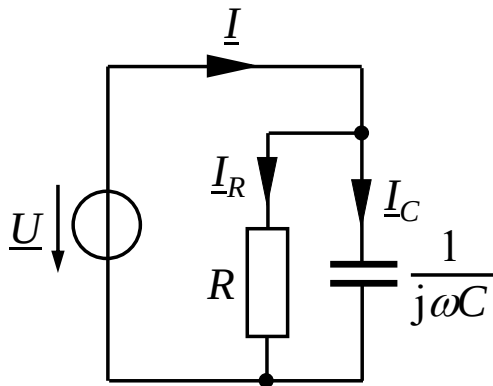
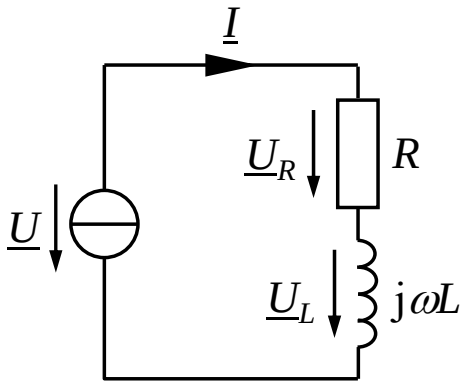


Bild 2.4.4-3 Wirk- und Blindleistungsaufnahme einfacher Wechselstromkreise

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - VI

$$\varphi_Z = \varphi$$



Übung: Ergänzen

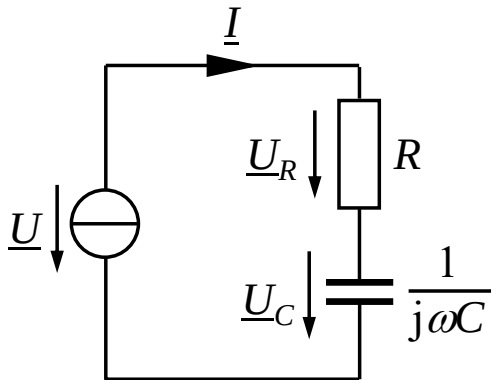
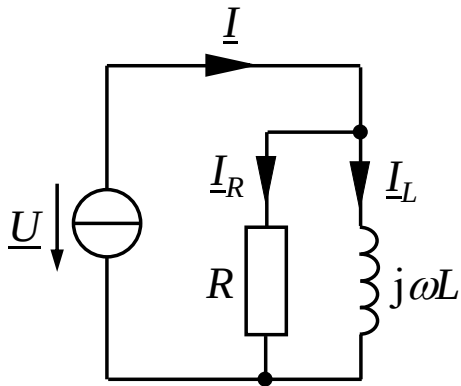


Bild 2.4.4-4 Wirk- und Blindleistungsaufnahme einfacher Wechselstromkreise

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - VII

$$\varphi_Y = -\varphi$$



Übung: Ergänzen

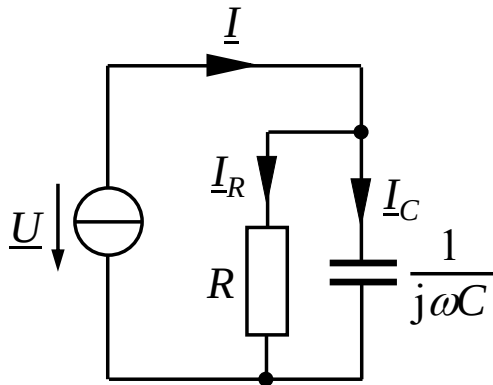


Bild 2.4.4-5 Wirk- und Blindleistungsaufnahme einfacher Wechselstromkreise

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - VIII

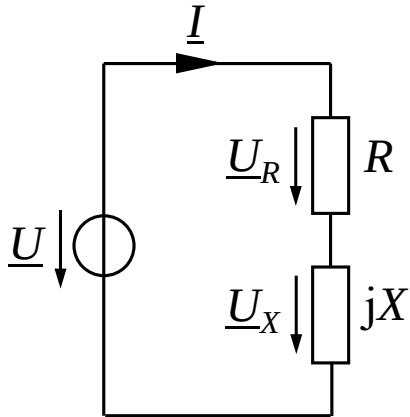


Bild 2.4.4-8: Leistungsumsatz an einem Zweipol

Die von der Quelle \underline{U} abgegebene und von der komplexwertigen Lastimpedanz

$$\underline{Z} = R + jX$$

aufgenommene Scheinleistung beträgt

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*.$$

Wählt man $\underline{U} = U \cdot e^{j0^\circ}$ als Bezugszeiger, so gilt

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j0^\circ}}{R + jX} = \frac{U(R - jX)}{R^2 + X^2}, \\ &= R \frac{U}{R^2 + X^2} - jX \frac{U}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$

und

$$\underline{U}_X = jX \cdot \underline{I}.$$

Damit folgen die von der Quelle abgegebenen (und von den Lastimpedanzen aufgenommenen) Wirk- und Blindleistungen zu

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}[\underline{S}] = \text{Re}[\underline{U} \underline{I}^*] \stackrel{\underline{U}=U \cdot e^{j0^\circ}}{=} U \cdot \text{Re}[\underline{I}^*] = U \cdot \text{Re}[\underline{I}] \\ &= U \cdot R \cdot \frac{U}{R^2 + X^2} = R \cdot \frac{U^2}{Z^2} = R \cdot I^2 = \text{Re}[\underline{Z}] \cdot I^2 \\ &\neq Z \cdot \text{Re}^2[\underline{I}] \\ &\neq R \cdot \text{Re}^2[\underline{I}] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Q &= \text{Im}[\underline{S}] = \text{Im}[\underline{U} \underline{I}^*] \stackrel{\underline{U}=U \cdot e^{j0^\circ}}{=} U \cdot \text{Im}[\underline{I}^*] = U \cdot (-\text{Im}[\underline{I}]) \\ &= U \cdot X \cdot \frac{U}{R^2 + X^2} = X \cdot \frac{U^2}{Z^2} = X \cdot I^2 = \text{Im}[\underline{Z}] \cdot I^2. \end{aligned}$$

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - IX

Fazit: Bestimme den Leistungsumsatz in einem Bauteil

- *entweder* aus den Größen, die direkt an diesem Bauteil anliegen
- *oder* aus Größen, die allen Bauteilen gemeinsam sind. Letztere gelten auch an dem Bauteil, dessen Leistungsumsatz berechnet werden soll.

Dies erklärt, warum in den Bildern 2.4.4-2 bis -5 die Wirk- und Blindleistungen unabhängig davon angegeben sind, ob die Speisung der Schaltung aus einer Spannungs- oder Stromquelle erfolgt.

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - X

Mehrdeutigkeit des Leistungsfaktors. In einigen Übungsaufgaben liest man zur Charakterisierung einer passiven Last, dass sie die Wirkleistung P aufnimmt und dabei ein Leistungsfaktor $\cos \varphi$ vorliegt.

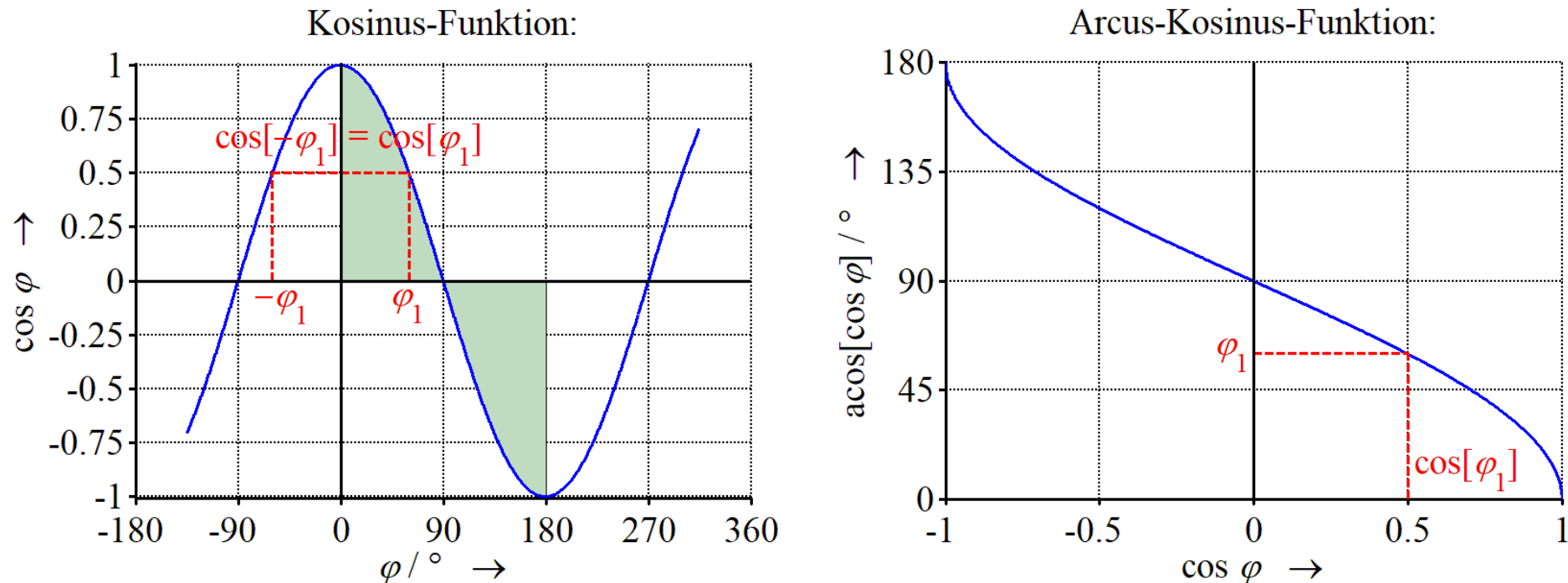
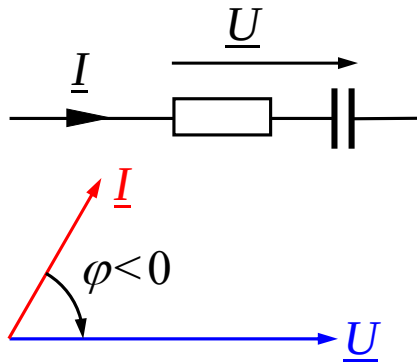


Bild 2.4.4-9 Wertebereiche von Kosinus- und Arcus-Kosinus-Funktion

- Ein positiver Wert für $\cos \varphi$ kann bei einer passiven Last und Verbraucherzählpfeilsystem sowohl zu einem kapazitiven Phasenwinkel $-90^\circ \leq \varphi < 0^\circ$ als auch zu einem induktiven Phasenwinkel $0^\circ < \varphi \leq +90^\circ$ gehören (s. rote Eintragung in Bild 2.4.4-9 links).
- Möchte man aus dem $\cos \varphi$ den Phasenwinkel der Last zu $\varphi = \arccos[\cos \varphi]$ berechnen, so liefert die \arccos -Funktion (s. Bild 2.4.4-9 rechts) stets Winkel in dem grau schraffierten Bereich zwischen 0 und 180° zurück.

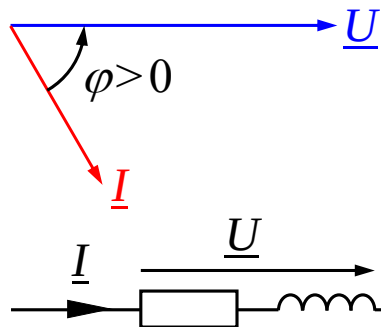
2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung - XI

Zur vollständigen Beschreibung der Last fügt man deshalb an die Angabe des $\cos \varphi$ noch den Hinweis „induktiv“ oder „kapazitiv“ an:



„kapazitiv“

$$\varphi = -\arccos[\cos \varphi]$$



„induktiv“

$$\varphi = \arccos[\cos \varphi]$$

Bild 2.4.4-10 Ermittlung des Phasenwinkels einer passiven Last aus dem Leistungsfaktor (bei Verbraucherzählpfeilsystem)

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 **Leistung im Wechselstromkreis**

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 Blindleistung

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung

2.4.5 **Leistungsanpassung**

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.5 Leistungsanpassung - I

Wie bei den Gleichstromnetzwerken kann für ein einfaches Netzwerk mit harmonischem Quellenspannungsverlauf (Bild 2.4.5-1 a) die Frage nach dem Betriebspunkt maximaler Leistungsaufnahme der Verbraucherimpedanz gestellt werden.

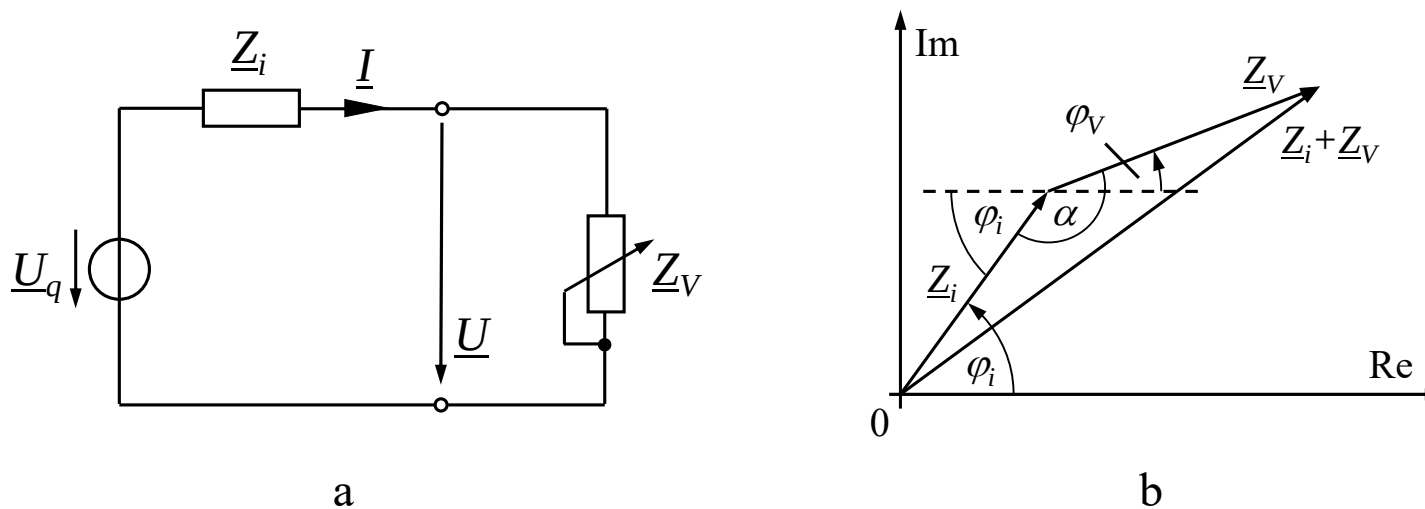


Bild 2.4.5-1

a Netzwerk mit harmonischer Quellenspannung \underline{U}_q , Innenimpedanz der Quelle \underline{Z}_i und Verbraucherimpedanz \underline{Z}_V ,

b Operatorendiagramm

In diesem Fall laufen der allen Bauelementen gemeinsame Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_V}$$

und die Scheinleistungsaufnahme der Verbraucherimpedanz

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underbrace{\frac{\underline{Z}_V}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_V} \underline{U}_q}_{\underline{U}} \cdot \underbrace{\frac{\underline{U}_q^*}{(\underline{Z}_i + \underline{Z}_V)^*}}_{\underline{I}^*} = \frac{U_q^2}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_V|^2} \cdot \underline{Z}_V.$$

2.4.5 Leistungsanpassung - II

Scheinleistungsanpassung. Zunächst ist das Ziel, den Fall maximaler Scheinleistungsaufnahme des Verbrauchers, die sog. Scheinleistungsanpassung, einzustellen.

Mit $\underline{Z}_i = Z_i \cdot e^{j\varphi_i}$ und $\underline{Z}_V = Z_V \cdot e^{j\varphi_V}$ gilt am Operatorenendiagramm (Bild 2.4.5-1 b) mit $\varphi_i + \alpha - \varphi_V = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - \varphi_i + \varphi_V = 180^\circ - (\varphi_i - \varphi_V)$ nach dem Kosinussatz

$$|\underline{Z}_i + \underline{Z}_V|^2 = Z_i^2 + Z_V^2 - 2Z_i Z_V \cos[180^\circ - (\varphi_i - \varphi_V)] = Z_i^2 + Z_V^2 + 2Z_i Z_V \cos[\varphi_i - \varphi_V]$$

und damit für den Betrag der Scheinleistung

$$S = \frac{U_q^2 \cdot Z_V}{Z_i^2 + Z_V^2 + 2Z_i Z_V \cos[\varphi_i - \varphi_V]}.$$

Letzterer hängt bei gegebener Quellenspannung von den Impedanzen Z_i und Z_V sowie der Differenz ihrer Phasenwinkel $\varphi_i - \varphi_V$ ab. Bei gegebener Innenimpedanz $\underline{Z}_i = Z_i \cdot e^{j\varphi_i}$ bleiben 2 zu bestimmende Parameter, nämlich Z_V und φ_V .

Mittels der Quotientenregel

$$\frac{dS}{dZ_V} = U_q^2 \cdot \frac{1 \cdot (Z_i^2 + Z_V^2 + 2Z_i Z_V \cos[\varphi_i - \varphi_V]) - Z_V \cdot (2Z_V + 2Z_i \cos[\varphi_i - \varphi_V])}{(Z_i^2 + Z_V^2 + 2Z_i Z_V \cos[\varphi_i - \varphi_V])^2} \stackrel{!}{=} 0$$

bestimmt man die Lastimpedanz für betraglich maximale Scheinleistung zu

$$0 = (Z_i^2 + Z_V^2 + 2Z_i Z_V \cos[\varphi_i - \varphi_V]) - Z_V \cdot (2Z_V + 2Z_i \cos[\varphi_i - \varphi_V]) \Rightarrow \underline{\underline{Z_V = Z_i}}.$$

2.4.5 Leistungsanpassung - III

Mit diesem Ergebnis lassen sich schreiben

$$S[Z_V = Z_i] = \max[S] = \frac{U_q^2 \cdot Z_i}{Z_i^2 + Z_i^2 + 2Z_i Z_i \cos[\varphi_i - \varphi_V]} = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{1}{1 + \cos[\varphi_i - \varphi_V]} = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{1}{1 + \cos[\Delta\varphi]},$$

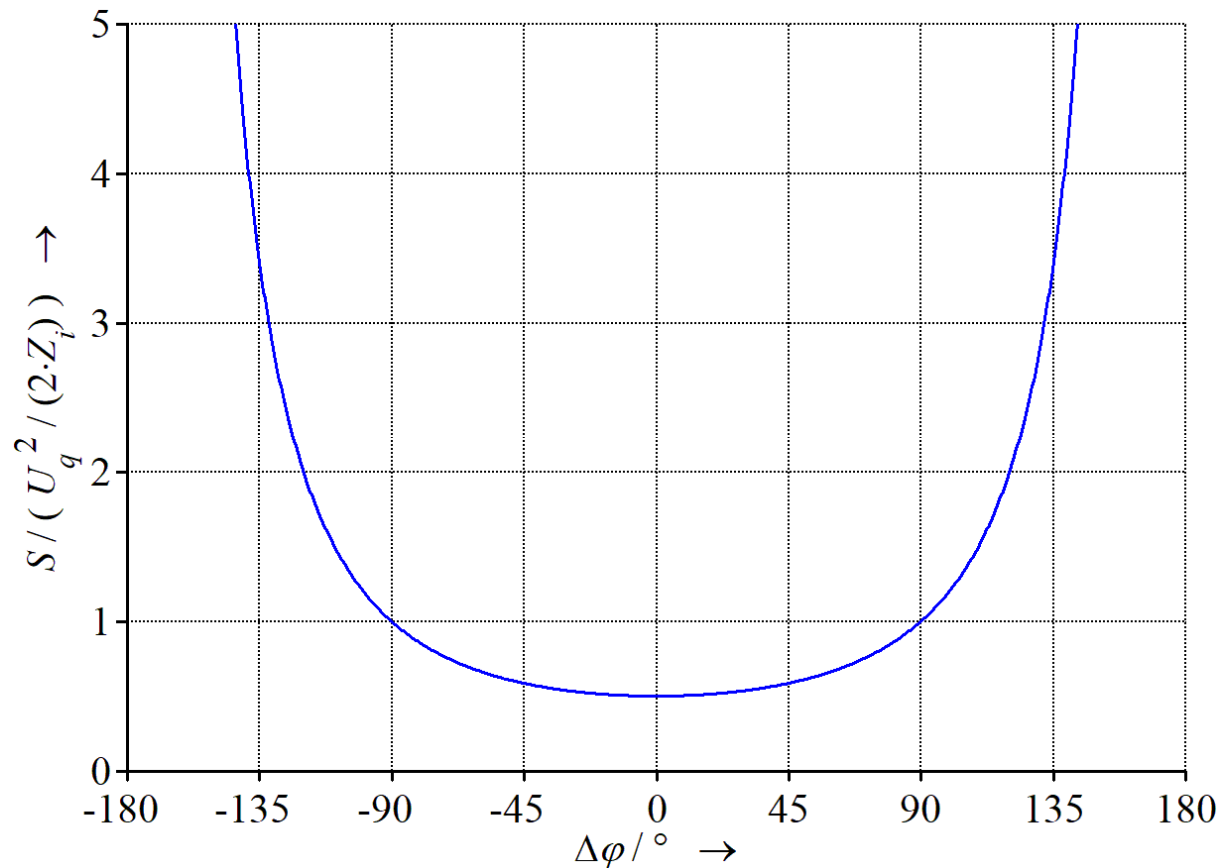
$$P[Z_V = Z_i] = S[Z_V = Z_i] \cdot \cos \varphi_V = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{\cos \varphi_V}{1 + \cos[\varphi_i - \varphi_V]}$$

und

$$Q[Z_V = Z_i] = S[Z_V = Z_i] \cdot \sin \varphi_V = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{\sin \varphi_V}{1 + \cos[\varphi_i - \varphi_V]}.$$

Die Absolutwerte der vorstehend berechneten Schein-, Wirk- und Blindleistungen im Maximalpunkt lassen sich bei gegebener Quellenspannung und Innenimpedanz durch die Wahl des Phasenwinkels φ_V der Last beeinflussen.

2.4.5 Leistungsanpassung - IV



- Für $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_V = 0$ ist die Summe $\underline{Z}_i + \underline{Z}_V$ ein Zeiger mit der Länge $2Z_i = 2Z_V$, d. h. maximal und deshalb die Scheinleistungsaufnahme des Verbrauchers minimal.
- Für $\Delta\varphi = \pm 180^\circ$ gilt $\underline{Z}_V = -\underline{Z}_i \Rightarrow \underline{Z}_i - \underline{Z}_V = 0$ und damit $S[Z_V = Z_i] \rightarrow \infty$.

Bild 2.4.5.1-1
$$\frac{S[Z_V = Z_i]}{U_q^2 / (2Z_i)} = \frac{1}{1 + \cos[\Delta\varphi]}$$

2.4.5 Leistungsanpassung - V

Wirkleistungsanpassung. Welche Phasenbeziehung muss zwischen beiden Impedanzen bestehen, damit unter der Voraussetzung $Z_V = Z_i$ die Wirkleistungsaufnahme des Verbrauchers maximal wird (sog. Wirkleistungsanpassung)?

Aus

$$\frac{dP[Z_i = Z_V]}{d\varphi_V} = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{d}{d\varphi_V} \left[\frac{\cos \varphi_V}{1 + \cos[\varphi_i - \varphi_V]} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi_V} \left[\frac{\cos \varphi_V}{1 + \cos[\varphi_i - \varphi_V]} \right] &= \frac{d}{d\varphi_V} \left[\frac{\cos \varphi_V}{1 + \cos \varphi_i \cos \varphi_V + \sin \varphi_i \sin \varphi_V} \right] \\ &= \frac{-\sin \varphi_V \cdot (1 + \cos \varphi_i \cos \varphi_V + \sin \varphi_i \sin \varphi_V) - \cos \varphi_V \cdot (-\cos \varphi_i \sin \varphi_V + \sin \varphi_i \cos \varphi_V)}{(1 + \cos \varphi_i \cos \varphi_V + \sin \varphi_i \sin \varphi_V)^2}, \\ &= \dots \\ &= \frac{-\sin \varphi_V - \sin \varphi_i}{(1 + \cos \varphi_i \cos \varphi_V + \sin \varphi_i \sin \varphi_V)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \varphi_V = -\varphi_i \end{aligned}$$

d. h. für maximale Wirkleistung muss gelten

$$\underline{\underline{Z_V = Z_i^*}}$$

2.4.5 Leistungsanpassung - VI

und diese maximale Wirkleistung beträgt dann mit $\cos \varphi_i = \frac{R_i}{Z_i}$

$$P[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] = \frac{U_q^2}{2Z_i} \cdot \frac{\cos[-\varphi_i]}{1 + \cos[2\varphi_i]} = \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \cos^2 \varphi_i} \cdot \cos[-\varphi_i] = \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \cos^2 \varphi_i} \cdot \cos \varphi_i = \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \cos \varphi_i} = \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \frac{R_i}{Z_i}} = \frac{U_q^2}{4R_i}.$$

Die vom Verbraucher aufgenommene Blindleistung beträgt im Fall von Wirkleistungsanpassung mit $\sin \varphi_i = \frac{X_i}{Z_i}$

$$\begin{aligned} Q[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] &= \frac{U_q^2}{4Z_i \cos^2 \varphi_i} \cdot \sin[-\varphi_i] = \frac{U_q^2}{4Z_i \cos^2 \varphi_i} \cdot (-\sin \varphi_i) = \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \left(\frac{R_i}{Z_i}\right)^2} \cdot (-\sin \varphi_i) \\ &= \frac{U_q^2}{4Z_i \cdot \left(\frac{R_i}{Z_i}\right)^2} \cdot \left(-\frac{X_i}{Z_i}\right) = \frac{U_q^2}{4Z_i} \cdot \left(-\frac{X_i}{Z_i}\right) \cdot \left(\frac{Z_i}{R_i}\right)^2 = -\frac{U_q^2}{4R_i} \cdot \frac{X_i}{R_i} \end{aligned}$$

und ist im Allgemeinen ungleich null.

2.4.5 Leistungsanpassung - VII

Durch die Wahl von $\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*$ ist jedoch die gesamte Impedanz (aus Sicht der idealen Quelle) $\underline{Z}_i + \underline{Z}_V$ reellwertig und deshalb gibt die (ideale) Quelle keine Blindleistung ab.

Ein Blindleistungsaustausch findet für den Fall von Wirkleistungsanpassung nur zwischen Innen- und Verbraucherwiderstand statt.

Wirkleistungsanpassung kann deshalb als eine Art der Blindleistungskompensation durch Serienschaltung der Verbraucherimpedanz zur Innenimpedanz (sog. *Serien- oder Reihenkompensation*) verstanden werden.

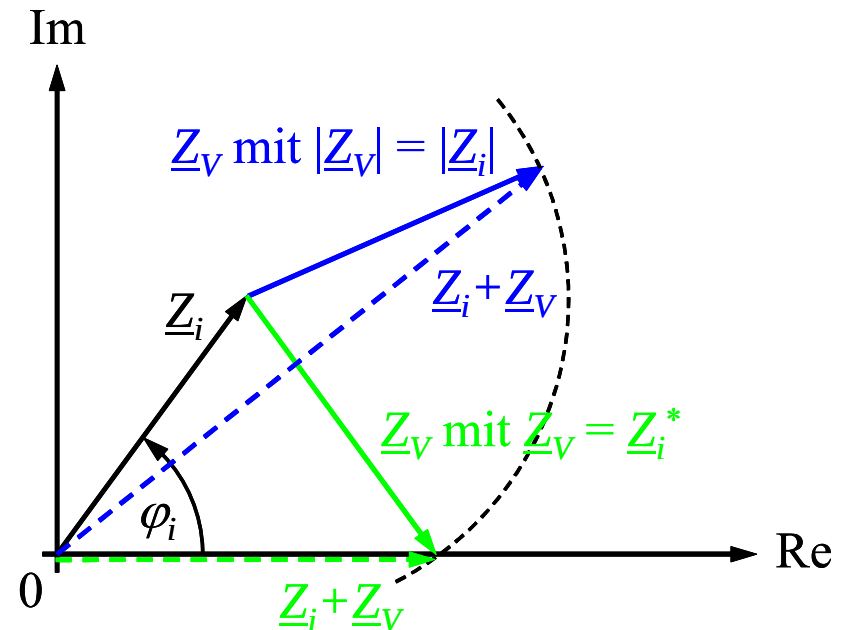


Bild 2.4.5-2: Operatorendiagramme für den Fall von Schein- und Wirkleistungsanpassung

2.4.5 Leistungsanpassung - VIII

Die komplexe Scheinleistungsaufnahme der Verbraucherimpedanz erhält man bei Wirkleistungsanpassung zu

$$\begin{aligned}\underline{S}[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] &= \frac{U_q^2}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_i^*|^2} \cdot \underline{Z}_i^* = \frac{U_q^2}{|2 \cdot \underline{Z}_i \cdot \cos \varphi_i|^2} \cdot \underline{Z}_i \cdot e^{-j\varphi_i} \\ &= \frac{U_q^2}{4Z_i^2 \cos^2 \varphi_i} \cdot \underline{Z}_i \cdot e^{-j\varphi_i} = \frac{U_q^2}{4Z_i \cos^2 \varphi_i} \cdot (\cos[-\varphi_i] + j \cdot \sin[-\varphi_i]) \\ &= \frac{U_q^2}{4Z_V^2 \cos^2[-\varphi_V]} \cdot \underline{Z}_V \cdot e^{j\varphi_V}\end{aligned}$$

oder

$$\underline{S}[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] = P[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] + j \cdot Q[\underline{Z}_V = \underline{Z}_i^*] = \frac{U_q^2}{4R_i} \cdot \left(1 - j \cdot \frac{X_i}{R_i}\right).$$

2 Wechselstrom

2.3 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

2.4 Leistung im Wechselstromkreis

2.4.1 Wirkleistung

2.4.2 Scheinleistung

2.4.3 Blindleistung

2.4.4 Komplexe Darstellung der Leistung

2.4.5 Leistungsanpassung

2.4.6 Blindleistungskompensation

2.4.6 Blindleistungskompensation - I / Ausgangssituation

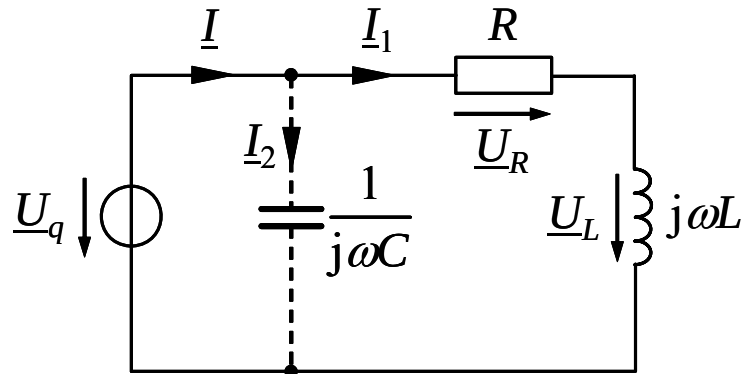


Bild 2.4.6-1 a: Netzwerk zur Erläuterung der Blindleistungskompensation

Netzwerk ohne Kondensator:

Zur Vereinfachung der Betrachtung sei der Bezugszeiger

$\underline{U}_q = U_q \cdot e^{j0^\circ}$ reellwertig. Damit folgt

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_q}{R + j\omega L} = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_{Z1})}$$

$$\text{hier } \underline{I}_1 = \frac{U_q}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot e^{-j\varphi_{Z1}} = \underbrace{\frac{U_q}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}_{I_1} \cdot \underbrace{e^{-j\arctan[\omega L / R]}}_{e^{j\varphi_{I1}}},$$

d. h. der Stromzeiger eilt dem Spannungszeiger nach.

Die Scheinleistungsabgabe der Spannungsquelle ...

$$\begin{aligned} \underline{S}_q &= \underline{U}_q \cdot \underline{I}_1^* = \underline{U}_q \cdot \left(\frac{\underline{U}_q}{R + j\omega L} \right)^* \\ &= \frac{U_q^2}{R - j\omega L} = \frac{U_q^2 \cdot (R + j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \\ &= \underbrace{\frac{U_q^2}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot R}_{P_1 > 0} + j \cdot \underbrace{\frac{U_q^2}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \omega L}_{Q_1 > 0} \end{aligned}$$

entspricht

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underbrace{\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1}_{\underline{U}_q} \cdot \underline{I}_1^* = \underline{Z}_1 \cdot I_1^2 = (R + j \cdot \omega L) \cdot I_1^2 \\ &= \underbrace{R \cdot I_1^2}_{P_1} + j \cdot \underbrace{\omega L \cdot I_1^2}_{Q_1} \end{aligned}$$

und zeigt, dass der Verbraucher $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$ Wirk- und Blindleistung aufnimmt. Die Quelle muss diese beiden Leistungen liefern und ein Industriekunde muss deshalb auch seinen Blindleistungsbezug beim Energieversorger bezahlen.

2.4.6 Blindleistungskompensation - II / Vollständige Parallelkompensation

Blindleistungskompensation meint die Zuschaltung geeigneter Bauelemente, um die Blindleistungsabgabe der Quelle zu minimieren. Hier wird nur die Kompensation durch parallelgeschaltete Bauelemente (sog. **Parallelkompensation**) betrachtet und im Folgenden die **vollständige** Kompensation der Blindleistungsaufnahme der Last.

Netzwerk mit Kondensator:

In diesem Fall lautet der Quellenstrom

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_q}{(R + j\omega L) \parallel \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}_q}{\frac{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} \\ \text{hier} \quad &= U_q \cdot \frac{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{(R + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}} = U_q \cdot \frac{R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right)}{(R + j\omega L) \cdot j \cdot \frac{-1}{\omega C}} \\ &= U_q \cdot \frac{R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{j\omega C} \right)}{\frac{\omega L}{\omega C} - j \cdot \frac{R}{\omega C}} = U_q \cdot \frac{\omega CR + j \cdot (\omega^2 LC - 1)}{\omega L - jR} \\ &= \dots \\ &= U_q \cdot \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \cdot \frac{\omega CR^2 + \omega L \cdot (\omega^2 LC - 1)}{R^2 + (\omega L)^2} \right)\end{aligned}$$

- Der Realteil von \underline{I} hängt nicht von C ab.
- Mittels C kann nur der Imaginärteil des Stromes beeinflusst werden.

Damit die Quelle nur Wirkleistung abgibt, muss (wegen der reellwertigen Bezugsspannung $\underline{U}_q = U_q \cdot e^{j0^\circ}$) der Imaginärteil des Stromes null werden, d. h.

$$\begin{aligned}\text{Im}[\underline{I}] &= U_q \cdot \frac{\omega CR^2 + \omega L \cdot (\omega^2 LC - 1)}{(\omega L)^2 + R^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C &= \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}\end{aligned}$$

2.4.6 Blindleistungskompensation - III / Vollständige Parallelkompensation

Wie kann man dieses Ergebnis anschaulich deuten?

Die Lasten $\underline{Z}_1 = R + j\omega L$ und $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ sind parallel an die ideale Spannungsquelle geschaltet, d. h. ihre Stromaufnahmen \underline{I}_1 und \underline{I}_2 sind unabhängig voneinander und gehorchen den Gleichungen

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_1} \quad \text{und} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_2}.$$

Damit die Blindleistungen

$$Q_1 = \omega L \cdot I_1^2 = U_q^2 \cdot \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

und

$$Q_2 = \text{Im}[\underline{U}_q \cdot \underline{I}_2^*] = \text{Im}[\underline{Z}_2 \underline{I}_2 \cdot \underline{I}_2^*] = \text{Im}[\underline{Z}_2 \cdot I_2^2] = \text{Im}\left[\frac{1}{j\omega C} \cdot U_q^2 \cdot (\omega C)^2\right] = U_q^2 \cdot (-\omega C)$$

betraglich gleich groß sind, muss C wie angegeben gewählt werden.

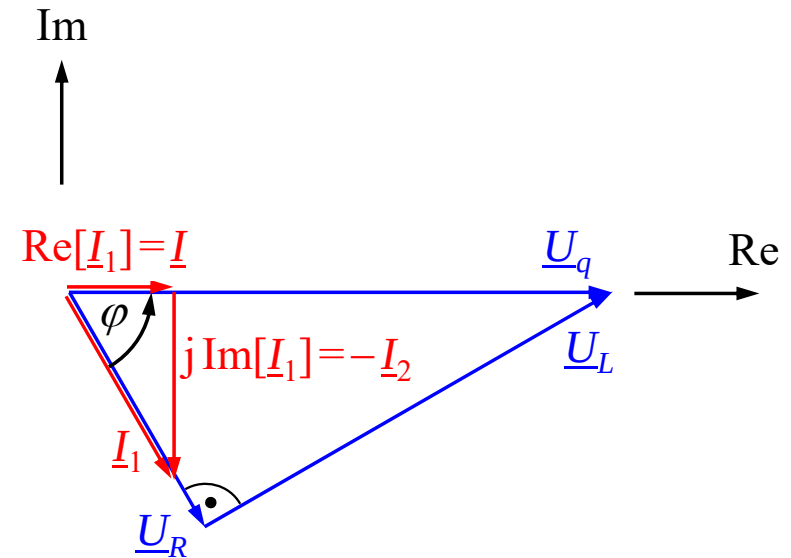


Bild 2.4.6-1 b: Zeigerbild zur Erläuterung der (hier vollständigen) Blindleistungskompensation

2.4.6 Blindleistungskompensation - IV / Vollständige Parallelkompensation

- Da an beiden Lasten das VZS gilt, gibt $\underline{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ die Blindleistung ab, die von der Induktivität aufgenommen wird; am Zeigerbild 2.4.6-1 b gilt $\text{Im}[\underline{I}_1] = -\underline{I}_2$.
- Q_1 und Q_2 sind jeweils proportional zu U_q^2 , d. h. eine eingestellte *vollständige* Blindleistungskompensation ist unempfindlich gegenüber Spannungsschwankungen.
- Wegen $|Q_1[\omega]| = \left| U_q^2 \cdot \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right| \sim \frac{1}{\omega}$ und $|Q_2[\omega]| = \left| U_q^2 \cdot (-\omega C) \right| \sim \omega$ kommt es, ausgehend von vollständiger Kompensation,
 - für steigende Frequenz zu Überkompensation *oder*
 - für sinkende Frequenz zu Unter- oder unvollständiger Kompensation.
- Im *unkompensierten* wie im *kompensierten* Fall beträgt der Realteil der Admittanz aus Sicht der Quelle

$$\text{Re}[\underline{Y}] = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} = \text{konst.}$$

und die Schaltung nimmt die Wirkleistung

$$P = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot U_q^2$$

auf.

2.4.6 Blindleistungskompensation - V

Wird die Kapazität größer als vorstehend berechnet gewählt oder nimmt die Last plötzlich weniger Blindleistung auf, so speist man am Lastknoten mehr Blindleistung als benötigt ein. Dieser Zustand heißt **Überkompensation**.

Bemerkungen:

- Bei Überkompensation kommt es zum Anstieg der Spannung am Einspeisepunkt (s. **Übungsaufgabe 6.2** zur Veranstaltung „Windkraftanlagen“.) Dies kann auch gezielt herbeigeführt werden, um die Spannung an diesem Punkt zu stützen.
- Überkompensation kann zu unerwünschten Resonanzerscheinungen durch das Zusammenwirken von Serieninduktivitäten der Leitung mit der Kompensationskapazität führen (s. **Übungsaufgabe S140** dieser Veranstaltung).
- Überkompensation kann zur Selbsterregung von Asynchrongeneratoren und dabei unerwünscht hohen Klemmenspannungen führen, falls die Statorwicklung vom Netz getrennt ist (s. Veranstaltung „Elektrische Maschinen“).

In der Praxis versucht man die Probleme von Überkompensation zu vermeiden, in dem man generell unter- oder **unvollständig** kompensiert, d. h. inklusive Kompensation einen Leistungsfaktor der Last von ca. 0,9 induktiv einstellt.

Die Herleitung der Gleichungen für unvollständige Kompensation kann ebenfalls an Bild 2.4.6-1 b erfolgen (s. **Übungsaufgabe W463** dieser Veranstaltung).

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.1.1 Tiefpass

3.1.2 Hochpass

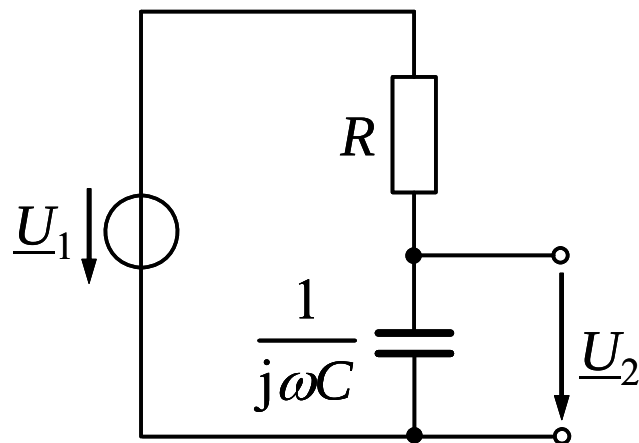
3.1.3 Bandpass

3.1.4 Bandsperre

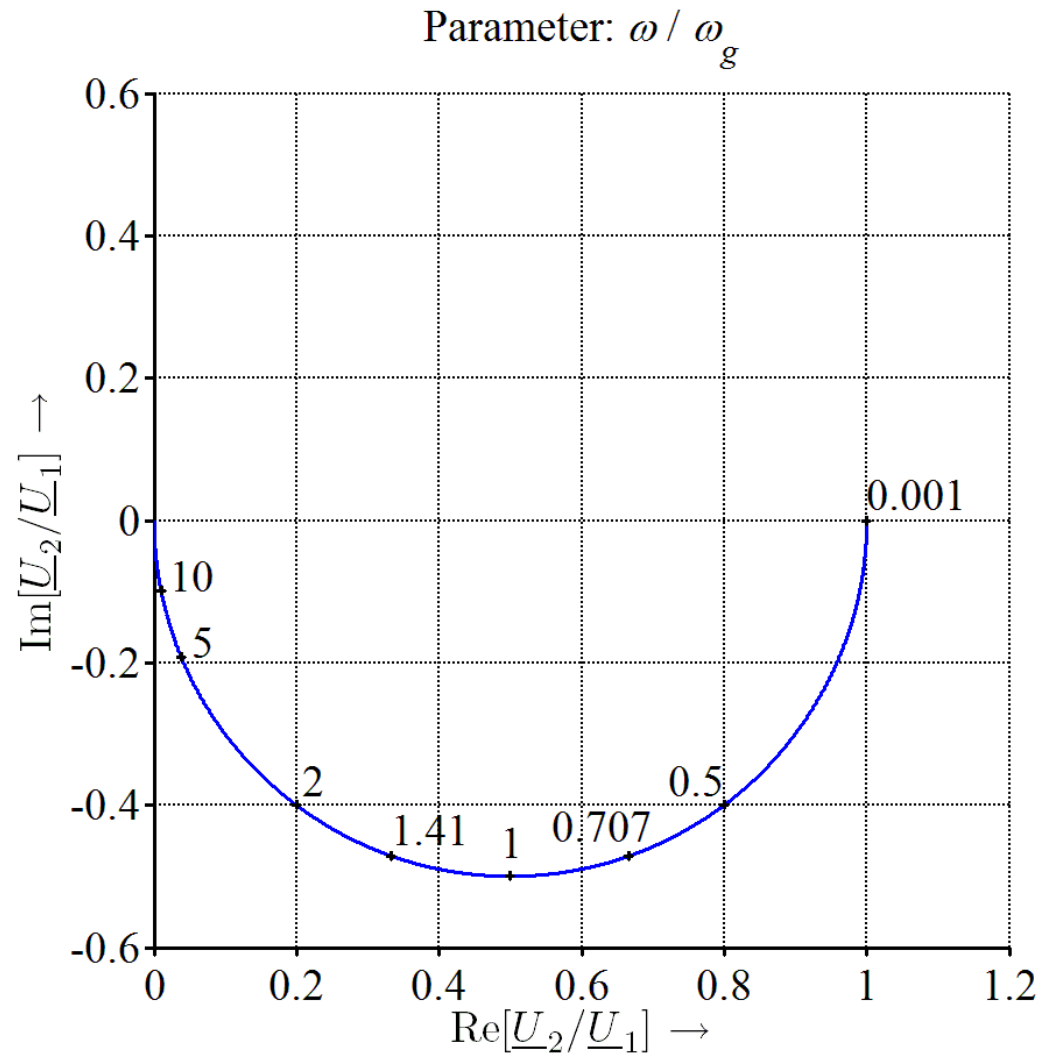
3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme / 3.1.1 Tiefpass



a



b

Bild 3.1.1-1 **a** Schaltung und **b** Ortskurve einer Tiefpass-Schaltung 1. Ordnung

3.1.1 Tiefpass

Harmonische Zeitfunktionen einer bestimmten Frequenz werden durch die beiden Größen

- **Amplitude** und
 - **Phasenwinkel**
- eindeutig beschrieben.

In der GAUßschen Zahlenebene können diese beiden Größen gleichzeitig und in Abhängigkeit von einem Parameter, z. B. der Kreisfrequenz, als **Ortskurve** dargestellt werden.

Bild 3.1.1-1 b zeigt die Ortskurve der **komplexen Übertragungsfunktion** der Schaltung nach Bild 3.1.1-1 a

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega \underbrace{RC}_{1/\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_g}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \cdot \exp[j \arctan[-\omega / \omega_g]]\end{aligned}$$

mit dem Parameter ω / ω_g .

Will man die Größen Betrag und Phasenwinkel dieser komplexen Zahl in Abhängigkeit vom Parameter ω / ω_g in reellen Koordinatensystemen darstellen, so sind dazu zwei Kurven notwendig, die üblicherweise übereinander dargestellt werden (Bild 3.1.1-2).

Sie werden als **Amplituden- und Phasengang** der Schaltung bezeichnet, die komplexe Übertragungsfunktion wird auch als Frequenzgang bezeichnet.

Bei

$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

ist der Betrag der Übertragungsfunktion auf das

$$\frac{|\underline{U}_2 / \underline{U}_1|_{\omega=\omega_g}}{|\underline{U}_2 / \underline{U}_1|_{\omega=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

-fache seines Maximalwertes, hier des Wertes bei $\omega = 0$, gefallen und der Phasenwinkel beträgt

$$(\varphi_2 - \varphi_1)|_{\omega=\omega_g} = \arctan[-1] = -45^\circ.$$

ω_g heißt deshalb auch „45 °-Kreisfrequenz“.

3.1.1 Tiefpass / Amplituden- und Phasengang

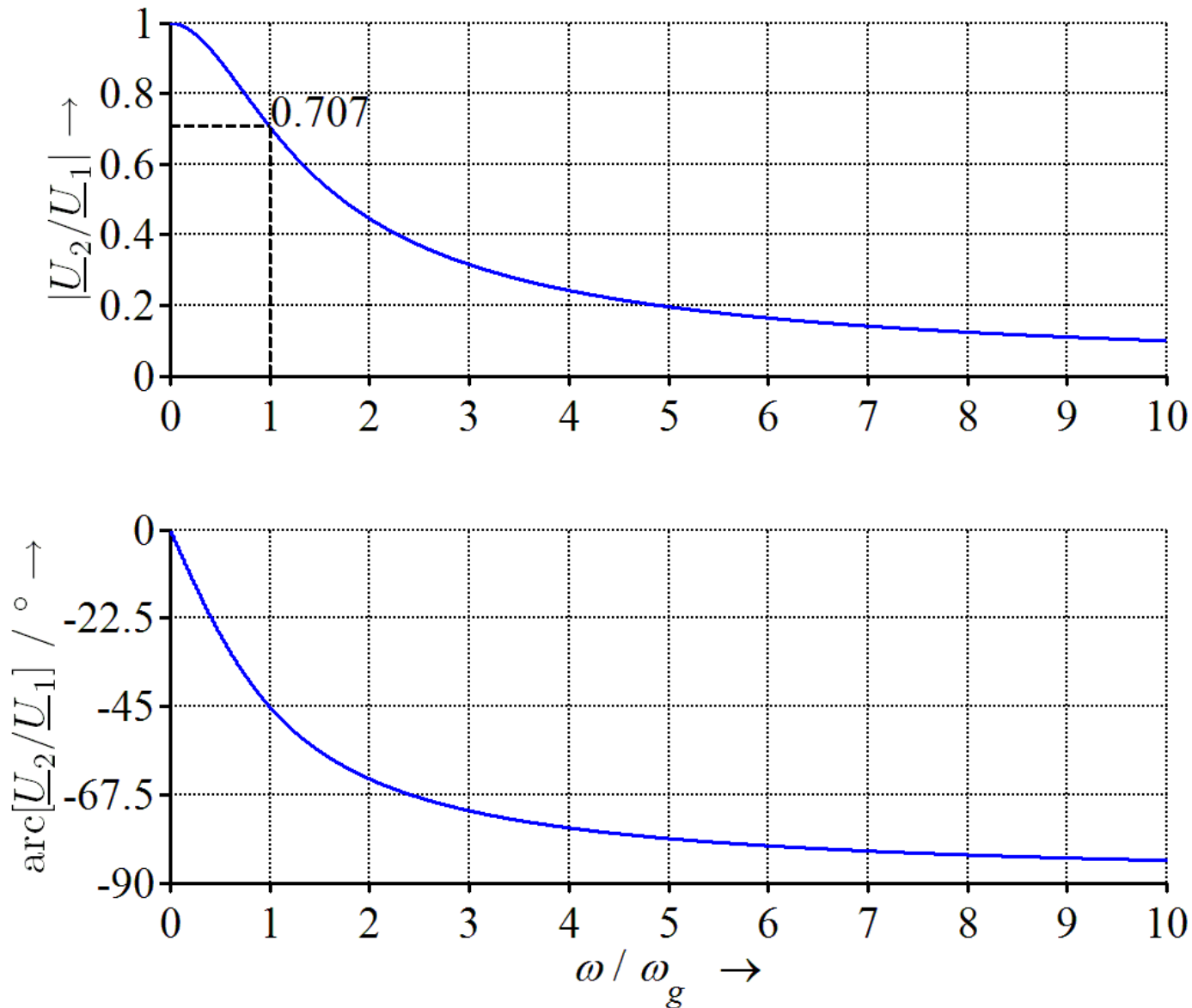


Bild 3.1.1-2

Betrag und Phasenwinkel der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung in Abhängigkeit vom Parameter ω / ω_g

3.1.1 Tiefpass / Umrechnung nach Dezibel

Um größere Wertebereiche in den Diagrammen für Frequenz und Betrag darstellen zu können, wählt man für die Frequenz- bzw. Betragsachse gelegentlich logarithmische Unterteilungen und bezeichnet diese Darstellung als BODE-Diagramm (Bild 3.1.1-4).

Eine spezielle logarithmische Achse ist die **Darstellung in Dezibel** (dB). Die Umrechnung eines Spannungsverhältnisses nach dB erfolgt durch

$$\frac{U_2 / U_1}{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{U_2}{U_1} \right].$$

Die vorstehende Beziehung gilt für die Umrechnung von Feldgrößen wie Spannung, Strom, Kraft oder Druck.

Für die Umrechnung von Größen wie Leistung, Leistungsdichte oder Energie gilt

$$\frac{P_2 / P_1}{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{P_2}{P_1} \right].$$

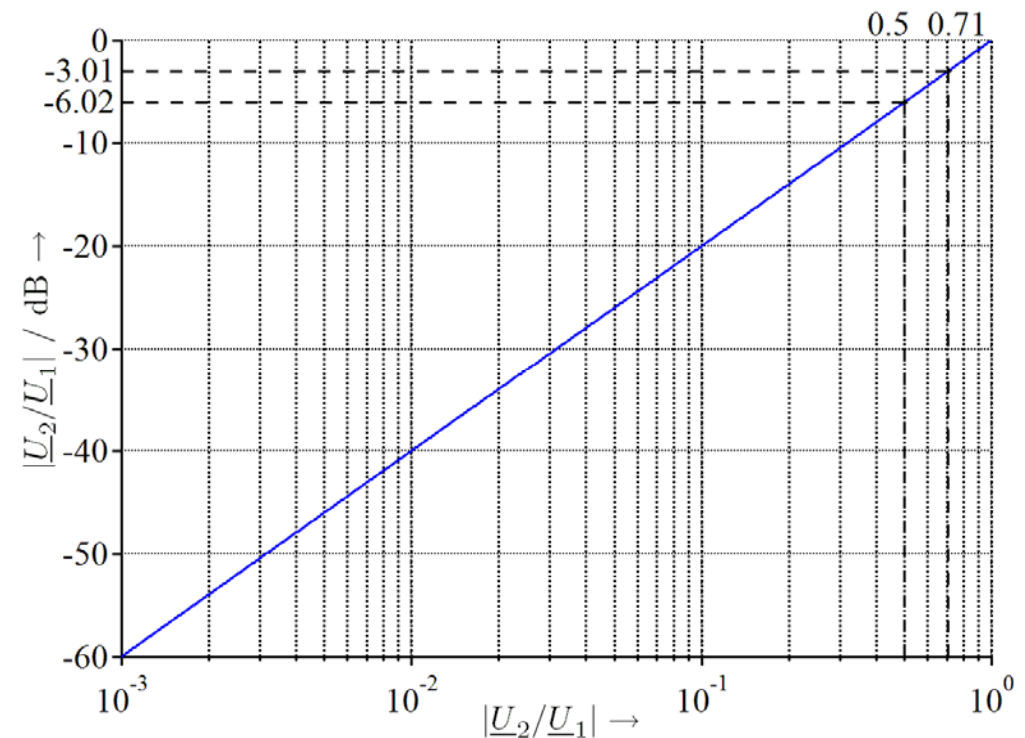


Bild 3.1.1-3: Umrechnung zwischen linearer Darstellung und Dezibel

3.1.1 Tiefpass / Umrechnung von Verhältnisgrößen mit festgelegter Bezugsgröße

Darüber hinaus sind noch verschiedene **besondere Bezugsgrößen** üblich.

Beträgt z. B. der Effektivwert der Bezugsspannung $U_1 = 1 \mu\text{V}$, so lautet die „Einheit“ des Spannungsverhältnisses und damit die Einheit der Spannung U_2 dB μV

$$\frac{U_2}{\text{dB}\mu\text{V}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{U_2}{1 \mu\text{V}} \right],$$

so dass gilt

$$U_2 = 0 \text{ dB}\mu\text{V} = 1 \mu\text{V}.$$

In Anlehnung an diese Definition wird die durch

$$\frac{U_2 / U_1}{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{U_2}{U_1} \right]$$

eingeführte „Einheit“ auch als dBV bezeichnet: Bei einer Bezugsspannung von $U_1 = 1 \text{ V}$ gilt dann

$$U_2 = 0 \text{ dBV} = 1 \text{ V}.$$

Bei Leistungen ist der Bezug auf eine Leistung von $P_1 = 1 \text{ mW}$ üblich und man erhält

$$\frac{P_2}{\text{dBmW}} = 10 \cdot \log_{10} \left[\frac{P_2}{1 \text{ mW}} \right].$$

Um in einem OHMSchen Widerstand mit $R = 600 \Omega$ eine Leistung von $P_1 = 1 \text{ mW}$ umzusetzen, muss man an diesen eine Spannung von

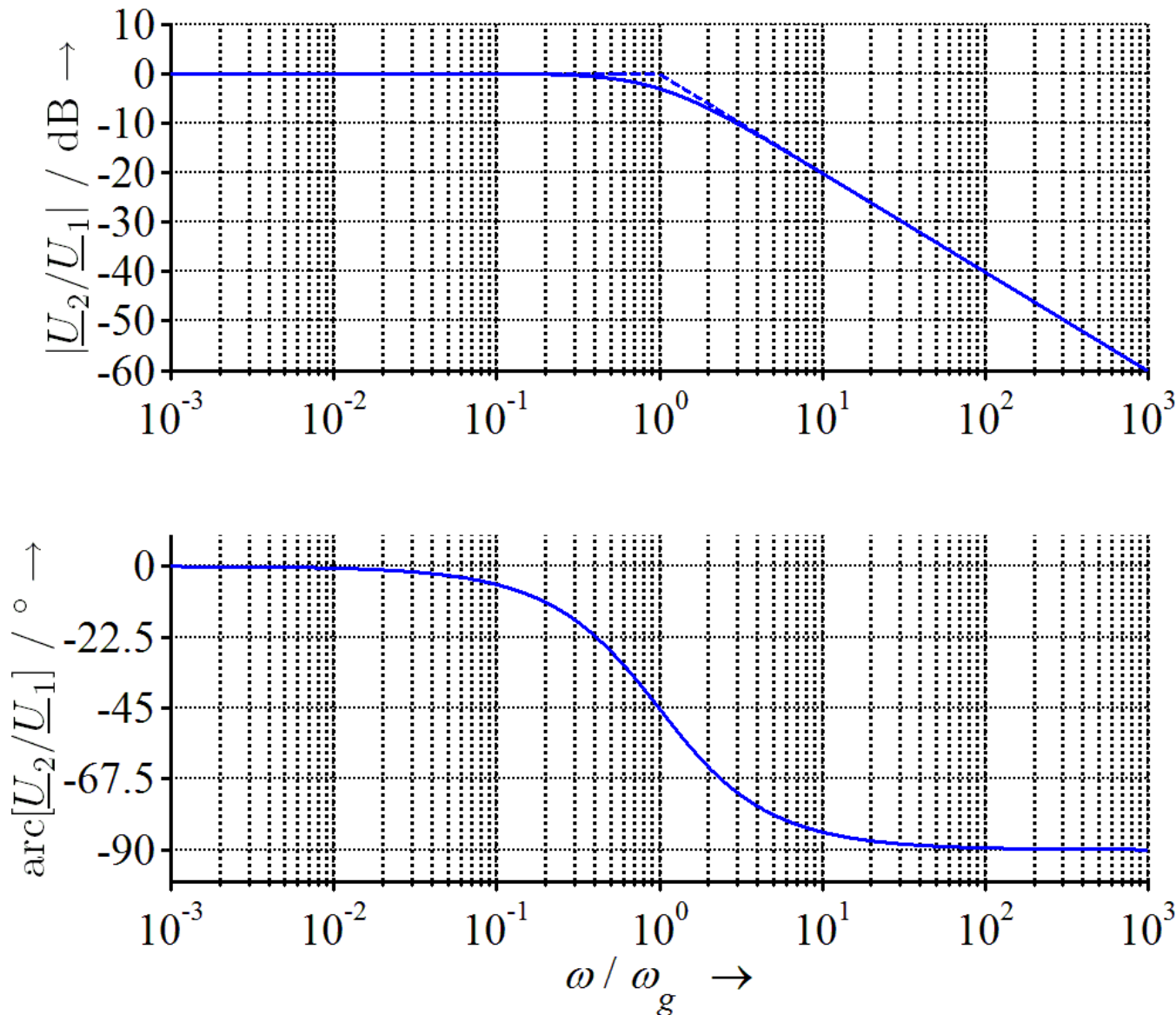
$$U = \sqrt{P_1 \cdot R} = \sqrt{1 \text{ mW} \cdot 600 \Omega} = 0,7746 \text{ V}$$

anlegen. Die NF-Audiotechnik nahm diese Spannung als Bezugsgröße für ihre Einheit dBu, dBv oder in deutschsprachiger Literatur dBm. Zur besseren Unterscheidung von der o. g. „Einheit“ dBV und in Übereinstimmung mit der englischsprachigen Literatur benutzt man meist die Schreibweise dBu.

Für Spannungen gilt in diesem Fall

$$\frac{U_2}{\text{dBu}} = \frac{U_2}{\text{dBv}} = \frac{U_2}{\text{dBm}} = 20 \cdot \log_{10} \left[\frac{U_2}{0,7746 \text{ V}} \right].$$

3.1.1 Tiefpass / BODE-Diagramm



Die o. a. Betragsverstärkung bei ω_g auf $1/\sqrt{2}$ beträgt $20 \cdot \log_{10}[1/\sqrt{2}] \approx -3\text{dB}$ und ist eigentlich eine Abschwächung, weil die Verstärkung kleiner als 1 bzw. in dB angegeben negativ ist.

ω_g wird deshalb auch als **3 dB-Grenzkreisfrequenz** bezeichnet.

Bild 3.1.1-6

BODE-Diagramm der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung in Abhängigkeit vom Parameter ω / ω_g

3.1.1 Tiefpass

Eine Eingangsspannung mit einer Kreisfrequenz kleiner ω_g tritt in Betrag und Phase jeweils nahezu unbeeinflusst am Ausgang auf.

Die Schaltung wird deshalb als **Tiefpass** bezeichnet.

Für Kreisfrequenzen größer ω_g lässt sich der Betragsfrequenzgang näherungsweise als

$$\left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2}} \stackrel{\omega \gg \omega_g}{\approx} \frac{\omega_g}{\omega}$$

schreiben. Die Verringerung des Betrages beträgt in diesem Bereich 20 dB pro Frequenzdekade (Bild 3.1.1-4), was dem Faktor 10 (Bild 3.1.1-3) entspricht.

Dies kennzeichnet einen **Tiefpass 1. Ordnung**.

Tiefpässe mit mehreren Filterstufen erreichen größere Betragsdämpfungen der höheren Frequenzen.

Die zwei (in Bild 3.1.1-3 gestrichelt eingezeichneten) Asymptoten an die Abschnitte $\omega / \omega_g \ll 1$ und $\omega / \omega_g \gg 1$ des Amplitudengangs in logarithmischer Darstellung schneiden sich genau in dem (nicht zum Amplitudengang gehörigen) Punkt ($\omega / \omega_g = 1$; $|\underline{U}_2 / \underline{U}_1| = 0$ dB) und bilden dort einen „Knick“.

Umgangssprachlich wird $\omega = \omega_g$ deshalb auch als *Eckkreisfrequenz* bezeichnet.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.1.1 Tiefpass

3.1.2 Hochpass

3.1.3 Bandpass

3.1.4 Bandsperre

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.1.2 Hochpass - I

Nach dem Dualitätsprinzip erhält man eine **Hochpass-Schaltung 1. Ordnung** durch Vertauschen von Widerstand und Kondensator in der Tiefpass-Schaltung aus Abschnitt 3.1.1.

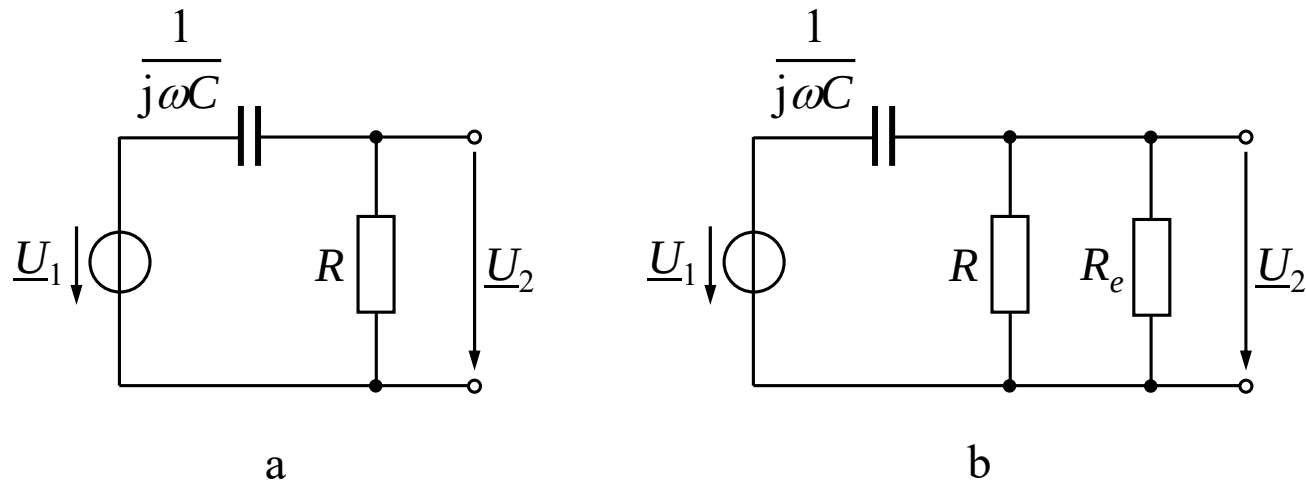


Bild 3.1.2-1 **a** Unbelastete und **b** belastete Hochpass-Schaltung 1. Ordnung

Für die unbelastete Schaltung nach Bild 3.1.2-1 a lautet die Spannungsübertragungsfunktion

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_g}{\omega}} \quad \text{mit der Grenzkreisfrequenz} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}.$$

Ein OHMScher Belastungswiderstand R_e in Bild 3.1.2-1 b lässt sich ohne Änderung der vorstehenden Gleichungen dem Widerstand R zuschlagen.

3.1.2 Hochpass - II

Zur beispielhaften Betrachtung einer Hochpass-Schaltung wird hier die Schaltung

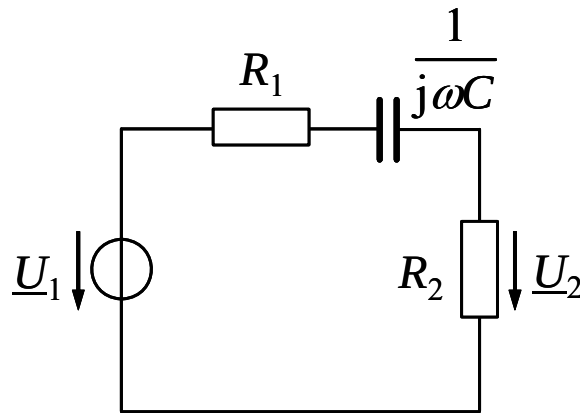


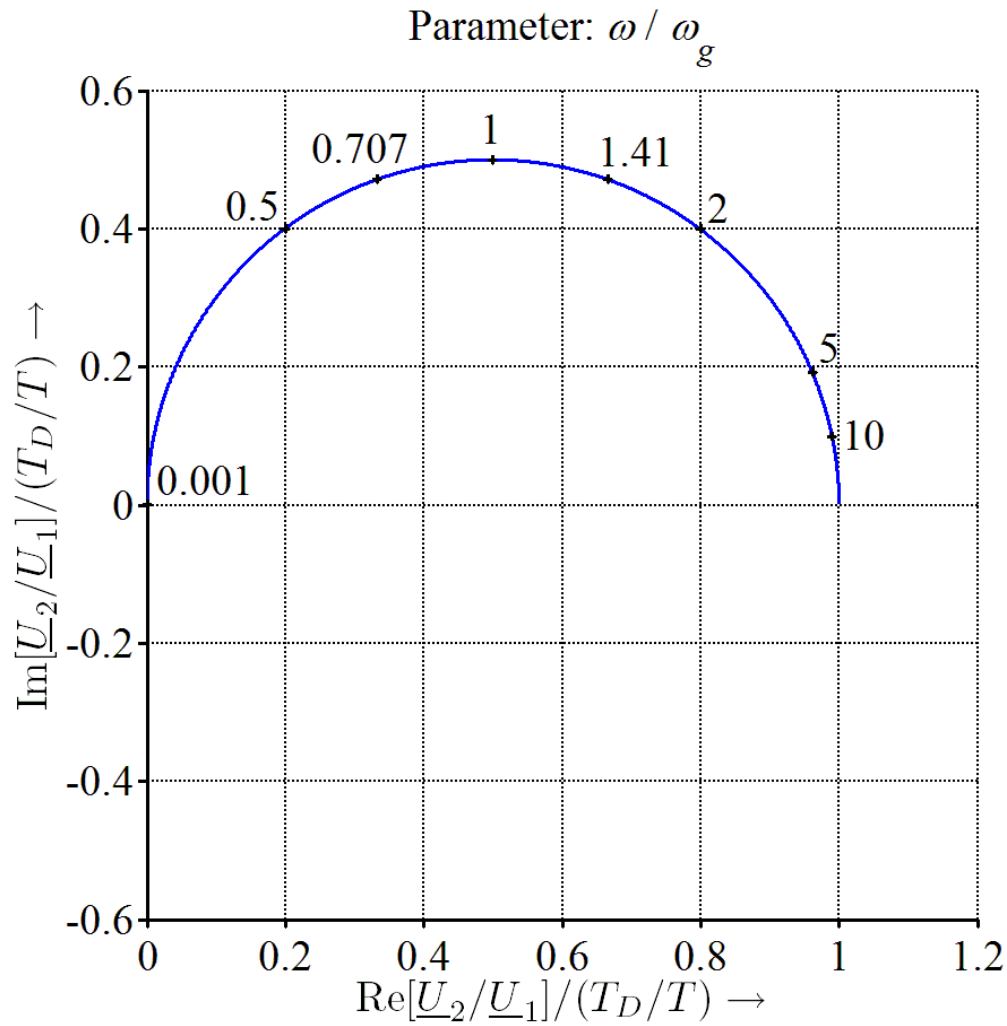
Bild 3.1.2-2 Hochpass-Schaltung 1. Ordnung

mit der komplexen Übertragungsfunktion

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega(R_1 + R_2)C}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{\omega_g}{\omega}}$$

gewählt, die bei höheren Frequenzen die Verstärkung $\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_D}{T} \neq 1$ besitzt.

3.1.2 Hochpass - III



In diesem Fall beträgt die Grenzkreisfrequenz

$$\omega_g = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} = \frac{1}{T}.$$

Bild 3.1.2-3: Ortskurve einer Hochpass-Schaltung 1. Ordnung

3.1.2 Hochpass - IV

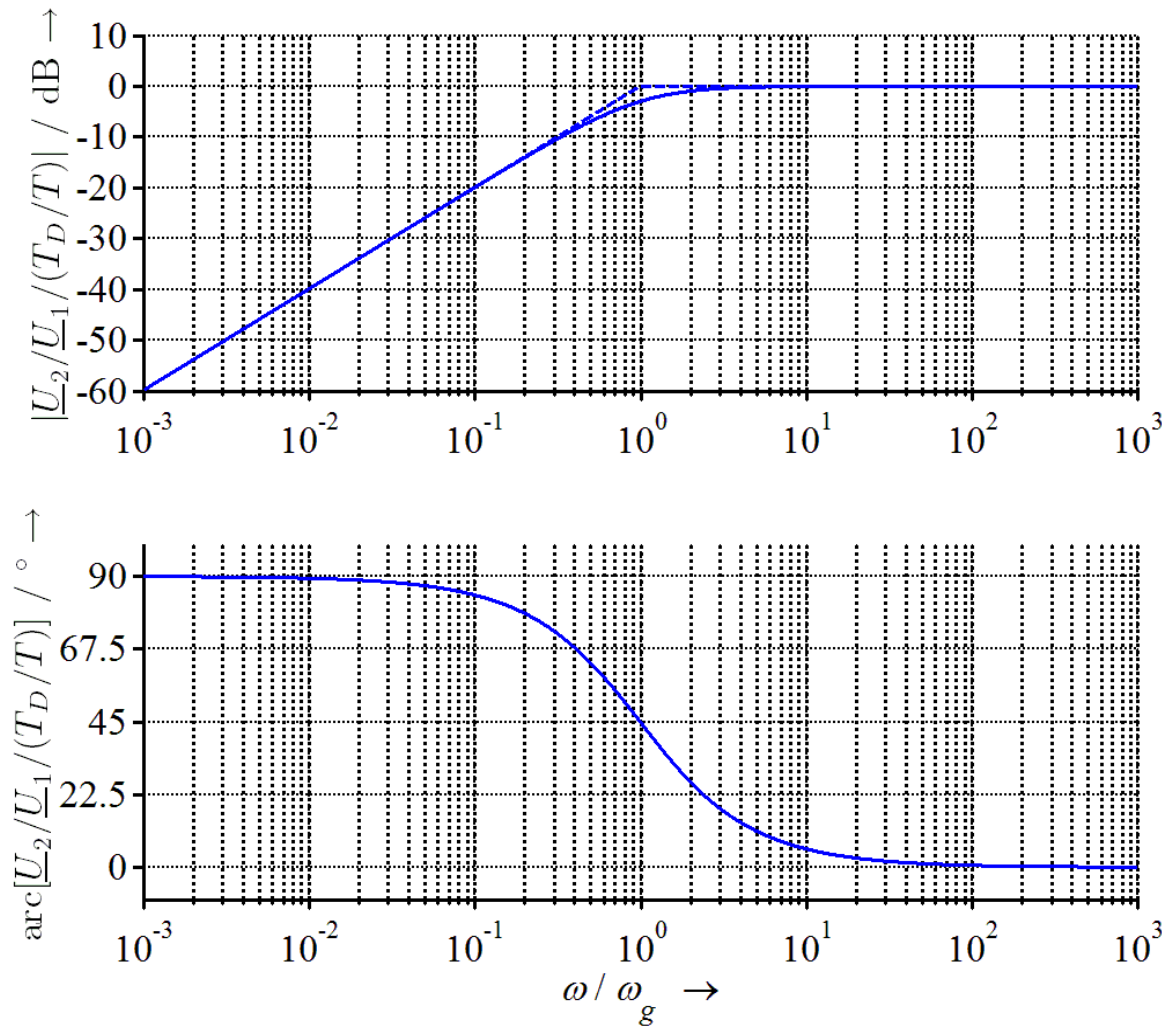


Bild 3.1.2-4: BODE-Diagramm der Übertragungsfunktion eines Hochpasses 1. Ordnung in Abhängigkeit vom Parameter ω / ω_g

Bild 3.1.2-4 zeigt die Auswertung des Terms $\frac{U_2 / U_1}{T_D / T} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_g}{\omega}}$ über der Frequenz.

Nur durch das Beziehen des Betrags der Übertragungsfunktion auf T_D / T erreicht dieser in Bild 3.1.2-4 die 0 dB-Linie.

Relativ gesehen gilt trotzdem: Die sog. Hochpass-Schaltung lässt Signalanteile mit hohen Frequenzen relativ ungehindert passieren, Signalanteile mit niedrigen Frequenzen hingegen dämpft sie. Daher stammt der Name „Hochpass“.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.1.1 Tiefpass

3.1.2 Hochpass

3.1.3 Bandpass

3.1.4 Bandsperre

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.1.3 Bandpass - I

Ein Tiefpass lässt Signalanteile niedriger Frequenz nahezu ungehindert passieren, ein Hochpass Signalanteile hoher Frequenz. In der Praxis möchte man oft einen bestimmten Frequenzbereich passieren lassen und außerhalb dieses Frequenzbereichs liegende Signalanteile eher unterdrücken. Eine Schaltung, die das leistet, heißt **Bandpass**.

(Bei den Schwingkreisen werden wir bei Spannungsspeisung den Reihenschwingkreis und bei Stromspeisung den Parallelschwingkreis als Bandpass kennenlernen.)

Ein Bandpass lässt sich prinzipiell stets als Reihenschaltung eines Tief- und eines Hochpasses oder umgekehrt ausführen.

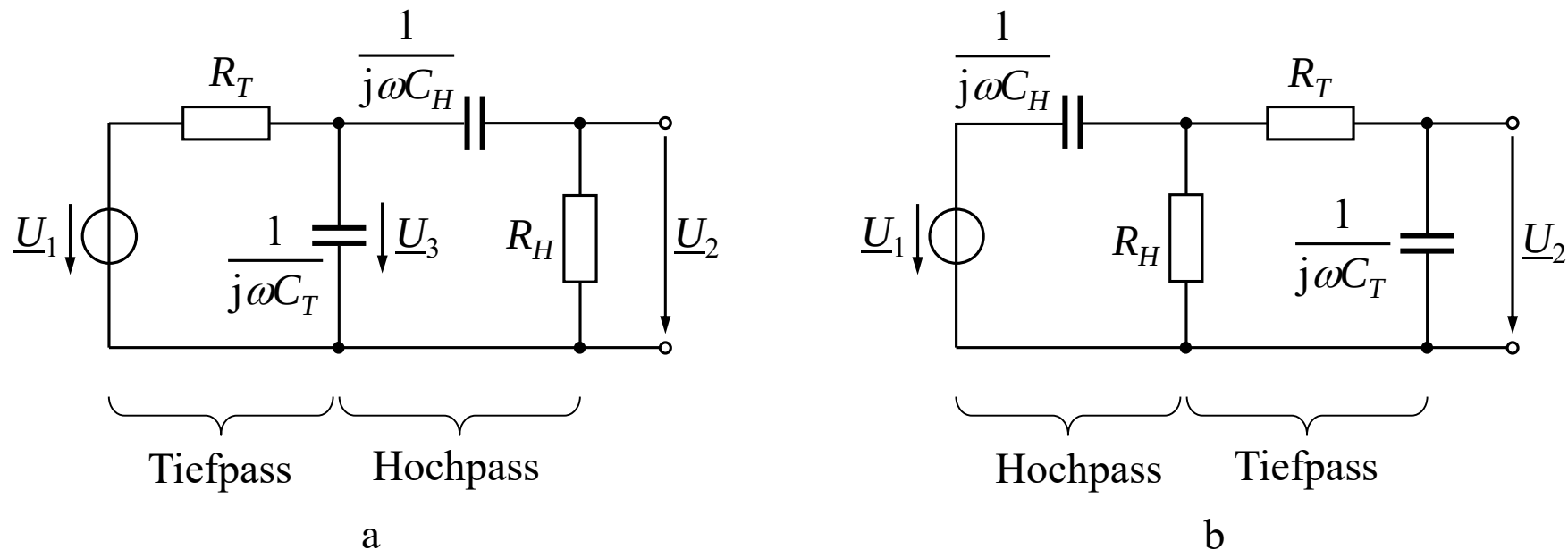


Bild 3.1.3-1 Bandpass-Schaltungen aus Reihenschaltungen von Tief- und Hochpass

3.1.3 Bandpass - II

Für die Schaltung in Bild 3.1.3-1 a lautet die Spannungsübertragungsfunktion mit

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} = \frac{R_H}{R_H + \frac{1}{j\omega C_H}} \quad \text{und} \quad \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_T} \parallel \left(R_H + \frac{1}{j\omega C_H} \right)}{R_T + \left(\frac{1}{j\omega C_T} \parallel \left(R_H + \frac{1}{j\omega C_H} \right) \right)}$$

dann

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \dots = \frac{1}{1 + \frac{R_T}{R_H} + \frac{R_T C_T}{R_H C_H} + j \cdot \left(\omega R_T C_T - \frac{1}{\omega R_H C_H} \right)}.$$

Mit den Grenzkreisfrequenzen

$$\text{von Tiefpass} \quad \omega_{g,T} = \frac{1}{R_T C_T} \quad \text{und} \quad \text{Hochpass} \quad \omega_{g,H} = \frac{1}{R_H C_H}$$

erhält man

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_T}{R_H} + \frac{\omega_{g,H}}{\omega_{g,T}} + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_{g,T}} - \frac{\omega_{g,H}}{\omega} \right)}.$$

3.1.3 Bandpass - III

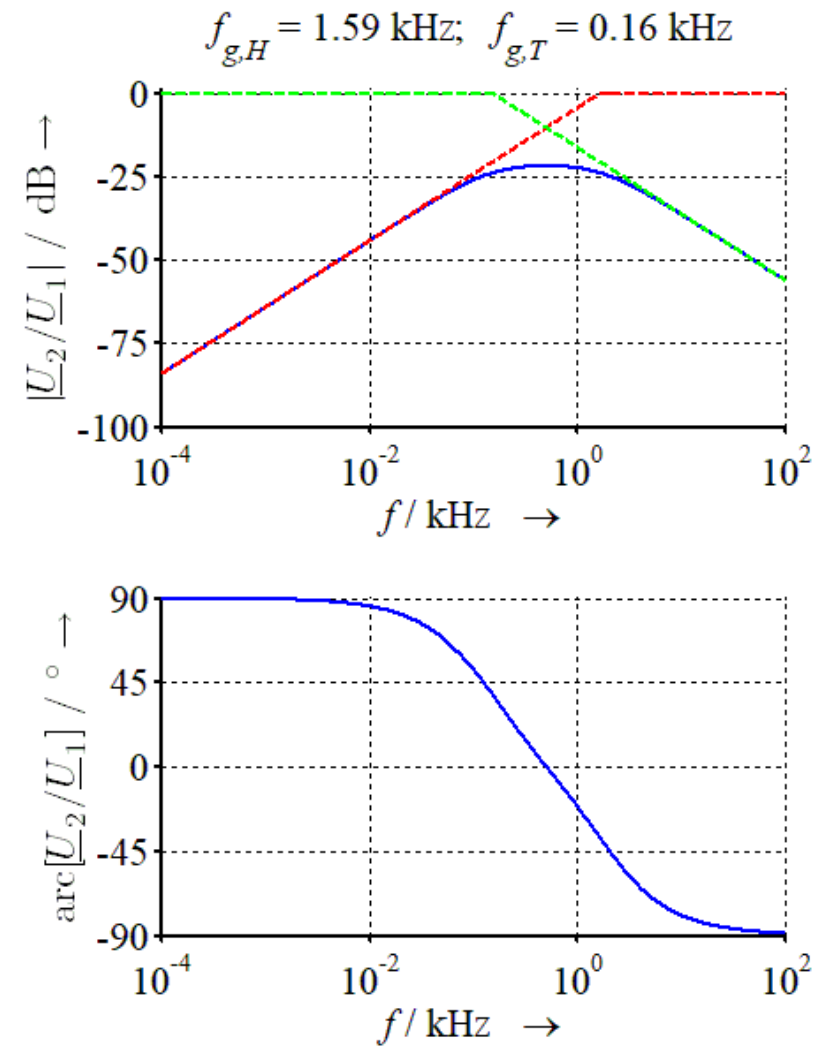
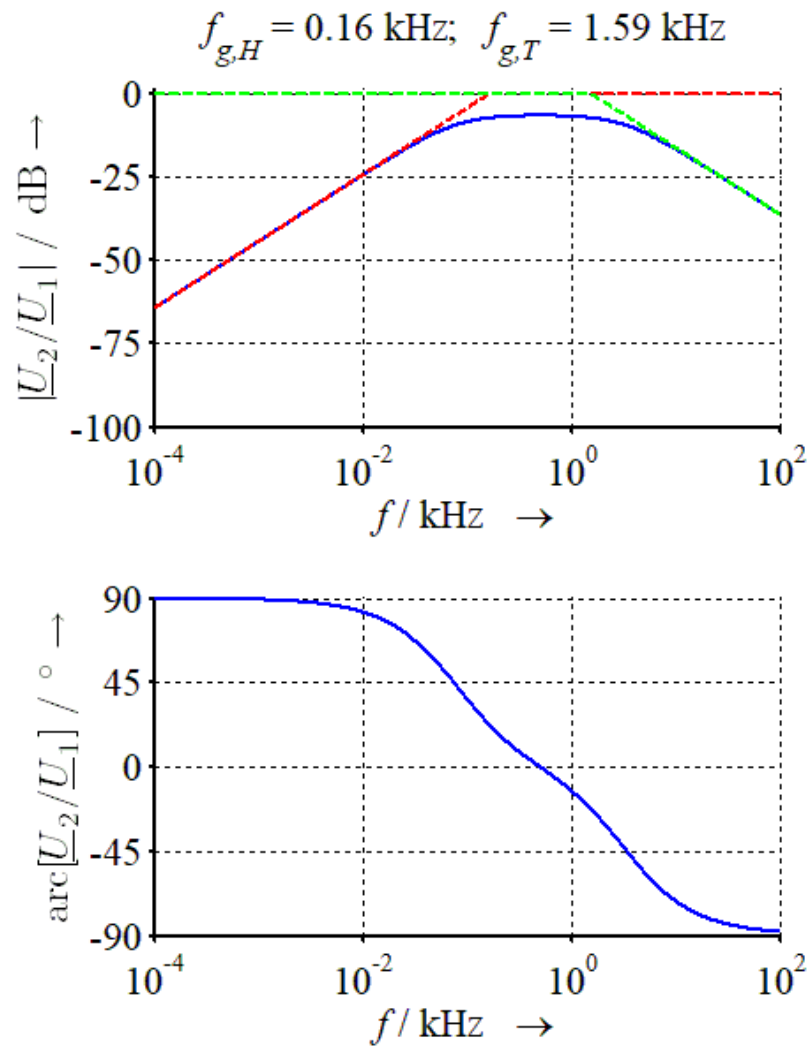


Bild 3.1.3-2 BODE-Diagramme zweier Bandpass-Schaltungen (blau) mit Asymptoten der BODE-Diagramme der Teilschaltungen (rot und grün)

3.1.3 Bandpass - IV

Eine solche Bandpass-Schaltung muss so ausgelegt werden, dass die Grenzfrequenz des Hochpasses kleiner (oder maximal gleich) der Grenzfrequenz des Tiefpasses ist (s. Bild 3.1.3-2 a). Andernfalls ist die Dämpfung unnötig groß (s. Bild 3.1.3-2 b).

Zur Verringerung der Dämpfung kann zwischen Tief- und Hochpass ein Verstärker mit hohem Eingangswiderstand geschaltet werden, der dafür sorgt, dass die vorhergehende Schaltung nahezu unbelastet arbeitet.

Für $R_T = R_H = R$ und $C_T = C_H = C$ vereinfacht sich die komplexwertige Spannungsübertragungsfunktion zu

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{3 + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega_g}{\omega} \right)}.$$

3.1.3 Bandpass - V

Eine spezielle Bandpass-Schaltung ist das WIEN-Glied. Dieser Filter ist die bestimmende Schaltung im WIEN-ROBINSON-Generator. Letzterer generiert sinusförmige Spannungen mit sehr geringem Oberschwingungsgehalt (Klirrfaktor). Außerdem wird die Schaltung in der WIEN-ROBINSON-Brückenschaltung angewendet.

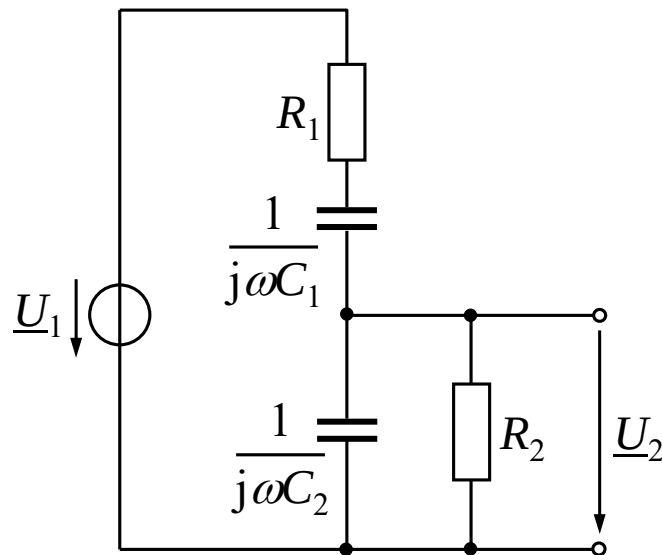


Bild 3.1.3-3 WIEN-Glied als Bandpass

Die Spannungsübertragungsfunktion dieser Schaltung lautet

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j \cdot \left(\omega R_1 C_2 - \frac{1}{\omega R_2 C_1} \right)}.$$

Verwendet man gleiche Widerstände und Kondensatoren $R_1 = R_2 = R$ bzw. $C_1 = C_2 = C$, so erhält man auch hier

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{3 + j \cdot \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right)}.$$

Die einleitend betrachtete Hintereinanderschaltung von Tief- und Hochpass und das WIEN-Glied besitzen nur für diesen Spezialfall, nämlich gleiche Widerstände und Kondensatoren, identisches Verhalten.

3.1.3 Bandpass - VI

Der Maximalwert des Betrags dieser Spannungsübertragungsfunktion tritt auf, wenn der Imaginärteil im Nenner verschwindet, d. h. bei der Durchlasskreisfrequenz

$$\omega RC - \frac{1}{\omega RC} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

und er beträgt

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \left[\omega_0 = \frac{1}{RC} \right] \right| = \frac{1}{3} \approx -9,54 \text{ dB}.$$

Bei den beiden 3 dB-Grenzkreisfrequenzen ω_{gu} und ω_{go} sind Real- und Imaginärteil im Nenner der Übertragungsfunktion gleich groß und der Betrag deshalb auf das $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ seines Maximalwertes gesunken. Man berechnet sie aus

$$\omega RC - \frac{1}{\omega RC} = 3 \Rightarrow \omega_{go} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2RC}$$

und

$$\omega RC - \frac{1}{\omega RC} = -3 \Rightarrow \omega_{gu} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2RC},$$

weil die jeweils andere Lösung der quadratischen Gleichungen einen negativen und damit physikalisch nicht realisierbaren Zahlenwert liefert.

Den Abstand

$$b_\omega = \Delta\omega = \omega_{go} - \omega_{gu} = 3 \cdot \omega_0$$

oder

$$b_f = \Delta f = f_{go} - f_{gu} = 3 \cdot f_0$$

nennt man **Bandbreite**.

Damit beträgt die **Güte**, als Quotient aus Durchlasskreisfrequenz und Bandbreite, für diese Schaltung

$$Q = \frac{\omega_0}{b_\omega} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{3}{RC}} = \frac{1}{3}.$$

Dieser Bandpass besitzt, wie auch die vorher betrachteten Tief- und Hochpässe, die Ordnung 1, weil sein Amplitudengang bei etwas Abstand von der Durchlassfrequenz um 20 dB pro Dekade steigt oder fällt.

3.1.3 Bandpass - VII

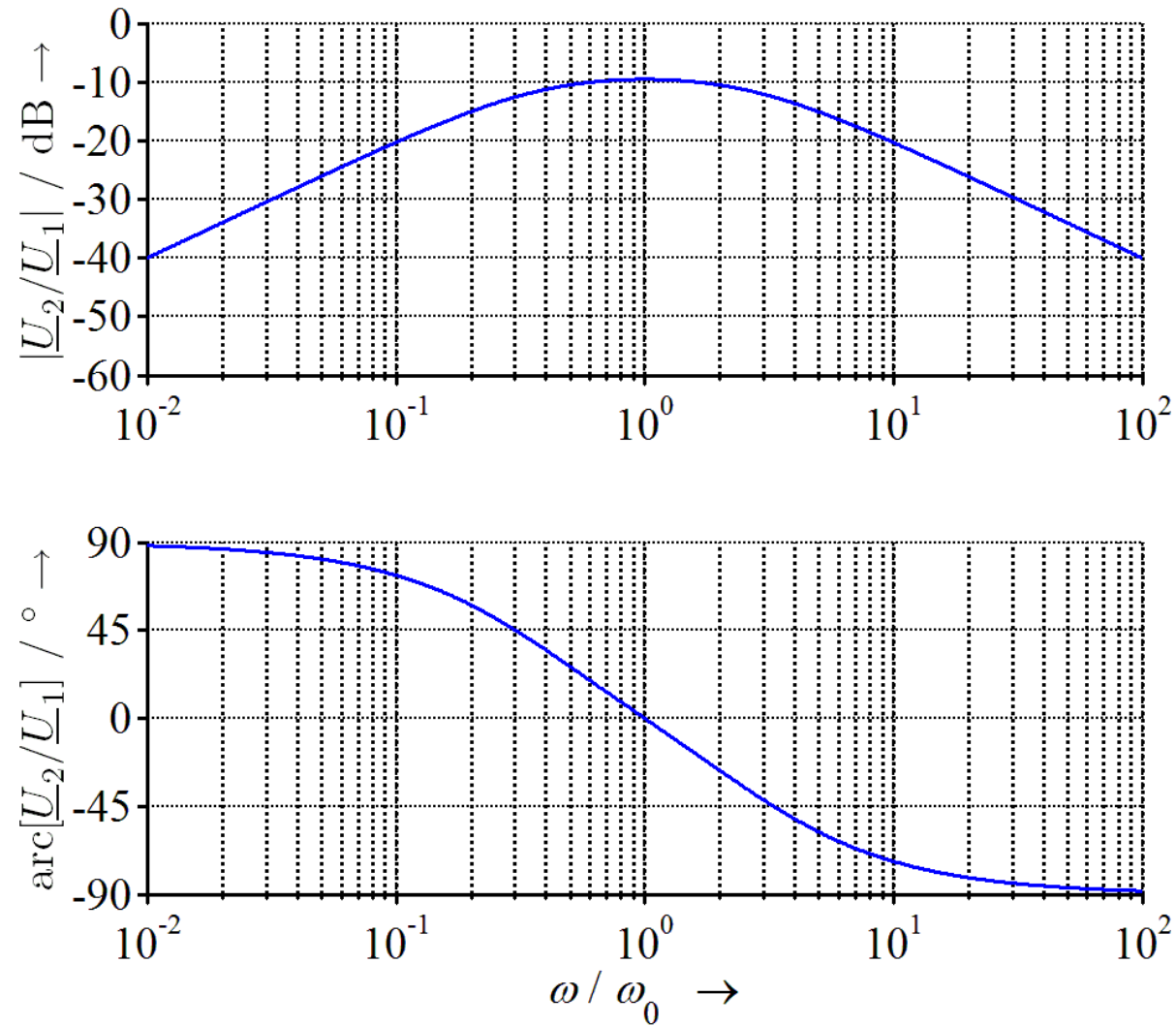


Bild 3.1.3-4 BODE-Diagramm des WIEN-Gliedes mit Kondensatoren $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ als Bandpass 1. Ordnung



3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.1.1 Tiefpass

3.1.2 Hochpass

3.1.3 Bandpass

3.1.4 Bandsperre

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.1.4 Bandsperre - I

Möchte man einen bestimmten Frequenzbereich aus dem Signal herausfiltern, so benötigt man dafür eine **Bandsperre** genannte Schaltung.

Bei den Schwingkreisen in Abschnitt 3.3 werden wir bei Stromspeisung den Reihenschwingkreis und bei Spannungsspeisung den Parallelschwingkreis als Bandsperre kennenlernen.

Hier wird beispielhaft für eine passive RC-Bandsperre das *Doppel-T-Glied* betrachtet.

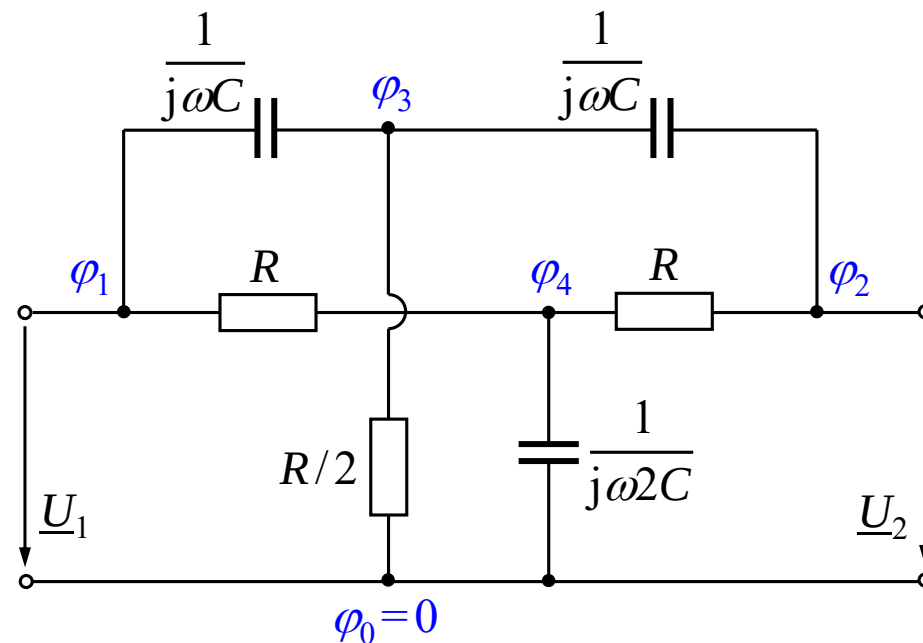


Bild 3.1.4-1 Doppel-T-Glied als Bandsperre

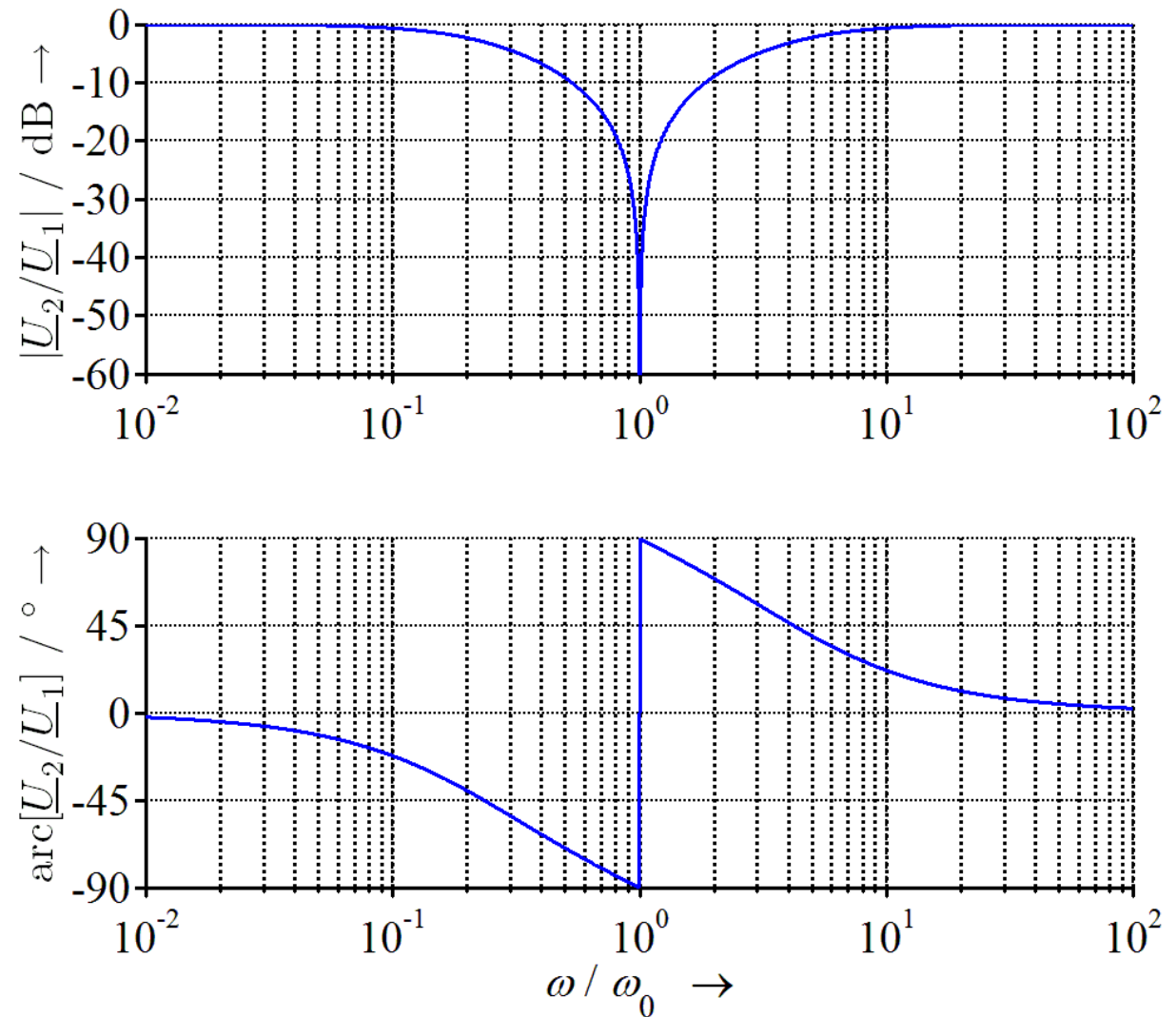
3.1.4 Bandsperre - II

Benutzt man zur Berechnung der Spannungsübertragungsfunktion des unbelasteten Doppel-T-Gliedes die eingezeichneten Knotenpotenziale, so erhält man

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1 - (\omega RC)^2}{1 - (\omega RC)^2 + j4\omega RC}.$$

Mit der Abkürzung $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ erhält man die dimensionslose Darstellung

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \cdot 4 \frac{\omega}{\omega_0}}.$$



3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

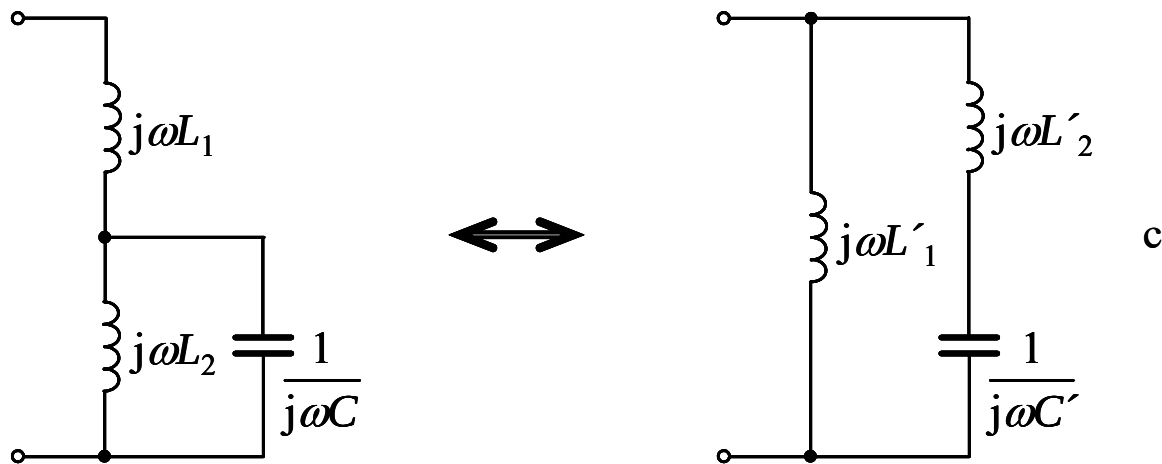
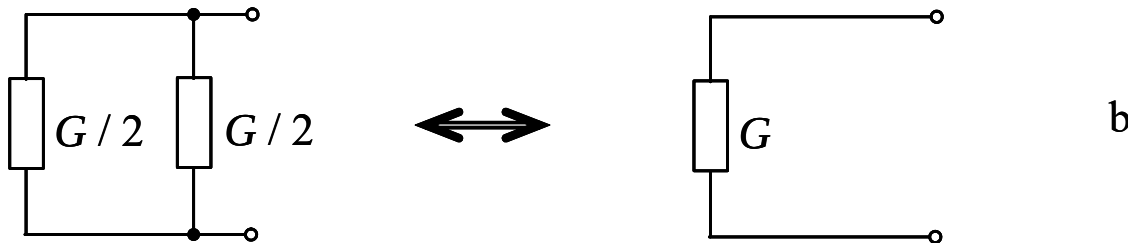
3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.2.1 Äquivalente Netzwerke

3.2.2 Duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.2.1 Äquivalente Netzwerke - I



Zwei lineare passive Zweipole (= Eintore) werden als **äquivalent** bezeichnet, falls sie sich für *alle Frequenzen* gleich verhalten. Dies setzt nicht den gleichen Aufbau der Zweipole voraus.

Beispiele siehe links.

Bild 3.2.1-1 Beispiele für äquivalente Netzwerke

3.2.1 Äquivalente Netzwerke - II

Die Beispiele **a** und **b** sind trivial, für Beispiel **c** lassen sich die Zusammenhänge zwischen den beiden Darstellungen wie folgt berechnen. Für das rechte Bild lässt sich schreiben

$$\underline{Y}' = \frac{1}{j\omega L_1'} + \frac{1}{j\omega L_2' + \frac{1}{j\omega C'}} = \frac{1}{j\omega L_1'} + \frac{\frac{1}{L_2'} \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{1}{L_2' C'}}.$$

Im linken Bild gilt

$$\underline{Z} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{(j\omega)^2 L_2 C + 1} = \frac{(j\omega)^3 L_1 L_2 C + j\omega(L_1 + L_2)}{(j\omega)^2 L_2 C + 1}$$

und daraus folgt

$$\underline{Y} = \frac{(j\omega)^2 L_2 C + 1}{(j\omega)^3 L_1 L_2 C + j\omega(L_1 + L_2)} \stackrel{!}{=} \frac{\underline{A}}{j\omega} + \frac{\underline{B} \cdot j\omega + \underline{C}}{(j\omega)^2 L_1 L_2 C + L_1 + L_2}.$$

Die zuletzt gebrauchte Formulierung entspricht dem Ansatz der *Partialbruchzerlegung*. Bringt man die rechte Seite auf den Hauptnenner, so lautet ein Vergleich der Zähler beider Seiten

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 L_2 C + 1 &= \underline{A} \cdot ((j\omega)^2 L_1 L_2 C + L_1 + L_2) + (\underline{B} \cdot j\omega + \underline{C}) \cdot (j\omega) \\ &= (j\omega)^2 \cdot (\underline{A} \cdot L_1 L_2 C + \underline{B}) + j\omega \cdot \underline{C} + (L_1 + L_2) \cdot \underline{A} \end{aligned}$$

3.2.1 Äquivalente Netzwerke - III

und damit folgt durch Vergleich der Koeffizienten von linker und rechter Seite

$$\underline{A} = \frac{1}{L_1 + L_2}, \quad \underline{B} = L_2 C - \underline{A} L_1 L_2 C = L_2 C - \frac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2}, \quad \underline{C} = 0.$$

Man erhält die Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{\left(L_2 C - \frac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2} \right) \cdot j\omega}{(j\omega)^2 L_1 L_2 C + L_1 + L_2} = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{\left(\frac{L_2 C}{L_1 L_2 C} - \frac{L_1 L_2 C}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{L_1 L_2 C} \right) \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} \\ &= \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_1 + L_2} \right) \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{\left(\frac{L_1 + L_2 - L_1}{L_1 \cdot (L_1 + L_2)} \right) \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} = \frac{1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{\frac{L_2}{L_1 \cdot (L_1 + L_2)} \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Darstellung von \underline{Y}' folgt

$$L_1' = L_1 + L_2, \quad L_2' = \frac{L_1 \cdot (L_1 + L_2)}{L_2} \quad \text{und} \quad C' = \frac{L_2^2}{(L_1 + L_2)^2} C.$$

$$\underline{Y}' = \frac{1}{j\omega L_1'} + \frac{\frac{1}{L_2'} j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{1}{L_2' C'}}$$

Diese Zusammenhänge sind tatsächlich frequenzunabhängig und deshalb handelt es sich um äquivalente Netzwerke.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.2.1 Äquivalente Netzwerke

3.2.2 Duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.2.2 Duale Netzwerke / Definition und Eigenschaften

In der Mathematik ist **Dualität** die Eigenschaft zweier Probleme. Die Dualität gestattet es, aus den Kenntnissen über die Lösung des einen Problems auf die Lösung des anderen Problems zu schließen.

Auf Netzwerke angewendet heißt das Dualitätsprinzip: Sind die Beschreibungen zweier Netzwerke in unterschiedlichen Verfahren zur Netzwerkberechnung, z. B. Maschenstrom- und Knotenpotenzialverfahren, *formal* identisch, so sind diese Netzwerke dual zueinander.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung planarer (= ebener) Netzwerke ohne magnetische Kopplungen.

Tabelle 3.2.2-1 Duale Entsprechungen in linearen Gleichstromnetzwerken

Quelle: Frohne, H.; Löcherer, K.-H.; Müller, H.: Moeller – Grundlagen der Elektrotechnik, Teubner-Verlag Stuttgart

Duale Größen	Spannung U	Strom I
	Widerstand R	Leitwert G
Schaltungen und Schaltungselemente	Ringschaltung (Masche)	Sternschaltung (Knoten)
	Reihenschaltung	Parallelschaltung
	Leerlauf	Kurzschluss
	Ideale Spannungsquelle	Ideale Stromquelle
Grundlegende Zusammenhänge	OHMsches Gesetz $U = R \cdot I$	OHMsches Gesetz $I = G \cdot U$
	Maschensatz	Knotensatz
	Reihenschaltung von Widerständen	Parallelschaltung von Leitwerten
	Spannungsteilerregel	Stromteilerregel
	Spannungsquellen-Ersatzschaltung $U = U_L - R_i \cdot I$	Stromquellen-Ersatzschaltung $I = I_k - G_i \cdot U$

3.2.2 Duale Netzwerke / Eigenschaften

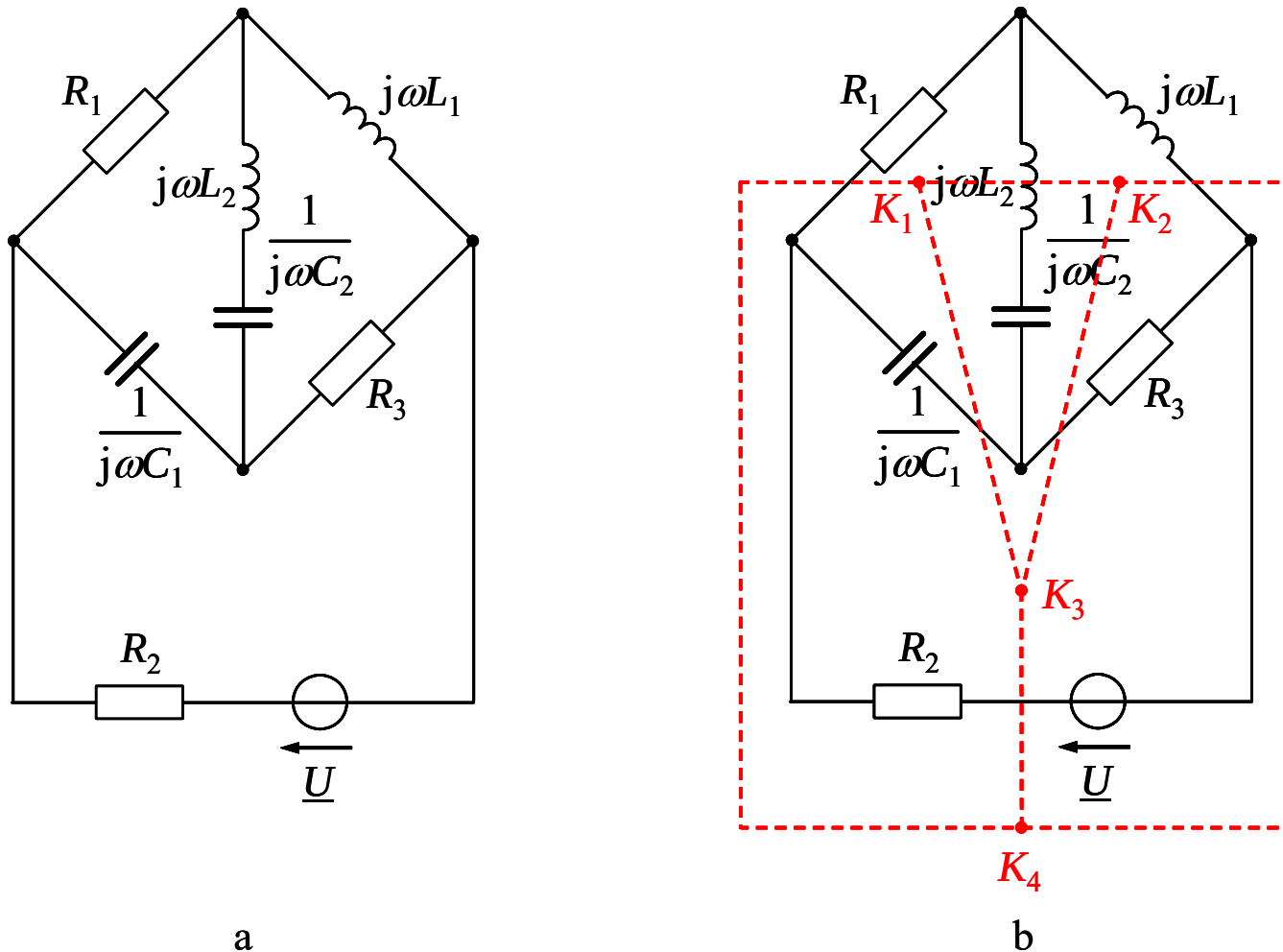
Tabelle 3.2.2-2 Duale Entsprechungen in harmonisch erregten, linearen Netzwerken

Quelle: Frohne, H.; Löcherer, K.-H.; Müller, H.: Moeller – Grundlagen der Elektrotechnik, Teubner-Verlag Stuttgart

Duale Größen	Spannungszeiger \underline{U} , Effektivwert U Phasenwinkel φ_u	Stromzeiger \underline{I} , Effektivwert I Phasenwinkel φ_i
	Impedanz \underline{Z} , Betrag Z Phasenwinkel $\varphi_Z = \varphi$ Wirkwiderstand R Blindwiderstand X	Admittanz \underline{Y} , Betrag Y Phasenwinkel φ_Y Wirkleitwert G Blindleitwert B
	Induktivität L	Kapazität C
	Frequenz f	
	Kreisfrequenz ω	
Invariante Größen	Energie W	
	Scheinleistung S	
	Wirkleistung P	
	Leistungsfaktor $\cos \varphi$	
Teilinvariante Größen	Komplexe Leistung \underline{S}	Konjugiert komplexe Leistung \underline{S}^*
	Blindleistung Q	Negative Blindleistung $-Q$
	Phasenwinkel φ	Negativer Phasenwinkel $-\varphi$
Schaltungen und Schaltungselemente	Ringschaltung (Masche)	Sternschaltung (Knoten)
	Reihenschaltung	Parallelschaltung
	Leerlauf	Kurzschluss
	Ideale Spannungsquelle	Ideale Stromquelle

3.2.2 Duale Netzwerke / Bestimmung - I

Die Bestimmung eines dualen Netzwerks erfolgt in **2 Schritten**:



- 1 Zur Bestimmung der *dualen Struktur* wird in jede unabhängige Masche des Ausgangsnetzwerks (Bild 3.2.2-1 a) ein Knoten gelegt, der denselben Index bekommt, wie die Masche. Außerhalb des Netzwerks wird ein zusätzlicher Knoten angebracht, der die äußere Masche repräsentiert (Bild 3.2.2-1 b). Zwischen den Knoten werden Verbindungslinien gezogen. Dabei darf jede neue Verbindung nur einen der alten Zweige schneiden. Die gestrichelten Knotenverbindungen in Bild 3.2.2-1 b sind die neuen Zweige.

Bild 3.2.2-1 **a** Ausgangsnetzwerk mit **b** Knoten des Zielnetzwerks

3.2.2 Duale Netzwerke / Bestimmung - II

- 2 In die neuen Zweige sind die nach Tabelle 3.2.2-2 dualen Bauelemente zu den Bauelementen in den jeweils geschnittenen alten Zweigen einzutragen.

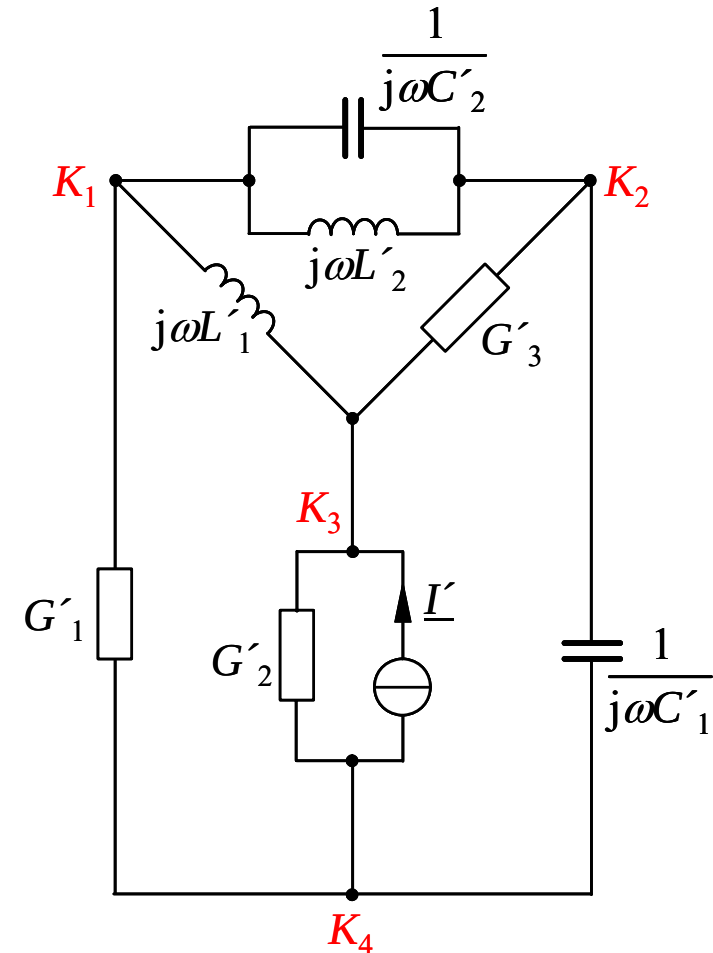


Bild 3.2.2-2 Zielnetzwerk

Um zu prüfen, ob beide Schaltungen tatsächlich dual sind, führen wir eine Knotenpotenzialanalyse und eine Maschenstromanalyse durch.

3.2.2 Duale Netzwerke / Ergebniskontrolle - I

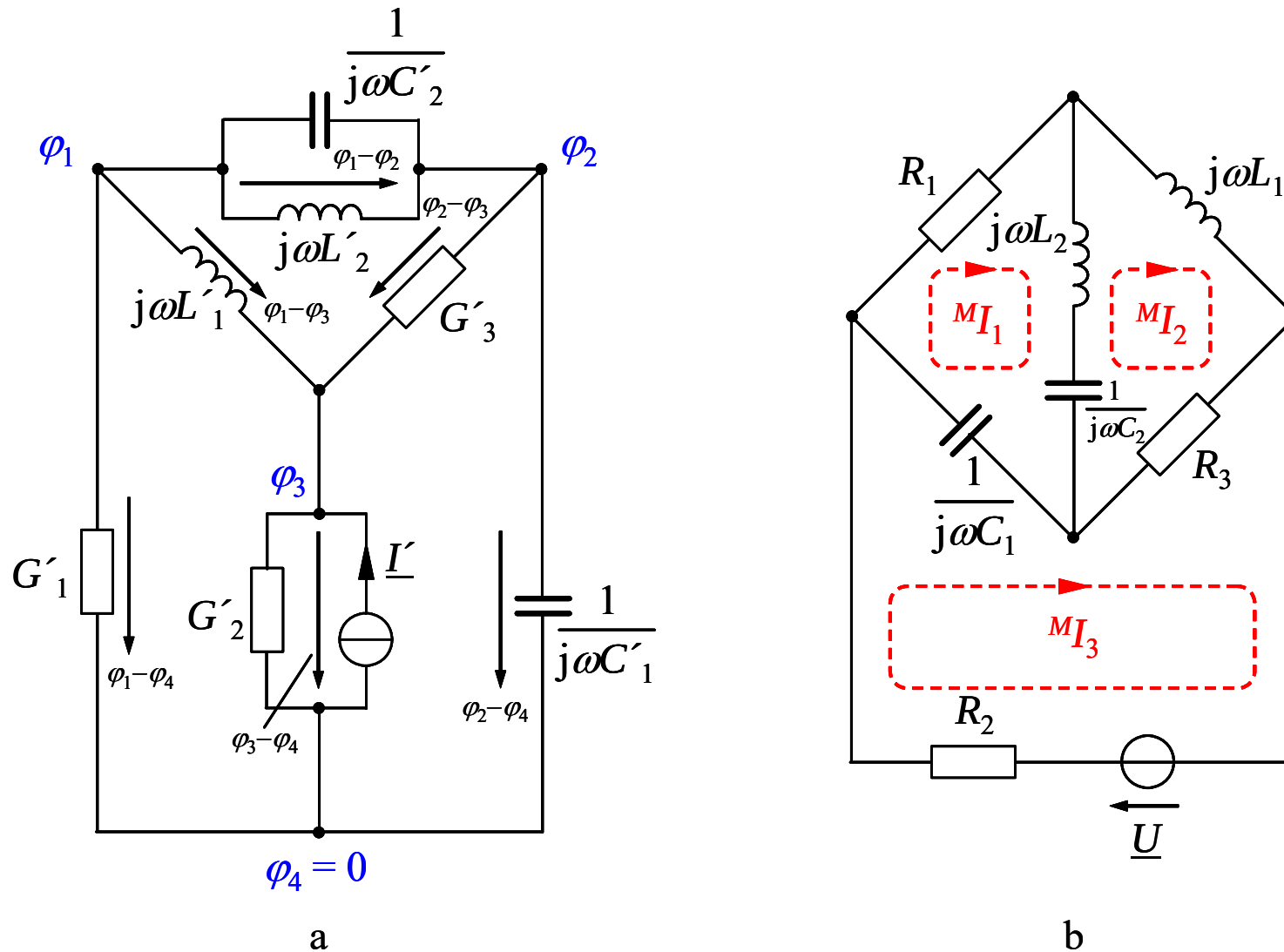


Bild 3.2.2-3 **a** Zielnetzwerk mit Knotenpotenzialen und **b** Ausgangsnetzwerk mit Maschenströmen

3.2.2 Duale Netzwerke / Ergebniskontrolle - II

Die Knotenpotenzialanalyse in Bild 3.2.2-3 a (Zielnetzwerk) liefert

$$\text{K1: } (\varphi_1 - \varphi_4) \cdot G'_1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{j\omega L'_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\frac{j\omega L'_2}{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}} = 0,$$

$$\text{K2: } \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\frac{j\omega L'_2}{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}} - (\varphi_2 - \varphi_3) \cdot G'_3 - (\varphi_2 - \varphi_4) \cdot j\omega C'_1 = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{K3: } \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{j\omega L'_1} + (\varphi_2 - \varphi_3) \cdot G'_3 - (\varphi_3 - \varphi_4) \cdot G'_2 + \underline{I}' = 0.$$

Setzt man $\varphi_4 = 0$ und bringt die Gleichungen in Matrizendarstellung, so erhält man

$$\text{K1: } \left(G'_1 + \frac{1}{j\omega L'_1} + \frac{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}{j\omega L'_2} \right) \cdot \varphi_1 + \left(-\frac{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}{j\omega L'_2} \right) \cdot \varphi_2 + \left(-\frac{1}{j\omega L'_1} \right) \cdot \varphi_3 = 0,$$

$$\text{K2: } \left(\frac{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}{j\omega L'_2} \right) \cdot \varphi_1 + \left(-\frac{1 - \omega^2 L'_2 C'_2}{j\omega L'_2} - G'_3 - j\omega C'_1 \right) \cdot \varphi_2 + G'_3 \cdot \varphi_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{K3: } \left(\frac{1}{j\omega L'_1} \right) \cdot \varphi_1 + G'_3 \cdot \varphi_2 - \left(\frac{1}{j\omega L'_1} + G'_2 + G'_3 \right) \cdot \varphi_3 = -\underline{I}'$$

3.2.2 Duale Netzwerke / Ergebniskontrolle - III

oder nach geeigneter Multiplikation einiger Zeilen mit -1 zur Erzeugung einer symmetrischen Admittanzmatrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -G'_1 - \frac{1}{j\omega L'_1} - \frac{1}{j\omega L'_2} - j\omega C'_2 & \frac{1}{j\omega L'_2} + j\omega C'_2 & \frac{1}{j\omega L'_1} \\ \frac{1}{j\omega L'_2} + j\omega C'_2 & -\frac{1}{j\omega L'_2} - j\omega C'_2 - G'_3 - j\omega C' & G'_3 \\ \frac{1}{j\omega L'_1} & G'_3 & -\frac{1}{j\omega L'_1} - G'_2 - G'_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\underline{I'} \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Duale Netzwerke / Ergebniskontrolle - IV

Die Maschenstromanalyse in Bild 3.2.2-3 b (Ausgangsnetzwerk) liefert

$$\text{M1: } R_1 \cdot {}^M I_1 + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot ({}^M I_1 - {}^M I_2) + \frac{1}{j\omega C_1} \cdot ({}^M I_1 - {}^M I_3) = 0,$$

$$\text{M2: } j\omega L_1 \cdot {}^M I_2 + R_3 \cdot ({}^M I_2 - {}^M I_3) + \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot ({}^M I_2 - {}^M I_1) = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{M3: } \underline{U} + R_2 \cdot {}^M I_3 + \frac{1}{j\omega C_1} \cdot ({}^M I_3 - {}^M I_1) + R_3 \cdot ({}^M I_3 - {}^M I_2) = 0.$$

Umstellen liefert

$$\text{M1: } \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot {}^M I_1 + \left(-j\omega L_2 - \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot {}^M I_2 - \frac{1}{j\omega C_1} \cdot {}^M I_3 = 0,$$

$$\text{M2: } \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot {}^M I_1 - \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_3 + j\omega L_1 \right) \cdot {}^M I_2 + R_3 \cdot {}^M I_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$\text{M3: } \left(-\frac{1}{j\omega C_1} \right) \cdot {}^M I_1 - R_3 \cdot {}^M I_2 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + R_2 + R_3 \right) \cdot {}^M I_3 = -\underline{U}$$

oder nach geeigneter Multiplikation einiger Zeilen mit -1 zur Erzeugung einer symmetrischen Impedanzmatrix

3.2.2 Duale Netzwerke / Ergebniskontrolle - V

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 - \frac{1}{j\omega C_1} - \frac{1}{j\omega C_2} - j\omega L_2 & \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 & \frac{1}{j\omega C_1} \\ \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 & -\frac{1}{j\omega C_2} - j\omega L_2 - R_3 - j\omega L_1 & R_3 \\ \frac{1}{j\omega C_1} & R_3 & -\frac{1}{j\omega C_1} - R_2 - R_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \begin{bmatrix} {}^M I_1 \\ {}^M I_2 \\ {}^M I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U} \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{Y} und \mathbf{Z} sind formal identisch aufgebaut und die Schaltungen damit dual.

Aus dem Vorzeichenunterschied bei der Bestimmung des dualen Schaltelementes zu der Spannungsquelle \underline{U} erkennt man, dass der Zählpfeil für den Quellenstrom der Stromquelle andersherum hätte angenommen werden müssen.

Hängen die Koeffizientenmatrizen über die Beziehung

$$\mathbf{Z} = R_0^2 \cdot \mathbf{Y}$$

zusammen und hat R_0 die Dimension eines OHMschen Widerstands, so heißen die Netzwerke *widerstandsreziprok*. Duale Netzwerke sind stets widerstandsreziprok. Widerstandsreziproke Netzwerke können, müssen aber nicht, dual sein.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

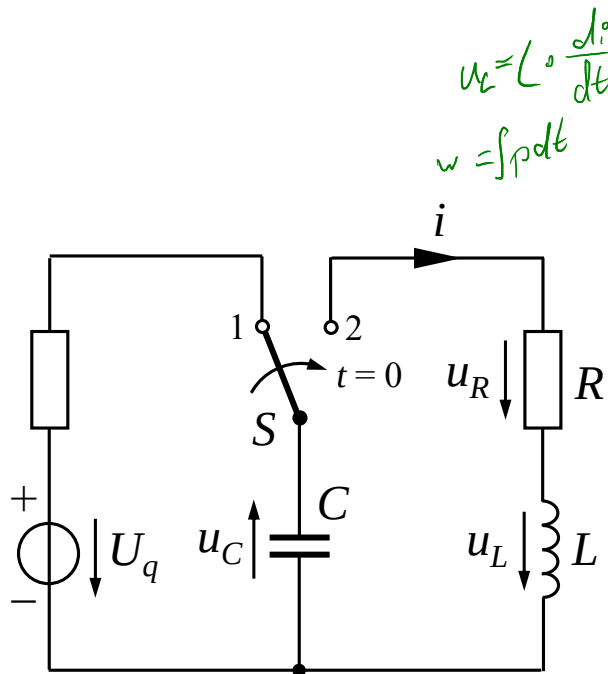
3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.3 Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises

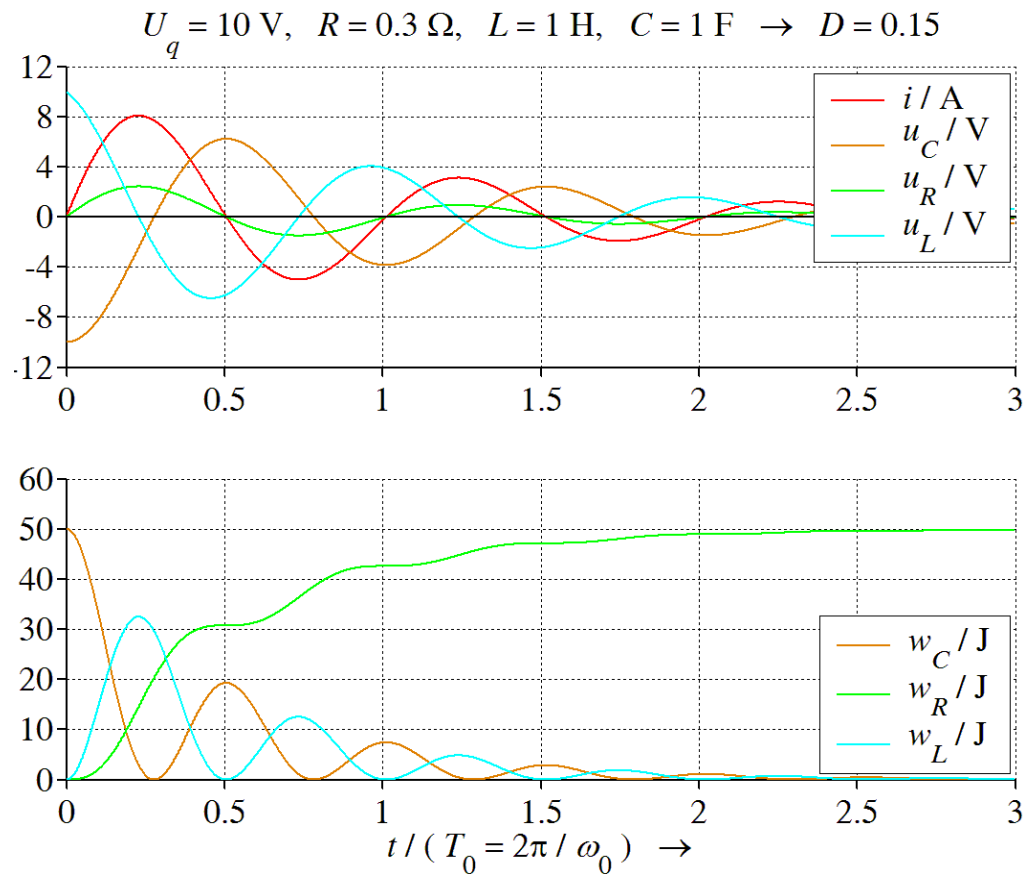
3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - I

Es wird ein Kondensator betrachtet, der während $t < 0$ über einen Ladewiderstand auf die Gleichspannung $u_C[t = 0] = -U_q$ aufgeladen wurde. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S von Stellung 1 nach Stellung 2 umgelegt. Der Kondensator entlädt sich über die RL-Reihenschaltung, die vorher stromlos war ($i[t = 0] = 0$).



a



b

Bild 3.3.1-1 Freie Schwingungen **b** eines Reihenschwingkreises **a**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - II

Als Schwingung bezeichnet man einen Vorgang, der durch eine periodische Funktion des reellwertigen Zeitparameters t beschrieben wird.

Eine Schwingung der Art

$$x[t] = \hat{x} \cdot \sin[\omega \cdot t + \varphi_0]$$

mit konstanten Werten für \hat{x} , ω und φ_0 heißt **harmonisch**.

Die Zeitverläufe der Größen i , u_C , u_R und u_L weisen konstante Frequenz aber abnehmende Amplituden auf. Sie heißen deshalb *gedämpfte Schwingungen* und ihre gemeinsame Frequenz wird als **Eigenfrequenz**

$$f_D = f_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}$$

bezeichnet (Bezeichnungen s. Abschnitt 3.3.2.1).

Im Kapitel „Wechselstrom“ haben wir bereits harmonische Zeitverläufe an Schaltungen aus den Bauelementen R , L und C kennen gelernt, letztere aber nicht als **Schwingkreise** bezeichnet.

Eine Besonderheit der Schaltung nach Bild 3.3.1-1 a liegt darin, dass die bei $t = 0$ allein im elektrischen Feld des Kondensators gespeicherte Energie von

$$\begin{aligned} w_C[t = 0] &= \frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2[t = 0] \\ &\stackrel{\text{hier}}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ F} \cdot (10 \text{ V})^2 = 50 \text{ J} \end{aligned}$$

während der anschließenden gedämpften Schwingungen von Strom und Spannungen periodisch und reversibel in magnetische Feldenergie der Spule

$$w_L[t] = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2[t]$$

umgewandelt wird.

Damit eine elektrische Schaltung als Schwingkreis wirken kann, muss sie mindestens zwei Speicher für unterschiedliche Energieformen, hier elektrische und magnetische Feldenergie, enthalten.

Da Kondensator und Spule hier in Reihe geschaltet sind, spricht man von einem **Reihenschwingkreis**.

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - III

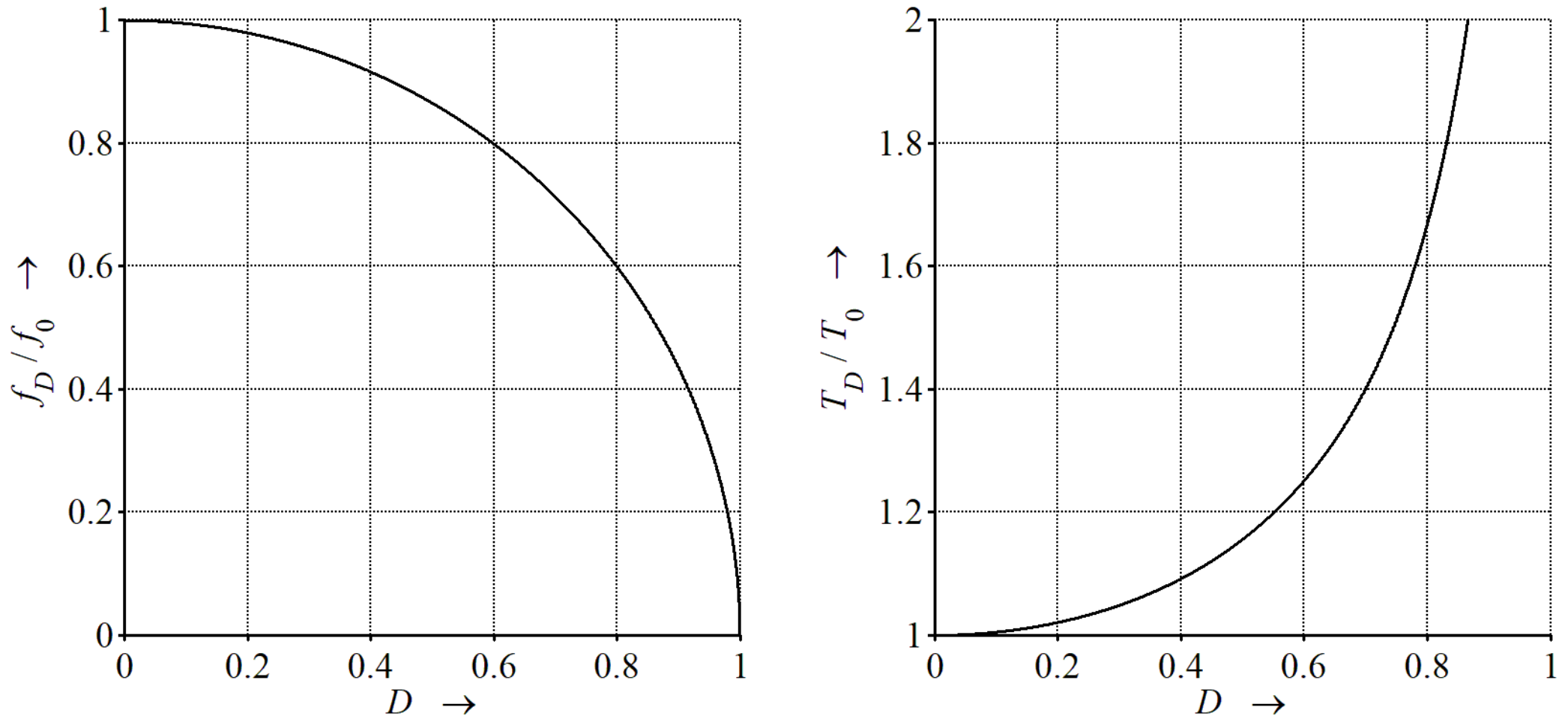


Bild 3.3.1-2 Verhältnis von (links) Eigen- zu Kennfrequenz und (rechts) zugehörigen Periodendauern in Abhängigkeit von der Dämpfung

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - IV

$$U_q = 10 \text{ V}, R = 0.03 \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \text{ F} \rightarrow D = 0.015$$

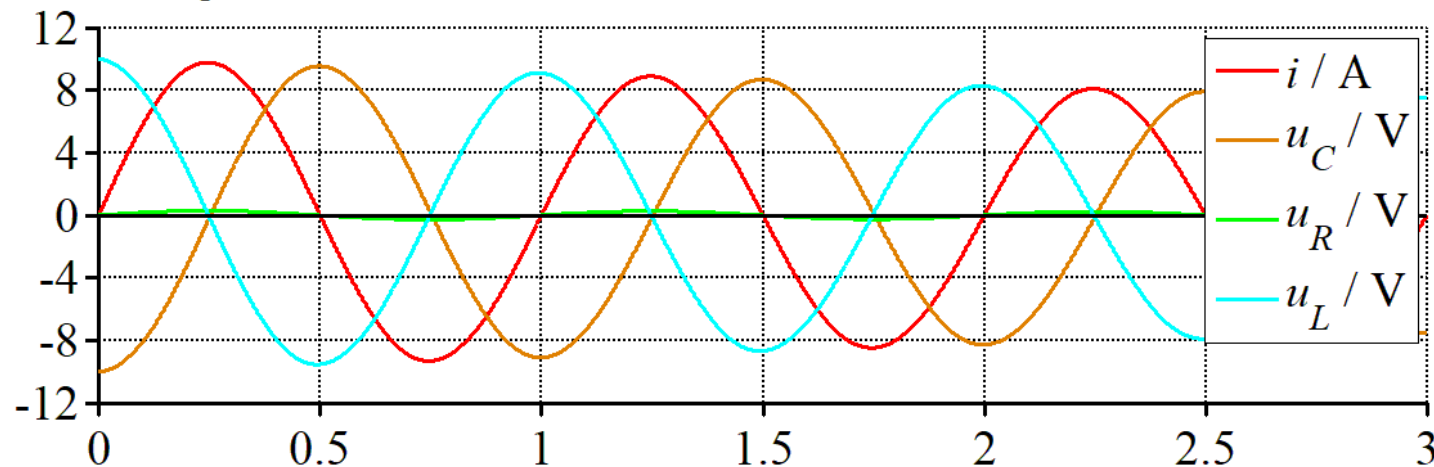
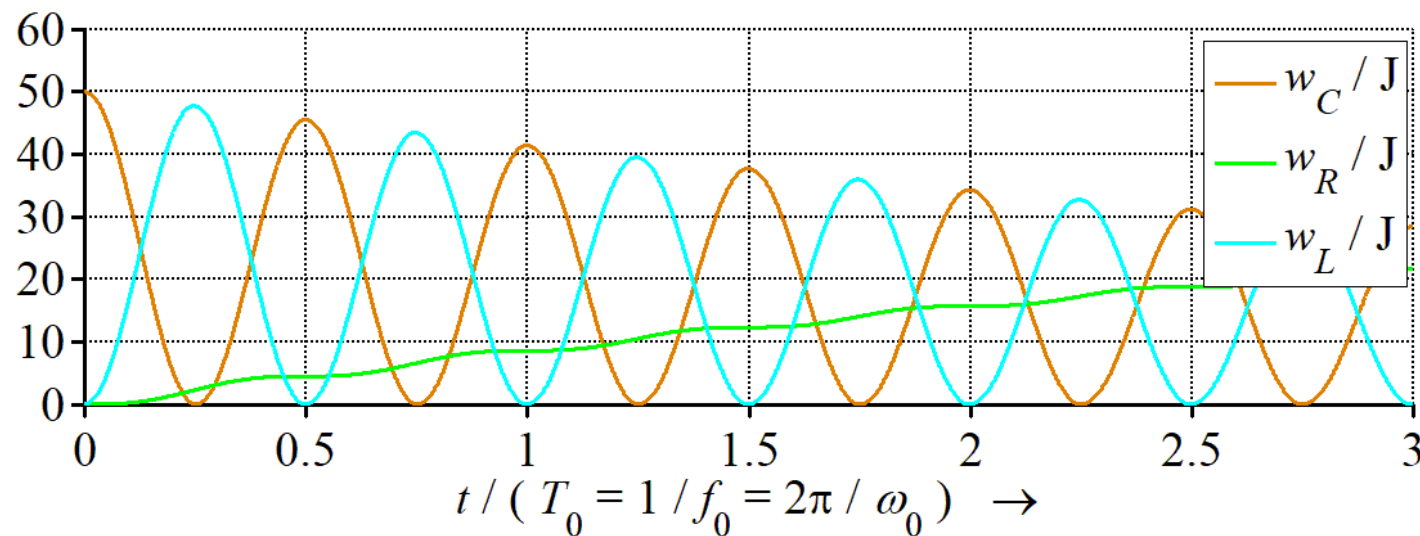


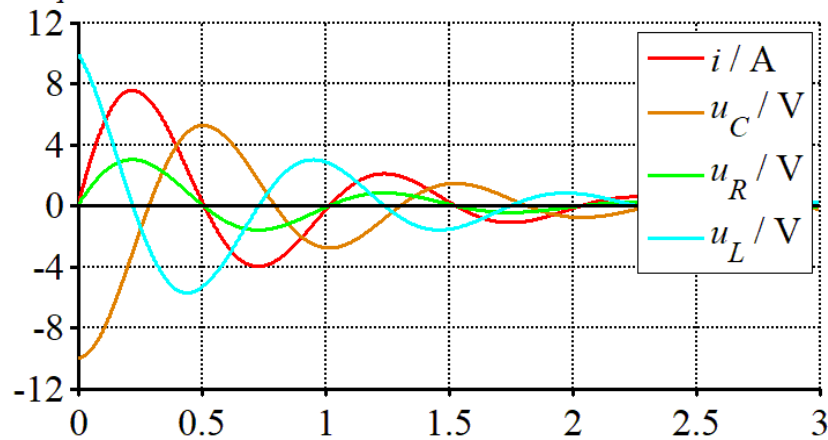
Bild 3.3.1-3

Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises mit schwacher Dämpfung



3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - V

$$U_q = 10 \text{ V}, R_1 = 0.4 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \text{ F} \rightarrow D_1 = 0.2$$



$$U_q = 10 \text{ V}, R_2 = 0.8 \, \Omega, L = 1 \text{ H}, C = 1 \text{ F} \rightarrow D_2 = 0.4$$

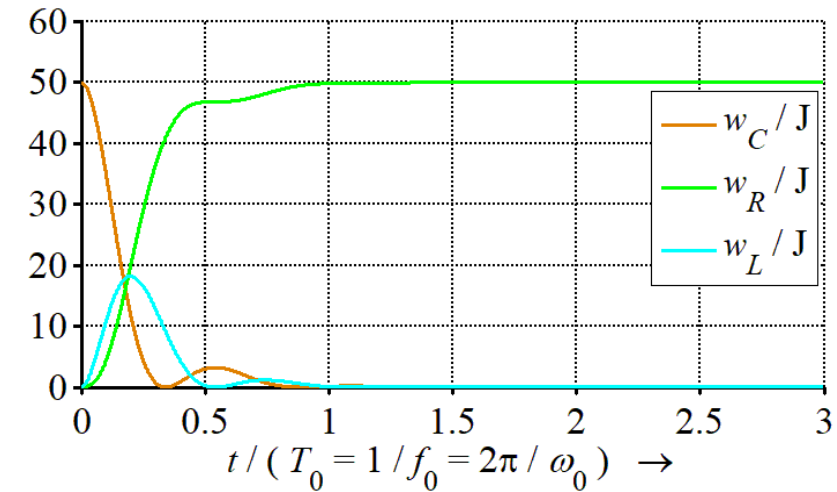
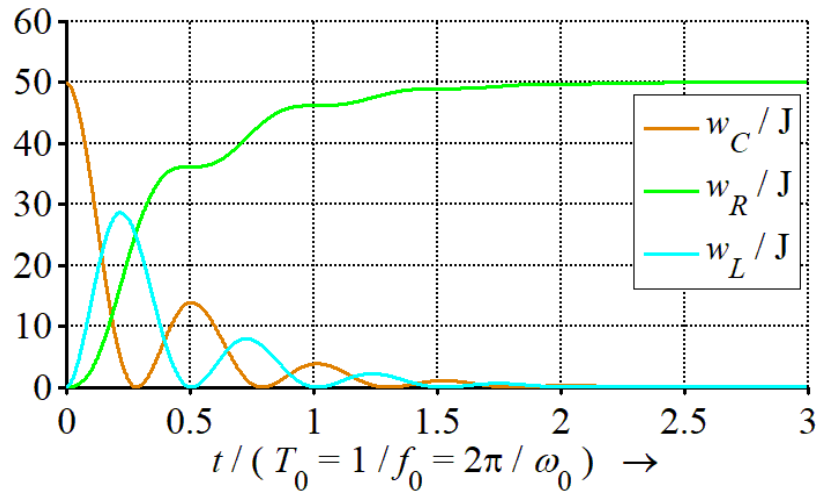
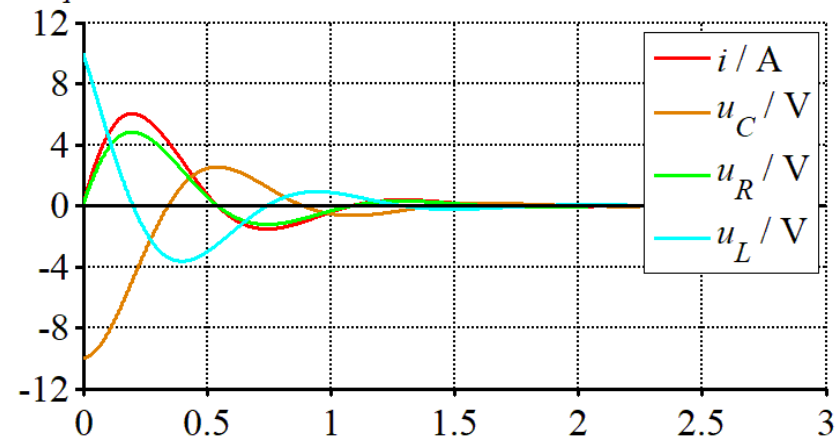


Bild 3.3.1-4 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises mit größerer Dämpfung

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises - VI

Da ein von null verschiedener Augenblickswert des Stromes $i[t] \neq 0$ zu einem Verlustleistungsumsatz im OHMschen Widerstand

$$p_R[t] = R \cdot i^2[t]$$

führt, nimmt die zwischen Kondensator und Spule pendelnde Energie mit der Zeit ab. Sie wird im OHMschen Widerstand in Verlustwärmeenergie

$$w_R[t] = \int_0^t p_R[\tilde{t}] d\tilde{t} + w_R[t=0] = \int_0^t R \cdot i^2[\tilde{t}] d\tilde{t} + \underbrace{w_R[t=0]}_{\text{hier 0}}$$

umgewandelt. Mit einem sehr viel kleineren Widerstand dauert diese Umwandlung der schwingenden Energie in Wärme deutlich länger und man erhält nahezu ungedämpfte Schwingungen (Bild 3.3.1-2).

Im obigen Beispiel wurde der Schwingkreis ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand, in diesem Fall $u_C[t=0] = -U_q$ und $i[t=0] = 0$, sich selbst überlassen. Die dabei auftretenden Schwingungen bezeichnet man als *freie Schwingungen*. Ein Analogon aus der Mechanik ist die aus einer bestimmten Auslenkung heraus losgelassene schwingende Saite oder Schaukel („Zupfversuch“).

Es ist ebenso möglich, den Schwingkreis mit einer zeitabhängigen Quellenspannung zu speisen. Letztere kann z. B. nach einer Sprungfunktion oder harmonisch verlaufen. Wird ein Schwingkreis mit einer periodischen Wechselgröße gespeist - diese muss weder einfrequent noch harmonisch sein - so nennt man die dabei entstehenden Schwingungen *erzwungene Schwingungen*.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 **Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises**

3.3.2.1 Spannungsgespeicher Reihenschwingkreis

3.3.2.2 Stromgespeicher Reihenschwingkreis

3.3.3 Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises

3.3.4 Reaktanzzweipole

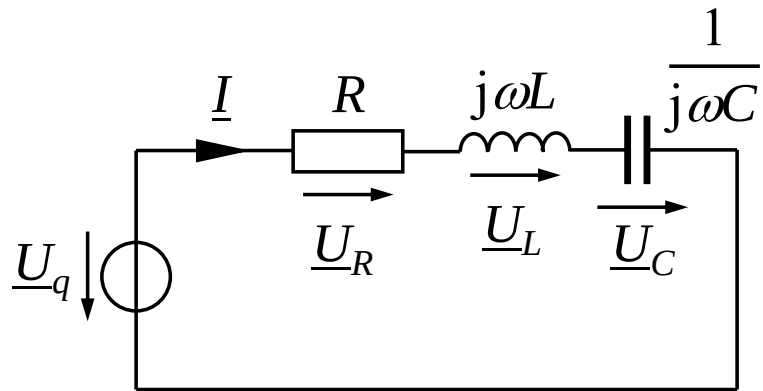
3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - I

Schwingkreise werden in der Elektrotechnik oft als Filter eingesetzt und in diesem Fall harmonisch angeregt. Man unterscheidet *Spannungsspeisung* von *Stromspeisung*.

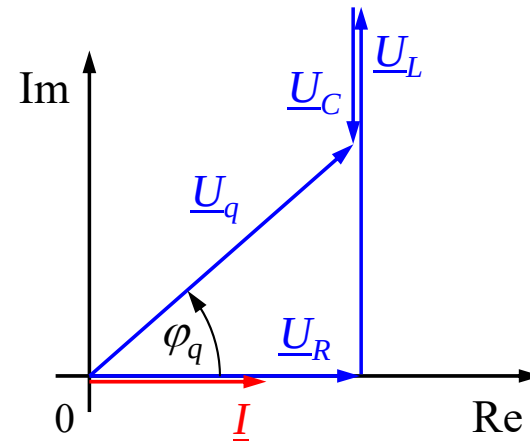
Spannungsgespeister Reihenschwingkreis. Im stationären Zustand mit harmonischer Anregung der Kreisfrequenz ω

$$u_q[t] = \sqrt{2}U_q \cdot \cos[\omega t + \varphi_q]$$

kann auf die komplexe Wechselstromrechnung übergegangen werden.



a



b

Bild 3.3.2.1-1 **a** Spannungsgespeister Reihenschwingkreis und **b** qualitatives Zeigerbild für $\omega > \omega_0$

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - II

Während für das Zeichnen des qualitativen Zeigerbildes (3.3.2.1-1 b) der Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_q}{R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}.$$

der Bezugszeiger ist, wird für die folgenden Betrachtungen der Quellenspannungszeiger der Bezugszeiger sein.

Abkürzungen werden hier eingeführt, um den Vergleich von Schwingkreisen anhand von Kenngrößen zu erleichtern, die zwar von den verwendeten Bauelementen abhängen, diese aber nicht mehr explizit enthalten.

Man bezeichnet die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises als **Kennkreisfrequenz**

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \{\omega_0\}_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

und den Ausdruck

$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{R}{2} \cdot \omega_0 C, \quad \{D\}_{SI} = 1$$

als (**LEHR**sches) **Dämpfungsmaß**.

Außerdem heißen

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \omega_0 C} \stackrel{\text{allgemeiner } Z_0}{=} \frac{Z_0}{R} = \frac{1}{2D} = \frac{1}{d}, \quad \{Q\}_{SI} = 1$$

die **Güte** eines Reihenschwingkreises und (in Anlehnung an die Definitionen bei der „realen Spule“) **Verlustfaktor**.
↗ ist in definition überladen

Je größer der OHMsche Widerstand, umso größer ist der Verlustfaktor und umso kleiner ist die Güte des Schwingkreises. Angestrebt ist meist eine Güte von $Q \gg 1$.

Die Erweiterung dieser Darstellung zu

$$Q = \frac{\omega_0 L \cdot I^2[\omega_0]}{R \cdot I^2[\omega_0]} = \frac{\frac{1}{\omega_0 C} \cdot I^2[\omega_0]}{R \cdot I^2[\omega_0]}$$

zeigt, dass die Güte das Verhältnis der von den Energiespeichern L und C bei Kennkreisfrequenz aufgenommenen bzw. abgegebenen Blindleistungen zur Wirkleistungsaufnahme des Widerstands angibt.

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - III

ist eigentlich Impedanz

Als **Schwingwiderstand** oder **Kennwiderstand des Resonanzkreises** bezeichnet man

$$Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R \cdot Q = \frac{R}{2D}, \quad \{Z_0\}_{SI} = \Omega$$

den Blindwiderstand der Energiespeicher L und C bei Kennkreisfrequenz.

Der Term

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \{v\}_{SI} = 1$$

hat falsche Frequenz

heißt **Verstimmung**. Nach ω aufgelöst erhält man

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \cdot \left(\frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + 1} \right),$$

d. h. ein Wert für die Verstimmung wird bei zwei unterschiedlichen Kreisfrequenzen $\omega_{1,2}$ erreicht.

Aus einer gegebenen Verstimmung kann deshalb nicht eindeutig auf die Kreisfrequenz zurückgerechnet werden.

Impedanz und Admittanz. Mit den eingeführten Abkürzungen lässt sich die Impedanz der Reihenschaltung schreiben als

$$\underline{Z} = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \dots = R \cdot \underbrace{\left(1 + j \cdot \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2D} \right)}_{\underline{Z}'}$$

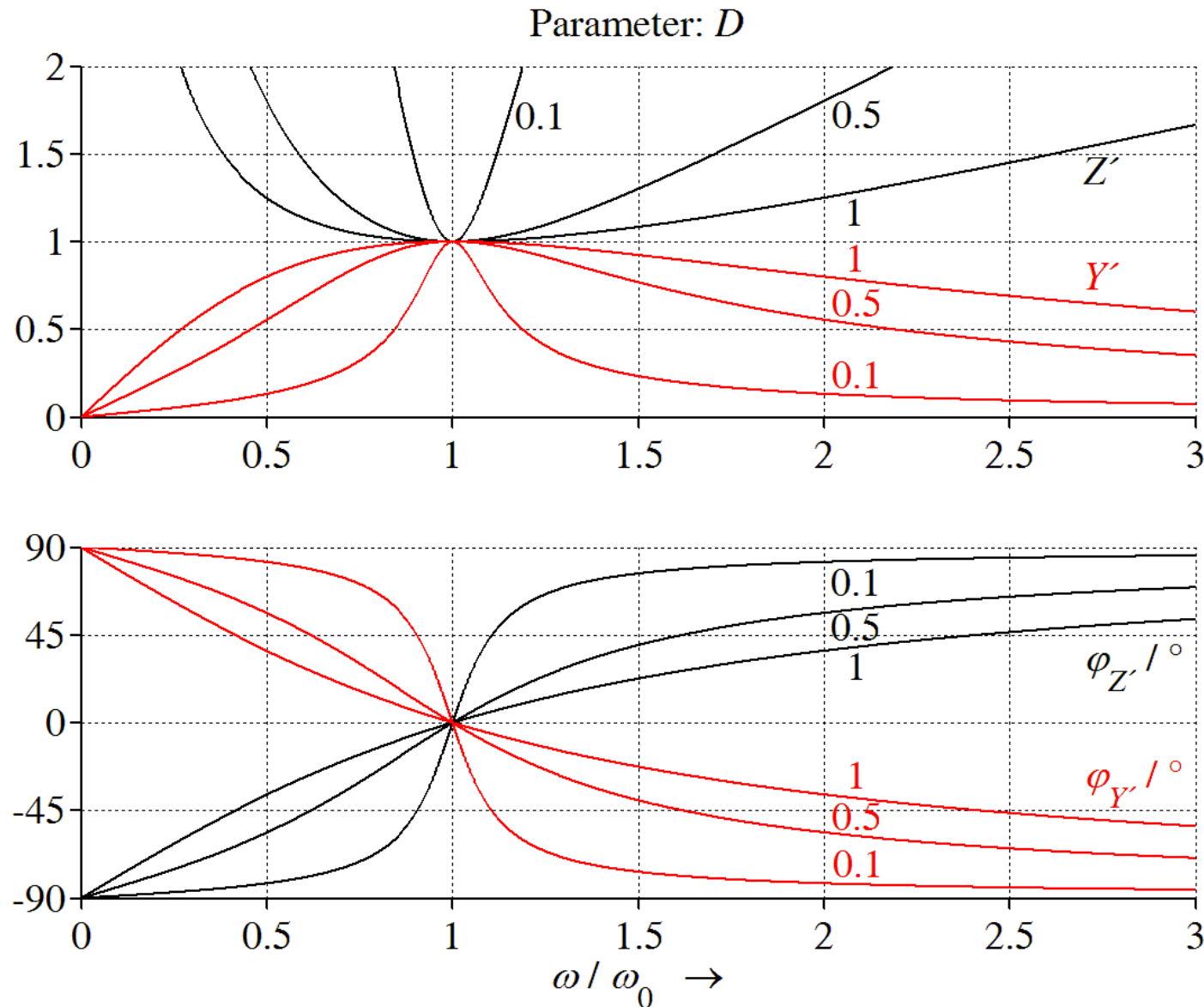
$$= R \cdot \underline{Z}' = R \cdot \frac{1}{\underline{Y}'}$$

hier
Bei $\omega_K = \omega_0$ wird diese Impedanz minimal und reellwertig *→ nicht bei ω_0 !*

$$\underline{Z}[\omega = \omega_K] = R,$$

d. h. der Schwingkreis nimmt keine Blindleistung auf. ω_K wird deshalb auch als **Kompensationskreisfrequenz** des Schwingkreises bezeichnet. (Der hier betrachtete Schwingkreis ist ein Sonderfall, meist gilt $\omega_K \neq \omega_0$.)

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - IV



Der Strom I wird hier bei $\omega = \omega_K = \omega_0$ betraglich maximal. An eingepprägter Spannung wirkt der Reihenschwingkreis deshalb als *Bandpass*, der Spektralanteile des Stromes umso besser überträgt, je näher ihre Kreisfrequenzen an ω_0 liegen.

Bild 3.3.2.1-2

Betrag und Phasenwinkel des Widerstands- und Leitwertoperators eines *Reihenschwingkreises* nach Bild 3.3.2.1-1 a in Abhängigkeit von der bezogenen Kreisfrequenz

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - V

Ortskurven von Impedanz und Admittanz. Bezieht man die Impedanz des Reihenschwingkreises auf den Wirkwiderstand, so erhält man

$$\underline{Z} = R + j \cdot Z_0 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = R + j \cdot R \cdot Q \cdot \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}_v \Rightarrow \frac{\underline{Z}}{R} = 1 + j \cdot Qv = 1 + j \cdot \Omega$$

und mit der *normierten Verstimmung* $\Omega = Q \cdot v$ und

$$\frac{\underline{Y}}{G} = \frac{1}{1 + j \cdot \Omega}.$$

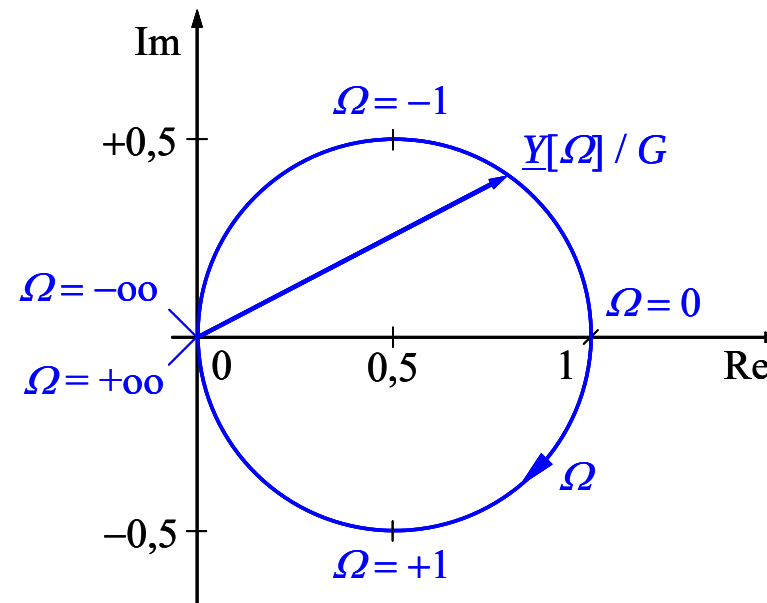
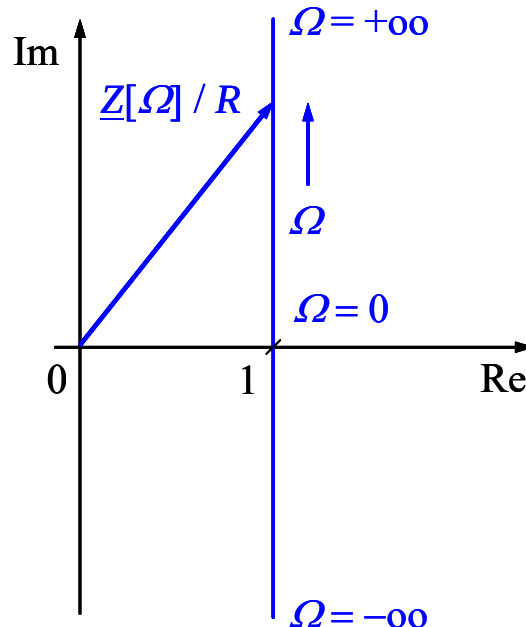


Bild 3.3.2.1-3 Ortskurven der bezogenen Impedanz (links) und Admittanz (rechts) des Reihenschwingkreises

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - VI

Spannungen an den einzelnen Bauelementen. Unter Benutzung dieser Abkürzungen folgen

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_q}{Z_0} \cdot \frac{1}{2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

und damit

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} = \frac{R \cdot \underline{I}}{\underline{U}_q} = 2D \cdot \frac{1}{2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{R}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}'} = \underline{Y}',$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_q} = \frac{j\omega L \cdot \underline{I}}{\underline{U}_q} = j \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{1}{2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

und

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_q} = \frac{\underline{I} / (j\omega C)}{\underline{U}_q} = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1}{2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Der Reihenschwingkreis nach Bild 3.3.2.1-1 a ist ein *lineares System*. Die Spannungen \underline{U}_R , \underline{U}_L und \underline{U}_C besitzen deshalb die Kreisfrequenz ω der Anregung, aber - abhängig von der Anregungsfrequenz - andere Amplituden und Phasenwinkel.

Bei der Anregungsfrequenz $\omega = \omega_0$ erreicht der gemeinsame Nennerterm $2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ sein Betragsminimum mit dem Wert $2D = 1/Q$.

Die Effektivwerte der Spannungen \underline{U}_L und \underline{U}_C betragen deshalb bei ω_0 das Q -fache des Quellenspannungseffektivwertes

$$U_L[\omega = \omega_0] = U_C[\omega = \omega_0] = Q \cdot U_q.$$

Wie die Bilder 3.3.2.1-4 bis -7 zeigen, sind dies nicht die Maximalwerte dieser Spannungen.

Für kleine Werte des Dämpfungsmaßes D weisen alle drei Spannungen ausgeprägte Maxima auf; für größere Dämpfungen verlaufen die Kurven flacher.

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - VII

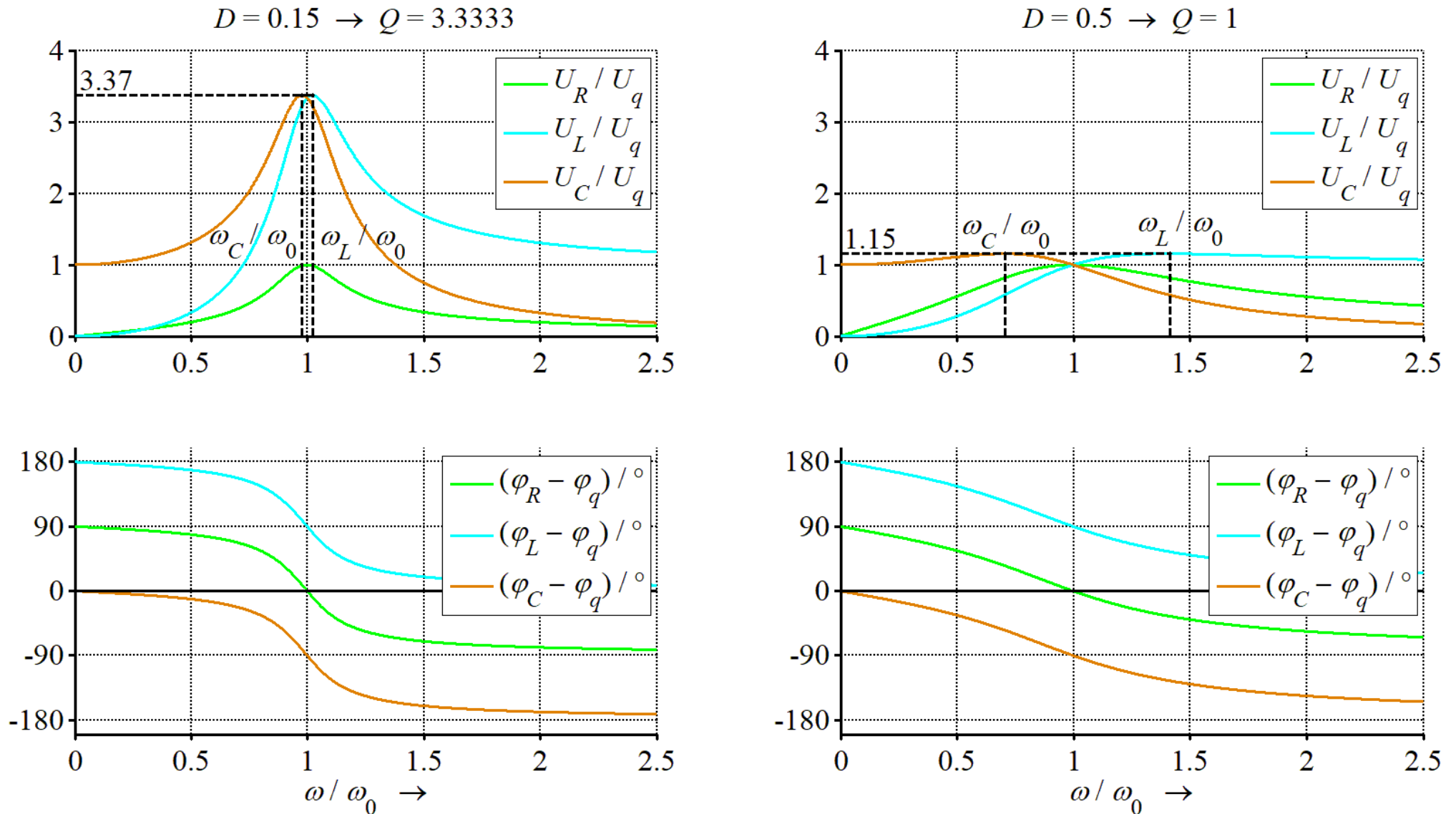


Bild 3.3.2.1-4 Spannungen am spannungsgespeisten Reihenschwingkreis für verschiedene Werte der Dämpfung

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - VIII

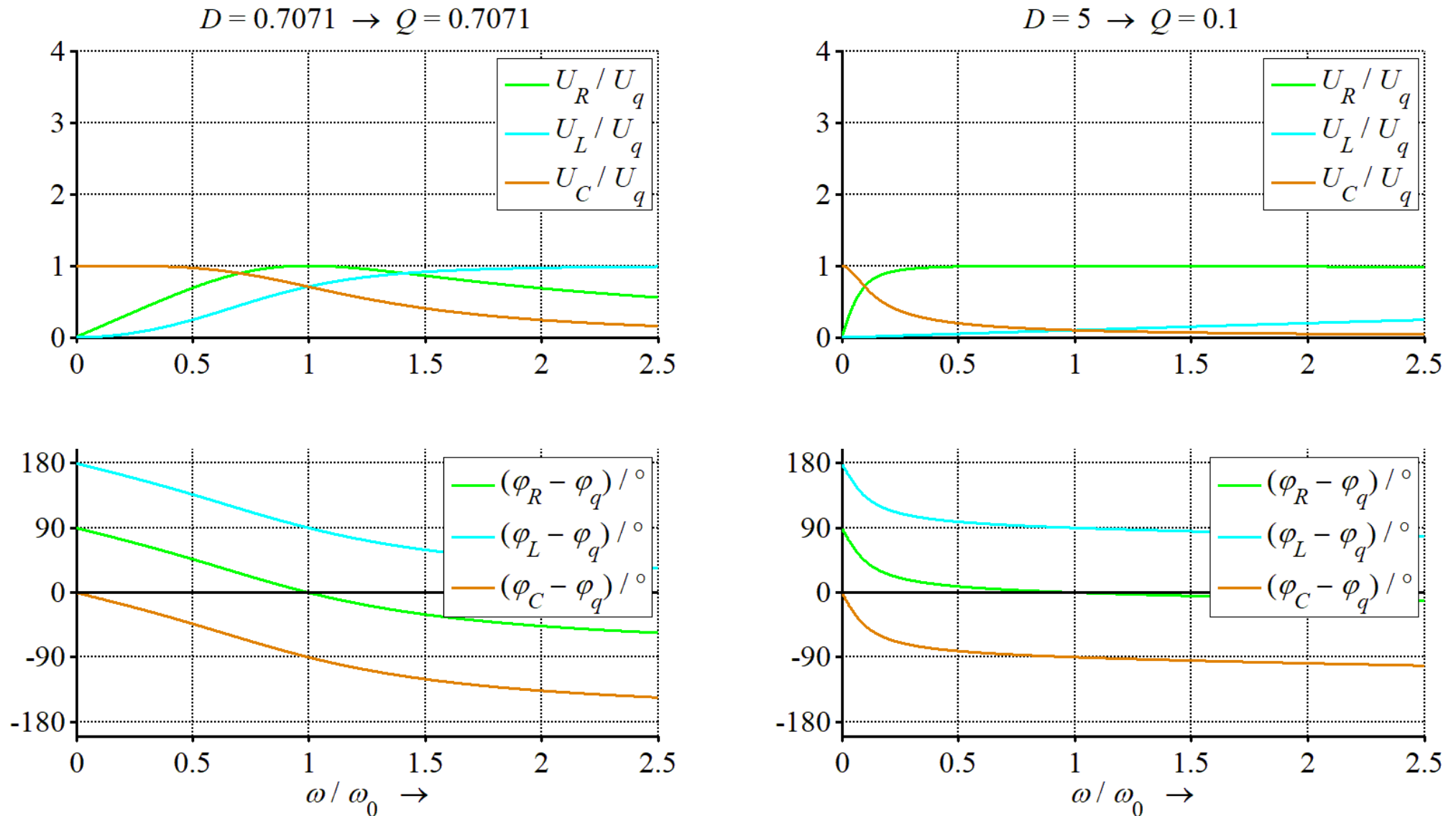


Bild 3.3.2.1-5 Spannungen am spannungsgespeisten Reihenschwingkreis für verschiedene Werte der Dämpfung

Eigenfrequenz: Frequenz der freien Schwingungen (für i , u_c , u_L und u_R gleich)

Nullfrequenz: Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises
($R=0 \Rightarrow D=0$)

Kompensationsfrequenz: $\operatorname{Im}[Z]=0$

Resonanzfrequenzen: Frequenzen bei denen $U_L[\omega]/U_d$, $U_C[\omega]/U_d$ oder $U_R[\omega]/U_d$ maximal werden

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - IX

Resonanz. Die Maxima der Betragsfrequenzgänge werden als Resonanzen bezeichnet. Bei welcher Kreisfrequenz eine Resonanz(überhöhung) auftritt und wie groß deren Maximalwert ist, hängt davon ab, welche Ausgangsgröße man betrachtet. Die Maxima der Beträge treten für $0 < D < 1/\sqrt{2}$ bei den **Resonanzkreisfrequenzen**

$$\omega_R = \omega_0, \quad \omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2D^2}} \quad \text{und} \\ \omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2D^2}$$

auf.

Für kleine Dämpfungen liegen alle diese Kreisfrequenzen in der Nähe von ω_0 , so dass in diesem Fall die Bestimmung von ω_0 als Ersatzkriterium für Resonanz dienen kann.

Um Resonanzerscheinungen zu vermeiden, muss deshalb eine Anregungskreisfrequenz gewählt werden, die nicht in der Nähe von ω_0 liegt.

Aus den Bildern 3.3.2.1-4 bis- 7 erkennt man, dass

$$\max \left[\left| \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} \right| \right] = \left| \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} \right|_{\omega=\omega_0} = 1$$

gilt.

Die Maxima von $\left| \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_q} \right|$ und $\left| \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_q} \right|$ besitzen die gleiche Höhe, die sich zu

$$\max \left[\left| \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_q} \right| \right] = \left| \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_q} \right|_{\omega=\omega_0 \cdot \sqrt{1-2D^2}} = \dots = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$$

berechnen lässt.

Für $D \geq 1/\sqrt{2}$ besitzen die Betragsfrequenzgänge keine lokalen Extrema.

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - X

Wie kann das **LEHRsche Dämpfungsmaß** aus dem **Betrags(frequenz)gang** U_R / U_q bestimmt werden?

Die Kurve durchläuft bei den beiden Kreisfrequenzen

$$\omega_{gu} = \omega_0 \cdot (\sqrt{1 + D^2} - D), \omega_{go} = \omega_0 \cdot (\sqrt{1 + D^2} + D)$$

jeweils den Wert

$$\frac{U_R[\omega = \omega_{gu} = \omega_{go}]}{U_q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707.$$

Die Phasenverschiebung zwischen beiden Spannungen beträgt bei diesen Kreisfrequenzen

$$\varphi_R - \varphi_q = \pm 45^\circ.$$

Es gilt

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{gu} \cdot \omega_{go}}.$$

Der Kreisfrequenzabstand dieser beiden Punkte beträgt $\Delta\omega = \omega_{go} - \omega_{gu} = 2D\omega_0$, so dass daraus die Dämpfung berechnet werden kann zu

$$D = \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}.$$

Wegen $20 \cdot \log_{10}[1/\sqrt{2}] \approx -3\text{dB}$ bezeichnet man

$$b_f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{2D\omega_0}{2\pi} = 2Df_0 = d \cdot f_0 = \frac{f_0}{Q}, \quad \{b_f\}_{SI} = \text{Hz}$$

auch als die **(3-dB-)Bandbreite** des Schwingkreises.

Alternativ findet man in einigen Lehrbüchern die Größe **Kreisfrequenz-Bandbreite** durch

$$b_\omega = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} = R \cdot \omega_0^2 C, \quad \{b_\omega\}_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

definiert. Welche Bandbreite gemeint ist, kann oft nur an der Einheit erkannt werden.

Die Verstimmungen an den 45° -Kreisfrequenzen betragen

$$v[\omega = \omega_{gu}] = -2D = \frac{-1}{Q}$$

und

$$v[\omega = \omega_{go}] = 2D = \frac{1}{Q}.$$

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Reihenschwingkreises - XI

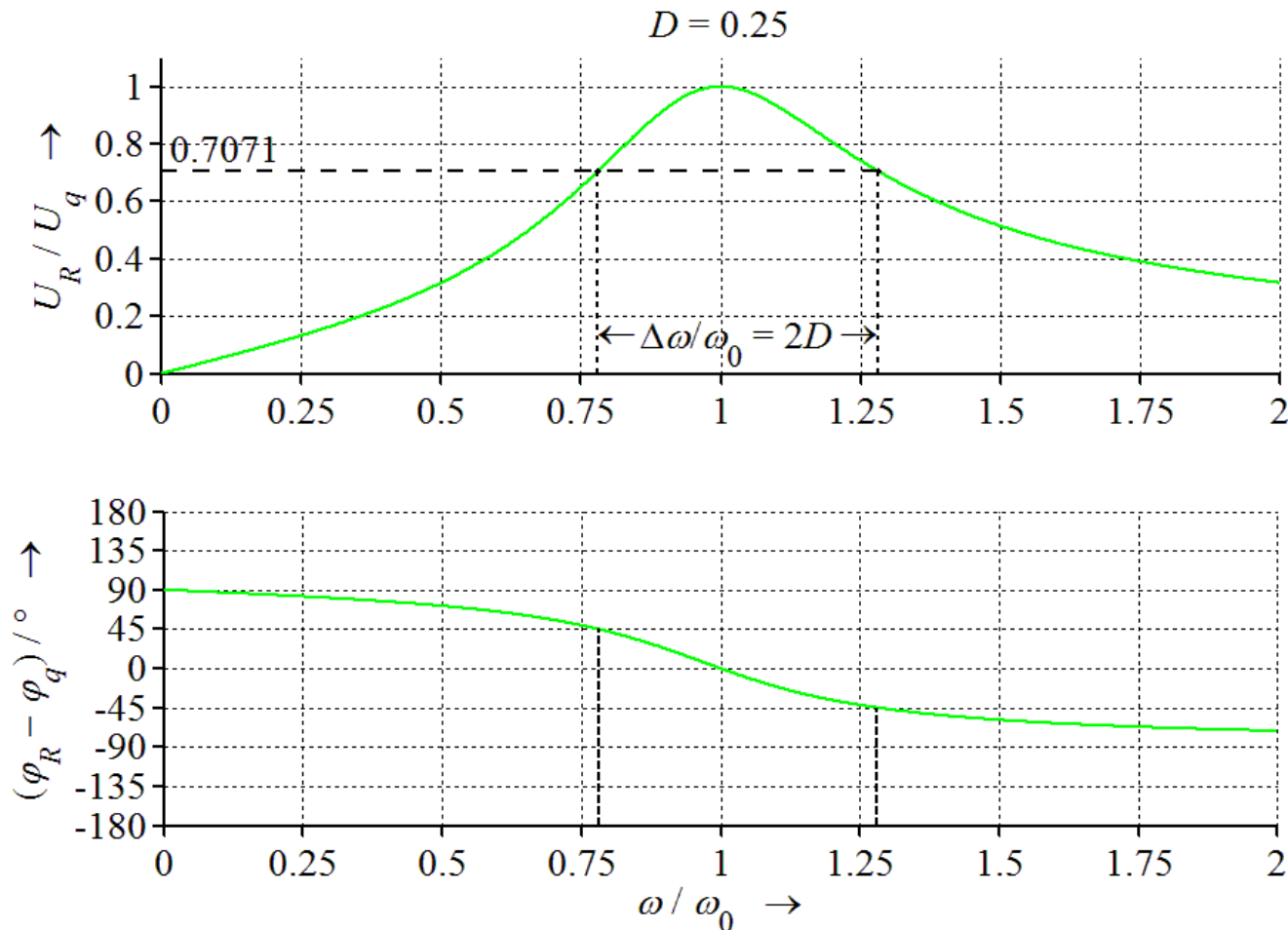


Bild 3.3.2.1-11 Zur Ablesung des LEHRschen Dämpfungsmaßes aus dem Betragsfrequenzgang U_R / U_q

Wegen $\frac{U_R}{U_q} = \frac{R}{Z} = Y'$ kann die Band-

breite in Abhängigkeit von der Dämpfung auch mit Hilfe der in Bild 3.3.2.1-2 rot dargestellten Verläufe bestimmt werden.

Während die Bestimmung aus U_R / U_q eher den messtechnischen Weg der Dämpfungsbestimmung an einem aufgebauten Schwingkreis skizziert, wird Bild 3.3.2.1-2 überwiegend zur rechnerischen Dimensionierung eines Schwingkreises eingesetzt.

Zur (alternativen) Ermittlung der Bandbreite aus den Betragsfrequenzgängen U_L / U_q oder U_C / U_q müssten die Bestimmungsgleichungen angepasst werden.

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten RSK - XII

Regelungstechnische Darstellung. Der hier betrachtete Reihenschwingkreis ist der schwingfähige Sonderfall eines Systems zweiter Ordnung. In der Regelungstechnik wird für solche Systeme eine normierte Darstellung benutzt, die im Zeitbereich

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{2D}{\omega_0} \cdot \frac{dv}{dt} + v = K \cdot u$$

und im Bildbereich

$$G[s] = \frac{V[s]}{U[s]} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot s + 1}$$

lautet. Dabei sind u und v die Ein- bzw. Ausgangsgrößen.

Wählt man beim spannungsgespeisten Reihenschwingkreis die Ladung q oder die Kondensatorspannung $u_C = \frac{q}{C}$ als Zustands- gleich Ausgangsgröße, so erhält man qualitativ die gleiche Übertragungsfunktion

$$\frac{U_C}{U_q} = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1}{2D + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot (j\omega) + 1}.$$

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten RSK - XIII

Bei $\left(\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2D^2}\right) < \omega_0$ tritt das Maximum des Betragsfrequenzgangs auf.

Für Kreisfrequenzen größer $\omega \gg \omega_0$ lässt sich der Betragsfrequenzgang näherungsweise als

$$\left| \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}_q} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (j\omega)^2 + \frac{2D}{\omega_0} \cdot (j\omega) + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (j\omega)^2 + 1\right)^2 + \left(\frac{2D}{\omega_0} \cdot (j\omega)\right)^2}} \stackrel{\omega \gg \omega_0}{\approx} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

schreiben.

ω_0 ist die Eckfrequenz im BODE-Diagramm, in welcher sich die Asymptoten an den Betragsfrequenzgang schneiden (s. Bild 3.3.2.1-12).

Die Verringerung des Betrags beträgt für $\omega \gg \omega_0$ 40 dB pro Frequenzdekade, was dem Faktor 100 entspricht. Dies kennzeichnet einen Tiefpass 2. Ordnung.

3.3.2.1 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten RSK - XIV

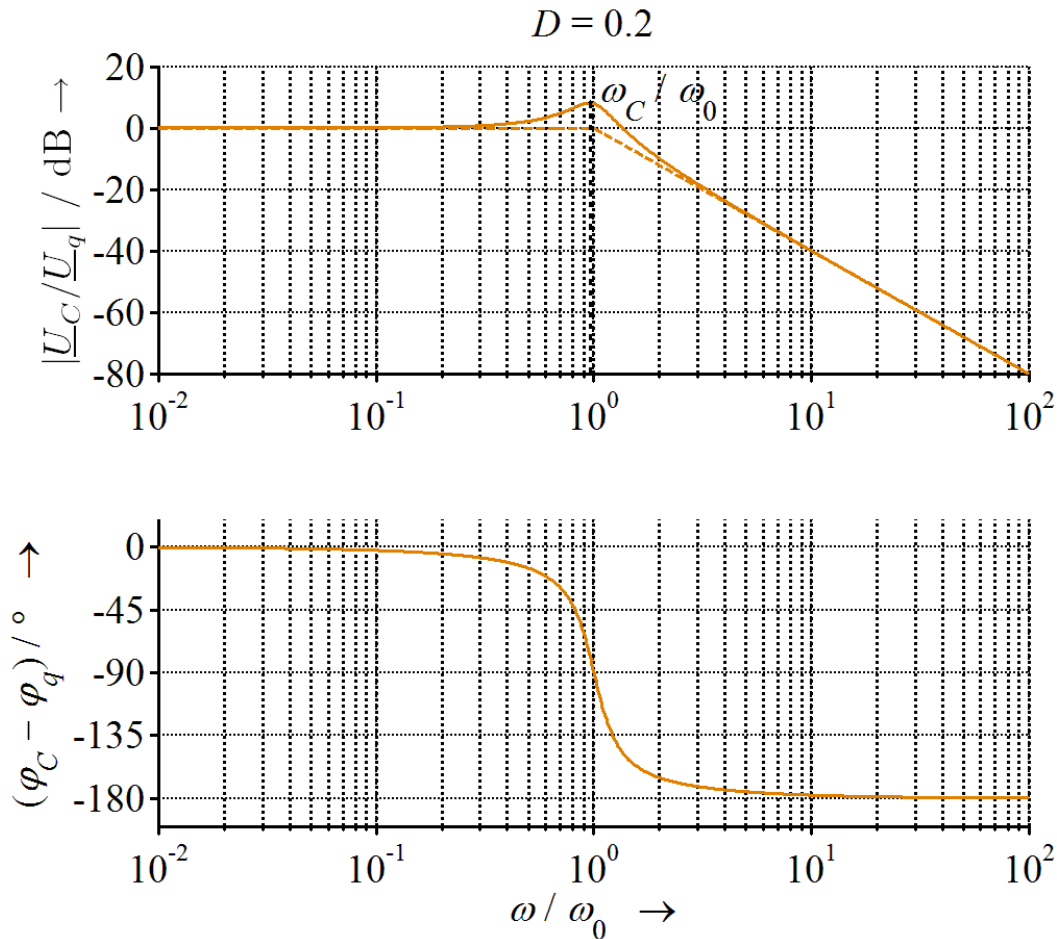


Bild 3.3.2.1-12: BODE-Diagramm

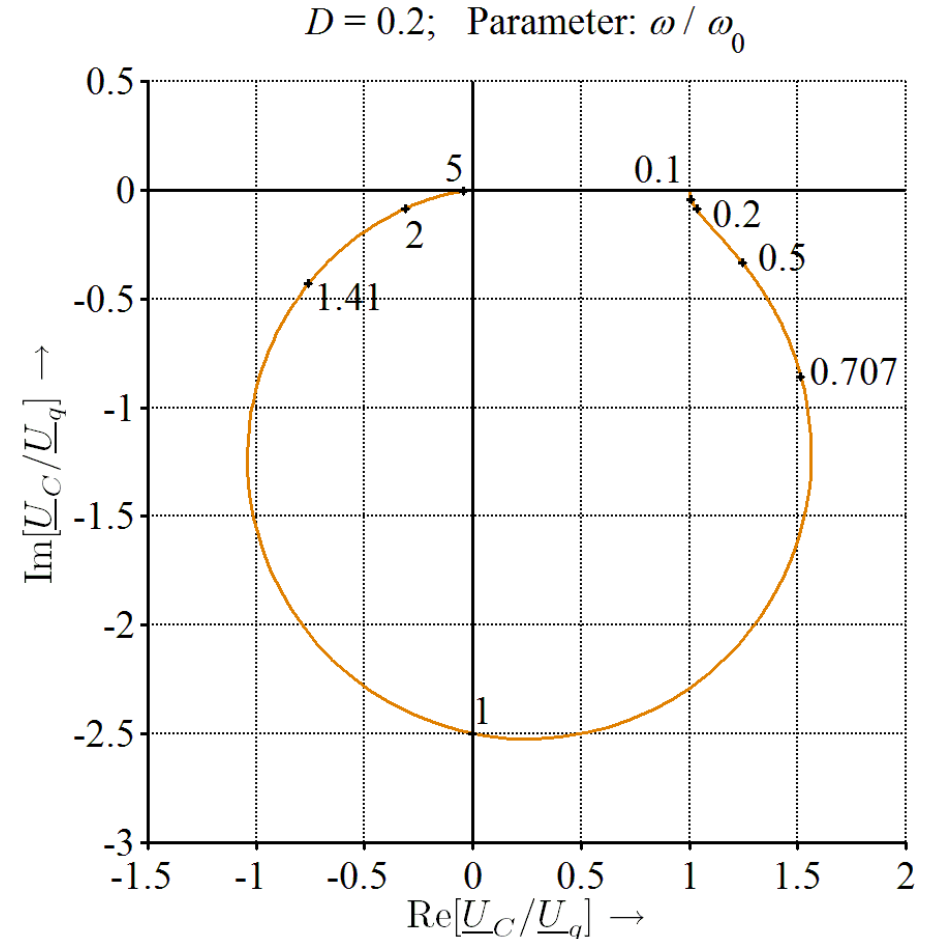


Bild 3.3.2.1-13: Ortskurve

der komplexen Übertragungsfunktion eines Reihenschwingkreises in Abhängigkeit vom Parameter ω / ω_0



3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 **Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises**

3.3.2.1 Spannungsgespeicher Reihenschwingkreis

3.3.2.2 **Stromgespeicher Reihenschwingkreis**

3.3.3 Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises

3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.2.2 Erzwungene Schwingungen eines stromgespeisten Reihenschwingkreises - I

Im stationären Zustand mit harmonischer Anregung der Kreisfrequenz ω

$$i_q[t] = \sqrt{2}I_q \cdot \cos[\omega t + \varphi_q]$$

kann auf die komplexe Wechselstromrechnung übergegangen werden.

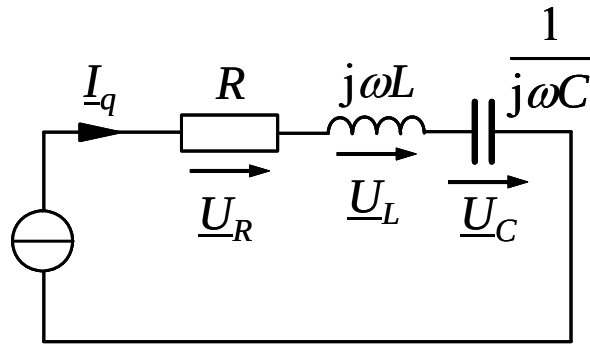


Bild 3.3.2.2-1: Stromgespeicher Reihenschwingkreis

Aus den bezogenen Spannungen an den Bauelementen

$$\frac{\underline{U}_R}{R \cdot \underline{I}_q} = 1,$$

$$\frac{\underline{U}_L}{R \cdot \underline{I}_q} = \frac{j\omega L}{R} = j \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$

und

$$\frac{\underline{U}_C}{R \cdot \underline{I}_q} = -j \cdot \frac{1}{\omega RC} = -j \cdot \frac{1}{2D} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-1}$$

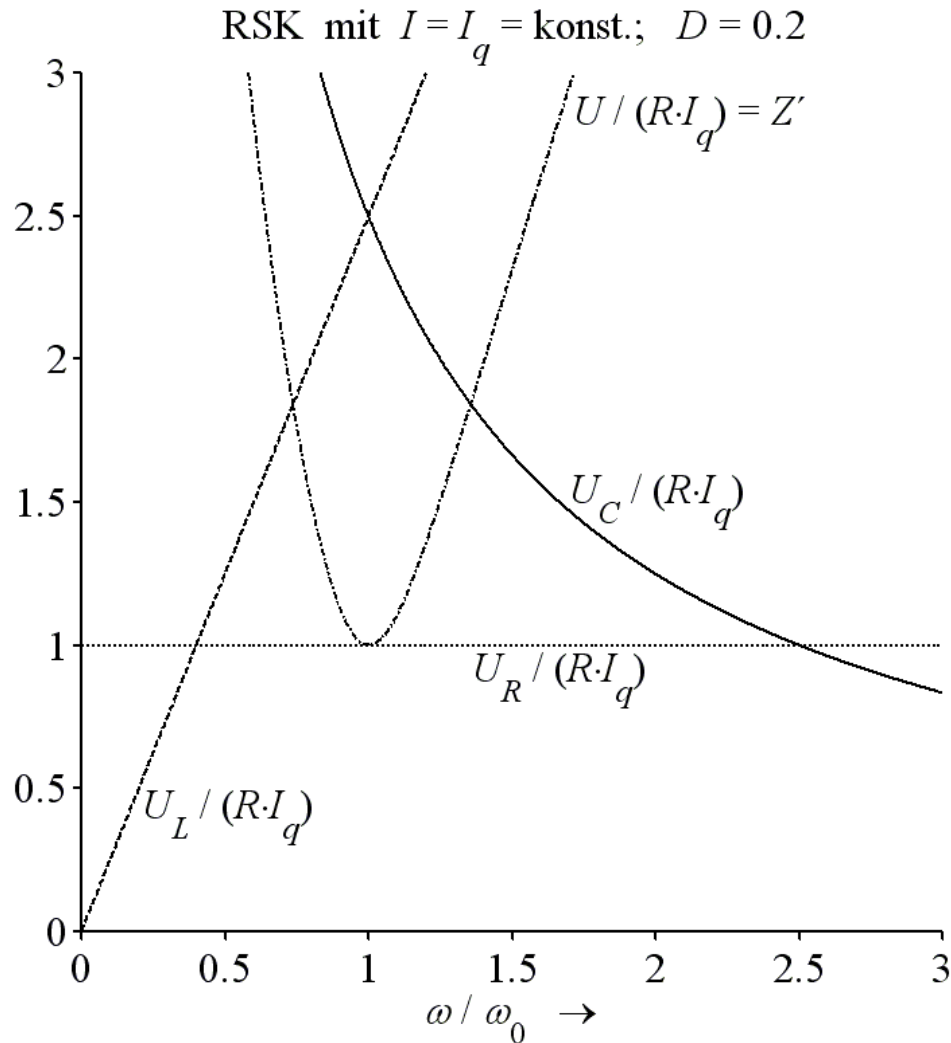
erhält man die bezogene Gesamtspannung zu

$$\frac{\underline{U}}{R \cdot \underline{I}_q} = \frac{\underline{U}_R}{R \cdot \underline{I}_q} + \frac{\underline{U}_L}{R \cdot \underline{I}_q} + \frac{\underline{U}_C}{R \cdot \underline{I}_q} = \frac{\underline{Z}}{R} = \underline{Z}'.$$

Letztere verhält sich in Abhängigkeit von der Frequenz und der Dämpfung qualitativ wie in Bild 3.3.2.1-2 dargestellt.

An eingprägtem Strom verhält sich der Reihenschwingkreis wie eine *Bandsperre* (für die Spannung).

3.3.2.2 Erzwungene Schwingungen eines stromgespeisten Reihenschwingkreises - II



Die Größen

- Kennkreisfrequenz,
- Dämpfung,
- Güte,
- Schwingwiderstand und
- Bandbreite

sind unabhängig von der Art der Speisung.

(Wäre die Bandbreite nicht mit Hilfe der Übertragungsfunktion der Spannung am Widerstand sondern aus dem

Verlauf der bezogenen Admittanz $\left| \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_q} \right| = \frac{R}{Z} = \frac{1}{Z'} = Y'$

hergeleitet worden, so wäre dies unmittelbar einsichtig.)

Bild 3.3.2.2-2: Spannungen am stromgespeisten Reihenschwingkreis mit $D = 0,2$

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.3 **Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises**

3.3.3.1 **Stromgespeicher Parallelschwingkreis**

3.3.3.2 Spannungsgespeicher Parallelschwingkreis

3.3.3.3 Stromgespeicher Parallelschwingkreis mit verlustbehafteter Induktivität

3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.3.1 Erzwungene Schwingungen eines stromgespeisten Parallelschwingkreises

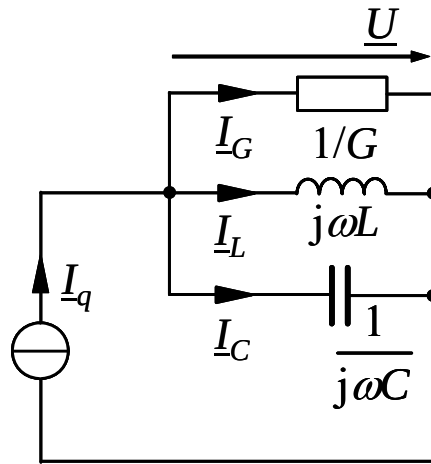


Bild 3.3.3.1-1: Stromgespeicher Parallelschwingkreis

Spannungsgespeicher Reihen- und stromgespeicher Parallelschwingkreis zeigen duales Verhalten.

Im Rahmen von **Übungsaufgabe S120** werden die wichtigsten Beziehungen für den Parallelschwingkreis deshalb unter Anwendung des Dualitätsprinzips hergeleitet.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.3 **Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises**

3.3.3.1 Stromgespeicher Parallelschwingkreis

3.3.3.2 Spannungsgespeicher Parallelschwingkreis

3.3.3.3 Stromgespeicher Parallelschwingkreis mit verlustbehafteter Induktivität

3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Parallelschwingkreises - I

Im stationären Zustand mit einrequent harmonischer Anregung der Kreisfrequenz ω

$$u_q[t] = \sqrt{2}U_q \cdot \cos[\omega t + \varphi_q]$$

kann auf die komplexe Wechselstromrechnung übergegangen werden.

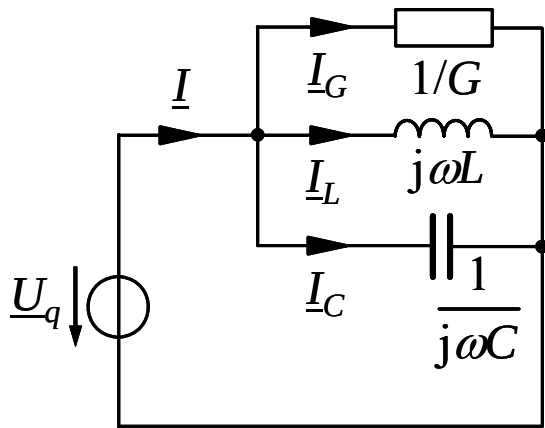


Bild 3.3.3.2-1: Spannungsgespeicher Parallelschwingkreis

Aus den bezogenen Strömen durch die Bauelemente

$$\frac{\underline{I}_G}{G \cdot \underline{U}_q} = 1,$$

$$\frac{\underline{I}_L}{G \cdot \underline{U}_q} = \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{j\omega L} = -j \cdot \frac{1}{2D} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-1}$$

und

$$\frac{\underline{I}_C}{G \cdot \underline{U}_q} = \frac{j\omega C}{G} = j \cdot \frac{1}{2D} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$

erhält man den bezogenen Gesamtstrom zu

$$\frac{\underline{I}}{G \cdot \underline{U}_q} = \frac{\underline{I}_G}{G \cdot \underline{U}_q} + \frac{\underline{I}_L}{G \cdot \underline{U}_q} + \frac{\underline{I}_C}{G \cdot \underline{U}_q} = \underline{Y}'.$$

Der Gesamtstrom verhält sich in Abhängigkeit von der Frequenz und der Dämpfung qualitativ wie die bezogene Admittanz. Letztere kann allerdings *nicht* aus Bild 3.3.2.1-2 abgelesen werden.

3.3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines spannungsgespeisten Parallelschwingkreises - II

Für den Parallelschwingkreis gilt nämlich

$$\underline{Y} = G + j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$
$$= G \cdot \underbrace{\left(1 + j \cdot \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{2D} \right)}_{\underline{Y}'} = G \cdot \underline{Y}'$$

d. h. seine bezogene Admittanz \underline{Y}' verhält sich in Abhängigkeit von der Dämpfung wie die bezogene Impedanz des Reihenschwingkreises \underline{Z}' (in Bild 3.3.2.1-2).

An eingepprägter Spannung verhält sich der Parallelschwingkreis wie eine *Bandsperr*.

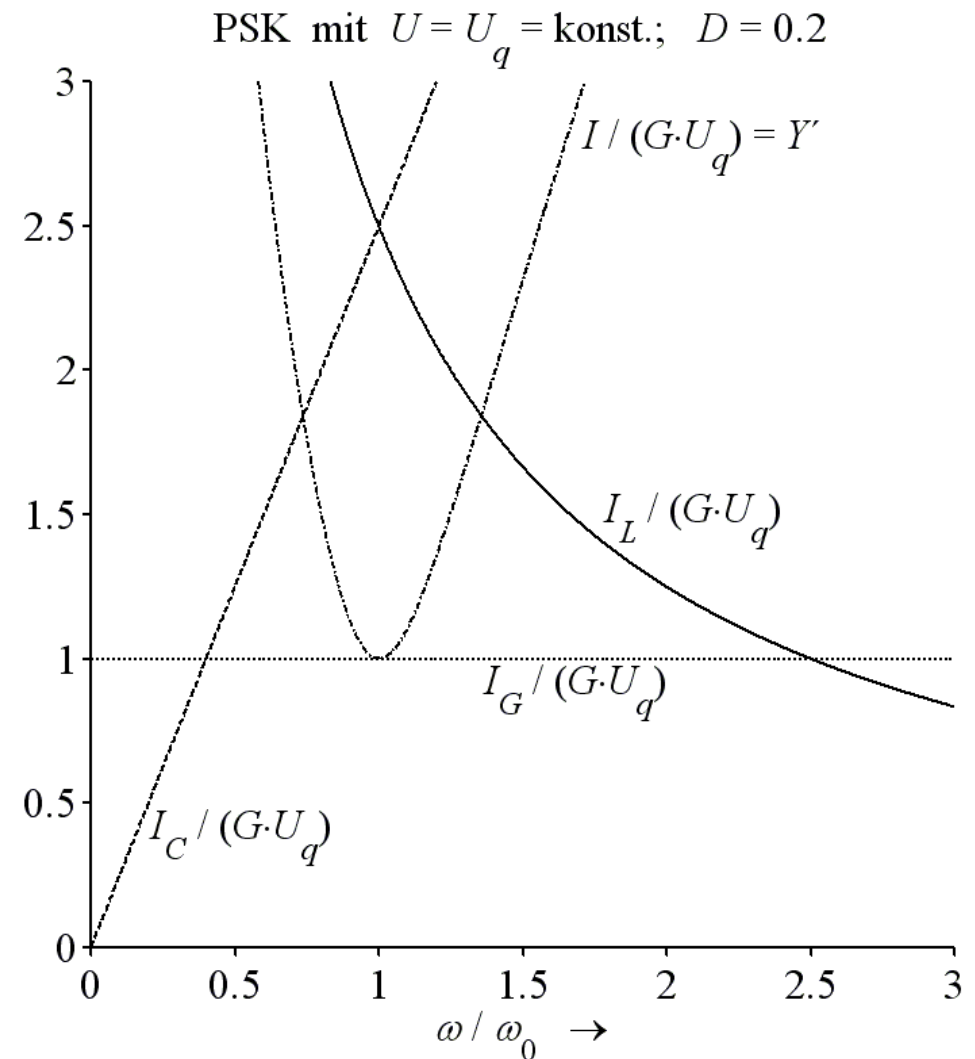


Bild 3.3.3.2-2: Ströme am spannungsgespeisten Parallelschwingkreis für $D = 0,2$

Zusammenfassung: *Reine* Reihen- und Parallelschwingkreise

Fasst man die Ergebnisse aus Vorlesung und Übung zusammen, so gilt

Tabelle 3.3.3.2-1 Eigenschaften von reinen (oder elementaren) Schwingkreisen

	Reiner Reihenschwingkreis	Reiner Parallelschwingkreis
Bei Kennkreisfrequenz ω_0	wird Impedanz minimal	wird Admittanz minimal
An ^{ideale Quelle} eingprägter Spannung	Bandpass $\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}} \cdot \underline{U}_q \sim \frac{1}{\underline{Z}}$	Bandsperre $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}_q \sim \underline{Y}$
An eingprägtem Strom	Bandsperre $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_q \sim \underline{Z}$	Bandpass $\underline{U} = \frac{1}{\underline{Y}} \cdot \underline{I}_q \sim \frac{1}{\underline{Y}}$

Will man z. B. einen Filter mittels eines Schwingkreises realisieren, so hängt es von der Anforderung (Bandpass oder – sperre) und der Schaltungsumgebung (Eigenschaften von Quellen- und Zielgröße) ab, welche Schaltung man wählt.

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 **Schwingkreise**

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.3 **Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises**

3.3.3.1 Stromgespeicher Parallelschwingkreis

3.3.3.2 Spannungsgespeicher Parallelschwingkreis

3.3.3.3 **Stromgespeicher Parallelschwingkreis mit verlustbehafteter Induktivität**

3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.3.3 Erzw. Schw. eines stromgesp. PSK mit verlustbehafteter Induktivität

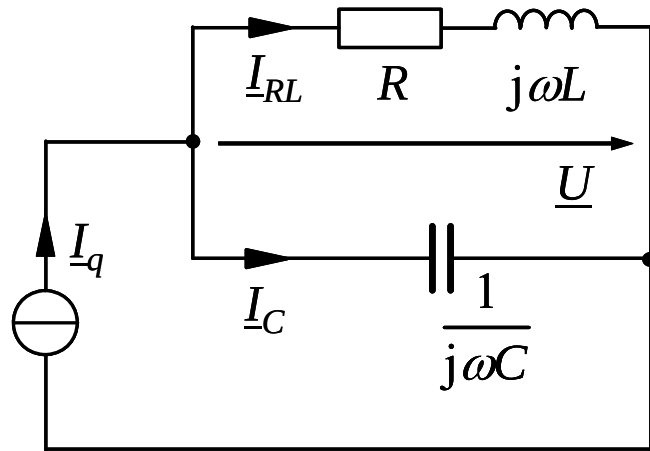


Bild 3.3.3.3-1: Stromgespeicher Parallelschwingkreis

Mit den vom Reihenschwingkreis her bekannten Abkürzungen Kennkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und Dämpfung

$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ erhält man die in Bild 3.3.3.3-2 dargestellten Verläufe.

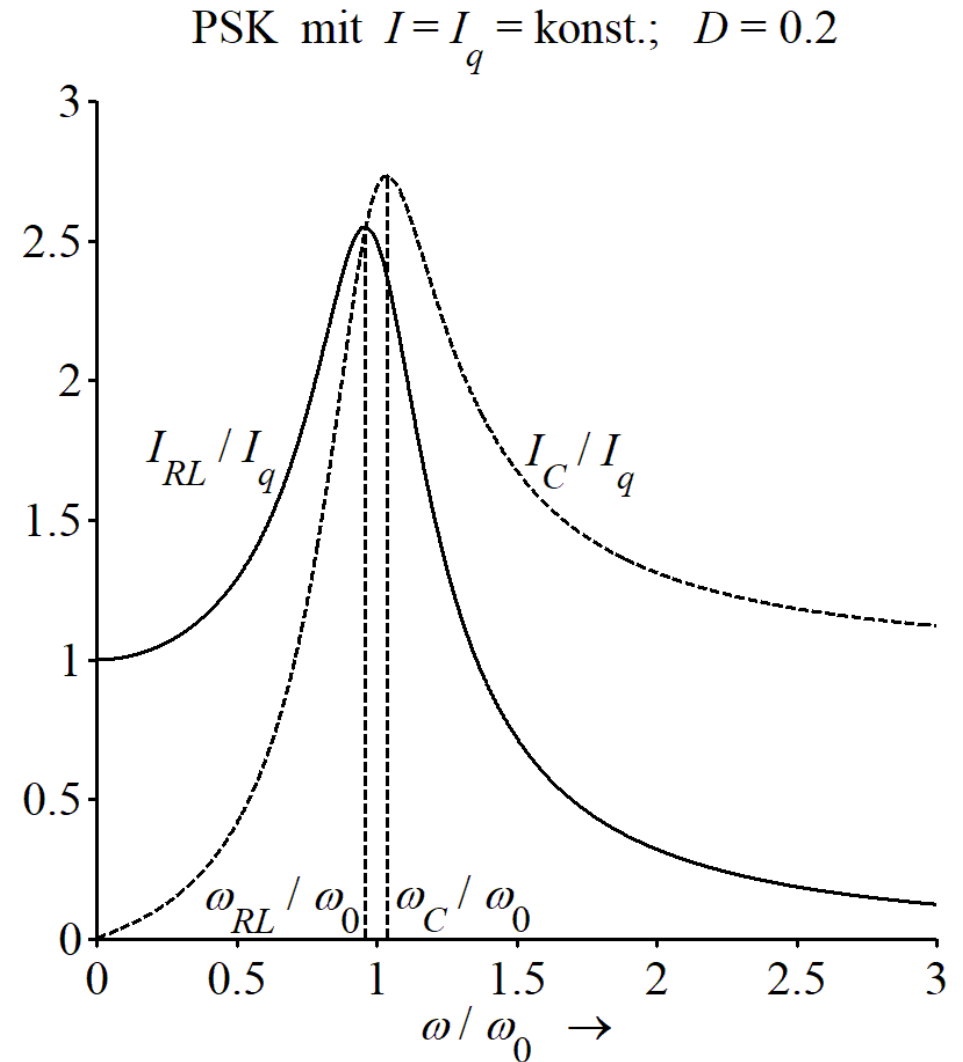


Bild 3.3.3.3-2: Ströme am stromgespeisten Parallelschwingkreis nach Bild 3.3.3.3-1 für $D = 0,2$

3 Wechselstrom-Anwendungen

3.1 Amplituden- und Phasenwinkel-Diagramme

3.2 Äquivalente und duale Netzwerke

3.3 Schwingkreise

3.3.1 Freie Schwingungen eines Reihenschwingkreises

3.3.2 Erzwungene Schwingungen eines Reihenschwingkreises

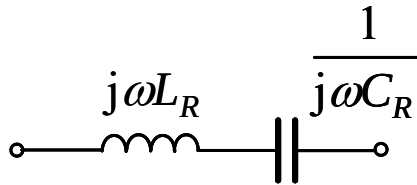
3.3.3 Erzwungene Schwingungen eines Parallelschwingkreises

3.3.4 Reaktanzzweipole

3.3.4 Reaktanzzweipole - I

Reaktanzzweipole sind Zusammenschaltungen reiner Induktivitäten mit reinen Kapazitäten. Man kann sie auch als ungedämpfte Schwingkreise bezeichnen. Ihre Grundformen sind

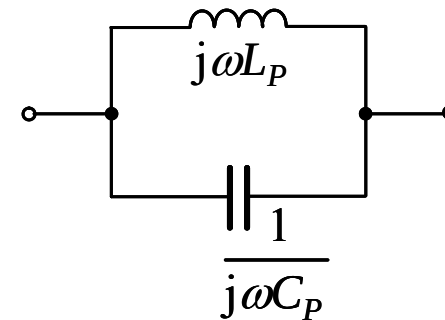
Reihenschaltung



$$\begin{aligned}\underline{Z}_R &= j \cdot X_R = j \cdot \left(\omega L_R - \frac{1}{\omega C_R} \right) = j \cdot \omega L_R \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_R C_R} \right) \\ &= j \cdot \omega L_R \cdot \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = j \cdot \omega L_R \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\ &= j \cdot \omega_0 L_R \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = j \cdot Z_{R,0} \cdot v\end{aligned}$$

$$X_R \left[\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_R C_R}} \right] = 0 \quad (\text{Kurzschluss})$$

Parallelschaltung



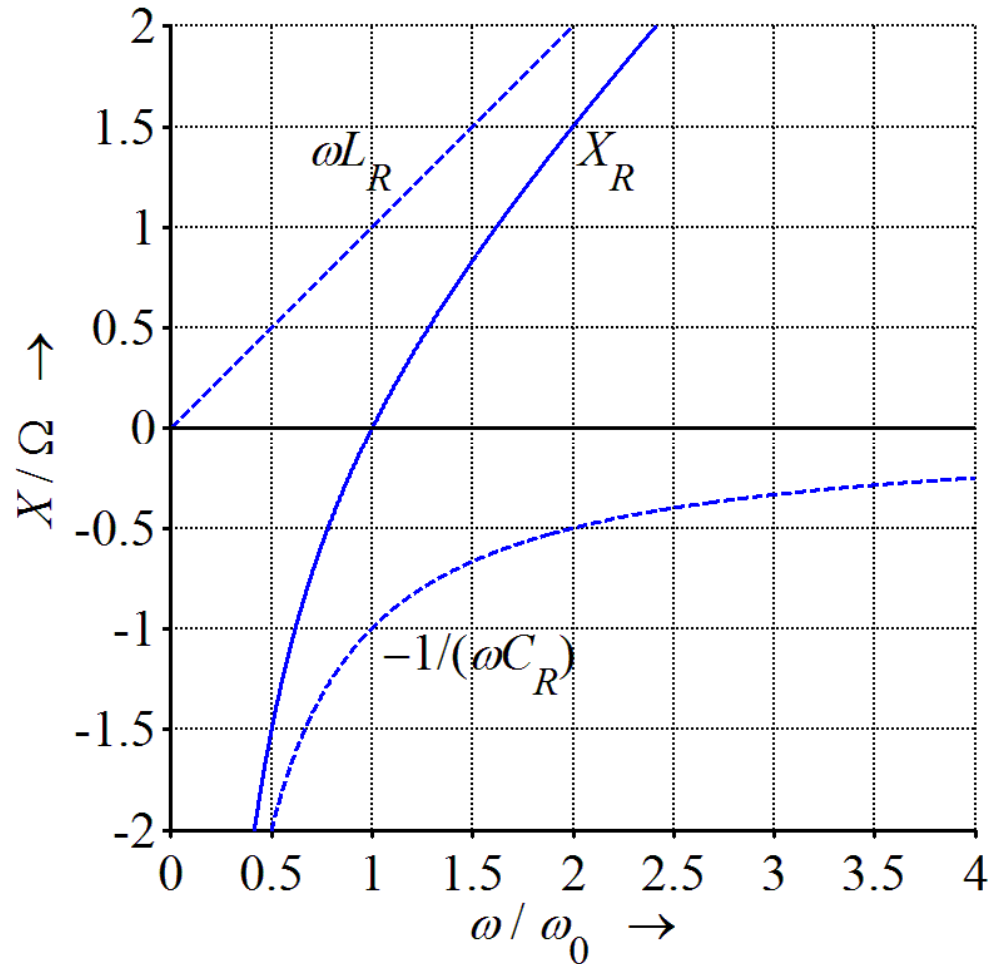
$$\begin{aligned}\underline{Y}_P &= j \cdot B_P = j \cdot \left(\omega C_P - \frac{1}{\omega L_P} \right) \\ &= j \cdot Y_{P,0} \cdot v\end{aligned}$$

$$B_P \left[\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_P C_P}} \right] = 0 \quad (\text{Leerlauf})$$

3.3.4 Reaktanzzweipole - II

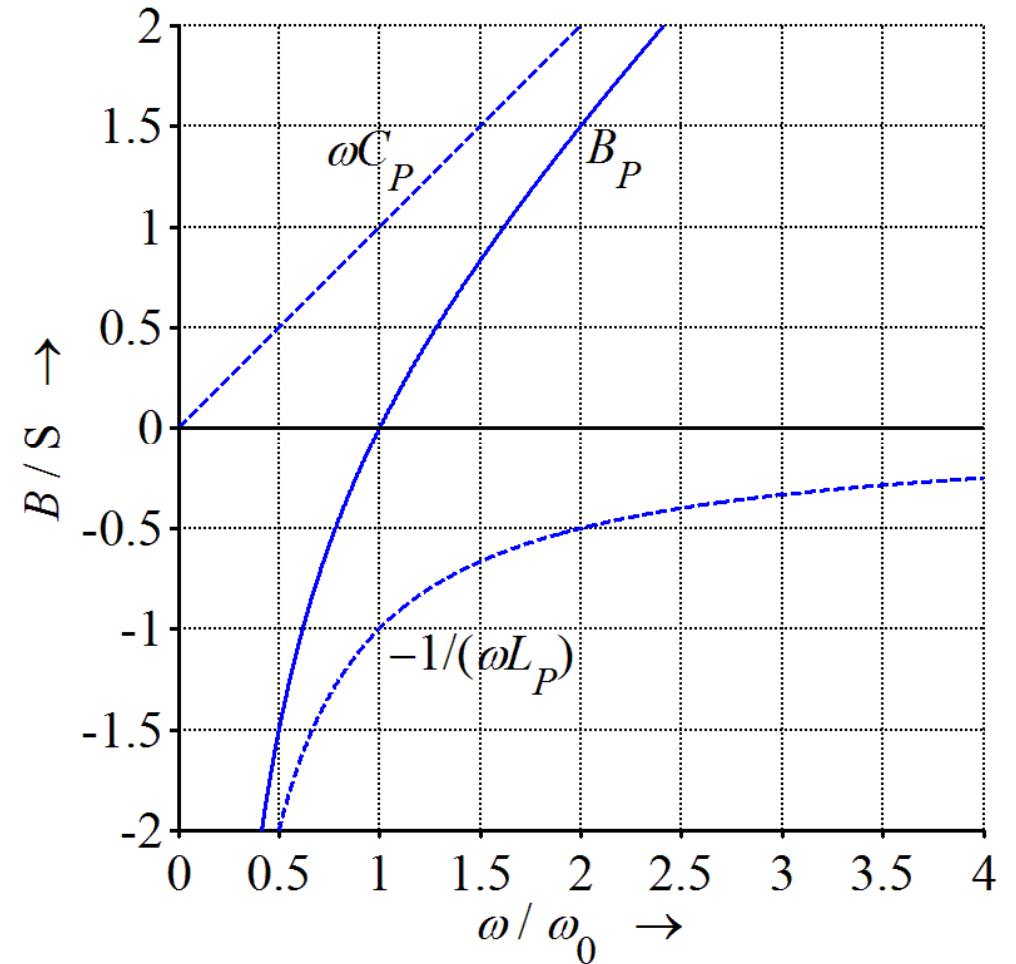
Reihenschaltung

$$L_R = 1 \text{ H}, \quad C_R = 1 \text{ F}$$



Parallelschaltung

$$L_P = 1 \text{ H}, \quad C_P = 1 \text{ F}$$



3.3.4 Reaktanzzweipole - III

Für Reaktanzzweipole gilt nach FOSTER:

1. Bei $\omega = 0$ nehmen $X[\omega]$ und $B[\omega]$ die Werte 0 oder $-\infty$ an.
2. Die Differentialquotienten (= Steigungen) $\frac{dX}{d\omega}$ und $\frac{dB}{d\omega}$ sind immer positiv.
3. $X[\omega]$ und $B[\omega]$ durchlaufen abwechselnd Nullstellen und Pole.
4. Für *kanonische* Schaltungen gilt: Die Gesamtzahl der Nullstellen und Pole (inklusive der Nullstellen oder Pole bei $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$) ist stets um 1 größer als die Anzahl der Schaltelemente des Zweipols. (Kanonisch werden Schaltungen genannt, bei denen das Frequenzverhalten durch eine Mindestanzahl von Schaltelementen realisiert wurde. Dabei werden z. B. zwei in Reihe geschaltete Spulen zu einer zusammengefasst.)
5. Für $\omega \rightarrow \infty$ nehmen $X[\omega]$ und $B[\omega]$ die Werte 0 oder $+\infty$ an.
6. Durch die Lage der Nullstellen und Pole sind $X[\omega]$ und $B[\omega]$ jeweils bis auf eine Konstante bestimmt.

Weitere Betrachtungen erfolgen im Rahmen einer **Übungsaufgabe**.

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

Tabelle 4-1 Übersicht über Vorgänge in Netzwerken und Berechnungsverfahren

		stationär			instationär
linear	Quellen	zeitlich konstant	(einfrequent) harmonisch	(mehrfrequent) periodisch	zeitlich beliebig inkl. Sprünge
	Lasten	OHMsche Widerstände	ideale R , L und C	ideale R , L und C	ideale R , L und C
	Berechnung	OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze	OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze, komplexe Wechselstromrechnung	Spektrallinienweise Anwendung von OHMschem Gesetz, KIRCHHOFFschen Sätzen, Überlagerungssatz	OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze, lineare Differentialgleichungen
nichtlinear	Quellen	zeitlich konstant	(einfrequent) harmonisch		zeitlich beliebig inkl. Sprünge
	Lasten	nichtlineare Widerstände	nichtlineare Widerstände, stromabhängige Induktivitäten		nichtlineare Widerstände, stromabhängige Induktivitäten, Dioden, Schalter
	Berechnung	OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze	OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze (s. Abschnitt 4.1)		OHMsches Gesetz, KIRCHHOFFsche Sätze, nichtlineare Differentialgleichungen

pink = 1. Sem.

gelb = 2. Sem.

grün = 4. Sem.



4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse

4.3 Spektrumanalysator

4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen

4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.1 Einführendes Beispiel - I

Im Kapitel 2 „Wechselstrom“ wurde die Induktivität einer langen schlanken Spule ohne Herleitung mit

$$L = N^2 \cdot \mu_0 \mu_r \cdot \frac{A}{\ell}$$

angegeben. Besitzt die Spule einen Eisenkern, so ist die relative Permeabilität $\mu_{rFe}[B]$ des Kernmaterials vom Magnetfeld B in diesem Kernmaterial abhängig und letzteres wiederum hängt vom Strom i durch die Wicklung der Spule ab.

In der nachstehend abgebildeten stromgespeisten RL-Reihenschaltung besitzt die Spule mit Eisenkern deshalb eine stromabhängige Induktivität.

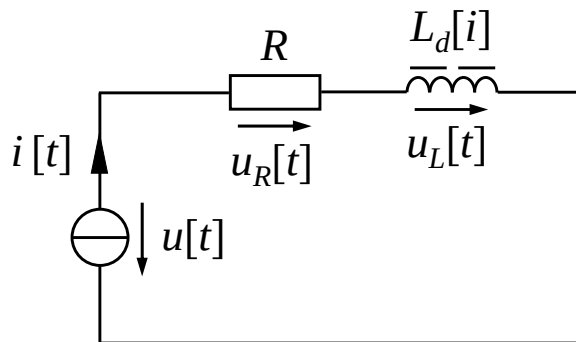


Bild 4.1-1 a: Beispielschaltung

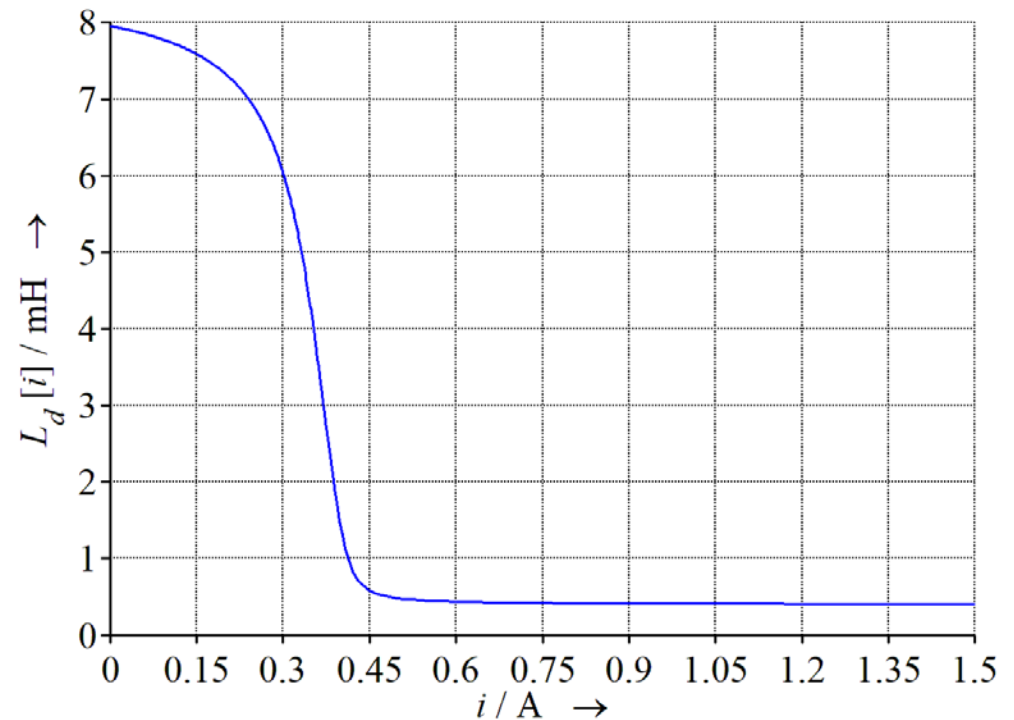


Bild 4.1-1 b: Differenzielle Induktivität $L_d[i]$ der Spule mit Eisenkern (ohne Hysterese)

4.1 Einführendes Beispiel - II

Die Beispielschaltung wird aus der Stromquelle

$$i[t] = \hat{i} \cdot \cos[\omega_1 t]$$

gespeist. Die Spannungsabfälle an Widerstand und Induktivität betragen

$$u_R[t] = R \cdot i[t] = R \cdot \hat{i} \cdot \cos[\omega_1 t]$$

bzw.

$$u_L[t] = L_d[i] \cdot \frac{di[t]}{dt} = -\omega_1 L_d[i] \cdot \hat{i} \cdot \sin[\omega_1 t].$$

In Bild 4.1-2 sind diese Zeitfunktionen sowie die Summenspannung

$$u[t] = u_R[t] + u_L[t]$$

für konkrete Zahlenwerte dargestellt.

Da die Spannung $u_L[t]$ nicht harmonisch ist, sind die Voraussetzungen zur Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung hier nicht gegeben.

Das System ist *nichtlinear*; die Berechnung muss im Zeitbereich erfolgen.

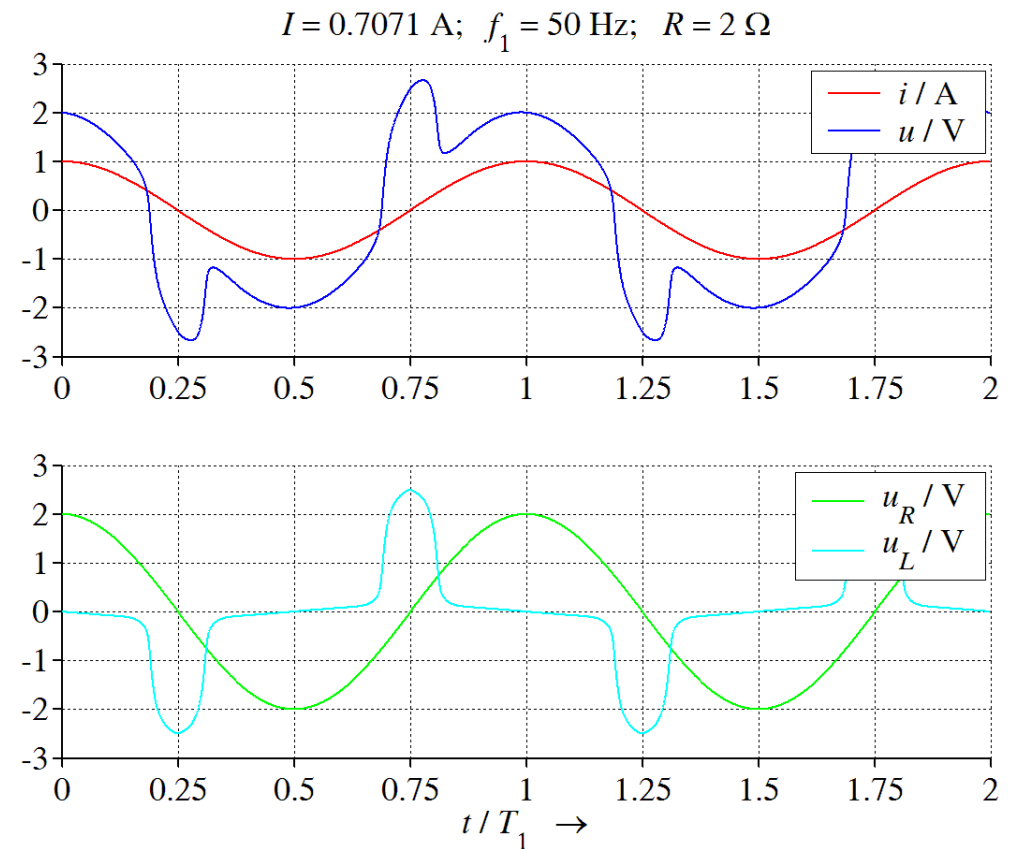


Bild 4.1-2: Zeitverläufe an der Schaltung nach Bild 4.1-1

4.1 Einführendes Beispiel - III

Wir werden uns in den folgenden Abschnitten mit unterschiedlichen Themen beschäftigen:

Abschnitt	Thema
4.2	<ul style="list-style-type: none">● Jede nichtharmonische aber periodische Zeitfunktion lässt sich als Summe harmonischer Zeitfunktionen darstellen.
4.4	<ul style="list-style-type: none">● Wir werden Kenngrößen zur Charakterisierung nichtharmonischer periodischer Zeitfunktionen kennen lernen.
4.5	<ul style="list-style-type: none">● Wir werden die Leistungsdefinitionen auf nichtharmonische periodische Größen ausdehnen.



4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 **FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse**

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten

4.2.2 Komplexwertige FOURIER-Koeffizienten

4.3 Spektrumanalysator

4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen

4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse - I

Jede nichtharmonische aber periodische Zeitfunktion lässt sich als Summe mehrerer harmonischer Zeitfunktionen darstellen. Diese einzelnen und im Allgemeinen beliebig vielen Summanden besitzen unterschiedliche

- Frequenzen,
- Amplituden und
- Phasenverschiebungswinkel.

Stellt man die Spannung $u_L[t]$ des einführenden Beispiels als Summe

$$u_L[t] = \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \cos[n\omega_1 t + \varphi_n]$$

dar, so erhält man für die Ordnungszahlen $n = 0 \dots 19$ die folgende Darstellung des sog. *Spektrums* von $u_L[t]$.

Die Abzisse ist in Vielfache der **Grundschwingungsfrequenz** $f_1 = 50$ Hz eingeteilt. Bei jeder Frequenz $n \cdot f_1$ ist je eine Amplitude \hat{A}_n und ein Phasenverschiebungswinkel φ_n eingezeichnet. φ_0 ist nicht definiert.

\hat{A}_0 heißt **Gleichanteil**, \hat{A}_1 **Grundschwingungsamplitude** und $\hat{A}_{n>1}$ sind die **Oberschwingungsamplituden**.

Die kosinusförmigen Summanden in der o. a. Gleichung nennt man Harmonische.

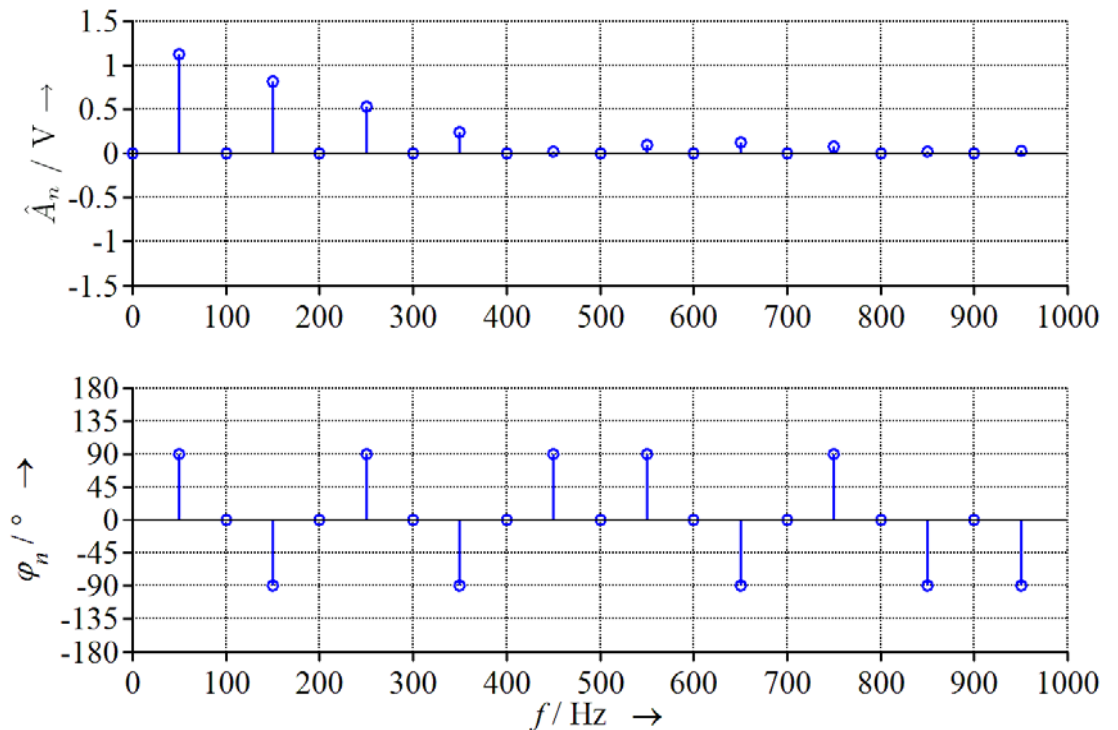


Bild 4.2-1: Niederfrequenteste 20 Spektrallinien der Spannung $u_L[t]$

4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse - II

Tabelle 4.2-1 Zahlenwerte der Amplituden und Phasenverschiebungswinkel der niederfrequentesten 20 Harmonischen

n	$(f_n = n \cdot f_1) / \text{Hz}$	\hat{A}_n / V	$\varphi_n / ^\circ$
0	0	0	nicht definiert
1	50	1,1198	90
2	100	0	0
3	150	0,8111	-90
4	200	0	0
5	250	0,5272	90
6	300	0	0
7	350	0,2372	-90
8	400	0	0
9	450	0,0173	90
10	500	0	0
11	550	0,0994	90
12	600	0	0
13	650	0,1211	-90
14	700	0	0
15	750	0,0811	90
16	800	0	0
17	850	0,0198	-90
18	900	0	0
19	950	0,0302	-90

4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse - III

(In diesem Beispiel weisen alle Harmonischen mit geraden Ordnungszahlen n die Amplitude null auf. Ihre Phasenverschiebungswinkel müssen deshalb nicht weiter beachtet werden.) Aus den Harmonischen mit ungerader Ordnungszahl lässt sich das Originalsignal $u_L[t]$ näherungsweise rekonstruieren zu

$$\begin{aligned} u_L[t] \approx & 1,1198 \text{ V} \cdot \cos[2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 90^\circ] \\ & + 0,8111 \text{ V} \cdot \cos[3 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 90^\circ] \\ & + 0,5272 \text{ V} \cdot \cos[5 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 90^\circ] \\ & + 0,2372 \text{ V} \cdot \cos[7 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 90^\circ] \\ & + 0,0173 \text{ V} \cdot \cos[9 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 90^\circ] \\ & + 0,0994 \text{ V} \cdot \cos[11 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 90^\circ] \\ & + 0,1211 \text{ V} \cdot \cos[13 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 90^\circ] \\ & + 0,0811 \text{ V} \cdot \cos[15 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 90^\circ] \\ & + 0,0198 \text{ V} \cdot \cos[17 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 90^\circ] \\ & + 0,0302 \text{ V} \cdot \cos[19 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 90^\circ] \\ & \dots \end{aligned}$$

„Näherungsweise“ deshalb, weil für eine exakte Rekonstruktion beliebig viele Summanden zu berücksichtigen wären, was in der Praxis nicht möglich ist.

Der im Folgenden dargestellte rekonstruierte Verlauf von $u_L[t]$ stimmt deshalb nicht vollständig mit dem in Bild 4.1-2 dargestellten Verlauf überein.

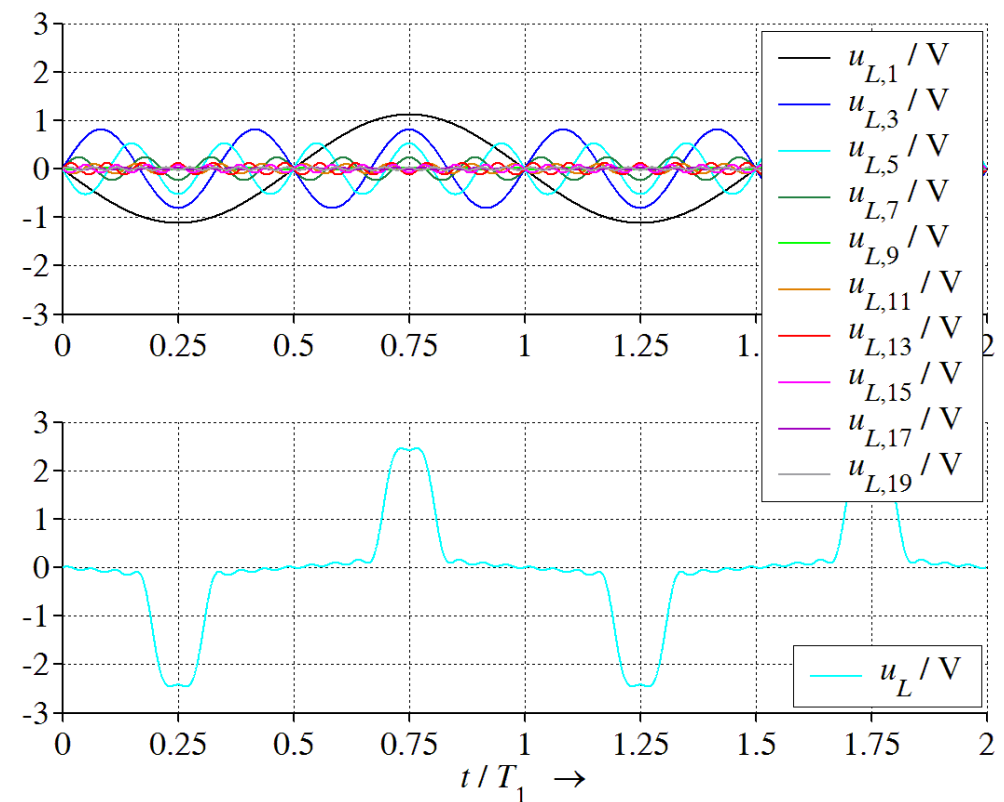


Bild 4.2-2: Rekonstruktion von $u_L[t]$ aus den niederfrequentesten 20 Spektrallinien

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 **FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse**
 - 4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten
 - 4.2.2 Komplexwertige FOURIER-Koeffizienten
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - I

Wie ermittelt man diese „Zusammensetzung“ einer beliebigen reellwertigen periodischen Zeitfunktion?

Eine T_1 -periodische, im Intervall $[0, T_1]$ stückweise stetige Zeitfunktion $x[t]$ lässt sich durch die FOURIER-Reihe

$$\begin{aligned} x[t] &= \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \cos[n\omega_1 t + \varphi_n] = \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot (\cos[n\omega_1 t] \cdot \cos \varphi_n - \sin[n\omega_1 t] \cdot \sin \varphi_n) \\ &= \underbrace{\hat{A}_0}_{\hat{a}_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\hat{A}_n \cos \varphi_n}_{\hat{a}_n} \cdot \cos[n\omega_1 t] + \underbrace{(-\hat{A}_n \sin \varphi_n)}_{\hat{b}_n} \cdot \sin[n\omega_1 t] = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cdot \cos[n\omega_1 t] + \hat{b}_n \cdot \sin[n\omega_1 t] \end{aligned}$$

mit den Umrechnungsbeziehungen

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \hat{a}_0 \quad \text{für } n = 0 \\ \varphi_n &= \arctan \left[-\frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n} \right] + \begin{cases} \pi & \text{falls } \hat{a}_n < 0 \\ 0 & \text{falls } \hat{a}_n \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{a}_n = \hat{A}_n \cdot \cos \varphi_n \\ \hat{b}_n = -\hat{A}_n \cdot \sin \varphi_n \end{cases} \quad \text{für } n \neq 0 \end{aligned}$$

darstellen.

(Wählt man als Bezug eine sinusförmige Zeitfunktion, so lauten die Umrechnungsbeziehungen geringfügig anders.)

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - II

Darin sind

$$\omega_1 = 2\pi \cdot f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

die Grundswingungskreisfrequenz,

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{T_1} \int_{(T_1)} x[t] dt \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} x[\omega_1 t] d\omega_1 t$$

der Gleichanteil oder der arithmetische Mittelwert und die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n \geq 1} &= \frac{2}{T_1} \int_{(T_1)} x[t] \cdot \cos[n\omega_1 t] dt \\ &\quad \text{oder} \quad \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} x[\omega_1 t] \cdot \cos[n\omega_1 t] d\omega_1 t \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{b}_{n \geq 1} &= \frac{2}{T_1} \int_{(T_1)} x[t] \cdot \sin[n\omega_1 t] dt \\ &\quad \text{oder} \quad \frac{1}{\pi} \int_{(2\pi)} x[\omega_1 t] \cdot \sin[n\omega_1 t] d\omega_1 t \end{aligned}$$

die Amplituden der kosinus- bzw. sinusförmigen Signal-komponenten.

$\hat{a}_0, \hat{a}_{n \geq 1}$ und $\hat{b}_{n \geq 1}$ können auch negative reelle Werte annehmen.

Die Angabe (T_1) für die Integrationsgrenzen besagt, dass über einen frei wählbaren, zusammenhängenden Bereich von der Breite der Grundswingungsperiodendauer T_1 der t -Achse (Abszisse) integriert wird.

Um mit $\omega_1 t$ an Stelle von t als Integrationsvariable zu arbeiten, benutzt man die Erweiterung

$$dt = \frac{1}{\omega_1} \cdot d\omega_1 t = \frac{T_1}{2\pi} \cdot d\omega_1 t.$$

$x[t] = x[\omega_1 t]$ sowie der Faktor vor dem Integral werden nur durch diese Erweiterung an die geänderte Integrationsvariable angepasst. Im eigentlichen Sinne substituiert werden nur die Grenzen.

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - III

Die Koeffizienten \hat{a}_0 , $\hat{a}_{n \geq 1}$ und $\hat{b}_{n \geq 1}$ findet man für häufig benutzte Zeitfunktionen, z. B. Rechteck-, Dreieck- und Sägezahn-schwingungen, in mathematischen Tabellenbüchern.

Die Darstellung einer periodischen Zeitfunktion durch die Koeffizienten ihrer FOURIER-Reihe bezeichnet man als FOURIER-Analyse, Oberschwingungsanalyse, Harmonische Analyse oder Spektralanalyse.

Sonderfälle:

- Es gilt

$$x[t] = x[-t], \text{ d. h. } x[t] \text{ ist "gerade"} \Rightarrow \hat{b}_n = 0 \text{ für alle } n \neq 0$$

und

$$x[t] = -x[-t], \text{ d. h. } x[t] \text{ ist "ungerade"} \Rightarrow \hat{a}_n = 0 \text{ für alle } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Periodische ungerade (= antisymmetrische) Funktionen besitzen niemals einen Gleichanteil.
Dies folgt aus: Jede periodische Funktion $x[t]$ lässt sich in je eine gerade $x_g[t]$ und eine ungerade Funktion $x_u[t]$ zerlegen nach den Umrechnungsbeziehungen

$$x[t] = x_g[t] + x_u[t] \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x_g[t] = \frac{1}{2}(x[t] + x[-t]) \\ x_u[t] = \frac{1}{2}(x[t] - x[-t]) \end{cases}.$$

Ein evtl. vorhandener Gleichanteil fiel bei der Subtraktion in der letztgenannten Gleichung heraus, d. h. kann nicht auftreten.

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - IV

- Periodische gerade (= symmetrische) Funktionen können einen Gleichanteil enthalten (s. Bild 4.2.1-1).

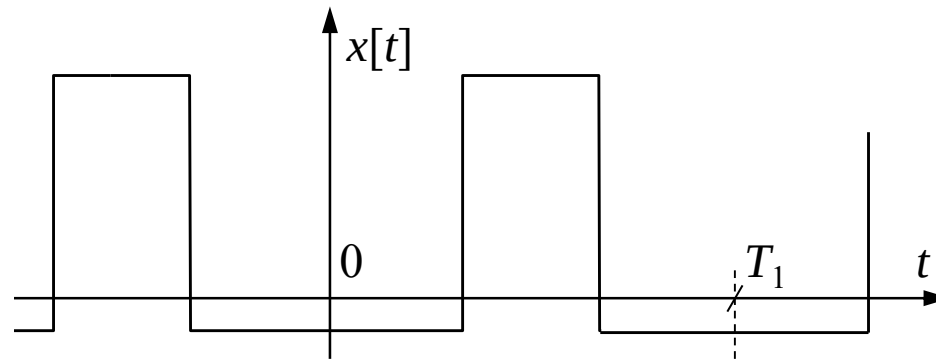


Bild 4.2.1-1 Periodische gerade Funktion mit Gleichanteil

- Eine weitere Besonderheit stellen sog. *alternierende* Funktionen dar. Für sie gilt

$$x[t] = -x\left[t + \frac{T_1}{2}\right]$$

und sie besitzen nur Spektrallinien mit ungeraden Ordnungszahlen.

- Eine Verschiebung der Funktion entlang der Zeitachse verändert nicht die Amplituden der spektralen Anteile, wohl aber deren Phasenwinkel.

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - V

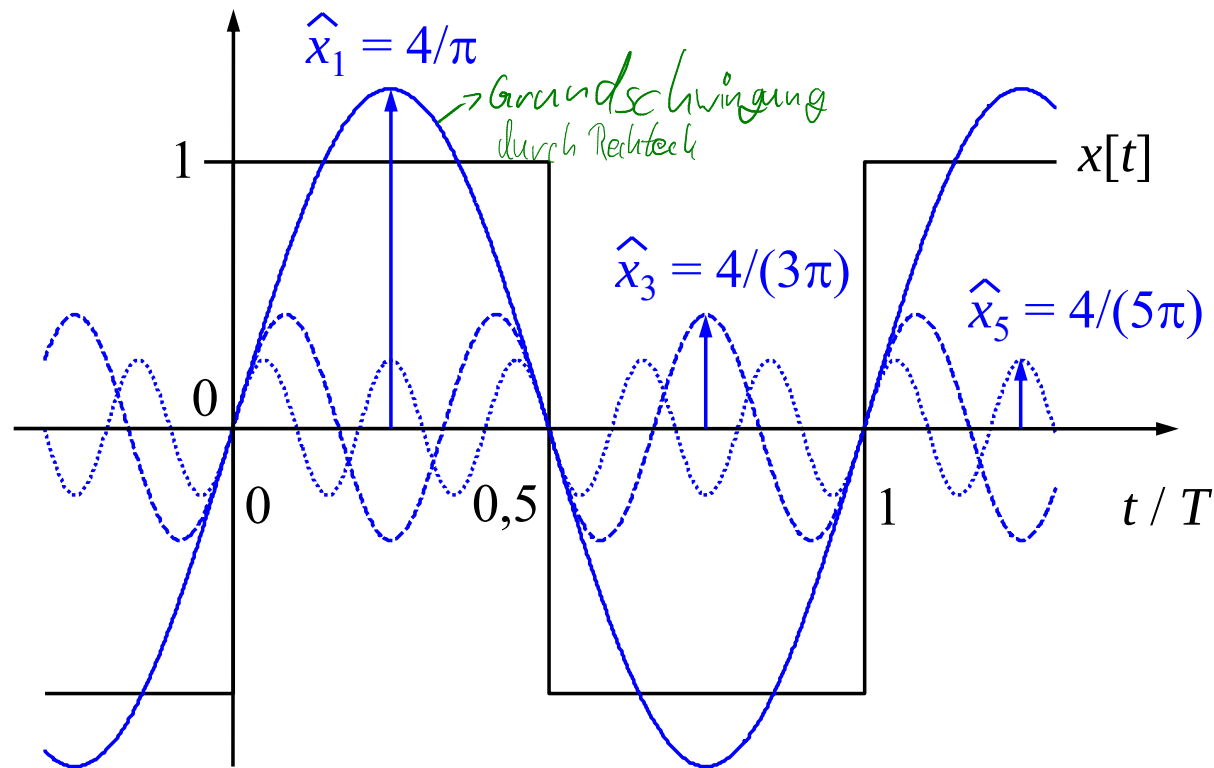


Bild 4.2.1-2 Harmonische einer Rechteckfunktion

Ausgehend vom Zeitverlauf der Originalfunktion kann man Vermutungen anstellen über Betrag und Phasenlage der Harmonischen – welche?

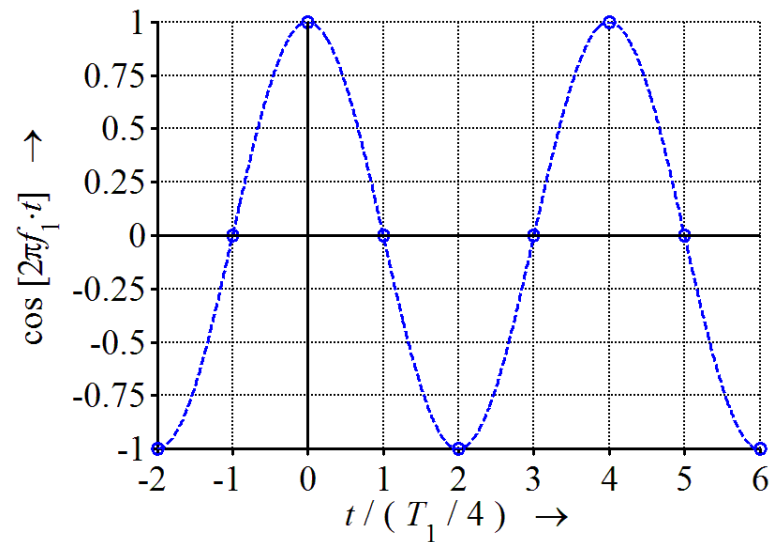
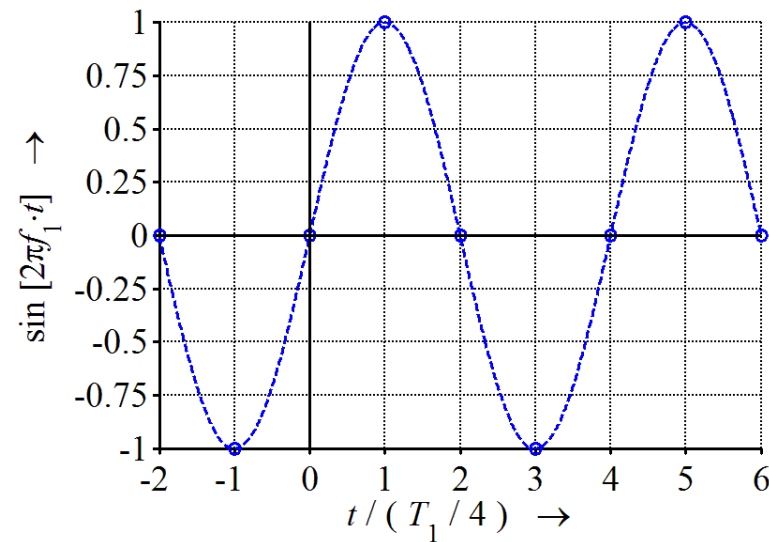
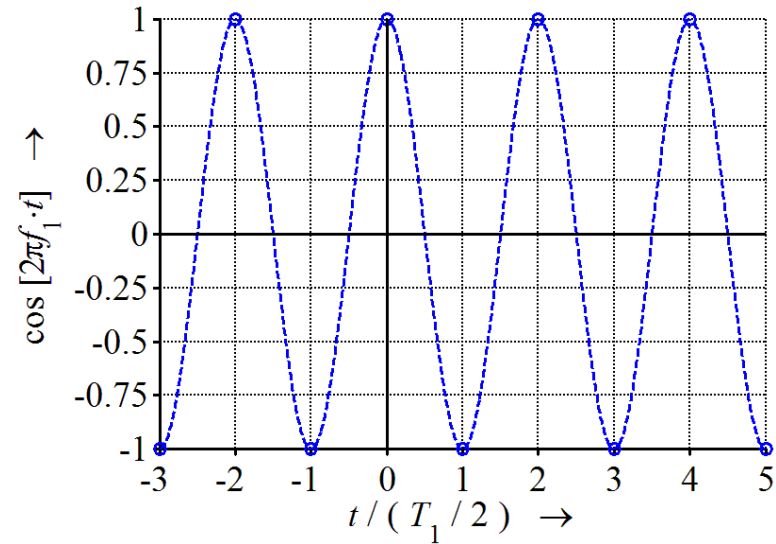
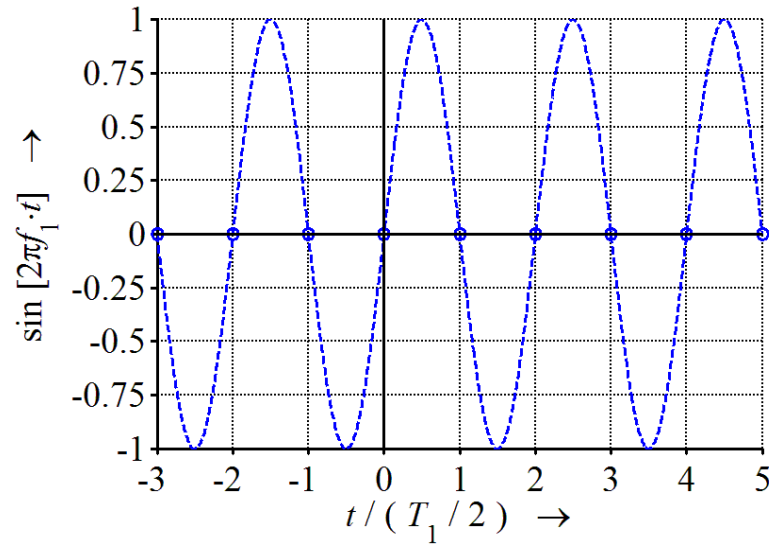
4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - VI

Vorgehensweise bei Berechnung der FOURIER-Koeffizienten (s. Übungsaufgaben):

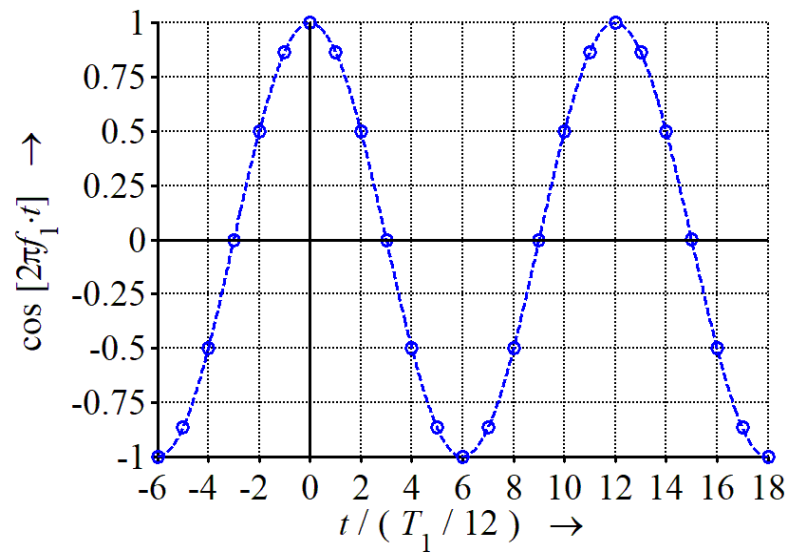
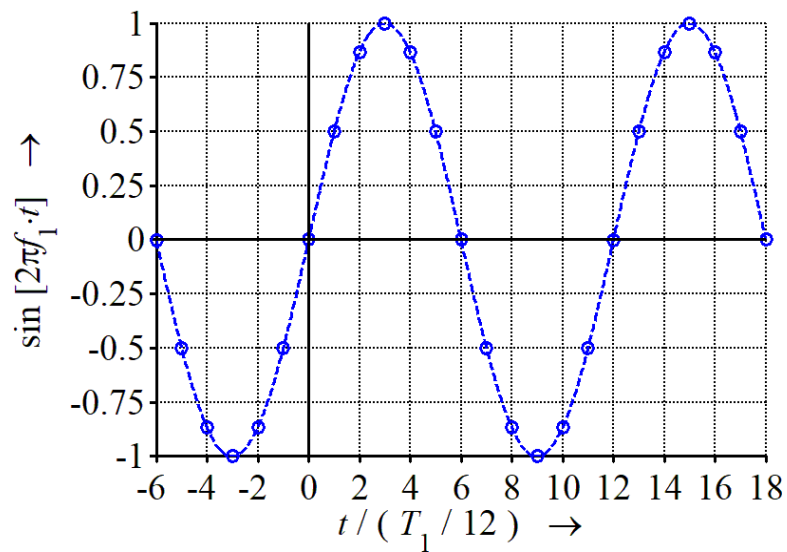
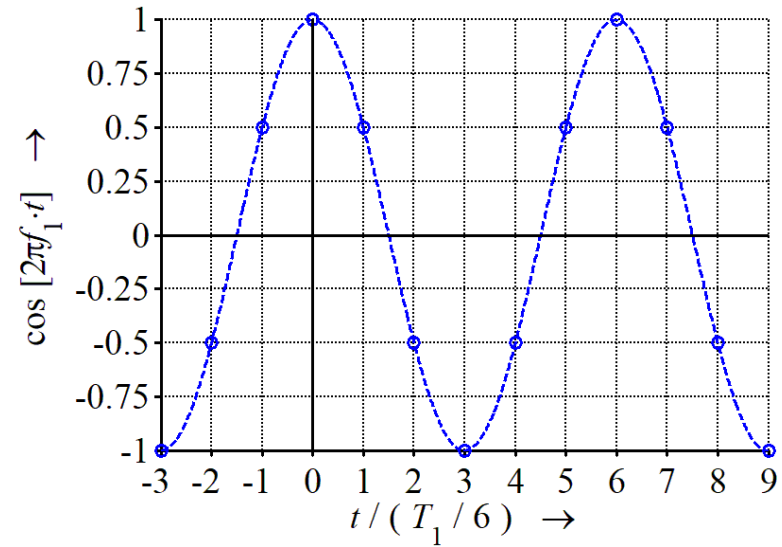
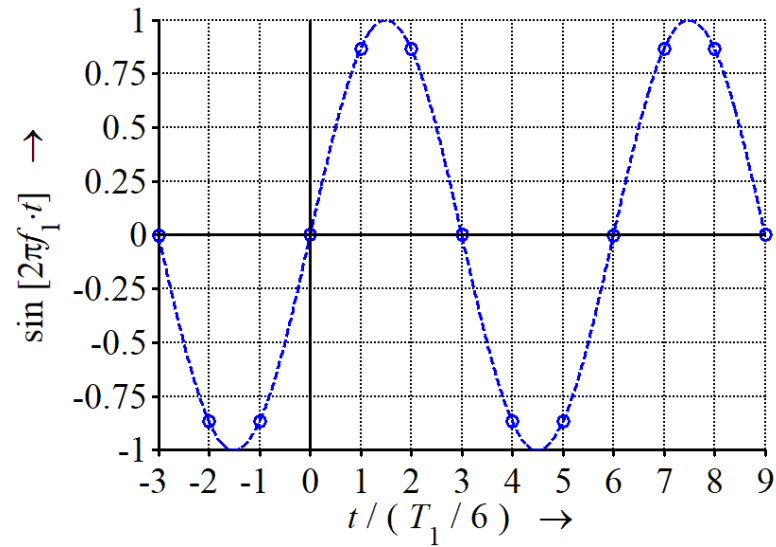
- 1 Ermitteln der analytischen Darstellung (einer zusammenhängenden Periode) der Zeitfunktion $x[t]$; evtl. ist dies nur durch abschnittsweise Definition der Funktion möglich.
- 2 Bestimmung derjenigen Koeffizienten, deren Wert null ist.
- 3 Berechnung der von null verschiedenen Koeffizienten.

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - VII

Hilfreich bei der Lösung von Übungsaufgaben sind folgende Darstellungen:



4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - VIII



4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten - IX

Das Zeitsignal

$$x[t] = -0,3 + 0,8 \cdot \cos\left[2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right] + 0,6 \cdot \cos\left[2\pi \cdot 200 \text{ Hz} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right]$$

liefert per numerischer Berechnung die folgenden Spektren:

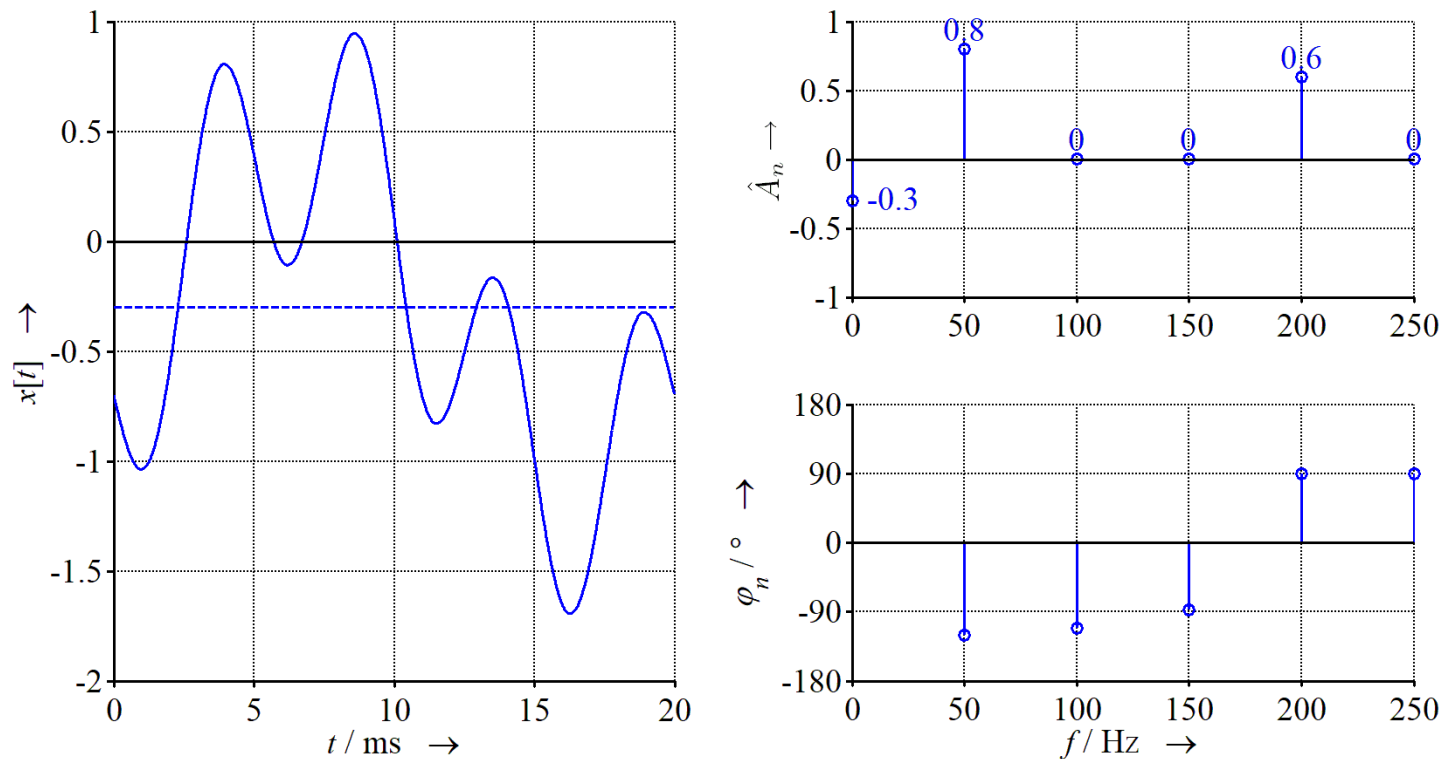


Bild 4.2.1-3 Zeitfunktion und Ausschnitte aus numerisch berechneten Amplituden- und Phasenspektren

(Die Phasenwinkelwerte der Spektrallinien mit der Amplitude null sind numerisch bedingt und ohne Aussage.)



4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

4.1 Einführendes Beispiel

4.2 **FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse**

4.2.1 Reellwertige FOURIER-Koeffizienten

4.2.2 **Komplexwertige FOURIER-Koeffizienten**

4.3 Spektrumanalysator

4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen

4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.2.2 Komplexwertige FOURIER-Koeffizienten - I

Die FOURIER-Reihe lässt sich alternativ schreiben als

$$\begin{aligned} x[t] &= \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \cos[n\omega_1 t + \varphi_n] = \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}_n}{2} \cdot \left(e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}_n}{2} \cdot e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}_n}{2} \cdot e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\hat{A}_{-n}}{2} \cdot e^{j(n\omega_1 t - \varphi_{-n})} + \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{A}_n}{2} \cdot e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

mit den komplexwertigen Koeffizienten

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} x[t] \cdot e^{-jn\omega_1 t} \cdot dt \quad \text{für } -\infty \leq n \leq \infty = \begin{cases} \frac{1}{2}(\hat{a}_{-n} + j\hat{b}_{-n}) & \text{für } n < 0 \\ \hat{a}_0 & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2}(\hat{a}_n - j\hat{b}_n) & \text{für } n > 0 \end{cases}.$$

Die FOURIER-Reihe ordnet der zeitperiodischen Funktion $x[t]$ eine frequenzdiskrete Koeffizientenfolge \underline{c}_n zu.

Für reellwertige Zeitfunktionen $x[t]$ gilt

$$\underline{c}_n = \underline{c}_{-n}^*.$$

4.2.2 Komplexwertige FOURIER-Koeffizienten - II

- Will man aus den Koeffizienten \underline{c}_n die reellwertigen FOURIER-Koeffizienten ermitteln, so gilt

$$\hat{a}_0 = c_0, \quad \hat{a}_n = \underline{c}_n + \underline{c}_{-n} = 2 \operatorname{Re}[\underline{c}_n] \quad \text{und} \quad \hat{b}_n = j \cdot (\underline{c}_n - \underline{c}_{-n}) = -2 \operatorname{Im}[\underline{c}_n].$$

- Will man aus den Koeffizienten \underline{c}_n die Werte für den Gleichanteil \hat{A}_0 und die Koeffizientenpaare $\hat{A}_{n \geq 1}$ und $\varphi_{n \geq 1}$ ermitteln, so steht man vor der Problematik, dass die Darstellung $x[t] = \hat{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \cos[n\omega_1 t + \varphi_n]$ nicht einheitlich ist.

Der Gleichanteil \hat{A}_0 kann positive oder negative reelle Werte annehmen, besitzt aber keinen Phasenwinkel. Die Koeffizienten $\hat{A}_{n \geq 1}$ hingegen sollen alle positiv reellwertig sein und evtl. auftretende negative Vorzeichen einzelner Schwingungen werden durch die Phasenwinkel $\varphi_{n \geq 1}$ berücksichtigt.

Diese Besonderheiten sind in den Umrechnungsbeziehungen

$$\hat{A}_n = \begin{cases} |\underline{c}_0| \cdot \cos[\operatorname{arc}[\underline{c}_0]] & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot |\underline{c}_n| & \text{falls } n \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_n = \begin{cases} \text{nicht def.} & \text{falls } n = 0 \\ \operatorname{arc}[\underline{c}_n] & \text{falls } n \neq 0 \end{cases}.$$

enthalten. Ein negativer Gleichanteil macht sich in der komplexwertigen Darstellung durch einen Phasenwinkel $\operatorname{arc}[\underline{c}_0] = \pm\pi$ und deshalb $\cos[\operatorname{arc}[\underline{c}_0] = \pm\pi] = -1$ bemerkbar, für einen positiven Gleichanteil berechnet man $\operatorname{arc}[\underline{c}_0] = 0$.

Weniger erklärungsbedürftig, weil konsistenter, ist deshalb die Darstellung eines Spektrums in Form von Betrag und Phase von \underline{c}_n .

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 **Spektrumanalysator**
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.3 Spektrumanalysator

Ein **analoger** Spektrumanalysator benutzt ein schmalbandiges Bandpass-Filter variabler Mittenfrequenz. Dieses Filter wird periodisch über den zu untersuchenden Frequenzbereich des Messsignals hin- und hergeschoben („gewobbelt“) und ermöglicht so die getrennte Messung der einzelnen Spektrallinien.

Ein **digitaler** Spektrumanalysator tastet das zu messende Signal ab und berechnet die FOURIER-Koeffizienten.

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 **Kenngößen periodischer Zeitfunktionen**
 - 4.4.1 **Kenngößen von Mischgrößen**
 - 4.4.2 Kenngößen reiner Wechselgrößen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.4.1 Kenngrößen von Mischgrößen - I

Im Kapitel 2 „Wechselstrom“ haben wir bereits einige Kenngrößen (s. Tabelle 4.4.1-1) zur Beschreibung periodischer Zeitfunktionen kennen gelernt. Wir haben diese Kenngrößen dort überwiegend auf harmonische periodische Zeitfunktionen angewendet, für nichtharmonische periodische Zeitfunktionen gelten sie aber auch.

Tabelle 4.4.1-1 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen

Kenngröße	Definitionsgleichung
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} x[t] dt$
Gleichrichtwert	$ \bar{x} = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} x[t] dt$
Effektivwert	$X = \sqrt{\frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} x^2[t] dt}$

Im Unterschied zu den Definitionen im Kapitel 2 „Wechselstrom“ wird in der hier verwendeten Schreibweise explizit darauf hingewiesen, dass die Integration über die Periodendauer der Grundschiwingung zu erfolgen hat.

4.4.1 Kenngrößen von Mischgrößen - II

Unter Benutzung der FOURIER-Reihe für die Funktion $x[t]$ lässt sich für den **Effektivwert** schreiben

$$\begin{aligned} X^2 \cdot T_1 &= \int_{(T_1)} \left(\bar{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{x}_{\nu} \cdot \cos[\nu \omega_1 t + \varphi_{\nu}] \right)^2 dt \\ &= \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu}^2 \cdot T_1 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$X = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu}^2}.$$

Darin sind X_{ν} die Effektivwerte der spektralen Anteile von $x[t]$ und

$$X_0 = \hat{x}_0 = |\bar{x}|.$$

der Effektivwert des Gleichanteils.

Der (Gesamt-) Effektivwert X lässt sich aufspalten in den Gleichanteil \bar{x} und den **Effektivwert des Wechselanteils** $X_{\sim} \dots$

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} X_{\nu}^2} = \sqrt{\bar{x}^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} X_{\nu}^2} = \sqrt{\bar{x}^2 + X_{\sim}^2} \Rightarrow \\ X_{\sim} &= \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} X_{\nu}^2} = \sqrt{X^2 - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

Damit definiert DIN 40110-1 die Kenngrößen **Schwingungsgehalt einer Mischgröße** (im englischsprachigen Ausland sehr unüblich)

$$\begin{aligned} s &= \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgröße}} = \frac{X_{\sim}}{X} \\ &= \frac{\sqrt{X^2 - \bar{x}^2}}{\sqrt{X^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{x}}{X} \right)^2} \end{aligned}$$

und **Welligkeit einer Mischgröße** (engl. ripple factor, RF)

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Betrag des Gleichanteils}} = \frac{X_{\sim}}{|\bar{x}|} \\ &= \sqrt{\left(\frac{X}{\bar{x}} \right)^2 - 1} \end{aligned}$$

4.4.1 Kenngrößen von Mischgrößen - III

Im Unterschied zum *ripple factor* meint die englische Bezeichnung *ripple* meist die Schwankungsbreite

$$\Delta x = \max[x] - \min[x].$$

In DIN 40110-1 ist darüber hinaus noch die **Schwankungswelligkeit**

$$q = \frac{\Delta x}{|\bar{x}|}$$

definiert.

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 **Kenngößen periodischer Zeitfunktionen**
 - 4.4.1 Kenngößen von Mischgrößen
 - 4.4.2 **Kenngößen reiner Wechselgrößen**
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen

4.4.2 Kenngrößen reiner Wechselgrößen - I

Für reine Wechselgrößen ist der Gleichanteil null und es gilt $\bar{x}=0$
gilt $X_{\sim} = X$. In diesem Fall macht die Kenngröße *Schwingungsgehalt* keine Aussage mehr.

Man definiert stattdessen den **Grundswingungsgehalt einer Wechselgröße** (engl. distortion factor, DF)

$$g = \frac{\text{Effektivwert der Grundschiwingung}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{X_1}{X},$$

den **Oberschwingungsgehalt, Klirrfaktor** oder **Verzerrungsgehalt einer Wechselgröße** (engl. total harmonic factor, THF)

$$d = THF = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} X_v^2}}{X} = \frac{\sqrt{X^2 - X_1^2}}{X} = \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{X}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - g^2} \Rightarrow g = \sqrt{1 - d^2} \end{aligned}$$

und die **Gesamt-Oberschwingungsverzerrung einer Wechselgröße** (engl. total harmonic distortion, THD)

$$\begin{aligned} THD &= \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} X_v^2}}{X_1} = \frac{\sqrt{X^2 - X_1^2}}{X_1} = \sqrt{\left(\frac{X}{X_1}\right)^2 - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{g^2} - 1} \Rightarrow g = \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}} \end{aligned}$$

Das Verhältnis

$$CF = \frac{\text{Amplitude}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{\hat{x}}{X} \stackrel{\text{stets}}{\geq} 1$$

heißt **Scheitelfaktor** (engl. crest factor, CF),

$$F = \frac{\text{Effektivwert der Mischgröße}}{\text{Gleichrichtwert}} = \frac{X}{|\bar{x}|}$$

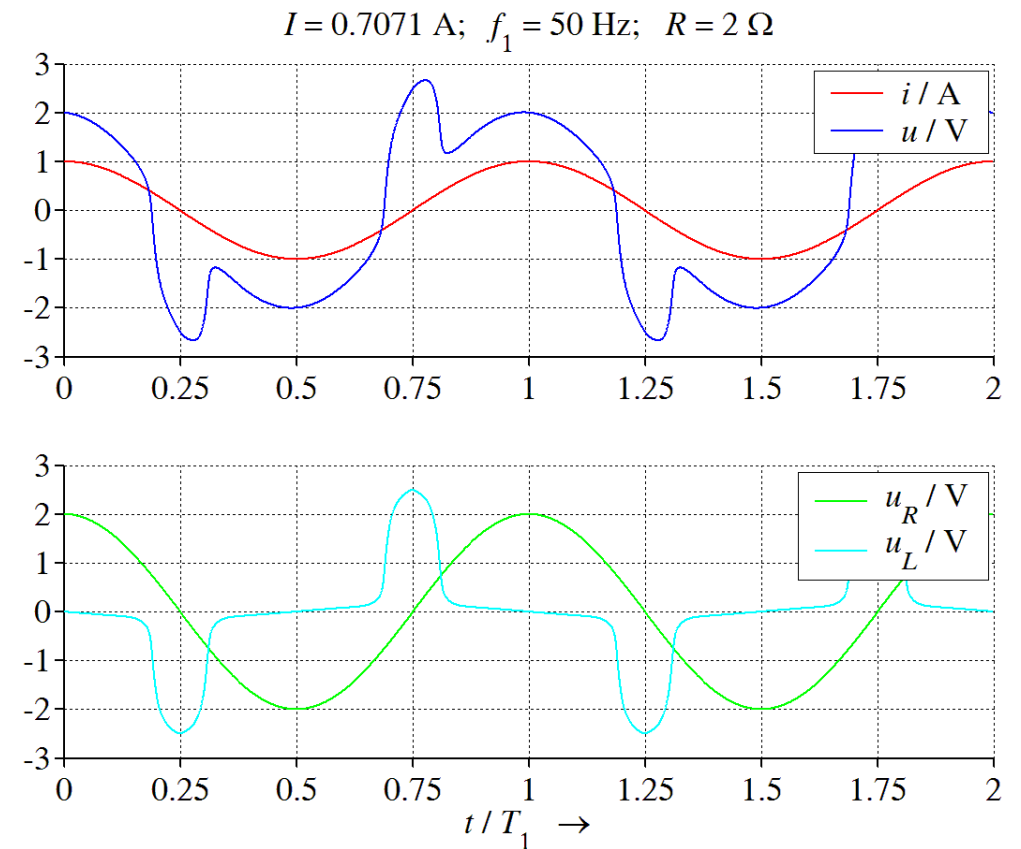
heißt **Formfaktor** (engl. form factor, FF) einer Wechselgröße.

4.4.2 Kenngrößen reiner Wechselgrößen - II

Für die Zeitfunktionen des einführenden Beispiels erhält man folgende Zahlenwerte.

Tabelle 4.4.2-2 Kenngrößen der Zeitfunktionen des Beispiels aus Abschnitt 4.1

	$i[t]$	$u_R[t]$	$u_L[t]$	$u[t]$
\bar{x}	0	0	0	0
X	0,707 A	1,414 V	1,069 V	1,773 V
X_{\sim}	0,707 A	1,414 V	1,069 V	1,773 V
r	∞	∞	∞	∞
g	1	1	0,741	0,914
THF	0	0	0,672	0,405
THD	0	0	0,907	0,443
CF	1,414	1,414	2,336	1,503
F	1,111	1,111	1,812	1,047



4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen
 - 4.5.1 Leistungen periodischer nichtharmonischer Spannungs- und Stromverläufe
 - 4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom
 - 4.5.3 Leistungen bei nichtharmonischer Spannung und harmonischem Strom

4.5.1 Leistungen periodischer nichtharmonischer Spannungs- und Stromverläufe - I

Im **Zeitbereich** sind nur die **Augenblicksleistung** $u[t] \cdot i[t]$ als Produkt der Augenblickswerte von Spannung und Strom sowie die **Wirkleistung**

$$p[\Delta t] = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u[t] \cdot i[t] \cdot dt$$

als (gleitender) Kurzzeitmittelwert definiert. Interessiert man sich für das Zeitverhalten des Energieflusses in einem bestimmten Zeitfenster, so wählt man Δt eher klein; möchte man nur die insgesamt umgesetzte Energie ermitteln, so kann Δt gleich der Länge des Zeitfensters (also eher groß) gewählt werden.

Vorsicht: Wählt man Δt so klein, dass $u[t + \Delta t] \approx u[t] = u$ und $i[t + \Delta t] \approx i[t] = i$ ist, so berechnet man mit

$$p[\Delta t] = \frac{1}{\Delta t} \cdot u \cdot i \cdot \Delta t = ui \text{ die Augenblicks- an Stelle der Wirkleistung.}$$

Für alle weiteren Leistungsdefinitionen ist eine spektrale Darstellung erforderlich. Die Wirkleistung lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} u[t] \cdot i[t] dt = \frac{1}{T_1} \cdot \int_{(T_1)} (\hat{u}_0 + \hat{u}_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_{u,1}] + \hat{u}_2 \cos[2\omega_1 t + \varphi_{u,2}] + \dots) \cdot (\hat{i}_0 + \hat{i}_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_{i,1}] + \hat{i}_2 \cos[2\omega_1 t + \varphi_{i,2}] + \dots) dt \\ &= \hat{u}_0 \hat{i}_0 + \frac{\hat{u}_1 \hat{i}_1}{2} \cos[\varphi_{u,1} - \varphi_{i,1}] + \frac{\hat{u}_2 \hat{i}_2}{2} \cos[\varphi_{u,2} - \varphi_{i,2}] + \dots = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos[\varphi_{u,1} - \varphi_{i,1}] + U_2 I_2 \cos[\varphi_{u,2} - \varphi_{i,2}] + \dots \\ &= \sum_k U_k I_k \cos[\varphi_{u,k} - \varphi_{i,k}] \end{aligned}$$

4.5.1 Leistungen periodischer nichtharmonischer Spannungs- und Stromverläufe - II

Warum tragen nur die Produkte gleichfrequenter Spektralanteile zur Wirkleistung bei?

Aus

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos[\alpha - \beta] + \cos[\alpha + \beta])$$

folgt, dass nur die Verknüpfungen gleichfrequenter Anteile zu Kosinus-Argumenten „ $\alpha - \beta$ “ mit der Frequenz null führen. Alle übrigen Differenzen und Summen von Frequenzen liefern Vielfache der Grundswingungsfrequenz, welche durch die Mittelwertbildung keinen Beitrag zur Wirkleistung liefern.

Aus der Definition der **Scheinleistung** S über Effektivwerte folgt mittels der spektralen Darstellung

$$S^2 = (UI)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} I_{\ell}^2 = \underbrace{\left(\sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \right)^2}_{P^2} + \underbrace{\left(\sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \right)^2}_{Q^2} + \underbrace{\sum_k \sum_{\ell \neq k} \left((U_k I_{\ell})^2 - U_k I_k U_{\ell} I_{\ell} \cos[\varphi_k - \varphi_{\ell}] \right)}_{D^2}$$

mit $\cos \varphi_v = \cos[\varphi_{u,v} - \varphi_{i,v}]$.

Nach ZACH „Leistungselektronik“ heißen Q **Blindleistung** und D **Verzerrungsleistung**. Auch die Verzerrungsleistung trägt nichts zur Wirkleistungsübertragung, sondern nur zu entsprechenden OHMschen Verlusten auf Leitungen, bei und ist deshalb eine Blindleistung. Sie wird hier lediglich aus formalen Gründen getrennt von der Blindleistung Q ausgewiesen. Der Fall $Q = 0$ bei $D \neq 0$ ist möglich.



4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen
 - 4.5.1 Leistungen periodischer nichtharmonischer Spannungs- und Stromverläufe
 - 4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom
 - 4.5.3 Leistungen bei nichtharmonischer Spannung und harmonischem Strom

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - I / Definitionen

In diesem, bei der Leistungselektronik netzgeführter Stromrichter häufigen, Fall mit $u[t] = \hat{u}_1 \sin[\omega_1 t + \varphi_{u,1}]$ erhält man die vereinfachte Darstellung

$$\begin{aligned} S^2 &= (U_1 I)^2 = U_1^2 \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} I_{\ell}^2 \\ &= \underbrace{(U_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1)^2}_{P^2 = P_1^2} + \underbrace{(U_1 I_1 \cdot \sin \varphi_1)^2}_{Q^2 = Q_1^2} + D^2 \\ &= \underbrace{P_1^2 + Q_1^2}_{S_1^2} + D^2 = S_1^2 + D^2 \end{aligned}$$

Darin nennt man

- **Grundschiwingungswirkleistung** ($k = 1$)
 $P_1 = U_1 I_1 \cos[\varphi_{u,1} - \varphi_{i,1}]$,
- **Grundschiwingungsblindleistung** ($k = 1$)
 $Q_1 = U_1 I_1 \sin[\varphi_{u,1} - \varphi_{i,1}]$,
- **Grundschiwingungsscheinleistung** ($k = 1$)
 $S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$

und

- **Verzerrungs(blind)leistung**

$$D = \sqrt{S^2 - S_1^2}.$$

(In der Leistungselektronik hängt die Grundschiwingungsblindleistung meist vom Steuerwinkel α des netzgeführten Stromrichters ab und wird deshalb auch als Steuer- oder Verschiebungsblindleistung bezeichnet.)

In DIN 41750, Teil 2, wird für diesen Sonderfall sinusförmiger Spannung vorgeschlagen, die Grundschiwingungsblindleistung und die Verzerrungsleistung wie folgt zusammenzufassen

$$Q_{ges}^2 = Q_1^2 + D^2,$$

so dass man formal wieder die für rein harmonische Größen gültige Beziehung

$$S^2 = P^2 + Q_{ges}^2$$

erhält. Diese Betrachtung hat durchaus ihre Berechtigung, wenn man z. B. mit einem Leistungsmessgerät misst, welches Q und D nicht getrennt ermitteln kann.

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - II / Beispiel

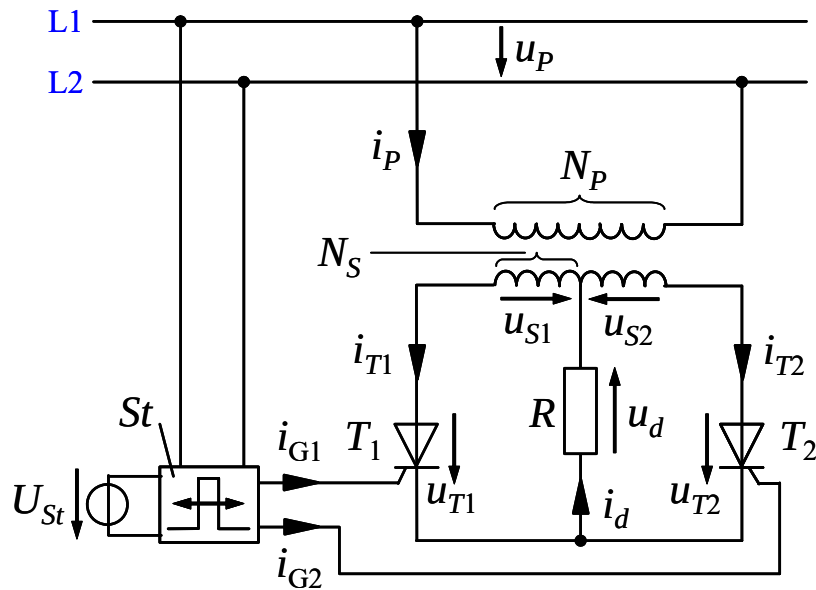


Bild 4.5.2-1: Gesteuerte Zweipuls-Mittelpunktschaltung (M2C) mit OHMscher Last

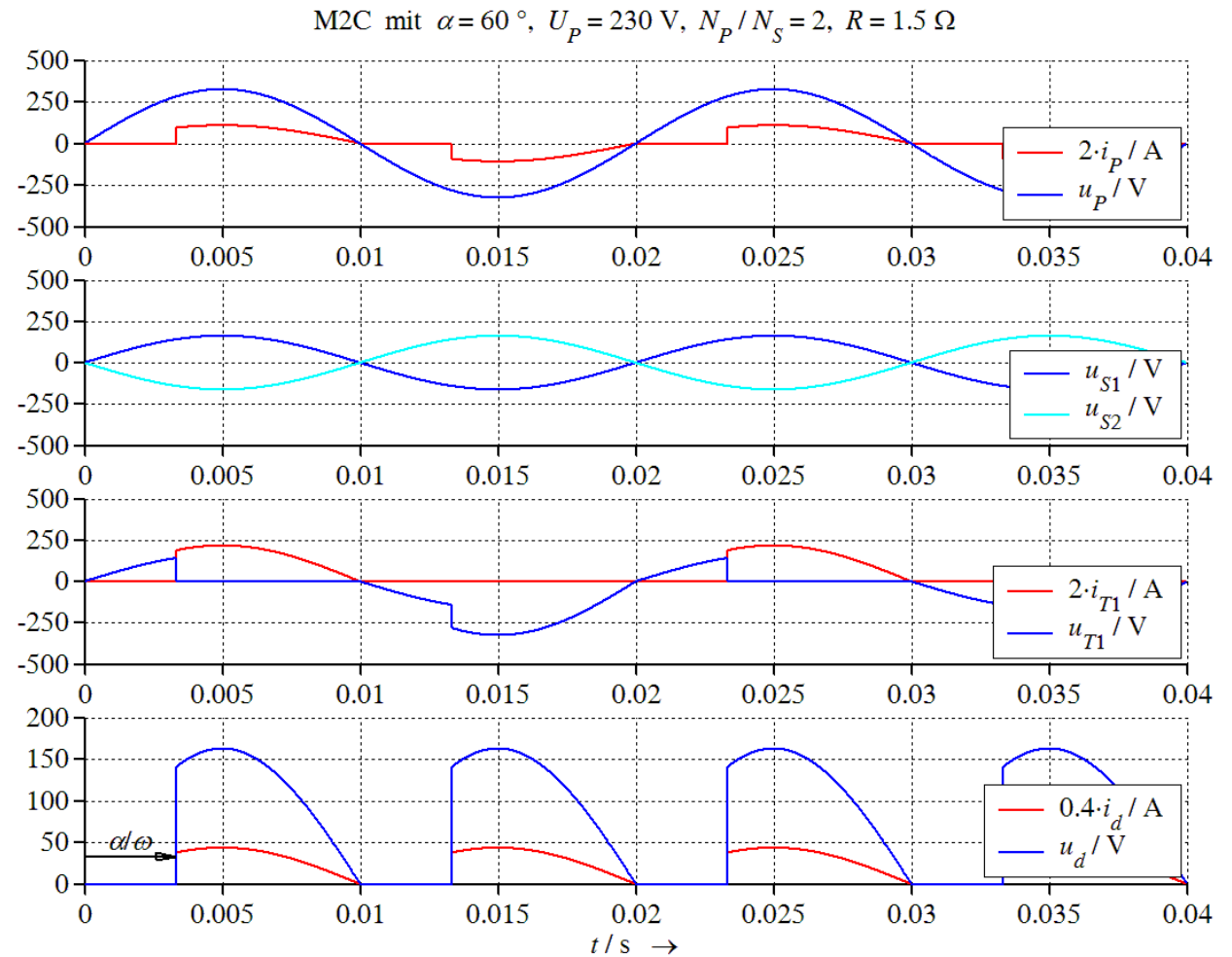


Bild 4.5.2-3: Strom- und Spannungsverläufe an einer gesteuerten Zweipuls-Mittelpunktschaltung (M2C) mit OHMscher Last

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - III / Beispiel

Effektivwert der Ausgangsspannung:

$$U_{d,eff}[\alpha] = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} u_d^2[\omega t] d\omega t} = \sqrt{\frac{2U_P^2}{\ddot{u}^2 \pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sin^2[\omega t] d\omega t} = \dots = \frac{U_P}{\ddot{u}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\alpha]}$$

Da die Schaltung (Bild 4.5.2-1) nur verlustlose Bauelemente enthält, ist die von der Schaltung aufgenommene Wirkleistung gleich der Wirkleistungsaufnahme der Last

$$P[\alpha] = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_d[\alpha] \cdot i_d[\alpha] dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_d[\alpha] \cdot \frac{u_d[\alpha]}{R} dt = \frac{1}{R} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u_d^2[\alpha] dt}_{U_{d,eff}^2[\alpha]} = \frac{U_{d,eff}^2[\alpha]}{R}.$$

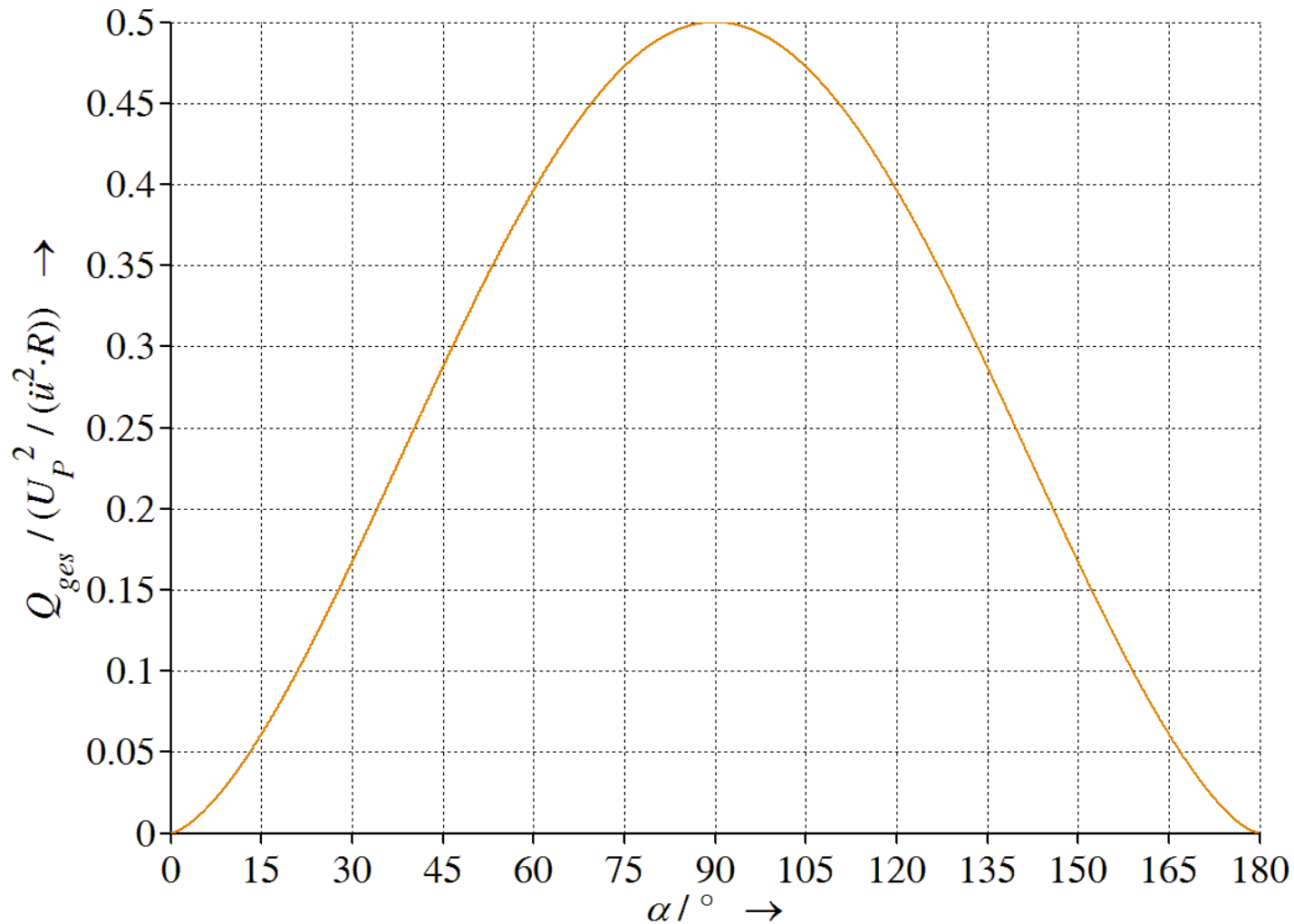
Die Scheinleistungsaufnahme der Schaltung aus dem Netz berechnet sich zu

$$S[\alpha] = U_P I_P[\alpha] = U_P \cdot \frac{I_{d,eff}[\alpha]}{\ddot{u}} = U_P \cdot \frac{U_{d,eff}[\alpha]}{\ddot{u} R}.$$

Damit folgt die Blindleistungsaufnahme der Schaltung

$$Q_{ges}^2[\alpha] = S^2[\alpha] - P^2[\alpha] = \left(U_P \cdot \frac{U_{d,eff}[\alpha]}{\ddot{u} R} \right)^2 - \left(\frac{U_{d,eff}^2[\alpha]}{R} \right)^2 = \left(\frac{U_P^2}{\ddot{u}^2 R} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\alpha] - \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\alpha] \right)^2 \right).$$
$$Q_{ges}[\alpha] = \frac{U_P^2}{\ddot{u}^2 R} \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\alpha] - \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \sin[2\alpha] \right)^2}$$

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - IV / Beispiel



Die Schaltung enthält keine Blindleistungssenke im herkömmlichen Sinne:

„Wo bleibt die von der Schaltung aufgenommene Blindleistung?“

Bild 4.5.2-2: Blindleistungsaufnahme der M2C-Schaltung mit OHMscher Last in Abhängigkeit vom Steuerwinkel

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - V / Beispiel

Tabelle 4.5.2-1 Leistungsbilanz an einer M2C-Schaltung mit OHMscher Last (Betriebspunkt s. Bild 4.5.2-3)

	Netz	Thyristor	Last
Spannungseffektivwert	$U_P = 230 \text{ V}$	$U_{T1} = 154,4546 \text{ V}$	$U_{d,eff} = 103,1479 \text{ V}$
Stromeffektivwert	$I_P = 34,3826 \text{ A}$	$I_{T1} = 48,6338 \text{ A}$	$I_{d,eff} = 68,7653 \text{ A}$
Scheinleistung	$S_P = U_P I_P$ $= 7908,0 \text{ VA}$	$S_{T1} = U_{T1} I_{T1}$ $= 7511,7 \text{ VA}$	$S_d = U_{d,eff} I_{d,eff}$ $= 7093,0 \text{ VA}$
Wirkleistung	$P_P = \frac{1}{T} \int_0^T u_P[t] \cdot i_P[t] dt$ $= 7093,0 \text{ W}$	$P_{T1} = 0$	$P_d = \frac{1}{T} \int_0^T u_d[t] \cdot i_d[t] dt$ $= 7093,0 \text{ W}$
Wirkleistung	$P_P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k$ $= 7093,0 \text{ W}$		$P_d = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k$ $= 7093,0 \text{ W}$

4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom - VI / Beispiel

Tabelle 4.5.2-1 Leistungsbilanz an einer M2C-Schaltung mit OHMscher Last (Betriebspunkt s. Bild 4.5.2-3)

	Netz	Thyristor	Last
Blindleistung	$Q_P = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k$ $= 2104,8 \text{ VA}$	$Q_{T1} = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k$ $= 1051,3 \text{ VA}$ $\approx Q_P / 2$	$Q_d = 0$
Verzerrungsleistung	$D_P = \sqrt{S_P^2 - P_P^2 - Q_P^2}$ $= 2792,1 \text{ VA}$	$D_{T1} = \sqrt{S_{T1}^2 - P_{T1}^2 - Q_{T1}^2}$ $= 7437,8 \text{ VA}$	$D_d = 2 \text{ VA} \approx 0$
Gesamtblindleistung	$Q_{ges,P} = \sqrt{Q_P^2 + D_P^2}$ $= 3496,6 \text{ VA}$		

4 Nichtlineare Wechselstromschaltungen

- 4.1 Einführendes Beispiel
- 4.2 FOURIER-Reihen und FOURIER-Analyse
- 4.3 Spektrumanalysator
- 4.4 Kenngrößen periodischer Zeitfunktionen
- 4.5 Leistungsdefinitionen für periodische nichtharmonische Zeitfunktionen
 - 4.5.1 Leistungen periodischer nichtharmonischer Spannungs- und Stromverläufe
 - 4.5.2 Leistungen bei harmonischer Spannung und nichtharmonischem Strom
 - 4.5.3 Leistungen bei nichtharmonischer Spannung und harmonischem Strom

4.5.3 Leistungen bei nichtharmonischer Spannung und harmonischem Strom - I

Die vorstehend angegebenen Beziehungen können analog auch auf das einführende Beispiel angewendet werden, in welchem der Strom eine harmonische Zeitfunktion aufweist und die Spannungen an Quelle und Induktivität nicht harmonisch verlaufen.

Tabelle 4.5.3-1 Leistungsbilanz an den Bauelementen des einführenden Beispiels aus Abschnitt 4.1

	Quelle	Widerstand	Induktivität
Spannungseffektivwert	$U = 1,7726 \text{ V}$	$U_R = 1,4139 \text{ V}$	$U_L = 1,0690 \text{ V}$
Stromeffektivwert	$I = 0,7070 \text{ A}$	$I = 0,7070 \text{ A}$	$I = 0,7070 \text{ A}$
Scheinleistung	$S = U \cdot I = 1,2531 \text{ VA}$	$S_R = U_R \cdot I = 1 \text{ VA}$	$S_L = U_L \cdot I = 0,7557 \text{ VA}$
Wirkleistung	$P = \frac{1}{T} \int_0^T u[t] \cdot i[t] dt = 1 \text{ W}$	$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T u_R[t] \cdot i[t] dt = 1 \text{ W}$	$P_L = 0$
Wirkleistung	$P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k = 1 \text{ W}$	$P_R = \sum_k U_{R,k} I_k \cos \varphi_k = 1 \text{ W}$	
Blindleistung	$Q = \sum_{k \geq 1} U_k I_k \sin \varphi_k = 0,56 \text{ VA}$	$Q_R = 0$	$Q_L = \sum_k U_{L,k} I_k \sin \varphi_k = 0,56 \text{ VA}$
Verzerrungsleistung	$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 0,5068 \text{ VA}$		$D = 0,5076 \text{ VA}$
Gesamtblindleistung	$Q_{ges} = \sqrt{Q^2 + D^2} = 0,7552 \text{ VA}$		$Q_{ges} = 0,7557 \text{ VA}$

4.5.3 Leistungen bei nichtharmonischer Spannung und harmonischem Strom - II

Zur Berechnung von Leistungen aus spektralen Darstellungen wurden 20 Spektrallinien berücksichtigt. Dadurch kommt es zu Differenzen in Nachkommastellen.

Qualitativ ist in der Tabelle klar erkennbar, dass der Widerstand nur Wirkleistung und die Spule sowohl Blind- als auch Verzerrungsleistung aufnimmt und dass die Quelle alle Leistungen bereitstellt.

Der Wirkleistungsumsatz am Widerstand lässt sich wegen des sinusförmigen Stromes auch ohne spektrale Darstellung zu

$$P_R = R \cdot I^2 = 2 \Omega \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A} \right)^2 = 1 \text{ W}$$

berechnen, an der Induktivität kann die Blindleistung nicht analogem Wege ermittelt werden. Es gilt

$$Q_L \neq \omega L[i] \cdot I^2,$$

weil die Induktivität hier stromabhängig ist.