Für einen mathematisch präzisen Integralbegriff benötigen wir die folgende allgemeine Definition für die Zerlegung eines Intervalles.

Definition (Zerlegung eines Intervalles)

Gegeben sei ein Intervall $[a,b]$. Durch $n+1$ Zahlen x_i mit der Eigenschaft $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ wird eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \dots, n)$ bestimmt. Dabei ist $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b-a$. Das Maximum $d(Z)$ der Längen der Teilintervalle, $d(Z) := \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ heißt Feinheit der Zerlegung Z. Sind zu einer Zerlegung Z n Stellen $\xi_i \in [a,b]$ mit $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ $(i=1,\dots,n)$ gegeben, so heißen sie Zwischenstellen der Zerlegung Z. Ist auf $[a,b]$ eine Funktion f definiert, so heißt die Summe $S_f(Z)$ mit $S_f(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ die Zwischensumme von f zur Zerlegung Z.

Bemerkungen

1) Zu jedem Intervall sind unendlich viele Zerlegungen möglich.
2) Jede Zerlegung hat eine bestimmte Feinheit.
3) Zu jeder Zerlegung können auf unendlich viele Arten Zwischenstellen gegeben sein.
4) Die Zwischensumme hängt von f und von der Zerlegung und von der Wahl der Zwischenstellen von Z ab.

Definition (Bestimmtes Integral)

Gegeben sei ein Intervall $[a,b]$ und eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. f heißt über $[a,b]$ integrierbar (im Riemann'schen Sinne), wenn es eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ (jeweils mitsamt beliebig gewählter Zwischenstellen) mit der Eigenschaft, dass die zugehörige Folge $(d(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Feinheiten eine Nullfolge ist, $\lim_{n \to \infty} d(Z_n) = 0$, die zugehörige Folge $(S_f(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Zwischensummen von f gegen I konvergiert: $\lim_{n \to \infty} S_f(Z_n) = I$. I heißt dann das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ und wird so