

8.3/ Integrierbarkeit und Integralwert

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall a > 0, a \in \mathbb{R}$ ist integrierbar

i) f gerade: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

für gerade Funktionen gilt: $f(x) = f(-x)$

Daraus folgt: $\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

ii) f ungerade: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

für ungerade Funktionen gilt: $f(x) = -f(-x)$

Daraus folgt: $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0$$