6.17 | Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a) $D(\alpha)^{-1} \overset{!}{=} D(\alpha)^T \to D(\alpha)$ ist orthogonal

Transponierte Matrix:

$$D(\alpha)^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Wenn $D(\alpha) \cdot D(\alpha)^T = E$ gilt, gilt $D(\alpha)^T = D(\alpha)^{-1}$:

$$D(\alpha) \cdot D(\alpha)^T \overset{!}{=} E$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\alpha + (-\sin\alpha)(-\sin\alpha) & \cos\alpha \cdot \sin\alpha + (-\sin\alpha) \cdot \cos\alpha \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha(-\sin\alpha) & \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{\sin^2 + \cos^2 = 1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ //

b) $|D(\alpha)| \overset{!}{=} 1$

$$|D(\alpha)| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$ ✓

c) $D(\alpha)^{-1} \overset{!}{=} D(-\alpha)$

$$\begin{pmatrix} \cos -\alpha & \sin -\alpha \\ -\sin -\alpha & \cos -\alpha \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\cos -\alpha = \cos\alpha \to$ Additionstheorem
$\sin -\alpha = -\sin\alpha \to$ Additionstheorem
$-\sin -\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \sin\alpha$

d) $D(\alpha) \cdot D(\beta) \overset{!}{=} D(\beta) \cdot D(\alpha) \overset{!}{=} D(\alpha + \beta)$

$D(\alpha) \cdot D(\beta)$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot (-\sin\beta) & \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ -\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot (-\sin\beta) & \sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$D(\beta) \cdot D(\alpha)$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot (-\sin\alpha) & \cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha \\ -\sin\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot (-\sin\alpha) & -\sin\beta \cdot \sin\alpha + \cos\beta \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = D(\alpha) \cdot D(\beta)$$

$D(\alpha+\beta)$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

e) $D(\pi/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$