1.29 Bijektivität und Umkehrfunktion

a)
$x \mapsto f(x) = 3x+5$

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge: $\mathbb{R}$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1+5 = 3x_2+5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} \; t = f(x)$

Sei $t = f(x) \Rightarrow t = 3x+5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(t-5) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Umkehrfunktion:

$y = 3x+5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y-5) = f^{-1}(y)$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{3}(y-5)$

b)
$x \mapsto f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2n} = x_2^{2n} \Leftrightarrow \pm x_1^n = \pm x_2^n$ → nicht injektiv

Surjektivität: $\forall t \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} \; t = f(x)$

Sei $t = f(x) = x^{2n} \Rightarrow \pm\sqrt{t} = x^n$ → nicht surjektiv

Da die Funktion nicht injektiv ist, bewirkt auch eine Veränderung der Zielmenge keine Bijektivität!

c)
$x \mapsto f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{2n+1} = x_2^{2n+1} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} \; t = f(x)$

Sei $t = f(x) = x^{2n+1} \Leftrightarrow x = \sqrt[2n+1]{t}$

Umkehrfunktion:

$y = x^{2n+1} \Leftrightarrow x = \sqrt[2n+1]{y} = f^{-1}(y)$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \sqrt[2n+1]{y}$

d)
$x \mapsto f(x) = \sqrt{3x}$

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Sei $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{3x_1} = \sqrt{3x_2} \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Surjektivität: $\forall t \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^{\geq 0} \; f(x) = t$

Sei $t = f(x) = \sqrt{3x} \Rightarrow 3x = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t^2$ → Man könnte auch negative Zahlen einsetzen und die Funktion würde funktionieren, weshalb f nicht surjektiv

Änderung der Zielmenge Z zu $W_f \Rightarrow$ surjektiv

Umkehrfunktion:

$y = \sqrt{3x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y^2$

$f^{-1} = \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, y \mapsto \frac{1}{3}y^2$