4.1) Gesetzmäßigkeiten für Funktionen

a) $2n$ ergibt für alle $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl, da $2n$ immer durch 2 teilbar ist. Somit ergibt $2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine ungerade Zahl.
$\Rightarrow x^{2n}$ ist eine gerade Funktion, da alle geraden Potenzen Achsensymmetrisch sind
$\Rightarrow x^{2n+1}$ ist eine ungerade Funktion, da alle ungeraden Potenzen Punktsymmetrisch sind.

b)
$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \to$ gerade
$u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \to$ ungerade
Definitionen:
gerade: $f(x) = f(-x)$
ungerade: $f(-x) = -f(x)$
$\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) \to$ gerade
$\frac{1}{2}(-f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}(-f(-x) + f(-(-x))) = \frac{1}{2}(-f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \to$ ungerade

c)
gerade · gerade: $f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x)$
ungerade · ungerade: $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x)$
gerade · ungerade: $f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot -g(-x) \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) = -(f(x) \cdot g(x))$

e) $f(x) \{\neq ?\} f(x+1)$, $x \neq x+1 \Rightarrow f(x) \{\neq ?\} f(x+1) \Rightarrow x \neq x+1 \Rightarrow f(x) \neq f(x+1)$, sei $x = x_1$ und $x+1 = x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x$

f) f ist injektiv (s.h. e)) und surjektiv, da die Zielmenge gleich der Wertemenge ist
$\to f$ ist bijektiv
$f(x)^{-1} = ?$ $\quad f(x_1) \{?\} f(x_2) \Rightarrow$

g) $f(x) = f(x+t)$, $g(x) = g(x+t)$

$f(x) \pm g(x) = f(x+t) \pm g(x+t)$
$f(x) \cdot g(x) = f(x+t) \cdot g(x+t)$
$f(x) / g(x) = f(x+t) / g(x+t)$

$f(x) = f(x+t)$, $g(x) = g(x+s) \neq g(x+t)$

$f(x) \pm g(x) \neq f(x+t) \pm g(x+t)$
$f(x) \cdot g(x) \neq f(x+t) \cdot g(x+s)$
$f(x) / g(x) \neq f(x+t) / g(x+s)$