8.41

a) $\int \sin(17x)\,dx$

$f(x) = \sin(17x)$, $x = g(t) = \frac{1}{17}t$

$\int \sin(17x)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{17}\,dt = \frac{1}{17}\int \sin t\,dt = \frac{1}{17}\cdot \cos t \Rightarrow \frac{1}{17}\cdot\cos(17x) + c$

b) $\int \frac{1}{6-5x}\,dx$

Das Integral ist auf $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{6}{5}\}$ stetig, da an dieser Stelle der Nenner $=0$ wird.

$f(x) = \frac{1}{6-5x}$, $x = g(t) = \frac{6}{5} - \frac{t}{5}$

$\cancel{\int \frac{1}{6-5x}dx = \int \frac{1}{6-6t}\cdot\frac{dt}{5} = \frac{6}{5}\int\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-t}dt = \frac{1}{5}\int\frac{1}{1-t}\,dt}$

$\int \frac{1}{6-5x}dx = \int \frac{1}{6-(6-t)}\cdot \frac{1}{5}\,dt = \int \frac{1}{6-6+t}\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int\frac{1}{t}dt = -\frac{1}{5}\cdot\ln(t)$

$g^{-1}(t): x = \frac{6}{5} - \frac{t}{5} = \frac{6-t}{5}$

$5x = 6 - t \Leftrightarrow t = 6-5x$

$\Rightarrow -\frac{1}{5}\cdot\ln(6-5t)$ //

c) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

Das Integral ist auf $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{n\pi\}, n \in \mathbb{Z}$ stetig.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x = g(t) = \sin x$

$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} \ln|\sin x| + c$ //

d) $\int \frac{2y}{\sqrt{1-y^4}}\,dy$

Das Integral ist auf $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ stetig.

$f(x) = \frac{2y}{\sqrt{1-y^4}}$, $y = g(t) = \sqrt{t}$

$\int \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1-\sqrt{t}^4}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t$

$g^{-1}(t): y = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = y^2$

$\int \frac{2y}{\sqrt{1-y^4}}dy = \arcsin y^2 + c$ //

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

Das Integral ist definiert auf $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$, $x = g(t) = t^2$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2}} \cdot e^{\sqrt{t^2}} \cdot 2t\, dt = \int \frac{1}{t} \cdot e^{t} \cdot 2t\, dt = 2\int e^{t} dt = 2e^{t}$

$g^{-1}(t) \hat{=} x = t^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + c$

f) $\int_2^3 \sqrt{3t-5}\, dt$

Das Integral ist auf $\mathbb{R}$ für $x \geq \frac{5}{3}$ definiert.

$f(x) = \sqrt{3t-5}$, $x = g(h) = \frac{5+h^2}{3}$

$\int_2^3 \sqrt{3t-5}\, dt = \int_{g^{-1}(2)}^{g^{-1}(3)} \sqrt{3 \cdot \frac{5+h^2}{3} - 5}\, dh = \int_{g^{-1}(2)}^{g^{-1}(3)} \sqrt{h^2} = \int_{g^{-1}(2)}^{g^{-1}(3)} h\, dh$

$g^{-1}(h) = t = \frac{5+h^2}{3} \Leftrightarrow 3t = 5+h^2 \Leftrightarrow \sqrt{3t-5} = h$

$G(h)\Big|_{g^{-1}(2)}^{g^{-1}(3)} = G(h)\Big|_{\sqrt{3\cdot 2-5}}^{\sqrt{3\cdot 3-5}} = \sqrt{3\cdot 3-5} - \sqrt{3\cdot 2-5} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$

h) $\int_1^e \frac{1}{u(1+\ln u)}\, du$

Das Integral ist auf $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert.

$f(x) = \frac{1}{u(1+\ln u)}$, $u = g(h) = e^h$

$\int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(e)} \frac{1}{e^h(1+\ln e^h)} e^h\, dh = \int_{g^{-1}(1)}^{g^{-1}(e)} \frac{1}{1+h}\, dh$

$g^{-1}(h) = u = e^h \Leftrightarrow g^{-1}(h) = \ln u$

$\int_0^1 \frac{1}{1+h}\, dh$

$t(h) = \frac{1}{1+h}$, $T(h) = \ln|1+h| + c$, hier $c = 0$ gewählt.

$\ln|1+h|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$