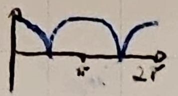
7.2) Differenzierbarkeit

a) $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})|$

Visualisierung:



„Gleichgerichtet"

Der Sinus ist uns als stetige Funktion bekannt, da die gegebene Funktion „nur" ein verschobener Sinus (Cosinus) ist, wovon der Betrag genommen wurde, ist diese auch stetig.

Hier sind die Knickstellen die Nullstellen der Funktion:

da 0 kein Vorzeichen hat

$0 = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| \Rightarrow 0 = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \arcsin 0 = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \arcsin 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

Aus Skizze:

Die Gleichung besitzt Nullstellen bei $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \wedge$ ungerade

Dort ist die Funktion nicht differenzierbar → s.h. Vorlesung „Knickstellen".

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ 2e^{-x} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 2|x-1| & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ Differenzierbarkeit an $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$x_0: f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{2e^{-x} - 2e^2}{x + 2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -2} \frac{(2e^{-x} - 2e^2)(x+2)}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(2e^{-x} - 2e^2)(x+2)}{x^2 + 4x + 4}$

$= \frac{(2e^2 - 2e^2)(2+2)}{4+8+4} = \frac{0}{16} = 0$

$x_1: f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{x^2 + 2|x-1| - (x_1^2 + 2|x_1 - 1|)}{x - x_1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2|x-1| - 2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + |2x-2| - 2}{x}$

⇒ weil $x_0 \wedge x_1$ Knickstellen dort nicht differenzierbar?