Beispiele

...

2) $\int \alpha x^{\alpha-1} dx = x^\alpha + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ bzw. $\int x^\beta dx = \frac{1}{\beta+1} x^{\beta+1} + c \; (\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

3) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$

8.3 Integrationsmethoden

In diesem Abschnitt lernen wir Techniken zur Berechnung von Integralen kennen. Die Strategie ist jeweils, das zu berechnende Integral durch geschickte Umformung in ein einfacheres bzw. bekanntes Integral zu überführen.

8.3.1 Substitution

$\int f(x) dx = \int x \cos x^2 \, dx$ ist kein bekanntes Integral. Was ist zu tun? Idee: Ersetze („substituiere") geschickt x durch $g(t)$ und damit formal auch dx (wegen $\frac{dx}{dt} = g'(t)$) durch $g'(t)dt$, also $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \, g'(t) dt = \int h(t) dt$. Hoffe, dass sich für $h(t)$ leicht eine Stammfunktion $H(t)$ findet.

Aus $x = g(t) = \sqrt{t}$ folgt $\int x \cos x^2 dx = \int \cancel{\sqrt{t}} \cos t \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{t}}} dt = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t + c$.

Zum Schluss muss noch rücksubstituiert werden: $t = g^{-1}(x) = x^2$, $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2 + c$

Satz (Substitutionsmethode)

f sei auf $[a,b]$ stetig. Die Funktion g sei auf $g^{-1}([a,b])$ umkehrbar und differenzierbar. Dann ist die Funktion h, definiert durch $h(t) = f(g(t)) \, g'(t)$, integrierbar und für eine Stammfunktion H von h gilt $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \, g'(t) dt = \int h(t) dt = H(t) + c = H(g^{-1}(x)) + c$ bzw.

$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \, g'(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} h(t) = H(t) \Big|_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}$

Beispiele

1) $\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx$, $k \in \mathbb{N}$: $f(x) = \cos(kx)$, $x = g(t) = \frac{1}{k} t$

$\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = \int_0^{2\pi k} \cos t \cdot \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \sin t \Big|_0^{2\pi k} = 0 - 0 = 0$

2) $\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = g(t)$

$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c = \ln |g(t)| + c$

$\int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = - \int \frac{\cos' t}{\cos t} dt = - \ln |\cos t| + c$

8.3.2 Partielle Integration

$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \sin x\,dx$ ist kein uns spontan bekanntes Integral. Was ist zu tun?

Idee: $f(x) = x \cdot \sin x$ hat die Form eines Produktes. Aus der Differentialrechnung wissen wir, dass für die Ableitung $u(x) \cdot v(x)$ zweier Funktionen gilt: $(u(x) \cdot v(x))' = u(x)'v(x) + u(x)v'(x)$. Hierraus resultiert der folgende Satz.

Satz (Partielle Integration)

Sind die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ auf $[a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt auf $[a,b]$ $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v(x)\,dx$ bzw.
$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx$.

Schreibe also $f(x)$ geschickt als Produkt $f(x) = u'(x) \cdot v(x)$ und hoffe, dass 1. eine Stammfunktion $u(x)$ von $u'(x)$ bekannt ist und 2. das Integral $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx$ leicht lösbar ist.