8.5.3 Mittelwerte

Definition (linearer und quadratischer Mittelwert)

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ stetig. Dann heißt die Größe $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ linearer Mittelwert, die Größe $\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}$ quadratischer Mittelwert von f auf $[a,b]$.

Beispiel (Effektivwert eines Wechselstroms)

Gegeben sei ein periodischer Wechselstrom mit der Stromstärke $I(t) = I_0 \sin \omega t$ als Funktion der Zeit. Dabei steht I_0 für die Amplitude, ω für die Kreisfrequenz und $T = \frac{2\pi}{\omega}$ für die Periode von $I(t)$. Für den als Effektivwert bezeichneten quadratischen Mittelwert des Stromes gilt: $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I(t)^2\,dt}$

$= \sqrt{\frac{1}{T} I_0^2 \int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt} \overset{\tau=\omega t}{=} \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \approx 0{,}707\, I_0$

9. Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1 Grundlegende Begriffe

In der Klausur: Teilaufgabe, Grundverständnis wird abgefragt und eine leichte Gleichung soll gelöst werden.

Bei der mathematischen Modellierung sehr vieler technischer und naturwissenschaftlicher Sachverhalte ergeben sich Gleichungen, in denen Funktionen und ihre Ableitungen gemeinsam auftreten.

Beispiel (Radioaktiver Zerfall)

Sei $n(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Atome einer radioaktiven Substanz. Die Anzahl der Atome, die in einer kleinen Zeitspanne Δt zerfällt, ist proportional zur vorhandenen Anzahl Atome und auch zur Zeitspanne Δt: $n(t+\Delta t) - n(t) = -\lambda\, n(t)\,\Delta t$. Im Limes $\Delta t \to 0$ ergibt dies die „gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung" $n'(t) = -\lambda\, n(t)$.

Definition (Differentialgleichung)

Eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion heißt Differentialgleichung, wenn sie mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthällt.

Die Ordnung der in der Differentialgleichung vorkommenden höchsten Ableitung der gesuchten Funktion heißt Ordnung der Differentialgleichung.

⇒ Anhand dieses Satzes muss man Differentialgleichungen identifizieren können.

Hängt die in der Differentialgleichung gesuchte Funktion nur von einer Variable ab, so nennt man die Differentialgleichung gewöhnlich. Hängt sie hingegen von mehreren Variablen ab, dann nennt man die Differentialgleichung partiell.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n hat die implizite Form $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$, oder, falls sich diese Gleichung nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, die explizite Form $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$.

Die Differentialgleichung heißt linear, wenn F bzw. f in linearer Weise von $y, y', \dots, y^{(n)}$ abhängen.

Eine Funktion $y=\varphi(x)$ heißt Lösung der Differentialgleichung $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ bzw. $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ auf dem Intervall I, wenn

1) φ auf I n mal differenzierbar ist und
2) $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))=0$ bzw. $\varphi^{(n)}=f(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n-1)}(x))$

für alle $x\in I$ gilt.

Die Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung heißt deren allgemeine Lösung. Sie enthält Konstanten, die man Integrationskonstanten bezeichnet.