Aufgabe 1 - *

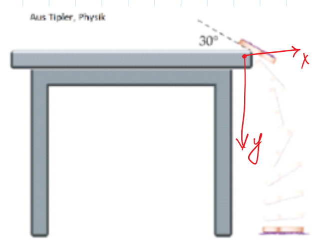
Warum landet eine Toastbrotscheibe, die vom Tisch fällt, immer mit der Marmeladenseite auf dem Teppich? Die Frage klingt albern, ist aber ernsthaft wissenschaftlich untersucht worden. Die Theorie ist zu kompliziert, als dass man sie hier detailliert wiedergeben könnte, aber R. D. Edge und D. Steinert zeigten, dass eine (als quadratisch angenommene) Scheibe Toastbrot, die man vorsichtig über den Rand einer Tischplatte schiebt, bis sie kippt, typischerweise dann herunterfällt, wenn der Winkel gegen die Horizontale größer ist als 30°. In diesem Moment hat die Scheibe eine Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 0,956\sqrt{g/l}$, wobei l ihre Kantenlänge ist. Die Marmeladenseite ist natürlich oben.

a) Auf welche Seite fällt die Scheibe, wenn der Tisch 0,500 m hoch ist?

b) Wie sieht es bei einem 1,00 m hohen Tisch aus?

Setzen Sie für die Kantenlänge $l = 10,0$ cm an und vernachlässigen Sie alle Effekte durch den Luftwiderstand.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



$\Theta_0 = 30°$

$\omega = 0,956\sqrt{g/l}$

$\Theta = \Theta_0 + \omega t_?$

ω - bleibt während des Falls const

$\omega = 0,956\sqrt{\frac{g}{l}}$

a) Θ - ? wenn $\Theta > 180°$ dann Marmeladenseite

Fallzeit t → können wir anhand der Fallbeschleunigung und Tischhöhe h ermitteln

$y = \underset{0}{y_0} + \underset{0}{v_0 t} + \frac{1}{2} g t^2$

$y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \qquad t = \sqrt{2h/g}$

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$\Theta = \Theta_0 + 0,956\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\Theta = \Theta_0 + 0,956\sqrt{\frac{2h}{l}} = 30° + \underbrace{0,956\sqrt{\frac{2 \cdot 0,5\,m}{0,1\,m}}}_{3,021\ \cancel{°}\ \text{oder rad ?}} = \frac{\pi}{6} + 3,021\ rad = 3,54\ rad > \pi$ (oder 3,14) $\Rightarrow$ Marmeladenseite

3,54 rad = in ° ?

180° ⇒ π

x ⇒ 3,54

x = 203,18° > 180°

⇒ Marmeladen Seite

b) $h = 1\,m$ $\quad\Theta$ - ?

$\Theta = \Theta_0 + 0,956 \cdot \sqrt{\frac{2h}{l}} = 4,29\ rad > \frac{2\pi}{3}\ rad$

$\Theta_0 = 30°\ (\frac{\pi}{6})$

275° > ⇒ nicht Marmeladen seite

Aufgabe 2 - **

Ein Rad beginnt sich aus dem Stillstand zu drehen, die Winkelbeschleunigung ist $2,6\ rad/s^2$. Wir warten 6,0 s lang ab.

a) Wie hoch ist dann die Winkelgeschwindigkeit?

b) Um welchen Winkel hat sich das Rad bis dahin gedreht?

c) Wie viele Umdrehungen hat es ausgeführt?

d) Welche tangentiale Geschwindigkeit und welche lineare Beschleunigung liegen nun an einem Punkt in 0,30 m Abstand von der Drehachse vor?

Lösung 2- **

$\omega = 16$ rad/s
$\varphi = 47$ rad
$U = 7,4$ U
$v = 4,7\ m/s$ und $a = 73\ m/s^2$

$\alpha = 2,6\ \frac{rad}{s^2}$

a) $\omega = \underset{\text{aus dem Stillstand} = 0}{\omega_0} + \alpha t = \alpha t = 2,6\ \frac{rad}{s^2} \cdot 6\,s = 15,6\ \frac{rad}{s} \approx 16\ \frac{rad}{s}$

b) $\Theta = \underset{\text{Startwert } 0}{\Theta_0} + \underset{0}{\omega_0 t} + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,6\ \frac{rad}{s} \cdot (6\,s)^2 = 46,8\ rad = 47\ rad$

c) $\Theta = 47\ rad$ $\qquad$ 1 Umdrehung = $2\pi = 6,28\ rad$

$\frac{\Theta}{2\pi} = \frac{47\ rad}{6,28\ rad} = 7,45$ Umdrehungen

d) $v_t = R \cdot \omega = 0,30\,m \cdot 15,6\ \frac{rad}{s} = 4,68\ \frac{m}{s}\,! = 4,7\ \frac{m}{s}$

$a_t = R \cdot \alpha = 0,30\,m \cdot 2,6\ \frac{rad}{s^2} = 0,78\ \frac{m}{s^2}$

$a_R = a_z = R \cdot \omega^2 = 0,30\,m \cdot \left(15,6\ \frac{rad}{s}\right)^2 = 73\ \frac{m}{s^2}$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_z^2} = \sqrt{(0,78)^2 + (73)^2} = 73\ \frac{m}{s^2}$

Aufgabe 3 - *

Betrachten Sie das Trägheitsmoment eines durchschnittlichen Erwachsenen bezüglich einer Achse, die vertikal mitten durch seinen Körper verläuft. Unterscheiden Sie die Fälle, dass er die Arme eng an den Körper presst und dass er die Arme seitlich waagerecht ausstreckt. Schätzen Sie das Verhältnis der beiden Trägheitsmomente ab.

Betrachten Sie das Trägheitsmoment eines durchschnittlichen Erwachsenen bezüglich einer Achse, die vertikal mitten durch seinen Körper verläuft. Unterscheiden Sie die Fälle, dass er die Arme eng an den Körper presst und dass er die Arme seitlich waagerecht ausstreckt. Schätzen Sie das Verhältnis der beiden Trägheitsmomente ab.

$m_K = 80\ kg$

$m_H = 20\%\ m_K = 16\ kg$

$l_{Hand} = 1m$

Brust Umfang = 86cm

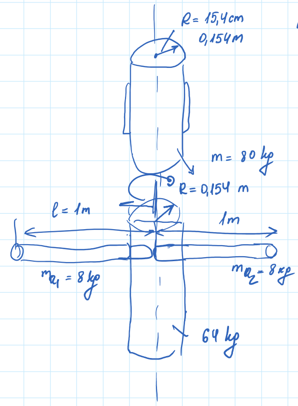
Brust Umfang = 107 cm

$\} = 96{,}5\ cm$ (durchschnittlicher Wert)

$U = 2\pi R$

$R = \frac{U}{2\pi} = \frac{96{,}5\ cm}{2\pi} = 15{,}4 cm$

$I_K = \frac{1}{2} m \cdot R^2$



$I_K = \frac{1}{2} m R^2_{K-arm}$

$I_{arm} = \frac{1}{3} m_{arm} \cdot l_{arm}^2$

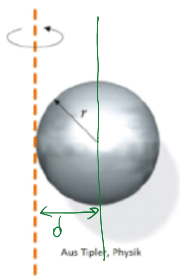
$I_{ausgest} = I_K + 2 \cdot I_{arm}$

$$\frac{I_{ausgest}}{I_{anlieg}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_{K-arm} \cdot R^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} m_{arm} \cdot l^2}{\frac{1}{2} m_K \cdot R^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 64\ kg \cdot 0{,}154^2 m^2 + \frac{2}{3} \cdot 8 kg \cdot 1m^2}{\frac{1}{2} \cdot 80 kg \cdot 0{,}154^2 m^2}$$

$$\approx 6$$

Aufgabe 4 - **

Ermitteln Sie das Trägheitsmoment einer massiven Kugel mit der Masse m und dem Radius r bezüglich einer Achse, die tangential zur Kugeloberfläche verläuft.



	Körper	Ort der Drehachse	Trägheits-moment
(a)	Dünner Reifen mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	MR_0^2
(b)	Dünner Reifen mit Radius R_0 und Breite b	Durch zentralen Durchmesser	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mb^2$
(c)	Massiver Zylinder mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d)	Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$
(e)	Homogene Kugel mit Radius r_0	Durch den Mittelpunkt	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f)	Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{12}Ml^2$
(g)	Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch ein Ende	$\frac{1}{3}Ml^2$
(h)	Rechteckige dünne Platte mit Länge l und Breite b	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{12}M(l^2+b^2)$

Aus Giancoli, Physik

Lösung 4- **

$I = \frac{7}{5}mr^2$

$I = I_S + md^2 \qquad I_S = \frac{2}{5} m r^2$

$d = r$

$I = \frac{2}{5} m r^2 + \frac{5}{5} m r^2 = \frac{7mr^2}{5} = \frac{7}{5} mr^2$

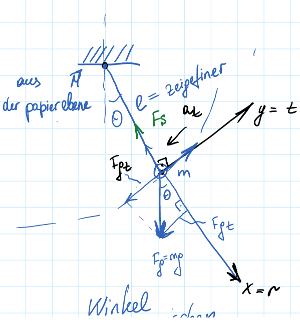
Aufgabe 5 - *

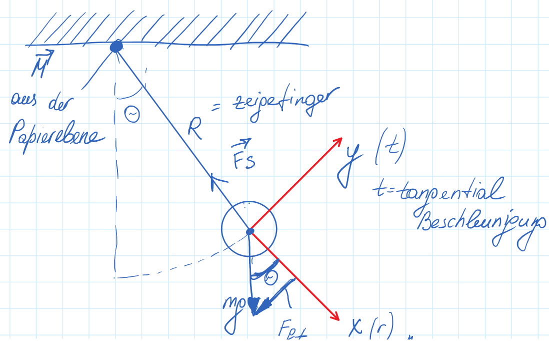
Ein Fadenpendel mit der Länge l und der Pendelmasse m schwingt in einer vertikalen Ebene. Wenn der Faden einen Winkel θ mit der Vertikalen bildet,

a) wie hoch ist dann die Tangentialkomponente der auf den Pendelkörper wirkenden Beschleunigung? (Verwenden Sie die Gleichung $F_t = ma_t$.)

b) Welches Drehmoment wird bezüglich der Aufhängung ausgeübt?

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $M = I\alpha$ mit $a_t = l\alpha$ dieselbe Tangentialbeschleunigung ergibt, wie sie in Teilaufgabe a) ermittelt wurde.





Winkel zwischen F_t und $r = 90°$

b) $\vec{M}$ - ?

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F_t} = F_t \cdot r \cdot \sin(\alpha) = mg \cdot \sin\theta \cdot \ell \cdot \underbrace{\sin 90°}_{=1} = mg \cdot \sin\theta \cdot \ell$$

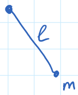
c) $\boxed{M = I \cdot \alpha} =$

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r = \alpha \cdot \ell$$

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{\cancel{m}g \cdot \sin\theta \cancel{\ell}}{\cancel{m} \cdot \ell^{\cancel{2}}} = \frac{g \cdot \sin\theta}{\ell}$$

$$a_t = \alpha \cdot \ell = \frac{g \cdot \sin\theta}{\cancel{\ell}} \cdot \cancel{\ell} = g \cdot \sin\theta$$

$$a_t = g \cdot \sin\theta$$



$I = m \cdot \ell^2$ ← aus der Def. von Trägheitsmoment

$\sum \vec{F_i} = m\vec{a}$

„Mittelfinger"

y: $\cancel{m}g \cdot \sin\theta = \cancel{m}a_t$

$a_t = g \cdot \sin\theta$

Aufgabe 6 - **

Ein Zylinder mit dem Radius 11 cm und der Masse 2,5 kg ist um die Zylinderachse drehbar gelagert. Zu Beginn ist der Zylinder in Ruhe. Um ihn ist ein Seil mit vernachlässigbarer Masse geschlungen, an dem eine Zugkraft von 17 N wirkt. Das Seil soll schlupffrei über den Zylinder laufen. Berechnen Sie

a) das Drehmoment, das das Seil auf den Zylinder ausübt,

b) die Winkelbeschleunigung des Zylinders und

c) die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders nach 0,50 s.

Lösung 6- **

$M = 1,9\ N \cdot m$

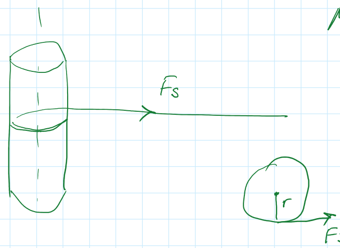
$\alpha = 1,2 \cdot 10^2 rad \cdot s^{-2} = 120\ \frac{rad}{s^2}$

$\omega = \cancel{6,2 \cdot 10^2 rad} \cdot s^{-1}$ $62,5\ rad \cdot s^{-1}$

$m = 2,5\ kg$ $F = 17\ N$

$r = 11\ cm$

a) M - ?



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\underset{90°}{\alpha} = F \cdot r$$

$$M = 17\ N \cdot 11\ cm = 17\ N \cdot 0,11\ m = 1,9\ N \cdot m = 1,9\ J$$

b) α - ?

$$M = I \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{M}{I} \text{ - ?} \qquad I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\alpha = \frac{M}{\frac{1}{2} m r^2} = \frac{2M}{mr^2} = \frac{2 \cdot 1,9\ N \cdot m}{2,5\ kg \cdot (0,11\ m)^2} = 125\ \frac{rad}{s^2}$$

Einheiten - check

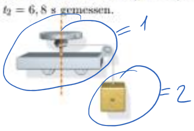
$$\frac{N \cdot \cancel{m}}{kg \cdot m^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{kg} \cdot \frac{\cancel{m}}{s^2}}{\cancel{kg}\ \cancel{m}} = \frac{1}{s^2}!$$

c) $\omega = \underset{0}{\omega_0} + \alpha t$

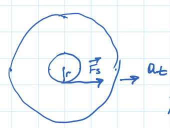
$$\omega = \alpha t = 125\ \frac{rad}{s^2} \cdot 0,5\ s = 62,5\ \frac{rad}{s}$$

Aufgabe 7 - *

Abbildung zeigt eine Anordnung zur Messung von Trägheitsmomenten. An einem Drehteller ist ein konzentrischer Zylinder mit einem Radius r befestigt, um den eine Schnur gewunden ist. Drehteller und Zylinder können sich um eine vertikale Achse reibungsfrei drehen. Die Schnur läuft über eine reibungsfreie und masselose Rolle zu einem Gewichtsstück mit der Masse m. Dieses wird aus dem Stillstand losgelassen, und man misst die Zeit t_1, in der es um eine Höhe d fällt. Dann wickelt man die Schnur wieder auf, legt den Körper, dessen Trägheitsmoment I zu messen ist, auf den Drehteller und lässt das Gewichtsstück erneut fallen. Mit der Zeitspanne t_2, die es nun für dieselbe Fallstrecke benötigt, lässt sich I berechnen. Mit $r = 10$ cm, $m = 2,5$ kg und $d = 1,8$ m werden die Fallzeiten $t_1 = 4,2$ s und $t_2 = 6,8$ s gemessen.



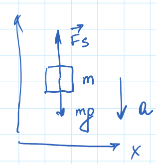
„1"



$\vec{M}_{F_s} = \vec{r} \times \vec{F_s}$

$M = F_s \cdot r$

„2"



$a_t = a$

a) Berechnen Sie das Gesamtträgheitsmoment des Systems aus Drehteller und Zylinder.

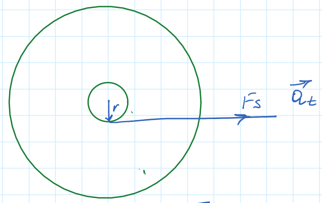
b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Systems aus Drehteller, Zylinder und zu vermessendem Körper.

c) Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse des Drehtellers.

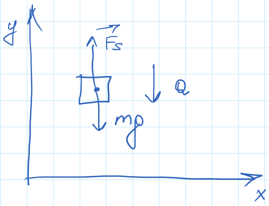
c) Berechnen Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse des Drehtellers.

(1)

$r = 10\,cm$
$m = 2{,}5\,kg$
$d = 1{,}8\,m$
$t_1 = 4{,}2\,s$
$t_2 = 6{,}8\,s$



(2)



a) I_{D+Z}

$$\sum \vec{M} = I \cdot \alpha$$
$$\sum \vec{M} = \vec{M}_s = \vec{r} \times \vec{F}_s$$
$$F_s \cdot r = I \cdot \alpha \quad (1)$$
$$F_s = \frac{I \cdot \alpha}{r} \longrightarrow a = \alpha \cdot r$$
$$\alpha = \frac{a}{r}$$
$$F_s = \frac{I \cdot a}{r^2} \quad (1^*)$$

$$\sum F_i = ma$$
$$F_s - mg = -ma \quad (2)$$
(1^*) in (2)
$$\frac{I \cdot a}{r^2} - mg = -ma$$
I - ?
$$\frac{I \cdot a}{r^2} = mg - ma = m(g-a)$$
$$I = \frac{r^2 \cdot m \cdot (g-a)}{a} \quad (2)$$
a - ?

Strecke d und Zeite sind bekannt, wir können diese Angaben nutzen

$$y = y_0 + \underset{0}{v_0} t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$y - y_0 = \frac{1}{2} a t^2$$
$$d = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a = \frac{2d}{t^2} \quad (3)$$

(3) in (2)

$$I = \frac{r^2 \cdot m \cdot \left(g - \frac{2d}{t^2}\right)}{\frac{2d}{t^2}} = \frac{r^2 \cdot m \cdot t^2 \cdot \left(g - \frac{2d}{t^2}\right)}{2d} = \frac{(0{,}1\,m)^2 \cdot 2{,}5\,kg \cdot (4{,}2\,s)^2 \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2} - \frac{2 \cdot 1{,}8\,m}{(4{,}2\,s)^2}\right)}{2 \cdot 1{,}8\,m}$$

$$I = 1{,}18\,kg \cdot m^2 \checkmark$$

Einheiten-Check $\quad \frac{m^2 \cdot kg \cdot s^2 \cdot \frac{m}{s^2}}{m} = kg \cdot m^2 \checkmark$

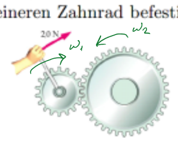
b) I_{D+Z+K} - ?

$$I = \frac{r^2 \cdot m \cdot t^2 \cdot \left(g - \frac{2d}{t^2}\right)}{2d} = \frac{(0{,}1\,m)^2 \cdot 2{,}5\,kg \cdot (6{,}8\,s)^2 \cdot \left(9{,}81\,\frac{m}{s^2} - \frac{2 \cdot 1{,}8\,m}{(6{,}8\,s)^2}\right)}{2 \cdot 1{,}8\,m} = 3{,}13\,kg \cdot m^2$$

c) $I_K = I_{D+Z+K} - I_{D+Z} = 3{,}13\,kg \cdot m^2 - 1{,}18\,kg \cdot m^2 = 1{,}94\,kg \cdot m^2$

Aufgabe 8 - **

Abbildung zeigt zwei große Zahnräder als Teil einer größeren Maschine. Jedes der Zahnräder ist um eine feste Achse durch seinen Mittelpunkt frei drehbar. Die Radien der Zahnräder sind 0,50 m bzw. 1,0 m, die Trägheitsmomente $1{,}0\ kg \cdot m^2$ bzw. $16 kg \cdot m^2$. Der an dem kleineren Zahnrad befestigte Hebel ist 1,0 m lang und hat eine vernachlässigbare Masse.



a) Ein Arbeiter übt typischerweise eine Kraft von 2,0 N auf das Ende des Hebels aus, wie dargestellt. Wie hoch sind dann die Winkelbeschleunigungen der beiden Zahnräder?

b) Ein anderes (in der Abbildung nicht sichtbares) Teil der Maschine übt eine Tangentialkraft auf den Außenrand des größeren Zahnrads aus, um das Getriebe zeitweise am Rotieren zu hindern. Welchen Betrag und welche Richtung (im oder gegen den Uhrzeigersinn) sollte diese Tangentialkraft haben?

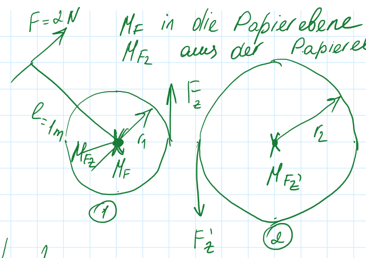
Lösung 8- **

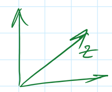
$\alpha_1 = 0{,}4\ rad \cdot s^{-2}$ und $\alpha_2 = 0{,}2\ rad \cdot s^{-2}$
$F_a = 4\ N$

F = 2N

M_F in die Papierebene
M_{F_2} aus der Papierebene $\}$ Rechte-Hand-Regel

M_F in die Papierebene
M_{F_2} aus der Papierebene } Rechte-Hand-Regel





a) α_1, α_2 - ?

(1) $\sum M_{1_i} = I_1 \cdot \alpha_1$

(2) $\sum M_{2i} = I_2 \cdot \alpha_2$

(1) $F \cdot l - F_2 \cdot r_1 = I_1 \alpha_1 \; (1)$ (2) $F_2' \cdot r_2 = I_2 \cdot \alpha_2$

$F_2 = F_2'$ $F_2' = \frac{I_2 \cdot \alpha_2}{r_2} \; (2^*)$

2^* in (1)

$$F \cdot l - \frac{I_2 \cdot \alpha_2}{r_2} \cdot r_1 = I_1 \cdot \alpha_1 \; (1)^*$$

Tangentialbeschleunigung am Eingriffspunkt der Zahnräder ist gleich

$$a_{t1} = a_{t2}$$

$$\alpha_1 \cdot r_1 = \alpha_2 \cdot r_2 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdot \alpha_2 = \frac{1m}{0{,}5m} \cdot \alpha_2 = 2\alpha_2 \quad (3)$$

3 in (1*)

$$F \cdot l - \frac{I_2 \cdot \alpha_2}{r_2} \cdot r_1 = I_1 \cdot 2\alpha_2$$

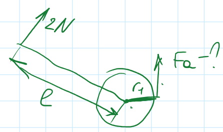
$$Fl = I_1 \cdot 2 \cdot \alpha_2 + \frac{I_2 \cdot \alpha_2}{r_2} \cdot r_1 = \alpha_2 \cdot \left(2 I_1 + \frac{I_2 \cdot r_1}{r_2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{F \cdot l}{2 I_1 + \frac{I_2 r_1}{r_2}} = \frac{2N \cdot 1m}{2 \cdot 1\,kg \cdot m^2 + \frac{16\,kg \cdot m^2 \cdot 0{,}5m}{1m}} = \frac{2\,N \cdot m}{(2+8)\,kg\,m^2} = \frac{2\,N \cdot \cancel{m}}{10\,kg\,m^{\cancel{2}}} =$$

$$= 0{,}2\,\frac{N}{kg \cdot m} = 0{,}2\,\frac{\cancel{kg}\,\frac{\cancel{m}}{s^2}}{\cancel{kg} \cdot \cancel{m}} = 0{,}2\,\frac{rad}{s^2}$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot \alpha_2 = 2 \cdot 0{,}2\,\frac{rad}{s^2} = 0{,}4\,\frac{rad}{s}$$

b) (1) $\sum M = 0$



$$\vec{M}_F + \vec{M}_{Fa} = 0$$

$$F \cdot l - Fa \cdot r_1 = 0$$

$$Fa = \frac{F \cdot l}{r_1} = \frac{2N \cdot 1m}{0{,}5m} = 4\,N$$