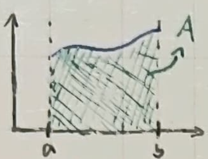
8.5 Anwendung der Integralrechnung

8.5.1 Flächeninhalte

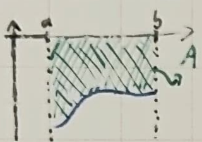
Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar. A sei die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[a,b]$.

1. Fall: $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in [a,b]$



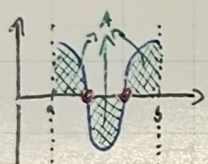
$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$ trivial lol

2. Fall: $f(x) < 0 \;\forall\; x \in [a,b]$



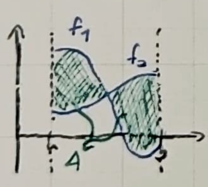
$A = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$

3. Fall: Der Graph verläuft teilweise oberhalb und teilweise unterhalb der x-Achse.

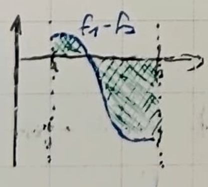


Bestimme alle Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ von f in $[a,b]$ und sortiere $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. Berechne in jedem Teilintervall $[a,x_1]$, $[x_1,x_2], \dots, [x_n,b]$ die zugehörige Teilfläche, d.h. $A_0 = \int_a^{x_1} |f(x)|\,dx$, $A_1 = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$, $\dots$, $A_n = \int_{x_n}^{b} |f(x)|\,dx$. Dann gilt $A = A_0 + A_1 + \dots + A_n = \int_a^b |f(x)|\,dx$

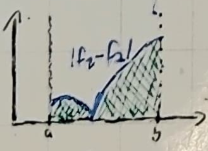
Die Funktionen f_1 und f_2 seien auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar. A sei die Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2 in $[a,b]$.



Dann ist A gleich der Fläche zwischen dem Graphen der Differenzfunktion $f = f_1 - f_2$ und der x-Achse in $[a,b]$. Auf $f = f_1 - f_2$ trifft einer der obigen drei Fälle zu $A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$.



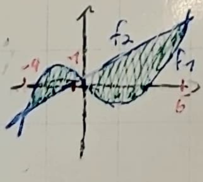
<u>Beispiel</u>



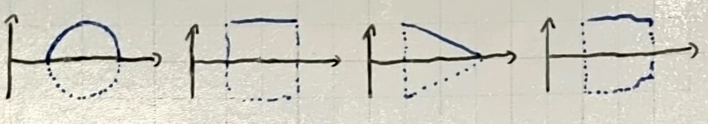
$f_1(x) = x^3 - 12x$, $f_2(x) = 9x + 20$

$f_1(x) - f_2(x) = x^3 - 21x - 20 = (x+4)(x+1)(x-5) =: f(x)$

$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_{-4}^{-1} f(x)\,dx - \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \dots = \frac{999}{4}$

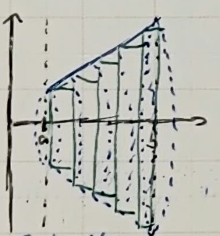


8.5.2 Volumina von Rotationskörpern



Rotationskörper entstehen durch drehen einer ebenen Kurve um eine in der Kurvenebene liegende Achse.

Wie berechnet man das Volumen solcher Körper? Der Rotationskörper sei durch Rotation der Kurve mit der Funktionsgleichung $y=f(x)$ im Intervall $[a,b]$ entstanden.



Idee: Wir zerlegen $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$. Dies entspricht der Zerlegung des Rotationskörpers in n „Scheiben" der „Dicke" $\frac{b-a}{n}$. Diese Scheiben können durch zylindrische Scheiben approximiert werden. Damit ergibt sich ein Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers: $V_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\pi\cdot f(a+i\frac{b-a}{n})^2}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{Höhe}}$ Volumen der i-ten
= zylindrischen Scheibe

Durch Grenzwertbildung $V=\lim_{n\to\infty} V_n$ ergibt sich folgende Regel.

Regel (Rotationsvolumen)

Durch Drehung einer Kurve mit der Gleichung $y=f(x)$, $a\le x\le b$, um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen

$V=\int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

Beispiel (Volumen der Kugel)

Leiten Sie eine Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius R her. $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $a=-R$, $b=R$; $V=\int_{-R}^{R} \pi f(x)^2 dx = \int_{-R}^{R} \pi (R^2-x^2) dx$

$= \pi R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.