1.23) Äquivalenzklassen

a) $R = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1$ hat die gleiche Staatsangehörigkeit wie $m_2\}$:
Reflexivität: ✓
Symmetrie: ✓
Transitivität: ✓
$[\text{Deutschland}]_R = \{\text{Ich, Amy, Usnik}\}$
$[\text{Niederlande}]_R = \{\text{Naomi}\}$
$[\text{USA}]_R = \{\text{Springsteen, Bennington, Jordison}\}$

b) Restklassen modulo 7:
$[0] = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\}$
$[1] = \{\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\}$
$[2] = \{\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\}$
$[3] = \{\ldots, -11, -4, 3, 10, 17, \ldots\}$
$[4] = \{\ldots, -10, -3, 4, 11, 18, \ldots\}$
$[5] = \{\ldots, -9, -2, 5, 12, 19, \ldots\}$
$[6] = \{\ldots, -8, -1, 6, 13, 20, \ldots\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - y^2$ ist durch 3 teilbar$\}$
Reflexivität: xRx
$x^2 - x^2 = 3n \quad (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 0 = 3n \Leftrightarrow n = 0 \rightarrow 0 \in \mathbb{Z}$ ✓
Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
$x^2 - y^2 = 3n \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 3(-n) \rightarrow n, -n \in \mathbb{Z}$ ✓
Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
$x^2 - y^2 = 3a \qquad y^2 - z^2 = 3b = y^2 = 3b + z^2$
$x^2 - 3b - z^2 = 3a \Leftrightarrow x^2 - z^2 = 3(a+b)$ ✓
Äquivalenzklassen:
$[0]_R = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
$[1]_R = \{\ldots, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, \ldots\}$

d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$
Reflexivität: xRx
$x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ ✓
Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRx$
$x - y = a \Leftrightarrow y - x = -a \quad (a \in \mathbb{Z})$ ✓
Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
$x - y = a \qquad y - z = b \Leftrightarrow y = b + z$
$x - b - z = a \Leftrightarrow x - z = b - a \quad (a, b \in \mathbb{Z})$ ✓
Äquivalenzklassen:
$[a]_R = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b,\ a \in \mathbb{Z},\ b \in [0,1[\}$

e) $R = \{(4,4), (-4,4), (4,-4), (-4,-4), (17,17), (-17,17), (-17,17), (-17,-17)\}$

$R = \{x, y \in M^2 \mid |x| = |y|\}$ $(M = \{-17, -4, 4, 17\})$
Reflexivität: xRx
$|x| = |x|$ wahre Aussage
Symmetrisch: $xRy \Rightarrow yRx$
$|x| = |y| \Leftrightarrow -|y| = -|x| \Leftrightarrow |y| = |x|$ ✓
Transitivität: $xRy \wedge yRx \Rightarrow xRz$
$|x| = |y| \qquad |y| = |z|$ ✓
$|x| = |z|$
Äquivalenzklassen:
$[4]_R = \{-4, 4\}$
$[17]_R = \{-17, 17\}$