...

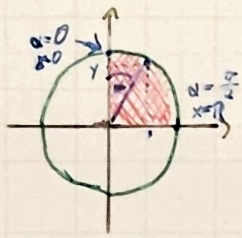
Schreibe also $f(x)$ geschickt als Produkt $f(x)=u'(x)\cdot v(x)$ und hoffe, dass 1. eine Stammfunktion $u(x)$ von $u'(x)$ bekannt ist und 2. das Integral $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ leicht lösbar ist.

Für $f(x)=x\cdot\sin x$ ($\int x\cdot\sin x\,dx=?$) $u'(x)=\sin x$, $v(x)=x$, gilt $u(x)=-\cos x$, $v'(x)=1$ und folglich $\underbrace{\int x\cdot\sin x\,dx}_{\int v(x)\cdot u'(x)\,dx}=\underbrace{x}_{v(x)}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{u(x)}-\underbrace{\int 1\cdot(-\cos x)\,dx}_{\int v'(x)\,u(x)\,dx}=x\cdot\cos x+\sin x+c.$

<u>Beispiele</u>

1) $\int_1^2\ln x\,dx=\int_1^2 1\cdot\ln x\,dx=x\cdot\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\overbrace{(x\cdot\ln x-x)}^{\text{Stammfunktion } \ln x}\Big|_1^2=2\ln 2-1.$

2) Flächeninhalt des Kreises



Aus $x^2+y^2=R^2$ folgt für den oberen Kreisbogen $y=\sqrt{R^2-x^2}$ und für die Kreisfläche A $A=4\cdot\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

Zunächst Substitution:

$x=g(\alpha)=R\cdot\sin\alpha$, $g'(\alpha)=R\cdot\cos\alpha$

Damit: $A=4\cdot\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx\overset{\text{Satz}}{=}4\cdot\int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(R)}\sqrt{R^2-g(\alpha)^2}\,g'(\alpha)\,d\alpha=4R^2\int_0^{\pi/2}\underbrace{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}_{\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha\,d\alpha$

$=4R^2\int_0^{\pi/2}|\cos^2\alpha|\,d\alpha$

Nun weiter mit partieller Integration.

$\int\cos^2\alpha\,d\alpha=\int\cos\alpha\cdot\cos\alpha\,d\alpha\overset{\text{Satz}}{=}\underbrace{\sin\alpha}_{u(\alpha)}\cdot\underbrace{\cos\alpha}_{v(\alpha)}-\int\underbrace{\sin\alpha}_{u(\alpha)}\cdot\underbrace{(-\sin\alpha)}_{v'(\alpha)}\,d\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\int\sin^2\alpha\,d\alpha$

$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\int 1-\cos^2\alpha\,d\alpha=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\alpha-\int\cos^2\alpha\,d\alpha$

$=\frac{1}{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\alpha)+c$

$A=4R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\alpha)\Big|_0^{\pi/2}=\pi R^2$

8.3.3 Partialbruchzerlegung gebrochenrationaler Funktionen

$\int f(x)\,dx=\int\frac{2x^4-3x^3-x^2+5}{x^3+3x^2+4}\,dx$ – hier hilft offenbar weder Substitution noch partielle Integration. Idee: Stelle die gebrochenrationaler Funktion $f(x)$ geschickt als Summe von Partialbrüchen dar, denn diese lassen sich leicht integrieren.

1\. Schritt: (entfällt, wenn f echt gebrochenrational)

Zerlege die unecht gebrochenrationale Funktion $f(x)$ durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion $P(x)$ und eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$: $f(x)=P(x)+R(x)$ mit $R(x)=\frac{Z(x)}{N(x)}$, P, Z, N ganzrational, grad Z < grad N.

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 + 5 : x^3 - 3x^2 + 4 = 2x + 3 + \frac{8x^2 - 8x - 7}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

$$\underline{-(2x^4 - 6x^3 + 8x)}$$

$$3x^3 - x^2 - 8x + 5$$

$$\underline{-(3x^3 - 9x^2 + 12)}$$

$$8x^2 - 8x - 7$$