

## 1.27/ Surjektivität und Injektivität

a)  $h: L \rightarrow S, l \mapsto h(l)$

Injektivität:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$h(l_1) = h(l_2) \Rightarrow l_1 = l_2$  ist wahr da jedes Land (eine Hauptstadt nll) besitzt.

Surjektivität:  $\forall y \in Z \exists x \in D \ y = f(x)$

$\forall s \in S \exists l \in L \ s = h(l)$  ist falsch, da

b)  $s: M \rightarrow \{7, 8, 9, \dots, 68, 69, 70\}, m \mapsto s(m)$

Injektivität:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$s(m_1) = s(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$  ist nicht immer wahr da zwei Menschen die selbe

Schuhgröße tragen können

Surjektivität:  $\forall y \in Z \exists x \in D \ y = f(x)$

$\forall s(m) \in Z \exists m \in D \ y = f(x)$  ist wahrscheinlich wahr, da voraussichtlich jede Schuhgröße von einem Menschen getragen wird.

c)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$

Injektivität:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Beweis durch Gegenbeispiel:

Sei  $(x, y, z) = (0, 5, 0): (0+5, 5+0) = (5, 5)$

Nun sei  $(x, y, z) = (5, 0, 5): (5+0, 0+5) = (5, 5)$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$  aber  $f(x_1) = f(x_2)$

Surjektivität:  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ f(x, y, z) = (s, t)$

Sei  $f(x, y, z) = (s, t)$

$\Rightarrow (x+y, y+z) = (s, t)$

$\Rightarrow x+y = s$

$\wedge y+z = t$

$\Rightarrow x+t-z = s \Leftrightarrow x = s+z-t$

$\wedge z = x+t-s$

$\wedge y = t-z \vee y = s-x$

Wähle  $y = 0$ .

$\Rightarrow z = t \wedge s = x$

$\Rightarrow$  Es ist surjektiv!

d)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, x+y, y)$

Injektivität:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, x_1+y_1, y_1) = (x_2, x_2+y_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Surjektivität:  $\forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ (s, t, u) = f(x, y)$

Sei  $(s, t, u) = f(x, y)$

$\Rightarrow (s, t, u) = (x, x+y, y)$

$\Rightarrow s = x$

$\wedge t = x+y \Leftrightarrow x = t-y \Leftrightarrow y = t-x$

$\wedge u = y$

$\Rightarrow s = x \wedge u = y \wedge x = t-u \wedge y = t-s$

$\Rightarrow (s, t, u) = (s, t-u+t-s, u) \Rightarrow (s, t, u) = (s, 2t-s-u, u) \notin \mathbb{R}^3 \rightarrow$  nicht surjektiv

e)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x \cdot y, x+y)$

Injektivität:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 \cdot y_1, x_1 + y_1) = (x_2 \cdot y_2, x_2 + y_2)$

Sei  $(x_1, y_1) = (1, 0)$  und  $(x_2, y_2) = (0, 1)$

$\Rightarrow (1 \cdot 0, 1+0) = (0, 1) \wedge (0 \cdot 1, 0+1) = (0, 1) \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \rightarrow$  nicht injektiv

Surjektivität:  $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ (s, t) = f(x, y)$

Sei  $(s, t) = f(x, y) \Rightarrow (s, t) = (x \cdot y, x+y)$

$\Rightarrow s = x \cdot y$

$\wedge t = x+y$

$\Leftrightarrow x = t-y \wedge y = x \cdot \frac{1}{t-y} \Rightarrow f(x, y) = f(t-y, \frac{1}{t-y}) = ((t-y)(\frac{1}{t-y}), t-y+\frac{1}{t-y}) \rightarrow$  nicht surjektiv

$$h) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, -z, y)$$

$$\text{Injektivität: } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Sei } (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$$

$$\Rightarrow (x_1, -z_1, y_1) = (x_2, -z_2, y_2), \text{ da } x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2.$$

$$\text{Surjektivität: } \forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3 \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (s, t, u) = f(x, y, z)$$

$$\text{Sei } (s, t, u) = f(x, y, z)$$

$$\Rightarrow (s, t, u) = (x, -z, y)$$

$$\Rightarrow s = x$$

$$\wedge t = -z \Rightarrow x = s \wedge z = -t \wedge y = u \Rightarrow (x, y, z) = (s, u, -t), \text{ da } f(x, y, z) = f(s, u, -t).$$

$$\wedge u = y \quad = f(s, -t, u) = f(s, t, u) \quad \square$$