FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

ETI FB Elektrotechnik und Informatik
Department of Electrical Engineering
and Computer Science

Physik

V6: Drehbewegung

Prof. Dr.-Ing. Tatsiana Malechka

Stegerwaldstraße 39
D-48565 Steinfurt

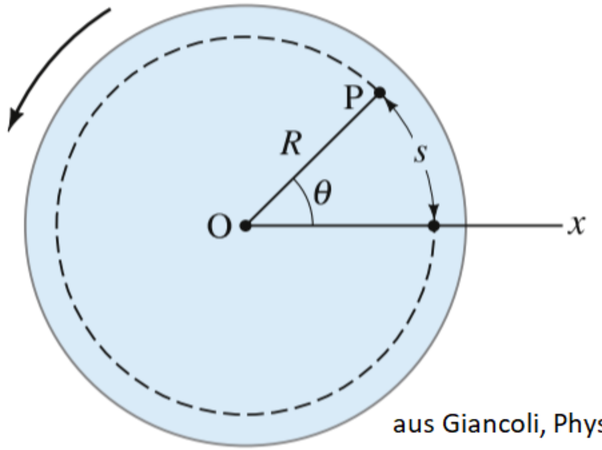
Telefon: +49 (0)2551 9 62-228
Raum: E218

tatsiana.malechka@fh-muenster.de

Drehbewegung

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

- Grundsätzliche Bewegungsarten
- Drehbewegung
- Skalaren Betrachtung der Drehbewegung
- Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung
- Drehmoment
- Trägheitsmoment
- Steinerscher Satz
- Kinetische Energie
- Drehimpuls

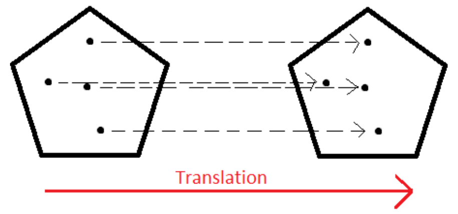


aus Giancoli, Physik

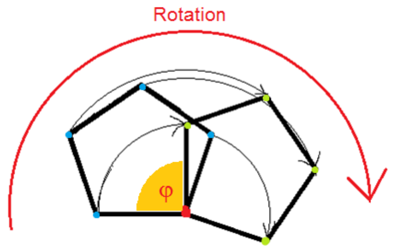
Grundsätzliche Bewegungsarten

- Kinematik ist die Lehre von Bewegung (beschreibt nur)
- Grundsätzliche Bewegungsarten (ausgedehnte Körper)

1. Translation - Änderung der Position.
Jeder Punkt des Körpers hat die gleiche Bahnkurve



2. Rotation (Drehung) - Änderung der Orientierung.
Punkte bewegen sich auf Kreisbögen



Jede Bewegung ist eine Überlagerung von Translation und Rotation.

Skalare Betrachtung der Drehbewegung

Winkelgrößen

e_x e_r
e_y e_φ
e_z

Drehbewegung:

Besser Beschreibung über Drehgrößen → über **Drehwinkel**: φ

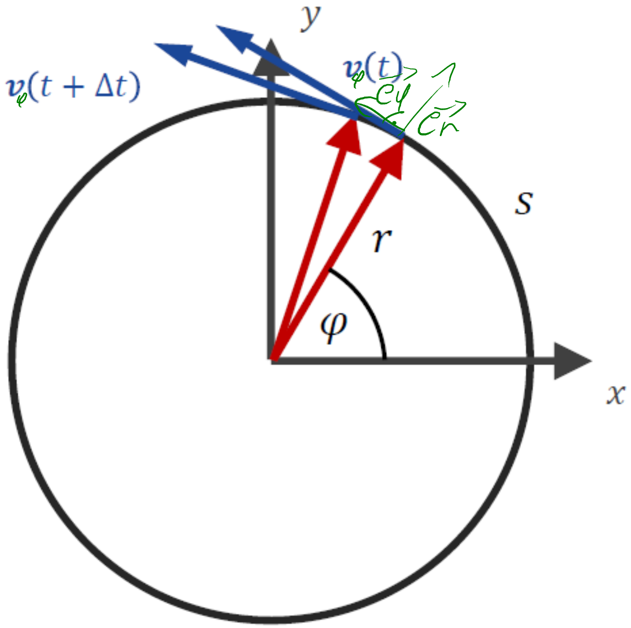
$s = \varphi \cdot r$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$

Bahngeschwindigkeit: $v_\varphi = \omega \cdot r$ → Skalarwert

Winkelbeschleunigung: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

Bahnbeschleunigung: $a_\varphi = \alpha \cdot r$



Die **Einheit** für Winkel ist das Bogenmaß, in Radiant (rad)
1 Umdrehung = 2π
What causes the circular trajectory? Radial force: Centripetal force

Bewegungsgleichungen

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

- Winkelgeschwindigkeit ω ist **konstant**

$$d\varphi = \omega dt \;\rightarrow\quad \int d\varphi = \omega \int dt \rightarrow \qquad \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

- Winkelbeschleunigung α ist **konstant** → gleichförmig beschleunigte Drehbewegung

$$d\omega = \alpha\, dt \;\rightarrow\quad \int d\omega = \alpha \int dt \rightarrow \qquad \omega(t) = \alpha t + \omega_0$$

$$\int d\varphi = \int \omega dt \rightarrow \int (\alpha t + \omega_0) dt \;\rightarrow \varphi(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 + \; \omega_0 t + \varphi_0$$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

Bewegungsgleichungen

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Drehbewegung:

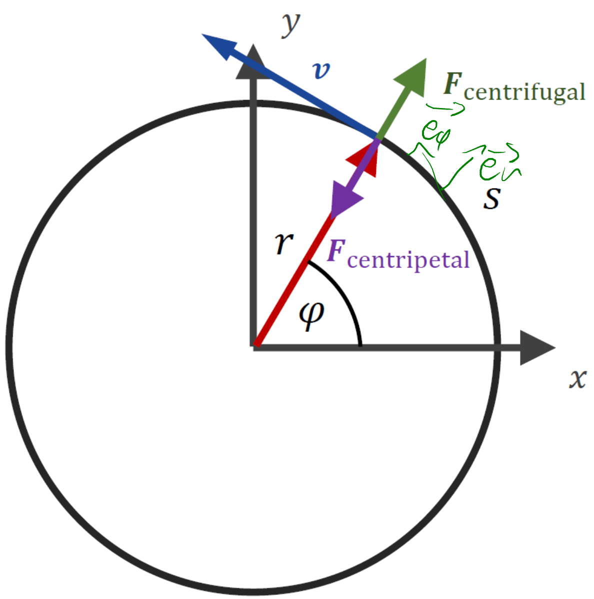
- $\omega(t) = \alpha t + \omega_0$
- $\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
- $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi$
- $\bar{\omega} = \frac{\omega+\omega_0}{2}$

Translationsbewegung:

- $v(t) = at + v_0$
- $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$
- $v^2 = v_0^2 + 2ax$
- $\bar{v} = \frac{v+v_0}{2}$

Zwei Kräfte

Zentripetal- und Zentrifugalkräfte



Zentrifugalkraft (Centrifugal force) $\vec{F}_{ZF} = \frac{mv^2}{r}\,\vec{e}_r$

- Scheinkraft (tritt nur im rotierenden Bezugssystem auf)
- Das Gefühl, nach außen gedrückt zu werden auf dem Karussell

Zentripetalkraft (Centripetal force) $\vec{F}_{ZP} = -\frac{mv^2}{r}\,\vec{e}_r$

- Reale Kraft
- Hält das Objekt auf der Kreisbahn

Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi(t)) \\ r\cdot\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ $\quad \dot{x} = (r\cdot\cos(\varphi(t)))' = -r\cdot\dot{\varphi}(t)\cdot(-\sin(\varphi(t)))$

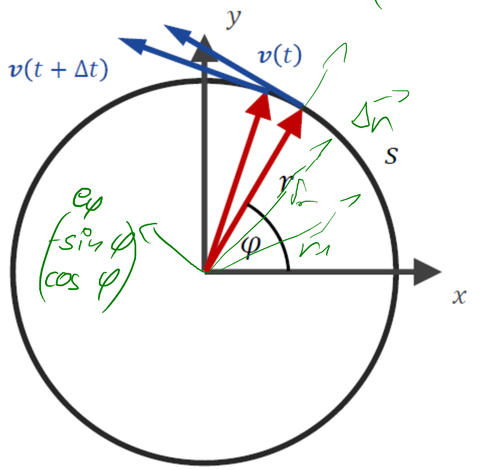
Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \\ r\,\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \omega\cdot r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = v_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt} v_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \dot{v}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} + v_\varphi \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} =$

$$a_\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} - v_\varphi\,\omega \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} = \vec{a}_\varphi(t) + \vec{a}_r(t)$$

$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{a}_\varphi + \vec{a}_r = \vec{a}_t + \vec{a}_{ZP}$$

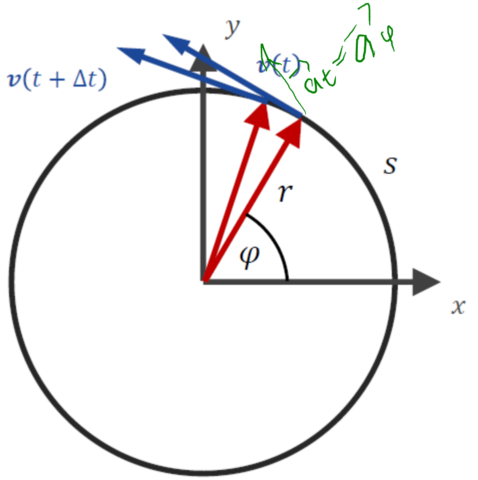


Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r\,\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \\ r\,\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \omega \cdot r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = v_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

- Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht auf dem Ortsvektor und damit tangential zur Kreisbahn.
- Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist gleich dem Betrag der Bahngeschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_\varphi^2 \sin^2\varphi(t) + v_\varphi^2 \cos^2\varphi(t)} = v_\varphi$$



Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt} v_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \dot{v}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} + v_\varphi \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} =$
$a_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} - v_\varphi\, \omega \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \vec{a}_\varphi(t) + \vec{a}_r(t)$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{a}_\varphi + \vec{a}_r = \vec{a}_t + \vec{a}_{ZP}$$

Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_t$ oder $\vec{a}_\varphi$:

- Der Vektor der Tangentialbeschleunigung ist parallel zum Geschwindigkeitsvektor.
- Sein Betrag ist gleich dem Betrag der Bahnbeschleunigung.
- Der Vektor der Tangentialbeschleunigung beschreibt die Änderung des Betrags des Geschwindigkeitsvektors.
- Bei einer Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit verschwindet der Vektor der Tangentialbeschleunigung.

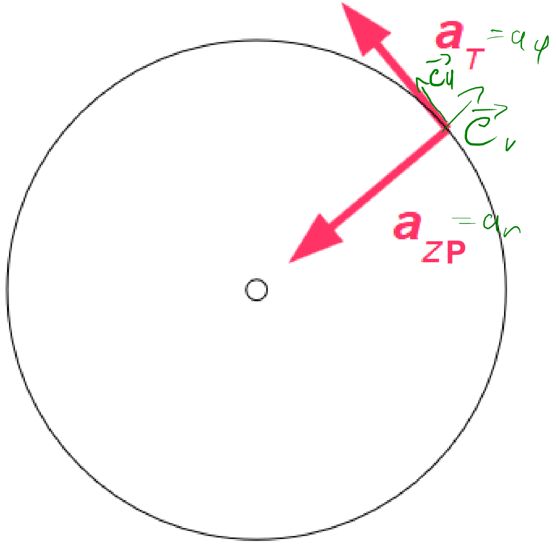
Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt} v_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \dot{v}_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} + v_\varphi \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}(t)\cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\varphi}(t)\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} =$

$a_\varphi \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} - v_\varphi\, \omega \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = \vec{a}_\varphi(t) + \vec{a}_r(t)$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{a}_\varphi + \vec{a}_r = \vec{a}_t + \vec{a}_{ZP}$$



Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_{ZP}$ oder $\vec{a}_r$:

- Für den Betrag des Vektors der Zentripetalbeschleunigung gilt:

$$|a_{ZP}| = |\omega v_\varphi| = \omega^2 r = \frac{v_\varphi^2}{r}$$

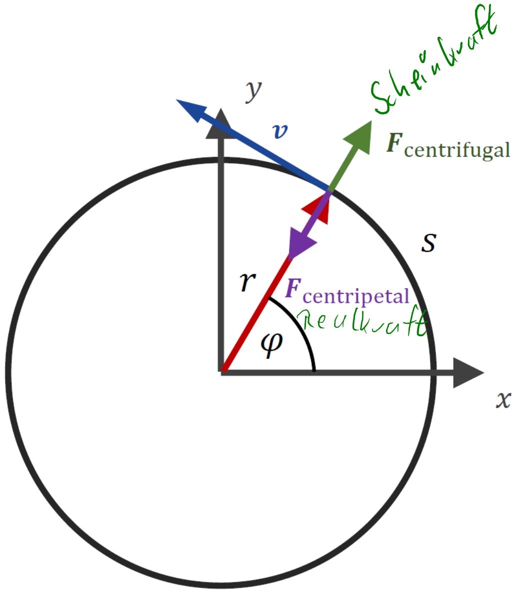
- Der Vektor der Zentripetalbeschleunigung ist entgegengesetzt zum Ortsvektor gerichtet.
- Der Vektor der Zentripetalbeschleunigung beschreibt die Änderung der Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Vektorielle Betrachtung der Drehbewegung

Arbeit und Kinetische Energie

$$W = \int \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = \int \overset{ZP}{F_r}\, \vec{e}_r \, ds \, \vec{e}_\varphi + \int F_\varphi \vec{e}_\varphi \, ds \, \vec{e}_\varphi = 0 + \int F_\varphi \vec{e}_\varphi \, ds \, \vec{e}_\varphi = \int F_\varphi \, ds$$



Zentripetalkraft: $\vec{F}_{ZP} = -\dfrac{mv^2}{r}\,\vec{e}_r$

Arbeit der Zentripetalkraft: $W_{ZP} = \int \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = 0$

$\vec{F}_{zp} \perp ds$ = Skalarprodukt = 0
$\vec{e}_r \quad\quad \vec{e}_\varphi$

No work from a centripetal force for a circular trajectory. Is there still an energy?
Yes, kinetic energy from acceleration along ***eφ***

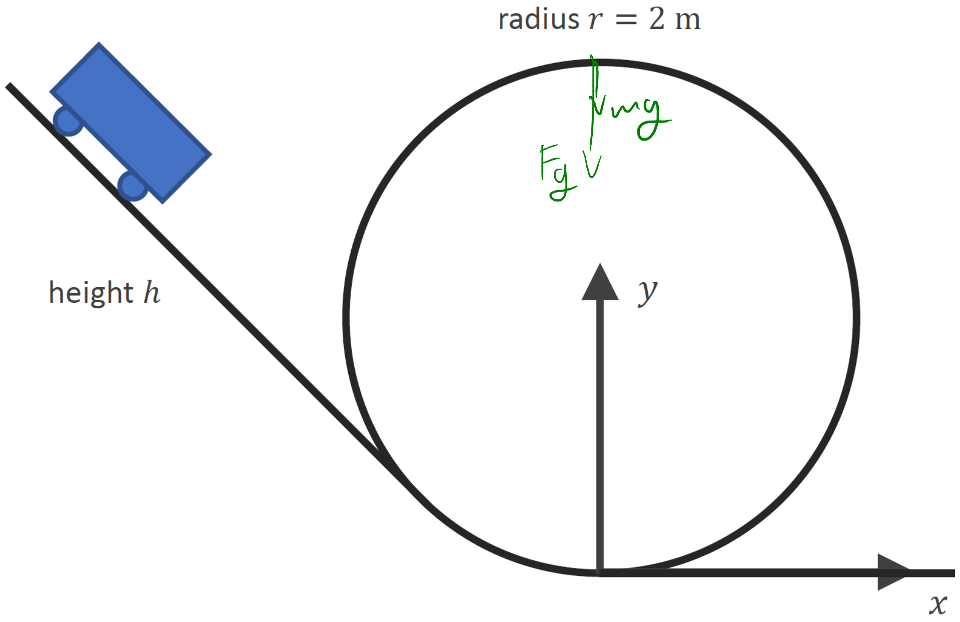
$$E_{kin} = \int \underset{e_\varphi = \alpha r}{\overset{F_\varphi}{m a_\varphi}} \, \overset{ds = d\varphi\, r}{ds} = \int m\alpha r^2 d\varphi = m\alpha r^2 \varphi = \frac{1}{2} m\alpha^2 r^2 t^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$\int A\,d\varphi = A\varphi$

$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2$

$m\alpha r^2 \varphi = m\alpha r^2 \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} m\alpha^2 r^2 t^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega^2 r^2}_{v} = E_{kin,r} = \frac{1}{2} m v_\varphi^2$

Beispiel



1. Ein Fahrzeug ist nicht befestigt und kann theoretisch am höchsten Punkt des Loopings nach unten fallen.

- a) Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug am höchsten Stelle des Loopings haben muss, um nicht herunterzufallen.
- b) Bestimmen die erforderliche Starthöhe, damit das Fahrzeug den Looping vollständig durchfahren kann.

2. Berechne die Radialbeschleunigung, die man an der höchsten und an der tiefsten Stelle des Loopings spürt.

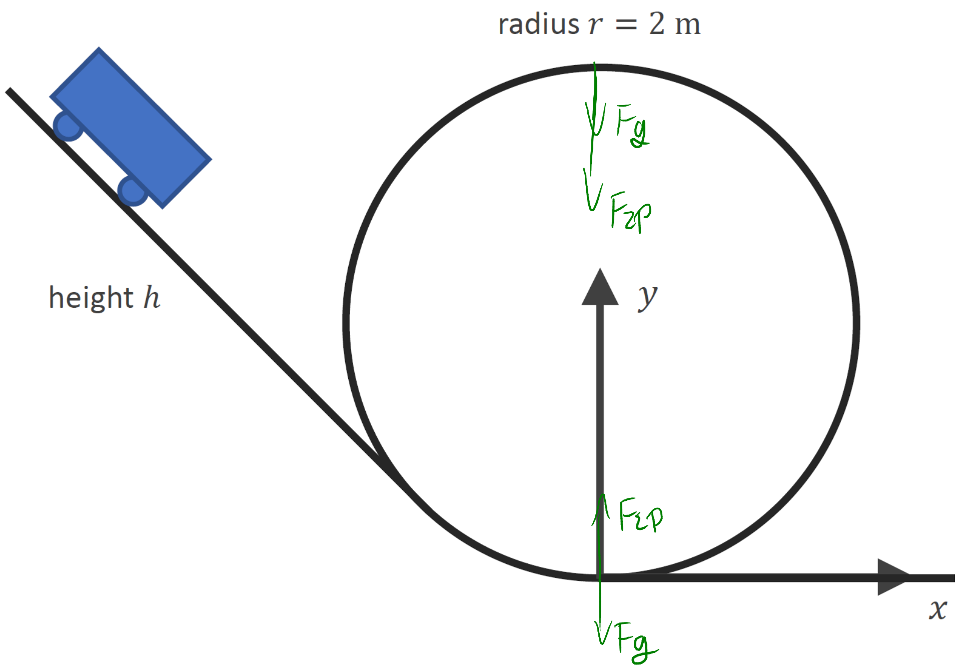
1 a) $\vec{F}_g \le \vec{F}_{zp}$

$|F_g| \le |F_{zp}|$

$|mg| \le \left|\frac{m v^2}{r}\right| \Leftrightarrow gr \le v^2 \Rightarrow v \ge \sqrt{gr} = 4{,}43\,m/s$

b) $mgh = mg2r + \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow h = 2r + \frac{1}{2g} v^2 = 2r + \frac{1}{2g} gr = 2r + \frac{1}{2} r = 2{,}5r = 5\,m$

Beispiel



1. Ein Fahrzeug ist nicht befestigt und kann theoretisch am höchsten Punkt des Loopings nach unten fallen.

- Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug am höchsten Stelle des Loopings haben muss, um nicht herunterzufallen.
- Bestimmen die erforderliche Starthöhe, damit das Fahrzeug den Looping vollständig durchfahren kann.

2. Berechne die Radialbeschleunigung, die man an der höchsten und an der tiefsten Stelle des Loopings spürt.

2 $\vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$

Rotationsenergie

- Kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$\frac{1}{2}\underbrace{(mr^2)}_{= I}\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

What about a rotating object?

$$E_{rot} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}_{\perp,i} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} v_{\perp,i}^2 = \sum_i \frac{\Delta m_i}{2} r_{\perp,i}^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i\, r_{\perp,i}^2$$

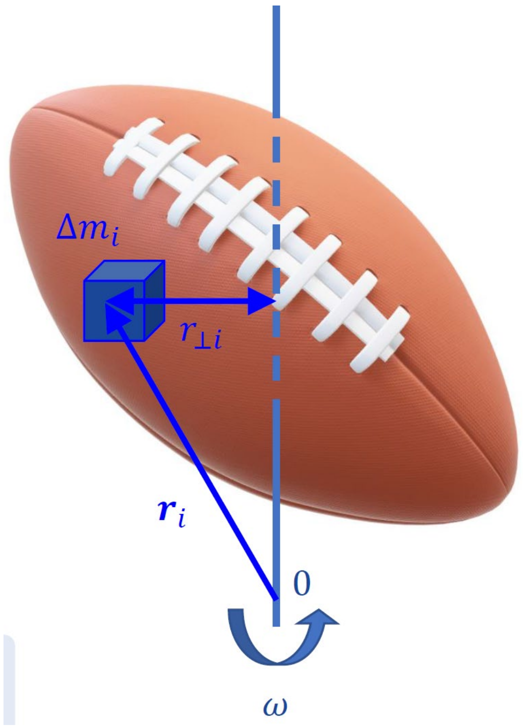
$m = \rho \cdot V$

$\Delta m_i \longrightarrow 0$

$$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}\int r_\perp^2 \; dm$$

$dm = \rho\, dV$

$$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}\int \rho r_\perp^2 \; dV$$



- Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}I$ mit Trägheitsmoment $I = \int \rho r_\perp^2 \; dV$

Trägheitsmoment
Massenpunkt

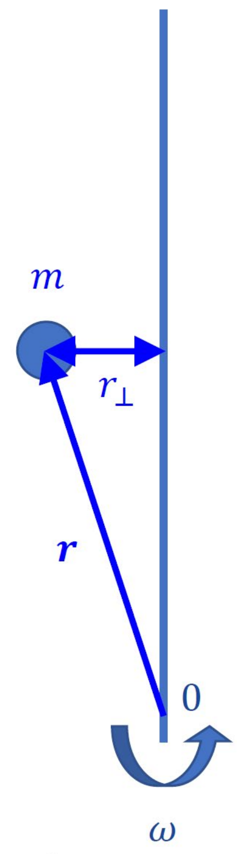
- Kinetische Energie von Massenpunkt: $E_{kin} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mv^2$

m sehr klein

- Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}I$

mit Trägheitsmoment $I = \int \rho\, r_\perp^2 \; dV = mr_\perp^2$

$$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}mr_\perp^2$$

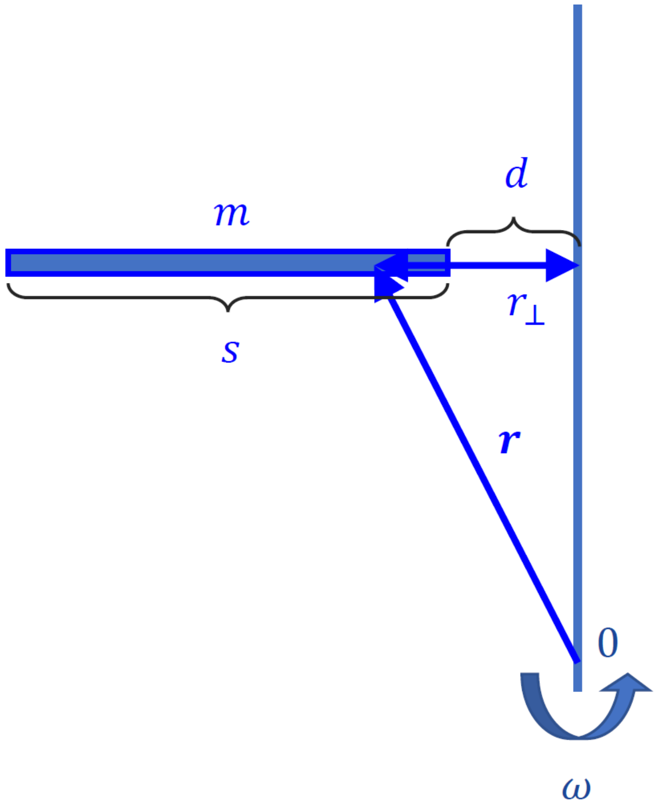


Trägheitsmoment

Stange

- Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{\omega^2}{2} I$ mit Trägheitsmoment $I = \int \rho\, r_\perp^2\, dV$

- $I = \int \rho\, r_\perp^2\, dV$ lineare Dichte (length density) $\sigma = \frac{dm}{dr_\perp} = \frac{m}{s}$



- Rotation um die Achse mit $d = 0$:

- Rotation um die Achse mit $d = -s/2$:

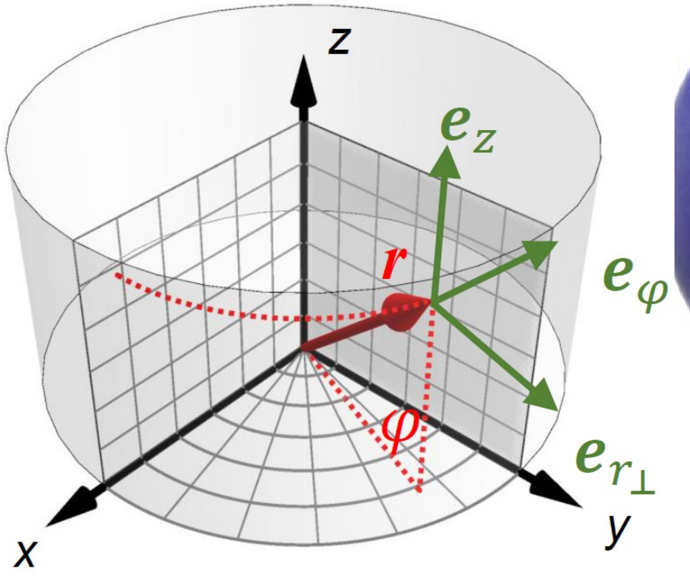
Trägheitsmoment

Sphäre

FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

- Rotationsenergie: $E_{rot} = \frac{\omega^2}{2} I$ Trägheitsmoment $I = \int \rho r_\perp^2 \, dV$

- $I = \int \rho r_\perp^2 \, dV = \frac{m}{V} \int r_\perp^2 \mathrm{dV} =$



Cartesian coordinates: $dV = dxdydz$
Cylindrical coordinates: $dV = r_\perp dr_\perp d\varphi \, dz$

Trägheitsmoment

Sphare

Dynamik von Drehbewegungen

Trägheitsmoment

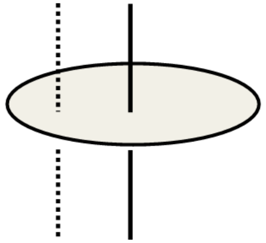
FH MÜNSTER
University of Applied Sciences

Steiner'sche Satz (Theorem paralleler Achsen): erlaubt einfache Berechnung von I bezüglich der Achse, die parallel zur Schwerpunktsachse verschoben ist

Jakob Steiner – Schweizer Mathematiker (1796 -1863)

$$\mathrm{I_{a'}} = \mathrm{I_a} + \mathrm{m_{ges}} \cdot \mathrm{d}^2 = \mathrm{I_s} + \mathrm{m_{ges}} \cdot \mathrm{d}^2$$

***a**: Achse durch den Schwerpunkt*



***a'**: Achse parallel zu **a**, *nicht* durch den Schwerpunkt*

I_s - Trägheitsmoment um Schwerpunktsachse

m_{ges} - Gesamtmasse

d - Abstand der Drehachsen

	Körper	Ort der Drehachse	Trägheits-moment
(a)	Dünner Reifen mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	MR_0^2
(b)	Dünner Reifen mit Radius R_0 und Breite b	Durch zentralen Durchmesser	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mb^2$
(c)	Massiver Zylinder mit Radius R_0	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d)	Hohlzylinder mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(e)	Homogene Kugel mit Radius r_0	Durch den Mittelpunkt	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
(f)	Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{12}Ml^2$
(g)	Lange, homogene Stange mit l Länge	Durch ein Ende	$\frac{1}{3}Ml^2$
(h)	Rechteckige dünne Platte mit Länge l und Breite b	Durch den Mittelpunkt	$\frac{1}{12}M(l^2 + b^2)$

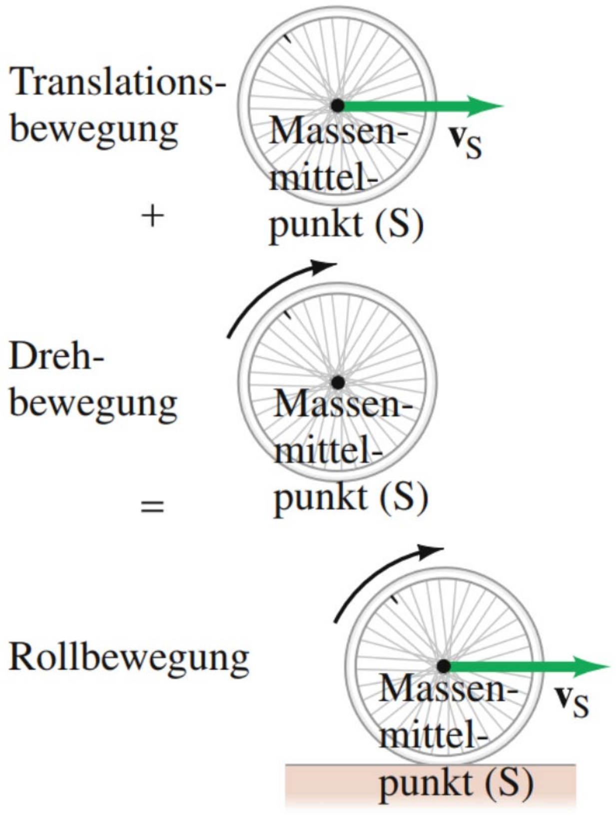
Aus Giancoli, Physik

Dynamik von Drehbewegung

Kinetische Energie bei einer Rollbewegung

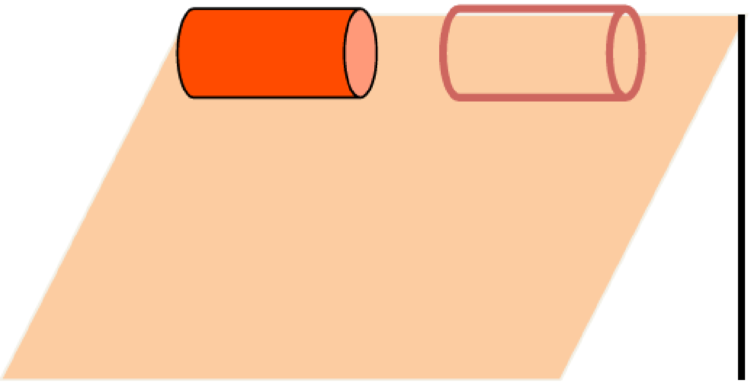
Jede **Rollbewegung** ist zerlegbar in **Translation** des Schwerpunktes der Gesamtmasse und **Drehung** der Masse um die Schwerpunktsachse.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot I\,\omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m v_s^2$$



Dynamik der Drehbewegung
Trägheitsmoment

Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse *m* und gleichem Radius *R* rollen schiefe Ebene hinunter.



Welcher Zylinder ist schneller unten?

A) Der Vollzylinder.

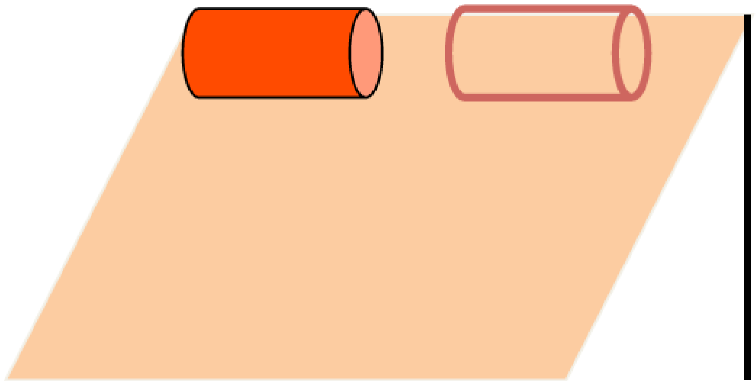
B) Der Hohlzylinder.

C) Beide kommen gleichzeitig unten an.

Dynamik der Drehbewegung

Trägheitsmoment

Voll- und Hohlzylinder mit gleicher Masse m und gleichem Radius R rollen schiefe Ebene hinunter.



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Prof. Dr.-Ing. Tatsiana Malechka
Labor Autonome Systeme

Stegerwaldstraße 39
D-48565 Steinfurt

Telefon: +49 (0)2551.9 62-228
Raum: E218

tatsiana.malechka@fh-muenster.de