1.23| Äquivalenzklassen

a) $R=\{(m_1,m_2)\in M^2 \mid m_1$ hat die gleiche Staatsangehörigkeit wie $m_2\}$:

Reflexivität: ✓

Symmetrie: ✓

Transitivität: ✓

$[\text{Deutschland}]_R = \{$Ich, Amy, Jsunik$\}$

$[\text{Niederlande}]_R = \{$Naomi$\}$

$[\text{USA}]_R = \{$Springsteen, Bennington, Jordison$\}$

b) Restklassen modulo 7:

$[0] = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots\}$

$[2] = \{\dots, -12, -5, 2, 9, 16, \dots\}$

$[3] = \{\dots, -11, -4, 3, 10, 17, \dots\}$

$[4] = \{\dots, -10, -3, 4, 11, 18, \dots\}$

$[5] = \{\dots, -9, -2, 5, 12, 19, \dots\}$

$[6] = \{\dots, -8, -1, 6, 13, 20, \dots\}$

c) $R=\{(x,y)\in \mathbb{Z}^2 \mid x^2-y^2$ ist durch 3 teilbar$\}$

Reflexivität: xRx

$x^2-x^2=3n \quad (n\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow 0=3n \Leftrightarrow n=0 \rightarrow 0\in\mathbb{Z}$ ✓

Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRx$

$x^2-y^2=3n \Leftrightarrow y^2-x^2=3(-n) \rightarrow n,-n\in\mathbb{Z}$ ✓

Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$x^2-y^2=3a \qquad y^2-z^2=3b \Rightarrow y^2=3b+z^2$

$x^2-3b-z^2=3a \Leftrightarrow x^2-z^2=3(a+b)$ ✓

Äquivalenzklassen:

$[0]_R = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$

$[1]_R = \{\dots, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, \dots\}$

d) $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-y\in\mathbb{Z}\}$

Reflexivität: xRx

$x-x=0\in\mathbb{Z}$ ✓

Symmetrie: $xRy \Rightarrow yRx$

$x-y=a \Leftrightarrow y-x=-a \quad (a\in\mathbb{Z})$ ✓

Transitivität: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$x-y=a \qquad y-z=b \Leftrightarrow y=b+z$

$x-b-z=a \Leftrightarrow x-z=b-a \quad (a,b\in\mathbb{Z})$ ✓

Äquivalenzklassen:

$[a]_R = \{x\in\mathbb{R} \mid x=a+b,\ a\in\mathbb{Z},\ b\in[0,1[\}$

e) Was will er von mir?