FH Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. Gernot Bauer

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad		Klausurrelevanz
★☆☆	niedrig	✏
★★☆	mittel	✏✏
★★★	hoch	✏✏✏

6 Lineare Algebra

Aufgabe 6.1 (Springer)

Der *Springer* ist eine Figur beim Schachspiel. Für seine Zugmöglichkeiten auf dem ansonsten leeren Schachbrett gilt: Der Springer darf auf eines der Felder ziehen, die seinem aktuellen Feld am nächsten, aber nicht auf gleicher Reihe, Linie oder Diagonale mit diesem liegen.

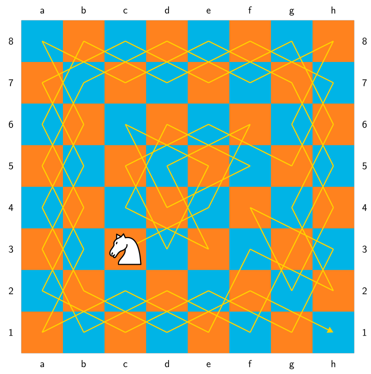


Abb. 1 Offene Springertour

a) Drücken Sie die Zugmöglichkeiten des Springers jeweils durch einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ aus. Um wie viele verschiedene Vektoren handelt es sich?

b) Welche gemeinsame Eigenschaft der Vektoren aus a) bringt zum Ausdruck, dass ein Springer mit jedem Zug die Farbe seines Feldes wechselt?

c) Drücken Sie die relative Lage der Felder d1 und f8 des Schachbrettes durch einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ aus. Stellen Sie diesen Vektor auf verschiedene Arten als Summe der Vektoren aus a) dar. Wie viele Züge benötigt ein Springer mindestens, um von d1 nach f8 zu gelangen? Wie viele verschiedene kürzestmögliche Zugfolgen eines Springers von d1 nach f8 gibt es? Bei wie vielen dieser Zugfolgen besucht der Springer ausschließlich originäre Felder des Schachbrettes, bei wie vielen besucht er hingegen auch virtuelle Felder außerhalb des Schachbrettes?

d) Die kombinatorische Fragestellung, wie viele Zugfolgen eines Springers es gibt, bei denen der Springer ausgehend von einem bestimmten Startfeld sukzessive jedes der anderen 63 Felder des Schachbrettes genau einmal besucht, ist als *Springerproblem* bekannt. Eine derartige Zugfolge heißt *Springertour*. Gelangt der Springer vom Zielfeld einer Springertour durch einen einzigen weiteren Zug zurück zu ihrem Startfeld, wird die Springertour als *geschlossen*, andernfalls als *offen* bezeichnet (vgl. Abb. 1). Formulieren Sie folgenden Satz vektoriell: Ausgehend vom unteren linken Eckfeld a1 gibt es genau 26.534.728.821.064 verschiedene geschlossene Springertouren.

e) Das Springerproblem lässt sich auf Schachbretter mit m Reihen und n Linien verallgemeinern ($m, n \in \mathbb{N}$). So gibt es auf dem 6×6-Schachbrett ausgehend von einem beliebigen Startfeld genau 19.724 verschiedene geschlossene Springertouren. Wie viele sind es auf dem 2×2-, dem 2×5- und dem 3×4-Schachbrett? Begründen Sie mit Hilfe von b), dass es keine geschlossene Springertour auf dem $m\times n$-Schachbrett geben kann, wenn m und n beide ungerade sind.

Aufgabe 6.2 (Polarstern)

Der *Große Bär* ist ein ausgedehntes Sternbild des Nordhimmels. Die auffällige Konfiguration von sieben besonders hellen Sternen dieses Sternbildes wird im deutschsprachigen Raum als *Großer Wagen* bezeichnet. Dessen Sterne *Dubhe* und *Merak* dienen nach folgender Faustregel zum Auffinden des Polarsterns (vgl. Abb. 2): Verlängert man die gedachte Verbindungslinie zwischen diesen beiden Sternen des Großen Wagens, also dessen „Hinterachse", um das Fünffache, so gelangt man zum Polarstern.

a) Drücken Sie die Faustregel in Form einer Gleichung für Vektoren aus. In welcher Hinsicht ist die Vektorgleichung sogar präziser als die Faustregel?

b) Auf einer Himmelskarte, versehen mit einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem, habe Dubhe die Koordinaten (3,75|2,1) und Merak die Koordinaten (4|1,5). Welche Koordinaten hat dann gemäß a) der Polarstern?

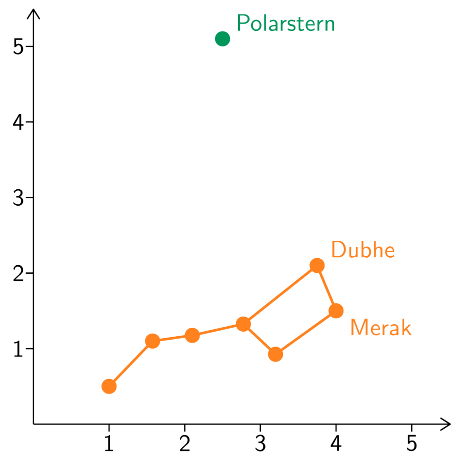


Abb. 2 Polarstern und Großer Wagen

Aufgabe 6.3 (Funktionenräume)

a) Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $C[a, b] := \{ f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$. Auf $C[a, b]$ sei in der üblichen Weise eine Addition und eine Skalarmultiplikation von Funktionen erklärt. Zeigen Sie:

i) $C[a, b]$ ist ein Vektorraum.

ii) Die Funktionen $f, g \in C[0, 2\pi]$ mit $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ sind linear unabhängig.

b) Es sei $P := \{ p \mid p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist Polynom, } \operatorname{grad} p \leq 1 \}$ die Menge aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$ mit einem Grad kleiner zwei. Auf P sei in der üblichen Weise eine Addition und eine Skalarmultiplikation von Funktionen erklärt.

   i) Zeigen Sie: P ist ein Vektorraum.

   ii) Zeigen Sie: Durch $\langle p, q \rangle := \frac{2}{3} a_1 b_1 + 2 a_0 b_0$ für $p, q \in P$, $p(x) = a_1 x + a_0$, $q(x) = b_1 x + b_0$, ist ein Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf P erklärt.

   iii) Geben Sie eine Orthonormalbasis von P an. Welche Dimension hat P?

Aufgabe 6.4 (Lineare Unabhängigkeit und Basis) ★★★ ✎✎✎

Es sei V ein Vektorraum, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\| \cdot \|$ die durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $(v \in V)$ gegebene Norm auf V. Zeigen Sie:

a) Die m Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ $(m \in \mathbb{N})$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren eine Linearkombination der übrigen ist.

b) Die m Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ $(m \in \mathbb{N})$ sind genau dann linear abhängig, wenn es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ und $|\lambda_1|^2 + \ldots + |\lambda_m|^2 \neq 0$.

c) Die zwei Vektoren $u, v \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die beiden Vektoren $u + v$ und $u - v$ linear unabhängig sind.

d) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $a \in V$ genau ein n-Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

e) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Orthogonalbasis von V, so gilt für jedes $a \in V$: $a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle a, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$.

f) Bilden die n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für jedes $a \in V$: $a = \sum_{i=1}^{n} \langle a, v_i \rangle v_i$.

g) Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für $\langle \cdot , \cdot \rangle$ und $\| \cdot \|$ folgt die Dreiecksungleichung für $\| \cdot \|$.

Aufgabe 6.5 (Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$) ★★☆ ✎✎✎

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie:

a) $|\mathbf{a}|$ b) $|\mathbf{b}|$ c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e) $3\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ f) $4(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + 10\mathbf{c}$ g) $(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot 4\mathbf{c}$

h) den zu $\mathbf{a}$ gehörigen Einheitsvektor i) den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$

j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ k) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$ l) $\left| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sqrt{3} \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

m) den zu $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörigen Einheitsvektor n) den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

o) den Winkel zwischen der Hauptdiagonalen und den Kanten eines Würfels

Aufgabe 6.6 (Vektorprodukt) ★★☆ ✎✎✎

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie:

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ b) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (3\mathbf{c})$ e) $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}$

f) die Fläche des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogrammes

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ h) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$ i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

j) alle auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und auf $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrechten Einheitsvektoren

k) die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(1|1|1)$, $B(2|5|-1)$ und $C(0|7|2)$

Aufgabe 6.7 (Spatprodukt)

Das *Spatprodukt* dreier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, bezeichnet als $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$, ist eine reelle Zahl und gemäß $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ definiert als das Skalarprodukt des ersten Vektors mit dem Vektorprodukt des zweiten und dritten Vektors. Der Betrag $\big|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\big|$ des Spatproduktes ist gleich dem Volumen des durch die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Spates (oder Parallelepipeds, vgl. Abb. 3).

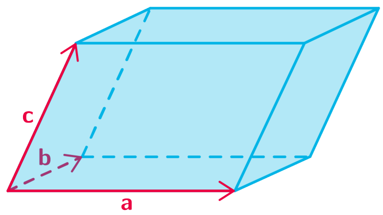


Abb. 3 Durch die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannter Spat

a) Zeigen Sie, dass der Wert des Spatproduktes unverändert bleibt, wenn seine drei Faktoren zyklisch vertauscht werden:
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

b) Zeigen Sie, dass der Wert des Spatproduktes sein Vorzeichen (und nur dieses, nicht jedoch seinen Betrag) ändert, wenn zwei seiner drei Faktoren vertauscht werden:
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}].$$

c) Berechnen Sie das Volumen des durch die Vektoren $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\-8\end{pmatrix}$ aufgespannten Spates.

d) Überlegen Sie, welcher Zusammenhang zwischen dem Volumen eines durch die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ aufgespannten Spates und dem Volumen eines durch dieselben Vektoren aufgespannten Tetraeders besteht. Berechnen Sie dann das Volumen des Tetraeders (oder der dreiseitigen Pyramide) mit den Eckpunkten $A(4|4|1)$, $B(6|3|0)$, $C(6|6|2)$ und $D(2|2|2)$.

Aufgabe 6.8 (Vektorgeometrie)

a) Liegen die Punkte $P_1(1|0|1)$, $P_2(2|1|3)$ und $P_3(0|-1|-1)$ auf einer Geraden im $\mathbb{R}^3$? Falls ja: Geben Sie diese Gerade in der Parameterdarstellung an.

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, die den Vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ enthält.

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\6\\1\end{pmatrix}$ ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

e) Liegen die Punkte $P_1(1|1|1)$, $P_2(3|2|0)$, $P_3(4|-1|5)$ und $P_4(12|-4|12)$ in einer Ebene im $\mathbb{R}^3$? Falls ja: Geben Sie diese Ebene in der Parameterdarstellung und in der Punkt-Normalen-Form an.

f) Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\4\\11\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$ komplanar sind?

g) Zeigen Sie: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ für Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$.

h) Welchen Abstand zueinander haben die Ebenen
$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6 - x - 3y + 2z = 0 \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -60 + 3x + 9y - 6z = 0 \right\}?$$

Aufgabe 6.9 (Vektorräume von Matrizen)

Ausgehend von der Menge $M(m \times n)$ aller $m \times n$-Matrizen $(m, n \in \mathbb{N})$ sei durch
$$\begin{array}{rccc} + : & M(m \times n) \times M(m \times n) & \to & M(m \times n) \\ & (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$
eine Addition und durch
$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times M(m \times n) & \to & M(m \times n) \\ & (\lambda, A) = (\lambda, (a_{ij})) & \mapsto & \lambda A := (\lambda a_{ij}) \end{array}$$
eine Skalarmultiplikation definiert.

a) Zeigen Sie, dass $M(m \times n)$, versehen mit dieser Addition und Skalarmultiplikation, ein Vektorraum ist.

b) Geben Sie (mit Begründung) eine Basis dieses Vektorraumes an. Welche Dimension hat $M(m \times n)$?

c) Die Summe $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ der Hauptdiagonalenelemente einer quadratischen Matrix $X = (x_{ij}) \in M(n \times n)$ heißt die *Spur* von X und wird mit $\operatorname{Spur}(X)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{Spur}(A^T \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} b_{ji}$$

ein Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ auf dem Vektorraum $M(m \times n)$ erklärt ist.

d) Zeigen Sie, dass im Falle quadratischer Matrizen $(m = n)$ eine symmetrische Matrix und eine schiefsymmetrische Matrix bezüglich des Skalarproduktes aus c) orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 6.10 (Rechenregeln für die Matrixmultiplikation)

Es seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, $E \in M(l \times l)$ die $l \times l$-Einheitsmatrix und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A \in M(k \times l)$, $B, B' \in M(l \times m)$ und $C \in M(m \times n)$ gilt:

a) Assoziativgesetz:
$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) Distributivgesetze:
$A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$
$(B + B') \cdot C = B \cdot C + B' \cdot C$

c) $A \cdot E = A, \ E \cdot B = B$

d) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

e) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Aufgabe 6.11 (Rechenregeln für inverse Matrizen)

Die Matrizen $A, B \in M(n \times n)$ seien regulär $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass alle folgenden Matrizen existieren und dass gilt:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

c) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

d) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, mit $A^m := \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m\text{-mal}} = \prod_{i=1}^{m} A$

e) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

Aufgabe 6.12 (Eigenschaften der Determinante)

Zeigen Sie:

a) Sind A und B zwei quadratische Matrizen mit $A \cdot B = 0$, $A \neq 0$ und $B \neq 0$, so gilt $|A| = |B| = 0$.

b) Ist A eine quadratische Matrix mit $A^T = -A$, also schiefsymmetrisch, und hat A eine ungerade Zeilen- bzw. Spaltenanzahl, so gilt $|A| = 0$.

Aufgabe 6.13 (Berechnung der Determinante)

Im Folgenden seien $w, x, y, z, d_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) und $*$ ein Platzhalter für beliebige reelle Zahlen. Berechnen Sie:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ \vdots & \iddots & d_2 & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ d_n & * & \cdots & * \end{vmatrix}$

Tipp zu e): Bei der Matrix handelt es sich um das magische Quadrat aus dem Kupferstich *Melencolia I* von Albrecht Dürer (vgl. Abb. 4). Die beiden unteren mittleren Zahlen geben das Entstehungsjahr des Werkes an, die beiden unteren Eckzahlen die Positionen der Initialen des Künstlers im Alphabet. Die Summen der Zeilen, Spalten, Diagonalen, Quadranten und der vier Eckzahlen ergeben jeweils 34. Nutzen Sie für die Aufgabe, dass alle Zeilensummen bzw. Spaltensummen gleich sind.

Tipp zu f): Unterscheiden Sie zwischen geradem und ungeradem n. Überführen Sie die Matrix in beiden Fällen durch Zeilen- oder Spaltenvertauschungen in eine Dreiecksmatrix. Wie viele Vertauschungen sind erforderlich?

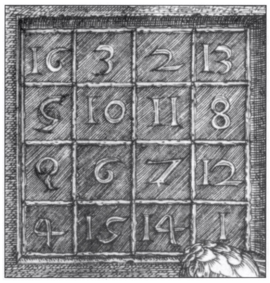


Abb. 4 Dürers magisches Quadrat

Aufgabe 6.14 (Regel von Sarrus und Gram'sche Determinante)

a) Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer 3×3-Matrix nach der folgenden, als *Regel von Sarrus* bezeichneten Formel berechnen lässt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Die Formel ergibt sich aus einem Schema, bei dem man die Matrix rechts um ihre erste und zweite Spalte ergänzt, um dann die Produkte der Elemente entlang der Hauptdiagonalen zu addieren und die Produkte der Elemente entlang der Nebendiagonalen zu subtrahieren:

$$\begin{array}{ccccccccc} + & & + & & + & & - & & - \quad - \\ a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

Hinweis: Die Regel von Sarrus gilt nur für 3-reihige Determinanten.

b) Es seien $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

i) Das Spatprodukt von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ist gleich der Determinante der 3×3-Matrix, die $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ als Spaltenvektoren hat:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ii) Das Quadrat des Spatproduktes von **a**, **b** und **c** ist gleich der Determinante der 3×3-Matrix, deren Elemente paarweise aus den Skalarprodukten von **a**, **b** und **c** gebildet werden:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Diese Matrix wird als *Gram'sche Matrix*, ihre Determinante als *Gram'sche Determinante* bezeichnet.

Aufgabe 6.15 (Invertierbarkeit von Matrizen) a), b) ★☆☆ c) ★★★

a) Untersuchen Sie, ob die Matrix

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1}, $(2A)^{-1}$ sowie $(A^T)^{-1}$.

c) Eine $(n+1)\times(n+1)$-Matrix V der Form

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

mit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt *Vandermonde*-Matrix ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass für die Determinante $|V|$ einer Vandermonde-Matrix gilt:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) = \prod_{j>i} (x_j - x_i).$$

Unter welcher Bedingung ist eine Vandermonde-Matrix demnach invertierbar?

Aufgabe 6.16 (Orthogonale Matrizen) ★★☆

Eine quadratische Matrix A mit der Eigenschaft $A^T \cdot A = E$ heißt *orthogonale Matrix*.

a) Zeigen Sie:

i) Wenn A orthogonal ist, dann gilt $|A| = 1$ oder $|A| = -1$.

ii) A ist genau dann orthogonal, wenn A invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$ gilt.

iii) $A \in M(n \times n)$ ist genau dann orthogonal, wenn die n Spalten von A, verstanden als Vektoren im $\mathbb{R}^n$, eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden ($n \in \mathbb{N}$). Gleiches gilt für die n Zeilen von A.

iv) Die Einheitsmatrix E ist orthogonal.

v) A ist genau dann orthogonal, wenn A invertierbar und A^{-1} orthogonal ist.

vi) Wenn $A \in M(n \times n)$ und $B \in M(n \times n)$ orthogonal sind ($n \in \mathbb{N}$), dann ist auch $A \cdot B$ orthogonal.

b) Welche reellen Zahlen sind für λ und a zu wählen, damit die Matrix

$$\lambda \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ a & 7 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist?

c) Wie lässt sich am schnellsten erkennen, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nicht orthogonal ist? Durch welche geringfügige Modifikation wird die Matrix orthogonal?

d) Vervollständigen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} * & \frac{-1}{\sqrt{2}} & * \\ * & \frac{1}{\sqrt{2}} & * \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & * & * \end{pmatrix}$$

so, dass sie orthogonal ist.

Aufgabe 6.17 (Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$)

Die von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige 2×2-Matrix

$$D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

heißt *Drehmatrix* im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

a) $D(\alpha)^{-1} = D(\alpha)^T$, d. h. die Drehmatrix $D(\alpha)$ ist orthogonal für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $|D(\alpha)| = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $D(\alpha)^{-1} = D(-\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) $D(\alpha) \cdot D(\beta) = D(\beta) \cdot D(\alpha) = D(\alpha + \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

e) $D(\pi/2) \cdot \binom{1}{0} = \binom{0}{1}$.

f) Ist $\mathbf{v}$ ein beliebiger vom Nullvektor verschiedener Vektor im $\mathbb{R}^2$, so schließen die beiden Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}' = D(\alpha) \cdot \mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^2$ für $\alpha \in [0, \pi]$ den Winkel α und für $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ den Winkel $2\pi - \alpha$ ein.

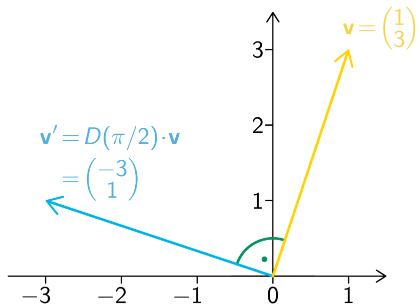


Abb. 5 Drehung des Vektors $\mathbf{v}$ um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn, mit dem Vektor $\mathbf{v}' = D(\pi/2) \cdot \mathbf{v}$ als Ergebnis

Die Zuordnung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = D(\alpha) \cdot \mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^2$ entspricht also für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ einer Drehung des Vektors $\mathbf{v}$ um den Winkel α mit dem Vektor $\mathbf{v}'$ als Ergebnis. Für $\alpha > 0$ und ein rechtshändiges Koordinatensystem verläuft die Drehung gegen den Uhrzeigersinn (vgl. Abb. 5).

g) Die Drehung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = D(\alpha) \cdot \mathbf{v}$ ist längentreu, d. h. für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\mathbf{v}'| = \big|D(\alpha) \cdot \mathbf{v}\big| = |\mathbf{v}|.$$

h) Die Drehung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = D(\alpha) \cdot \mathbf{v}$ ist winkeltreu, d. h. für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = \big(D(\alpha) \cdot \mathbf{v}\big) \cdot \big(D(\alpha) \cdot \mathbf{w}\big) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

Hinweis: Hierbei werden Vektoren im $\mathbb{R}^n$ wie üblich als Spaltenvektoren aufgefasst, d. h. als $n \times 1$-Matrizen ($n \in \mathbb{N}$), sodass $D(\alpha)$ und der Vektor $\mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^2$ eine Matrixmultiplikation erlauben, deren Ergebnis $D(\alpha) \cdot \mathbf{v}$ wiederum ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 6.18 (Spiegelmatrix im $\mathbb{R}^3$)

Ein Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ der Länge $|\mathbf{n}| = 1$ legt über die Punkt-Normalen-Form genau eine Ebene

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \right\}$$

im $\mathbb{R}^3$ fest, die den Nullvektor enthält und $\mathbf{n}$ als Normaleneinheitsvektor hat. Im Folgenden werde diese Ebene als Spiegelebene im $\mathbb{R}^3$ aufgefasst.

a) Geben Sie anhand von $\mathbf{n}$ eine Zuordnung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ im $\mathbb{R}^3$ an, die einer Spiegelung des Vektors $\mathbf{v}$ an der Spiegelebene mit dem Vektor $\mathbf{v}'$ als Ergebnis (d. h. als Spiegelbild von $\mathbf{v}$) entspricht.

b) Geben Sie eine Matrix S an, durch die sich die Spiegelung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$ von $\mathbf{v}$ an der Spiegelebene mit dem Spiegelbild $\mathbf{v}'$ in der Form $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v}$ ausdrücken lässt (vgl. Abb. 6).

c) Zeigen Sie:

   i) $S^{-1} = S^T$, d. h. die Spiegelmatrix S ist orthogonal.

   ii) $|S| = -1$.

   iii) Die Spiegelung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v}$ ist längentreu, d. h. für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt
   $$|\mathbf{v}'| = \left|S \cdot \mathbf{v}\right| = |\mathbf{v}|.$$

   iv) Die Spiegelung $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v}$ ist winkeltreu, d. h. für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt
   $$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = \left(S \cdot \mathbf{v}\right) \cdot \left(S \cdot \mathbf{w}\right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}.$$

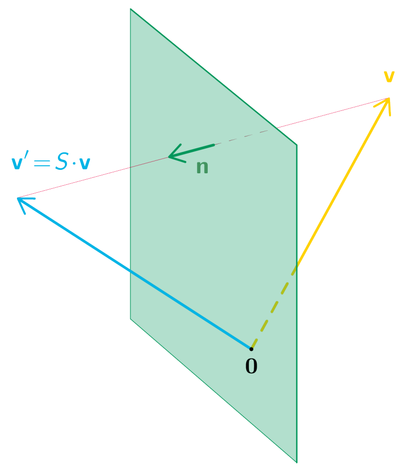


Abb. 6 Spiegelung des Vektors $\mathbf{v}$ an der zum Einheitsvektor $\mathbf{n}$ senkrechten Ebene durch den Ursprung, mit dem Vektor $\mathbf{v}' = S \cdot \mathbf{v}$ als Spiegelbild

d) Der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ werde so platziert, dass sein Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt und seine Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Wählen Sie eine der vier Hauptdiagonalen des Würfels aus. Geben Sie einen zu dieser Hauptdiagonale parallelen Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ der Länge $|\mathbf{n}| = 1$ an, sowie die Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Mittelpunkt des Würfels enthält und $\mathbf{n}$ als Normaleneinheitsvektor hat. Spiegeln Sie den Würfel an dieser Ebene. Welche geometrische Figur ergibt sich, und welche Lage hat sie relativ zum ursprünglichen Würfel? Hängt das Spiegelbild von Ihrer Wahl einer Hauptdiagonale ab?

Aufgabe 6.19 (Idempotente Matrizen)

Eine quadratische Matrix A mit der Eigenschaft $A^2 = A$ heißt *idempotente Matrix*.

a) Geben Sie alle idempotenten 2×2-Matrizen an.

b) Zeigen Sie:

   i) Ist A idempotent, so gilt $|A| = 0$ oder $|A| = 1$.

   ii) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann idempotent, wenn die Abbildung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ idempotent ist ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$).

   iii) A ist genau dann idempotent und regulär, wenn A die Einheitsmatrix E ist.

   iv) A ist genau dann idempotent, wenn $E - A$ idempotent ist.

   v) A ist genau dann idempotent, wenn A^m für alle $m \in \mathbb{N}$ idempotent ist.

c) Idempotente Matrizen finden u.a. in der Geographie, der Architektur, der Statistik und der Computergrafik Anwendung, um Projektionen zu beschreiben. Sie werden dann auch als Projektionsmatrizen bezeichnet.

   i) Der Formationsflug n gleichartiger Objekte ($n \in \mathbb{N}$) verlaufe mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ auf konstanter Höhe $h > 0$ über der Erdoberfläche. Die Flugobjekte seien mit konstantem Nachbarabstand $d > 0$ perlschnurartig auf einer Geraden angeordnet, deren Richtung der Flugrichtung entspricht. Es könnte sich z. B. um Zugvögel (ca. $n = 300$, $h = 600$ m, $v = 50$ km/h, $d = 50$ cm bei Kranichen) oder Satelliten (ca. $n = 22$, $h = 550$ km, $v = 27.400$ km/h, $d = 40$ km bei den Satellitenketten eines US-amerikanischen Raumfahrtunternehmens) handeln. Die Position $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ des i-ten Flugobjektes ($i = 1, \ldots, n$) im Raum lässt sich somit bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems und der Zeitachse punktförmig idealisiert gemäß

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{pmatrix} d \cdot i + v \cdot t \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

als vektorwertige Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Die Sonne werfe jeweils einen punktförmigen Schatten der Flugobjekte auf die Erdoberfläche. Geben Sie eine Projektionsmatrix P an, durch die sich der Schattenwurf in der Form $\mathbf{x}_i'(t) = P \cdot \mathbf{x}_i(t)$ als Zuordnung $\mathbf{x}_i(t) \mapsto \mathbf{x}_i'(t)$ ausdrücken lässt, mit $\mathbf{x}_i'(t)$ als dem Schattenbild von $\mathbf{x}_i(t)$ auf der Erdoberfläche. Gehen Sie hierbei von einer ebenen (nicht gekrümmten) Erdoberfläche und davon aus, dass die Sonne als quasi unendlich weit entfernte Lichtquelle parallele Lichtstrahlen aussendet, sodass der Schattenwurf einer Parallelprojektion (nicht einer Zentralprojektion) entspricht. Unterscheidet sich die Geschwindigkeit der Schatten der Flugobjekte von jener der Flugobjekte selbst?

Aufgabe 6.20 (Involutorische Matrizen)

Eine quadratische Matrix A mit der Eigenschaft $A^2 = E$ heißt *involutorische Matrix*.

a) Geben Sie alle involutorischen 2×2-Matrizen an.

b) Zeigen Sie:

   i) Ist A involutorisch, so gilt $|A| = 1$ oder $|A| = -1$.

   ii) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann involutorisch, wenn die Abbildung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ involutorisch ist ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$).

   iii) A ist genau dann involutorisch, wenn $(E - A)/2$ idempotent ist.

   iv) A ist genau dann involutorisch, wenn $(E + A)/2$ idempotent ist.

   v) A ist genau dann involutorisch, wenn A^m für alle $m \in \mathbb{N}$ involutorisch ist.

c) Involutorische Matrizen dienen u. a. zur Beschreibung bestimmter geometrischer Transformationen von Objekten in der Ebene oder im Raum, deren zweimalige Anwendung wieder das jeweilige Ausgangsobjekt ergibt.

   i) Zeigen Sie, dass die Drehmatrix $D(\alpha)$ aus Aufgabe 6.17 für $\alpha = \pi$ involutorisch ist. Was bedeutet dies anschaulich?

   ii) Zeigen Sie, dass die Spiegelmatrix S aus Aufgabe 6.18 involutorisch ist. Was bedeutet dies anschaulich?

Aufgabe 6.21 (Ähnlichkeit von Matrizen)

Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n)$ heißen zueinander *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in M(n \times n)$ mit $B = TAT^{-1}$ gibt ($n \in \mathbb{N}$). Sind A und B zueinander ähnlich, so schreibt man $A \sim B$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M(n \times n)$ ist.

b) Geben Sie für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[\lambda E]_\sim$ an.

c) Zeigen Sie:

   i) Aus $A \sim B$ folgt $|A| = |B|$.

   ii) Aus $A \sim B$ folgt $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$.

   iii) Aus $A \sim B$ folgt $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

   iv) Aus $A \sim B$ folgt $A^m \sim B^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

d) Welche der folgenden 2×2-Matrizen sind zueinander ähnlich?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.22 (Übergangsmatrizen)

folgt demnächst

Aufgabe 6.23 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

folgt demnächst

Aufgabe 6.24 (Lineare Gleichungssysteme)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

a) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 10x_2 &= 5 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 10 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

e) $$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -9 \end{array}$$

f) $$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

und deuten Sie diese Menge geometrisch.

Aufgabe 6.25 (Cramer'sche Regel)

Durch die quadratische $n \times n$-Matrix A und den Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit dem gesuchten Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben ($n \in \mathbb{N}$). A sei invertierbar, d. h. das Gleichungssystem habe genau eine Lösung.
Für eine beliebige quadratische $n \times n$-Matrix $U = (u_{ij})$ und einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $U_k[\mathbf{v}]$ die $n \times n$-Matrix, bei der die k-te Spalte von U durch $\mathbf{v}$ ersetzt wurde ($k = 1, \ldots, n$), also

$$U_k[\mathbf{v}] := \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k-1} & v_1 & u_{1k+1} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & \cdots & u_{2k-1} & v_2 & u_{2k+1} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nk-1} & v_n & u_{nk+1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die folgende Formel für die Komponenten x_k des Lösungsvektors $\mathbf{x}$ wird als *Cramer'sche Regel* bezeichnet:

$$x_k = \frac{|A_k[\mathbf{b}]|}{|A|}.$$

a) Beweisen Sie die Cramer'sche Regel.
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $|E_k[\mathbf{x}]| = x_k$ sowie $A \cdot E_k[\mathbf{x}] = A_k[A \cdot \mathbf{x}]$ gilt.

b) Stellen Sie jeweils ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit Hilfe der Cramer'schen Regel:

i) Eine Mutter ist doppelt so alt wie ihre beiden Töchter zusammen. Vor zwei Jahren war sie viermal so alt wie die eine Tochter, und vor vier Jahren war sie sechsmal so alt wie die andere Tochter. Wie alt ist jede von den dreien?

ii) Beim YUV-Farbmodell wird jede Farbe durch ein Zahlentripel (Y, U, V) aus einer Luminanz-Komponente Y sowie zwei Chrominanz-Komponenten U und V dargestellt. Das Farbmodell erlaubt durch Beschränkung auf die Y-Komponente eine unmittelbare Verwendung für Schwarz-Weiß-Bildschirme. Beim RGB-Farbmodell dagegen wird jede Farbe durch ein Zahlentripel (R, G, B) aus einer Rot-, einer Grün- und einer Blau-Komponente dargestellt. Beispielsweise stehen die RGB-Zahlentripel $(1, 0, 0)$ für Rot, $(1, 1, 0)$ für Gelb und $(1, 1, 1)$ für Weiß. Zwischen YUV- und RGB-Darstellung besteht der lineare Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} Y \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,299 & 0,587 & 0,114 \\ -0,14714 & -0,28886 & 0,436 \\ 0,615 & -0,51499 & -0,10001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}.$$

Für welche Farbe steht das YUV-Zahlentripel (0,701; 0,14714; $-$0,615)?

iii) Gesucht ist eine vierstellige Zahl. Die Zahl hat die Quersumme 15. Ihre Hunderterstelle ist um 4 größer als ihre Einerstelle. Vertauscht man die Tausenderstelle mit der Einerstelle, ergibt sich eine um 3996 größere Zahl. Vertauscht man die Hunderterstelle mit der Zehnerstelle, ergibt sich eine um 810 kleinere Zahl.

iv) Eine Straßenbahn fährt vom Hauptbahnhof mit weiblichen und männlichen Fahrgästen ab. Beim ersten Halt danach steigt ein Drittel der weiblichen Fahrgäste aus, und genauso viele männliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine weiblichen Fahrgäste ein und keine männlichen Fahrgäste aus. Beim nächsten Halt steigt ein Drittel der männlichen Fahrgäste aus, und genauso viele weibliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine männlichen Fahrgäste ein und keine weiblichen Fahrgäste aus. Nach diesem Halt befinden sich zwei weibliche Fahrgäste mehr als männliche in der Straßenbahn, und die Anzahl der männlichen Fahrgäste ist gleich der Anzahl der weiblichen Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof. Wie viele männliche Fahrgäste und wie viele weibliche Fahrgäste waren bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof in der Straßenbahn?

Aufgabe 6.26 (Geometrische Anwendungen von LGS)

folgt demnächst

7 Differentialrechnung

Aufgabe 7.1 (Ableitung)

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung

a) der Wurzelfunktion an der Stelle $x_0 = 5$,

b) der natürlichen Logarithmusfunktion an der Stelle $x_0 = 1$,

c) der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 7.2 (Differenzierbarkeit)

a) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f mit $f(x) = |\sin(x + \pi/2)|$ stetig, aber nicht differenzierbar?

b) Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } x < -2 \\ 2e^{-x} & \text{für } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 2|x-1| & \text{für } x \geq 0 \end{array} \right\}$$

auf Differenzierbarkeit an den Stellen $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.

c) Existiert für die Funktion f mit

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\sqrt[3]{|x|} & \text{für } x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{für } x \geq 0 \end{array} \right\}$$

die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$?

d) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - ax + 9 & \text{für } x < 3 \\ \frac{x^2 - a}{x - 2} & \text{für } x \geq 3 \end{array} \right\}$$

$a \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 3$ differenzierbar ist.

e) Es sei

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{b}{x} & \text{für } x \leq 2, x \neq 0 \\ 7 & \text{für } x = 0 \\ ax - 2a + 1 & \text{für } x > 2 \end{array} \right\}.$$

i) Ist f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

ii) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ differenzierbar ist.

f) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} b + (x-a)^2 & \text{für } x < 1 \\ \ln x & \text{für } x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist.

g) Bestimmen Sie für

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2\sin x & \text{für } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & \text{für } |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{für } x \geq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

h) Es sei f eine reellwertige Funktion mit Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Eine Stelle $x_0 \in D_f$ heißt *Knickstelle* von f, wenn f dort nicht differenzierbar ist, aber die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung von f existieren. Ermitteln Sie jeweils die Knickstellen von f, berechnen Sie dort die einseitigen Ableitungen und fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f an:

i) $f(x) = \frac{1}{2}x + |x|$ ii) $f(x) = |x^2 - 1|$

i) Zeigen Sie für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x^3|$, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 0$, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - 0 \right| < \epsilon.$$

Aufgabe 7.3 (Tangenten)

a) Gegeben seien die Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$. Bestimmen Sie rechnerisch alle Stellen entlang der x-Achse, an denen die Tangenten an die Graphen von f und g parallel sind. Fertigen Sie anschließend eine Skizze der Graphen von f und g sowie ihrer Tangenten an den betreffenden Stellen an.

b) Gegeben seien die Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = -x^2 - 1$. Gibt es Geraden, die zugleich Tangente an den Graphen von f und Tangente an den Graphen von g sind?

Aufgabe 7.4 (Differentiation)

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = x^8 + 5x^4 - 3x^3 - 4$ b) $f(x) = (x^2 + 3)e^x$ c) $f(x) = \dfrac{1 - 5x}{1 + 5x}$

d) $f(x) = (x^7 - 3x^5 + 7)^{10}$ e) $g(x) = \sqrt{4 - 7x}$ f) $g(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

g) $g(x) = x \sin x$ h) $g(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ i) $s(t) = 1 + \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t$

j) $s(t) = \dfrac{t}{\sin t - t \cos t}$ k) $s(t) = \tan^3(t^2 \sin t)$ l) $s(t) = e^{-t} \sin t$

m) $f(y) = e^{\cos y}$ n) $f(y) = e^{-y^2}$ o) $f(y) = y^2 \sinh y$

p) $f(y) = \dfrac{\cosh y}{y} - \coth y$ q) $g(u) = \sqrt{\tan 2u}$ r) $g(u) = \sin \sqrt{u} - \sqrt{u} \cos \sqrt{u}$

s) $g(u) = \frac{1}{4} \ln \dfrac{1 + u^2}{1 - u^2}$ t) $g(u) = u^{\tan u}$ u) $h(s) = (\tan s)^{\ln s}$

v) $h(s) = \ln \ln s$ w) $h(s) = \arcsin \sqrt{s}$ x) $h(s) = \operatorname{arcosh} s^2$

Aufgabe 7.5 (Höhere Ableitungen)

Berechnen Sie:

a) $(x^5)^{(5)}$ b) $(x^5 \ln x)'''$ c) $(x^2 e^{2x})^{(4)}$ d) $(x^2 e^{-x})^{(5)}$

Aufgabe 7.6 (Ableitungen gerader und ungerader Funktionen)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Ist f eine gerade Funktion, so ist f' eine ungerade Funktion auf $\mathbb{R}$. Ist umgekehrt f eine ungerade Funktion, so ist f' eine gerade Funktion auf $\mathbb{R}$.

b) Ist f sogar beliebig oft differenzierbar und eine gerade oder eine ungerade Funktion auf $\mathbb{R}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(-x)\ f(-x) = (-1)^n\ f^{(n)}(x)\ f(x).$$

Aufgabe 7.7 (Erweiterte Ableitungsregeln)

Zeigen Sie jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $(\sqrt{x})^{(n)} = (-1)^{n+1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n x^{n-1} \sqrt{x}}$

b) $(\sin^2 x)^{(2n)} = (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \cos 2x$

c) Sind die Funktionen f_i $(i = 1, \ldots, n)$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch die Funktion $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ und es gilt $f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} f_j(x_0) \cdot f_i'(x_0) \cdot \prod_{k=i+1}^{n} f_k(x_0) \right)$.
Tipp: Machen Sie sich zunächst die Bedeutung der Summen- und Produktzeichen klar.

d) Sind die Funktionen f und g in einem Intervall n-mal differenzierbar, so auch die Funktion $f \cdot g$ und es gilt $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$ in diesem Intervall.

Aufgabe 7.8 (Regel von L'Hospital)

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x \sin 2x}{\sinh^2 x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{3 - \sqrt{9 - x^2}}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \sin x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5}{e^{3x}}$ f) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^x$ g) $\lim\limits_{x \uparrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ h) $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cot x}$

Aufgabe 7.9 (Qualitativer Verlauf von Graphen)

Skizzieren Sie jeweils den Graphen einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$, für die gilt:

a) $f > 0,\ f' > 0,\ f'' < 0,$ b) $f > 0,\ f' < 0,\ f'' > 0,$

c) $f < 0,\ f' > 0,\ f'' > 0,$ d) $f > 0,\ f' < 0,\ f'' < 0.$

Aufgabe 7.10 (Bedingungen für Extremwerte und Wendepunkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b, c und d jeweils erfüllen, damit
   i) f zwei Extremwerte besitzt,
   ii) der Graph von f einen Wendepunkt besitzt,
   iii) f genau einen Extremwert besitzt?

b) Beweisen Sie: Besitzt f zwei Extremwerte, so handelt es sich hierbei um ein Maximum und ein Minimum, der Graph von f besitzt genau einen Wendepunkt und dieser liegt in der Mitte zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt.

Aufgabe 7.11 (Extremwertaufgaben)

a) Welche Höhe hat unter allen von einer Kugel mit dem Radius R einbeschriebenen spitzen Kreiskegeln derjenige mit dem größten Volumen?

b) An eine Spannungsquelle mit der Urspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R_a angeschlossen. Bei welchem Wert von R_a ist die vom Verbraucher aufgenommene Leistung maximal?

Aufgabe 7.12 (Liefer- und Lagerkosten)

Der Bedarf eines Unternehmens an einem bestimmten Produkt belaufe sich auf b Stück pro Woche. Die Lagerkosten für dieses Produkt seien die Summe aus den Fixkosten f und den variablen Kosten l pro Stück und Woche. Eine einzelne Anlieferung des Produktes verursache unabhängig von der Stückzahl die Kosten a. Bestellt das Unternehmen x Stück pro Anlieferung, so benötigt es $n = b/x$ Anlieferungen, und die Lieferkosten betragen $a \cdot n = a \cdot b/x$ pro Woche. Verringert sich der Bestand des Produktes mit konstanter Geschwindigkeit, so muss es im Mittel die halbe Zeit zwischen zwei Lieferungen gelagert werden. Die Lagerkosten betragen somit $b \cdot l/(2n) + f = l \cdot x/2 + f$. Die Kosten $K(x)$ für Lieferung und Lagerung pro Woche als Funktion der Bestellmenge x pro Anlieferung lauten also insgesamt:

$$K(x) = \frac{ab}{x} + \frac{lx}{2} + f.$$

Bei welcher Bestellmenge entstehen minimale Kosten?

Aufgabe 7.13 (Gewinnoptimierung)

folgt demnächst

Aufgabe 7.14 (Schwerpunkt einer Dose)

folgt demnächst

Aufgabe 7.15 (Problem des undurchsichtigen Quadrates)

Auf einem quadratischen Feld soll ein Zaun errichtet werden, der das Feld undurchsichtig macht. Alle Sichtlinien, die das Feld schneiden, sollen also von dem Zaun blockiert werden. Das Quadrat habe Seiten der Länge 1 (in einer beliebigen Einheit). Welche Länge hat der kürzeste Zaun, der die Anforderung erfüllt, und wie verläuft er? Dieses sogenannte Problem des undurchsichtigen Quadrates ist bis heute ungelöst. Nähern Sie sich in mehreren Schritten dem besten bislang bekannten Lösungsansatz (vgl. Abb. 7).

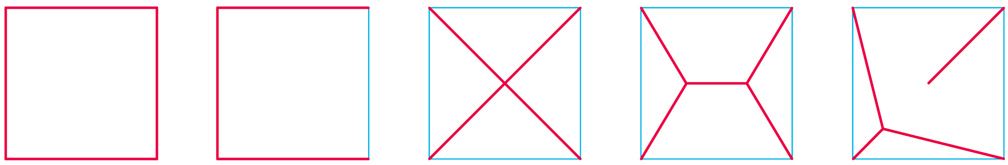


Abb. 7 Lösungsansätze für das Problem des undurchsichtigen Quadrates

a) Ein Zaun entlang aller vier Seiten des Quadrates macht es undurchsichtig. Wie lang ist er?

b) Wird der Zaun ausgehend von a) an einer ganzen Seite des Quadrates entfernt, bleibt das Quadrat opak. Welche Länge hat der Zaun dann?

c) Auf welchen Wert verringert sich die Länge des Zauns, wenn er im Gegensatz zu a) und b) nicht entlang von Seiten, sondern entlang der beiden Diagonalen des Quadrates verläuft?

d) Wenn sich die vier von den Ecken ausgehenden Geradenstücke anders als bei c) nicht im Mittelpunkt des Quadrates, sondern paarweise an den Enden eines fünften, mittigen, parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten verlaufenden Geradenstückes treffen, variiert die Länge eines auf diesen fünf Geradenstücken errichteten Zaunes, je nach Länge des mittigen Geradenstückes, zwischen den Ergebnissen aus b) und aus c). Mit welchem Minimum? Die zugehörige Konstellation der fünf Geradenstücke wird als *minimaler Steiner-Baum* bezeichnet. Es handelt sich um den kürzestmöglichen Verlauf eines Zauns, der das Quadrat blickdicht hält und zusammenhängend ist.

e) Betrachten Sie abschließend einen – im Unterschied zu a) bis d) nicht zusammenhängenden – Verlauf des Zaunes, bestehend aus einem ersten Geradenstück, das von einer Ecke zum Mittelpunkt des Quadrates führt, einem zweiten Geradenstück, das von der gegenüberliegenden Ecke ausgehend entlang der Diagonale verläuft, aber vor dem Mittelpunkt endet, sowie zwei weiteren Geradenstücken, die von den übrigen Ecken ausgehend das Ende des zweiten Geradenstückes treffen. Welches Minimum hat die Länge eines auf diesen vier Geradenstücken errichteten Zaunes, abhängig davon, wie nahe das zweite Geradenstück an den Mittelpunkt des Quadrates heranreicht? In der Diskreten Geometrie wird weithin vermutet, dass es sich hierbei um die Lösung für das Problem des undurchsichtigen Quadrates handelt und kein kürzerer Zaun existiert, der alle Sichtlinien durch das Feld blockiert, aber ein Beweis dafür steht aus.

Aufgabe 7.16 (Links- und Rechtskurven)

Der Verlauf einer Straße lasse sich durch die Kurve

a) $y = x \arctan x, \ -9 \leq x \leq 9$ b) $y = \ln(x^2 - 1), \ \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq 10$

beschreiben. Zeigen Sie, dass ein auf dieser Straße fahrendes Auto immer nur in eine Richtung lenken muss. In welche?

Aufgabe 7.17 (Kurvendiskussion)

Führen Sie jeweils für die Funktion f eine vollständige Kurvendiskussion durch:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$ c) $f(x) = e^x$

d) $f(x) = e^{-x^2}$ e) $f(x) = \sin^2 x$ f) $f(x) = x^2 \ln x$

Aufgabe 7.18 (Sigmoidfunktion)

folgt demnächst

Aufgabe 7.19 (Taylor-Entwicklung)

folgt demnächst

8 Integralrechnung

Aufgabe 8.1 (Riemannsche Zwischensummen und ihr Grenzwert)

Berechnen Sie jeweils das bestimmte Riemann-Integral als Grenzwert einer Folge von Zwischensummen.

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} e^x \, dx \qquad \text{b)} \int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$$

Tipp zu b): Erweitern Sie die Summanden der Zwischensumme $S_f(Z_n)$ mit $2\sin\frac{\pi}{2n}$ und nutzen Sie die Beziehung $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

Aufgabe 8.2 (Eigenschaften des Integrals)

Beweisen Sie

a) den Satz über die Intervalladditivität des Integrales,

b) den Satz über die Linearität des Integrales,

c) den Satz über die Monotonie des Integrales,

d) die Dreiecksungleichung für das Integral,

indem Sie die auftretenden bestimmten Riemann-Integrale jeweils als Grenzwert einer Folge von Zwischensummen auffassen.

Aufgabe 8.3 (Integrierbarkeit und Integralwert)

a) Zeigen Sie für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{für } x < 0 \\ 5 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, dass f im Intervall $[-2,3]$ integrierbar ist mit $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 7$, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle Zerlegungen Z von $[-2,3]$ mit $d(Z) < \delta$ gilt: $|S_f(Z) - 7| < \epsilon$.

b) Zeigen Sie durch Abschätzung des Integranden (ohne Flächenbetrachtung, ohne explizite Integration):

$$\text{i)} \ \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{ii)} \ \frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} \, dx \leq \frac{1}{2}(e+1)$$

Tipp zu ii): Nutzen Sie für die Abschätzung nach unten, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Reihendarstellung $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ gilt.

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für jedes $a > 0$ über $[-a,a]$ integrierbar. Zeigen Sie:

i) Ist f gerade, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

ii) Ist f ungerade, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Aufgabe 8.4 (Substitutionsmethode)

Lösen Sie mit Hilfe der Substitutionsmethode:

a) $\displaystyle\int \sin 17x\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{6-5x}\, dx$ c) $\displaystyle\int \cot x\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2y}{\sqrt{1-y^4}}\, dy$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx$ f) $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{3t-5}\, dt$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\, dx$ h) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{u(1+\ln u)}\, du$ i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} 2\sqrt[3]{x^5+x^3}\, dx$

Aufgabe 8.5 (Partielle Integration)

Lösen Sie mit Hilfe partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x \sinh x\, dx$ b) $\displaystyle\int \sin^2 \alpha\, d\alpha$ c) $\displaystyle\int u^2 e^u\, du$

d) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx$ e) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx$ f) $\displaystyle\int_1^e \ln t\, dt$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} y \cos y\, dy$ h) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x\, dx$

Aufgabe 8.6 (Integration mit Partialbruchzerlegung)

Lösen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{u}{u+4}\, du$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x-10}\, dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{t^3+3t^2-4}\, dt$

e) $\displaystyle\int \frac{y^2}{(y^2-4)(y-2)^2}\, dy$ f) $\displaystyle\int \frac{2x^5-9x^4+16x^3-11x^2+3x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\, dx$

Aufgabe 8.7 (Erkennen einer geeigneten Integrationsmethode)

Lösen Sie mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \ln x\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{u}{u^2+4u+3}\, du$ c) $\displaystyle\int \left(1+e^{2x}\right)^2 e^{2x}\, dx$

Aufgabe 8.8 (Unbeschränkter Integrationsbereich)

Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$ b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,dx$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{2t}{t^2+1}\,dt$ e) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{u^2+2u+2}\,du$ f) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln\left(2+\cos^2(x)\right)}{x}\,dx$

g) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(-x)^\alpha}\,dx$ h) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{\cosh y}\,dy$ i) $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$

Aufgabe 8.9 (Integrand mit Singularitäten)

Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls:

a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\alpha^2-4\alpha+3}\,d\alpha$ c) $\int\limits_1^2 \frac{u}{\sqrt{u-1}}\,du$

d) $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$ e) $\int\limits_0^{1/e} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ f) $\int\limits_1^2 \frac{1}{t\ln t}\,dt$

g) $\int\limits_1^e \frac{1}{y\sqrt{\ln y}}\,dy$ h) $\int\limits_0^\pi \cot x\,dx$ i) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

Aufgabe 8.10 (Äquivalenzrelation per Integral)

Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion f und die Teilmenge $\sim$ von $\mathbb{R}^2$,

$$\sim\,:=\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\int\limits_a^b f(x)\,dx=0\right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

b) Es sei $f(x)=\sin x$. Geben Sie alle verschiedenen Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 8.11 (Skalarprodukt per Integral)

a) Es sei $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f,g\rangle:=\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\;dx\quad\text{für } f,g\in C[a,b]$$

ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem Vektorraum $C[a,b]$ erklärt ist.

b) Zeigen Sie, dass die abzählbar unendlich vielen Funktionen $v_k\in C[-\pi,\pi]$ mit

$$v_k(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) & \text{für } k\in\mathbb{Z},k>0\\ 1 & \text{für } k=0\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) & \text{für } k\in\mathbb{Z},k<0\end{cases}$$

bezüglich des Skalarproduktes aus a) paarweise orthogonal sind und somit ein Orthogonalsystem von Vektoren in $C[-\pi,\pi]$ bilden.

Aufgabe 8.12 (Potenzierte Integranden)

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

b) Die Funktion f sei auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und es gelte $f \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n \, dx \right)^{1/n} = \max f([a, b]).$$

Aufgabe 8.13 (Flächeninhalte)

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die

i) von den Koordinatenachsen, der Geraden $x = 3$ und der Parabel $y = x^2 + 1$,

ii) von der x-Achse, den Geraden $x = -1$ und $x = 4$ und der Kurve $y = e^x + 2$,

iii) von den Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$,

iv) von der x-Achse, den Geraden $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = 2\pi$ und der Kurve $y = \sin x$,

v) von den Kurven $y = \frac{8}{3\pi^3}(x + \frac{\pi}{2})^2(x - \frac{\pi}{2})$ und $y = \cos x$

begrenzt wird.

b) Berechnen Sie jeweils für $d = 0$, $d = 1$ und $d = 2$ den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von f_1 und f_2:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - d.$$

Tipp: Beginnen Sie mit dem Fall $d = 0$. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Differenzfunktion $f = f_1 - f_2$ an. Welche Auswirkung hat es anschaulich, wenn man von $d = 0$ zu $d = 1$ bzw. $d = 2$ übergeht?

Aufgabe 8.14 (Volumina von Rotationskörpern)

a) Durch Drehung der ebenen Kurve $y = 6x^2 - 4$ im Intervall $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper in Form eines Kelchglases. Wie groß ist sein Volumen?

b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ durch Drehung der ebenen Kurve $y = \sin x$ um die x-Achse entsteht.

c) Gegeben sei ein spitzer Kreiskegel mit der Höhe h und dem Radius der Bodenfläche r. Leiten Sie eine Formel für das Volumen des Kegels her.

Aufgabe 8.15 (Bogenlängen ebener Kurven)

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Die ebene Kurve $y = f(x)$ hat in diesem Intervall die Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

a) Welchen Umfang hat ein Kreis mit dem Radius R?

b) Der Verlauf der kürzesten Straße zwischen zwei Orten A und B lasse sich durch die ebene Kurve

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 15,$$

beschreiben. Ein E-Bike, dessen Akku-Ladung noch für 42 km reicht, startet im Ort A. Kann es den Ort B erreichen, ohne nachzuladen?

c) Berechnen Sie die Bogenlänge der ebenen Kurve $y = \cosh x$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Aufgabe 8.16 (Mantelflächen von Rotationskörpern)

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Der durch Drehung der ebenen Kurve $y = f(x)$ in diesem Intervall um die x-Achse entstehende Rotationskörper hat die Mantelfläche

$$M = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

a) Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R?

b) Gegeben sei ein spitzer Kreiskegel mit der Höhe h und dem Radius der Bodenfläche r. Leiten Sie eine Formel für die Mantelfläche des Kegels her.

c) Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung der ebenen Kurve $y = x^3/3$ im Intervall $0 \le x \le \sqrt[4]{15}$ um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 8.17 (Mittelwerte)

a) Die Stromstärke $I(t)$ als Funktion der Zeit t habe die Form eines Dreieckpulses der Periode T und der Amplitude I_0. Berechnen Sie den Effektivwert (d. h. den quadratischen Mittelwert) des Stromes.

b) Die Stromstärke $I(t)$ eines Einweggleichrichters als Funktion der Zeit t habe die Periode $T = 2\pi/\omega$ und werde durch

$$I(t) = \begin{cases} I_0 \sin \omega t & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{\pi}{\omega} < t \le \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

beschrieben. Berechnen Sie den Gleichrichtwert (d. h. den linearen Mittelwert) des Stromes.

Aufgabe 8.18 (Schwerpunkte)

Der *Schwerpunkt* (oder *Massenmittelpunkt*) ist der Punkt eines starren Körpers, um den im homogenen Schwerefeld der Erde kein Drehmoment auftritt. Ein im Schwerpunkt unterstützter Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, d. h. die Gesamtmasse des Körpers kann als im Schwerpunkt vereinigt gedacht werden.

a) Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und von der Nullfunktion verschieden. Der Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der ebenen Kurve $y = f(x)$ in diesem Intervall um die x-Achse entsteht, liegt auf der x-Achse, und zwar bei

$$x_S = \frac{\int_a^b x\, f(x)^2\, dx}{\int_a^b f(x)^2\, dx},$$

sofern der Körper aus einem Material räumlich konstanter Dichte besteht.

i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt einer Kugel in ihrem Mittelpunkt liegt.

ii) Gegeben sei ein spitzer Kreiskegel mit der Höhe h und dem Radius der Bodenfläche r. In welcher Höhe liegt sein Schwerpunkt?

iii) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1/x$ drehe sich um die x-Achse. Wo liegt der Schwerpunkt des entstehenden Rotationskörpers, der durch $x = 1$ und $x = t > 1$ begrenzt wird? Existiert der Grenzwert $t \to \infty$?

b) Bei einem flächenhaften Körper konstanter Dicke, dessen Grundfläche in der x-y-Ebene liegt und durch die x-Achse, die Geraden $x = a$ und $x = b$ sowie den Graphen einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f begrenzt wird, hat der Schwerpunkt die Koordinaten

$$x_S = \frac{\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}, \qquad y_S = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

i) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks im Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden liegt.

ii) Wo liegt der Schwerpunkt eines Viertelkreises mit dem Radius R?

iii) Wo liegt der Schwerpunkt der Fläche, die durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sin x$ im Intervall $[0, \pi]$ begrenzt wird?

Aufgabe 8.19 (Niederschlagsmenge)

Die mittlere tägliche Niederschlagsmenge $n(t)$ im Stadtgebiet von Münster als Funktion der Zeit t werde grob durch

$$n(t) = n_0\Big(1 + 0{,}3 \cdot \cos(4\pi t/T)\Big)$$

modelliert, mit $T = 365$ Tage und $n_0 = 1{,}84$ mm/Tag. Welche Niederschlagsmenge in einem Jahr ist demnach für Münster typisch?

Aufgabe 8.20 (Parameterabhängige Integrale)

folgt demnächst

Aufgabe 8.21 (Eindimensionale Bewegung)

folgt demnächst

9 Differentialgleichungen

Aufgabe 9.1 (Trennung der Variablen, allgemeine Lösung)

Berechnen Sie jeweils die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung. Führen Sie dazu eine Trennung der Variablen und eventuell zuvor eine geeignete Substitution durch.

a) $2x^2y' = y^2$ b) $y' = (y+2)^2$ c) $y'(1+x^3) = 3x^2y$

d) $y' = 1 - y^2$ e) $y^2y' = x^5$ f) $y' = (x+y+1)^2$

g) $xy' = y + 4x$ h) $y' \tan x - y = 1$ i) $(3x-2y)y' = 6x - 4y + 1$

Aufgabe 9.2 (Trennung der Variablen, Anfangswertproblem)

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem. Führen Sie dazu eine Trennung der Variablen und eventuell zuvor eine geeignete Substitution durch.

a) $y' + y \sin x = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{e}$ b) $x(x+1)y' = y, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

c) $yy' = 2e^{2x}, \quad y(0) = 2$ d) $y^2y' + x^2 = 1, \quad y(2) = 1$

e) $y' + 2y = x, \quad y(0) = 1$ f) $y' = y^2 \sin x, \quad y(0) = 1$

Aufgabe 9.3 (Sinkgeschwindigkeit)

Die Sinkgeschwindigkeit $v(t)$ eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit als Funktion der Zeit t wird beschrieben durch die Differenzialgleichung

$$m\dot{v} + kv = mg,$$

wobei k der Reibungsfaktor und g die Erdbeschleunigung ist. Wie lautet die Lösung dieser Differenzialgleichung bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$?

Aufgabe 9.4 (Kondensatorspannung)

Ein Kondensator der Kapazität C wird zunächst auf die Spannung U_0 aufgeladen und dann über einen ohmschen Widerstand R entladen. Die Differenzialgleichung für diesen zur Zeit $t = 0$ einsetzenden Ausschaltvorgang lautet

$$RC\dot{U} + U = 0.$$

Berechnen Sie den Verlauf der Kondensatorspannung $U(t)$ als Funktion der Zeit t.

Aufgabe 9.5 (Differenzialgleichungen in Textform)

a) b)

a) Ermitteln Sie alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, deren Graph den Koordinatenursprung enthält und bei denen in jedem Punkt des Graphen die Steigung gleich der Quadratwurzel des Funktionswertes ist.

b) Welche Funktion $f\colon \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ hat als Eigenschaften, dass der Punkt $(2|3)$ Element des Graphen ist und dass die von den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen begrenzten Abschnitte aller Tangenten jeweils durch ihren Berührungspunkt halbiert werden?

Aufgabe 9.6 (Variation der Konstanten)

Berechnen Sie jeweils durch Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

a) $y' + 2y = \cos x$ b) $xy' = x^2 - y$ c) $y' + y \tan x = \cos x$

d) $y' + y \tan x = 2 \sin x \cos x$ e) $y' + 2xy = 3x$ f) $xy' + y = x \sin x$

Aufgabe 9.7 (Modell des Vergessens)

folgt demnächst

Aufgabe 9.8 (Adrenalingehalt im Blut)

folgt demnächst

Lösungen

6 Lineare Algebra

Lösungen zu Aufgabe 6.1

a) Es handelt sich um acht verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

c) Ein Springer benötigt mindestens fünf Züge, um von d1 nach f8 zu gelangen. Es gibt 95 verschiedene kürzestmögliche Zugfolgen eines Springers von d1 nach f8. Bei 75 dieser Zugfolgen besucht der Springer ausschließlich originäre Felder des Schachbrettes, bei den anderen 20 hingegen besucht er auch virtuelle Felder außerhalb des Schachbrettes.

d) Mit der Menge Z der acht verschiedenen Vektoren aus a):

$$\#\left\{(z_1,\ldots,z_{63})\in Z^{63}\;\middle|\;\bigcup_{n=0}^{63}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{k=1}^{n} z_k\right\}=\bigcup_{i=1}^{8}\bigcup_{j=1}^{8}\left\{\left(\begin{smallmatrix}i\\j\end{smallmatrix}\right)\right\}\;\wedge\;\sum_{k=1}^{63} z_k\in Z\right\}=26.534.728.821.064$$

e) Auf dem 2×2-, dem 2×5- und dem 3×4-Schachbrett gibt es jeweils keine geschlossene Springertour.

Lösungen zu Aufgabe 6.5

a) $\sqrt{29}$ b) $\sqrt{20}$ c) -22 d) -29 e) $\left(\begin{smallmatrix}4\\9\\-20\end{smallmatrix}\right)$ f) $\left(\begin{smallmatrix}-22\\18\\-8\end{smallmatrix}\right)$

g) -428 h) $\frac{1}{\sqrt{29}}\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\-4\end{smallmatrix}\right)$ i) $\arccos\frac{-22}{\sqrt{29}\sqrt{20}}$ j) 1 k) 12 l) 2

m) $\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix}-3\\0\\4\end{smallmatrix}\right)$ n) $\frac{\pi}{3}$ o) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lösungen zu Aufgabe 6.6

a) $\left(\begin{smallmatrix}3\\-10\\8\end{smallmatrix}\right)$ b) $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\-14\end{smallmatrix}\right)$ c) $\left(\begin{smallmatrix}-35\\58\\24\end{smallmatrix}\right)$ d) $\left(\begin{smallmatrix}-12\\-18\\-3\end{smallmatrix}\right)$ e) 0 f) $\sqrt{173}$

g) $\left(\begin{smallmatrix}4\\-7\\3\end{smallmatrix}\right)$ h) $\left(\begin{smallmatrix}48\\-9\\21\end{smallmatrix}\right)$ i) $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ j) $\frac{\pm 1}{\sqrt{1490}}\left(\begin{smallmatrix}19\\27\\-20\end{smallmatrix}\right)$ k) $\frac{1}{2}\sqrt{357}$

Lösungen zu Aufgabe 6.7

c) 75 d) 2

Lösungen zu Aufgabe 6.8

a) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)+\lambda\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ b) z.B. $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$

e) $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)+\lambda\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)+\mu\left(\begin{smallmatrix}3\\-2\\4\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;-16-2x+11y+7z=0\right\}$

f) $-\frac{43}{31}$ h) $\sqrt{14}$

Lösungen zu Aufgabe 6.13

a) 180 b) $-wxyz$ c) 21 d) 0 e) 0 f) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} d_i$

Lösungen zu Aufgabe 6.15

a)

i) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ii) nicht invertierbar iii) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ iv) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

b)

ii) $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ iii) $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = A^{-1}$

Lösungen zu Aufgabe 6.16

b) $a = -3$, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{58}}$

d) z. B.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 6.21

b) $[\lambda E]_\sim = \{\lambda E\} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

d) $A_1 \sim A_3,\ A_2 \sim A_4 \sim A_8,\ A_6 \sim A_{10},\ A_7 \sim A_9$

Lösungen zu Aufgabe 6.24

a) $\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 18 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, eine Gerade im $\mathbb{R}^2$

c) $\emptyset$ d) $\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, eine Gerade im $\mathbb{R}^3$

e) $\left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ f) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$, eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

Lösungen zu Aufgabe 6.25

b) i) 58, 16, 13
ii) Cyan
iii) die Jahreszahl von Einsteins „annus mirabilis“
iv) Bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof waren 12 weibliche und 14 männliche Fahrgäste in der Straßenbahn.

7 Differentialrechnung

Lösungen zu Aufgabe 7.1

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ b) 1 c) 0

Lösungen zu Aufgabe 7.2

a) an den Stellen $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

b) nicht differenzierbar in $x_0 = -2$ und $x_2 = 1$, differenzierbar in $x_1 = 0$

c) nein

d) $a = \frac{9}{2}$

e) i) nein

   ii) $a = -\frac{1}{2}, b = 2$

f) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$

g) nicht möglich

h) i) Knickstelle $x_0 = 0,\ f_l'(x_0) = -\frac{1}{2},\ f_r'(x_0) = \frac{3}{2}$

   ii) Knickstellen $x_{1/2} = \pm 1,\ f_l'(x_{1/2}) = -2,\ f_r'(x_{1/2}) = 2$

i) $\delta = \sqrt{\epsilon}$

Lösungen zu Aufgabe 7.3

a) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$

b) $g_1 : x \mapsto y = 2x,\ g_2 : x \mapsto y = -2x$

Lösungen zu Aufgabe 7.4

a) $f'(x) = 8x^7 + 20x^3 - 9x^2$

b) $f'(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$

c) $f'(x) = \dfrac{-10}{(1+5x)^2}$

d) $f'(x) = 10(x^7 - 3x^5 + 7)^9(7x^6 - 15x^4)$

e) $g'(x) = \dfrac{-7}{2\sqrt{4-7x}}$

f) $g'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

g) $g'(x) = \sin x + x\cos x$

h) $g'(x) = \dfrac{x + x\tan^2 x - \tan x}{x^2}$

i) $s'(t) = -\sin^3 t$

j) $s'(t) = \dfrac{(1-t^2)\sin t - t\cos t}{(\sin t - t\cos t)^2}$

k) $s'(t) = 3\tan^2(t^2\sin t)\big(1 + \tan^2(t^2\sin t)\big)(2t\sin t + t^2\cos t)$

l) $s'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$

m) $f'(y) = -\sin y e^{\cos y}$

n) $f'(y) = -2ye^{-y^2}$

o) $f'(y) = y(2\sinh y + y\cosh y)$

p) $f'(y) = \dfrac{y^2 + y\sinh^3 y - \cosh y \sinh^2 y}{y^2\sinh^2 y}$

q) $g'(u) = \dfrac{1+\tan^2 2u}{\sqrt{\tan 2u}}$

r) $g'(u) = \frac{1}{2}\sin\sqrt{u}$

s) $g'(u) = \dfrac{u}{1-u^4}$

t) $g'(u) = \left(\dfrac{\tan u}{u} + (1+\tan^2 u)\ln u\right)u^{\tan u}$

u) $h'(s) = \left(\dfrac{\ln(\tan s)}{s} + \dfrac{1+\tan^2 s}{\tan s}\ln s\right)(\tan s)^{\ln s}$

v) $h'(s) = \dfrac{1}{s\ln s}$

w) $h'(s) = \dfrac{1}{2\sqrt{s(1-s)}}$

x) $h'(s) = \dfrac{2s}{\sqrt{s^4-1}}$

Lösungen zu Aufgabe 7.5

a) $5!$ b) $x^2(47 + 60\ln x)$ c) $16(3 + 4x + x^2)e^{2x}$ d) $(-20 + 10x - x^2)e^{-x}$

Lösungen zu Aufgabe 7.8

a) $-\frac{3}{5}$ b) 4 c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) 0 f) 1 g) e h) 1

Lösungen zu Aufgabe 7.10

a) i) $a \neq 0 \wedge b^2 > 3ac$ ii) $a \neq 0$ iii) $a = 0 \wedge b \neq 0$

Lösungen zu Aufgabe 7.11

a) $h = \frac{4R}{3}$ b) $R_a = R_i$

Lösung zu Aufgabe 7.12

$$x = \sqrt{\frac{2ab}{l}}$$

Lösungen zu Aufgabe 7.15

a) 4 b) 3 c) $2\sqrt{2} \approx 2,828$ d) $\sqrt{3} + 1 \approx 2,732$ e) $\sqrt{2} + \sqrt{3/2} \approx 2,639$

Lösungen zu Aufgabe 7.16

a) Linkskurve b) Rechtskurve

8 Integralrechnung

Lösungen zu Aufgabe 8.1

a) $2\sinh 1$ b) 2

Lösungen zu Aufgabe 8.4 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $-\frac{1}{17}\cos 17x + c$ b) $-\frac{1}{5}\ln\big(|6-5x|\big) + c$ c) $\ln\big(|\sin x|\big) + c$

d) $\arcsin\left(y^2\right) + c$ e) $2e^{\sqrt{x}} + c$ f) $\frac{14}{9}$

g) $\ln 2$ h) $\ln 2$ i) $\frac{45}{4}$

Lösungen zu Aufgabe 8.5 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $x\cosh x - \sinh x + c$ b) $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + c$ c) $\left(2 - 2\,u + u^2\right)e^u + c$

d) $\frac{1}{2}x\sin\big(\ln x\big) - \frac{1}{2}x\cos\big(\ln x\big) + c$ e) $\frac{1}{4}\sin^4 x + c$ f) 1

g) -2 h) $-\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$ i) $\sinh\pi$

Lösungen zu Aufgabe 8.6 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $-\ln|x| + \ln\big(|x-1|\big) + c$ b) $u - 4\ln\big(|u+4|\big) + c$

c) $-\frac{1}{7}\ln\big(|x+5|\big) + \frac{1}{7}\ln\big(|x-2|\big) + c$

d) $-\frac{1}{9}\ln\big(|t+2|\big) + \frac{1}{3}\frac{1}{t+2} + \frac{1}{9}\ln\big(|t-1|\big) + c$

e) $-\frac{1}{16}\ln\big(|y+2|\big) + \frac{1}{16}\ln\big(|y-2|\big) - \frac{3}{4}\frac{1}{y-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(y-2)^2} + c$

f) $x^2 - 3x - \ln|x| + 2\ln\big(|x-1|\big) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + c$

Lösungen zu Aufgabe 8.7 ($c \in \mathbb{R}$)

a) $\frac{1}{2}\big(\ln|x|\big)^2 + c$ b) $\frac{3}{2}\ln\big(|u+3|\big) - \frac{1}{2}\ln\big(|u+1|\big) + c$ c) $\frac{1}{6}\left(1 + e^{2x}\right)^3 + c$

Lösungen zu Aufgabe 8.8

a) $\frac{1}{3}$ b) ∞ c) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{a} & \text{für } a > 0 \\ \infty & \text{für } a \le 0 \end{Bmatrix}$

d) ∞ e) π f) ∞

g) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{für } \alpha > 1 \\ \infty & \text{für } \alpha \le 1 \end{Bmatrix}$ h) π i) $\frac{1}{2}$

Lösungen zu Aufgabe 8.9

a) $\frac{1}{2}\pi$ b) konvergiert nicht c) $\frac{8}{3}$

d) $-\frac{1}{4}$ e) 1 f) ∞

g) 2 h) konvergiert nicht i) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{1 - \alpha} & \text{für } \alpha < 1 \\ \infty & \text{für } \alpha \ge 1 \end{Bmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 8.10

b) $$[a]_\sim = \begin{cases} \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{für } a = 0 \\ \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{für } a = \pi \\ \{a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} & \text{für } a \in]0, \pi[\end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 8.13

a) i) 12
 ii) $e^4 - \frac{1}{e} + 10$
 iii) $\frac{1}{3}$
 iv) 3
 v) $3 + \frac{5}{72}\pi$

b) $$\begin{cases} \frac{27}{8} & \text{für } d = 0 \\ \frac{9}{4} & \text{für } d = 1 \\ \frac{27}{8} & \text{für } d = 2 \end{cases}$$

Lösungen zu Aufgabe 8.14

a) $\frac{164}{5}\pi\sqrt{3}$ b) π^2 c) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Lösungen zu Aufgabe 8.15

a) $2\pi R$ b) ja c) $2\sinh 1$

Lösungen zu Aufgabe 8.16

a) $4\pi R^2$ b) $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ c) $\frac{63}{9}\pi$

Lösungen zu Aufgabe 8.17

a) $I_0/\sqrt{3}$ b) I_0/π

Lösungen zu Aufgabe 8.18

a)

ii) $x_S = \frac{1}{4}h$ iii) $x_S = \dfrac{t\ln t}{t-1}$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_S = \infty$

b)

ii) $x_S = y_S = \frac{4}{3\pi}R$ iii) $x_S = \frac{\pi}{2}$, $y_S = \frac{\pi}{8}$

Lösung zu Aufgabe 8.19

ca. 672 mm

9 Differentialgleichungen

Lösungen zu Aufgabe 9.1

a) $y(x) = \dfrac{2x}{Cx+1}$, $\quad y(x) = 0$

b) $y(x) = -\dfrac{2x+2C+1}{x+C}$, $\quad y(x) = -2$

c) $y(x) = C\left(x^3+1\right)$

d) $y(x) = \tanh(x+C)$, $\quad y(x) = 1$, $\quad y(x) = -1$

e) $y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^6 + C}$

f) $y(x) = -x - 1 + \tan(x - C)$

g) $y(x) = \big(4\ln|x| + C\big)x$

h) $y(x) = C\sin x - 1$

i) $y(x) = \frac{3}{2}x + 1$, ansonsten nicht geschlossen lösbar

Dabei ist jeweils $C \in \mathbb{R}$ beliebig.

Lösungen zu Aufgabe 9.2

a) $y(x) = e^{\cos x}$ b) $y(x) = \dfrac{x}{x+1}$

c) $y(x) = \sqrt{2e^{2x}+2}$ d) $y(x) = \sqrt[3]{-x^3+3x+3}$

e) $y(x) = \frac{5}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ f) $y(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Lösung zu Aufgabe 9.3

$v(t) = \dfrac{mg}{k} + \left(v_0 - \dfrac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$

Lösung zu Aufgabe 9.4

$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

Lösungen zu Aufgabe 9.5

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $f(x) = 0$

b) $f(x) = \frac{6}{x}$

Lösungen zu Aufgabe 9.6

a) $y(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + Ce^{-2x}$

b) $y(x) = \frac{x^3 + C}{3x}$

c) $y(x) = (x + C)\cos x$

d) $y(x) = -2\cos^2 x + C\cos x$

e) $y(x) = \frac{3}{2} + Ce^{-x^2}$

f) $y(x) = \frac{\sin x - x\cos x + C}{x}$

Probeklausur

Probeklausur zur Vorlesung „Mathematik II“
Sommersemester 2025
Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

FH Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. Gernot Bauer

Aufgabe 1 (Vermischtes)

a) Stellen Sie die relative Lage zweier diagonal gegenüberliegender Eckfelder des Schachbretts vektoriell als Summe von sechs Zügen eines Springers dar. 1

b) Welche Dimension hat der Vektorraum $M(m \times n)$ aller $m \times n$-Matrizen? 1

c) Geben Sie eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ an, die den Vektor $(1, 2, 3)$ als Normalenvektor hat. 1

d) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Knickstellen bei -1 und 1 an. 1

e) Differenzieren Sie $\arccos x$ mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion. 1

f) Was versteht man unter der Feinheit einer Zerlegung eines Intervalles? 1

g) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 7$ an, die ihre eigene Stammfunktion ist. 1

h) Leiten Sie eine Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius R her. 1

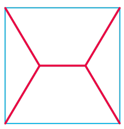
Aufgabe 2 (Lineare Algebra)

a) Zeigen Sie: Sind A und B zwei quadratische Matrizen mit $A \cdot B = 0$, $A \neq 0$ und $B \neq 0$, so gilt $|A| = |B| = 0$. 3

b) Eine Straßenbahn fährt vom Hauptbahnhof mit weiblichen und männlichen Fahrgästen ab. Beim ersten Halt danach steigt ein Drittel der weiblichen Fahrgäste aus, und genauso viele männliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine weiblichen Fahrgäste ein und keine männlichen Fahrgäste aus. Beim nächsten Halt steigt ein Drittel der männlichen Fahrgäste aus, und genauso viele weibliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine männlichen Fahrgäste ein und keine weiblichen Fahrgäste aus. Nach diesem Halt befinden sich zwei weibliche Fahrgäste mehr als männliche in der Straßenbahn, und die Anzahl der männlichen Fahrgäste ist gleich der Anzahl der weiblichen Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof. Wie viele männliche Fahrgäste und wie viele weibliche Fahrgäste waren bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof in der Straßenbahn? Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit Hilfe der Cramer'schen Regel. 5

Aufgabe 3 (Differentialrechnung)

a) Skizzieren Sie den Graphen einer auf dem Intervall $[a, b]$ definierten, zweimal stetig differenzierbaren Funktion f mit $f < 0$, $f' < 0$ und $f'' < 0$. 3



b) Vier von den Ecken eines Quadrates der Seitenlänge 1 ausgehende Geradenstücke treffen sich paarweise an den Enden eines fünften, mittigen, parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten verlaufenden Geradenstückes. Welche ist die kürzestmögliche Gesamtlänge aller fünf Geradenstücke? 5

Aufgabe 4 (Integralrechnung)

a) Zeigen Sie durch Abschätzung des Integranden (ohne Flächenbetrachtung, ohne explizite Integration):

$$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx \leq -\frac{\pi}{4}$$ 4

b) Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion f und die Teilmenge $\sim$ von $\mathbb{R}^2$,

$$\sim \; := \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \int_a^b f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist. Geben Sie für $f(x) = 1 - x^2$ die Äquivalenzklassen mit den Repräsentanten 0 und 2 an. 5

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen)

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $xy' = x^2 - y$. 4