Definition (Differentialgleichung)

...

Jede Lösung der Differentialgleichung, die aus der allgemeinen Lösung durch eine spezielle Wahl der Integrationskonstanten entsteht, heißt spezielle oder partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

Sind eine Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ und Zahlen $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, so bezeichnet die Aufgabe, eine Funktion φ zu finden, die

1) Lösung der Differentialgleichung auf einem Intervall I mit $x_0 \in I$ ist, und

2) die Bedingungen $\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

erfüllt, als Anfangswertproblem. Die Werte $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ heißen Anfangswerte, die Bedingungen Anfangsbedingungen und x_0 Anfangspunkt.

Beispiele

1) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $n'(t) = -\lambda n(t)$ lautet $n(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$, denn $n'(t) = (c \cdot e^{-\lambda t})' = -\lambda \cdot c \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot n(t)$ ✓ mit der Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$. Das Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $n(1) = 17$ hat die Lösung $n(t) = 17 e^{-\lambda(t-1)}$ $= \overbrace{17 \cdot e^{\lambda}}^{c} \cdot e^{-\lambda t}$. Die ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Sie entspricht der speziellen Wahl $c = 17 \cdot e^{\lambda}$ für die Integrationskonstante.

Quickies zu Differentialgleichung übers Verständnis:

2) $y^{(7)} = y$

$(e^x)''''''' \quad e^x$

3) Anfangswertproblem $y'' = -y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

$y(x) = \cos x$

$(\cos x)'' = -\cos x,\ \cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0$ ✓

Die Schwierigkeit bei der Analyse von Differentialgleichungen liegt darin, Lösungen explizit anzugeben. Hierzu gibt es verschiedene Methoden.

9.2 Differentialgleichung 1. Ordnung

9.2.1 Trennung der Variablen