1.27 | Surjektivität und Injektivität

a) $h: L \to S,\ l \mapsto h(l)$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$h(l_1) = h(l_2) \Rightarrow l_1 = l_2$ ist wahr, da jedes Land l eine Hauptstadt $h(l)$ besitzt.

Surjektivität: $\forall y \in Z\ \exists x \in D\ y = f(x)$

$\forall s \in S\ \exists l \in L\ s = h(l)$ ist falsch, da

b) $s: M \to \{7, 8, 9, \ldots, 68, 69, 70\},\ m \mapsto s(m)$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$s(m_1) = s(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$ ist nicht immer wahr, da zwei Menschen die selbe Schuhgröße tragen können

Surjektivität: $\forall y \in Z\ \exists x \in D\ y = f(x)$

$\forall s(m) \in Z\ \exists m \in D\ y = f(x)$ ist wahrscheinlich wahr, da vorraussichtlich jede Schuhgröße von einem Menschen getragen wird.

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x+y, y+z)$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Beweis durch Gegenbeispiel:

Sei $(x, y, z) = (0, 5, 0)$: $(0+5, 5+0) = (5, 5)$

Nun sei $(x, y, z) = (5, 0, 5)$: $(5+0, 0+5) = (5, 5)$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2$ aber $f(x_1) = f(x_2)$

Surjektivität: $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2\ \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ f(x, y, z) = (s, t)$

Sei $f(x, y, z) = (s, t)$

$\Rightarrow (x+y, y+z) = (s, t)$

$\Rightarrow x + y = s$

$\wedge\ y + z = t$

$\Rightarrow x + t - z = s \Leftrightarrow x = s + z - t$

$\wedge\ z = x + t - s$

$\wedge\ y = t - z \vee y = s - x$

Wähle $y = 0$.

$\Rightarrow z = t \wedge s = x$

$\Rightarrow$ Es ist surjektiv!

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\ (x, y) \mapsto (x, x+y, y)$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, x_1 + y_1, y_1) = (x_2, x_2 + y_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

Surjektivität: $\forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^3\ \exists (x, y)\ (s, t, u) = f(x, y)$

Sei $(s, t, u) = f(x, y)$

$\Rightarrow (s, t, u) = (x, x+y, y)$

$\Rightarrow s = x$

$\wedge\ t = x + y \Leftrightarrow x = t - y \Leftrightarrow y = t - x$

$\wedge\ u = y$

$\Rightarrow s = x \wedge u = y \wedge x = t - u \wedge y = t - s$

$\Rightarrow (s, t, u) = (s, t - u + t - s, u) \Rightarrow (s, t, u) = (s, 2t - s - u, u)$ ↯ $\to$ nicht surjektiv

e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x \cdot y, x + y)$

Injektivität: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 \cdot y_1, x_1 + y_1) = (x_2 \cdot y_2, x_2 + y_2)$

Sei $(x_1, y_1) = (1, 0)$ und $(x_2, y_2) = (0, 1)$

$\Rightarrow (1 \cdot 0, 1 + 0) = (0, 1)\ \wedge\ (0 \cdot 1, 0 + 1) = (0, 1) \to f(x_1) = f(x_2) \wedge (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \to$ nicht injektiv

Surjektivität: $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2\ (s, t) = f(x, y)$

Sei $(s, t) = f(x, y) \Rightarrow (s, t) = (x \cdot y, x + y)$

$\Rightarrow s = x \cdot y$

$\wedge\ t = x + y$

$\Leftrightarrow x = t - y\ \wedge\ y = x \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow f(x, y) = f(t - y, x \cdot \frac{1}{s}) = ((t - y)(x \cdot \frac{1}{s}), t - y + x \cdot \frac{1}{s}) \to$ nicht surjektiv