6.5 Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -3+4 = 1$$

ii)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2)\cdot(-3)+(-9)+5\cdot 3 = 6-9+15 = 12$$

iii)

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sqrt{3} \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sqrt{3}^3 + \sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

iv)

$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{b}$ Einheitsvektor: $\frac{1}{|\underline{b}|} \cdot \underline{b}$

$$\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{-3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

v) Winkel zwischen Vektoren: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi \Leftrightarrow \varphi = \arccos \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

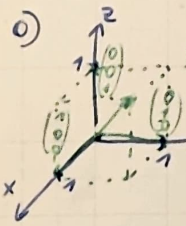
$\underline{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\underline{h}| = \sqrt{2^2+1+1} = \sqrt{6} \quad |\underline{t}| = \sqrt{1+2^2+1} = \sqrt{6} \quad |\underline{h}| \cdot |\underline{t}| = 6$

$\underline{h} \cdot \underline{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2+2+(-1) = 3$

$\arccos \frac{3}{6} = 1{,}0472 = \frac{\pi}{3}$

vi)



$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Winkel zwischen Vektoren: $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\varphi \Leftrightarrow \varphi = \arccos \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$

$\underline{t}$ kann frei gewählt werden, da die Hauptdiagonale den selben Winkel zu allen Vektoren hat.

$|\underline{h}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \quad |\underline{t}| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$\underline{h} \cdot \underline{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 54{,}7356°$