Aufgabe 7.5 (Höhere Ableitungen)

Berechnen Sie:

a) $(x^5)^{(5)}$ b) $(x^5 \ln x)'''$ c) $(x^2 e^{2x})^{(4)}$ d) $(x^2 e^{-x})^{(5)}$

7.5

a) $(x^5)^{(5)}$

$f(x) = x^5$
$f'(x) = 5x^4$
$f''(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3$
$f'''(x) = 20 \cdot 3x^2 = 60x^2$
$f^{(4)}(x) = 60 \cdot 2x = 120x$
$f^{(5)}(x) = 120$

b) $(x^5 \ln(x))'''$

$f(x) = x^5 \ln(x)$
$f'(x) = x^5 \cdot (\ln(x))' + (x^5)' \cdot \ln(x) = \frac{x^5}{x} + 5x^4 \ln(x) = x^4 + 5x^4 \ln(x)$
$f''(x) = 4x^3 + \frac{5x^4}{x} + 20x^3 \ln(x) = 9x^3 + 20x^3 \ln(x)$
$f'''(x) = 27x^2 + \frac{20x^3}{x} + 60x^2 \ln(x) = 47x^2 + 60x^2 \ln(x) = x^2(47 + 60 \ln(x))$

c) $(x^2 e^{2x})^{(4)}$

$f(x) = x^2 e^{2x}$
$f'(x) = x^2 + e^{2x} \cdot 2 + 2x e^{2x}$
$f''(x) = 2x + e^{2x} \cdot 4 + 4xe^{2x} + 2e^{2x} = 2x + 4xe^{2x} + 6e^{2x}$
$f'''(x) = 2 + 8xe^{2x} + 4e^{2x} + 12e^{2x} = 2 + 8xe^{2x} + 16e^{2x}$
$f^{(4)}(x) = 16xe^{2x} + 8e^{2x} + 32e^{2x} = 16xe^{2x} + 40e^{2x} = (16x + 40)e^{2x} = (4x + 10)4e^{2x}$

d) $(x^2 e^{-x})^{(5)}$

$f(x) = x^2 e^{-x}$
$f'(x) = -x^2 e^{-x} + 2xe^{-x}$
$f''(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2e^{-x}$
$f'''(x) = -x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}$
$f^{(4)}(x) = x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} + 2e^{-x} = x^2 e^{-x} - 4xe^{-x} + 4e^{-x}$
$f^{(5)}(x) = -x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + 4xe^{-x} - 4e^{-x} - 4e^{-x} = -x^2 e^{-x} + 6xe^{-x} - 8e^{-x} = (-x^2 + 6x - 8)e^{-x}$