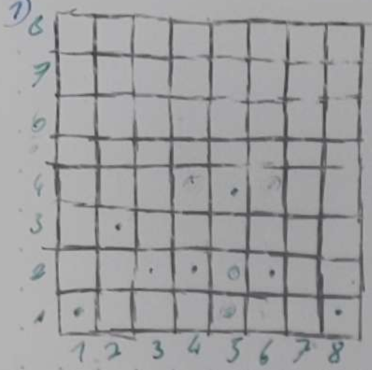
Altklausur WiSe 23/24

1)

1) 

$$\underline{v} = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{\text{Startvektor}} + \overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}^{\text{Züge}}$$

2) 2 → Quelle Simon; man kann alle Funktionen auf $\mathbb{R}$ aus 2 Polymen modellieren kann

3) $A = \begin{pmatrix}0 & 43\\23 & 0\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} \cdot A = E \quad \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 43\\23 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cdot 0 + b\cdot 23 & a\cdot 43 + b\cdot 0\\c\cdot 0 + d\cdot 23 & c\cdot 43 + d\cdot 0\end{pmatrix}$

$1 = b\cdot 23 \Leftrightarrow b = \frac{1}{23}$
$0 = a\cdot 43 \Leftrightarrow a = 0$
$0 = 23\cdot d \Leftrightarrow d = 0$
$1 = 43 c \Leftrightarrow c = \frac{1}{43}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{23}\\\frac{1}{43} & 0\end{pmatrix}$ //

4) $f(x) = 1(x+1)^2 - 11$

5) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$V = \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2\,dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2\,dx \Rightarrow \pi\left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-R}^{R}\right) = \pi\left(R^2\cdot R - \frac{1}{3}R^3 - (R^2(-R)) - \frac{1}{3}(-R)^3\right)$

$= \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 - \left(-R^3 + \frac{1}{3}R^3\right)\right) = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 + R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \pi \cdot \frac{4}{3}R^3$ //

6) Ein Sattelpunkt ist definiert als ein Punkt an dem die Steigung ($f'(x)$) 0 wird, die Krümmung der Funktion ($f''(x)$) sich allerdings nicht ändert.

7) Die Feinheit einer Zerlegung ist definiert als die Breite des größten Intervalls

8) $f(x) = \arccos(x) \quad f^{-1}(x) = \cos(y) \quad f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$

$f'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} \Rightarrow \frac{1}{-\sqrt{\sin^2(\arccos x)}} \Rightarrow \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ //

2.1) $F(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}$$

L'Hospital:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1} \sqrt{x}-\sqrt{1} \Rightarrow \sqrt{1}-\sqrt{1}=0\\ &\lim_{x\to 1} x-1 \Rightarrow 1-1=0\end{aligned}\right\}\text{gleich}$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{1})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x-1)'=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

2.2)

Länge immer 1

Aufgabenstellung ist komisch

Mittelpunkt der Grundseite:

$$p: \frac{1}{2} \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Höhe berechnen:

$$h = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Formel für Kantenlänge:

$$m(x) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}-x\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{13}{16}-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2} = \sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}$$

Gesamtformel:

$$L(x) = 3\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}+x$$

Ableitungen:

$$L'(x) = \left(3\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}+x\right)' = 3\,\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)+1$$

$$L''(x) = \left(3\,\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\right)'\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right) + 3\,\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)'$$

$$= 3\,\frac{\cancel{-\sqrt{1+(\frac{\sqrt{13}}{2})x+x^2}}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)}{4\left(1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2\right)}$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)+3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}$$

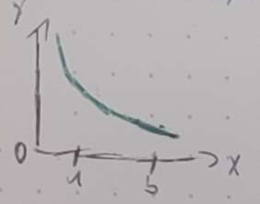
$L'(x)=0$:

$$0 = 3\,\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)+1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2}}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2} = 3\left(\frac{\sqrt{13}}{2}+2x\right) \Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2} = \frac{3\sqrt{13}}{4}+3x \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{13}}{2}x+x^2 = \frac{9\cdot 13}{16}+9x^2$$

$$\Leftrightarrow 16-8\sqrt{13}x+16x^2 = 117+144x^2 \Leftrightarrow 0 = 101-8\sqrt{13}x+128x^2 \Leftrightarrow 0 = x^2-\frac{8\sqrt{13}}{128}x+\frac{101}{128}$$

2.3) $f>0,\ f'<0,\ f''>0$



3.1)

1: $g = m + w$

2: $g = \frac{2}{3}m + \left(w + \frac{1}{3}m\right)$

3: $g = \left(\frac{2}{3}m + \left(w + \frac{1}{3}m\right)\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(w + \frac{1}{3}m\right)$

$\frac{2}{3}m + \left(w + \frac{1}{3}m\right)\frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3}\left(w + \frac{1}{3}m\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3}m + \frac{1}{3}w + \frac{1}{9}m = 2 + \frac{2}{3}w + \frac{2}{9}m$

$\Leftrightarrow \frac{7}{9}m + \frac{1}{3}w = 2 + \frac{2}{3}w + \frac{2}{9}m \Leftrightarrow \frac{5}{9}m - \frac{1}{3}w = 2$

$m = \frac{2}{3}\left(w + \frac{1}{3}m\right) \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}w + \frac{2}{9}m \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3}w - \frac{7}{9}m$

$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{3} - \left(-\frac{7}{9}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{27} - \frac{7}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

$|A_m| = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \qquad m = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{1} = 12$ //

$|A_w| = \begin{vmatrix} \frac{5}{9} & 2 \\ -\frac{7}{9} & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot\left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{14}{9} \quad w = \frac{14}{9}\cdot\frac{9}{1} = 14$ //

3.2) $A^T = A^{-1}$

Schiefsymmetrisch $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & \ddots & \\ -a & & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = |A^T| = |A^{-1}| \overset{\text{Vorlesung}}{=} |-A| = (-1)^n |A| \Rightarrow |A| = (-1)^n |A| \overset{n \text{ ungerade}}{\Rightarrow} |A| = -|A| \Leftrightarrow 2|A| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ // 3P

4.1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{e}} \leq \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq 1$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2}}} = \frac{1}{e^x}$

$1 \geq e^x \Rightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{e^x}$

$\int_0^1 1\,dx \Rightarrow x\big|_0^1 \Rightarrow 1 - 0 = 1$

Abschätzung nach unten ist doof

4.2)

$R = \{(u,s) \in \mathbb{R}^2 \mid \int_u^s f(x)\,dx = 0\} \qquad f(x) = 1 - |x|$

Reflexivität: $t R t$

$\int_t^t f(x)dx = \int_t^t 1 - |x|\, dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} 0$

Symmetrie: $t R u \Rightarrow u R t$

$\int_t^u f(x)dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} -\int_u^t f(x)dx \Rightarrow 0 = -0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Transitivität: $t R u \wedge u R s \Rightarrow t R s$

$\int_t^u f(x)dx + \int_u^s f(x)dx \overset{\text{Vorlesung}}{=} \int_t^s f(x)dx \rightarrow 0 + 0 = 0 \quad \blacksquare$

Für $[0]_R$:

$\int_0^u f(x)dx = \int_0^u 1 - |x|\, dx$

$x > 0: \int_0^u 1 - x\, dx \Rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^u \Rightarrow u - \frac{1}{2}u^2 - 0 \Leftrightarrow u^2 - 2u$

$u_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 0} = 1 \pm 1 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\}$

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

Sei $x_3 = \lambda$:

$-3x_2 - 6\lambda = -2 \Leftrightarrow 3x_2 = 2 - 6\lambda \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3} - 2\lambda$

$x_1 + 2x_2 + 3\lambda = 1 \Rightarrow x_1 + 2\left(\frac{2}{3} - 2\lambda\right) + 3\lambda = 1 \Leftrightarrow x_1 + \frac{4}{3} - 4\lambda + 3\lambda = 1 \Leftrightarrow x_1 + \frac{4}{3} - \lambda = 1$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3} + \lambda$

$G = \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{3} + \lambda \\ \frac{2}{3} - 2\lambda \\ \lambda \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \underline{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda \right\}$ ist eine Gerade