## 4.10 Stetige Ergänzbarkeit

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, da sie keine Nullstelle im Nenner besitzt.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x \uparrow 0} -1 \Rightarrow -1 \\ \lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \downarrow 0} 1 \Rightarrow 1 \end{array}\right\} \text{nicht gleich} \rightarrow \text{nicht stetig ergänzbar}$$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ stetig, da keine Nullstelle im Nenner erreicht wird.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \uparrow 3} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \uparrow 3} \frac{1}{x-3} \Rightarrow -\infty \\ \lim\limits_{x \downarrow 3} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \downarrow 3} \frac{1}{x-3} \Rightarrow \infty \end{array}\right\} \text{nicht gleich} \rightarrow \text{nicht stetig ergänzbar}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \uparrow -3} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \uparrow -3} \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{-6} \\ \lim\limits_{x \downarrow -3} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \downarrow -3} \frac{1}{x-3} \Rightarrow -\frac{1}{6} \end{array}\right\} \text{gleich} - \text{stetig ergänzbar}$$

c) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, da bei $x=0$ eine Nullstelle im Nenner stehen würde

$\lim_{x\uparrow 0} 4^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} 4^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{4^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow 0$

$\lim_{x\downarrow 0} 4^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \infty$

$\Big\} \to \neq \to$ nicht stetig ergänzbar

d) $f(x) = \frac{2-x}{4-2x}$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, da bei $x=2$ ein Nullstelle im Nenner stehen würde

$\lim_{x\uparrow 2} \frac{2-x}{4-2x} = \lim_{x\uparrow 2} \frac{2-x}{2(2-x)} = \lim_{x\uparrow 2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\downarrow 2} \frac{2-x}{4-2x} = \lim_{x\downarrow 2} \frac{2-x}{2(2-x)} \Rightarrow \frac{1}{2}$

$\Big\}$ stetig ergänzbar

e) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ da Nullstelle im Nenner

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, da $\frac{\sin x}{x} = 1$ + Verkehrung $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{\sin x} = 1$

$(k\neq 0)$ $\lim_{x\uparrow k\pi} \frac{x}{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} \infty & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\infty & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$

$\lim_{x\downarrow k\pi} \frac{x}{\sin x} \Rightarrow \begin{cases} -\infty & \\ \infty & \text{"} \end{cases}$

$\Big\} \neq \to$ nicht stetig ergänzbar

f) $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ da Nullstelle im Nenner

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x^2)} \Rightarrow \infty$, wegen $x^2$ stetig ergänzbar