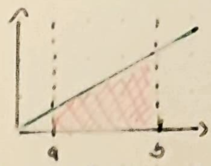
Beispiel

$f(x)=x$. Die Integrierbarkeit über $[a,b]$ folgt aus dem vorausgegangenem Satz. Wir wählen äquidistante Zerlegungen Z_n mit Teilintervallen gleicher Länge $\frac{b-a}{n}$ und ihren rechten Randpunkten $\underbrace{a+i\frac{b-a}{n}}_{\xi_i}$ als Zwischenstellen ($i=1,\dots,n$). Dann gilt $S_f(Z_n)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)}_{f(\xi_i)}\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x_i}$



$=\dots=a(b-a)+(b-a)^2\frac{n(n+1)}{2n^2}$ $\quad \int_a^b x\,dx=\lim_{n\to\infty}S_f(Z_n)=a(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2$
$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$. Der Wert des Integrals entspricht der Fläche des Trapezes, das der Graph von f im Intervall $[a,b]$ mit der x-Achse einschließt.

Als nächstes definieren wir, was man unter $\int_a^b f(x)\,dx$ im Falle $a\geq b$ versteht.

Definition

1) Ist $a>b$ und existiert $\int_b^a f(x)\,dx$, so setzt man $\int_a^b f(x)\,dx:=-\int_b^a f(x)\,dx$

2) Ist f an der Stelle a definiert, so setzt man $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

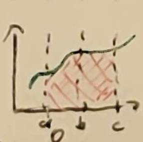
Wir halten eine erste elementare Rechenregel für das bestimmte Integral fest.

Satz (Intervalladditivität des Integrals)

Es seien a,b,c beliebige reelle Zahlen. Existieren die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_b^c f(x)\,dx$, $\int_a^c f(x)\,dx$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$.

Beispiel

$f(x)=\begin{cases} x & \text{für } -3\leq x<0 \\ x^2 & \text{für } 0\leq x\leq 7\end{cases}$



$\int_{-3}^{7}f(x)\,dx\overset{\text{Satz}}{=}\int_{-3}^{0}f(x)\,dx+\int_0^7 f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}x\,dx+\int_0^7 x^2\,dx\overset{\text{s.o.}}{=}\frac{1}{2}(0^2-(-3)^2)+\frac{1}{3}7^3=\frac{659}{6}$

Satz (Linearität des Integrals)

Die Funktionen f_1 und f_2 seien über $[a,b]$ integrierbar und $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Dann ist auch $c_1f_1+c_2f_2$ über $[a,b]$ integrierbar und es gilt $\int_a^b(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))\,dx=c_1\int_a^b f_1(x)\,dx+c_2\int_a^b f_2(x)\,dx$.