bezeichnet: $I = \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Bemerkungen

1) Beim bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nennt man Integrationsvariable, f den Integranden, $[a,b]$ das Integrationsintervall, a die untere und b die obere Integrationsgrenze.

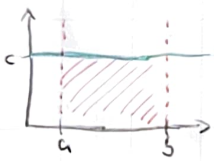
2) Die folgende Definition für die Integrierbarkeit von f über $[a,b]$ ist zur obigen Definition äquivalent: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ Zerlegung Z von $[a,b]$
$d(Z) < \delta \Rightarrow |S_f(Z) - I| < \varepsilon$.

3) Der Wert eines bestimmten Integrales hängt von der Funktion und von den Integrationsgrenzen ab, nicht aber von der Buchstabenwahl für die Integrationsvariable: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

Beispiel

$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$. $S_f(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c \cdot \Delta x_i$

$= c \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$



Der folgende Satz stellt eine hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit einer Funktion über ein Intervall $[a,b]$ bereit.

Satz (Integrierbarkeit)

Gegeben sei ein Intervall $[a,b]$ und eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

1) Ist f monoton, so ist f integrierbar.

2) Ist f stetig, so ist f integrierbar.

3) Ist f an höchstens endlich vielen unstetig, so ist f integrierbar.