6.11 Rechenregeln für inverse Matrizen

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

$A^{-1} \cdot A = E \quad | \cdot (A^{-1})^{-1}$

$\underbrace{A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1}}_{E} \cdot A = E \cdot (A^{-1})^{-1}$

$E \cdot A = E \cdot (A^{-1})^{-1}$

$A = (A^{-1})^{-1}$ //

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$A \cdot A^{-1} = E$

$\Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^T = E^T$

$\Rightarrow A^T \cdot (A^{-1})^T = E$

$\Leftrightarrow (A^T)^{-1} \cdot A^T \cdot (A^{-1})^T = E \cdot (A^T)^{-1}$

$\Rightarrow E \cdot (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ //

c) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = E$

$\Leftrightarrow A \cdot (A \cdot B)^{-1} = E \cdot B^{-1}$

$\Leftrightarrow (A \cdot B)^{-1} = E \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ //

d) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$A \cdot A^{-1} = E$

$\Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^m = E^m$

$\Leftrightarrow A^m \cdot (A^{-1})^m = E$

$\Leftrightarrow (A^m)^{-1} \cdot A^m \cdot (A^{-1})^m = E \cdot (A^m)^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$

e) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$

$(\lambda A)^{-1} \cdot \lambda A = E$

$\Leftrightarrow (\lambda A)^{-1} \cdot A = E \cdot \lambda^{-1}$

$\Leftrightarrow (\lambda A)^{-1} = E \cdot \lambda^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$ //