L'Hospital

gesucht: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ differenzierbar sind auf $]x_0, x_0+h[$
und $f_2'(x) \neq 0$ auf $]x_0, x_0+h[$

dann gilt: $\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \ldots$

Fälle $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = 0$ oder $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = \pm\infty \Rightarrow$ L'Hospital geht auch für $\frac{\infty}{-\infty}$

7.8d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2x - e^{-x}}{x - \sin x} \underset{L'H}{\overset{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{1 - \cos x} \underset{L'H}{\overset{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \underset{L'H}{\overset{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{\lim_{x \to 0} e^x + e^{-x}}{\lim_{x \to 0} \cos x}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

falsch:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{f}{=} \frac{\lim e^x - \lim e^{-x}}{\lim \sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ also L'Hospital } (✓)$$

da $\lim_{x \to 0}$ Nenner$(x) = 0 \Rightarrow$ L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' \text{ f}$$

7.8f)

$\lim_{x \downarrow 0} x^x$ negative Basis nur für klassische Potenzfunktion x^n

$\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} e^{x \ln x}$

zunächst Exponent: $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x \overset{\text{Typ „}0(-\infty)\text{"}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} x^2 (-1) = \lim_{x \downarrow 0} -x$

$$= 0 \quad (<0)$$

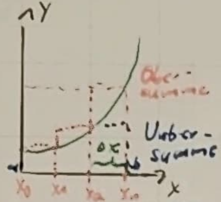
da e stetig: $\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} e^x = e^0 = 1$

7.8g)

$\lim_{x \uparrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \sin x \approx x$ für kleine x

$\lim_{x \uparrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \approx \lim_{x \uparrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

Riemann'sche Integralrechnung ≙ Flächeninhalt



Zwischensumme: $S_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i$

allgemein: $S_f = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ (meine Wahl: $\xi_i = x_i$ $1 \le i \le n$ die rechten Randpunkte)

ξ_i: Zwischenstelle   Zerlegung: Z_n

jetzt: infinitisimalrechnung: unendlich viele und unendlich schmale Streifen

das Integral: $I = \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$

dx: Differential, die infinitisimale Version von Δx_i: Feinheit gegen 0

Feinheit: $d(Z_n) = Max\{\Delta x_i\}$ $\lim_{n\to\infty} d(Z_n) = 0$

2.1a)

$\int_{-1}^{1} e^x\,dx$ Z: äquidistante Zerlegung $\Delta x_i = \frac{\text{Intervallbreite}}{n} = \frac{2}{n}$

$$I = \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \to \frac{2}{n}$$

$\xi_i = -1 + i\frac{2}{n}$ $\boxed{0 \le i \le n-1}$ linke Randpunkte

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-1+i\frac{2}{n}} \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} e^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} e^{i\frac{2}{n}}$$

$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\sum_{k=0}^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} e^{-1} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2}{n}}\right)^i}$$

$$\frac{1-\left(e^{\frac{2}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2}{n}}} = \frac{1-e^2}{1-e^{\frac{2}{n}}}$$

$\to e^{-1} - e^{1} = -\sinh(1)\cdot 2$