6.16 Orthogonale Matrizen

$A^T \cdot A = E$

a)

i) $|A| = 1$ oder $|A| = -1$

Aus „Satz (Eigenschaften der Determinante)":

$|A| = |A^T|$ und $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$|A^T \cdot A| = |E| = |A| \cdot |A^T| = 1$

1 kann nur als Produkt von sich selbst oder -1 dargestellt werden.

ii) A ist invertierbar $\wedge A^{-1} = A^T \Rightarrow$ A ist orthogonal

$A^T \cdot A = E \Leftrightarrow A^T = E \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

iii) A orthogonal wenn n Spalten/Zeilen Orthonormalbasis bilden

A sei orthogonal:

$A^T \cdot A = E$

Somit besteht a_i Zeilen- und a_j Spaltenvektoren $(i,j \in \mathbb{N})$

Die a_{ij}-Stellen der Matrix sind Skalarprodukt der a_i und a_j Vektoren:

$$a_i \cdot a_j = a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist 1, wenn sie gleich sind, und 0, wenn sie orthogonal sind.

Somit sind alle Spalten- und Zeilenvektoren eine Orthonormalbasis.

iv) E ist orthogonal

$$E^T \cdot E = E \overset{E^T = E}{\Leftrightarrow} E \cdot E = E \overset{E \cdot E = E}{\Leftrightarrow} E = E$$

v) A invertierbar $\wedge$ A^{-1} orthogonal $\Rightarrow$ A orthogonal

$A \cdot A^{-1} = E \qquad (A^{-1})^T \cdot A^{-1} = E$

$A \cdot A^{-1} = (A^{-1})^T \cdot A^{-1} \Leftrightarrow A = (A^{-1})^T \Rightarrow A = (A^T)^{-1} \Leftrightarrow A \cdot A^T = E$ ■

vi) A & B orthogonal $\Rightarrow A \cdot B$ orthogonal:

$A^T \cdot A = E \quad B^T \cdot B = E \qquad E \cdot E = E$

$(A^T \cdot A) \cdot (B^T \cdot B) = E \Leftrightarrow A^T \cdot A = (B^T \cdot B)^{-1} \Leftrightarrow A^T \cdot A = (B^T)^{-1} \cdot B^{-1} \Leftrightarrow A = (B^T)^{-1} \cdot B^{-1} \cdot (A^T)^{-1}$

$\Leftrightarrow A \cdot B = (A^T)^{-1} \cdot (B^T)^{-1} \Leftrightarrow B^T \cdot A \cdot B = (A^T)^{-1} \Leftrightarrow A^T \cdot B^T \cdot A \cdot B = E$ ■