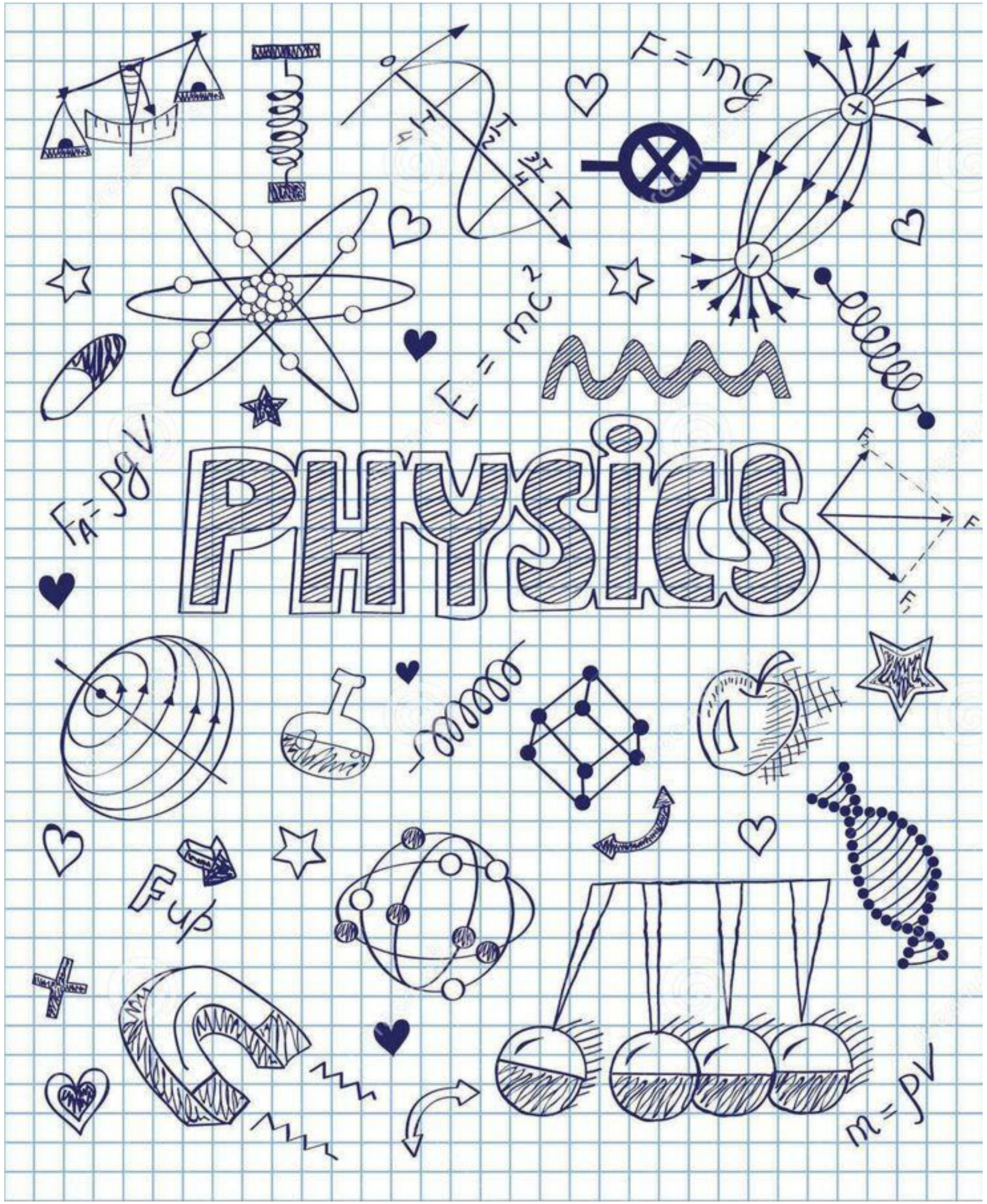
PHYSIK

Wellen

Prof. Dr.-Ing. Tatsiana Malechka

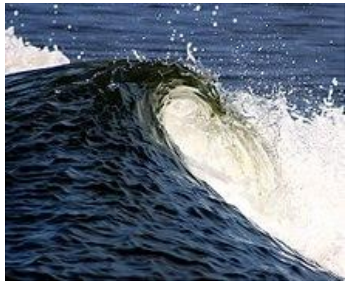


Wellen

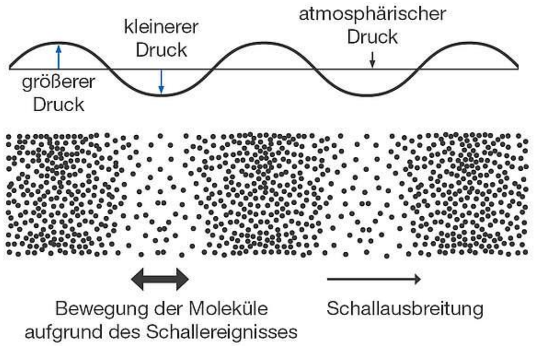
- Beispiele für Wellen
- Von der Schwingung zur Welle
- Longitudinale und transversale Wellen
- Polarisierte und unpolarisierte Wellen
- Harmonische Wellen und Wellengleichung
- Superposition von Wellen/ Stehende Welle
- Oberschwingungen und Moden
- Schallwellen und Doppler-Effekt

Beispiele für Wellen

- Mechanische Wellen:
  - Wasserwellen
  - Schallwellen
  - Seismische Welle

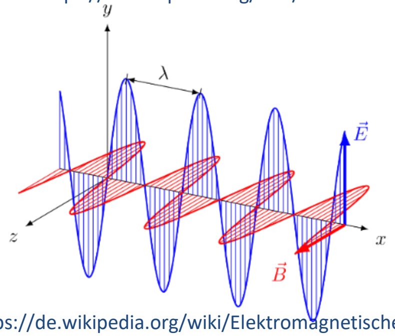


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Wasserwelle

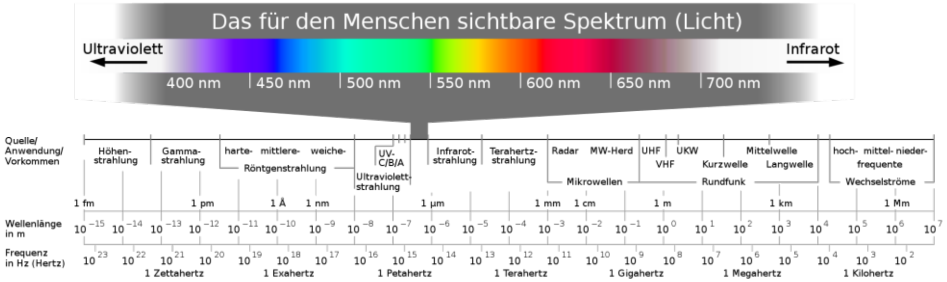


Quelle: https://www.inventer.de/wissen/grundlagen-der-lueftung/geraeuschentwicklung-und-schall-bei-der-lueftung/

- Elektromagnetische Wellen:
  - Licht
  - Mikrowelle
  - Röntgenstrahlung
  - Radarwelle

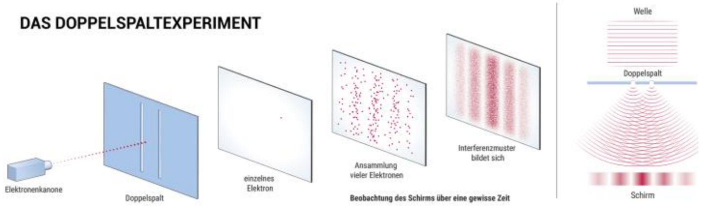


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle



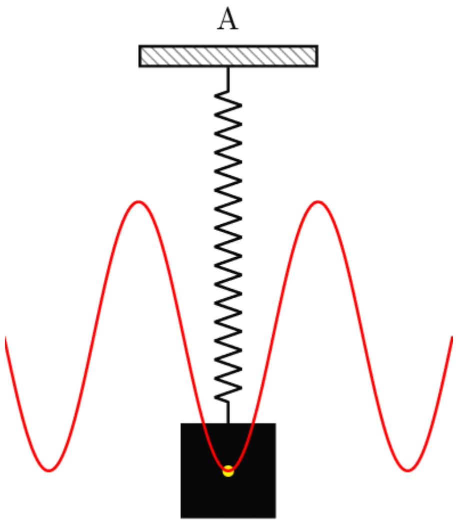
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Licht

- Materiewellen (quantenmechanische Wellen)
  - Materiewellen sind im atomaren und subatomaren Maßstab beobachtbar und zeugen von Welle-Teilchen-Dualismus.
- Gravitationswellen
  - wellenartige Störungen in der Raumzeit.

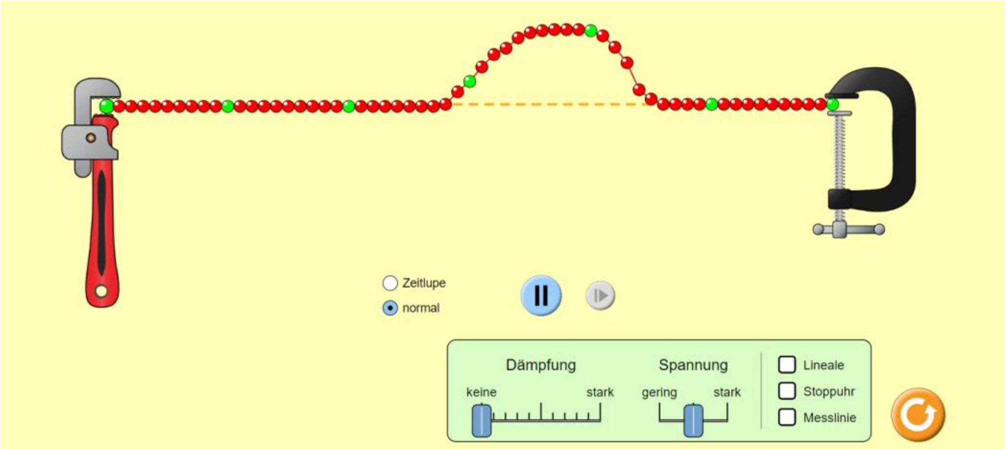


Von der Schwingung zur Welle

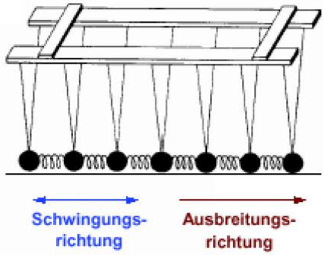
- **Schwingung** ist eine periodische Bewegung um eine raumfeste Gleichgewichtslage
- **Oszillator:** eine Masse an einer Feder



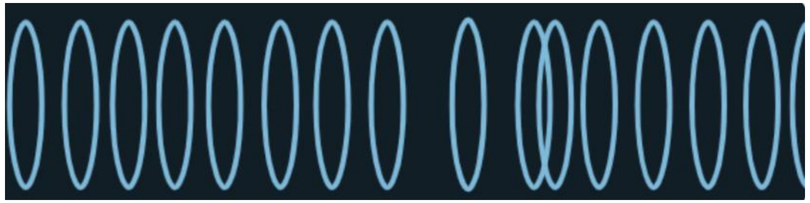
- **Welle:** Fortpflanzung einer zeitlichen, in der Regel periodischen Zustandsänderung (Schwingung) im Raum bzw. in Materie
- Gekoppelte Oszillatoren: . Perlenkette
- https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-wellen/versuche/seilwelle-simulation-von-phet



Schwingungsrichtung

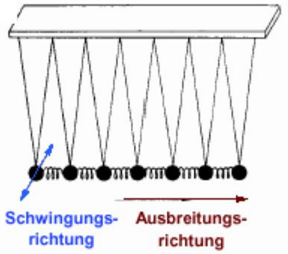


Schunkeln auf dem Oktoberfest

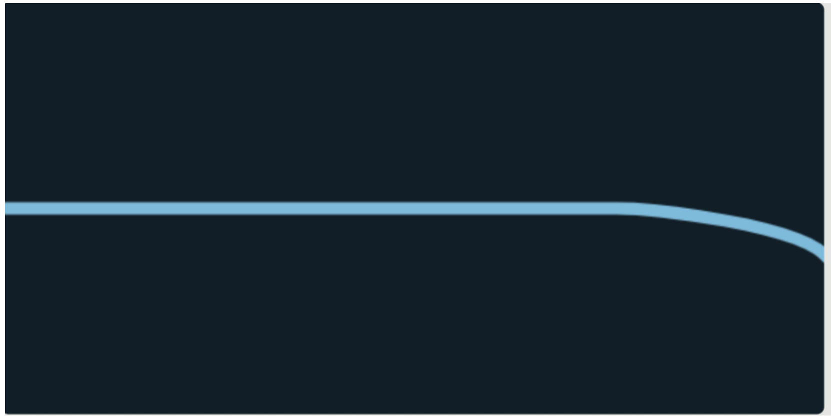


- **Longitudinale Wellen:**
  - Richtung von Auslenkung und Ausbreitungen sind **parallel**
  - Beispiel: Schallwellen, primäre seismische Welle (P-Welle)

- **Transversale Wellen:**
  - Richtung von Auslenkung und Ausbreitungen sind **senkrecht**
  - Polarisation möglich
  - Beispiel: Elektromagnetische Wellen, Seilwellen

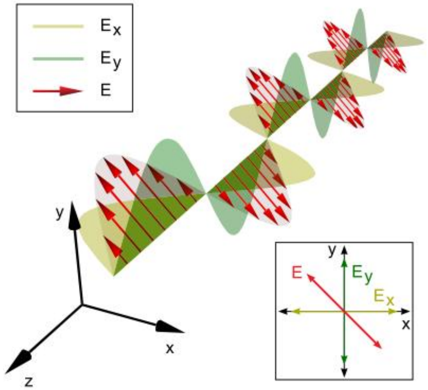


La Ola Welle im Stadion



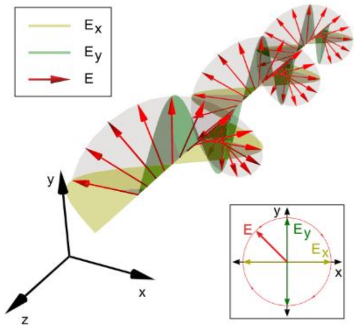
Transversalen Wellen

- **Polarisierte Wellen:** Schwingungsrichtung in der Ebene, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ist (irgendwie) festgelegt



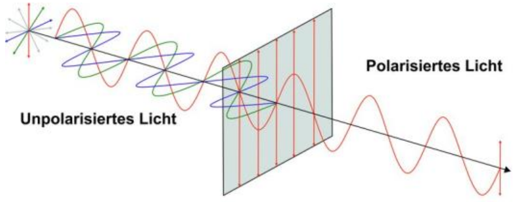
Linear polarisierte Welle, z.B. e/m Welle

Zirkulare Wellen sind besser



Zirkular polarisierte Welle, z.B. e/m Welle

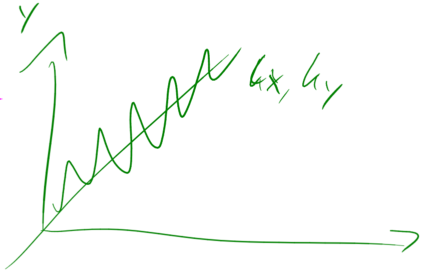
- **Unpolarisierte Wellen:** Schwingungsrichtung in der Ebene, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung lässt sich nicht festlegen, weil sie sich in statistischer Weise ständig ändert.



Harmonische Wellen

allgemeine Lösung Wellengleichung

$\boxed{A \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t = \phi}$

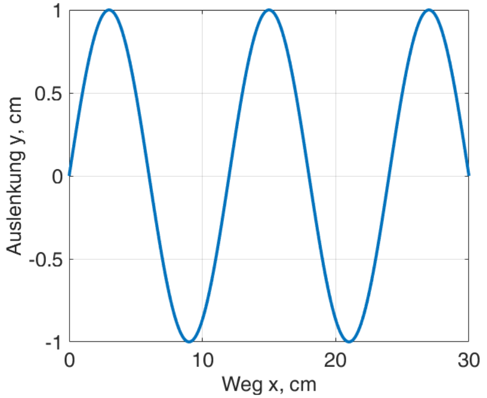


$\vec{r}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{k}\ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = x k_x + y k_y$

Ein gespanntes Seil werde an einem Ende sinusförmig (bzgl. der Zeit) $y = \sin(\omega t)$ ausgelenkt. Verhalten des Seiles (ohne Dämpfung): $y(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$



„Photo der Welle"

t: fest

λ: Wellenlänge [m]

$y(x) = A \cdot \sin(kx)$

$k \cdot \lambda = 2\pi \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{1}{\lambda}$ Wellenzahl räumliche Frequenz

„Welle vorbeiziehen lassen"

x = fest

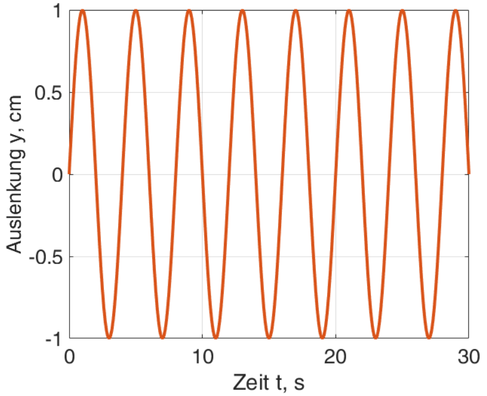
$y(t) = \sin(\pm\omega t)$

T = periodendauer [s]

$\omega T = 2\pi$

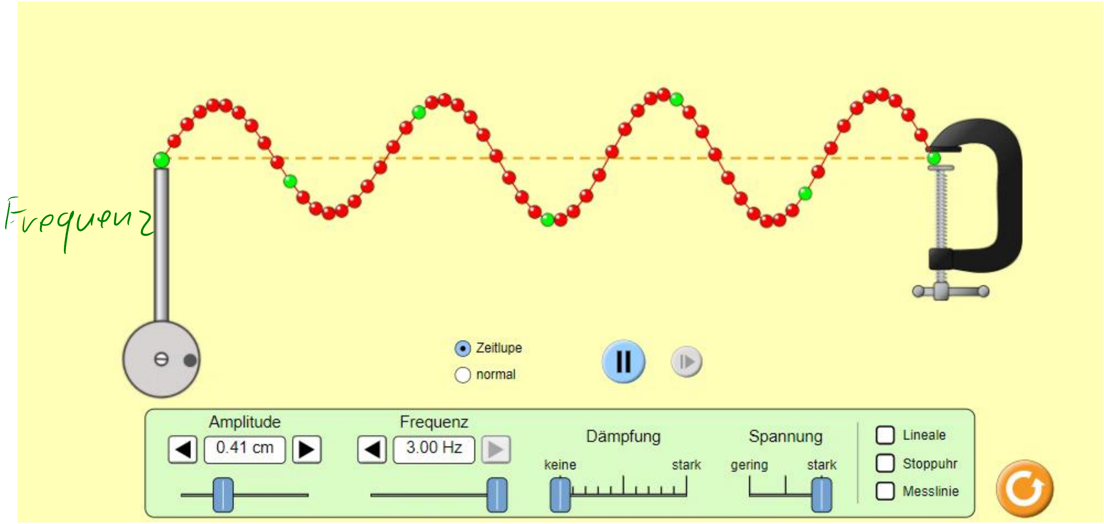
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$ Kreisfrequenz Winkelgeschwindigkeit

$\omega = s^{-1} = \frac{1}{s}$



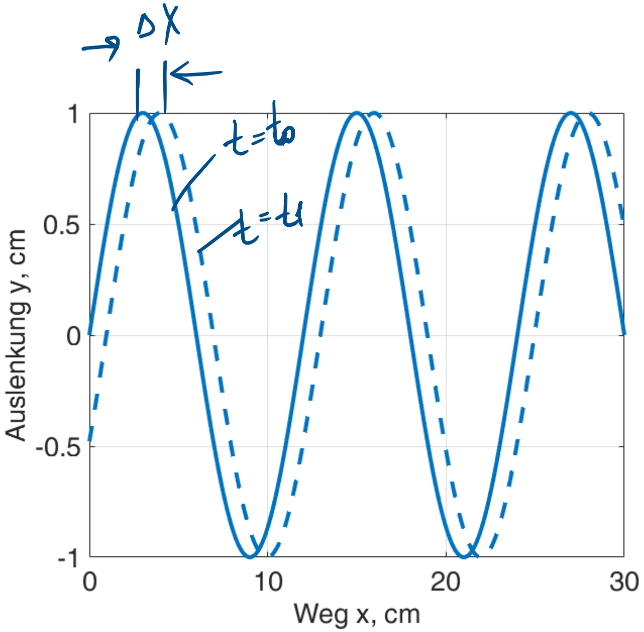
Harmonisches Verhalten bezüglich x und t!

„x" „t"



Harmonische Welle

$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$



$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle?

$kx \pm \omega t + \phi = const$

$\frac{\partial(kx \pm \omega t + \phi)}{\partial t} = \frac{\partial\, const}{\partial t} = 0$

$\frac{\partial kx}{\partial t} \pm \omega = 0$

$k \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \pm \omega = 0$

$k \cdot v \pm \omega = 0$

$kv - \omega = 0$

$v = \frac{\omega}{k}$ (1)

$kv + \omega = 0$

$v = -\frac{\omega}{k}$

$v_x = -\frac{\omega}{k}$

"-"

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T}$

$v = \frac{\lambda}{T}$ (2)

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f$ (3)

$c = 300.000\ km/s = 3 \cdot 10^8\ m/s$

$v_{schall} = \left.\begin{array}{l} 330\ m/s \\ 343\ m/s \end{array}\right\}$ ϑ-abhängig

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = v^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}_{\text{Laplace Operation }(\Delta)}\vec{u}$$

Laplace Operator

$$\boxed{\ddot{\vec{u}} = v^2 \Delta \vec{u}}$$

Gesucht: Wellengleichung/ Bewegungsgleichung für Wellen: Differenzialgleichung, die die Zeit- und Ortsabhängigkeit enthält:

Bekannt : $y(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$

Jean Baptiste le Rond d'Alembert,
Französischer Mathematiker und Physiker
1717-1783

Zeitliche Ableitung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \cos(kx - \omega t + \phi) \cdot (-\omega) = -\omega \cdot A \cdot \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2 A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Räumliche Ableitung:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A \cdot k \cdot \cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \cdot k^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Kontrolle:

$$-\omega^2 A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi = \frac{\omega^2}{k^2} \cdot (-A k^2 \cdot \sin(kx - \omega t + \phi))$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 10$$

Wellengleichung

Ebene Welle

Allgemein gehorchen Wellen der Gleichung:

Lösung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underset{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \longrightarrow \ddot{y} = \underset{v^2}{c^2} y'' \longrightarrow y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

(Wellengleichung oder d'Alembert Gleichung → lineare partielle DGL 2. Ordnung)

Jean Baptiste le Rond d'Alembert,
Französischer Mathematiker und Physiker
1717-1783

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ***c*** hängt von den physikalischen Eigenschaften des Systems ab:

Seilwellen: $\underset{v^2}{c^2} = \frac{F_T}{\mu}$

- F_T → Spannungskraft
- μ → Masse pro Länge

https://www.youtube.com/watch?v=klN2-bCzJb4

Schallwellen: $\underset{v^2}{c^2} = \frac{\kappa}{\rho}$

- κ → Kompressionsmodul (Flüssigkeiten) oder Elastizitätsmodul (Festkörper)
- ρ → Dichte

Allgemein: $\underset{v^2}{c^2} = \frac{\text{Elastische Eigenschaften}}{\text{Trägheitseigenschaften}}$

Energietransport in Welle

Wellen übertragen Energie von einem Ort zum anderen:

- Wasserwelle → Zerstörung = Energie
- Seismische Welle → Zerstörung = Energie
- Licht = elektromagnetische Welle → Solarzellen → Strom
- Schallwelle → Trommelfell (im Ohr) bewegt sich

Allgemeines Merkmal einer Welle ist der Transport von Energie, wobei sich die Form der Energie in periodischem Wechsel umwandelt.

Wie hängt Energie der Welle von:

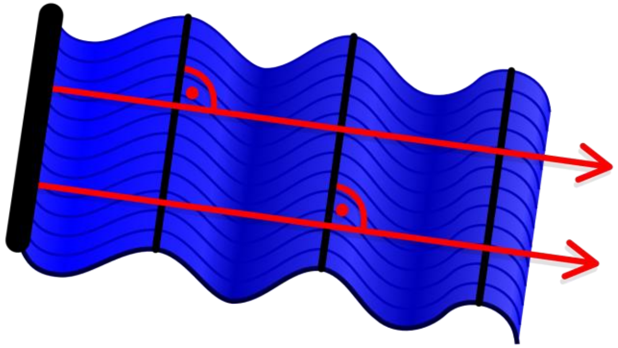
- Ausbreitungsgeschwindigkeit = Phasengeschwindigkeit ***c***
- Frequenz ***f*** & Wellenlänge ***λ***
- Amplitude ***A*** ab?

- **Die mittlere Energie** der Welle, die während der Zeit Δt durch einen Punkt P_1 der Saite fließt.

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu \cdot c \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \Delta t$$

Wellen im Raum

Ebene Welle → Ausbreitungsgeschwindigkeit ⊥ Wellenfront



- Wellenfront = Wellenberg
- Energieübertragung

$$\Delta E \sim c \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \Delta t$$

- Energie der Welle nicht ab mit der Entfernung (ohne Reibung)
- Beispiel: Gezeitenwelle (Tidal bore) → https://www.youtube.com/watch?v=8oT8YvuLDzg

$E \sim \frac{1}{r}$

Wellen im Raum

Oberflächenwelle mit Punkquelle

- Wellenkammnimmt mit der Entfernung vom Quellpunkt ab
- Abnahme der Amplitude, da sich die Welle auf Ring(Kreis) verteilt.
- Energie verteilt sich auf Kreisumfang $U = 2\pi r$ → Energiedichte nimmt mit $\frac{1}{r}$ ab
- Allgemein für Welle gilt: **Energie ~ Amplitude²**
- Für die **Oberflächenwelle: Amplitude ~** $\frac{1}{\sqrt{r}}$

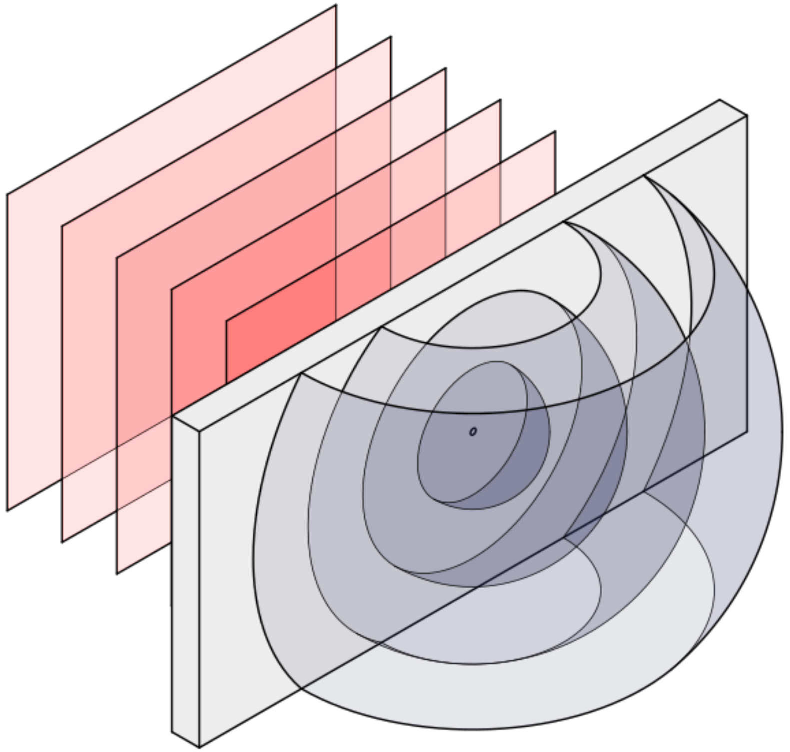
$\Delta E \sim A^2$ $\quad A \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

$\Delta E \sim \frac{1}{r}$

Wellen im Raum

Kugelwellen mit Punktquelle: z.B. Schall

- Energie der Welle verteilt sich auf Oberfläche $4\pi r^2$
- Energiedichte nimmt mit $\frac{1}{r^2}$ ab
- Allgemein für Welle gilt: **Energie ~ Amplitude²**
- Für die **Kugelwelle: Amplitude ~** $\frac{1}{r}$



$E \sim A^2 \quad A \sim \frac{1}{r}$

$E \sim \frac{1}{r^2} \quad (A)^2 \sim \left(\frac{1}{r}\right)^2$

$u(r,t) = A \frac{1}{r} \cos(k r - \omega t + \phi)$

$\vec{u}(\vec{r},t) = A \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ – Ebene Welle

Superposition von Wellen

Superpositionsprinzip: Wenn sich Wellen im gleichen Medium ausbreiten (und sich das Medium linear verhält), ergibt sich eine **resultierende Welle** (oder **Gesamtwelle**), die der Summe der einzelnen Wellen entspricht.

Mathematische Überlagerung von zwei Wellen:

a) Gleiche Frequenz, gleiche Wellenlänge
b) Ungleiche Frequenz, ungleiche Wellenlänge
c) Gleich Frequenz, gleich Wellenlänge, aber unterschiedliche Richtung

$$y_{ges}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= A_1 \cdot \sin(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)$$

Aus der Linearität der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

1D Ebene Welle (planar)

$$= 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

folgt, dass wenn y_1 und y_2 Lösungen sind,

a) $y_{gest} = A_1 \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) + A_2 \sin(kx - \omega t + \varphi)$

$y_{gesamt} = y_1 + y_2$ ebenfalls eine Lösung ist!

$= (A_1 + A_2) \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi) \cdot \cos 0°$

$= (A_1 + A_2) \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$

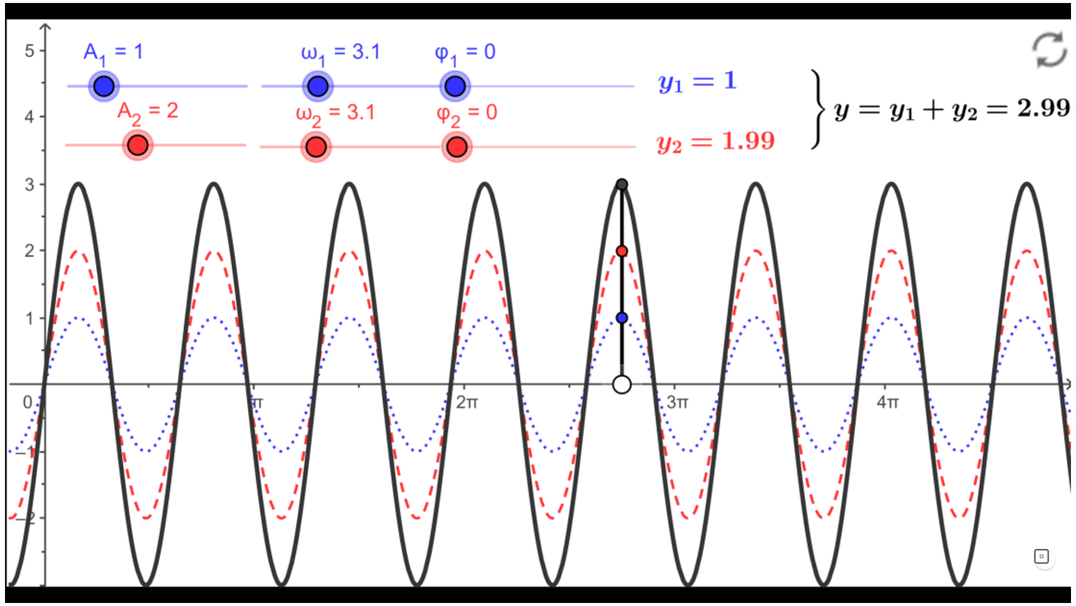
Superposition von Wellen

a) Gleiche Frequenz, gleiche Wellenlänge

$\varphi = 0°$

Konstruktive Interferenz

$\omega_{res} = 3{,}1$

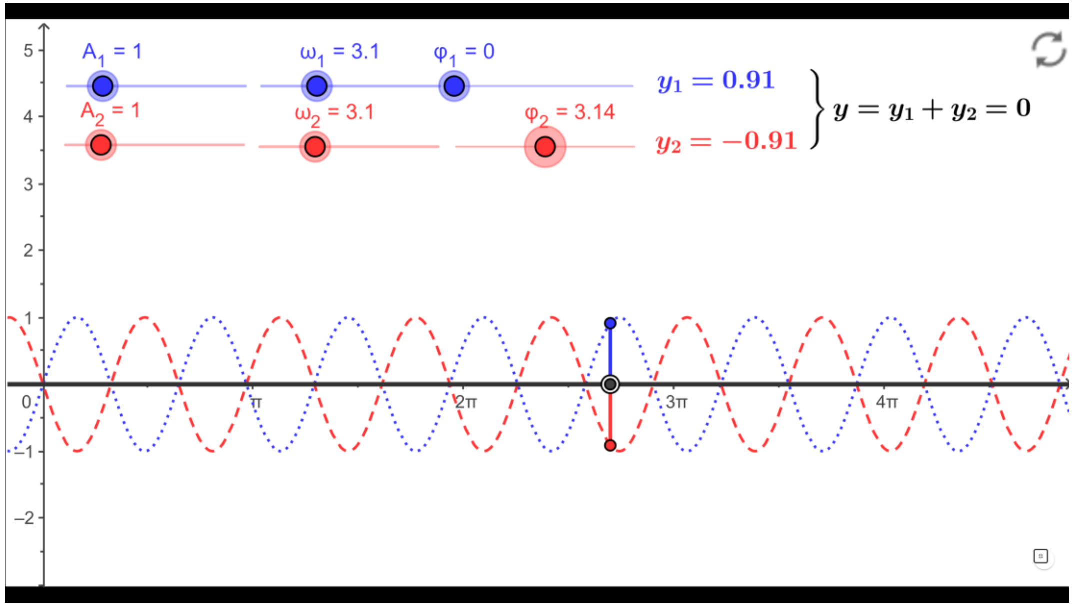


$A = 0$

$\varphi = 0°$

Destruktive Interferenz

$\omega_{res} = 0$

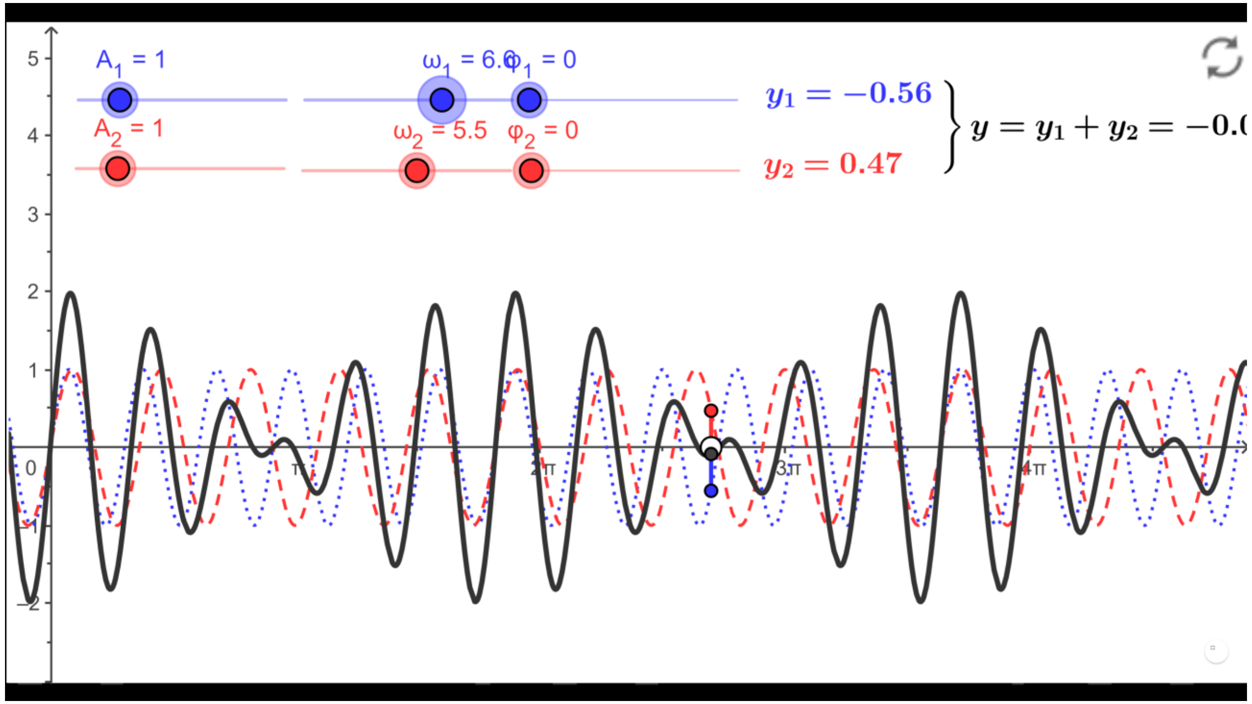


Superposition von Wellen

b) Ungleiche Frequenz, ungleiche Wellenlänge

$\omega_{Schwingungsterm} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$\omega_{Envelope} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$



$k=\frac{1}{\lambda}$ $\lambda=\frac{1}{k}$

$\xrightarrow[+]{-\omega t}$ $\xleftarrow[-]{+\omega t}$

Superposition von Wellen

c) Gleich Frequenz, gleich Wellenlänge, aber unterschiedliche Richtung

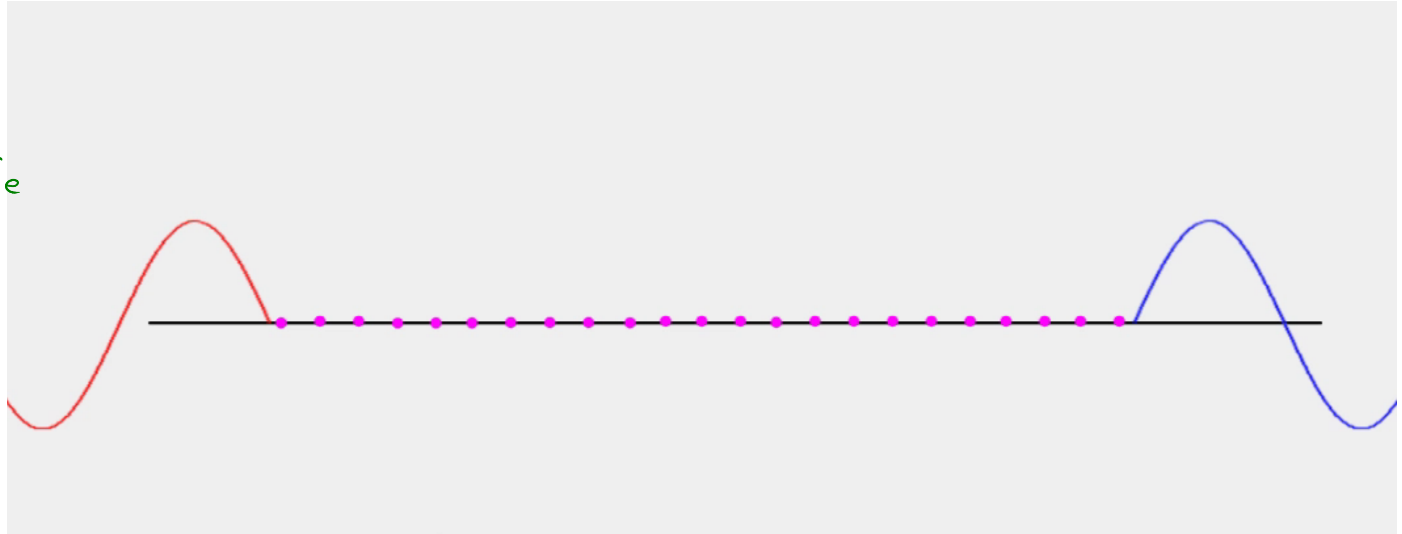
$y_1(x,t) = A\cdot\sin(kx-\omega t+\phi)$

$y_2(x,t) = A\cdot\sin(kx+\omega t+\phi)$

$y_{res}(x,t) = 2A\cdot\sin(kx+\phi)$

$= \cos(-\omega t) =$

$= \underbrace{2A\cdot\sin(kx+\phi)}_{\text{Amplitude}}\underbrace{\cos(\omega t)}$ → nicht existente grüne Linie



Stehende Welle

$2A\cdot\sin(kx+\phi)=0$

$\phi=0$

$2A\cdot\sin(kx)=0$

$\sin(kx)=0$

$kx=\arcsin(0)$

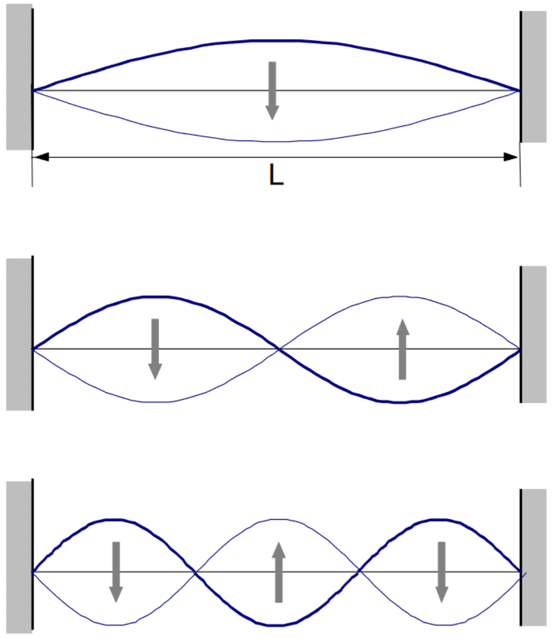
$kx=n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x=\frac{n}{k}\pi = n\lambda\pi \rightarrow$ „Knoten" $= n\frac{\lambda}{2}$

$kx=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$

$x=(n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$

Stehende Seilwellen

Erlaubte Frequenzen einer eingespannten Saite (feste Enden!) ergeben die Schwingungsmoden:



Akustischer Doppler-Effekt

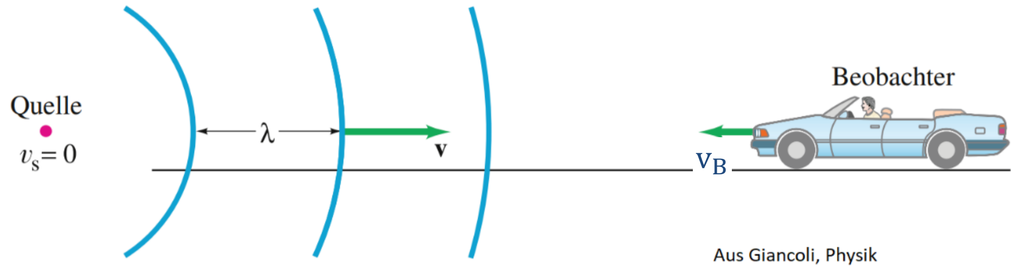
Christian Doppler, 1803 -1853 österreichischer Mathematiker und Physiker

Erfahrung:

- Tonhöhe der Polizeisirene ändert sich im Moment des Vorbeifahrens.

Fallunterscheidung notwendig, da die Bewegung relativ zum Übertragungsmedium Luft erfolgt, in der die Schallgeschwindigkeit c konstant ist.

1. Fall: Beobachter bewegt sich, Sender ruht
2. Fall: Sender bewegt sich, Beobachter ruht
3. Fall: Beobachter bewegt sich und Sender bewegt sich



Aus Giancoli, Physik

1. Fall: Der Beobachter bewegt sich mit v_B auf den ruhenden Sender zu

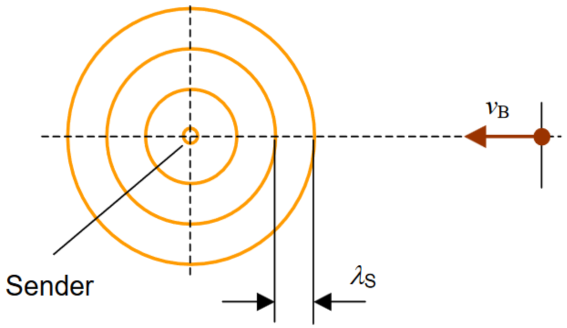
- Die Frequenz des Senders ist $f_S = const.$
- Die Wellenlänge in der ruhenden Luft ist $\lambda_S = \frac{c}{f_S} = \mathrm{const.}$
- Aufeinanderfolgende Wellenberge „sieht“ der Beobachter mit der Relativgeschwindigkeit $c' = c + v_B$.
- Damit ist die Frequenz , die der Empfänger wahrnimmt:

$$f_B = \frac{c'}{\lambda_S} = \frac{c + v_B}{\lambda_S} = \frac{c + v_B}{c} \cdot f_S$$

$$f_B = f_S \cdot \left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right)$$

+ bei Annäherung

- bei Entfernung



Bewegung zentral zum Sender

2. Fall: Der Sender bewegt sich mit v_S auf den ruhenden Beobachter zu

- Der Sender läuft den eigenen Wellenbergen nach und verkürzt die Wellenlänge auf:

$$\lambda_B = \lambda_S - v_S T$$

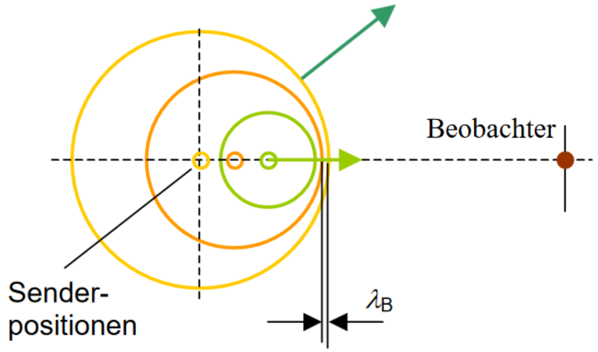
- denn bei der Aussendung der jeweils nächsten Welle nach der Zeit T ist er um die Strecke $v_S T$ weiter.
- Frequenz, die der Empfänger sieht

$$f_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{c}{\lambda_S - v_S T} = \frac{c}{\frac{c}{f_S} - \frac{v_S}{f_S}}$$

$$f_B = \frac{f_S}{\left(1 \mp \frac{v_S}{c}\right)}$$

- bei Annäherung

+ bei Entfernung



Bewegung zentral zum Beobachter

3. Fall: Sender und Beobachter bewegen sich

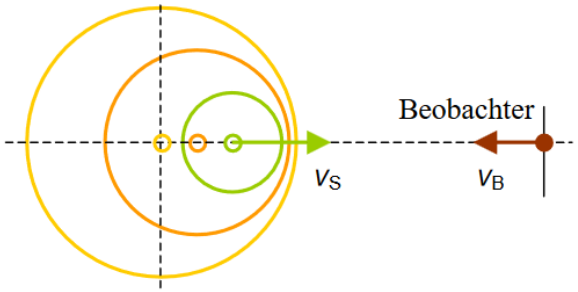
- Wenn der Beobachter zunächst ruht, empfängt er die Frequenz:

$$f_B = \frac{f_S}{\left(1 - \frac{v_S}{c}\right)}$$

- Bewegt er sich nun mit der Geschwindigkeit v_B auf den Sender zu, empfängt er die Frequenz

$$f_B{}' = f_B \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$$

- Die Kombination der beiden Gleichungen liefert dann:



$$f_B' = f_S \frac{c \pm v_B}{c \mp v_s}$$

Oberes Vorzeichen gilt für die Bewegung aufeinander zu bei Annäherung

Zusammenfassung

- Allgemein: $y(x,t) = f(kx \pm ct)$
- Wichtiger Spezialfall: Harmonische Wellen $y(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$

- Wellenlänge: λ
- Wellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Periode: T
- Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$
- Phasengeschwindigkeit: $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

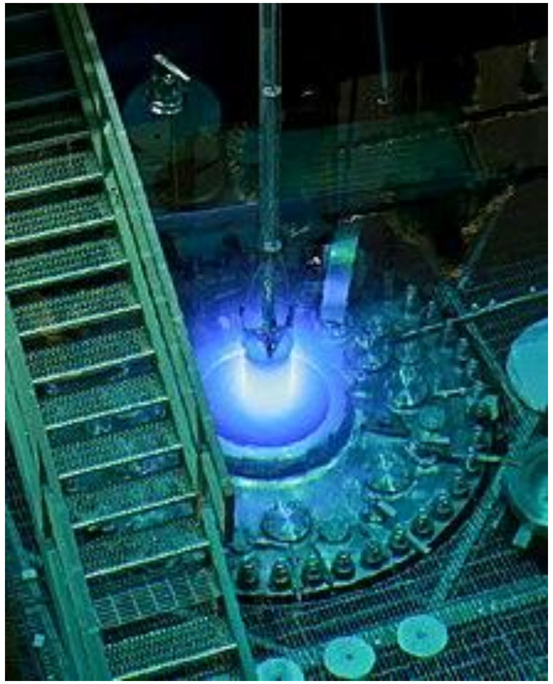
Zusammenfassung

- Wellengleichung: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $y(x,t) = A \cdot \sin(kx \pm \omega t + \phi)$ - Auslenkung
- Superpositionsprinzip: Wellen können sich überlagern und die resultierende Welle ist die Summe der Einzelwellen (so lange das Medium linear reagiert). Die Summe von Lösungen der Wellengleichung ist wieder eine Lösung der Wellengleichung.
- Wellen mit Phasenverschiebung: Konstruktive / destruktive Interferenz
- Gegenläufige Wellen: Stehende Wellen
- Ähnliche Frequenzen: Schwebungen
- Doppler-Effekt: Drei Fälle

Ente-Flugzeug-Kernkraftwert

Bugwellen von Schiffen
2D-Kegel

Überschallknall
3D-Konus (Machscher Kegel)



Tscherenkow-Strahlung