Mathematik I
Wintersemester 2024/25
Aufgaben, Lösungen, Probeklausur

FH Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. Gernot Bauer

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad		Klausurrelevanz
	niedrig	
	mittel	
	hoch	

1 Grundlagen

Aufgabe 1.1 (Aussagen)

Überprüfen Sie jeweils, ob innerhalb der Anführungsstriche eine Aussage vorliegt und gegebenenfalls ob sie wahr oder falsch ist:

a) „Entweder ist $5 < 3$ oder aus $2 + 3 = 5$ folgt $3 \cdot 4 = 12$.“

b) „Ist dieser Satz eine Aussage?“

c) „Wenn ich groß bin, dann bin ich klein.“

d) „Dieser Satz ist keine Aussage.“

e) „Sagen Sie aus!“

f) „Sie sagen aus.“

Aufgabe 1.2 (Logische Verknüpfung)

Stellen Sie für die folgenden logischen Verknüpfungen, angewendet auf die Aussagen A und B, jeweils eine Wahrheitstafel auf, und drücken Sie die logischen Verknüpfungen jeweils durch die Zeichen $\wedge$,$\vee$ und $\neg$ aus:

a) weder A noch B

b) sowohl A als auch B

c) A impliziert B

d) A gilt dann und nur dann, wenn B gilt

e) zwar A, aber nicht B

f) entweder A oder B

Aufgabe 1.3 (Negation)

Formulieren Sie jeweils die Negation von:

a) i) „Der Akku ist voll.“
   ii) „Die Studentin wohnt in Münster und fährt mit dem Zug nach Steinfurt.“
   iii) „Es gibt einen Bademeister, der nicht schwimmen kann.“
   iv) „Die Studierenden studieren Elektrotechnik oder Informatik.“
   v) „Der Strauß kann nicht fliegen, aber schnell rennen.“

b) i) „Deine Zauber binden wieder, was die Mode streng geteilt.“ (Friedrich Schiller)
   ii) „Worüber man nicht reden kann, darüber muss man schweigen.“ (Ludwig Wittgenstein)
   iii) „Jedenfalls bin ich überzeugt, dass der nicht würfelt.“ (Albert Einstein)
   iv) „Wendland störte gerade deshalb, weil er versuchte, sich anzupassen.“ (Christa Wolf)
   v) „Was ich noch zu sagen hätte, dauert eine Zigarette.“ (Reinhard Mey)

Aufgabe 1.4 (Notwendige und hinreichende Bedingung)

a) Die Aussage A laute „Die Studentin hat einen Notendurchschnitt besser als 2“, die Aussage B laute „Die Studentin erhält ein Stipendium.“ In den Richtlinien der Stipendienvergabestelle heiße es: „Ein Notendurchschnitt besser als 2 ist notwendig, aber nicht hinreichend dafür, dass die Studentin ein Stipendium erhält.“ Drücken Sie diese Aussage auf zwei verschiedene Arten mit Hilfe der Zeichen $\Rightarrow$ und $\neg$ durch A und B aus.

b) Die Aussage A laute „$m^2 = 9$“, wobei m eine ganze Zahl bezeichnet. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Aussage über m an, die gemäß der nachfolgenden Tabelle die angekreuzten Eigenschaften aufweist (und die nicht angekreuzten Eigenschaften nicht aufweist).

	notwendig für A	hinreichend für A
i)	×	×
ii)	×	
iii)		×
iv)		

Aufgabe 1.5 (Logikrätsel)

a) Hatte der Verbrecher einen Komplizen, dann ist er mit dem Wagen gekommen. Der Verbrecher hatte keinen Komplizen und keinen Schlüssel, oder er hatte einen Komplizen und den Schlüssel. Der Verbrecher hatte den Schlüssel. Ist der Verbrecher mit dem Wagen gekommen?

b) Eine der vier Damen Krause, Lehmann, Meier und Schulze ist von Beruf Ärztin, eine andere Ingenieurin, eine dritte Lehrerin und die vierte Notarin. Welchen Beruf übt jede dieser vier aus, wenn die drei folgenden Aussagen falsch sind?

- Frau Meier ist nicht Lehrerin und auch nicht Ingenieurin.
- Frau Meier ist nicht Notarin und Frau Schulze nicht Ingenieurin.
- Frau Lehmann ist Notarin.

c) Es gibt fünf Häuser. Jedes Haus hat eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt ein einzelner Herr. Jeder der fünf Herren hat eine andere Nationalität. Jeder der fünf Herren bevorzugt ein bestimmtes Getränk, hört Musik einer bestimmten Stilrichtung und hält ein bestimmtes Haustier. Keine zwei Herren bevorzugen dasselbe Getränk, hören dieselbe Musik oder halten dasselbe Haustier. Folgendes ist bekannt:

- Der Engländer wohnt im roten Haus.
- Der Spanier hat einen Hund.
- Kaffee wird im grünen Haus getrunken.
- Der Ukrainer trinkt Tee.
- Das grüne Haus steht direkt rechts neben dem weißen Haus.
- Der Hörer von Rockmusik hält eine Schnecke als Haustier.
- Im gelben Haus wird klassische Musik gehört.
- Milch wird im mittleren Haus getrunken.
- Der Norweger wohnt im ersten Haus.
- Der Herr, der Schlager hört, wohnt neben dem Herrn mit dem Fuchs.
- Klassische Musik wird im Haus neben dem Haus mit dem Pferd gehört.
- Der Herr, der Hip-Hop hört, trinkt am liebsten Orangensaft.
- Der Japaner hört Jazz.
- Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.

Wer trinkt Wasser, und wem gehört das Zebra?

d) Ein Verdurstender kommt auf der Suche nach Wasser an eine Weggabelung. Der eine Weg führt zur Oase, der andere in die Wüste. An jedem Weg steht eine Wächterin. Die eine Wächterin lügt immer, die andere sagt immer die Wahrheit, aber der Verdurstende weiß nicht, welche die ehrliche und welche die unehrliche Wächterin ist. Wie kann der Verdurstende mit einer einzigen Frage feststellen, welcher Weg zur Oase führt?

Aufgabe 1.6 (Logische Kehrseite)

Vier Münzen zeigen jeweils auf einer Seite eine Zahl, auf der anderen Seite das Konterfei einer berühmten Persönlichkeit. Eine Probandin finde die Münzen wie in Abb. 1 dargestellt vor.

a) Welche der Münzen muss die Probandin mindestens umdrehen, um die Aussage „Wenn eine Seite einer Münze das Konterfei einer Frau zeigt, dann zeigt die andere Seite dieser Münze eine gerade Zahl", falls sie wahr ist, als wahr erkennen zu können?

b) Formulieren Sie eine Aussage, deren Wahrheitswert die Probandin erst nach dem Umdrehen aller vier Münzen erkennen kann, keinesfalls schon nach dem Umdrehen von drei oder weniger Münzen.

Abb. 1 Vier Münzen

Aufgabe 1.7 (Tautologien)

Eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen, aus denen sie zusammengesetzt ist, immer wahr ist, heißt eine *Tautologie*. Beispielsweise ist die zusammengesetzte Aussage $(\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow B$ unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussage B immer wahr. Man kann eine Tautologie auch als ein logisches Gesetz auffassen.
Zum Nachweis, dass es sich bei einer zusammengesetzten Aussage um eine Tautologie handelt, nützt eine mehrspaltige Wahrheitstafel:

B	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow B$	$(\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow B$
w	f	w	w
f	w	f	w

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass die folgenden Aussagen unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A, B und C immer wahr und damit Tautologien sind:

a) Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$A \vee \neg A$

b) Satz vom Widerspruch
$\neg(A \wedge \neg A)$

c) Idempotenzgesetze
$A \wedge A \Leftrightarrow A$
$A \vee A \Leftrightarrow A$

d) Negation der Negation (doppelte Verneinung)
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

e) Kommutativgesetze
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

f) Absorptionsgesetze
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

g) Modus ponens (Abtrennungsregel)
$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

h) Modus tollens
$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

i) Regeln von *de Morgan*
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

j) Kontraposition der Implikation
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

k) Kontraposition der Äquivalenz
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

l) Reductio ad absurdum
$(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$

m) Assoziativgesetze
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

n) Modus Barbara (Syllogismus, Kettenschluss)
$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

o) Distributivgesetze
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Aufgabe 1.8 (Mathematikerinnen-Witz)

Drei Mathematikerinnen betreten eine Kneipe. Der Wirt fragt: „Will jede von Euch einen Kräutertee?“ Die erste Mathematikerin antwortet: „Ich weiß nicht.“ Darauf die zweite: „Ich weiß nicht.“ Darauf die dritte: „Ja!“ Erklären Sie die Antworten der drei Mathematikerinnen.

Aufgabe 1.9 (Aufzählende Schreibweise für Mengen)

Geben Sie jeweils für die Menge A eine aufzählende Schreibweise an.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist von 6 verschieden, gerade und kleiner } 10\}$

b) $A = \{x \mid x \text{ ist eine Potenz mit der Basis 3, deren Exponent eine natürliche Zahl kleiner 5 ist}\}$

c) $A = \{x \mid x \text{ ist ein natürliches Vielfaches von 2 und kleiner } 12\}$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 + 2x - 8)(x - 8) = 0\right\}$

Aufgabe 1.10 (Beschreibende Schreibweise für Mengen)

Geben Sie jeweils für die Menge B eine beschreibende Schreibweise an.

a) $B = \{1, 2, 3, 4\}$
b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$
c) $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$
d) $B = \{7, 21, 14, 28, 35\}$

Aufgabe 1.11 (Mengendiagramme)

Mengendiagramme dienen zur Veranschaulichung von Zusammenhängen zwischen Mengen. Die verbreitetsten Diagrammtypen sind das *Euler-Diagramm* und das *Venn-Diagramm*.
Euler-Diagramme bestehen aus einfach geschlossenen ebenen Kurven, zum Beispiel Kreisen oder Ellipsen. Eine solche einfach geschlossene Kurve unterteilt die Ebene in genau zwei Bereiche: ihren Innenbereich, der bildlich die Elemente einer bestimmten Menge darstellt, und ihren Außenbereich, der bildlich das Komplement dieser Menge darstellt. Die relative Lage zweier solcher einfach geschlossener Kurven in der Ebene zeigt, in welcher Beziehung die beiden entsprechenden Mengen zueinander stehen:

- Bei zwei einfach geschlossenen Kurven, die sich schneiden, stellt der Überlappungsbereich der Innenbereiche beider Kurven die Schnittmenge der beiden entsprechenden Mengen dar (vgl. in Abb. 2 die rote und die grüne Kurve bzw. die Mengen M und N).
- Bei zwei einfach geschlossenen Kurven, die sich nicht schneiden, und deren Innenbereich jeweils im Außenbereich der anderen Kurve liegt, sind die beiden entsprechenden Mengen disjunkt (vgl. in Abb. 2 die rote und die gelbe Kurve bzw. die Mengen M und L).
- Bei zwei einfach geschlossenen Kurven, die sich nicht schneiden, und bei denen der Innenbereich der einen Kurve im Innenbereich der anderen Kurve liegt, ist entsprechend die eine Menge eine Teilmenge der anderen Menge (vgl. in Abb. 2 die gelbe und die grüne Kurve bzw. die Mengen L und N).

Venn-Diagramme sind spezielle Euler-Diagramme. Für eine endliche Zahl von Mengen stellt ein Venn-Diagramm alle Schnittmengen zwischen diesen Mengen bzw. ihren Komplementen dar, selbst etwaige leere Schnittmengen. Ein Venn-Diagramm für n Mengen ($n \in \mathbb{N}$) unterteilt die Ebene demnach in genau 2^n Bereiche (vgl. das Venn-Diagramm für drei Mengen in Abb. 3).
Während Euler-Diagramme eine einfachere und intuitivere Möglichkeit bieten, Zusammenhänge zwischen Mengen zu veranschaulichen, weisen Venn-Diagramme eine höhere Vollständigkeit und Präzision auf. Die Wahl des geeigneten Diagrammtyps hängt von der Komplexität der darzustellenden Mengenbeziehungen ab.

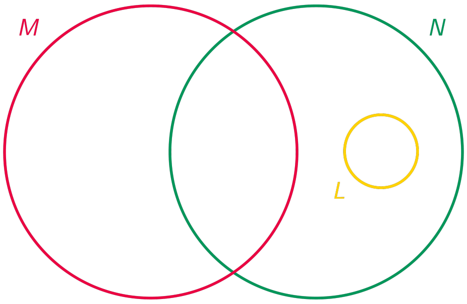


Abb. 2 Euler-Diagramm

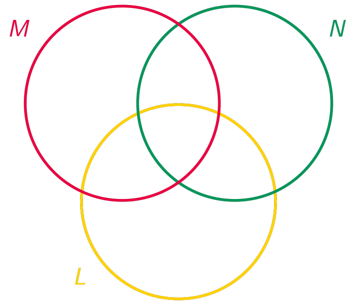


Abb. 3 Venn-Diagramm ($n=3$)

a) Skizzieren Sie ein Euler-Diagramm für
   i) die Zahlenmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$,
   ii) die Mengen der Säugetiere, der Vögel, der Reptilien, der Amphibien und der Fische,
   iii) die Mengen der gleichseitigen, der rechtwinkligen, der spitzwinkligen, der stumpfwinkligen und der gleichschenkligen Dreiecke,
   iv) die Mengen der Menschen, die sich omnivor, die sich vegetarisch, die sich vegan, die sich ovo-lacto-vegetarisch und die sich pescetarisch ernähren,
   v) die Mengen der Primzahlen, der geraden Zahlen, der ungeraden Zahlen, der Quadratzahlen und der Kubikzahlen, die jeweils größer 0 und kleiner 100 sind.

b) Skizzieren Sie ein Venn-Diagramm für
   i) die Mengen $L = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$, $M = \{\diamondsuit\}$ und $N = \{\clubsuit, \diamondsuit\}$,
   ii) vier beliebige Mengen.

c) In der Rubrik *Gefühlte Wahrheit* des Magazins der *Süddeutschen Zeitung* werden Alltagsphänomene augenzwinkernd in Form von Venn-Diagrammen karikiert. Welche Mengen stellen die Venn-Diagramme in Abb. 4, Abb. 5 und Abb. 6 jeweils genau dar?

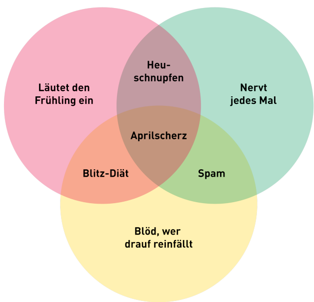


Abb. 4 April, April!

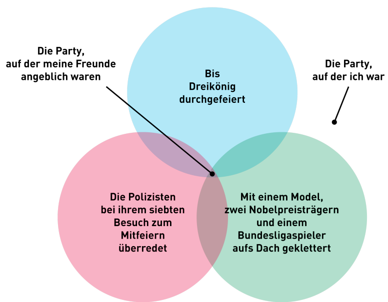


Abb. 5 Wie Silvester mal wieder laufen wird

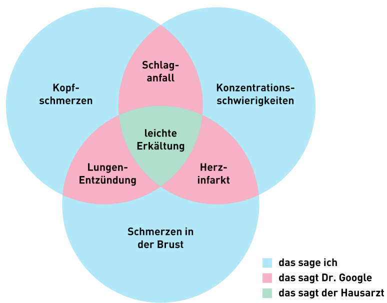


Abb. 6 Krankheiten googeln

Aufgabe 1.12 (Potenzmenge einer Menge)

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge* von M und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Geben Sie jeweils die Potenzmenge von M an.

a) $M = \emptyset$ b) $M = \{1\}$ c) $M = \{a, b\}$ d) $M = \{\diamond, \circ, \triangleleft\}$ e) $M = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

Aufgabe 1.13 (Mengenoperationen)

Es seien $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$. Bestimmen Sie:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B \cup C$ c) $A \backslash C$ d) $B \backslash C$

Aufgabe 1.14 (Rechenregeln für Mengenoperationen)

Zeigen Sie folgende Rechenregeln für die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$:

a) Kommutativgesetze
$M \cap N = N \cap M$
$M \cup N = N \cup M$

b) Assoziativgesetze
$(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$
$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$

c) Distributivgesetze
$M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$
$M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$

d) Komplement des Komplements
$\overline{\overline{M}} = M$

e) Regeln von *de Morgan*
$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

Tipp: Diese Regeln ergeben sich aus entsprechenden Tautologien (vgl. Aufgabe 1.7) durch den engen Zusammenhang zwischen den Mengenoperationen $\cap$ bzw. $\cup$ und den logischen Verknüpfungen $\wedge$ bzw. $\vee$.

Aufgabe 1.15 (Mengenausdrücke)

Vereinfachen Sie jeweils die folgenden Mengenausdrücke.

a) $A \cap A$ b) $A \cup A$ c) $A \cap \overline{A}$ d) $A \cup \emptyset$ e) $A \cap \emptyset$

f) $A \cap (A \cup B)$ g) $A \cap (B \backslash A)$ h) $A \backslash (A \backslash B)$ i) $\overline{A} \cap \overline{(B \backslash A)}$

Aufgabe 1.16 (Schaltjahre)

Ein Kalenderjahr, dessen Jahreszahl durch 4, nicht aber durch 100 teilbar ist, es sei denn, sie ist durch 100 und durch 400 teilbar, heißt *Schaltjahr*. Beispielsweise sind die Kalenderjahre 2000, 2024 und 2400 Schaltjahre, die Kalenderjahre 1900, 2025 und 2100 hingegen keine Schaltjahre. Die folgenden Mengen seien gegeben:

$$\begin{aligned} T_4 &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 4 teilbar}\}, \\ T_{100} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 100 teilbar}\}, \\ T_{400} &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 400 teilbar}\}, \\ S &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist die Jahreszahl eines Schaltjahres}\}. \end{aligned}$$

Drücken Sie die Menge S mit Hilfe der Mengenoperationen $\cap$, $\cup$ und $\backslash$ durch die Mengen T_4, T_{100} und T_{400} aus. Geben Sie auch einen Ausdruck an, der nicht die Mengenoperation $\backslash$ verwendet, dafür aber die Komplementbildung bezüglich der Grundmenge $\mathbb{N}$.

Aufgabe 1.17 (Vereinsmitglieder)

In einem Ort gebe es drei Vereine und genau 100 Menschen, die Mitglieder in mindestens einem der Vereine sind. Jeder der drei Vereine habe genau 70 Mitglieder. Wie viele Menschen gibt es höchstens, die Mitglieder in allen drei Vereinen sind?

Aufgabe 1.18 (Quantoren)

Formulieren Sie die folgenden Aussagen jeweils mit Quantoren und verneinen Sie sie.

a) Für alle $x \in M$ gilt A.

b) Es gibt ein $x \in M$, für das A gilt.

c) Für alle $x \in U$ gibt es ein $y \in V$, sodass $y = x + 10$.

d) Für alle $z \in W$ gibt es ein $x \in U$ und ein $y \in V$, sodass $z \leq x + y \leq z + 5$.

Aufgabe 1.19 (Unendliche Vereinigungen und Durchschnitte)

Bestimmen Sie:

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$

b) $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$

c) $\bigcup_{i\in\{2,4,6,8,\dots\}} \{i-1\}$

d) $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \{(-1)^i\}$

e) $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

f) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

g) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{-k, -(k-1), \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

h) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+3}, \dots\right\}$

i) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{k, 2k, 3k, \dots\}$

Aufgabe 1.20 (Kartesisches Produkt)

Stellen Sie jeweils das kartesische Produkt der Mengen M_1 und M_2 grafisch dar und geben Sie ein Beispiel für eine Relation auf $M_1 \times M_2$ an.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

b) $M_1 = \{1, 2, 4\}, \quad M_2 = \{0, 5, 6\}$

c) $M_1 = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 2k \leq x \leq 2k+1,\ k \in \{0, 1, 2, 3\}\big\}, \quad M_2 = \big\{x \in \mathbb{R} \mid 2k-1 \leq x \leq 2k,\ k \in \{1, 2, 3, 4\}\big\}$

d) $M_1 = \{w, f\}, \quad M_2 = M_1$

Aufgabe 1.21 (Relationen)

a) Untersuchen Sie jeweils, ob die Relation R reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. Ist R eine Äquivalenzrelation?

   i) $R = \big\{(g_1, g_2) \in G^2 \mid g_1 \text{ ist senkrecht zu } g_2\big\}$ mit $G = \{g \mid g \text{ ist eine Gerade}\}$

   ii) $R = \big\{(g_1, g_2) \in G^2 \mid g_1 \text{ ist parallel zu } g_2\big\}$ mit G wie in i)

   iii) $R = \big\{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \text{ ist Mutter von } m_2\big\}$ mit $M = \{m \mid m \text{ ist ein Mensch}\}$

   iv) $R = \big\{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \text{ ist verheiratet mit } m_2\big\}$ mit M wie in iii)

   v) $R = \big\{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1 \text{ und } m_2 \text{ haben einen gemeinsamen Großvater}\big\}$ mit M wie in iii)

   vi) $R = \big\{(A, B) \in \Omega^2 \mid A \Rightarrow B\big\}$ mit $\Omega = \{A \mid A \text{ ist eine Aussage}\}$

vii) $R = \{(A, B) \in \Omega^2 \mid A \Leftrightarrow B\}$ mit Ω wie in vi)

viii) $R = \{(A, B) \in \Omega^2 \mid A \wedge B\}$ mit Ω wie in vi)

ix) $R = \{(A, B) \in \Omega^2 \mid A \vee B\}$ mit Ω wie in vi)

x) $R = \{(U, V) \in M^2 \mid U \subset V\}$ mit einer Grundmenge G und $M = \{U \mid U \subset G\}$

xi) $R = \{(U, V) \in M^2 \mid U = V\}$ mit M wie in x)

xii) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$

xiii) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$

xiv) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid xy \geq 1\}$

xv) $R = \{(x, y) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})^2 \mid x/y \in \mathbb{Z}\}$

b) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Relation auf $M = \{{\color{red}\bullet}, {\color{yellow}\bullet}, {\color{green}\bullet}\}$ an, die gemäß der nachfolgenden Tabelle die angekreuzten Eigenschaften aufweist (und die nicht angekreuzten Eigenschaften nicht aufweist).

	reflexiv	symmetrisch	transitiv
i)	×	×	×
ii)	×	×	
iii)	×		×
iv)	×		
v)		×	×
vi)		×	
vii)			×
viii)			

Aufgabe 1.22 (Häufigkeit reflexiver und symmetrischer Relationen)

Die Menge M habe n Elemente ($n \in \mathbb{N}$).

a) Wie viele verschiedene Relationen auf M gibt es?

b) Wie viele verschiedene reflexive Relationen auf M gibt es? Welcher prozentuale Anteil aller Relationen auf M ist für $n = 1, 2, 3, 4$ reflexiv? Wie groß ist der Anteil ungefähr für $n = 100$?

c) Wie viele verschiedene symmetrische Relationen auf M gibt es? Welcher prozentuale Anteil aller Relationen auf M ist für $n = 1, 2, 3, 4$ symmetrisch? Wie groß ist der Anteil ungefähr für $n = 100$?

Tipp: Bei dieser Aufgabe ist es zweckmäßig, das kartesische Produkt $M \times M$ als quadratisches Gitter darzustellen. Jede Relation auf M entspricht dann einer bestimmten Teilmenge an Gitterpunkten. Denken Sie sich die zu einer Relation gehörigen Gitterpunkte rot gefärbt (statt ansonsten z.B. cyanfarben, vgl. Abb. 7). Dann entspricht a) der Frage, auf wie viele verschiedene Arten sich n^2 Gitterpunkte zum Teil rot färben lassen. Bei b) und c) liegt jeweils eine zusätzliche Anforderung an die Konstellation der rot gefärbten Gitterpunkte vor.

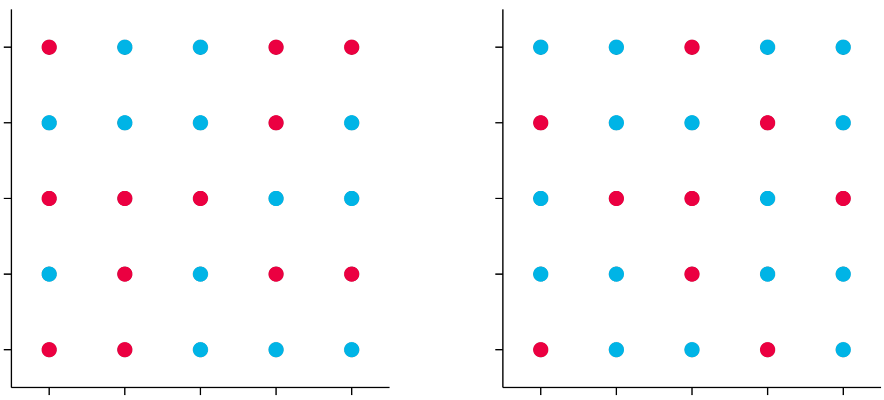


Abb. 7 Zwei verschiedene Relationen bzw. Färbungen der Gitterpunkte ($n = 5$)

Aufgabe 1.23 (Äquivalenzklassen)

a) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(m_1, m_2) \in M^2 \mid m_1$ hat die gleiche Staatsangehörigkeit wie $m_2\}$ mit der Menge aller Menschen M eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie einige Äquivalenzklassen an, unter anderem die Äquivalenzklasse, deren Element Sie selbst sind.

   Hinweis: Mehrfache Staatsangehörigkeiten sind bei dieser Aufgabe zu vernachlässigen.

b) Geben Sie alle Restklassen modulo 7 an.

c) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - y^2$ ist durch 3 teilbar$\}$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

d) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

e) Zeigen Sie, dass die Relation

$$R = \{(4, 4), (-4, 4), (4, -4), (-4, -4), (17, 17), (-17, 17), (17, -17), (-17, -17)\}$$

   eine Äquivalenzrelation ist. Auf welcher Menge M? Geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

Aufgabe 1.24 (Quotientenmenge)

Es sei X eine nichtleere Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge $X/{\sim} := \{[a]_\sim \mid a \in X\}$ aller Äquivalenzklassen von $\sim$ heißt die *Quotientenmenge* der Äquivalenzrelation $\sim$.

a) Geben Sie für die Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge X die Quotientenmenge $X/{\sim}$ an und deuten Sie diese geometrisch.

   i) $X = \mathbb{R}^2,\ (p, q) \sim (r, s) :\Leftrightarrow p - q = r - s$

   ii) $X = \mathbb{R}^2,\ (p, q) \sim (r, s) :\Leftrightarrow \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{r^2 + s^2}$

   iii) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ (p, q) \sim (r, s) :\Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q$

   Warum darf X bei iii) nicht den Ursprung $(0, 0)$ von $\mathbb{R}^2$ enthalten?

b) Zeigen Sie, dass die Quotientenmenge $X/{\sim}$ eine Partition der Menge X darstellt:

   i) $[x]_\sim \neq \emptyset$ für alle $x \in X$, d. h. alle Äquivalenzklassen sind nichtleer,

   ii) $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ [x]_\sim = [y]_\sim \ \Leftrightarrow\ x \sim y$ für alle $x, y \in X$, d. h. je zwei verschiedene Äquivalenzklassen sind disjunkt,

   iii) $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_\sim = X$, d. h. die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist gleich X.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/{\equiv_n}$ die Menge der Restklassen modulo n. Auf $\mathbb{Z}/{\equiv_n}$ sei durch

$$[a]_{\equiv_n} \oplus [b]_{\equiv_n} := [a + b]_{\equiv_n}, \qquad [a]_{\equiv_n} \odot [b]_{\equiv_n} := [a \cdot b]_{\equiv_n}$$

   für $a, b \in \mathbb{Z}$ eine *modulare Addition* $\oplus$ und eine *modulare Multiplikation* $\odot$ von Restklassen definiert. Zeigen Sie:

   i) $\oplus$ und $\odot$ sind wohldefiniert, d. h. ihre Definition hängt nicht von der speziellen Wahl der Repräsentanten $a, b \in \mathbb{Z}$ ab.

   ii) Für $\oplus$ und $\odot$ gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

   Tipp: Die durch $\oplus$ und $\odot$ gegebene *Restklassenarithmetik* (oder *modulare Arithmetik*) „erbt“ diese Gesetze unmittelbar von der gewöhnlichen Arithmetik reeller Zahlen.

Aufgabe 1.25 (Graph einer Abbildung)

Der *Graph* einer Abbildung $f: D \to Z$ ist die Relation $\{(x, y) \in D \times Z \mid y = f(x)\}$ auf $D \times Z$ und wird mit $\operatorname{graph}(f)$ bezeichnet. Umgekehrt ist eine Relation R auf $D \times Z$ dann und nur dann der Graph einer Abbildung von D nach Z, wenn zu jedem $x \in D$ genau ein $y \in Z$ mit xRy existiert.

Stellen Sie jeweils die Relation R grafisch dar und untersuchen Sie, ob R Graph einer Funktion ist. Wie lautet gegebenenfalls diese Funktion?

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$

b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^2\}$

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \mid x^3 = y^2\}$

d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\}$

e) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x\}$

f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \mid y = 1/x\}$

Aufgabe 1.26 (Bild und Urbild)

Es sei f eine Abbildung von D nach Z. Zeigen Sie, dass für alle $U_1, U_2 \subset D$ und alle $V_1, V_2 \subset Z$ gilt:

a) $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$

b) $f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$

c) $f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$

d) $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in a) im Allgemeinen nicht die Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.27 (Surjektivität und Injektivität)

Untersuchen Sie jeweils die angegebene Abbildung auf Surjektivität und Injektivität.

a) $h : L \to S,\ l \mapsto h(l)$, mit der Menge aller Länder L, der Menge aller Städte S und $h(l)$ definiert als die Hauptstadt des Landes l

b) $s : M \to \{7, 8, 9, \dots, 68, 69, 70\},\ m \mapsto s(m)$, mit der Menge M aller Menschen, die Schuhe tragen, und $s(m)$ definiert als die Schuhgröße des Menschen m gemäß Pariser Stich

c) $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto x + \frac{1}{2}(x+y-2)(x+y-1)$

d) $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (x,y) \mapsto 2^{x-1}(2y-1)$

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y+z)$

f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x, x+y, y)$

g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x \cdot y, x+y)$

h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x, -z, y)$

Tipp: Die Abbildungen c) und d) entsprechen jeweils einer bestimmten Art der Nummerierung von Paaren natürlicher Zahlen und werden daher als *Paarungsfunktionen* bezeichnet, erstere insbesondere als *Cantor'sche Paarungsfunktion*. Sie lassen sich wie in Abb. 8 durch zweidimensionale Zahlenschemata veranschaulichen.

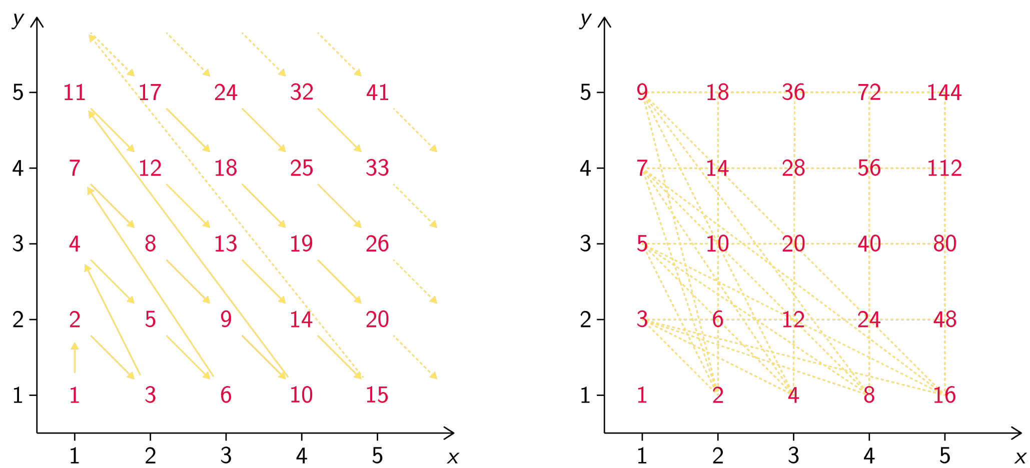


Abb. 8 Bei der Cantor'schen Paarungsfunktion c), veranschaulicht durch das linke Zahlenschema, werden Paare natürlicher Zahlen entlang aufeinander folgender Nebendiagonalen nummeriert. Die Paarungsfunktion d), veranschaulicht durch das rechte Zahlenschema, basiert auf Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 1.28 (Hash-Funktionen)

Eine Abbildung $h\colon U \to V$, mit einer beliebigen Menge U, einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{1, \ldots, n\}$, heißt *Hash-Funktion*. Eine Hash-Funktion ordnet den Elementen der Menge U – diese können komplexe Objekte wie z.B. Personen, Waren, Ortsangaben oder Strings sein – jeweils eine natürliche Zahl zu, die man als *Adresse* oder *Hash-Wert* des jeweiligen Elementes von U bezeichnet. Eine solche Zuordnung wird *Hashing* genannt und dient in der Informatik zur effizienten Speicherung, schnellen Durchsuchbarkeit und Gewährleistung der Integrität von Daten.
Falls es beim Hashing vorkommt, dass unterschiedlichen Eingabedaten $x_1, x_2 \in U$, $x_1 \neq x_2$, derselbe Hash-Wert $h(x_1) = h(x_2) \in V$ zugeordnet wird, spricht man von einer *Kollision*. Zu den Kriterien für eine geeignete Hash-Funktion gehört, neben u.a. einem geringen Speicherbedarf und einer schnellen Berechnung der Hash-Werte, dass Kollisionen unwahrscheinlich oder sogar unmöglich sind. Im letzteren Fall heißt eine Hash-Funktion *kollisionsfrei*.

a) Welcher mathematische Begriff entspricht der Kollisionsfreiheit einer Hash-Funktion?

b) Es sei U die Menge der Studierenden an der FH Münster. Wie groß muss n mindestens sein, damit eine Hash-Funktion $h\colon U \to V = \{1, \ldots, n\}$ kollisionsfrei sein kann?

c) Bereits in einer Gruppe von nur 23 Personen liegt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, über 50%. Dieses überraschende Phänomen wird als *Geburtstagsparadoxon* bezeichnet. Welcher Zusammenhang zur Eignung einer Hash-Funktion besteht?

Aufgabe 1.29 (Bijektivität und Umkehrfunktion)

Geben Sie jeweils für die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ die größtmögliche Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ an. Bestimmen Sie die Wertemenge W der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$. Untersuchen Sie f auf Surjektivität und Injektivität. Wie lautet, falls f bijektiv ist, die Umkehrfunktion f^{-1}? Kann, falls f nicht bijektiv ist, durch die Wahl einer anderen Zielmenge $Z \neq \mathbb{R}$ erreicht werden, dass $f\colon D \to Z$ bijektiv ist, und wie lautet dann die Umkehrfunktion f^{-1}?

a) $x \mapsto f(x) = 3x + 5$

b) $x \mapsto f(x) = x^{2n}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

c) $x \mapsto f(x) = x^{2n+1}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

d) $x \mapsto f(x) = \sqrt{3x}$

e) $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

f) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6,25}$

g) $x \mapsto f(x) = \frac{2 - x}{3 + x}$

h) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

i) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

Aufgabe 1.30 (Verknüpfung surjektiver und injektiver Funktionen)

Zeigen Sie, dass für zwei Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to O$ gilt:

a) f, g injektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ injektiv

b) f, g surjektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjektiv

c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

e) $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv

f) $g \circ f$ surjektiv, g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv

g) f, g bijektiv $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Aufgabe 1.31 (Hintereinanderausführungen)

Geben Sie jeweils die Hintereinanderausführungen $g \circ f$ und $f \circ g$ an, falls diese existieren.

a) $f : [0, 1] \to [-1, 4], \ f(x) = 5x - 1 \qquad g : [-1, 1] \to [0, 1], \ g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}, \ f(x) = \frac{2}{x - 3} \qquad g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \ g(x) = \frac{7 - x}{x}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \ x \mapsto |x|$

Aufgabe 1.32 (Die identische Abbildung)

Es sei M eine Menge. Die Abbildung id_M, definiert durch

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_M\colon & M & \to & M \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

heißt *identische Abbildung* auf M. Für sie gilt also $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie:

a) id_M ist bijektiv.

b) $\mathrm{id}_M^{-1} = \mathrm{id}_M$.

c) Für jede Abbildung $f\colon M \to M$ gilt $\mathrm{id}_M \circ f = f$ und $f \circ \mathrm{id}_M = f$.

Aufgabe 1.33 (Konstante Abbildungen)

Eine Abbildung $f\colon D \to Z$ heißt *konstant*, wenn für alle $x, y \in D$ gilt: $f(x) = f(y)$.

a) Geben Sie jeweils ein Beispiel an für eine konstante Abbildung

  i) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,

  ii) von $\mathbb{N}$ nach $\{7\}$,

  iii) von $\{\checkmark\}$ nach $\{\oplus, \ominus, \odot, \oslash, \otimes, \circledast, \circledcirc\}$.

b) Die Abbildung $f\colon D \to Z$ sei konstant und $D \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

  i) Es gibt ein $c \in Z$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in D$.

  ii) $\#f(D) = 1$.

  iii) Wenn D mehr als ein Element hat, dann ist f nicht injektiv.

  iv) Wenn Z mehr als ein Element hat, dann ist f nicht surjektiv.

Aufgabe 1.34 (Involutorische Abbildungen)

Eine Abbildung $f\colon M \to M$ heißt *involutorisch* (oder *selbstinvers* oder eine *Involution*), wenn $f \circ f = \mathrm{id}_M$. Für eine involutorische Abbildung gilt also $f\big(f(x)\big) = x$ für alle $x \in M$.

a) Geben Sie jeweils mindestens zwei Beispiele an für involutorische Abbildungen auf

i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ iii) $\{1, 2, 3, 4\}$ iv) der Menge aller Aussagen v) $\mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie:

  i) Eine Abbildung $f\colon M \to M$ ist genau dann involutorisch, wenn sie bijektiv ist und $f^{-1} = f$.

  ii) Die identische Abbildung ist involutorisch.

  iii) Ist f involutorisch, so auch $f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 1.35 (Idempotente Abbildungen)

Eine Abbildung $f\colon M \to M$ heißt *idempotent*, wenn $f \circ f = f$. Für eine idempotente Abbildung gilt also $f\big(f(x)\big) = f(x)$ für alle $x \in M$.

a) Geben Sie jeweils mindestens zwei Beispiele an für idempotente Abbildungen auf

i) $\mathbb{R}$ ii) $\mathbb{R}^2$ iii) $\mathbb{R}^3$.

b) Zeigen Sie:

  i) Eine konstante Abbildung $f\colon M \to M$ ist idempotent.

  ii) Die identische Abbildung ist idempotent.

  iii) Ist f idempotent, so gilt $f^n = f$ $(n \in \mathbb{N})$.

2 Reelle Zahlen

Aufgabe 2.1 (Absolutbetrag)

Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Absolutbetrages:

a) $|x| \geq 0$ b) $|x| \geq x$ c) $\big||x|\big| = |x|$

d) $|x|^2 = x^2$ e) $|xy| = |x||y|$ f) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

g) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung*)

h) $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y|$ (*inverse Dreiecksungleichung*)

Aufgabe 2.2 (Intervalle)

Beschreiben Sie die folgenden Mengen jeweils in möglichst einfacher Form.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| = |x-3|\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{|x-1|}{|x+1|} = 2\right\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 10 > 16\}$

d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[1+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right]$ e) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left]1-\frac{1}{i}, 3+\frac{1}{i}\right[$ f) $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{1-\frac{1}{k}}(2)$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid |3 - 2x| < 5\}$ h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x(2-x) < 1 + |x|\}$ i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \big||x| - |-5|\big| < 1\}$

Aufgabe 2.3 (Gaußklammer)

folgt demnächst

Aufgabe 2.4 (Supremum, Maximum, Infimum, Minimum)

Geben Sie mit Begründung jeweils $\sup A$, $\max A$, $\inf A$ und $\min A$ an, falls diese existieren.

a) $A = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = \frac{|x|}{1+|x|},\ x \in \mathbb{R}\right\}$ b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 1\}$

e) $A = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = -\frac{x}{1+x},\ x > -1\right\}$ f) $A = \left\{y \in \mathbb{R} \;\middle|\; y = x + \frac{1}{x},\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-3) < 0\}$ h) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \left(-\frac{1}{2}\right)^m - \frac{3}{n},\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$

Aufgabe 2.5 (Abzählbarkeit)

Zeigen Sie jeweils, dass die Menge M abzählbar unendlich ist, indem Sie eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to M$ angeben und beweisen, dass f bijektiv ist.

a) $M = \mathbb{N}$ b) $M = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ c) $M = \mathbb{Z}$ d) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Aufgabe 2.6 (Überabzählbarkeit)

Zeigen Sie:

a) Für jede endliche Menge M gilt $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$.

b) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Tipp: Zeigen Sie die Überabzählbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ indirekt, indem Sie annehmen, es gäbe eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, und diese Annahme zu einem Widerspruch führen. Betrachten Sie dazu die Menge $M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \notin f(m)\}$. Offenbar ist $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wenn f surjektiv ist, muss es ein a mit $f(a) = M$ geben. Diskutieren Sie, ob $a \in M$ oder $a \notin M$ gilt.

Aufgabe 2.7 (Vollständige Induktion arithmetisch)

Zeigen Sie:

a) $n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $\sum_{l=0}^{n} 2^l = 2^{n+1} - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

d) $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$

e) $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k} \quad (k, n \in \mathbb{N})$

f) $2^n \leq n! \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 4)$

g) $\sum_{k=1}^{m} (-1)^k k^2 = (-1)^m \binom{m+1}{2} \quad (m \in \mathbb{N})$

h) $\sum_{j=1}^{n} j^3 = \binom{n+1}{2}^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

i) $\prod_{m=0}^{n} (1 + x^{2^m}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x \neq 1)$

j) $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!} \quad (k, n \in \mathbb{N}, k \leq n)$

Aufgabe 2.8 (Bernoulli'sche Ungleichung)

Es sei $x \in \mathbb{R},\ x > -1,\ x \neq 0$. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die *Bernoulli'sche Ungleichung* gilt: $(1+x)^n > 1+nx$. Markieren Sie dabei, an welcher Stelle Sie die Voraussetzungen $x > -1$ und $x \neq 0$ verwenden.

Aufgabe 2.9 (Fehlerhafte vollständige Induktion)

Wir betrachten rote und grüne Kugeln, die man in eine Urne legen kann. Im Folgenden wird vermeintlich durch vollständige Induktion bewiesen, dass in einer Urne immer alle Kugeln die gleiche Farbe haben. Wo liegt der Fehler?

Induktionsanfang $(n = 1)$

In einer Urne mit einer Kugel haben offenbar alle Kugeln die gleiche Farbe.

Induktionsschritt $(n \to n+1)$

Wir nehmen an, in einer Urne mit n Kugeln haben alle Kugeln die gleiche Farbe (Induktionsannahme). Nun ist zu zeigen: In einer Urne mit $n+1$ Kugeln haben alle Kugeln die gleiche Farbe. Eine Urne enthalte also die $n+1$ Kugeln $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_{n+1}$. Nimmt man die Kugel K_1 aus der Urne, erhält man eine Urne mit den n Kugeln $K_2, K_3, \ldots, K_{n+1}$. Nach der Induktionsannahme haben diese Kugeln alle die gleiche Farbe. Insbesondere hat die Kugel K_2 die gleiche Farbe wie die Kugel K_{n+1}. Nimmt man hingegen die Kugel K_2 aus der Urne, erhält man eine Urne mit den n Kugeln $K_1, K_3, \ldots, K_{n+1}$. Nach der Induktionsannahme haben auch diese Kugeln alle die gleiche Farbe. Da zudem die Kugeln K_2 und K_{n+1} die gleiche Farbe haben, müssen alle $n+1$ Kugeln die gleiche Farbe haben. $\square$

Aufgabe 2.10 (Vollständige Induktion geometrisch)

a) Geometrische Figuren, die sich winkelförmig aus drei gleich großen Quadraten zusammensetzen, heißen *L-Triominos*. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ein Schachbrett aus 2^n mal 2^n quadratischen Feldern lässt sich so mit L-Triominos aus drei Feldern ausfüllen, dass das Feld rechts unter der Mitte frei bleibt, alle anderen Felder gefüllt sind und sich keine L-Triominos überlappen. Beispielsweise lässt sich das Schachbrett aus 4 mal 4 Feldern wie in Abb. 9 ausfüllen.

   Hinweis: Bei dieser Aufgabe genügt es, durch eine aussagekräftige Skizze die Beweisidee anzugeben.

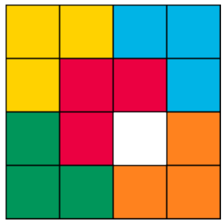


Abb. 9 L-Triominos auf einem 4x4-Schachbrett

b) Zeigen Sie: Eine Kreisfläche wird durch n Kreissehnen ($n \in \mathbb{N}$) in höchstens $(n^2 + n + 2)/2$ Teilflächen unterteilt.

c) Wie viele Diagonalen hat ein ebenes konvexes n-Eck ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)? Beweisen Sie Ihre Antwort.

3 Folgen und Reihen

Aufgabe 3.1 (Bildungsvorschriften für Folgen)

Nachfolgend sind jeweils die ersten Glieder einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ angegeben. Geben Sie für alle Glieder der Folge je nach Kennzeichnung entweder eine explizite Bildungsvorschrift $(\rightarrow)$ oder eine rekursive Bildungsvorschrift $(\looparrowright)$ oder beides $(\rightarrow / \looparrowright)$ an. Untersuchen Sie jeweils, ob die Folge monoton, beschränkt oder alternierend ist. Geben Sie mit Begründung jeweils $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ an, falls diese existieren.

a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \frac{9}{36}, \ldots$ $(\rightarrow)$

b) $-1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{4}, -3, \frac{1}{8}, -4, \frac{1}{16}, \ldots$ $(\rightarrow)$

c) $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

d) $0{,}2\,;\ 0{,}04\,;\ 0{,}008\,;\ \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$ $(\rightarrow)$

f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ $(\rightarrow)$

g) $0{,}2\,;\ 0{,}22\,;\ 0{,}222\,;\ \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

h) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

i) $\frac{2}{3}, 1, \frac{8}{7}, \frac{11}{9}, \frac{14}{11}, \frac{17}{13}, \ldots$ $(\rightarrow)$

j) $2, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \ldots$ $(\rightarrow)$

k) $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots$ $(\rightarrow)$

l) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

m) $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

n) $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ $(\rightarrow/\looparrowright)$

o) $1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}, \ldots$ $(\looparrowright)$

p) $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}},\ 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}, \ldots$ $(\looparrowright)$

Aufgabe 3.2 (Folgen fortsetzen)

folgt demnächst

Aufgabe 3.3 (Eigenschaften von Folgen)

Untersuchen Sie jeweils, ob eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, die gemäß der nachfolgenden Tabelle die angekreuzten Eigenschaften aufweist (und die nicht angekreuzten Eigenschaften nicht aufweist). Geben Sie im Fall der Existenz ein Beispiel an.

	nach oben beschränkt	nach unten beschränkt	monoton wachsend	monoton fallend	alternierend
a)	×	×	×	×	
b)	×		×	×	
c)	×		×		
d)	×			×	×
e)	×			×	
f)	×				
g)		×			×
h)		×			
i)					×
j)					

Aufgabe 3.4 (Gesetzmäßigkeiten für die Konvergenz von Folgen)

Zeigen Sie:

a) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Tipp: Nehmen Sie an, eine konvergente Folge habe zwei verschiedene Grenzwerte, und führen Sie diese Annahme zu einem Widerspruch.

b) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen den Grenzwert -10^{-7}, so sind unendlich viele Glieder der Folge negativ.

e) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

f) Die Beschränktheit einer Folge ist nicht hinreichend für ihre Konvergenz.

g) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und gilt $a_n > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \geq 0$.

h) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, so gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

i) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m, n \geq n_0 \qquad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Hinweis: Eine Folge mit dieser Eigenschaft nennt man *Cauchy-Folge*. Gezeigt werden soll also, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, gilt ebenfalls, ist aber schwieriger zu zeigen.

Aufgabe 3.5 (Konvergenz von $|q|^n$ und $\sqrt[n]{n}$)

Zeigen Sie:

a) Für die Folge $\left(|q|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$.

Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $q = 0$ und $0 < |q| < 1$. Setzen Sie im zweiten Fall $h := 1/|q| - 1$ und wenden Sie auf $1/|q|^n = (1+h)^n$ die Bernoulli'sche Ungleichung an.

b) Für die Folge $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Tipp: Betrachten Sie die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ und weisen Sie nach, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wenden Sie dazu auf $n = (1 + b_n)^n$ den Binomischen Lehrsatz an, um eine Abschätzung für b_n nach oben zu gewinnen.

Aufgabe 3.6 (Euler'sche Zahl)

Die *Euler'sche Zahl* e wird gemäß

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

als Grenzwert einer Folge definiert. Zeigen Sie, dass diese Folge tatsächlich konvergiert.

Tipp: Beweisen Sie die Konvergenz der Folge in zwei Schritten, indem Sie zum einen die Monotonie und zum anderen die Beschränktheit der Folge beweisen. Betrachten Sie zum Beweis der Monotonie der Folge den Quotienten aufeinander folgender Glieder und schätzen Sie diesen Quotienten mit Hilfe der Bernoulli'schen Ungleichung nach unten ab. Wenden Sie zum Beweis der Beschränktheit der Folge auf $(1 + 1/n)^n$ den Binomischen Lehrsatz an und schätzen Sie die auftretende Summe so nach oben ab, dass sich die geometrische Summenformel anwenden lässt.

Aufgabe 3.7 (Fibonacci-Folge und Goldener Schnitt)

Die *Fibonacci-Folge* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß

$$F_1 := 1, \quad F_2 := 1, \quad F_n := F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$$

rekursiv definiert. Es sei

$$\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \Psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi.$$

Zeigen Sie:

a) Die Fibonacci-Folge hat die explizite Bildungsvorschrift

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Hinweis: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$, die der Gleichung $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ genügen, gilt $\frac{a}{b} = \Phi$. Das Verhältnis Φ zweier Größen tritt in Natur, Kunst und Architektur auf und wird als *Goldener Schnitt* bezeichnet.

Aufgabe 3.8 (Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie die Folgen aus Aufgabe 3.1 auf Konvergenz. Wie lautet gegebenenfalls der Grenzwert?

Tipp zu o): Stellen Sie die Glieder der Folge als gewöhnliche Brüche dar und nutzen Sie Aufgabe 3.7 b).

Tipp zu p): Ersetzen Sie in der rekursiven Bildungsvorschrift der Folge sowohl a_n als auch a_{n+1} durch den hypothetischen Grenzwert a und lösen Sie die entstehende Gleichung nach a auf. Setzen Sie dann $d_n := a_n - a$ und zeigen Sie anhand der rekursiven Bildungsvorschrift, dass $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 3.9 (Grenzwerte von Folgen)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{4n^3+1}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4-n+2}{2n^4+2n^2+n}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+n^3}{1+n+n^2+3n^3+4n^4}$ e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-4n^2+3n^3+7}{2n^3+5n}$ f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{n}$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4-3n^2+17}{1000n^3+n^2+n}$ h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-3n}{1+4n}\right)^2$ i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n}-19}{9^n+12}$

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^4}{3n^4+3n+5}$ k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n}{\sqrt[3]{n^6+n^4+1}}$ l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{5+5n+2n^2}{16n^2+12n+4}}$

m) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$ n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ o) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 1)$

p) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^2+2n+1}-3n$ q) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ r) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1-\sqrt{\frac{n-1}{n}}}{1-\frac{n-1}{n}}$

s) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ t) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$ u) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

Aufgabe 3.10 (Grenzwerte von Reihen)

Berechnen Sie:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right)$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3+3n^2+3n+1} - \frac{1}{n^3}\right)$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

Aufgabe 3.11 (Stapel mit Überhang)

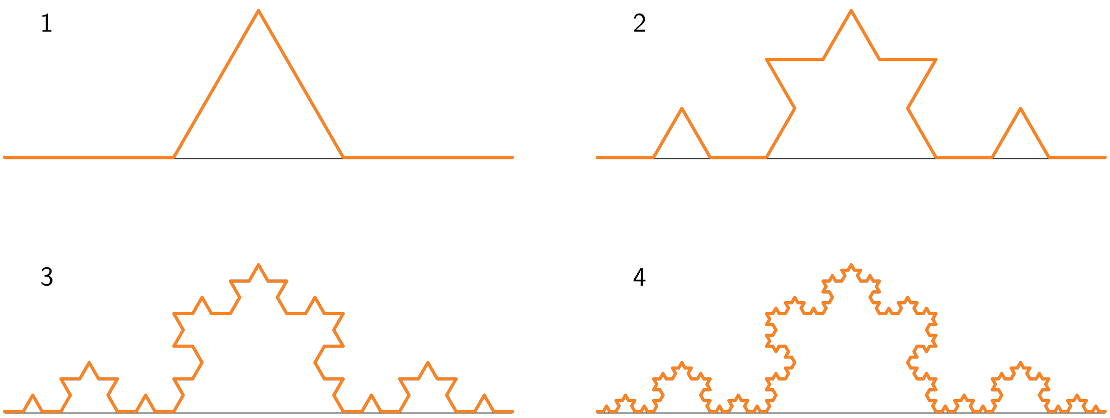
folgt demnächst

Aufgabe 3.12 (Achilles und die Schildkröte)

folgt demnächst

Aufgabe 3.13 (Koch-Kurve)

Die *Koch-Kurve* ist eine ebene fraktale Kurve, die sich ausgehend von einem einzelnen Geradenstück als Grenzwert einer unendlichen Iteration ergibt. Bei dieser Iteration werden in jedem Schritt alle vorhandenen Geradenstücke jeweils durch einen bestimmten Streckenzug ersetzt. Um das Iterationsprinzip zu verdeutlichen, sind nachfolgend die ersten vier Schritte der Iteration abgebildet:



Berechnen Sie

a) die Länge der Koch-Kurve,

b) die Fläche, welche die Koch-Kurve mit der Grundlinie einschließt, wenn die Fläche des Dreiecks im ersten Iterationsschritt den Wert 1 hat.

Aufgabe 3.14 (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\dots$

b) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\dots$

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^n \quad (a\geq 1)$

e) $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\dots$

f) $\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\dots$

g) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\pm\dots$

h) $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\dots$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n+1}$

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^n}$

k) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\dots$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n\sqrt[6]{n^5+n-1}}$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n^3-7}{12n+9n^3}\right)^n$

Aufgabe 3.15 (Geschachtelte Kreise und Polygone)

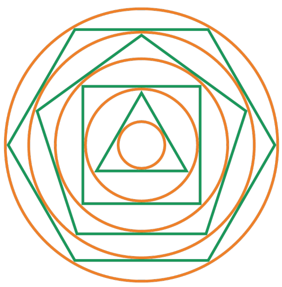


Abb. 10 Geschachtelte Kreise und Polygone

Ein Kreis in der Ebene mit dem Radius 1 sei der Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks. Der Umkreis dieses Dreiecks sei wiederum der Inkreis eines Quadrates, und dessen Umkreis wiederum der Inkreis eines regelmäßigen Fünfecks (vgl. Abb. 10). Bleiben, wenn eine solche geschachtelte Abfolge konzentrischer Kreise und regelmäßiger Polygone beliebig fortgesetzt wird, die Kreisradien beschränkt, oder sind sie unbeschränkt? Ermitteln Sie gegebenenfalls eine obere Schranke der Kreisradien.

Tipp: Nutzen Sie die Abschätzung

$$\ln\frac{1}{\cos x}\leq\frac{9\ln 2}{\pi^2}x^2$$

für $0\leq x\leq\pi/3$ sowie die Lösung des Basler Problems, d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 3.16 (Leibniz-Kriterium)

a) Für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $a_n\geq 0$, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sei konvergent.

  i) Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ konvergent ist.

  ii) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass bei i) die Voraussetzung $a_n\geq 0$ $(n\in\mathbb{N})$ nicht fortgelassen werden kann.

b) Zeigen Sie für die Reihe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ mit $a_n=\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$:

  i) die Reihe ist alternierend,

  ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

  iii) die Reihe divergiert.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

Aufgabe 3.17 (Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen)

Eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, heißt *bedingt konvergent*.

a) Zeigen Sie: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

b) Begründen Sie, warum die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \dots$$

bedingt konvergent ist, und geben Sie weitere Beispiele für bedingt konvergente Reihen an.

c) Die alternierende harmonische Reihe und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} \dots$$

unterscheiden sich in der Reihenfolge, nicht jedoch in den Zahlenwerten ihrer Summanden. Geben Sie eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b_n = a_{\varphi(n)}$.

d) Obwohl sich die beiden obigen Reihen nur in der Reihenfolge ihrer Summanden unterscheiden, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Begründen Sie diesen Zusammenhang der Grenzwerte beider Reihen.

Hinweis: Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n = a_{\varphi(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine *Umordnung* von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Nach dem *Riemann'schen Umordnungssatz* existiert bei einer bedingt konvergenten Reihe zu jeder reellen Zahl S eine Umordnung der Reihe, die den Grenzwert S hat. Zudem existiert auch jeweils eine Umordnung der Reihe, die den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$ hat.

Aufgabe 3.18 (Potenzreihen)

folgt demnächst

4 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 4.1 (Gesetzmäßigkeiten für Funktionen)

Beweisen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^{2n}$ eine gerade und $x \mapsto x^{2n+1}$ eine ungerade Funktion auf $\mathbb{R}$.

b) Ist f eine beliebige Funktion auf $\mathbb{R}$, so ist durch $g(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ eine gerade Funktion g und durch $u(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ eine ungerade Funktion u auf $\mathbb{R}$ gegeben.

c) Jede beliebige Funktion f auf $\mathbb{R}$ lässt sich eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion auf $\mathbb{R}$ schreiben.

d) Das Produkt zwei gerader Funktionen ist gerade, das Produkt zweier ungerader Funktionen ist gerade, das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.

e) Ist eine Funktion f auf $D \subset \mathbb{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend), so ist sie injektiv.

f) Ist eine Funktion f auf $D \subset \mathbb{R}$ streng monoton (wachsend oder fallend) und schränkt man ihre Zielmenge auf $f(D)$ ein, so ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} weist dieselbe Monotonieeigenschaft wie f auf.

g) Sind f und g periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit derselben Periode, so sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), $|f|$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) und f^q (falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $q > 0$) periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$. Inwieweit bleibt dies richtig, wenn f und g nicht dieselbe Periode haben?

h) Es existieren Funktionen f und g auf $\mathbb{R}$ mit $f \cdot g = f \circ g$.

Hinweis: $f \cdot g$ und $f \circ g$ bezeichnen im Allgemeinen vollkommen verschiedene Funktionen!

i) Es existiert keine Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit $f^{-1} = 1/f$.

Hinweis: f^{-1} und $1/f$ bezeichnen im Allgemeinen vollkommen verschiedene Funktionen!

Aufgabe 4.2 (Periodische Funktionen)

folgt demnächst

Aufgabe 4.3 (ϵ-δ-Definition des Grenzwertes einer Funktion)

a) Zeigen Sie für $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x^2+6}$ und $c = \frac{2}{3}$, dass $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ ist, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ so angeben, dass für alle $x > x_0$ gilt: $|f(x) - c| < \epsilon$.

b) Zeigen Sie für $f(x) = \frac{2x^2-18}{x+3}$, $x_0 = -3$ und $c = -12$, dass $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$ ist, indem Sie zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben, dass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - c| < \epsilon$.

Aufgabe 4.4 (Grenzwerte für $x \to \pm\infty$)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2+5}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - x\right)$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{7+13x^2-6x^3}{3x^3-5x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x}{x+1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^3-3}\right)^2$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{18x^2+7x}{2x^2-1}}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\frac{1}{2}x}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$ l) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{6x+2}{7x^2-3}\right)\left(\frac{4}{3}x - 5\frac{1}{x^2}\right)$ n) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-3)^2}$ o) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{(2x-1)(4x+7)}{1+x^2}}$

Aufgabe 4.5 (Grenzwerte für $x \to x_0$)

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert, falls er existiert:

a) $\lim\limits_{x\to 7} 5x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$ $(a\in\mathbb{R})$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{11}{8-x^3}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ $(n\in\mathbb{N})$ j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3-3x^4}{5x^3-3x^5}$

Aufgabe 4.6 (Vermischte Grenzwerte)

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\uparrow 1} 2^{\frac{1}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\downarrow \frac{\pi}{4}} 3^{\tan 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x}$ d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$

e) $\lim\limits_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ $(\alpha>0)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{2x+1}$ j) $\lim\limits_{x\downarrow 0}(1+\tan x)^{\cot x}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ n) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$ $(\alpha>0)$ o) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\ln x$ p) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$

Tipps: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Aufgabe 4.7 (Asymptoten)

Es sei $f:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $g:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(x)=mx+b$ $(a,b,m\in\mathbb{R})$. Der Graph von g ist eine Halbgerade. Konvergiert die Differenzfunktion $h:[a,\infty[\to\mathbb{R}$ von f und g, $h=f-g$, für $x\to\infty$ gegen Null, d. h. gilt

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} (f(x)-g(x)) = 0,$$

so heißt graph(g) eine *Asymptote* von f für $x\to\infty$ und man sagt auch, f konvergiere für $x\to\infty$ asymptotisch gegen g.

Untersuchen Sie jeweils, ob die Funktion f für $x\to\infty$ eine Halbgerade graph(g) als Asymptote besitzt. Wie lautet gegebenenfalls g?

a) $f(x)=\frac{4-3x^2}{5x+1}$ b) $f(x)=\frac{5x^2-3x-2}{3x^2-5x+9}$ c) $f(x)=\frac{x^4-6}{7x^2}$

d) $f(x)=\frac{x^3+x+13}{7-4x}$ e) $f(x)=\frac{3x^2}{x-2}-\frac{5x}{x+1}$ f) $f(x)=3x+1$

Aufgabe 4.8 (Landau-Symbole)

folgt demnächst

Aufgabe 4.9 (Stetigkeit)

a) Zeigen Sie für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{3x^2-48}{x+4}$ für $x\neq -4$, $f(-4)=-24$ und $x_0=-4$, dass f in x_0 stetig ist, indem Sie zu jedem $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ so angeben, dass für alle x mit $|x-x_0|<\delta$ gilt: $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

b) Zeigen Sie: Eine Funktion $f: U_r(x_0)\to\mathbb{R}$ $(x_0\in\mathbb{R}, r>0)$ ist genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n\in U_r(x_0)$ $(n\in\mathbb{N})$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(x_0)$.

c) Für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gelte $f(0)=1$ und $f(x+y)\leq f(x)f(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn f stetig an der Stelle 0 ist, dann ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = f(x + 1/n)$.
Tipp: Nutzen Sie die Darstellung

$$f(1) = f(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{m+1}{n}\right) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right)$$

und betrachten Sie $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$.

Aufgabe 4.10 (Stetige Ergänzbarkeit)

Untersuchen Sie jeweils die Funktion f auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich auf Stetigkeit. An welchen Unstetigkeitsstellen ist f stetig ergänzbar?

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ c) $f(x) = 4^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x) = \frac{2-x}{4-2x}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ f) $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

Aufgabe 4.11 (Linksseitige und rechtsseitige Stetigkeit)

Wie sind jeweils die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

a) $f(x) = \left\{ \begin{matrix} ax^2 + 3 & \text{für } x > 1 \\ x + 1 & \text{für } x \leq 1 \end{matrix} \right\}$

b) $f(x) = \left\{ \begin{matrix} -x-1 & \text{für } x < -1 \\ a\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in [-1,1] \\ \sqrt{x+3} & \text{für } x > 1 \end{matrix} \right\}$

c) $f(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{a}{x^2+1} & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{\sin(x/2)}{2x} & \text{für } x > 0 \end{matrix} \right\}$

d) $f(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{x^2-4} - \left(\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ 0 & \text{für } x \in \{-2, 2\} \end{matrix} \right\}$

Aufgabe 4.12 (Elementare Verknüpfungen stetiger Funktionen)

Geben Sie jeweils zu der angegebenen Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ die größtmögliche Definitionsmenge D_f und die zugehörige Wertemenge W_f an.

a) $f(x) = \frac{2\sin x}{2 + e^{-x}}$ b) $f(x) = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$ c) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{|\cos x|}}$

d) $f(x) = \frac{1}{1 - \ln|x|}$ e) $f(x) = e^{-x^2}$ f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 4.13 (Ganzrationale Funktionen)

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, heißt *ganzrationale Funktion* oder *Polynom*. Die Zahlen a_k heißen die *Koeffizienten* des Polynoms f. Man nennt n den *Grad* des Polynoms f und schreibt $n = \operatorname{grad} f$.

Zwei ganzrationale Funktionen n-ten Grades f und g, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ $(x \in \mathbb{R})$, sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten allesamt gleich sind, d. h. wenn $a_k = b_k$ für alle k gilt. Ob zwei ganzrationale Funktionen gleich sind, lässt sich also durch einen *Koeffizientenvergleich* prüfen.

Jedes Polynom f lässt sich eindeutig in der Form $f(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{m_i} h(x)$ darstellen, mit paarweise verschiedenen reellen *Nullstellen* x_i, *Linearfaktoren* $(x - x_i)$, deren *Vielfachheiten* m_i und einem Polynom h, das keine reellen Nullstellen besitzt. Ist h konstant, so sagt man, das Polynom f *zerfalle vollständig in Linearfaktoren*. Zur Bestimmung von h bei gegebenem Polynom f dividiert man f sukzessive durch bereits bekannte Linearfaktoren von f, bis man zu einem *irreduziblen* Faktor gelangt, der sich nicht mehr ohne Rest durch Linearfaktoren dividieren lässt und somit h entspricht. Dieses Verfahren heißt *Faktorisierung* eines Polynoms.

Stellen Sie die folgenden Polynome f jeweils in der obigen Produktform dar:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ b) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2$ c) $f(x) = -x^2 + x + 6$

d) $f(x) = x^4 - 191x^2 - 980$ e) $f(x) = 2x^2 + 4x + 20$ f) $f(x) = 4x^4 - 1$

Aufgabe 4.14 (Polynome 4. Grades)

Geben Sie jeweils eine ganzrationale Funktion 4. Grades $f : x \mapsto y = f(x)$ an,

a) deren Graph die x-Achse bei $x = -3$ und $x = 3$, und nur dort, schneidet (aber nicht berührt),

b) deren Graph die x-Achse bei $x = -3$ und $x = 3$, und nur dort, berührt (aber nicht schneidet),

c) die keine reellen Nullstellen besitzt, gerade ist und deren Graph durch die Punkte $(0, -6)$ und $(1, -2)$ geht,

d) die Nullstellen bei $x = -3$ und $x = 6$ besitzt, gerade ist und deren Graph die Ordinate bei $y = -3$ schneidet.

Aufgabe 4.15 (Gebrochenrationale Funktionen)

Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ der Form

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{l=0}^{n} b_l x^l}$$

mit ganzrationalen Funktionen Z und N heißt *gebrochenrationale Funktion*. Sie heißt *echt gebrochenrational*, wenn $m = \mathrm{grad} Z < n = \mathrm{grad} N$, andernfalls *unecht gebrochenrational*.

Die größtmögliche Definitionsmenge D von f ist $\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms N, es gilt also $D = \mathbb{R} \setminus N^{-1}\{0\}$. Auf dieser Definitionsmenge ist f stetig. f kann auf D mit einer ganzrationalen Funktion übereinstimmen, wenn nämlich $Z(x)$ ohne Rest durch $N(x)$ teilbar ist.

Geben Sie jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine gebrochenrationale Funktion $f : x \mapsto f(x)$ die angegebene Eigenschaft besitzt:

a) $D = \mathbb{R}$

b) f hat keine reellen Nullstellen.

c) Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der Ordinate.

d) f ist gerade.

e) f ist ungerade.

f) f ist beschränkt.

g) Die x-Achse ist Asymptote von f für $x \to \pm\infty$.

h) Eine Parallele zur x-Achse, aber nicht die x-Achse selbst, ist Asymptote von f für $x \to \pm\infty$.

i) Eine Gerade mit von Null verschiedener Steigung ist Asymptote von f für $x \to \pm\infty$.

Aufgabe 4.16 (Elementare Transformationen der Sinusfunktion)

Skizzieren Sie jeweils den Graphen von f für $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ b) $f(x) = |\sin(x - \frac{\pi}{2})|$ c) $f(x) = \sin|(x - \frac{\pi}{2})|$

d) $f(x) = \sin 2x$ e) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$.

Aufgabe 4.17 (Vollständige Induktion trigonometrisch)

Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sin \alpha \neq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Aufgabe 4.18 (Lösungsmengen transzendenter Gleichungen)

Wie lautet jeweils zu der angegebenen Gleichung die Lösungsmenge für x?

a) $4\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

b) $\tan x + \tan 2x = 0$

c) $\sin 2x - \cos 2x = 1$

d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

e) $2 \sin x + \cos^2 x = \frac{7}{4}$

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

g) $4 \log_4(\log_3 x^2) = \log_2 4$

h) $\ln x + \ln 2 = \ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

i) $(\frac{2}{3})^{\log_7 x} + (\frac{3}{2})^{\log_7 x} = \frac{13}{6}$

j) $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

k) $(1+e)\sinh \frac{x}{3} + (1-e)\cosh \frac{x}{3} = e - 1$

l) $\dfrac{1}{5 - \ln x} + \dfrac{2}{1 + \ln x} - 1 = 0$

Aufgabe 4.19 (Vereinfachung transzendenter Ausdrücke)

Vereinfachen Sie jeweils den angegebenen Ausdruck:

a) $\dfrac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\sqrt{1-x^2}\tan(\arcsin x)$ c) $\dfrac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$ d) $\dfrac{\cot x_1 \cot x_2 - 1}{\cot x_1 + \cot x_2}$

e) $\operatorname{arsinh}\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)$ f) $\operatorname{arcosh} 1$ g) $\operatorname{artanh}\dfrac{e^4 - 1}{e^4 + 1}$ h) $\operatorname{arcoth}\dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$

Aufgabe 4.20 (Potenzreihen als stetige Funktionen)

folgt demnächst

5 Komplexe Zahlen

Aufgabe 5.1 (Rechenregeln für komplexe Zahlen)

Zeigen Sie, dass die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen jeweils dem Assoziativgesetz und dem Kommutativgesetz sowie gemeinsam dem Distributivgesetz genügen.

Aufgabe 5.2 (Rechenregeln für die komplexe Konjugation)

Zeigen Sie, dass für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \text{Im } z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

c) $z \cdot \overline{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2 \geq 0$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

e) $z = \overline{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5.3 (Rechenregeln für den Betrag komplexer Zahlen)

Zeigen Sie, dass für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $|z| = |-z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

b) $|\text{Re } z| \leq |z|, \quad |\text{Im } z| \leq |z|$

c) $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$

d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad$ (*Dreiecksungleichung*)

Aufgabe 5.4 (Kartesische Darstellung komplexer Zahlen)

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in ihrer kartesischen Darstellung an und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene ein.

a) $\dfrac{3+4i}{1-2i}$ b) $\dfrac{i(2+i)}{(1+i)(2-i)}$ c) $2i\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$ d) $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ e) $\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{4}}$

f) $ie^{i\frac{11\pi}{4}}$ g) $3e^{i4\pi} + 2e^{i7\pi}$ h) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ i) $(1-i)^9$ j) e^i

Aufgabe 5.5 (Exponentielle Darstellung komplexer Zahlen)

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in ihrer exponentiellen Darstellung an und zeichnen Sie sie in die komplexe Ebene ein.

a) $1 + i\sqrt{3}$ b) -5 c) $-5 - i5$ d) $(1 - i\sqrt{3})^3$ e) $(1+i)^5$

f) $(\sqrt{3} + i^3)(1-i)$ g) $\dfrac{2 - i\dfrac{6}{\sqrt{3}}}{2 + i\dfrac{6}{\sqrt{3}}}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}}{7+i7}$ i) $3 + i4$ j) i^i

Aufgabe 5.6 (Elementare Zusammenhänge bei komplexen Zahlen)

Es seien $w, z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ b) $\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ c) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

d) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ e) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

f) $|e^{i\alpha}| = 1$ g) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ h) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$ i) $\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$

j) $\overline{z} = re^{-i\varphi}$ k) $z\overline{z} = r^2$ l) $\frac{z}{\overline{z}} = e^{2i\varphi}$ m) $z^n = r^n e^{in\varphi}$

n) $|\overline{z}| = |z|$ o) $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ p) $|wz| = |w||z|$ q) $\overline{wz} = \overline{w}\ \overline{z}$

Aufgabe 5.7 (Lösungsmenge komplexer Gleichungen)

Wie lautet jeweils zu der angegebenen Gleichung die Lösungsmenge für $z \in \mathbb{C}$?

a) $\frac{z-1}{z-2} = \frac{1+i}{2-i}$ b) $\frac{1}{z+1} = 3-i$ c) $\frac{z}{z-1} = 1-3i$

d) $\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-1} = 1+i$ e) $\frac{2}{z} + z = i$ f) $2i - \frac{6i}{z} - iz = 2z + 1 + \frac{12}{z}$

g) $z(\overline{z}-1) = 9+3i$ h) $|z\overline{z}-5| + \left|\frac{z}{\overline{z}} - \frac{3+4i}{5}\right| = 0$ i) $z^3 = 125$

j) $z^4 = -16$ k) $z^3 = 32(1+i)^2$ l) $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

m) $z^4 - 2z^2 - 3 = 0$ n) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ o) $\operatorname{Im}\frac{z-i}{z-1} = 0$

p) $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 2$ q) $\left|\frac{z-i}{z-1}\right| = 1$ r) $(1+z)^5 = (1-z)^5$

Aufgabe 5.8 (Lösungsmenge komplexer Ungleichungen)

Skizzieren Sie jeweils in der Gauß'schen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, die die angegebene Ungleichung erfüllen.

a) $0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2$ b) $|z-2| < |2z-1|$

c) $|z+1-3i| \geq 2|z+1|$ d) $|z-3| < |z+i|$

Aufgabe 5.9 (Mandelbrot-Menge)

folgt demnächst

Lösungen

1 Grundlagen

Lösungen zu Aufgabe 1.1

a) wahre Aussage

b) keine Aussage

c) Aussage; wahr, wenn ich klein bin; falsch, wenn ich groß bin

d) falsche Aussage

e) keine Aussage

f) Aussage; wahr, wenn sie aussagen; falsch, wenn sie nicht aussagen

Lösungen zu Aufgabe 1.2

a) $\neg A \wedge \neg B$

b) $A \wedge B$

c) $\neg A \vee (A \wedge B)$

d) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

e) $A \wedge \neg B$

f) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Lösungen zu Aufgabe 1.3

a)
   i) „Der Akku ist nicht voll."
   ii) „Die Studentin wohnt nicht in Münster oder sie fährt nicht mit dem Zug nach Steinfurt."
   iii) „Es gibt keinen Bademeister, der nicht schwimmen kann."
   „Alle Bademeister können schwimmen."
   iv) „Die Studierenden studieren nicht Elektrotechnik und nicht Informatik."
   „Die Studierenden studieren weder Elektrotechnik noch Informatik."
   v) „Der Strauß kann fliegen oder er kann nicht schnell rennen."

Lösungen zu Aufgabe 1.4

a) $B \Rightarrow A$
$\neg A \Rightarrow \neg B$

b)
   i) „$m = 3$ oder $m = -3$"
   ii) z.B. „$m < 17$"
   iii) z.B. „$m = -3$"
   iv) z.B. „$m = 17$"

Lösungen zu Aufgabe 1.5

a) Ja.

b) Frau Krause ist die Notarin, Frau Lehman die Ärztin, Frau Meier die Lehrerin und Frau Schulze die Ingenieurin.

c) Der Norweger trinkt Wasser, und dem Japaner gehört das Zebra.

d) Mit der Frage an eine der beiden Wächterinnen: „Auf welchen Weg würde mich die andere Wächterin schicken, wenn ich sie nach dem Weg in die Wüste fragen würde?"

Lösungen zu Aufgabe 1.6

a) die Münze mit der Zahl 5 und die Münze mit dem Konterfei von Emmy Noether

Lösungen zu Aufgabe 1.9

a) $A = \{2, 4, 8\}$ b) $A = \{3, 9, 27, 81\}$ c) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ d) $A = \{2, 8\}$

Lösungen zu Aufgabe 1.10

a) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$

b) $B = \{x \mid x$ ist Primzahl und $x \le 35\}$

c) $B = \{x \mid x = 2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n < 6\}$

d) $B = \{x \mid x = 7n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n < 6\}$

Lösungen zu Aufgabe 1.12

a) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$

b) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}\}$

c) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

d) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\diamond\}, \{\circ\}, \{\triangleleft\}, \{\diamond, \circ\}, \{\diamond, \triangleleft\}, \{\circ, \triangleleft\}, \{\diamond, \circ, \triangleleft\}\}$

e) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\heartsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\spadesuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\},$
$\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit\}, \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}\}$

Lösungen zu Aufgabe 1.13

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = \mathbb{R}^{<0}$ d) B

Lösungen zu Aufgabe 1.15

a) A b) A c) $\emptyset$ d) A e) $\emptyset$

f) A g) $\emptyset$ h) $A \cap B$ i) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Lösung zu Aufgabe 1.16

$S = T_4\backslash(T_{100}\backslash T_{400}) = T_{400} \cup (T_4 \cap \overline{T_{100}})$

Lösung zu Aufgabe 1.17

Höchstens 55 Menschen sind Mitglieder in allen drei Vereinen.

Lösungen zu Aufgabe 1.18

a) $\forall\, x{\in}M \quad A$
Verneinung: $\exists\, x{\in}M \quad \neg A$

b) $\exists\, x{\in}M \quad A$
Verneinung: $\forall\, x{\in}M \quad \neg A$

c) $\forall\, x{\in}U \quad \exists\, y{\in}V \quad y = x + 10$
Verneinung: $\exists\, x{\in}U \quad \forall\, y{\in}V \quad y \ne x + 10$

d) $\forall\, z{\in}W \quad \exists\, x{\in}U, y{\in}V \quad z \le x + y \le z + 5$
Verneinung: $\exists\, z{\in}W \quad \forall\, x{\in}U, y{\in}V \quad z > x + y \lor x + y > z + 5$

Lösungen zu Aufgabe 1.19

a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$

f) $\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$ g) $\mathbb{Z}$ h) $\{0\}$ i) $\emptyset$

Lösungen zu Aufgabe 1.21

a) i) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
   ii) Äquivalenzrelation
   iii) nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht transitiv
   iv) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
   v) reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
   vi) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv
   vii) Äquivalenzrelation
   viii) nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv
   ix) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
   x) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv
   xi) Äquivalenzrelation
   xii) nicht reflexiv, symmetrisch, nicht transitiv
   xiii) Äquivalenzrelation
   xiv) nicht reflexiv, symmetrisch, transitiv
   xv) reflexiv, nicht symmetrisch, transitiv

Lösungen zu Aufgabe 1.22

a) 2^{n^2}

b) 2^{n^2-n}
$50\,\%;\ 25\,\%;\ 12{,}5\,\%;\ 6{,}25\,\%\ (n = 1; 2; 3; 4)$
$\sim 8 \cdot 10^{-29}\,\%\ (n = 100)$

c) $2^{n(n+1)/2}$
$100\,\%;\ 50\,\%;\ 12{,}5\,\%;\ 1{,}5625\,\%\ (n = 1; 2; 3; 4)$
$\sim 8 \cdot 10^{-1.489}\,\%\ (n = 100)$

Lösungen zu Aufgabe 1.23

b) $[0]_R = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\}$
$[1]_R = \{\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\}$
$[2]_R = \{\ldots, -12, -5, 2, 9, 16, \ldots\}$
$[3]_R = \{\ldots, -11, -4, 3, 10, 17 \ldots\}$
$[4]_R = \{\ldots, -10, -3, 4, 11, 18, \ldots\}$
$[5]_R = \{\ldots, -9, -2, 5, 12, 19, \ldots\}$
$[6]_R = \{\ldots, -8, -1, 6, 13, 20, \ldots\}$

c) $[0]_R = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$
$[1]_R = \{\ldots, -10, -8, -7, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots\} = \mathbb{Z} \setminus [0]_R$

d) $[a]_R = \{\ldots, a-2, a-1, a, a+1, a+2, \ldots\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + k,\ k \in \mathbb{Z}\} =: a + \mathbb{Z}$ für $a \in [0, 1[$

e) R ist Äquivalenzrelation auf $M = \{-17, -4, 4, 17\}$.
$[4]_R = \{-4, 4\}$, $[17]_R = \{-17, 17\}$

Lösungen zu Aufgabe 1.24

a) i) $X/{\sim} = \{g_b \mid b \in \mathbb{R}\}$ mit $g_b = \big[(0, b)\big]_\sim = \big\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q = p + b\big\}$,
die Menge aller zur Hauptdiagonale parallelen Geraden im $\mathbb{R}^2$

ii) $X/\!\sim\, = \{k_r \mid r \geq 0\}$ mit $k_r = \big[(r,0)\big]_\sim = \big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{p^2+q^2} = r\big\}$,
die Menge aller Kreise im $\mathbb{R}^2$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt

iii) $X/\!\sim\, = \{s_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \pi\}$ mit $s_\alpha = \big[(\cos\alpha, \sin\alpha)\big]_\sim = \big\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \mid p \cdot \sin\alpha = q \cdot \cos\alpha\big\}$,
die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Ursprung, jeweils ohne den Ursprung selbst

Bei iii) darf X nicht den Ursprung $(0,0)$ von $\mathbb{R}^2$ enthalten, weil die Relation sonst nicht transitiv wäre.

Lösungen zu Aufgabe 1.25

a) $R = \text{graph}(f)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

b) kein Graph

c) kein Graph

d) kein Graph

e) kein Graph

f) $R = \text{graph}(f)$ mit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$

Lösungen zu Aufgabe 1.27

a) nicht surjektiv, injektiv

b) nicht surjektiv, nicht injektiv

c) bijektiv

d) bijektiv

e) surjektiv, nicht injektiv

f) nicht surjektiv, injektiv

g) nicht surjektiv, nicht injektiv

h) bijektiv

Lösungen zu Aufgabe 1.29

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$, bijektiv, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$

b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \left\{ \begin{array}{ll} \{1\} & \text{für} \quad n = 0 \\ \mathbb{R}^{\geq 0} & \text{für} \quad n > 0 \end{array} \right\}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

c) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$, bijektiv, $f^{-1}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[2n+1]{y} & \text{für} \quad y \geq 0 \\ -\sqrt[2n+1]{-y} & \text{für} \quad y < 0 \end{array} \right\}$

d) $D_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, injektiv, nicht surjektiv,
mit der Zielmenge $N = W_f$ bijektiv, dann $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y^2$

e) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f =]0,1]$, nicht injektiv, nicht surjektiv

f) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

g) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$, $W_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, injektiv, nicht surjektiv,
mit der Zielmenge $N = W_f$ bijektiv, dann $f^{-1}(y) = \dfrac{2-3y}{1+y}$

h) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f =]-1,1[$, injektiv, nicht surjektiv,
mit der Zielmenge $N = W_f$ bijektiv, dann $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

i) $D_f = \mathbb{R}\backslash]2,4[$, $W_f = \mathbb{R}^{\geq 0}$, nicht injektiv, nicht surjektiv

Lösungen zu Aufgabe 1.31

a) $g \circ f$ existiert nicht; $f \circ g : [-1,1] \to [-1,4],\ x \mapsto 5\sqrt{1-x^2} - 1$

b) $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ x \mapsto \dfrac{7x-23}{2}$; $f \circ g$ existiert nicht

c) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ x \mapsto |x^3|$; $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^3$

Lösungen zu Aufgabe 1.33

a) i) z.B. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = 42 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f\colon \mathbb{N} \to \{7\},\ n \mapsto f(n) = 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) z.B. $f\colon \{\checkmark\} \to \{\oplus, \ominus, \odot, \oslash, \otimes, \circledast, \circledcirc\},\ \checkmark \mapsto f(\checkmark) = \circledast$

2 Reelle Zahlen

Lösungen zu Aufgabe 2.2

a) $\{2\}$	b) $\{-3, -\frac{1}{3}\}$	c) $\mathbb{R}\backslash[-2,3]$	d) $]1,3[\, = U_1(2)$	e) $[1,3]$
f) $]1,3[\, = U_1(2)$	g) $]-1,4[$	h) $\mathbb{R}$	i) $]-6,-4[\, \cup\,]4,6[$	

Lösungen zu Aufgabe 2.4

a) $\sup A = 1$, kein Maximum, $\inf A = \min A = 0$

b) $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = 1$, kein Minimum

c) $\sup A = \max A = 2$, $\inf A = \min A = -\frac{3}{2}$

d) $\sup A = 1$, kein Maximum, $\inf A = -1$, kein Minimum

e) kein Supremum, $\inf A = -1$, kein Minimum

f) $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$, $\inf A = \min A = 2$

g) $\sup A = 3$, kein Maximum, kein Infimum

h) $\sup A = \frac{1}{4}$, kein Maximum, $\inf A = \min A = -\frac{7}{2}$

Lösungen zu Aufgabe 2.5

a) $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$

b) $f(n) = 2n$

c) $f(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n-1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{array} \right\}$

d) $f = g^{-1}$, mit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$ oder $g(m,n) = m + \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)$, vgl. Aufgabe 1.27 c) und d)

Lösung zu Aufgabe 2.10

c) $n(n-3)/2$

3 Folgen und Reihen

Lösungen zu Aufgabe 3.1

a) $a_n = \dfrac{2n-1}{(n+1)^2}$, streng monoton fallend ab $n = 2$, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{3}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$, kein Minimum

b) $a_n = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{n+1}{2} & \text{für} & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{für} & n \text{ gerade} \end{array} \right\},$
nicht monoton, nach oben beschränkt, nach unten unbeschränkt, alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}$, kein Infimum

c) $a_n = 5^{(1-\frac{1}{2^n})}$ oder $a_1 = \sqrt{5},\ a_{n+1} = \sqrt{5a_n}$, streng monoton wachsend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 5$, kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \sqrt{5}$

d) $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ oder $a_1 = \frac{1}{5},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$, streng monoton fallend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{5}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$, kein Minimum

e) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt,
nicht alternierend, kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}$

f) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$

g) $a_n = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ oder $a_1 = \frac{1}{5},\ a_{n+1} = a_n + 2\frac{1}{10^{n+1}}$, streng monoton wachsend, beschränkt,
nicht alternierend, $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{2}{9}$, kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{5}$

h) $a_n = \frac{1}{n!}$ oder $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, streng monoton fallend, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$, kein Minimum

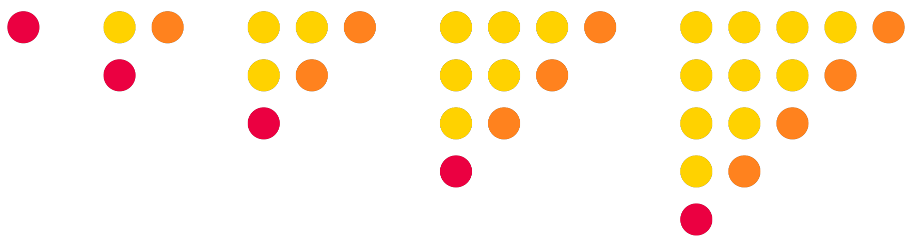
i) $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$, streng monoton wachsend, beschränkt, nicht alternierend, $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{3}{2}$,
kein Maximum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{2}{3}$

j) $a_n = \sqrt{3n+1}$, streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt,
nicht alternierend, kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 2$

k) $a_n = \left\{ \begin{array}{lll} -1 & \text{für} & n \text{ durch 3 teilbar} \\ 1 & \text{für} & n \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{array} \right\}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -1$

l) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ oder $a_1 = -\frac{1}{2},\ a_{n+1} = -\frac{n}{n+2}a_n$, nicht monoton, beschränkt, alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{6}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = -\frac{1}{2}$

m) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ oder $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n + 1$, streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt,
nach unten beschränkt, nicht alternierend, kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$
Hinweis: Bei den Gliedern dieser Folge handelt es sich um die *Dreieckszahlen*. Sie entsprechen jeweils einer Anzahl an Steinen, die man zum Legen eines gleichseitigen Dreiecks benötigt.



n) $a_n = n^2$ oder $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, streng monoton wachsend, nach oben unbeschränkt,
nach unten beschränkt, nicht alternierend, kein Supremum, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$
Hinweis: Bei den Gliedern dieser Folge handelt es sich um die *Quadratzahlen*. Sie entsprechen jeweils einer Anzahl an Steinen, die man zum Legen eines Quadrates benötigt.

o) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 2$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$

p) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, nicht monoton, beschränkt, nicht alternierend,
$\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \max\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \frac{3}{2}$, $\inf\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \min\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1$

Lösungen zu Aufgabe 3.3

a) $a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

b) existiert nicht

c) existiert nicht

d) existiert nicht

e) $a_n = -n \quad (n \in \mathbb{N})$

f) $a_n = -n + (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

g) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n} - (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

h) $a_n = n + (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

i) $a_n = (-1)^n n \quad (n \in \mathbb{N})$

j) $a_n = \left\{ \begin{array}{lll} -n & \text{für} & n \text{ durch 3 teilbar} \\ n & \text{für} & n \text{ nicht durch 3 teilbar} \end{array} \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$

Lösungen zu Aufgabe 3.8

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) divergent

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

e) divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

f) divergent

g) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{9}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}$

j) divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

k) divergent

l) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

m) divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

n) divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

o) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, vgl. Aufgabe 3.7 b)

p) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

Lösungen zu Aufgabe 3.9

a) 0	b) 2	c) 2	d) 0	e) $\dfrac{3}{2}$	f) 2	g) ∞ (uneigentlicher Grenzwert)
h) $\dfrac{9}{16}$	i) 1	j) $\dfrac{4}{3}$	k) 3	l) $\dfrac{1}{2}$	m) $\frac{1}{2}$	n) 0
o) 1	p) $\frac{1}{3}$	q) 0	r) $\frac{1}{2}$	s) e	t) 1	u) 0

Lösungen zu Aufgabe 3.10

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) -1 e) 1 f) 1

Lösungen zu Aufgabe 3.13

a) ∞ (uneigentlicher Grenzwert) b) $\frac{9}{5}$

Lösungen zu Aufgabe 3.14

a) divergent	b) konvergent	c) divergent	d) konvergent	e) konvergent
f) divergent	g) konvergent	h) divergent	i) konvergent	j) konvergent
k) konvergent	l) divergent	m) divergent	n) konvergent	o) divergent

Lösung zu Aufgabe 3.16

a) ii) z.B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Lösungen zu Aufgabe 3.17

b) Die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist bedingt konvergent, weil sie zwar gemäß Leibniz-Kriterium konvergent, aber wegen der Divergenz der harmonischen Reihe nicht absolut konvergent ist. Weitere Beispiele für bedingt konvergente Reihen sind u.a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$.

c) $$\varphi(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} & \text{für } n = 3k+1 \\ \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} & \text{für } n = 3k+2 \\ \frac{4}{3}n & \text{für } n = 3k+3 \end{array} \right\}$$

4 Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$

Lösungen zu Aufgabe 4.4

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) -2 d) 0 e) ∞ (uneigentlicher Grenzwert) f) 0 g) 3 h) -2

i) ± 1 j) ± 1 k) $\frac{1}{2}$ l) 0 m) $\frac{8}{7}$ n) 1 o) 2

Lösungen zu Aufgabe 4.5

a) 245 b) 0 c) 6 d) 4 e) $3a^2$ g) $\frac{1}{3}$ h) 6 i) n j) -1 k) $\frac{1}{2}$ l) $\frac{4}{5}$

f) Grenzwert existiert nicht, $\lim\limits_{x\uparrow 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{11}{8-x^3}\right)=\infty$ (uneigentlicher Grenzwert),

$\lim\limits_{x\downarrow 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{11}{8-x^3}\right)=-\infty$ (uneigentlicher Grenzwert)

Lösungen zu Aufgabe 4.6

a) 0 b) 0 c) 1 d) ∞ e) 1 f) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{1}{2}$ h) e^{α}

i) e^2 j) e k) 0 l) 0 m) 0 n) 0 o) 0 p) 1

Hinweis zu l): Dies besagt, dass die Logarithmusfunktion „langsamer“ wächst als jede Potenz.
Hinweis zu n): Dies besagt, dass die Exponentialfunktion „schneller“ wächst als jede Potenz.

Lösungen zu Aufgabe 4.7

a) $g(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{25}$ b) $g(x)=\frac{5}{3}$ c) keine Gerade als Asymptote

d) keine Gerade als Asymptote e) $g(x)=3x+1$ f) $g(x)=3x+1$

Lösungen zu Aufgabe 4.10

a) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
b) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$, stetig ergänzbar in -3
c) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
d) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, stetig ergänzbar in 2
e) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, stetig ergänzbar in 0
f) stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Lösungen zu Aufgabe 4.11

a) $a=-1$ b) $a=b=1$ c) $a=\frac{1}{4}$ d) $a=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4}$

Lösungen zu Aufgabe 4.12

a) $D_f=\mathbb{R},\ W_f=]-1,1[$ b) $D_f=[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}],\ W_f=[0,\sqrt{\ln 4}]$

c) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\},\ W_f=[0,\infty[$ d) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-e,0,e\},\ W_f=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

e) $D_f=\mathbb{R},\ W_f=]0,1]$ f) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{0\},\ W_f=]0,1[$

Lösungen zu Aufgabe 4.13

a) $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ b) $f(x)=(x+1)(2x^2+2x+2)$

c) $f(x)=(x+2)(x-3)(-1)$ d) $f(x)=(x-14)(x+14)(x^2+5)$

e) $f(x)=2x^2+4x+20$ f) $f(x)=\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(4x^2+2)$

Lösungen zu Aufgabe 4.14

a) z.B. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ b) z.B. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$

c) z.B. $f(x) = -2x^4 + 6x^2 - 6$ d) $f(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{5}{12}x^2 - 3$

Lösungen zu Aufgabe 4.15

Es sei Z das Zählerpolynom und N das Nennerpolynom von f.

a) $N^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ (d.h. N hat keine reellen Nullstellen)

b) $Z(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0$ (d.h. jede reelle Nullstelle von Z ist auch Nullstelle von N)

c) $N(0) = 0$

d) $Z(x)$ und $N(x)$ enthalten nur gerade Exponenten oder $Z(x)$ und $N(x)$ enthalten nur ungerade Exponenten.

e) $Z(x)$ enthält nur gerade und $N(x)$ nur ungerade Exponenten oder $Z(x)$ enthält nur ungerade und $N(x)$ nur gerade Exponenten.

f) $\operatorname{grad} Z \leq \operatorname{grad} N$ und jede Nullstelle von N der Vielfachheit m ist Nullstelle von Z der Vielfachheit m' mit $m' \geq m$.

g) $\operatorname{grad} Z < \operatorname{grad} N$ (d.h. f ist echt gebrochenrational)

h) $\operatorname{grad} Z = \operatorname{grad} N$

i) $\operatorname{grad} Z = \operatorname{grad} N + 1$

Lösungen zu Aufgabe 4.18

a) $\left\{\pm \arcsin \sqrt{\tfrac{1}{5}} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{\frac{\pi}{3}k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ c) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{2}k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ f) $\mathbb{R}$

g) $\{-3, 3\}$ h) $\{\frac{1}{9}\}$ i) $\{\frac{1}{7}, 7\}$

j) $\{\ln 2, \ln 3\}$ k) $\{3\}$ l) $\{e^2, e^3\}$

Lösungen zu Aufgabe 4.19

a) 1 b) x c) $\tan(x_1 + x_2)$ d) $\cot(x_1 + x_2)$ e) 1 f) 0 g) 2 h) 1

5 Komplexe Zahlen

Lösungen zu Aufgabe 5.4

a) $-1 + 2i$ b) $-\frac{1}{10} + i\frac{7}{10}$ c) $-\frac{6}{5} - i\frac{2}{5}$ d) $2\sqrt{3} + i2$ e) $1 + i$

f) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ g) 1 h) $1 - i$ i) $16 - i16$ j) $\cos 1 + i \sin 1$

Lösungen zu Aufgabe 5.5

a) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $5e^{i\pi}$ c) $5\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ d) $8e^{i\pi}$ e) $4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$

f) $2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ g) $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ h) $\frac{1}{7}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ i) $5e^{i \arctan \frac{4}{3}}$ j) $e^{-\frac{\pi}{2}}$

Lösungen zu Aufgabe 5.7

a) $\left\{\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right\}$

b) $\left\{-\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i\right\}$

c) $\left\{1 + \frac{1}{3}i\right\}$

d) $\{0, 1+i\}$

e) $\{2i, -i\}$

f) $\{3i, -2i\}$

g) $\{-3i, 1-3i\}$

h) $\{2+i, -2-i\}$

i) $\{5e^{k\frac{2\pi}{3}i} \mid k = 0, 1, 2\}$

j) $\{2e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4})i} \mid k = 0, 1, 2, 3\}$

k) $\{4e^{(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3})i} \mid k = 0, 1, 2\}$

l) $\{1, -2i, 2i\}$

m) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, i, -i\}$

n) $\{x + iy \mid y^2 = 2x + 1,\ x \geq -1/2,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

o) $\{x + iy \mid y = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\}$

p) $\left\{-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^{i\varphi} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi[\right\}$

q) $\{x + iy \mid y = x,\ x \in \mathbb{R}\}$

r) $\left\{\frac{i\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \;\middle|\; \varphi = k\frac{2\pi}{5},\ k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$

FH Münster
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Prof. Dr. Gernot Bauer

Probeklausur

Probeklausur zur Vorlesung „Mathematik I“ | FH Münster
Wintersemester 2024/25 | Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Bearbeitungsdauer: 120 Minuten | Prof. Dr. Gernot Bauer

Aufgabe 1 (Vermischtes)

a) Formulieren Sie die Negation von: „Ich weiß nicht, was los ist.“ 1

b) Geben Sie die komplexe Zahl $1+i$ in ihrer exponentiellen Darstellung an. 1

c) Geben Sie für die Wurzelfunktion das Urbild des Intervalles $]-1,1[$ an. 1

d) Geben Sie eine gegen 0 konvergente Reihe an. 1

e) Begründen Sie, warum die komplexe Konjugation eine involutorische Abbildung auf $\mathbb{C}$ ist. 1

f) Geben Sie eine Funktion an, die sowohl die Periode 3 als auch die Periode 11,25 hat. 1

g) Zeigen Sie: Für jede ungerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(0)=0$. 1

h) Berechnen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 1

Aufgabe 2 (Grundlagen)

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen A, B und C immer wahr und damit eine Tautologie ist. 3

b) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2-y^2 \text{ ist durch 5 teilbar}\big\}$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie ihre Äquivalenzklassen an. 4

Aufgabe 3 (Reelle Zahlen)

a) Zeigen Sie, dass die Menge $M = \big\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\big\}$ abzählbar unendlich ist, indem Sie eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ angeben und beweisen, dass f bijektiv ist. 3

b) Wie viele Diagonalen hat ein ebenes konvexes n-Eck ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)? Beweisen Sie Ihre Antwort mithilfe vollständiger Induktion. 3

Aufgabe 4 (Folgen und Reihen)

a) Geben Sie für die Folge $1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}},\ldots$ eine rekursive Bildungsvorschrift an. Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, anhand der rekursiven Bildungsvorschrift den Grenzwert der Folge. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Folge und der Fibonacci-Folge? 4

b) Warum ist das Quotientenkriterium ungeeignet, um zu zeigen, dass die harmonische Reihe divergiert? Zeigen Sie die Divergenz der harmonischen Reihe stattdessen anhand einer Abschätzung der n-ten Partialsumme. 3

Aufgabe 5 (Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$)

a) Berechnen Sie: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\frac{1}{2}x}$ 3

b) Untersuchen Sie die Funktion f, $x \mapsto f(x) = \dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$, auf ihrem größtmöglichen Definitionsbereich auf Stetigkeit. An welchen Unstetigkeitsstellen ist f stetig ergänzbar? 4

Aufgabe 6 (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\operatorname{Re} z \geq \big|z-2-3i\big|$$

für $z \in \mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese Menge in der Gaußschen Zahlenebene. 4