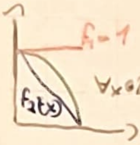
Inhalt KW 23

8.3 b)

$\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \le \frac{\pi}{2}$ · ohne Flächenbetrachtung ohne explizites integrieren des Integrals

· durch Abschätzen des Integranden

$\Rightarrow$ Monotonie des Integrals (M.d.I.)



$\forall x \in \mathbb{R} \ \cos x \le 1$

M.d.I. $\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \le \int_0^{\pi/2} 1 \, dx$ und $\int_0^{\pi/2} 1 \, dx = 1 \cdot (\frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$

gesucht: $f_2(x)$

mit $\cos x \ge f_2(x) \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos x \ge f_2(x)$ (s. Skizze)

$f_2(x) = mx + b = -\frac{2}{\pi}x + 1 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \ge \int_0^{\pi/2} f_2(x) \, dx$

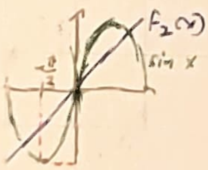
↳ Krümmung ist auch ein gutes Argument

und $\int_0^{\pi/2} -\frac{2}{\pi}x + 1 \, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x + 1 \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2}((\frac{\pi}{2})^2 - 0) + \frac{\pi}{2}$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ also insgesamt: $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \le \frac{\pi}{2}$

$e^x \ge e^{x^2} \Rightarrow e - 1 \le \frac{1}{2}(e+1) \Leftrightarrow 2e - 2 \le e + 1 \Leftrightarrow e \le 3$ ✓

↳ e einsetzen oder umformen → Lösung von Kommilitonen



$-\frac{\pi}{2} \le \int_{-\pi/2}^{0} \sin x \, dx \le -\frac{\pi}{4}$, $\sin x \ge -1$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$

$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$e^{x^2} = \sum \frac{x^{2n}}{n!} = \dots = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$

Probeklausur: $\sim = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \int_a^b f(x)dx = 0\}$ f stetig auf $\mathbb{R}$

Äquivalenzrelation?:

i) reflexiv: $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii) symmetrisch: $\int_b^a f(x)dx = 0 = -\int_b^a f(x)dx$

iii) transitiv: $\int_a^b = 0, \int_b^c = 0 \Rightarrow \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c = 0$

} so nicht ordentlich!

sei $f(x) = 1 - x^2$ $[0], [2]$

$[0] = \{b \mid \int f(x)dx = 0\} = \{0, \sqrt{3} (\pm y)\}$

$\int_0^b 1 - x^2 dx = x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^b \overset{!}{=} 0$

$[2] = \{a \mid \int f(x)dx = 0\}$

Substitution (Umkehrung Kettenregel)

partielle Integration (Umkehrung Produktregel)

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

durch Integration folgt

$\boxed{\int u' v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx}$ → mehrmals anwendbar

8.5

→ wenn das hintere Integral schwieriger ist, einfach nochmal anders herum die einfachere Funktion aufleiten und die schwierigere ableiten.

↳ Kombination teils aus mehreren Regeln nötig

1) $\int \sin(\ln x)\,dx$

$= \int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\sin}(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\cos}(\ln x)\,dx$

$= x \cdot \sin(\ln x) - \left(x \cdot \cos(\ln x) - \int x \left(-\frac{1}{x}\right) \sin(\ln x)\,dx\right) \quad | + \int \sin(\ln x)\,dx$

$\Leftrightarrow 2\int \sin(\ln x)\,dx = x \cdot \sin(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) \quad | :2$

$\Leftrightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2} x \cdot \sin(\ln x) - \frac{1}{2} x \cdot \cos(\ln x) + c$ → c nicht vergessen sobald Integrale weg sind!