## 1. Schritt

...

$$f(x) = \underbrace{2x+3}_{P(x)} + \underbrace{\frac{8x^2-8x-7\ \}\,Z(x)}{x^3-3x^2+4\ \}\,N(x)}}_{R(x)}$$

## 2. Schritt

Zerlege $R(x)$ in eine Summe von Partialbrüchen.

a) Zerlege $N(x)$ in Linearfaktoren und bestimme die Nullstellen von $N(x)$ und ihre Vielfachheiten.

$N(x) = x^3-3x^2+4$, $N(-1)=0$ (durch probieren)

$$\begin{aligned}
&x^3-3x^2+4 : x+1 = x^2-4x+4 \Rightarrow N(x) = \underbrace{(x+1)}_{\substack{\text{Linearfaktor}\\ \text{zur Nullstelle}\\ -1}}{}^{①}\underbrace{(x-2)}_{\substack{\text{Linearfaktor}\\ \text{zur Nullstelle}\\ 2}}{}^{②} \quad \text{Vielfachheiten}\\
&\underline{-(x^3+x^2)} \qquad\qquad\qquad = (x-2)^2\\
&\quad -4x^2+4\\
&\quad \underline{-(-4x^2-4x)}\\
&\qquad\quad 4x+4\\
&\qquad\quad \underline{-(4x+4)}\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

b) Ordne jeder Nullstelle $x_i$ von $N(x)$ mit zugehöriger Vielfachheit $m_i$ Partialbrüche $\frac{A_{i1}}{(x-x_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{im_i}}{(x-x_i)^{m_i}}$ zu und schreibe $R(x)$ als Summe aller dieser Partialbrüche. Die Konstanten $A_{ij}$ sind zunächst unbekannt.

$$\frac{8x^2-8x^2-7}{x^3-3x^2+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

c) Bringe alle Brüche auf einen Hauptnenner und bestimme die Konstanten durch Einsetzen geeigneter x-Werte.

$8x^2-8x-7 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x+1)$

$x=-1 \Rightarrow 9=9A \Rightarrow A=1$

$x=2 \Rightarrow 9=3C \Rightarrow C=3$

$x=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B=7$

$$\frac{8x^2-8x-7}{x^3-3x^2+4} = \frac{1}{x+1} + \frac{7}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$$

## 3. Schritt

Integriere die ganzrationale Funktion $P(x)$ und alle Partialbrüche.

$$\int \frac{2x^4+3x^3-x^2+5}{x^3-3x^2+4}\,dx = \int (2x+3)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{7}{x+2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)^2}\,dx = x^2+3x + \ln(|x+1|) + 7\ln(|x-2|) - \frac{3}{x-2} + C$$

## 8.4 Uneigentliche Integrale

Mit welcher Geschwindigkeit $v_0$ muss man einen Ball hochwerfen, damit er die Höhe $h=3m$ erreicht? Formel aus der Physik: $v_0(h) = \sqrt{2GM\int_{h_0}^{h} \frac{1}{r^2}\,dr}$.

Ist es möglich, den Ball so schnell hochzuwerfen, dass er in die unendliche Weite des Weltalls entschwindet? Das würde bedeuten: $h=\infty$!

$v_0(h) = \ldots = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{h_0}-\frac{1}{h}\right)}$ Fluchtgeschwindigkeit:

$v_{Flucht} = \lim_{h\to\infty} v_0(h) = \sqrt{\frac{2GM}{h_0}} \approx 40.000 km/h$ Beobachtung: Der Grenzwert existiert, daher ist es sinnvoll, zu schreiben:

$v_{Flucht} = \sqrt{2GM\int_{h_0}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,dr}$.

## 8.4.1 Unbeschränkter Integrationsbereich

### Definition

f sei über jedes Intervall $[a,t]$ mit $a\in\mathbb{R}$ fest, $t>a$, integrierbar. Existiert der Grenzwert $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx =: I$. So nennt man I das uneigentliche Integral von f über $[a,\infty[$.