4.5) Grenzwerte für $x \to x_0$.

a) $\lim\limits_{x \to 7} 5x^2 \Rightarrow 5 \cdot 7^2 = 5 \cdot 49 = 245$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1-1}{1+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+6x+9-9}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x+6 \Rightarrow 6$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim\limits_{x \to 4} 2+\sqrt{x} \Rightarrow 4$

e) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} x^2+ax+a^2 \Rightarrow 3a^2$ $\quad (x-a)(x^2+ax+a^2) = x^3+ax^2+a^2x-ax^2-a^2x-a^3$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{11}{8-x^3}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{2+2x+x^2-11}{8-x^3}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-3+2x+x^2}{8-x^3} \Rightarrow \lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{-3+2x+x^2}{8-x^3} = \infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{-3+2x+x^2}{8-x^3} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x-3}{x-5} \Rightarrow \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x^3-x^2-x-1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x^2+2x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} 3x^2+2x+1 \Rightarrow 6$

$3x^4-4x^3+1 : x-1 = 3x^3-x^2-x-1$

$-(3x^4-3x^3)$

$-x^3+1$

$-(-x^3+x^2)$

$-x^2+1$

$-(-x^2+x)$

$-x+1$

$-(-x+1)$

0

$3x^3-x^2-x-1 : x-1 = 3x^2+2x+1$

$-(3x^3-3x^2)$

$2x^2-x-1$

$-(2x^2-2x)$

$x-1$

$-(x-1)$

0

i) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1-x^3-3(1-x)}{(1-x)(1-x^3)}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-3-x^3+3x}{1-x^3-x+x^4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(-x^2-x+2)}{(x-1)(x^3-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)}$

$-x^3+3x-2 : x-1 = -x^2-x+2$

$-(-x^3+x^2)$

$-x^2+3x-2$

$-(-x^2+x)$

$2x-2$

$-(2x-2)$

$x^4-x^3-x+1 : x-1 = x^3-1$

$-(x^4-x^3)$

$-x+1$

$-(-x+1)$

0

$-x^2-x+2 : x-1 = -x$

$-(-x^2+x)$

Polynomdivision ist Scheiße

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \Rightarrow \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^3-3x^4}{5x^3-3x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{4-3x}{5-3x^2} \Rightarrow \frac{4}{5}$