N1.1.5) Von Nitzsche:

a) Analytische Formulierung der Zeitfunktion $u(\omega_1 t) = \hat{u}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi} - 1\right)$

$u(\omega_1 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$ mit $\underline{c}_n = \frac{1}{T_1} \int u(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t}\, dt$

Substitution der Integrationsvariablen $dt = \frac{1}{\omega_1}\, d\omega_1 t = \frac{T_1}{2\pi}\, d\omega_1 t$

Damit folgt: $\underline{c}_n = \frac{1}{T_1} \int_{(2\pi)} \hat{u}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi} - 1\right) e^{-jn\omega_1 t} \frac{T_1}{2\pi}\, d\omega_1 t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi} - 1\right) e^{-jn\omega_1 t}\, d\omega_1 t$$

$$= \frac{\hat{u}}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} (\omega_1 t - \pi)\, e^{-jn\omega_1 t}\, d\omega_1 t$$

$$\underline{c}_n = \frac{\hat{u}}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \omega_1 t \cdot e^{-jn\omega_1 t} - \pi \cdot e^{-jn\omega_1 t}\, d\omega_1 t = \frac{\hat{u}}{2\pi^2}\left[\frac{-jn\omega_1 t - 1}{(jn)^2} e^{-jn\omega_1 t} - \frac{\pi}{-jn} e^{-jn\omega_1 t}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\hat{u}}{2\pi^2}\left[\left(\frac{1 + jn\omega_1 t}{n^2} - j\frac{\pi}{n}\right) \cdot e^{-jn\omega_1 t}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\hat{u}}{2\pi^2}\left(\left(\frac{1 + jn2\pi}{n^2} - j\frac{\pi}{n}\right) \cdot e^{-jn2\pi} - \left(\frac{1 + jn0}{n^2} - j\frac{\pi}{n}\right) \cdot \underbrace{e^{-jn0}}_{1}\right)$$

$$= \frac{\hat{u}}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}\left(e^{-jn2\pi} - 1\right) + j\frac{\pi}{n}\left(e^{-jn2\pi} + 1\right)\right)$$

Fallunterscheidung

1. $n = 0$: $\underline{c}_0 = \lim_{n \to 0}\left(\frac{\hat{u}}{2\pi^2} \frac{e^{-jn2\pi} - 1 + jn\pi\left(e^{-jn2\pi} + 1\right)}{n^2}\right)$

L'Hospital

$$\underline{c}_n = \lim_{n \to 0}\left(\frac{\hat{u}}{2\pi} \frac{(-j2\pi)\, e^{-j2\pi} \cdot 0 + j\pi\left(e^{-jn2\pi} + 1\right) + jn\pi\left((-j2\pi) \cdot e^{-jn2\pi}\right)}{2\pi}\right)$$

$$= \lim_{n \to 0}\left(\frac{\hat{u}}{2\pi} \frac{-j2\pi + j\pi(1+1) + 0(\ldots)}{0}\right) = \frac{0}{0}$$

L'Hospital

$$\underline{c}_0 = \lim_{n \to 0}\left(\;\right) = \frac{0}{2} = 0$$

2. $n \neq 0$, d.h. gerade oder ungerade, weil $e^{jn2\pi} = e^{-jn2\pi} = 1$ gilt

$$\underline{c}_n = \frac{\hat{u}}{2\pi^2} \frac{1 - 1 + jn\pi(1+1)}{n^2} = \frac{j\hat{u}}{\pi n}$$

Die gewählte Darstellung heißt $u(\omega_1 t) = \sum_{n \neq 0} \frac{j\hat{u}}{\pi n} e^{jn\omega_1 t}$