

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

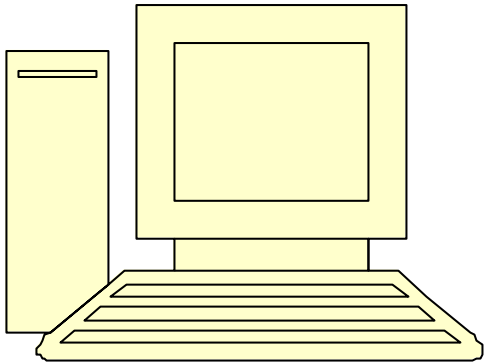
Факультет специальных технологий  
Кафедра «Физика»



# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ

## ЧАСТЬ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Учебное пособие и методические указания по выполнению лабораторных работ  
для студентов очной формы обучения

	<p>Студент _____</p> <p>Группа _____</p> <p>Факультет _____</p> <p>Преподаватель _____</p>
---	--

УДК: 537.7 (075.5)

Лабораторные работы по физике. Часть I. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Учебное пособие и методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов очной формы обучения. / Разработали и составили: Андрухова О.В., Гурова Н.М., Жуковская Т.М., Кирста Ю.Б., Кустов С.Л., Науман Л.В., Пацева Ю.В., Романенко В.В., Старостенкова Н.А., Черных Е.В. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ. – 2018. – 47 с.

Изложены основные понятия и законы механики, молекулярной физики и термодинамики. Приведены указания по выполнению лабораторных работ. Для студентов, проходящих лабораторный практикум по курсу физики.

Рассмотрена и одобрена на заседании кафедры  
«Физика». Протокол № 6 от 28 января 2016 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.</b>	Обработка результатов измерений. Правила округления. Запись результата измерений с учетом погрешности. Графическое представление результатов эксперимента. Описание штангенциркуля.	<b>4</b>
<b>Лабораторная работа № 1.</b>	Изучение законов поступательного движения тел с помощью машины Атвуда .....	<b>14</b>
<b>Лабораторная работа № 2.</b>	Изучение законов вращательного движения с помощью маятника Обербека .....	<b>19</b>
<b>Лабораторная работа № 3.</b>	Проверка справедливости теоремы Гюйгенса - Штейнера с помощью физического маятника .....	<b>24</b>
<b>Лабораторная работа № 4.</b>	Определение момента инерции маятника Максвелла .....	<b>29</b>
<b>Лабораторная работа № 5.</b>	Определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса .....	<b>33</b>
<b>Лабораторная работа № 6.</b>	Определение средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха .....	<b>38</b>
<b>Лабораторная работа № 7.</b>	Определение отношения теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и объеме методом Клемана и Дезорма ..	<b>41</b>
<b>Лабораторная работа № 8.</b>	Определение приращения энтропии при плавлении олова .....	<b>44</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

**Основная задача физического эксперимента** – измерение **физических величин**  $X$  для дальнейшего их анализа и установления взаимосвязей между ними – физических законов.

**Измерение**  $X$  – это процесс определения значения физической величины с помощью технических средств измерений (измерительных устройств). Результаты измерения физических величин всегда являются не абсолютно точными, а приближенными. Точность измерения зависит от чувствительности приборов и восприимчивости органов чувств экспериментатора.

**Абсолютной погрешностью** измерения  $\Delta X$  называют модуль разности между измеренным значением  $X$  и ее истинным значением  $X_{ист}$

$$\Delta X = |X - X_{ист}|.$$

Истинное значение  $X_{ист}$ , вообще говоря, неизвестно. За истинное значение величины  $X$  принимают ее среднее значение  $X_{cp}$ . Для этого проводят несколько измерений  $X_1, X_2, \dots, X_n$  и рассчитывают  $X_{cp}$  как

$$X_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

где  $n$  – число измерений.

Чем больше проведено измерений  $X_i$ , тем больше вероятность того, что ошибки разных знаков компенсируют друг друга, и тем ближе будет  $X_{cp}$  к истинному значению  $X_{ист}$ .

Абсолютная погрешность измерения определяет количественное отклонение измеряемой величины от истинного значения. Однако она не всегда оказывается наглядной. Допустим, что  $\Delta X = 5$  см. Много это или мало? Если измеряется длина  $X$  подошвы обуви, то это много. Если  $X$  – длина комнаты, то это мало. Если же  $X$  – расстояние между автобусными остановками, то это ничтожно мало.

Критерием качества проводимых измерений является отношение абсолютной погрешности измеряемой величины  $\Delta X$  к её среднему значению  $X_{cp}$ , так называемая **относительная погрешность**

$$\epsilon_x = \frac{\Delta X}{X_{cp}},$$

которую можно выразить в процентах, умножив на 100%. Относительная ошибка, указанная в процентах, **округляется до целого числа**.

Измерения любых величин делятся на два вида: **прямые и косвенные**.

1) При **прямых измерениях** искомая физическая величина  $X$  считывается непосредственно со шкалы прибора, предназначенного для измерения. Так, массу тела можно измерить с помощью весов, длину – с помощью линейки и т. д.

2) При **косвенных измерениях** искомая величина  $Y$  не измеряется, а вычисляется по формуле с использованием величин прямых измерений  $X_i$ , входящих в расчетную формулу. Например, определение скорости тела по пройденному пути, измеренному линейкой, и времени, определенному по часам; или определение плотности тела по массе, измеренной на весах, и объему тела, определенному с помощью мензурки с водой.

Остановимся подробнее на методах расчета погрешностей (ошибок) при проведении прямых и косвенных измерений.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Различают две основных группы погрешностей: **систематические и случайные**. В этой классификации **не учитываются грубые ошибки (промахи)**, вызванные невнимательностью при снятии показаний со шкалы измерительных приборов, неправильной записью этих данных, а также просто неумением экспериментатора. Такие ошибки не подчиняются никакому закону.

**Систематические погрешности** – появляются систематически при повторных измерениях одним и тем же прибором. Возникают они чаще всего ввиду неточности измерительных приборов или самого метода измерений и остаются постоянными при повторных измерениях одной и той же величины. Например, длина линейки в действительности может отличаться от того значения, которое написано на ней. Тем не менее, прибор считается исправным, если его показания отличаются от истинного значения не более чем на величину абсолютной систематической погрешности. **Абсолютная систематическая погрешность имеет размерность измеряемой величины.**

Абсолютную систематическую погрешность прибора (инструментальную погрешность) можно определить тремя способами:

- а) по классу точности прибора;**
- б) по прибору, как числу с наименованием единиц измерений;**
- в) по цене наименьшего деления шкалы прибора.**

**а) Определение абсолютной систематической ошибки  $\Delta X_{\text{сист}}$  по классу точности прибора.** Этот способ применяется, если класс точности прибора известен заранее. Например, для электроизмерительных приборов: **вольтметра и амперметра**. **Класс точности  $E_x$**  прибора указан на шкале прибора (обычно нижний левый угол) как число в десятичном формате. Систематическая ошибка определяется по формуле:

$$\Delta X_{\text{сист}} = \frac{E_x \cdot X_{\text{пред}}}{100\%},$$

где  $X_{\text{пред}}$  – предельное значение шкалы прибора.

Например, класс точности амперметра равен **1,5**, а наибольший ток, который можно измерить этим амперметром при конкретном режиме настройки, составляет **5 А**. Тогда систематическая погрешность

$$\Delta I_{\text{сист}} = \frac{1,5\% \cdot 5\text{А}}{100\%} = 0,075\text{А}.$$

**б) Определение абсолютной систематической ошибки  $\Delta X_{\text{сист}}$  как числа с наименованием единиц измерений.** Применяется для точных измерительных приборов, имеющих шкалу нониуса или микрометрическую шкалу (**штангенциркуль, микрометр**). В этом случае цена деления шкалы нониуса (микрометрической шкалы) указывается непосредственно на корпусе прибора **как число с наименованием единиц измерения** (в некоторых случаях указывается безразмерная величина в десятичном формате). Абсолютная систематическая погрешность такого измерительного прибора равна **наименьшему делению шкалы нониуса** (микрометрической шкалы). Например, цена деления шкалы нониуса штангенциркуля **0,1 мм**, абсолютная систематическая погрешность штангенциркуля равна **0,1 мм**.

**в) Определение абсолютной систематической ошибки  $\Delta X_{\text{сист}}$  по цене наименьшего деления шкалы прибора.** Для приборов, показания которых изменяются плавно, и нет возможности определить их погрешность указанными выше методами, систематическая погрешность может быть оценена как **половина минимального деления** измерительной шкалы. Например, для миллиметровой измерительной линейки систематическая погрешность

$\Delta l_{\text{сист}} = 0,5 \text{ мм}$ . Исключения составляют измерения кварцевыми часами (стрелки передвигаются дискретно), приборами с неравномерными шкалами и электронными приборами. В этом случае систематическая погрешность принимается равной **минимальному делению шкалы**.

**Случайные погрешности** – изменяются при повторных измерениях случайным образом. Случайные факторы, обуславливающие разброс измеряемой величины  $X$ , могут быть вызваны различными причинами. С одной стороны, это могут быть причины, не зависящие от измеряемой величины, например, состояние организма человека, наблюдающего за прибором, вибрация, действие внешних электромагнитных полей, высокая влажность воздуха, отклонение температуры и давления от нормальных условий. С другой – сама измеряемая величина может носить случайный характер. Ошибки такого типа подчиняются законам теории вероятности, установленным для случайных величин.

Абсолютная случайная погрешность определяется всегда одинаково:

$$\Delta X_{\text{сл}} = t_{n,\alpha} \cdot \sigma,$$

где  $t_{n,\alpha}$  – коэффициент Стьюдента,  $\sigma$  – стандартный доверительный интервал (среднеквадратичное отклонение результата измерения).

**Коэффициент Стьюдента  $t_{n,\alpha}$**  зависит от **доверительной вероятности (надежности)  $\alpha$**  и количества опытов  $n$ . **Надежность ( $\alpha$ )** – это вероятность того, что значение измеренной величины окажется в интервале от  $X - \Delta X$  до  $X + \Delta X$ . При построении техники всегда задается определенная надежность изделия. Каждая деталь должна соответствовать надежности не ниже той, которая предъявляется ко всему изделию в целом. Если техника сложная, то отклонение параметров деталей от заданных значений должно быть очень малым. При лабораторных измерениях обычно полагают  $\alpha = 0,95$  и ограничиваются 3–5 измерениями. Коэффициент Стьюдента  $t_{n,\alpha}$  можно определить по специальной таблице.

Таблица. Значения коэффициентов Стьюдента

Число измерений $n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Надежность $\alpha = 0,95$	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3

**Стандартный доверительный интервал  $\sigma$**  можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{\text{cp}})^2}{n(n-1)}},$$

где  $X_{\text{cp}}$  – среднее арифметическое значение всех измерений, рассчитываемое по формуле:

$$X_{\text{cp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

**Полная абсолютная погрешность  $\Delta X$**  прямых измерений определяется как:

$$\Delta X = \Delta X_{\text{сист}} + \Delta X_{\text{сл}},$$

где  $\Delta X_{\text{сист}}$  – абсолютная систематическая погрешность,  $\Delta X_{\text{сл}}$  – абсолютная случайная погрешность.

**Окончательный результат** измерения представляется в виде:

$X = (X_{\text{cp}} \pm \Delta X)$  <единицы измерения>; относительная погрешность  $\varepsilon = \dots \%$ ;  
надежность  $\alpha =$  <значение  $\alpha$ >.

Например,  $a = (2,9 \pm 0,3) \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_a = 10 \%$  с надежностью  $\alpha = 0,95$ .

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим методы определения погрешностей косвенных измерений.

Следует учитывать, что, если в расчетах используются **табличные данные** (без указания погрешностей), то обычно считается, что **погрешность этой величины составляет  $\pm 0,5$  разряда последней значащей цифры**. Например,  $\pi = 3,14 \pm 0,005$  или ускорение свободного падения  $g = 9,8 \pm 0,05$ .

**1 метод.** Пусть величина  $f$  является функцией нескольких переменных и ее можно представить в виде **степенной функции** вида  $f(x, y, z, \dots) = (x)^n \cdot (y)^k \cdot (z)^m \dots$ . Тогда для расчета ошибки косвенного измерения  $\Delta f$  можно использовать формулу (**постоянные множители отбрасываются**):

$$\Delta f = f_{cp} \sqrt{\left(\frac{n \cdot \Delta x}{x_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{k \cdot \Delta y}{y_{cp}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{m \cdot \Delta z}{z_{cp}}\right)^2},$$

где  $x_{cp}, y_{cp}, z_{cp} \dots$  – средние значения величин прямых измерений,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$  – абсолютные ошибки этих измерений,  $f_{cp} = (x_{cp})^n \cdot (y_{cp})^k \cdot (z_{cp})^m \dots$  – среднее значение величины  $f$ .

Описанную выше методику рассмотрим на примере формулы для расчета ускорения тела.

$$a(h, t) = \frac{2h}{t^2}$$

Преобразуем формулу следующим образом:  $a(h, t) = \frac{2h}{t^2} = 2h^1 t^{-2}$ .

Отбрасываем постоянный множитель 2.

Используя формулу метода, получаем абсолютную погрешность:

$$\Delta a = a_{cp} \sqrt{\left(\frac{1 \cdot \Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot \Delta t}{t_{cp}}\right)^2} = a_{cp} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \cdot \Delta t}{t_{cp}}\right)^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a_{cp}}.$$

**2 метод. Нахождение погрешности путем логарифмирования и последующего дифференцирования расчетной формулы.**

Пусть величина косвенных измерений является функцией нескольких переменных и определяется по формуле, включающей в себя сумму (разность) величин прямых измерений.

Например, площадь трапеции определяется по формуле  $S = \frac{1}{2}h(a+b)$ , где  $h$  – высота,  $a, b$  – длины оснований трапеции.

Для нахождения абсолютной погрешности в определении площади трапеции выполним следующую последовательность действий.

а) Логарифмируем расчетную формулу  $\ln S = \ln \frac{1}{2} + \ln h + \ln(a+b)$ .

При логарифмировании используем следующие свойства логарифмов:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln a.$$

б) Дифференцируем полученное выражение, учитывая, что последнее слагаемое является функцией двух переменных:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dh}{h} + \frac{da}{a+b} + \frac{db}{a+b}.$$

в) Заменяя дифференциалы соответствующими абсолютными погрешностями величин прямых измерений, возводя каждое слагаемое в квадрат и извлекая из каждой части квадратный корень, получим:

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta S}{S_{cp}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2}.$$

Относительная погрешность измерений:

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta S}{S_{cp}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2}.$$

Абсолютная погрешность измерений:

$$\Delta S = S_{cp} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{a_{cp} + b_{cp}}\right)^2}.$$

**3 метод. Определение погрешности косвенных измерений через полный дифференциал функции многих переменных с последующей заменой дифференциалов соответствующими погрешностями.**

Метод удобно использовать, если искомая величина является тригонометрической функцией нескольких (одной) переменных. Абсолютную ошибку косвенного измерения  $\Delta f$  можно вычислить по формуле:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z\right)^2}.$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z}$  – частные производные функции  $f=f(x, y, \dots, z)$ .

Например, интенсивность света, прошедшего через поляризатор, определяется  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ .

Тогда

$$\frac{dI}{d\alpha} = 2I_0 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -I_0 \sin(2\alpha).$$

Абсолютная погрешность измерений:

$$\Delta I = \sqrt{(-I_0 \sin(2\alpha) \cdot \Delta \alpha)^2}.$$

Погрешность в определении углов следует подставлять в радианах:  $[\Delta \alpha] = [rad]$ .

Относительная погрешность измерений:

$$\varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I_{cp}}.$$



## ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ ЗАПИСИ РЕЗУЛЬТАТА

Измерения всегда приводят к приближенным значениям физических величин. При проведении математических операций часто также получают приближенные значения. Приближенные числа можно округлять, если это не окажет вредного влияния на практический результат. При округлении приближенных чисел необходимо руководствоваться следующими правилами.

**1. Косвенные измерения не могут быть точнее прямых измерений** (количество знаков после запятой в косвенных и прямых измерениях должно быть **одинаковым**). В промежуточных вычислениях можно оставлять одну запасную цифру для уменьшения ошибки округления. В окончательном результате эта запасная цифра отбрасывается.

**2.** Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя цифра увеличивается на единицу. В противном случае последняя сохраняемая цифра не изменяется.

**3.** При сложении и вычитании, умножении и делении в полученном результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их содержится в числе с наименьшим количеством десятичных знаков.

**4.** В результате расчета значений функций вида  $x^n$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\ln(x)$  результат должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеет число  $x$ .

**5. В первую очередь округляют погрешность  $\Delta X$** , только затем округляют саму приближенную величину  $X$ . **После округления количество знаков после запятой в погрешности  $\Delta X$  и среднем значении величины  $X_{cp}$  должно быть одинаковым.**

## ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

При обработке полученного экспериментального материала для того, чтобы получить наглядное представление о зависимости одной физической величины от другой, часто прибегают к построению графиков. Графиками пользуются также для быстрого нахождения значения одной величины по данному значению другой величины. Для построения графиков чаще всего используют декартову систему координат. Графики экспериментальных зависимостей всегда строятся с учетом погрешности измерений.

### Основные требования, предъявляемые к построению графиков

**1.** Графики строятся **карандашом** на миллиметровой бумаге или белой бумаге, на которую печатным способом нанесена координатная сетка. Допускается построение графиков методами компьютерной графики, но и в этом случае графики должны соответствовать всем изложенным требованиям.

**2.** На координатных осях должны быть указаны обозначения откладываемых величин и единицы их измерения.

**3.** Начало координат, если это оговорено особо, может не совпадать с нулевыми значениями величин. Его выбирают таким образом, чтобы площадь чертежа была использована **максимально**.

**4.** Перед построением графика для каждой из шкал необходимо **выбрать масштаб**. Масштабные деления на координатных осях нужно наносить **равномерно**, то есть через **равные** промежутки. Масштаб выбирают таким образом, чтобы кривая была равномерно растянута вдоль обеих осей. Если график представляет собой прямую, то угол ее наклона к осям должен быть близок к  $40^\circ - 60^\circ$ .

**5.** После выбора и нанесения на оси масштаба, наносятся значения физических величин. Экспериментальные точки изображаются четко и крупно маркерами (в виде кружков, прямоугольников, крестиков и т. д.). Координаты экспериментальных точек на осях **не указывают**, а линии, определяющие эти координаты, **не проводят**, так как это загромождает

график и затрудняет работу с ним. Затем от каждой точки вверх и вниз, вправо и влево откладывают в виде отрезков соответствующие абсолютные погрешности измерений **в масштабе графика** (рис. 1).

6. После нанесения экспериментальных точек строится график, то есть проводится **предсказанная теорией плавная кривая** или **прямая** так, чтобы она пересекала все отложенные на графике отрезки, соответствующие абсолютным погрешностям измерений.

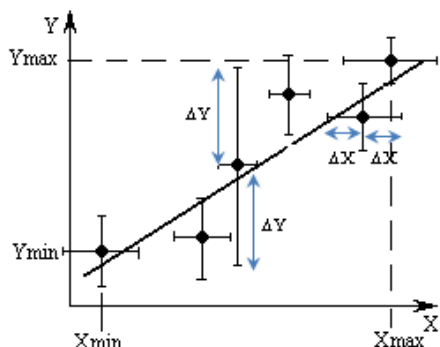


Рисунок 1 – Нанесение экспериментальных точек и погрешностей на график

При значительном разбросе экспериментальных точек кривую (прямую) следует проводить не по точкам, а между ними. Причем, количество точек по обе стороны от нее должно быть одинаковым. Суммы отклонений величин экспериментальных точек снизу и сверху кривой должны быть близки. Исключение составляют градуировочные графики, которые следует аппроксимировать между точками, нанесенными без погрешностей.

## ОПИСАНИЕ ШТАНГЕНЦИРКУЛЯ И МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ ТЕЛ

**Штангенциркуль** – наиболее распространенный прибор, используемый для измерения линейных размеров тел (деталей) с высокой точностью.

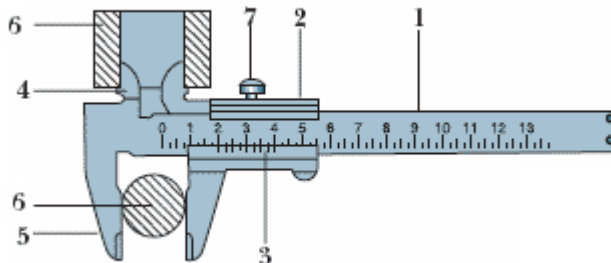


Рисунок 2 – Общий вид штангенциркуля

Штангенциркуль (рис. 2) состоит из линейки (штанги) 1 с миллиметровыми делениями и подвижной рамки 2 с нониусом 3 и закрепляющим винтом 7. На штанге и рамке имеются ножки (губки) 4 и 5.

Для измерения штангенциркуль берут в правую руку, измеряемый предмет 6 помещают между ножками, придерживая его левой рукой. Надавливая на рамку большим пальцем правой руки, плотно зажимают предмет между ножками. Затем закрепляют винт и проводят отсчет по нониусу. Верхние ножки служат для определения внутренних отверстий предметов.

При определении размера детали поступают следующим образом:

- 1) Если нулевой штрих нониуса совпал с каким-либо штрихом штанги, то значение измеряемой величины отсчитывают только по основной шкале в миллиметрах.
- 2) Если же нулевой штрих нониуса не совпадает ни с одним штрихом основной шкалы, то значение измеряемой величины складывается из двух частей: целого числа миллиметров, отсекаемых нулевым штрихом нониуса на основной шкале штанги, и долей миллиметра, полученных умножением точности нониуса на порядковый номер его ненулевого штриха, совпавшего с некоторым делением штанги (рис. 3).



Рисунок 3 – Примеры взаимного расположения шкал штангенциркуля

(а) размеры измеряемого предмета  $D=42 \text{ мм} + 7 \cdot 0,1 \text{ мм} = 42,7 \text{ мм}$

(б) размеры измеряемого предмета  $D=100 \text{ мм} + 7 \cdot 0,05 \text{ мм} = 100,35 \text{ мм}$

## ОПИСАНИЕ МИКРОМЕТРА И МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ ТЕЛ

**Микрометр** представляет собой прибор, предназначенный для измерения линейных размеров с точностью до 0,01 мм.

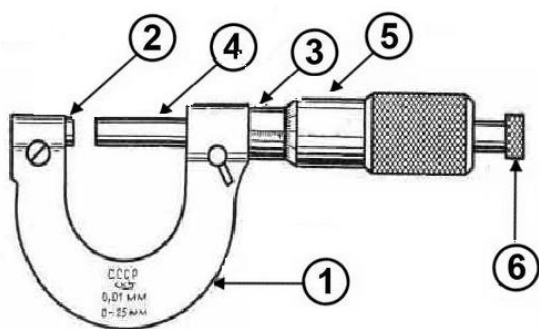


Рисунок 4 – Общий вид микрометра

Микрометр для измерения наружных размеров в пределах от 0 до 25 мм (рис. 4) состоит из скобы 1 с пяткой 2 и трубкой (стеблем) 3. В трубке имеется внутренняя резьба, в которую ввинчен микрометрический винт 4 с закрепленным на нем барабаном 5. На конце барабана имеется фрикционная головка (трещотка) 6.

Действие микрометра основано на свойстве винта совершать при его повороте поступательное перемещение, пропорциональное углу поворота. При измерении предмет зажимается между пяткой и микрометрическим винтом. Для вращения барабана при этом пользуются **фрикционной головкой**. После того, как достигнута определенная степень нажатия на предмет, фрикционная головка начинает проскальзывать, издавая характерный треск. Благодаря этому, зажатый предмет деформируется сравнительно мало (его размеры не искажаются) и, кроме того, микрометрический винт предохраняется от порчи.

На трубке 3 нанесены **деления основной шкалы**. Барабан 5 при вращении винта перемещается вдоль трубки. Шаг винта подбирают таким, что один полный оборот барабана соответствует его смещению вдоль основной шкалы на длину наименьшего деления. На барабане нанесена **добавочная шкала**. Микрометры обычно бывают двух типов.

1. Основная шкала микрометра разбита на **миллиметры**. Шаг микрометрического винта также **1 мм**. На шкале барабана нанесено 100 равных делений. Ясно, что каждое из этих ста делений имеет достоинство 0,01 мм, так как при повороте барабана на одно деление его шкалы происходит поступательное перемещение микрометрического винта на 0,01 мм. Если нулевое деление барабана совпадает с прямой линией на трубке (рис. 5), то микрометр показывает целое число миллиметров, которое определяется делением основной шкалы, показавшимся из-под края барабана. Если же нуль шкалы барабана не совпадает с линией на трубке, то отсчет не равен целому числу миллиметров. В этом случае число целых миллиметров определяется последним

видимым делением основной шкалы, а число сотых долей миллиметра — делением шкалы барабана, стоящим против линии на трубке. На рис. 5 измеряемая длина равна  $9 \text{ мм} + 0,36 \text{ мм} = 9,36 \text{ мм}$ .

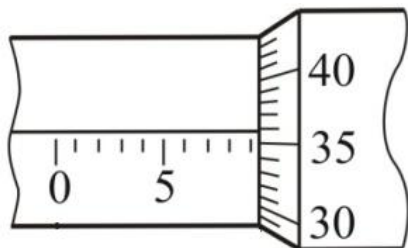


Рисунок 5 – Шкалы микрометра в случае, когда на барабане нанесено 100 делений

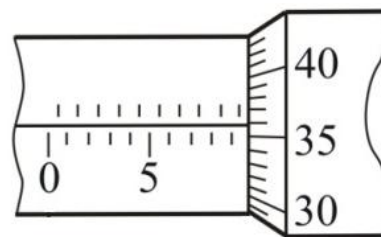


Рисунок 6 – Шкалы микрометра в случае, когда на барабане нанесено 50 делений

2. Основная шкала микрометра имеет цену деления, равную **0,5 мм**. При этом половинные деления, чтобы не загромождать шкалу, располагаются над прямой линией основной шкалы (рис. 6). Шаг микрометрического винта у таких микрометров равен 0,5 мм, а шкала барабана разбивается на 50 делений. Цена деления шкалы барабана равна 0,01 мм. При отсчетах на таком микрометре число сотых миллиметра, отсчитанное на шкале барабана против линии, прибавляют к числу целых миллиметров, если последним видимым делением основной шкалы является нижнее деление. Если же последним видимым делением является верхнее деление, то к целому числу миллиметров, определяемому последним видимым **нижним** делением, прибавляют 0,50 мм и число сотых, отсчитанное на шкале барабана. Например, на рис. 6 показания микрометра соответствуют  $9 \text{ мм} + 0,50 \text{ мм} + 0,36 \text{ мм} = 9,86 \text{ мм}$ .

**Перед началом работы с микрометром следует убедиться в его исправности.** Для этого вращением фрикционной головки приводят в соприкосновение микрометрический винт с пяткой. Момент соприкосновения определяется по сигналу трещотки. При этом край барабана должен располагаться над нулевым делением основной шкалы, а. нуль шкалы барабана – против линии на трубке.

**Вращать винт с усилием (за барабан) после того, как заработала трещотка, запрещается, так как это ведет к порче прибора.**

Следует отметить, что микрометрический винт с отсчетным барабаном является составной частью многих измерительных приборов, таких, например, как окулярный микрометр и компаратор. Отсчеты на всех этих приборах производят так же, как было описано выше.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1.

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

**Цель работы.** Убедиться в справедливости второго закона Ньютона, научиться рассчитывать погрешности измерений и оформлять результаты измерений в виде таблиц и графиков.

**Приборы и оборудование:** машина Атвуда, набор грузов и перегрузков, секундомер, линейка.

**Теоретическое введение.** *Поступательным движением* называется такое движение, при котором прямая, соединяющая две любые точки твердого тела, остается параллельной своему первоначальному положению.

В кинематике для характеристики направления и быстроты движения тела применяется векторная физическая величина - скорость  $\vec{V}$ . В качестве динамической характеристики поступательного движения используется импульс тела (количество движения)  $\vec{p}$ , определяемый как произведение массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1)$$

**Масса** – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела. Под **инертностью** понимают свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, то есть то состояние, в котором оно находилось до внешнего воздействия.

**Силой** называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического действия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

Согласно второму закону Ньютона, равнодействующая всех сил  $\vec{F}$  (то есть векторная сумма всех сил  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ ), приложенная к данному телу, равна производной от его импульса по времени:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

или

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ где } m - \text{масса тела.}$$

Учитывая, что  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ , получаем  $\vec{F} = m\vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – ускорение, с которым движется тело.

Выразим ускорение: 
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3)$$

Ускорение, которое приобретает материальная точка (тело) в результате действия на нее равнодействующей силы, прямо пропорционально величине этой силы, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела). Уравнения (2) и (3) – **уравнения движения тела (основной закон динамики поступательного движения или второй закон Ньютона).**

**Ускорением** называется физическая векторная величина, равная первой производной от скорости по времени или второй производной от перемещения по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (4)$$

Ускорение характеризует изменение скорости по модулю и по направлению.

В общем случае плоского криволинейного движения вектор ускорения представляется в виде суммы двух взаимно перпендикулярных векторов

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (5)$$

где  $\vec{a}_\tau$  – тангенциальное ускорение и  $\vec{a}_n$  – нормальное ускорение.

**Тангенциальное ускорение**  $\vec{a}_\tau$  характеризует быстроту изменения вектора скорости по модулю и определяется по формуле:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}, \quad (6)$$

где  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной к траектории, направленный в ту же сторону, что и вектор скорости.

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории движения и совпадает по направлению с вектором скорости, если движение равноускоренное, и противоположно направлено в случае равнозамедленного движения.

**Нормальное ускорение**  $\vec{a}_n$  характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению и определяется

формулой: 
$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (7)$$

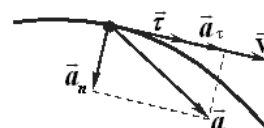


Рисунок 1 - Векторы тангенциального и нормального ускорений

Нормальное ускорение направлено по нормали к траектории движения к центру кривизны траектории, поэтому иначе его называют **центростремительным ускорением** (рис. 1).

**Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси** называется такое его движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, называемой осью вращения.

Согласно основному закону динамики вращательного движения, равнодействующая всех моментов сил  $\vec{M}$ , приложенных к телу, равна производной от момента импульса тела  $\vec{L}$  по времени:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ где } \vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (8)$$

или  $\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , где  $I$  – момент инерции тела,  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости.

Учитывая, что  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ , получаем  $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ , где  $\vec{\varepsilon}$  – угловое ускорение, с которым вращается тело.

Выразим угловое ускорение:  $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$  (9)

Выражения (8) и (9) называют **основным уравнением динамики вращательного движения**. (Более подробную информацию см. в лабораторной работе № 2.)

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (3), необходимо убедиться в справедливости двух пропорций:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ a \propto F \quad \text{при } m = \text{const}; \\ 2) \ a \propto \frac{1}{m} \quad \text{при } F = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (10)$$

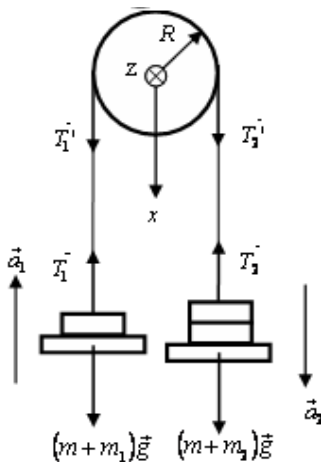


Рисунок 2 – Схема машины Атвуда

#### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Изучение зависимости ускорения при поступательном движении от действующей силы и массы выполняется с помощью **машины Атвуда**. Она представляет собой блок, закрепленный на неподвижной оси, через который перекинута тонкая нерастяжимая нить с привязанными на ее концах двумя грузами одинаковой массы  $m$ . На грузы могут устанавливаться перегрузки различных масс  $m_1$  и  $m_2$ , которые приводят систему «грузы-перегрузки» в поступательное движение с ускорением  $\vec{a}$ , а блок – во вращение с угловым ускорением  $\vec{\varepsilon}$ .

Уравнения движения грузов и блока, с учетом того, что при вращении блока возникает момент силы трения в оси  $\vec{M}_{тр}$ , имеют вид:

$$\begin{cases} (m+m_1)\vec{a}_1 = (m+m_1)\vec{g} + \vec{T}_1, \\ (m+m_2)\vec{a}_2 = (m+m_2)\vec{g} + \vec{T}_2, \\ J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_{тр}. \end{cases} \quad (11)$$

Пусть  $m_2 > m_1$ . Переходя к проекциям на оси  $x$  и  $z$  и учитывая, что

$$\begin{aligned} T_1 &= T_1', \quad T_2 = T_2', \\ a_\tau &= a_1 = a_2 = a, \quad M_1 = T_1 R, \\ M_2 &= T_2 R, \quad \varepsilon = \frac{a}{R}, \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{cases} -(m+m_1)a = (m+m_1)g - T_1, \\ (m+m_2)a = (m+m_2)g - T_2, \\ J \frac{a}{R} = (T_2 - T_1)R - M_{тр}. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему уравнений (12), приходим к выражению:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - \frac{M_{mp}}{R}}{2m + m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \frac{F_g - F_{mp}}{m_{ном} + m_{бл}}. \quad (13)$$

Здесь  $F_g = (m_2 - m_1)g$  – движущая сила,  $F_{mp} = \frac{M_{mp}}{R}$  – эффективная сила трения,  $m_{ном} = 2m + m_1 + m_2$  – суммарная масса грузов и перегрузков, движущихся поступательно,  $m_{бл} = \frac{I}{R^2}$  – эффективная масса блока,  $I$  – момент инерции блока относительно оси вращения.

Проведем анализ получившегося выражения (13).

1) При малых значениях момента инерции блока  $m_{ном} \gg \frac{I}{R^2}$ , тогда массой блока можно пренебречь. Выражение (13) примет вид:

$$a = \frac{F_g - F_{mp}}{m_{ном}}. \quad (13')$$

2) Если  $m_{ном} + m_{бл} = const$ , то зависимость ускорения от движущей силы  $a = f_1(F_g)$  является линейной (рис. 3). По котангенсу угла наклона прямой можно определить  $m_{ном} + m_{бл}$ :

$$m_{ном} + m_{бл} = ctg(\alpha) = \frac{AC}{BC}.$$

3) Если  $F_g = const$ , то зависимость ускорения от обратного значения массы системы  $a = f_2[1/(m_{ном} + m_{бл})]$  также является линейной (рис. 4). По тангенсу угла наклона этой прямой можно определить движущую силу.

Из выражения (13) следует, что грузы движутся равноускоренно. Таким образом, ускорение можем определить экспериментально, используя соотношение

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (14)$$

связывающее ускорение  $a$ , высоту падения  $h$  и время движения  $t$  при равноускоренном движении.

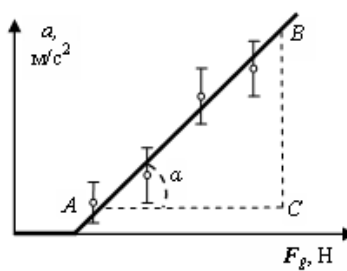


Рисунок 3 – Зависимость ускорения от силы

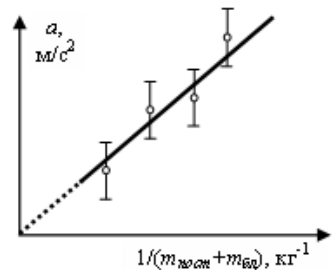


Рисунок 4 – Зависимость ускорения от величины, обратной массе

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

### Задание 1. Изучение зависимости ускорения от величины приложенной силы

1. На платформы установите по одинаковому набору перегрузков  $m_1 = m_2 = 0,01$  кг. Проверьте равновесие системы.
2. Часть перегрузков с левой платформы переложите на правую платформу (смотри таблицу 1). Рассчитайте силу  $F_g = (m_2 - m_1)g$ , приводящую систему в движение.
3. Измерьте время  $t$  движения правого груза от нулевой отметки шкалы до пола (расстояние  $h$ ). Проведите измерения не менее 3-5 раз. Вычислите среднее время движения грузов по формуле  $t_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ .
4. Используя значение  $t_{cp}$ , рассчитайте ускорение движения грузов по формуле  $a = \frac{2h}{t_{cp}^2}$ .
5. Повторите пункты 2-4 для пяти различных значений  $(m_2 - m_1)$ . Результаты измерений и вычислений запишите в таблицу 1.
6. Постройте график зависимости ускорения от силы  $a = f_1(F_g)$  (правила построения графиков приведены в теоретическом введении методических указаний пособия).
7. Воспользовавшись графиком, по котангенсу угла наклона прямой определите полную массу  $(m_{ном} + m_{бл})$  системы. Используя известное значение  $m_{ном}$ , найдите эффективную массу  $m_{бл}$  блока, необходимую для выполнения задания 2.
8. По графику определите силу трения покоя  $F_{тр}^{пок}$  установки.

Таблица 1

№ изм.	$m_1, 10^{-3}$ кг лев.	$m_2, 10^{-3}$ кг прав.	$m_2 - m_1, 10^{-3}$ кг	$F_g, 10^{-2}$ Н	$t_1, с$	$t_2, с$	$t_3, с$	$t_4, с$	$t_{cp}, с$	$\Delta t_{cl}, с$	$\Delta t, с$	$a, м/с^2$	$\Delta a, м/с^2$	$\varepsilon_a, \%$
1	5+2+3=10	10	0		проверка равновесия системы									
2	5+3=8	10+2=12	4											
3	5+2=7	10+3=13	6											
4	5	10+2+3=15	10											
5	3	10+2+5=17	14											
6	2	10+3+5=18	16											
Данные установки: $h =$ м; $m_{пост} = 0,12$ кг.					$\Delta t_{сист} =$ с; $\Delta h_{сист} =$ м; $\alpha = 0,95$ ; $n =$ ; $t_{n,\alpha} =$ ; $m_{\text{бл}} =$ кг; $F_{тр}^{пок} =$ Н.									

**Задание 2. Изучение зависимости ускорения от массы системы**

1. Установите на правую платформу перегрузок, создающий движущую силу  $F_g = 0,15$  Н. Затем 3-5 раз измерьте время движения груза с высоты  $h$ . Рассчитайте среднее время движения.
2. Повторите пункт 8 для четырех значений массы  $m_{пост}$  грузов, не изменяя величину движущей силы. Результаты измерений и расчетов внесите в таблицу 2.
3. Постройте график зависимости ускорения от величины, обратной общей движущейся массе  $a = f_2[1/(m_{пост} + m_{\text{бл}})]$ . При этом необходимо учитывать массу блока  $m_{\text{бл}}$ , найденную в предыдущей серии опытов.
4. По тангенсу угла наклона прямой определите экспериментальное значение движущей силы  $F_g^{\text{эксп}}$  и сравните его с теоретическим значением. Сделайте соответствующие выводы.

Таблица 2

№ изм.	$m_{\text{пр}} = m_{\text{лев}} = m, 10^{-3}$ кг	$m_{пост} = 2m + m_2, кг$	$1/(m_{пост} + m_{\text{бл}}), кг^{-1}$	$t_1, с$	$t_2, с$	$t_3, с$	$t_4, с$	$t_{cp}, с$	$\Delta t_{cl}, с$	$\Delta t, с$	$a, м/с^2$	$\Delta a, м/с^2$	$\varepsilon_a, \%$
1	50	0,115											
2	50+50=100	0,215											
3	50+100=150	0,315											
4	50+100+50=200	0,415											
Данные установки: $h =$ м; $m_{\text{бл}} =$ кг; $m_2 = 0,015$ кг; $F_g = 0,15$ Н.									$\Delta t_{сист} =$ с; $\Delta h_{сист} =$ м; $F_g^{\text{эксп}} =$ Н.				

**Задание 3. Расчет погрешностей измерений**

1. Познакомьтесь с методами оценок погрешностей прямых и косвенных измерений.
2. По данным приборов определите систематические погрешности  $\Delta t_{сист}$  и  $\Delta h_{сист}$ .
3. Случайную погрешность  $\Delta h_{cl}$  примите равной нулю, поскольку высота, с которой опускается груз каждый раз, задается одинаковым образом.

4. Для каждой серии экспериментов определите по формуле  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - t_{cp})^2}$  стандартные доверительные интервалы времени движения грузов.

5. Найдите коэффициенты Стьюдента  $t_{n,\alpha}$  при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$  и соответствующего числа  $n$  параллельных измерений по таблице (1) введения.



6. Определите случайные погрешности  $\Delta t_{сл}$  измерений времени по формуле  $\Delta t_{сл} = t_{n,\alpha} \cdot \sigma$  и занесите результаты в таблицы 1 и 2.

7. Рассчитайте полные абсолютные погрешности  $\Delta t$  результатов измерения по формуле  $\Delta t = \Delta t_{сл} + \Delta t_{сист}$ . Результаты вычислений занесите в таблицы 1 и 2.

8. Рассчитайте величины относительных погрешностей  $\varepsilon_a$  измерения ускорения движения грузов по формуле

$$\varepsilon_a = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h_{cp}}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta t}{t_{cp}}\right)^2} \cdot 100\%.$$

9. Вычислите абсолютные погрешности  $\Delta a$  ускорения по формуле  $\Delta a = a_{cp} \cdot \varepsilon_a$ , где  $\varepsilon_a$  – относительная погрешность, представленная в долях целого числа.

10. Для каждой серии экспериментов проведите округление результатов вычислений и занесите их в таблицы 1 и 2 соответственно.

Промежуточные вычисления и анализ результатов работы могут быть выполнены на дополнительных листах формата А4 и представлены для контроля при защите лабораторной работы. Полученные значения измеряемых физических величин с указанием единиц измерения, абсолютной и относительной погрешностей, надежности (см. Введение) запишите в выводах к работе.

Для студентов, стремящихся продемонстрировать повышенный уровень своих знаний, рекомендуется выполнять вычисления и построение графиков с использованием программы Microsoft Office Excel или других программ для работы с электронными таблицами. В этом случае **обязательно** наличие распечатки результатов.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение следующих понятий: скорость, ускорение (полное, тангенциальное, нормальное), масса, импульс, сила. Объясните их физический смысл. Укажите единицы измерения.
2. Сформулируйте I, II, III законы Ньютона, объясните их физический смысл и область применения.
3. Поясните устройство и принцип работы машины Атвуда. Какие силы действуют на грузы и блок в машине Атвуда? Запишите уравнения, описывающие движение данной системы. Каким образом можно убедиться в справедливости второго закона Ньютона?
4. Почему ускорение системы определяется по кинематической формуле  $a = 2h/t^2$ , а не из соотношения  $a = F_g/m$ ? Объясните методику определения ускорения  $a$  грузов в данной работе.
5. Какой смысл имеет отрезок, отсекаемый прямой на оси абсцисс, на графике зависимости  $a = f(F_g)$ ?
6. Сформулируйте основные правила построения графиков.
7. Что такое абсолютная и относительная погрешности измерений? Для чего вводятся эти погрешности?
8. Дайте понятие случайной и систематической погрешностей, класса точности прибора.
9. Как определяются погрешности табличных величин?
10. Какие измерения называются прямыми, косвенными? Методы определения погрешностей прямых и косвенных измерений.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**Цель работы:** Проверить основной закон динамики вращательного движения на примере реальной механической системы – маятника Обербека.

**Приборы и оборудование:** маятник Обербека, набор грузов, секундомер.

**Теоретическое введение.** *Вращательным движением* называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Согласно основному закону динамики вращательного движения, равнодействующая всех моментов сил  $\vec{M}$ , приложенных к телу, равна первой производной от момента импульса тела  $\vec{L}$  по времени:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ где } \vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (1)$$

или  $\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , где  $I$  – момент инерции тела,  $\vec{\omega}$  – вектор угловой скорости.

Учитывая, что  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$ , получаем  $\vec{M} = I\vec{\epsilon}$ , где  $\vec{\epsilon}$  – угловое ускорение, с которым вращается тело.

Выразим угловое ускорение:  $\vec{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$  (2)

Угловое ускорение  $\vec{\epsilon}$ , с которым вращается тело, прямо пропорционально суммарному моменту сил  $\vec{M}$ , действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела  $I$  относительно оси вращения.

Выражения (1) и (2) – **основное уравнение динамики вращательного движения**.

**Моментом силы**  $\vec{M}$  относительно неподвижной точки  $O$  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку приложения силы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (3)$$

Модуль момента силы равен

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot l, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ,  $l$  – плечо силы.

**Плечом силы** называется кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$ . Из рисунка 1 видно, что  $l = r \cdot \sin \alpha$ .

Направление вектора момента силы  $\vec{M}$  определяется по **правилу векторного произведения**: если винт с правой резьбой (буравчик) расположить в плоскости, перпендикулярной плоскости расположения векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , стоящих в векторном произведении, и вращать ручку буравчика от первого вектора  $\vec{r}$  в векторном произведении ко второму –  $\vec{F}$  по наименьшему углу, то направление поступательного движения острия буравчика укажет направление вектора  $\vec{M}$ , определяемого через данное векторное произведение.

Так, в примере на рисунке 1, вектор момента силы  $\vec{M}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , направлен в плоскость чертежа «от нас».

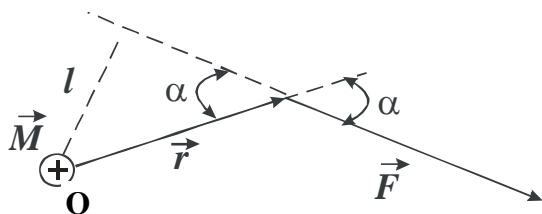


Рисунок 1 - Момент силы  $\vec{M}$  относительно неподвижной точки  $O$

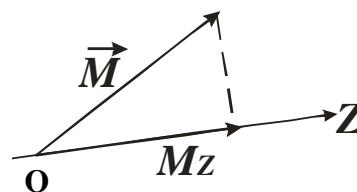


Рисунок 2 - Момент силы относительно неподвижной оси  $Z$

**Моментом силы относительно неподвижной оси  $Z$**  называется скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $\vec{M}$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $Z$ . Значение момента не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $Z$  (рис. 2).

Направлению момента силы  $\vec{M}$  относительно заданной оси  $Z$  обычно приписывают направление этой же самой оси (рис. 2). Момент силы, вызывающий вращение тела против часовой стрелки, принято считать положительным, по часовой стрелке – отрицательным.

С учетом вышеизложенного перепишем основной закон динамики вращательного движения в проекции на ось  $Z$ :

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} \quad \text{или} \quad \varepsilon_z = \frac{M_z}{I_z}, \quad (5)$$

где  $I_z$ ,  $M_z$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $L_z$  – проекции соответствующих векторов на ось  $Z$ .

**Угловое ускорение** – векторная физическая величина, которая определяет быстроту изменения вектора угловой скорости. Угловое ускорение определяется как первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от углового перемещения по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}, \quad (6)$$

где  $\vec{\omega}$  – угловая скорость, а  $\vec{\varphi}$  – вектор углового перемещения. Единица измерения углового ускорения в системе СИ – рад/с<sup>2</sup>.

Направление угловой скорости  $\vec{\omega}$  определяется по **правилу правого винта**: если ручку винта вращать по направлению вращения тела, то направление поступательного движения острия винта покажет направление вектора угловой скорости. Направление углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  совпадает с направлением вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ , если движение равноускоренное, и противоположно направлено, если движение равнозамедленное.

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения направление  $\vec{\varepsilon}$  совпадает с направлением результирующего момента силы  $\vec{M}$ , действующего на тело.

**Моментом инерции материальной точки** относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения:

$$I = m_i r_i^2. \quad (7)$$

**Моментом инерции системы материальных точек** (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведения масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (8)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки, а  $r_i$  – расстояние от этой точки до оси вращения.

**В случае непрерывного распределения массы** момент инерции тела равен:

$$I = \int_0^V r^2 \rho dV, \quad (9)$$

где  $r$  – расстояние между осью, проходящей через центр масс, и осью вращения,  $\rho$  – плотность тела,  $V$  – объем тела. Момент инерции является **мерой инертности тела при вращательном движении**.

Характеристики величин  $I$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{M}$  всегда определяются относительно **одной оси вращения** и направлены вдоль нее.

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Для проверки основного закона динамики вращательного движения используется установка (рис. 3), называемая **маятником Обербека**. Она представляет собой одно- или двухступенчатый шкив с приваренными к нему спицами. На спицах могут перемещаться два груза массой  $m_0$  каждый, которые закрепляются винтами на расстоянии  $R$  от оси вращения. На один из шкивов радиуса  $r$  наматывается прочная нить, к которой прикреплен груз массой  $m$ . При движении груза массой  $m$  маятник вращается с постоянным угловым ускорением.

Основной закон динамики вращательного движения будем проверять в виде:

$$\varepsilon_z = \frac{M_z}{I_z}.$$

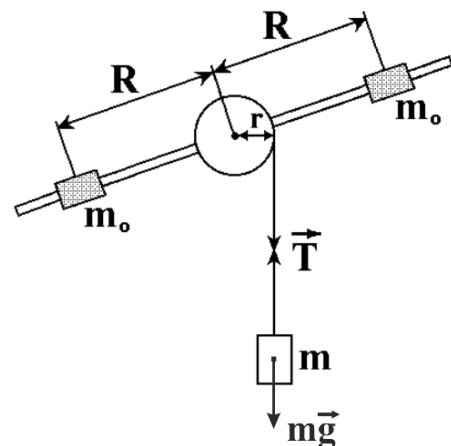


Рисунок 3 - Схема экспериментальной установки

Так как  $I_z$ ,  $M_z$ ,  $\varepsilon_z$  – проекции соответствующих векторов на одну и ту же ось вращения, то закон можно переписать, отбросив индексы:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} \quad (10)$$

Чтобы проверить справедливость соотношения (10), необходимо установить справедливость двух зависимостей

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &\sim M \quad \text{при} \quad I = \text{const} \\ \varepsilon &\sim \frac{1}{I} \quad \text{при} \quad M = \text{const}, \end{aligned} \right\} \text{ что эквивалентно } \frac{1}{\varepsilon} \sim I \quad (12)$$

Обозначим через  $I_0$  момент инерции маятника без грузов относительно оси вращения, а через  $\vec{T}$  – силу натяжения нити. Тогда момент инерции маятника с грузами можно записать как:

$$I = I_0 + 2m_0 R^2, \quad (13)$$

где  $2m_0 R^2$  – момент инерции грузов, находящихся на расстоянии  $R$  от оси вращения.

Результирующий момент сил равен

$$M = T \cdot r - M_{mp}, \quad (14)$$

где  $M_{mp}$  – момент сил трения, который для каждой установки постоянен.

Система уравнений вращательного движения маятника и поступательного движения опускающегося груза в скалярном виде:

$$\begin{cases} I\varepsilon = Tr - M_{mp} \\ ma = mg - T \end{cases}, \quad (15)$$

где  $a$  – ускорение опускающегося груза.

Умножим второе уравнение системы (15) на радиус шкива  $r$  и сложим с первым. При этом следует учесть, что  $a = \varepsilon \cdot r$ . Тогда

$$(I + mr^2) \varepsilon = mgr - M_{mp}.$$

С учетом соотношения (13), получим:

$$\varepsilon = \frac{mgr - M_{mp}}{I_0 + 2m_0 R^2 + mr^2}. \quad (16)$$

Так как при проверке первой зависимости (12) момент инерции системы не изменяется, и в соотношении (16) знаменатель остается постоянным, то в данное выражении можно ввести следующие обозначения:

$$I_1 = I_0 + 2m_0 R^2 + mr^2,$$

где  $\varepsilon_0 = \frac{M_{mp}}{I_1}$  – некоторые постоянные.

Тогда

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{I_1} \cdot mgr - \varepsilon_0 & \text{при } mgr > M_{mp} \\ 0 & \text{при } mgr \leq M_{mp} \end{cases}. \quad (17)$$

Здесь момент силы тяжести груза  $mgr$  выступает в качестве аргумента функции.

Ускорение движущегося груза может быть найдено как  $a = \frac{2h}{t^2}$ . Тогда, с учетом выражения  $a = \varepsilon \cdot r$ , угловое ускорение определится как

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}. \quad (18)$$

Проверка второй зависимости (12) осуществляется путем выполнения второй серии опытов. Для этого запишем соотношение (16) в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2m_0 R^2}{mgr - M_{mp}} + \frac{I_0 + mr^2}{mgr - M_{mp}}. \quad (19)$$

При постоянной массе  $m$  грузов второе слагаемое, а также знаменатель первого слагаемого в выражении (19) остаются постоянными. Таким образом, величина  $1/\varepsilon$  должна быть пропорциональна изменяющемуся моменту инерции грузов  $2m_0 R^2$ . Величина  $\frac{1}{\varepsilon}$  в соответствии с (18) определится как

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{rt^2}{2h} \quad (20)$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

Масса  $m$  грузов на нитях может быть набрана из трех грузов: одного основного (платформы) массой **50 г** и двух дополнительных: **50 г** и **100 г**.

В расчётах следует использовать эффективный радиус шкива  $r = r_{эфф}$ . Для этого измерьте диаметр выбранного шкива  $d_1$  без нити, а затем диаметр шкива с намотанной на него нитью  $d_2$ . Эффективный радиус  $r_{эфф}$  определите как

$$r_{эфф} = \frac{d_1 + d_2}{4}.$$

Погрешность в определении радиуса шкива  $\Delta r$  можно считать равной систематической погрешности  $\Delta r_{сист}$ .

### Задание 1. Изучение зависимости углового ускорения от момента приложенных сил $\epsilon = f(mgr)$ .

- По указанию преподавателя выберите один из шкивов радиусом  $r$ . Намотайте на него нить с платформой массой  $m = 50$  г, которая сама будет грузом, определяющим момент силы тяжести.
- Установите грузы  $m_0$  на спицах на расстоянии  $R$  от оси вращения, равно его среднему значению  $R = 10$  см.
- Предоставьте грузу возможность свободного движения вниз с указанной высоты  $h$ , измеряя при этом время движения груза  $t$ . Опыт повторите три - пять раз, данные занесите в таблицу 1.
- На платформу поместите груз массой **50 г** (общая масса станет равной  $m = 100$  г). Измерьте время движения груза  $t$  с указанной высоты  $h$ . Опыт повторите три – пять раз, данные занесите в таблицу 1.
- На платформу поместите груз массой **100 г** (общая масса  $m = 150$  г). Также как в пункте 4, измерьте три – пять раз время движения груза  $t$  с указанной высоты  $h$ .
- На платформу поместите грузы массами **100 г** и **50 г**, (общая масса станет равной  $m = 200$  г). Также как в предыдущих пунктах 4 и 5, измерьте три – пять раз время движения груза  $t$  с указанной высоты  $h$ .
- Для каждого значения  $m$  определите среднее значение времени  $t_{cp}$ .
- Используя  $t_{cp}$ , по формуле  $\epsilon = \frac{2h}{r \cdot t_{cp}^2}$  определите среднее значение ускорения  $\epsilon$  (здесь  $r = r_{эфф}$ ).
- По данным таблицы 1 постройте график зависимости углового ускорения  $\epsilon$  от момента силы тяжести опускающегося груза  $mgr$ , т.е.  $\epsilon = f(mgr)$  с соответствующими доверительными интервалами  $\Delta \epsilon$ .
- Определите момент силы трения по отрезку, отсекаемому прямой  $\epsilon = f(mgr)$  на оси моментов сил.

Таблица 1

№ изм.	$m, 10^{-3}$ кг	$mgr, 10^{-2}$ Н·м	$t_1, с$	$t_2, с$	$t_3, с$	$t_4, с$	$t_5, с$	$t_{cp}, с$	$\Delta t_{cl}, с$	$\Delta t, с$	$\epsilon, рад/с^2$	$\Delta \epsilon, рад/с^2$	Отн. пог, %
1	50												
2	50+50=100												
3	50+100=150												
4	50+100+50=200												
Данные установки: $h =$ м ; $\Delta h_{сист} =$ м ; $R =$ м ; $r_{эфф} =$ м ; $\Delta r_{сист} =$ м ; $\Delta t_{сист} =$ с ; $M_{mp} =$ Н·м .													

### Задание 2. Изучение зависимости углового ускорения от момента инерции системы $\frac{1}{\epsilon} = f(2m_0 R^2)$ .

- По указанию преподавателя выберите один из шкивов радиусом  $r$ .
- Массу груза  $m$  на нити установите равной **100 г**.
- В соответствии с таблицей 2 изменяйте момент инерции системы, меняя расстояния  $R$  грузов  $m_0$  до оси вращения.
- Для каждого из четырех случаев *симметричных* расположений грузов  $m_0$  на спицах маятника (расстояния от центров масс грузов до оси вращения измеряются линейкой) проведите три-пять измерений времени движения груза с заданной высоты  $h$ . Результаты занесите в таблицу 2.
- Для каждого значения  $R$  определите среднее значение времени  $t_{cp}$ .
- Используя  $t_{cp}$ , по формуле  $\frac{1}{\epsilon} = \frac{r \cdot t_{cp}^2}{2h}$  определите среднее значение  $\frac{1}{\epsilon}$  (в таблице  $\epsilon^{-1}$ ).
- По данным таблицы 2 постройте график зависимости  $\frac{1}{\epsilon} = f(2m_0 R^2)$  с соответствующими доверительными интервалами  $\Delta \epsilon^{-1}$ .
- По отрезку, отсекаемому прямой  $\frac{1}{\epsilon} = f(2m_0 R^2)$  на оси моментов инерции, определите момент инерции маятника без грузов  $m_0$  (т.е., момента инерции шкивов и спиц).

Таблица 2

№ изм.	$R$ , $10^{-2}$ м	$2m_0R^2$ , $10^{-3}$ кг·м <sup>2</sup>	$t_1$ , с	$t_2$ , с	$t_3$ , с	$t_4$ , с	$t_5$ , с	$t_{cp}$ , с	$\Delta t_{cl}$ , с	$\Delta t$ , с	$1/\varepsilon$ , с <sup>2</sup> /рад	$\Delta(1/\varepsilon)$ , с <sup>2</sup> /рад	Отн. погр., %
1	5												
2	10												
3	15												
4	20												
Данные установки: $h =$ м; $\Delta h_{cист} =$ м; $r_{эфф} =$ м; $\Delta r_{cист} =$ м; $\Delta t_{cист} =$ с; $m =$ кг; $m_{gr} =$ Н·м; $I_{шк+спиц} =$ кг·м <sup>2</sup> .													

**Задание 3. Расчет погрешностей измерений.**

- По данным приборов определите систематические погрешности  $\Delta t_{cист}$  и  $\Delta h_{cист}$ . Поскольку высота, с которой опускается груз каждый раз задается одинаковым образом, то можно считать, что  $\Delta h_{cl} = 0$ .
- Рассчитайте случайные погрешности  $\Delta t_{cl}$  в определении времени по формуле  $\Delta t_{cl} = t_{n,\alpha} \cdot \sigma$  ( $\sigma$  - стандартный доверительный интервал,  $t_{n,\alpha}$  - коэффициент Стьюдента). Результаты вычислений занесите в таблицы 1 и 2.
- Рассчитайте полные абсолютные погрешности  $\Delta t$  результатов измерения по формуле  $\Delta t = \Delta t_{cl} + \Delta t_{cист}$ . Результаты вычислений занесите в таблицы 1 и 2 соответственно.
- Используя полученные значение  $\Delta t$ , рассчитайте относительные погрешности измерений по формуле

$$отн.погр = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta t}{t_{cp}}\right)^2} \cdot 100\%.$$

- Определите абсолютные погрешности  $\Delta \varepsilon$  и  $\Delta \varepsilon^{-1}$  по формулам  $\Delta \varepsilon = \varepsilon \cdot отн.погр$  и  $\Delta \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} \cdot отн.погр$ , (относительную погрешность, взять в долях целого числа).
- По результатам работы сделайте соответствующие выводы.

**Примечания:** Для студентов, стремящихся продемонстрировать повышенный уровень своих знаний, рекомендуется выполнять вычисления и построение графиков с использованием программы Microsoft Office Excel или других программ для работы с электронными таблицами. В этом случае **обязательно** наличие распечатки результатов.

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ**

- Запишите и объясните основной закон динамики вращательного движения. Дайте определения величин, входящих в это уравнение.
- Как определяются направления векторов углового ускорения и момента сил?
- Проведите аналогию между характеристиками поступательного и вращательного движения.
- Каким образом в данной работе доказывается справедливость основного уравнения динамики вращательного движения?
- Почему в работе угловое ускорение определяется с помощью кинематического уравнения (18), а не с помощью динамического уравнения (16).
- Какой физический смысл имеют отрезки, отсекаемые прямой на оси абсцисс на графиках  $\varepsilon = f(mgr)$  и  $1/\varepsilon = f(2m_0R^2)$ , соответственно?
- Каким будет движение маятника при отсутствии трения в блоке?
- Какая сила создает вращающий момент крестовины, и как он определяется в данной работе?

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

## ПРОВЕРКА СПРАВЕДЛИВОСТИ ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА - ШТЕЙНЕРА С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** Определить момент инерции тела методом колебаний и сравнить его с моментом инерции, рассчитанным по теореме Гюйгенса-Штейнера.

**Приборы и оборудование:** физический маятник, секундомер, штангенциркуль, линейка.

#### Теоретическое введение.

**Моментом инерции материальной точки** относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от нее до оси вращения:

$$I = m_i r_i^2. \quad (1)$$

**Моментом инерции системы материальных точек** (тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведения масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (2)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки, а  $r_i$  – расстояние от этой точки до оси вращения.

Момент инерции всегда определяется относительно заданной оси вращения и является **мерой инертности тела** при вращательном движении, определяя способность тела изменять состояние вращательного движения под действием момента внешних сил  $\vec{M}$ . Единица измерения момента инерции в системе СИ – (кг·м<sup>2</sup>).

Момент инерции тела зависит от выбора оси, относительно которой оно вращается, и от того, как распределена масса тела по объему. В случае непрерывного распределения массы момент инерции тела равен

$$I = \int_V r^2 \rho dV, \quad (3)$$

где  $r$  – расстояние между осью, проходящей через центр масс и осью вращения,  $\rho$  – плотность тела,  $V$  – объем тела.

Момент инерции механической системы, состоящей из  $N$  тел, относительно произвольной оси складывается из моментов инерции  $I_i$ , которые имеют относительно этой же оси тела, составляющие систему.

$$I = \sum_{i=1}^N I_i. \quad (4)$$

В ряде случаев момент инерции тел можно найти, воспользовавшись **теоремой Гюйгенса-Штейнера**, которая формулируется следующим образом:

момент инерции тела  $I_z$  относительно произвольной оси  $z$  равен сумме его момента инерции  $I_{zc}$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс (инерции) тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $r$  между осями:

$$I_z = I_{zc} + mr^2. \quad (5)$$

**Физическим маятником** (рис. 2) называют тело, совершающее колебания вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела.

Если маятник отклонить от равновесного положения на угол  $\varphi$  и предоставить самому себе, то он будет совершать колебания в вертикальной плоскости под действием момента силы тяжести. В этом случае положение маятника определяется одной координатой, например, углом отклонения  $\varphi$  от положения равновесия. При малых углах отклонения маятник будет совершать гармонические колебания с периодом  $T$  относительно оси вращения  $Z$ , проходящей через точку подвеса  $O$ .

Считая известными момент инерции тела  $I_z$  относительно оси  $Z$ , его массу  $m$  и расстояние  $r$  между точкой подвеса  $O$  и центром масс  $C$ , получим выражение, определяющее период колебаний  $T$  данного физического маятника.

Момент сил  $\vec{M}$  относительно неподвижной точки  $O$  определяется как

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (6)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор приложения силы  $\vec{M}$  относительно точки  $O$ .

При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi < 8^\circ$  (рисунок 2) в нем под действием силы тяжести возникает возвращающий момент:

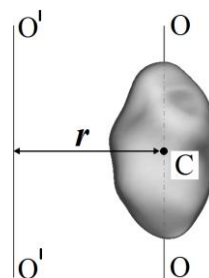


Рисунок 1 – Иллюстрация к теореме Гюйгенса-Штейнера

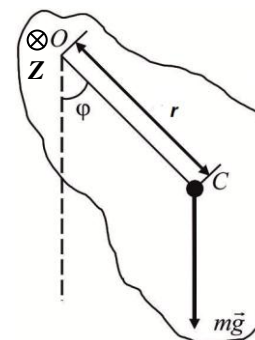


Рисунок 2 - Колебания физического маятника

$$M = -mgr \cdot \sin \varphi, \quad (7)$$

знак «-» указывает на то, что маятник стремится вернуться в положение равновесия.

Уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось вращения  $Z$ , проходящую перпендикулярно плоскости колебаний, без учета силы трения имеет вид:

$$I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgr \cdot \sin \varphi. \quad (8)$$

В случае линейных колебаний при малых углах отклонения можно считать, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgr}{I_z} \cdot \varphi = 0. \quad (9)$$

Выражение (9) представляет собой уравнение свободных гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega = \sqrt{mgr/I_z}$ . Период колебаний физического маятника равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgr}}. \quad (10)$$

Отсюда момент инерции маятника относительно оси  $Z$  определяется как

$$I_z = \frac{mgr \cdot T^2}{4\pi^2}. \quad (11)$$

Используя выражение (11), момент инерции тела  $I_z$  можно определить экспериментально. Выражение (10) может быть применено к данной механической системе, если исследуемый физический маятник можно рассматривать как абсолютно жёсткую систему.

Теорема Гюйгенса - Штейнера оказывается особенно полезной при вычислении моментов инерции симметричных тел относительно осей, не являющихся осями симметрии. Рассмотрим применение теоремы Гюйгенса-Штейнера для расчета периода колебаний физического маятника на нескольких примерах.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОГО ГЛАДКОГО СТЕРЖНЯ

На рисунке 3 представлен однородный гладкий стержень, вращающийся вокруг оси  $Z$ , проходящей через точку  $O$ , и перпендикулярной оси стержня. Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_z = I_{zC} + mr^2,$$

где  $I_{zC}$  – момент инерции тела массой  $m$  относительно оси, проходящей через его центр масс, а  $I_z$  – момент инерции того же тела относительно оси  $Z$ , параллельной данной и отстоящей от нее на расстояние  $r$  (рис. 3).

Теоретически период колебаний данного физического маятника можно найти в соответствии с соотношением (10).

Легко видеть, что если ось подвеса физического маятника проходит через центр масс тела, то период его колебаний стремится к бесконечности. В случае колебаний относительно произвольной оси период колебаний маятника принимает некоторое конечное значение.

Экспериментально период колебаний физического маятника можно найти, измерив время  $t$ , за которое совершается  $N$  полных колебаний:

$$T_0 = \frac{t}{N}. \quad (12)$$

Близкие значения рассчитанного теоретически и измеренного экспериментально периода колебаний подтверждают справедливость соотношений (5) и (12). Момент инерции однородного гладкого стержня длиной  $L$ , ось вращения которого проходит через центр стержня перпендикулярно его главной оси симметрии, равен

$$I_{C(cm)} = \frac{1}{12} mL^2. \quad (13)$$

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов, найдем по теореме Гюйгенса-Штейнера. Учитывая, что расстояние между осями  $r = L/2$ , имеем:

$$I_{z(cm)} = \frac{1}{12} mL^2 + m \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} mL^2. \quad (14)$$

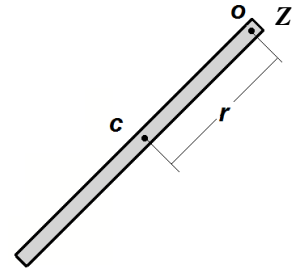


Рисунок 3 - Однородный гладкий стержень, вращающийся вокруг оси, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной оси стержня



Теоретический период колебаний такого стержня равен:

$$T_{cm} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg\left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 5,130 \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (15)$$

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНОГО ГЛАДКОГО ОБРУЧА

В работе используется однородный гладкий обруч радиуса  $R$ , главная ось симметрии которого проходит через центр масс обруча перпендикулярно к его плоскости. Соответствующий ей момент инерции  $I_{C(обр)} = mR^2$ . Момент инерции обруча относительно оси  $Z$ , проходящей через любую точку обруча параллельно главной оси симметрии, определяется по теореме Гюйгенса - Штейнера

$$I_{Z(обр)} = mR^2 + mR^2 = 2mR^2, \quad (16)$$

тогда теоретический период колебаний обруча диаметром  $D$  равен

$$T_{обр} = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{D}{g}}. \quad (17)$$

## 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ ГРУЗАМИ НА КОНЦАХ

Исследуемым телом, момент инерции которого необходимо определить, является стержень с двумя грузами на концах (рис. 4). Один груз в форме дисков 1 и 2 жестко прикреплен к стержню, а другой груз в форме цилиндра 4 можно перемещать вдоль стержня 3. Диски 1 и 2 выполнены из материала с плотностью  $\rho_{1,2} = 7400 \text{ кг/м}^3$ ; материал стержня 3 имеет плотность  $\rho_3 = 8000 \text{ кг/м}^3$ ; материал цилиндра 4 с отверстием имеет плотность  $\rho_4 = 7400 \text{ кг/м}^3$ .

Рассматривая исследуемое тело как систему, состоящую из четырех тел правильной геометрической формы, можно теоретически рассчитать его момент инерции относительно оси вращения. Масса и плотность тела связаны соотношением  $m = \rho \cdot V$ . Тогда массы дисков и стержней можно представить следующим образом:

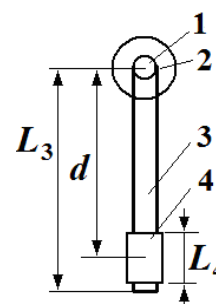


Рисунок 4 – Физический маятник

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot h_1, & m_2 &= \rho_2 \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot h_2, \\ m_3 &= \rho_3 \cdot \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot L_3, & m_4 &= \rho_4 \cdot \frac{\pi \cdot D_4^2}{4} \cdot L_4, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $D_1, D_2, D_3, D_4$  – диаметры соответствующих дисков и стержней,  $h_1, h_2, L_3, L_4$  – высоты дисков и длины стержней, соответственно.

С учетом того, что цилиндр 4 находится на конце стержня 3, и ось вращения  $Z$  проходит через конец стержня 3, получим выражение для момента инерции данного тела относительно оси вращения в виде:

$$I_m = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2} m_1 \frac{D_1^2}{4} + \frac{1}{2} m_2 \frac{D_2^2}{4} + \frac{1}{3} m_3 L_3^2 + \frac{1}{12} m_4 L_4^2 + m_4 d^2. \quad (19)$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

### Задание 1. Определение периода колебаний однородного гладкого стержня

1. Измерьте длину стержня  $L$ .

2. Рассчитайте теоретическое значение периода колебаний стержня  $T_m$  по формуле

$$T_{cm} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg\left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} = 5,130 \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

3. Измерьте 3-5 раз время  $t$  30-40 полных колебаний стержня. Определите экспериментальные значения периодов колебаний  $T_j$  по формуле  $T_j = \frac{t}{N}$ .

4. Найдите среднее значение экспериментального периода колебаний стержня  $\overline{T_j}$ . Результаты вычислений запишите в таблицу 1.

5. Сравните теоретическое и среднее экспериментальное значения периодов колебаний гладкого однородного стержня.

6. Оцените относительную погрешность измерений  $T_m$  и  $T_j$ , соответствующую прямым  $\epsilon_j$  и косвенным  $\epsilon_m$  измерениям.

Таблица 1.

Тело	Период колебаний										
	$T_m$ , с	$\Delta T_m$ , с	$\varepsilon_m$ , %	$T_j$ , с					$\overline{T_j}$ , с	$\Delta T_j$ , с	$\varepsilon_j$ , %
стержень $L =$ м											

**Задание 2. Определение периода колебаний однородного гладкого обруча**

1. Измерьте диаметр обруча  $D$ .

2. Рассчитайте по формуле  $T_{обр} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{g}}$  теоретическое значение периода колебаний обруча.

3. Измерьте 3-5 раз время  $t$  30-40 полных колебаний обруча и определите экспериментальные значения периода колебаний  $T_j$  по формуле  $T_j = \frac{t}{N}$ .

4. Найдите среднее значение  $\overline{T}_j$ . Результаты вычислений запишите в таблицу 2.

5. Сравните теоретическое и среднее экспериментальное значения периодов колебаний обруча.

6. Оцените относительную погрешность измерений  $T_m$  и  $T_j$ , соответствующую прямым  $\varepsilon_j$  и косвенным  $\varepsilon_m$  измерениям.

Таблица 2.

Тело	Период колебаний										
	$T_m$ , с	$\Delta T_m$ , с	$\varepsilon_m$ , %	$T_j$ , с					$\overline{T_j}$ , с	$\Delta T_j$ , с	$\varepsilon_j$ , %
обруч $D =$ м											

**Задание 3. Определение момента инерции однородного стержня с двумя грузами на концах**

1. Пять раз определите время 20 полных колебаний маятника. Данные измерений занесите в таблицу 3.

2. Определите среднее значение времени 20 полных колебаний и, используя полученное значение, по формуле  $\overline{T}_j = \frac{t_{cp}}{N}$  найдите среднее значение периода колебаний  $\overline{T}_j$ .

3. Снимите маятник с установки. Измерьте с помощью штангенциркуля и линейки с точностью до трех значащих цифр диаметры  $D_1, D_2, D_3, D_4$ , высоты  $h_1, h_2$  и длины  $L_3, L_4$  дисков 1, 2 и стержней 3, 4, составляющих физический маятник (рис. 1). Измерьте расстояние  $d$  между центром масс тела 4 и точкой подвеса. Повторите каждое измерение не менее 3-5 раз. Результаты занесите в таблицу 4. Найдите средние значения измеренных величин.

4. Расположите маятник на призме, как показано на рисунке 2, и добейтесь состояния равновесия. В состоянии равновесия точка опоры будет совпадать по вертикали с положением центра масс маятника. Измерьте расстояние  $L$  от точки подвеса до центра масс маятника. Результат занесите в таблицу 4.

5. Используя известные значения удельной плотности материала и данные таблицы 4, рассчитайте массы грузов  $m_1, m_2, m_3, m_4$  по формулам:

$$m_1 = \rho_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} \cdot h_1, \quad m_2 = \rho_2 \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \cdot h_2,$$

$$m_3 = \rho_3 \cdot \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} \cdot L_3, \quad m_4 = \rho_4 \cdot \frac{\pi \cdot D_4^2}{4} \cdot L_4.$$

6. По формуле  $I_j = \frac{mgL \cdot (\overline{T}_j)^2}{4\pi^2}$  и данным таблицы 4 рассчитайте

экспериментальное значение момента инерции, приняв, что масса маятника равна  $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ .

7. Рассчитайте теоретическое значение момента инерции маятника, используя соотношение

$$I_m = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2}m_1 \frac{D_1^2}{4} + \frac{1}{2}m_2 \frac{D_2^2}{4} + \frac{1}{3}m_3 L_3^2 + \frac{1}{12}m_4 L_4^2 + m_4 d^2$$

8. Оцените погрешности измерений. Сравните результаты, полученные теоретически и экспериментально, пользуясь формулой  $\delta = \frac{|I_j - I_m|}{I_j} \cdot 100\%$ .

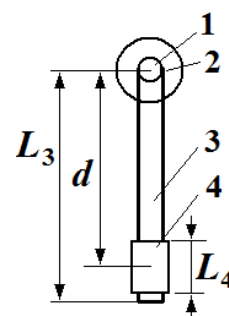


Рисунок 1 – Физический маятник

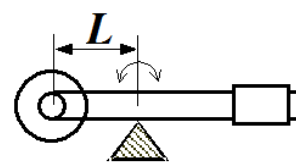


Рисунок 2 – Определение центра масс маятника

Таблица 3

## Экспериментальные данные для определения момента инерции тела сложной конфигурации

$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_4, \text{с}$	$t_5, \text{с}$	$t_{cp}, \text{с}$	$\overline{T}_g, \text{с}$	$I, \text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon, \%$

Таблица 4

## Данные для теоретического расчета момента инерции тела сложной конфигурации

№ изм.	$D_1, \text{м}$	$D_2, \text{м}$	$D_3, \text{м}$	$D_4, \text{м}$	$h_1, \text{м}$	$h_2, \text{м}$	$L_3, \text{м}$	$L_4, \text{м}$	$d, \text{м}$
1									
2									
3									
4									
5									
среднее									
Данные установки : $\rho_{1,2} = 7400 \text{ кг/м}^3$ ; $\rho_3 = 8000 \text{ кг/м}^3$ ; $\rho_4 = 7400 \text{ кг/м}^3$ .									
$m_1 = \quad \text{кг}, m_2 = \quad \text{кг}, m_3 = \quad \text{кг}, m_4 = \quad \text{кг}, m = \quad \text{кг}$									
$L = \quad \text{м}, I_1 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2, I_2 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2, I_3 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2, I_4 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2$									
$I_m = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2, \delta = \quad \%$									

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что называется моментом инерции материальной точки, твердого тела и от чего они зависят? Физический смысл момента инерции.
2. Что такое физический маятник?
3. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
4. В чем состоит метод проверки справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера, используемый в данной работе?
5. Получите формулы для периода колебаний стержня и обруча.
6. Каким образом теорема Гюйгенса-Штейнера применяется для расчета периода колебаний физического маятника?
7. По указанию преподавателя получите формулу для момента инерции симметричного тела относительно его главной оси симметрии.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

**Цель работы.** Используя закон сохранения механической энергии, определить момент инерции маятника.

**Приборы и оборудование.** Установка для измерения моментов инерции FPM-03, набор колец.

**Теоретическое введение.** Движение тела, не имеющего закрепленных точек, относится к виду *плоского движения*. Примером плоского движения является движение **маятника Максвелла**, который представляет собой небольшой диск (маховичок) жестко насаженный на стержень и подвешенный на двух параллельных нерастяжимых нитях, предварительно намотанных на ось маховичка (рис. 1а). Нити во время движения разматываются до полной длины. Раскрутившийся маховичок по инерции продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять опускается вниз и т. д. Маховичок будет совершать возвратно-поступательные движения в вертикальной плоскости при одновременном вращении вокруг оси  $OO'$ , поэтому данное устройство и называют маятником.

Совокупность тел, рассматриваемых как единое целое, называют **механической системой** (стержень, диск и кольцо). Механическая система может быть **замкнутой (изолированной)**, если она не взаимодействует с внешними телами, или **незамкнутой (неизолированной)**. Стержень, диск и кольцо можно рассматривать как механическую систему, движение которой происходит под действием: силы тяжести  $m\vec{g}$ , сил натяжения нитей  $\vec{T}$ , сил сопротивления (рис. 1а).

Механические силы делятся на: консервативные и неконсервативные. Консервативными (потенциальными) называют силы, работа которых определяется только начальным и конечным положениями тел и не зависит от траектории движения. Неконсервативными (непотенциальными) называют силы, всегда направленные противоположно скоростям при любых перемещениях тел и совершающие отрицательную суммарную работу  $A_{\text{дис}}$ , зависящую от траектории. В *реальных* механических системах присутствие неконсервативных сил приводит к рассеянию (диссипации) механической энергии. В *идеализированных* механических системах действием неконсервативных сил пренебрегают.

Колебания маятника Максвелла являются хорошей иллюстрацией перехода механической энергии из одной формы в другую и рассеяния (диссипации) механической энергии.

По закону сохранения энергии полная механическая энергия  $E$  замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная:

$$E = E_n + E_k = \text{const}, \quad (1)$$

где  $E_n$  – потенциальная энергия, выбранная относительно произвольного нулевого уровня отсчета;  $E_k$  – суммарная кинетическая энергия.

Если в замкнутой механической системе действуют консервативные и неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы уменьшается со временем. Уменьшение механической энергии равно работе, совершаемой неконсервативными силами системы:

$$A_{\text{дис}} = \Delta E = E_2 - E_1, \quad (2)$$

где  $E_1, E_2$  – механические энергии системы до и после совершения неконсервативными силами работы  $A_{\text{дис}}$ , соответственно.

Рассмотрим сначала движение *идеализированного* маятника Максвелла. Допущение, что на маятник действуют только консервативные силы, возможно, если работа неконсервативных сил много меньше изменения потенциальной энергии.

Примем за начало отсчета потенциальной энергии крайнее нижнее положение его центра масс (рис. 1б). В крайнем верхнем положении запасенная энергия маятника определяется максимальной потенциальной энергией  $E_n = mgh$ . При падении маятника его потенциальная энергия  $E_n$  уменьшается, переходя в кинетические энергии поступательного движения центра масс  $E_k^{\text{noc}} = \frac{mV^2}{2}$  и вращательного движения  $E_k^{\text{sp}} = \frac{I\omega^2}{2}$  относительно оси  $OO'$ , проходящей через центр масс (рис. 1). Кинетическая энергия механической системы  $E_k$  растет, принимая свое максимальное значение в крайнем нижнем положении.

Из закона сохранения механической энергии следует, что:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3)$$

где  $h$  – начальная высота падения маятника, определяющая его полную энергию,  $I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения  $OO'$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения маятника относительно этой оси,  $V$  – скорость

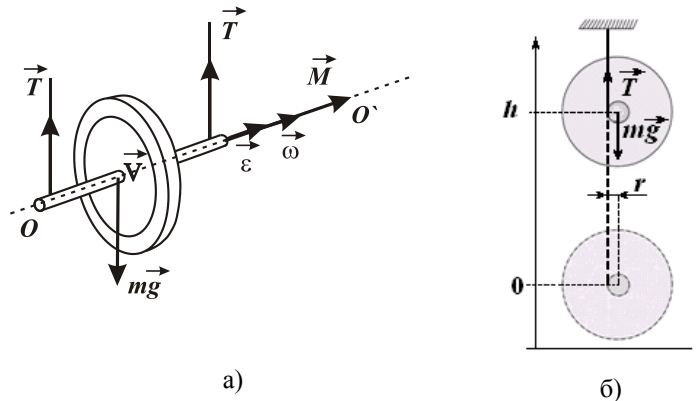


Рисунок 1 - Маятник Максвелла

центра масс,  $m$  – масса механической системы.

С помощью маятника Максвелла можно решить две экспериментальные задачи:

- 1) проверку закона сохранения энергии в механике;
- 2) определение момента инерции маятника.

Известно, что  $\omega = V/r$ , где  $r$  – радиус стержня.  $r$  – является плечом силы  $\vec{T}$ , момент  $\vec{M}$  которой сообщает вращательное движение маятнику. Выполним подстановку формулы в уравнение (3):

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I \frac{V^2}{r^2}, \quad (4)$$

выразим момент инерции маятника из полученного соотношения:

$$I = mr^2 \left( \frac{2gh}{V^2} - 1 \right). \quad (5)$$

Так как центр масс маятника движется равноускоренно, пройденный им путь и скорость движения можно определить как

$$\begin{cases} h = V_0 t + at^2/2, \\ V = V_0 + at \end{cases} \quad (6)$$

где  $t$  – время движения маятника,  $a$  – ускорение его центра масс. В момент времени  $t=0$  в верхнем положении маятника начальная скорость  $V_0=0$ , тогда

$$\begin{cases} h = at^2/2, \\ V = at \end{cases} \quad (7)$$

Из этой системы уравнений находим скорость в нижней точке траектории движения маятника  $V = 2h/t$  и подставляем ее в уравнение (5):

$$I = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right)^1 \quad (8)$$

В выражении (8) не учтена толщина нити, которая наматывается на ось маятника. В реальных условиях ее нужно обязательно учитывать. Сила натяжения нити  $T$  приложена не к краю стержня, а к середине нити (рис. 2). Поэтому радиус стержня  $r$  следует заменить суммой  $r + r_n$ , где  $r_n$  – радиус нити. Тогда выражение (8) принимает вид:

$$I = m(r + r_n)^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (9)$$

Момент инерции механической системы равен сумме моментов инерции отдельных тел, образующих данную систему (свойство аддитивности). Маятник Максвелла (рис. 3) состоит из трех элементов: стержня, диска и кольца. Поэтому момент инерции маятника равен:

$$I = I_{cm} + I_d + I_k \quad (10)$$

Моменты инерции диска, стержня и кольца можно найти по формулам:

$$I_d = \frac{m_d R_d^2}{2}, \quad I_{cm} = \frac{m_{cm} r^2}{2}, \quad I_k = \frac{m_k}{2} (R_1^2 + R_2^2). \quad (11)$$

На *реальный* маятник одновременно действуют консервативные и неконсервативные силы. Согласно закону сохранения полной энергии для замкнутой диссипативной системы работа сил сопротивления равна:

$$A_{duc} = -\Delta E_n = \Delta E_k. \quad (12)$$

Перепишем это выражение с учетом измеряемых величин:

$$mgh_0 = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh, \quad (13)$$

где  $h_0$  – начальная высота падения маятника, определяющая его полную энергию,  $h$  – текущая высота. Маятник за один период своего движения не поднимается до начальной высоты  $h_0$ , а достигает только некоторой высоты  $h < h_0$ .

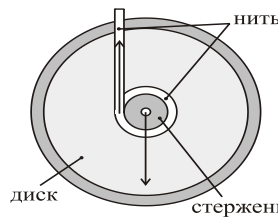


Рисунок 2 - Точки приложения сил

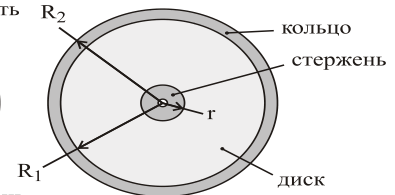


Рисунок 3 - Определение линейных размеров маятника Максвелла

<sup>1</sup> Это соотношение можно получить другим способом, применяя к движению маятника основные законы динамики поступательного и вращательного движений. В этом предлагается убедиться самостоятельно.

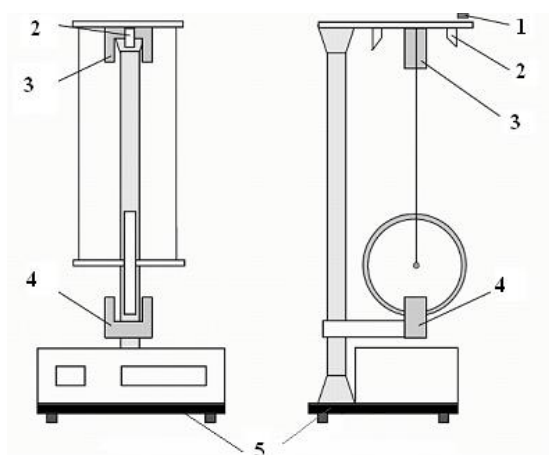
## УСТРОЙСТВО И ПРИНЦИП РАБОТЫ УСТАНОВКИ

Внешний вид лабораторной установки показан на рисунке 4. На основании 5 закреплена стойка, к которой крепятся два кронштейна: неподвижный верхний 3 и подвижный нижний 4. Подвижный кронштейн легко перемещается вдоль стойки и фиксируется в выбранном положении. Верхний кронштейн снабжен воротничком 1 для крепления и регулировки длины нити бифилярного подвеса, электромагнитом 2 для фиксации маятника в верхнем положении и фотоэлектрическим датчиком, который включает секундомер. На подвижном кронштейне закреплен фотодатчик, выключающий электромагнит. Сигналы с фотодатчиков служат для автоматического пуска и остановки секундомера, шкала которого вынесена на лицевую панель установки. Кнопка «Сеть» включает питание установки, кнопка «Сброс» производит обнуление показаний секундомера. При нажатии кнопки «Пуск» отключается электромагнит, и маятник приходит в движение.

Массу и момент инерции маятника можно менять, накладывая сменные металлические кольца. Длина нити должна быть такой, чтобы нижняя кромка диска была на 1-2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика. Ось маятника должна быть горизонтальной. Длина нити (высота падения) определяется по шкале вертикальной стойки прибора.

### ПОДГОТОВКА УСТАНОВКИ К РАБОТЕ

1. Проверьте устойчивость прибора. При необходимости отрегулируйте положения основания 5 при помощи регулировочных опор.
2. Установите при помощи кронштейна 4 высоту падения маятника  $h$ . При помощи воротничка с фиксатором 1 отрегулируйте длину нитей маятника Максвелла (обратиться к инженеру!). Следите за тем, чтобы ось маятника была расположена горизонтально.
3. На диск маятника наложите стальное кольцо. Убедитесь, что край кольца находится примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика. Проверьте, соответствует ли нижняя кромка кольца нулю на стойке. Если нет, отрегулируйте высоту нижнего кронштейна с фотодатчиком.
4. Включите кнопку «Сеть». Нажмите кнопку «Сброс» чтобы убедиться, что на табло установились нули.
5. Аккуратно вращая диск маятника, намотайте на его ось нить подвеса, укладывая ее равномерно, плотно прилегающими витками. Зафиксируйте маятник в верхнем положении с помощью электромагнита.
6. Нажмите кнопку «Пуск» на передней панели миллисекундомера. При этом маятник придет в движение, а таймер начнет отсчет времени. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится.
7. Прочитайте измеренное значение времени падения маятника и занести его в нужную таблицу.
8. Нажмите кнопку «Сброс» и приведите маятник в исходное положение (зафиксируйте его в верхнем положении с помощью электромагнита).



### ПАРАМЕТРЫ УСТАНОВКИ:

1. Радиус стержня  $r = 5$  мм.
2. Радиус нити  $r_n = (0,6 \pm 0,05)$  мм.
3. Радиус диска  $R_1 = 42,5$  мм.
4. Внешний радиус сменного кольца  $R_2 = 52,5$  мм.

Значения остальных параметров указаны на элементах маятника.

Систематическая погрешность измерения времени равна:

$$\Delta t_{\text{сист}} = 0,001 \text{ с.}$$

Систематическая погрешность измерительной линейки:

$$\Delta l_{\text{сист}} = 0,5 \text{ мм.}$$

Рисунок 4 - Внешний вид экспериментальной установки

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

**Внимание!** При проведении опыта нужно следить, чтобы нить наматывалась на ось в **один слой не слишком туго**.

В опытах, проводимых без кольца, к измеренной высоте нужно **добавить** 1 см, т.е. толщину кольца.

**Расчеты проводить с точностью до четырех значащих цифр после запятой!**

**Задание 1.** Экспериментальное определение момента инерции  $I$  маятника Максвелла.

1 Измерьте время падения маятника с определенной высоты. опыты провести с разными сменными кольцами не менее 5 раз. Массу колец и время падения запишите в таблицу 1.

2 Вычислите среднее время падения  $t_{cp}$ .

3 Используя значение  $t_{cp}$ , по формуле  $I = m(r + r_n)^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$  определите момент инерции маятника.

4 Рассчитайте погрешности измерений моментов инерции.

Таблица 1

№ изм.	$m_k, \text{ кг}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$t_{cp}, \text{ с}$	$I, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\Delta I, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\varepsilon, \%$
1										
2										
Данные установки: $h =$ м; $R_1 =$ м; $R_2 =$ м; $r =$ м; $r_H =$ м.										

**Задание 2.** Исследование зависимости  $I(h)$ .

1 Для указанного преподавателем кольца провести измерение времени падения маятника с 3-х различных высот.

Используя выражение  $I = m(r + r_H)^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$ , рассчитайте момент инерции  $I$  маятника Максвелла для этих высот.

Результаты расчетов запишите в таблицу 2. Опишите зависимость момента инерции маятника от высоты, сделайте выводы.

Таблица 2

№ изм.	$h, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_4, \text{ с}$	$t_5, \text{ с}$	$t_{cp}, \text{ с}$	$I, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$I_{теор}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\delta, \%$
1										
2										
3										
Данные установки: $m =$ кг; $R_1 =$ м; $R_2 =$ м; $r =$ м; $r_H =$ м.										
Моменты инерции: $I_d =$ кг·м <sup>2</sup> ; $I_{cm} =$ кг·м <sup>2</sup> ; $I_k =$ кг·м <sup>2</sup> .										

**Задание 3.** Теоретический расчет момента инерции маятника Максвелла.

1 По формулам  $I_d = \frac{m_d R_d^2}{2}$ ,  $I_{cm} = \frac{m_{cm} r^2}{2}$ ,  $I_k = \frac{m_k}{2} (R_1^2 + R_2^2)$  рассчитайте моменты инерции всех элементов

маятника (диска, стержня, кольца).

2 По формуле  $I = I_{cm} + I_d + I_k$  вычислите теоретическое значение момента инерции маятника Максвелла.

3 Сравните теоретическое значение момента инерции с экспериментальным значением, оценив величину относительного отклонения по формуле  $\delta = \frac{|I_{теор} - I|}{I_{теор}} \cdot 100 \%$ . Объясните возникшие расхождения.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

- 1 Что такое момент инерции материальной точки, абсолютно твердого тела?
- 2 Что такое энергия? Какие виды энергии вы знаете?
- 3 Какие системы отсчета называются замкнутыми?
- 4 Какие силы называют консервативными и неконсервативными? Приведите примеры таких сил.
- 5 Сформулируйте и запишите закон сохранения механической энергии применительно для консервативных и диссипативных систем.
- 6 Что представляет собой маятник Максвелла? Какое движение он совершает?
- 7 Запишите закон сохранения энергии для маятника Максвелла.
- 8 Почему, опустившись до нижней точки, маятник снова начинает подниматься вверх? Объясните, почему маятник не поднимается на прежнюю высоту.
- 9 Какая энергия маятника больше – кинетическая энергия поступательного движения или кинетическая энергия вращения? Запишите формулы, раскройте смысл величин, входящих в них.
- 10 Как изменяются ускорение, скорость и сила натяжения нитей при движении маятника.



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

**Цель работы.** Изучение закономерностей движения сферического тела в вязкой жидкости. Определение коэффициентов динамической и кинематической вязкости жидкости методом Стокса.

**Приборы и оборудование.** Цилиндрический сосуд с исследуемой жидкостью, миллиметровая линейка, набор шариков, секундомер.

**Теоретическое введение.** Идеальная жидкость, т. е. жидкость, движущаяся без трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам в большей или меньшей степени присуща вязкость (внутреннее трение). Вязкость проявляется в том, что возникающее в жидкости или газе движение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

**Вязкость (внутреннее трение)** – свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой.

Для объяснения механизма вязкости рассмотрим жидкость, расположенную между двумя стеклянными параллельными пластинами (рис. 1). Пусть пластины имеют поверхность площадью  $S$  и расположены на достаточно малом расстоянии  $h$  друг от друга. Представим себе, что в начальный момент времени система находилась в состоянии покоя. В следующий момент времени верхняя пластина приводится в движение в направлении  $X$  тангенциальной силой  $F$  с постоянной скоростью  $v_0$ . Нижняя пластина остается неподвижной. Жидкости, находящейся между пластинами, постепенно передается некоторое количество движения (рис. 2а), и со временем в жидкости устанавливается постоянный профиль скорости  $v(Z)$ , изображенный на рисунке 2б.

Чтобы поддерживать движение верхней пластины в установившемся стационарном состоянии, необходимо приложить к ней постоянную тангенциальную силу  $F$ . Эта сила может быть найдена (при условии, что течение ламинарное, т.е. не вихревое) из соотношения:

$$\frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{v_0}{h}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что сила, приходящаяся на единицу площади поверхности, пропорциональна скорости. Модуль силы уменьшается с увеличением расстояния  $h$  между пластинами (пластины введены только для лучшей иллюстрации процесса, реально мономолекулярные слои жидкости прилипают к пластинам и **силы действуют между слоями жидкости**).

Для произвольного профиля скорости величина движущей силы:

$$F = \eta \cdot \frac{dv}{dz} S, \quad (2)$$

где  $F$  – тангенциальная сила, вызывающая сдвиг слоев жидкости друг относительно друга;  $S$  – площадь соприкасающихся слоев;  $dv/dz$  – градиент скорости, показывающий быстроту изменения (увеличения) скорости в направлении  $Z$ , перпендикулярном движению слоев. Коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется **коэффициентом внутреннего трения** или вязкости (динамической вязкости).

Пластина не получает при движении ускорения, значит действие силы  $F$  компенсируется равной ей по модулю и противоположно направленной силой. Это **сила вязкого трения**, действующая на пластинку при ее движении в жидкости в направлении, противоположном движению пластины.

$$F_{mp} = -\eta \cdot \frac{dv}{dz} S. \quad (3)$$

Уравнение (3) является основным законом вязкого течения. В такой форме оно было получено И.Ньютоном в 1687г. Закон утверждает: при стационарном (ламинарном) движении слоев жидкости или газа с различными скоростями между ними возникает касательная сила, пропорциональная градиенту скорости  $dv/dz$  слоев и площади  $S$  их соприкосновения; направленная в сторону, противоположную направлению течения жидкости.

Знак «минус» в уравнении (3) показывает, что сила вязкого трения направлена в сторону, противоположную скорости движения жидкости (также, как и сила сухого трения).

Закон вязкости Ньютона можно переписать в другой форме. Обозначим через  $\tau = F/S$  – тангенциальное напряжение, прилагаемое в направлении оси  $X$  к поверхности слоя жидкости, расположенного на расстоянии  $Z$  от нижней пластины. Тогда уравнение (2) можно записать в виде:

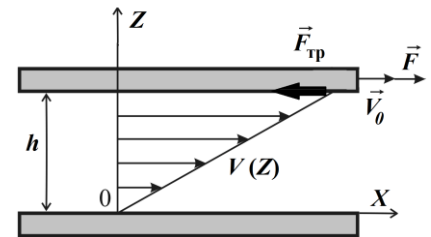


Рисунок 1 - Схема однородного сдвига слоя жидкости

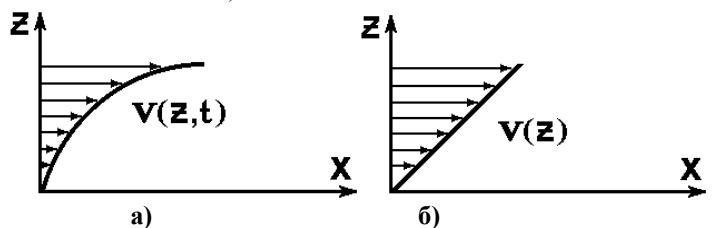


Рисунок 2 - Формирование стационарного профиля скорости при ламинарном течении жидкости, находящейся между двумя параллельными слоями: а) нестационарный режим течения; б) стационарный режим течения



$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dZ}. \quad (4)$$

Согласно соотношению (2), коэффициент динамической вязкости численно равен тангенциальной силе, приходящейся на единицу площади, необходимой для поддержания разности скоростей, равной единице, между двумя параллельными слоями жидкости или газа, расстояние между которыми равно единице:

$$\eta = \frac{F}{S \cdot \frac{dv}{dZ}}.$$

Величина, обратная вязкости  $\varphi = 1/\eta$ , называется **текучестью**.

Единица измерения коэффициента динамической вязкости в системе СИ – (Па·с). Также используется единица динамической вязкости – пуаз: 1 пуаз=0,1 Па·с.

Величина  $\nu$ , определяемая выражением (5), называется **кинематической вязкостью**.

$$\nu = \eta/\rho, \quad (5)$$

где  $\rho$  – плотность вязкой среды. Единица измерения кинематической вязкости в системе СИ – (м<sup>2</sup>/с).

Все вышесказанное относится не только к жидкостям, но и к газам.

Внутреннее трение можно отнести к группе явлений, называемых **явлениями переноса**, считая, что внутреннее трение обусловлено переносом импульса. Такой подход лучше согласуется с молекулярной природой и других явлений переноса – теплопроводностью (переносом тепловой энергии) и диффузией (переносом массы).

**Вязкость в газах.** Физическая природа вязкости может быть объяснена с позиций молекулярно-кинетической теории. В газах расстояние между молекулами существенно больше радиуса действия межмолекулярных сил. Поэтому внутреннее трение в газах возникает вследствие хаотического (теплого) движения молекул, в результате которого происходит постоянный обмен молекулами между движущимися друг относительно друга слоями газа. Молекулы из более быстрого слоя, попадая в более медленный, в результате соударений передают ему некоторое количество движения (импульс), вследствие чего этот слой начинает двигаться быстрее. Отдав некоторый импульс, слой, движущийся более быстро, замедляется. Таким образом, компонента вектора импульса  $p_x$  передается от слоя к слою через вязкую среду в направлении оси  $Z$ . Согласно II закону Ньютона:

$$F_{mp.x} = \frac{dp_x}{dt}, \quad (6)$$

где  $p_x = m \cdot v_x$  – импульс молекул газа,  $m$  – масса газа,  $v$  – скорость газа.

Следовательно, величину  $\tau$  можно также истолковать как плотность потока импульса в направлении оси  $Z$ :

$$\tau = \frac{F_{mp.x}}{S} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp_x}{dt} = j_p, \quad (7)$$

где  $j_p$  – **плотность потока импульса** – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $Z$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $Z$ .

С учетом формул (3), (4) последнее соотношение можно переписать в виде:

$$j_p = -\eta \cdot \frac{dv}{dZ}. \quad (8)$$

Знак «минус» в уравнении (8) показывает, что плотность потока импульса направлена в сторону отрицательного градиента скорости. Импульс переносится из области с большей скоростью в область с меньшей скоростью, так же, как в тепловых процессах тепло передается от более нагретой области к менее нагретой. Силы внутреннего трения между слоями газа действуют так, чтобы уравнивать скорости отдельных слоев.

Вязкость газа не зависит от его давления (или плотности). При изотермическом увеличении давления общее число молекул, переходящих из слоя в слой, увеличивается. Однако каждая из молекул проходит без столкновения меньшие расстояния, и менее глубоко проникает в соседний слой. Поэтому в целом перенос импульса не меняется.

Вязкость газов увеличивается при изобарном нагревании  $\eta \propto \sqrt{T}$ . Это объясняется тем, что с повышением температуры  $T$  газа увеличивается скорость теплового движения молекул, что способствует более интенсивному обмену молекул между слоями и приводит к увеличению направленного переноса импульса молекул.

Для очень разреженных газов понятие вязкости теряет смысл.

**Вязкость в жидкостях.** В жидкостях, где расстояние между молекулами много меньше, чем в газах, вязкость обусловлена в первую очередь межмолекулярным взаимодействием. Однако, вклад в вязкость механизма обмена импульсом между слоями жидкости, благодаря тепловому движению молекул, также является существенным. Поэтому все полученные выше формулы могут быть применены и к жидкостям.

В жидкостях молекулярное движение в основном колебательное, лишь изредка молекулы перескакивают с одного места колебания в другое. В свободной жидкости все направления перескоков равновероятны, и жидкость неподвижна. Внешние силы, приложенные к жидкости, вызывают увеличение скачков молекул в направлении действия силы, и жидкость начинает течь.

В жидкости молекула может проникнуть в соседний слой лишь при образовании в нем вакантного места, либо

при обмене молекул местами. Для такого скачка молекула должна получить некоторую дополнительную энергию вязкого течения – энергию активации  $\Delta E$ . Поскольку с изменением температуры частота и амплитуда колебаний молекул меняется, то вязкость будет величиной переменной. Вязкость большинства жидкостей с ростом температуры убывает по закону:  $\eta \propto \exp(\Delta E/kT)$ , где  $k$  – постоянная Больцмана.

Вязкость жидкости зависит от химической структуры молекул. Жидкости, которые подчиняются соотношению (3), называются **ньютоновскими жидкостями**. Поведение всех газов и большинства обычных жидкостей описывается уравнением (3). Различные пасты, суспензии и высокополимерные материалы уравнению Ньютона не подчиняются и носят название **неньютоновских жидкостей**. В этих жидкостях работа внешней силы затрачивается не только на преодоление истинной (ньютоновской) вязкости, но и на разрушение межмолекулярных связей.

Существует несколько классических методов определения вязкости жидкости  $\eta$ :

- 1) метод падающего шарика, основанный на решенной Стоксом гидродинамической задаче о движении шарика в вязкой жидкости (метод Стокса);
- 2) метод, в основе которого лежит теоретическое выражение для объема жидкости (газа), протекающего через капиллярную трубку (метод Пуазейля);
- 3) метод затухающих колебаний тела (шар, цилиндр, диск), подвешенного на упругой нити в исследуемой среде.

В данной работе будет рассмотрен метод Стокса. Остальные методы предлагается изучить самостоятельно.

**Формула Стокса** применяется лишь в случае *незначительных скоростей* движения  $\mathbf{v}$  шарообразных тел *малых размеров*, т.е. при условии **ламинарного** характера течения жидкости.

Для оценки ламинарности, а, следовательно, и применимости формулы Стокса применяется так называемое число (критерий) Рейнольдса ( $Re$ ):

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \quad (9)$$

где  $D$  – характерный размер, в нашем случае диаметр шарика;  $\rho$  – плотность жидкости.

Течение жидкости будет **ламинарным**, если  $Re < 2000$ , **турбулентным**, если  $Re > 2000$ .

Формула Стокса выводится в предположениях:

- 1) вязкая среда неограниченна и в бесконечности покоится;
- 2) скольжения на границе с шариком нет;
- 3) движение обтекающей шарик жидкости – ламинарное.

Гидродинамический вывод формулы Стокса довольно сложен. Ограничимся предположением о равномерном движении маленького шарика радиуса  $r$  в ньютоновской жидкости в направлении оси  $y$  (рис. 3).

Обозначим скорость шарика относительно жидкости через  $\mathbf{v}$ . Распределение скоростей в соседних слоях жидкости, увлекаемых шариком, имеет вид, изображенный на рисунке 3. При движении шарика слой жидкости, граничащий с его поверхностью, прилипает к шарiku и движется с такой же скоростью. В непосредственной близости к поверхности шарика эта скорость равна  $\mathbf{v}$ , а по мере удаления уменьшается и практически становится равной нулю на некотором расстоянии  $L$  от поверхности шарика.

Очевидно, что чем больше радиус шарика, тем большая масса жидкости (газа) вовлекается им в движение, и  $L$  должно быть пропорционально его радиусу  $r$ :

$$L = \alpha \cdot r,$$

где  $\alpha$  – среднее значение коэффициента пропорциональности. Изменение модуля скорости шарика в направлении  $x$  в вязкой среде равно:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v - 0}{\alpha \cdot r} = \frac{v}{\alpha \cdot r}.$$

Площадь поверхности шарика  $S = 4\pi r^2$ . Модуль силы внутреннего трения, испытываемой движущимся шариком, равен

$$F_{тр} = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot S = \eta \cdot \frac{v}{\alpha \cdot r} \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{4\pi}{\alpha} \cdot \eta \cdot r \cdot v.$$

Стоксом был получен для шарика коэффициент  $\alpha = \frac{2}{3}$ . Следовательно, сила вязкого трения, испытываемая шариком, движущимся в жидкости (газе):

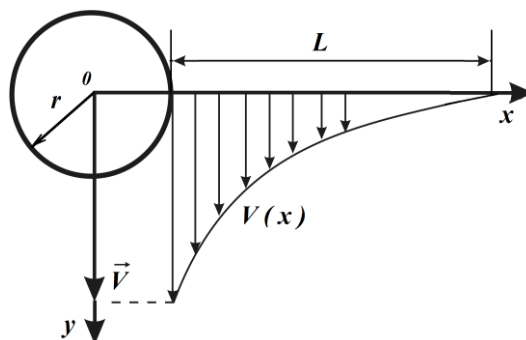


Рисунок 3 - Распределение скоростей в соседних слоях жидкости при движении шарика

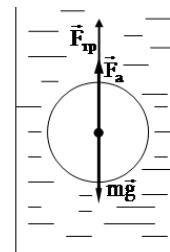


Рисунок 4 - Векторная диаграмма сил, действующих на шарик при его падении в жидкости

$$F_{mp} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (10)$$

Сила Стокса, согласно формуле (10), возрастает с увеличением скорости шарика. Сила внутреннего трения имеет электромагнитную природу, как и сила сухого трения. Она действует между слоями жидкости, один из которых прилипает к шарiku и перемещается со скоростью падения шарика. Сила Стокса направлена в сторону, противоположную вектору скорости шарика.

По формуле (10) можно, например, определять скорости оседания частиц тумана и дыма. Ею пользуются и для решения обратной задачи: измеряя скорость падения шарика в жидкости  $v$ , можно определить ее вязкость  $\eta$ .

**Метод Стокса.** Пусть маленький невращающийся шарик радиуса  $r$  падает в исследуемой несжимаемой жидкости (или жидкость движется навстречу неподвижному шарiku). При этом на него будут действовать три силы: сила тяжести  $mg$ , направленная вниз, выталкивающая сила Архимеда  $F_a$ , равная весу вытесненной телом жидкости, и сила внутреннего трения жидкости (сила Стокса)  $F_{mp}$ , направленные вверх (рис. 4).

Сила тяжести и сила Архимеда дают статические составляющие в равнодействующую силу. Они существуют, даже если жидкость и шарик неподвижны. Сила Стокса дает динамическую составляющую.

Выталкивающая сила описывается законом Архимеда:

$$F_a = \rho \cdot g \cdot V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g, \quad (11)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $V$  – объем шарика.

Силу тяжести определим из соотношения:

$$mg = \rho_I \cdot g \cdot V = \rho_I \cdot g \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3, \quad (12)$$

где  $m$  – масса шарика,  $\rho_I$  – плотность шарика.

Сила тяжести и сила Архимеда постоянны по модулю, а сила вязкого трения, согласно формуле (10), увеличивается с увеличением скорости шарика, и наступает момент, когда сила тяжести уравнивается суммой сил трения и Архимеда. С этого момента движение шарика становится равномерным, а его ускорение становится равным нулю.

В этом случае уравнение, описывающее поведение шарика, может быть записано в виде:

$$m\vec{g} + \vec{F}_a + \vec{F}_{mp} = 0. \quad (13)$$

Подставляя значения сил  $mg$ ,  $F_a$ ,  $F_{mp}$  из уравнений (10) - (12) в уравнение (13), в скалярной форме имеем:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_I \cdot g - \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = 0. \quad (14)$$

Отсюда вязкость жидкости:

$$\eta = \frac{2 \cdot (\rho_I - \rho)}{9 \cdot v} r^2 g. \quad (15)$$

В уравнении (15) удобно ввести диаметр шарика  $D$  и выразить одновременно его скорость  $v$ :  $v = l/t$ , где  $l$  – расстояние между метками на сосуде с жидкостью, соответствующее месту уравнивания сил;  $t$  – время прохождения шариком расстояния  $l$ .

Окончательно получаем расчетную формулу для определения коэффициента динамической вязкости жидкости методом Стокса

$$\eta = \frac{(\rho_I - \rho)}{18 \cdot l} D^2 \cdot t \cdot g. \quad (16)$$

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

1. Опустите пробный шарик в цилиндр с исследуемой жидкостью как можно ближе к его оси и наблюдайте движение шарика. В процессе наблюдения за шариком в момент прохождения им верхней метки глаз должен находиться на одном уровне с меткой.

2. Опустив исследуемый шарик в цилиндр, измерьте секундомером время  $t$  равномерного движения шарика между двумя метками с точностью не менее 0,01 с. Повторите опыт с остальными исследуемыми шариками пять раз.

3. Измерьте расстояние  $l$ , пройденное шариком. Результаты измерений запишите в таблицу.

4. Используя значения  $l$ ,  $t_{cp}$ ,  $D$ , по формуле  $\eta = \frac{(\rho_I - \rho)}{18 \cdot l} D^2 \cdot t \cdot g$  вычислите коэффициент динамической вязкости жидкости. Сравните значение полученной вязкости жидкости с её табличным значением.

5. Используя значение  $\eta_{cp}$ , по формуле  $v = \eta/\rho$  вычислите кинематическую вязкость жидкости  $\nu$ .

6. Оцените значение числа Рейнольдса  $Re$  по формуле  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$ , где  $v$  – скорость равномерного движения шарика. Сделайте вывод о характере обтекания шарика жидкостью (ламинарное или турбулентное) в данных условиях.

7. Вычислите погрешность определения вязкости по формулам, соответствующим косвенным измерениям с

независимыми наблюдениями аргументов. Результаты вычислений запишите в таблицу.

Таблица

№ изм.	$t$ , с	$t_{cp}$ , с	$l$ , м	$\eta_{cp}$ , Па·с	$\Delta\eta$ , Па·с	$\varepsilon_\eta$ , %
1						
2						
3						
4						
5						
Данные установки: $D=(76 \pm 2) \cdot 10^{-5}$ м ; $\rho_1=(1500 \pm 5)$ кг/м <sup>3</sup> ; $\rho=(1000 \pm 5)$ кг/м <sup>3</sup> .						
$v =$ м <sup>2</sup> /с ; $v =$ м/с ; $Re =$ .						

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Объясните механизм возникновения внутреннего трения в жидкостях и газах.
2. Сформулируйте закон Ньютона для вязкости. Пояснить физический смысл коэффициента динамической вязкости.
3. От каких факторов зависит коэффициент динамической вязкости в жидкостях и газах?
4. Что называется кинематической вязкостью? От каких факторов зависит кинематическая вязкость газов и жидкостей?
5. Почему скорость течения вязкой жидкости различна в различных точках сечения потока? Что такое градиент скорости?
6. Какое течение называется ламинарным, турбулентным? Какая безразмерная физическая величина является критерием перехода от ламинарного течения жидкости к турбулентному?
7. В чем заключается метод Стокса? Запишите закон Стокса и укажите область его применения.
8. Опишите движение шарика, падающего в жидкости. Какие силы действуют на движущийся шарик?
9. Почему измерение времени падения шарика начинается не от поверхности жидкости, а от метки, достаточно удаленной от поверхности?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА И ЭФФЕКТИВНОГО ДИАМЕТРА МОЛЕКУЛ ВОЗДУХА

**Цель работы.** Вычислить длину свободного пробега и эффективный диаметр молекул воздуха по коэффициенту внутреннего трения.

**Теоретическое введение.** Заметное отклонение молекул от прямолинейных траекторий при тепловом движении происходит только при их достаточном сближении. Такое взаимодействие между молекулами называется **столкновением**. Процесс столкновения молекул характеризуется величиной **эффективного диаметра** молекул. **Эффективный диаметр** – это минимальное расстояние, на которое могут сблизиться центры двух молекул при их столкновении.

Расстояние, которое проходит молекула между двумя последовательными столкновениями, называется **длиной свободного пробега молекулы**.

В данной работе определяется средняя длина свободного пробега, так как длины пробега отдельных молекул из-за статистического характера процессов в газах, естественно, должны различаться.

Молекулярно – кинетическая теория позволяет получить формулы, в которых макроскопические параметры газа (давление, объем, температура) связаны с его микроскопическими параметрами (размеры молекул, их масса, скорость). Пользуясь этими формулами, можно при помощи легко измеряемых параметров, таких как давление, температура, коэффициент внутреннего трения, получить интересующие нас микропараметры: размеры молекул, длину свободного пробега и т. д.

Из молекулярно - кинетической теории вытекает формула, связывающая вязкость со средней длиной свободного пробега молекулы

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle v \rangle, \quad (1)$$

где  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\rho$  – плотность газа,  $\langle \lambda \rangle$  – средняя длина свободного пробега молекул,  $\langle v \rangle$  – средняя арифметическая скорость движения молекул газа, т. е. среднее значение абсолютной величины скорости молекул.

Из формулы (1) получаем

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3 \cdot \eta}{\rho \cdot \langle v \rangle}. \quad (2)$$

Коэффициент динамической вязкости можно определить, воспользовавшись **формулой Пуазейля**.

$$\eta = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot \Delta P \cdot t}{128 \cdot V \cdot l}, \quad (3)$$

где  $d$  – диаметр трубки,  $l$  – длина трубки, через которую протекает газ,  $\Delta P$  – разность давлений на ее концах,  $V$  – объем газа, протекающего через трубку за определенное время  $t$ .

Кривизна капли, вытекающей из трубки, не учитывается (эта поправка составляет менее 3%).

В газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям. Это распределение описывается функцией  $f(v)$ , называемой **функцией распределения молекул по скоростям** (рис. 1). Функция распределения определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v+dv$ , т.е.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv \quad \text{или} \quad f(v) = \frac{dN(v)}{N dv}. \quad (4)$$

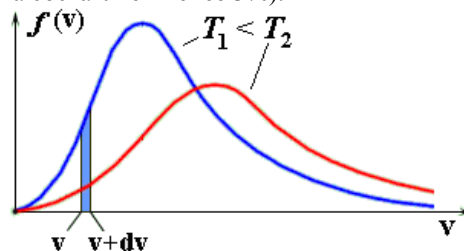


Рисунок 1 - Функция распределения молекул по скоростям

**Закон Максвелла (функция распределения молекул по скоростям) имеет вид:**

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (5)$$

Вид функции распределения  $f(v)$  зависит от газа (массы молекулы  $m_0$ ) и его температуры  $T$ .

Относительное число молекул  $\frac{dN(v)}{N}$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v+dv$ , находится как площадь заштрихованной полоски (рис. 1). Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция  $f(v)$  удовлетворяет **условию нормировки**:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (6)$$

**Наиболее вероятная скорость молекул идеального газа.** Скорость, при которой значение функции

распределения молекул идеального газа по скоростям максимально, называется **наиболее вероятной скоростью**  $v_{\text{в}}$ . Значение наиболее вероятной скорости можно найти, исследуя функцию распределения на экстремум, т.е. приравняв производную  $\frac{df(v)}{dv}$  к нулю.

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (7)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура,  $M$  – молярная масса газа.

Как следует из формулы, с повышением температуры  $v_{\text{в}}$  увеличивается. Это означает, что при повышении температуры максимум функции распределения смещается вправо (рис. 1). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

**Средняя скорость молекулы газа (средняя арифметическая скорость).** Средняя арифметическая скорость молекул газа может быть найдена из распределения Максвелла:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Подставив (5) и проинтегрировав, получим

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (8)$$

**Средняя квадратичная скорость молекулы газа.** Средняя квадратичная скорость может быть также найдена с помощью распределения Максвелла:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv.$$

Подставив (5) и проинтегрировав, получим

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (9)$$

Положения наиболее вероятной, средней арифметической и средней квадратичной скоростей на кривой зависимости  $f(v)$  показано на рисунке 2.

Плотность газа может быть выражена из уравнения Клапейрона – Менделеева:  $PV = \frac{m}{M} RT$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M \cdot P}{R \cdot T}, \quad (10)$$

где  $m$  – масса газа,  $P$  – давление газа.

Подставляя соотношения (3), (8), (10) в выражение (2), получим расчетную формулу для средней длины свободного пробега молекул газа:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \rho_1 \cdot g \cdot h \cdot t \cdot \sqrt{\pi \cdot R \cdot T}}{16 \cdot V \cdot l \cdot P \cdot \sqrt{2M}}, \quad (11)$$

где  $\rho_1$  – плотность жидкости в манометре.

Эффективный диаметр молекулы газа можно вычислить, используя соотношение, выражающее его связь с длиной свободного пробега:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n \cdot D^2}, \quad (12)$$

где  $n$  – концентрация молекул (число молекул в единице объема газа) при данных условиях,  $D$  – эффективный диаметр молекулы газа.

Число молекул в единице объема  $n$  можно определить по основному уравнению МКТ  $P = nkT$ . Тогда концентрация молекул при данных условиях может быть выражена формулой:

$$n = n_0 \frac{P \cdot T_0}{P_0 \cdot T}, \quad (13)$$

где  $P$  и  $T$  – давление и температура газа при данных условиях,  $P_0 = 101325$  Па и  $T_0 = 273,15$  К =  $0^\circ\text{C}$  – давление и

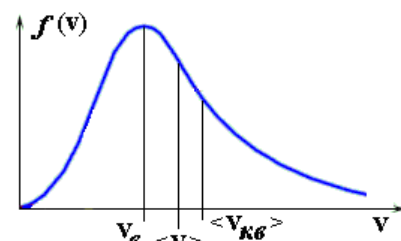


Рисунок 2 - Положение наиболее вероятной, средней арифметической и средней квадратичной скоростей на кривой распределения молекул по скоростям

температура газа при **нормальных условиях**,  $n_0 = 2,6868 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  – число молекул в  $1 \text{ м}^3$  любого газа при нормальных условиях, называемое **числом Лошмидта**.

Используя формулы (12) и (13), получаем выражение для эффективного диаметра молекул газа:

$$D = \sqrt{\frac{T \cdot P_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n_0 \cdot P \cdot T_0 \cdot \langle \lambda \rangle}}. \quad (14)$$

Для вычисления средней длины свободного пробега по формуле (11) и эффективного диаметра по формуле (14) необходимо знать радиус и длину трубки, через которую протекает газ, разность давлений на ее концах, температуру и давление окружающей среды, а также объем газа, протекающего через трубку за определенное время.

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Установка для выполнения работы (рис. 3) состоит из стеклянного сосуда, имеющего внизу кран, а сверху, закрытого пробкой, в которую вставлен капилляр. Сосуд на  $\frac{3}{4}$  заполняется водой. При открытом кране вода выливается отдельными каплями и над поверхностью воды создается пониженное давление.

Таким образом, концы капилляра будут находиться под разным давлением (верхний конец – под атмосферным, нижний – меньше атмосферного), что обуславливает протекание воздуха через капилляр. Объем вытекшей воды будет равен объему воздуха, вошедшего в сосуд через капилляр. Так как капилляр очень узкий, и воздух просачивается через него медленно, выравнивания давлений на концах капилляра не произойдет. Для измерения уровня воды в сосуде служит шкала, отсчет по которой производится по нижней части мениска.

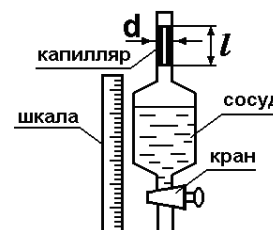


Рисунок 3 - Схема экспериментальной установки

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

1. Заполнить сосуд водой. Поместить под кран стакан. Открыть кран и, дождавшись, когда вода начнет вытекать из сосуда **каплями**, **заменить стакан на мерную колбу**, одновременно включив секундомер. В момент начала падения капле измерить высоту начального уровня  $h_1$  воды в сосуде.
2. Когда в мерной колбе объем жидкости станет равным  $V=50 \text{ мл}$ , перекрыть кран и остановить секундомер. Записать время  $t$  истечения воды в таблицу. Измерить новый уровень  $h_2$  воды в сосуде.
3. Опыт повторить три раза. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу.

4. Рассчитать разность давлений на концах капилляра по формуле  $\Delta P = \rho_l \cdot g \frac{h_1 - h_2}{2}$ , где  $\rho_l$  – плотность воды.

5. По средним значениям времени  $t_{cp}$  и разности давлений  $\Delta P_{cp}$  вычислить среднюю длину свободного пробега

молекулы воздуха по формуле  $\langle \lambda \rangle = \frac{3\pi \cdot r^4 \cdot \Delta P_{cp} \cdot t_{cp} \cdot \sqrt{\pi \cdot R \cdot T}}{16 \cdot V \cdot l \cdot P \cdot \sqrt{2M}}$ .

6. Оценить погрешность измерений, как результат косвенных измерений.

7. По среднему значению длины свободного пробега определить эффективный диаметр молекулы воздуха по формуле

$$D = \sqrt{\frac{T \cdot P_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot n_0 \cdot P \cdot T_0 \cdot \langle \lambda \rangle}}.$$

Таблица

№ изм.	$h_1, \text{ м}$	$h_2, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$\Delta P, \text{ Па}$	$\langle \lambda \rangle, \text{ м}$	$\Delta \langle \lambda \rangle, \text{ м}$	$\varepsilon_{\langle \lambda \rangle}, \%$	$D, \text{ м}$
1								
2								
3								
среднее	—	—						
Данные установки: $V=50 \pm 0,5 \text{ мл}$ ; $\rho_l=1000 \pm 5 \text{ кг/м}^3$ ; $l=$ мм; $r=$ мм; $T=$ К; $P=$ Па.								

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что такое средняя длина свободного пробега и эффективный диаметр молекулы?
2. Записать формулу, связывающую коэффициент внутреннего трения со средней длиной свободного пробега молекулы.
3. В чем заключается метод Пуазейля?
4. Записать формулу распределения молекул по скоростям, дать пояснения.
5. Дать определения средней арифметической скорости, наиболее вероятной скорости и средней квадратичной скорости.
6. Вывести выражение для эффективного диаметра молекулы.
7. От чего зависят средняя длина свободного пробега и эффективный диаметр молекулы?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ВОЗДУХА МЕТОДОМ АДИАБАТИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

**Цель работы:** Ознакомиться с методом адиабатического расширения. Изучить процессы в идеальных газах, определить коэффициента Пуассона  $\gamma$  воздуха.

**Приборы и оборудование:** установка для определения коэффициента Пуассона воздуха при постоянном давлении и объеме.

**Теоретическое введение.** Удельной теплоемкостью вещества называется величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить веществу единичной массы, чтобы увеличить его температуру на один Кельвин:

$$c = \frac{\partial Q}{m \cdot dT}. \quad (1)$$

Единица удельной теплоемкости в системе СИ – Дж / (кг·К).

Молярной теплоемкостью вещества называется величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить молю вещества, чтобы увеличить его температуру на один Кельвин:

$$C = \frac{\partial Q}{\nu \cdot dT}. \quad (2)$$

Единица молярной теплоемкости в системе СИ – Дж / (моль·К).

Для газов удельная и молярная теплоемкости зависят от условий, при которых проводится нагревание. Между собой теплоемкости связаны соотношением:

$$C = c \cdot M, \quad (3)$$

где  $M$  – молярная масса вещества.

Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты  $\delta Q$ , сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы  $dU$  и на работу системы против внешних сил  $\delta A$ :

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4)$$

Изменение внутренней энергии идеального газа определяется формулой:

$$dU = \frac{i}{2} \nu \cdot R \cdot dT, \quad (5)$$

где  $\nu$  – количество вещества,  $dT$  – изменение температуры,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $i$  – число степеней свободы молекул газа. Для одноатомных молекул (инертные газы)  $i=3$ , для двухатомных (простые газы, кроме инертных)  $i=5$ , для многоатомных (сложные газовые соединения)  $i=6$ .

Нагреем один моль газа на  $dT$  градусов. Если объем газа не изменяется, т.е.  $V=const$ , то газ работы не совершает, т.е.  $\delta A=0$ . Тогда, согласно уравнению (4),  $\delta Q = dU$ , и молярная теплоемкость газа, измеренная при постоянном объеме, определится выражением:

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}. \quad (6)$$

Если при нагревании моля газа остается постоянным давление, т.е.  $P=const$ , то газ расширяется и совершает работу (рис. 1). Молярная теплоемкость газа, измеренная при постоянном давлении, определяется формулой:

$$C_P = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P = \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{dT}. \quad (7)$$

Расширившись, газ отодвинет легкий поршень площадью  $S$  на расстояние  $dl$  (рис. 1). Работа газа  $\delta A = F \cdot dl$ , где  $F$  – сила, действующая на поршень. Умножим и разделим правую часть выражения на площадь  $S$ , тогда:

$$\delta A = \frac{F \cdot S \cdot dl}{S} = P \cdot S \cdot dl = P \cdot dV. \quad (8)$$

Подставив выражения (8) и (6) в (7) получим:

$$C_P = C_V + \frac{P \cdot dV}{dT}. \quad (9)$$

Таким образом, чтобы нагреть газ при постоянном давлении, необходимо больше тепла, чем для нагревания такого же количества газа до той же температуры при постоянном объеме, так как в первом случае тепло расходуется не только на повышение внутренней энергии газа, но и на работу газа против внешних сил.

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для моля газа

$$P \cdot V = R \cdot T. \quad (10)$$

Продифференцируем его, считая давление постоянным:

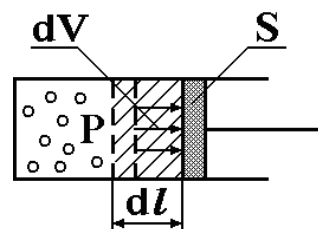


Рисунок 1 - Расширение газа при нагревании



$$P \cdot dV = R \cdot dT, \quad (11)$$

отсюда

$$\frac{P \cdot dV}{dT} = R. \quad (12)$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в виде:

$$C_P = C_V + R. \quad (13)$$

Это уравнение называется **уравнением Майера**.

Из соотношения (12) следует физический смысл **универсальной газовой постоянной**:  $R$  числена равна работе изобарного расширения одного моля идеального газа при его нагревании на один Кельвин.

Непосредственное определение теплоемкостей довольно затруднительно, особенно  $C_V$ . При рассмотрении многих задач в расчетные уравнения входит **коэффициент Пуассона**, который равен отношению теплоемкостей

$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ . Измерение коэффициента Пуассона  $\gamma$  является целью настоящей работы, где он определяется методом

Клемана и Дезорма, основанном на адиабатическом расширении газа.

**Адиабатическим процессом** называется такой процесс, при котором не происходит теплообмена между исследуемой системой и внешней средой ( $\delta Q = 0$ ). Всякое быстрое изменение объема газа приближенно можно рассматривать как процесс адиабатический, и чем быстрее это изменение происходит, тем ближе процесс к адиабатическому.

### ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Схема установки представлена на рисунке 2. В сосуд насосом накачивают воздух, создавая давление выше атмосферного. Это состояние газа соответствует началу эксперимента, на графике (рис.3) это точка 1. При этом газ имеет параметры  $P_1, V_1, T_1$ .

Быстрое расширение воздуха можно рассматривать как адиабатическое. Поэтому, открывая клапан сосуда на мгновение, в течение которого давление внутри сосуда достигает атмосферного, мы можем считать, что газ перейдет в новое состояние, характеризуемое величинами  $P_2, V_2, T_2$  по **адиабате** (точка 2 на рисунке 3). Температура воздуха в сосуде после адиабатического расширения будет ниже начальной. Параметры начального и конечного состояний воздуха в сосуде при адиабатическом процессе связаны **уравнением Пуассона** (уравнением адиабаты):

$$P_1 \cdot V_1^\gamma = P_2 \cdot V_2^\gamma \quad \text{или} \quad \frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma. \quad (14)$$



Рисунок 2 - Схема экспериментальной установки

Через несколько минут воздух в сосуде нагреется до температуры окружающей среды  $T_1$ . Поскольку при этом  $V_2$  не изменяется, то давление повысится до  $P_3$ . Новое состояние воздуха характеризуется параметрами  $P_3, V_2, T_1$  (точка 3 на рисунке 3). Сравнивая состояние воздуха в сосуде, соответствующее точкам 3 и 1 (рис.3), видим, что температура воздуха в этих точках одинакова. Тогда по закону Бойля – Мариотта:

$$P_3 \cdot V_2 = P_1 \cdot V_1 \quad \text{или} \quad \frac{P_3}{P_1} = \frac{V_1}{V_2}. \quad (15)$$

Сравнивая уравнения (14) и (15) получим:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^\gamma. \quad (16)$$

Прологарифмировав уравнение (16), получим

$$\gamma = \frac{\ln P_2 - \ln P_1}{\ln P_3 - \ln P_1}. \quad (17)$$

Условия эксперимента позволяют упростить формулу (17) следующим образом. Учтем, что  $P_2 = P_a$ , где  $P_a$  – атмосферное давление. Тогда  $P_1 = P_a + \Delta P_1$ ;  $P_3 = P_a + \Delta P_3$ , где  $\Delta P_1$  и  $\Delta P_3$  – избыточные давления.

Разложим  $\ln P_1$  и  $\ln P_3$  в ряд Тейлора:  $f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$

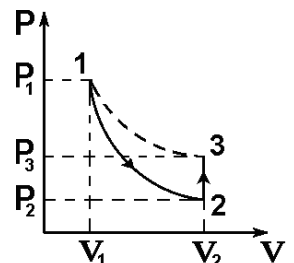


Рисунок 3 - Диаграмма процессов, происходящих с воздухом в сосуде

$$\ln P_1 = \ln(P_a + \Delta P_1) = \ln P_a + \frac{\Delta P_1}{P_a} \quad (18)$$

$$\ln P_3 = \ln(P_a + \Delta P_3) = \ln P_a + \frac{\Delta P_3}{P_a}.$$

Подставляя формулы (18) в выражение (17) получим расчетную формулу для коэффициента Пуассона:

$$\gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_3}. \quad (19)$$

#### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

1. При закрытом клапане накачать воздух в сосуд так, чтобы измеряемое манометром избыточное давление стало равным 100 – 130 мм. рт. ст.
2. Через некоторое время, когда давление перестанет падать, записать в таблицу величину давления  $\Delta P_1$ .
3. Открыть на мгновение клапан сосуда и, когда стрелка манометра упадет до нуля, быстро закрыть его. Через некоторое время, когда давление перестанет расти, записать величину давления  $\Delta P_3$  в таблицу.
4. Повторить пункты 1-3 пять раз.

5. По формуле  $\gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_3}$  рассчитать коэффициент Пуассона для каждого опыта. Вычислить среднее значение коэффициента Пуассона  $\gamma_{cp}$ .

6. Найти теоретическое значение коэффициента Пуассона  $\gamma_{теор}$  для воздуха, считая его молекулы жесткими двухатомными (*указание*: воспользоваться определениями коэффициента Пуассона и молярных теплоемкостей при постоянном объеме и давлении).

7. Сравнить теоретическое и среднее экспериментальное значения коэффициента Пуассона, оценив величину

относительного отклонения по формуле  $\delta = \frac{|\gamma_{теор} - \gamma_{cp}|}{\gamma_{теор}} \cdot 100 \%$ .

Таблица

№ изм.	$\Delta P_1$ , мм. рт. ст.	$\Delta P_3$ , мм. рт. ст.	$\gamma$	$\gamma_{cp}$	$\gamma_{теор}$	$\Delta \gamma$	$\delta$ , %
1							
2							
3							
4							
5							

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что такое изопроцессы и каким законам они подчиняются? Нарисуйте графики этих процессов.
2. Сформулируйте первое начало термодинамики. Запишите этот закон применительно к изопроцессам и дайте пояснения.
3. Что такое удельная и молярная теплоемкости вещества? От чего они зависят, в каких единицах измеряются?
4. Что такое внутренняя энергия идеального газа? Дайте определение работы газа и количества теплоты. От чего зависят эти характеристики.
5. Выведите уравнение Майера. Каков физический смысл универсальной газовой постоянной?
6. Выведите формулу для молярных теплоемкостей  $C_V$  и  $C_P$  идеального газа.
7. Дайте определение числа степеней свободы молекулы. Чему равна величина  $i$  для 1-, 2-, 3- и многоатомного идеальных газов?
8. Что такое коэффициент Пуассона  $\gamma$ ? Рассчитайте теоретическое значение показателя адиабаты для 1-, 2- и 3-атомного идеального газа.
9. В чем заключается адиабатический метод Клемана и Дезорма для определения  $\gamma$ ?
10. Опишите рабочий цикл экспериментальной установки по  $P$ - $V$  диаграмме. Как и почему изменяется температура газа в колбе при проведении опыта?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЯ ЭНТРОПИИ ПРИ ПЛАВЛЕНИИ ОЛОВА

**Цель работы.** Определить изменение энтропии при фазовом переходе первого рода на примере плавления олова.

**Теоретическое введение.** Состояние термодинамической системы, образованной огромным числом молекул, атомов, электронов и других частиц, может быть определено с помощью **термодинамических параметров** – давления  $P$ , объема  $V$ , температуры  $T$ , внутренней энергии  $U$  и других величин, характеризующих всю систему в целом. Описанное таким способом состояние называют **макросостоянием**. Изменение одного или более параметров состояния системы называется **термодинамическим процессом**. Все термодинамические процессы сопровождаются обменом или превращением энергии, согласно первому началу термодинамики. Если макроскопические параметры системы с течением времени не изменяются, то такое состояние системы является **равновесным**. Если термодинамический процесс протекает настолько медленно, что система успевает перейти из одного равновесного состояния в другое, то такой процесс называют **квазистатическим**.

Все термодинамические процессы, протекающие в замкнутой системе, можно подразделить на **обратимые** и **необратимые**. Термодинамический процесс **обратим**, если, протекая в обратном направлении, он проходит через те же промежуточные состояния, что и при прямом переходе, и возвращает систему в исходное состояние без затрат энергии. В противном случае термодинамические процессы называют **необратимыми**. Они протекают самопроизвольно только в одном направлении. Примером обратимых процессов являются все механические процессы, рассматриваемые без учета сил трения: движение планет, незатухающие колебания, упругий удар и т.д. Примером обратимого процесса в термодинамике является цикл Карно. Примерами необратимых процессов являются затухающие колебания, неупругий удар, явления переноса и т.д. Большинство процессов в технике представляют собой необратимые процессы или, по крайней мере, содержат этапы, являющиеся необратимыми процессами.

**Энтропия** – термодинамическая функция, являющаяся мерой необратимого рассеяния энергии. Строгий теоретический анализ показывает, что **приведенное количество теплоты**  $\frac{\delta Q}{T}$ , сообщаемое системе в любом обратимом круговом процессе, равно нулю

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (1)$$

Математически это означает, что величина  $\frac{\delta Q}{T}$  представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $S$ , которая называется **энтропией**:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (2)$$

Таким образом, каждому состоянию термодинамической системы однозначно соответствует определенная величина  $S$ . Равенство (1) не зависит от пути процесса, следовательно,  $S$  является **функцией состояния системы**. Единица измерения энтропии в системе СИ – (Дж / К).

В обратимом процессе, при котором температуру можно считать постоянной, изменение энтропии будет равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}. \quad (3)$$

Если температура равна 1 К, то прирост энтропии численно равен поглощенному теплу  $Q$ .  
Для необратимых процессов

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \frac{Q}{T}. \quad (4)$$

В соответствии с выражениями (3) и (4) энтропия замкнутой системы может либо возрастать (для необратимых процессов), либо оставаться постоянной (для обратимых процессов)

$$\Delta S \geq 0. \quad (5)$$

Это неравенство называется **неравенством Клаузиуса**.

В изолированной системе при **обратимом адиабатическом процессе**, в ходе которого теплообмена с окружающей средой не происходит ( $\delta Q = 0$ ), энтропия не изменяется ( $S = \text{const}$ ). То есть, обратимый адиабатический процесс протекает при постоянной энтропии. Поэтому его часто называют **изоэнтропийным процессом**. Протекание в изолированной системе **необратимого процесса** сопровождается ростом энтропии. Это означает, что изолированная система переходит в состояние со все большими значениями энтропии и этот переход продолжается до тех пор, пока энтропия не достигнет своей максимальной величины, соответствующей состоянию равновесия. Таким образом, **энтропия показывает направление, в котором происходит эволюция термодинамической системы**.

Физический смысл энтропии был дополнен исследованиями Л. Больцмана. Больцман полагал, что вполне точно задать состояние системы можно, указав координаты и скорости всех входящих в нее частиц. Каждое макроскопическое состояние системы может быть осуществлено множеством различных способов расположения частиц. Число таких способов  $\Omega$  называется **статистическим весом (термодинамической вероятностью)** данного макроскопического состояния. Чем больше  $\Omega$ , тем вероятнее пребывание физической системы в данном состоянии.

Согласно Больцману

$$S = k \cdot \ln \Omega, \quad (6)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Стремление энтропии к максимуму означает, что система стремится к переходу в наиболее вероятное состояние. Из статистического определения следует, что энтропия – это мера беспорядка в системе частиц. Чем больше порядок, тем ниже энтропия. Полный порядок в системе тождественных частиц может быть осуществлен только одним способом, энтропия такой системы будет равна нулю.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, **второе начало термодинамики** можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах: **любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.**

Поскольку в уравнения, как правило, входит не сама энтропия, а ее изменение, то за нулевое значение энтропии обычно принимают ее значение, соответствующее абсолютному нулю температуры: **при  $T=0$  К,  $S=0$ .**

Это положение известно как **третье начало термодинамики**:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (7)$$

Из всего вышесказанного можно сформулировать следующие **основные свойства энтропии**:

1. Энтропия является функцией состояния системы.
2. Энтропия замкнутой системы, претерпевшей обратимый процесс, остается постоянной.
3. В ходе необратимого процесса энтропия замкнутой системы возрастает, и ее максимальное значение соответствует равновесию системы.
4. Возрастание энтропии системы при необратимом процессе означает, что система переходит из менее вероятного состояния в более вероятное.

**Фазой** называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Если, например, в закрытом сосуде находится вода, то эта система является **двухфазной**: вода – жидкая фаза, смесь воздуха и водяного пара – газообразная фаза. Следует учитывать, что понятие «фаза» шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению. Например, алмаз и графит являются различными твердыми фазами углерода. Переход вещества из одной фазы в другую – **фазовый переход** – всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода является изменение агрегатного состояния вещества или переходы, связанные с изменением в составе, строении и свойствах вещества.

Различают фазовые переходы двух родов. **Фазовый переход первого рода** (например, плавление, кристаллизация) – фазовое превращение, сопровождающееся поглощением или выделением теплоты, называемой **теплотой фазового перехода**. Фазовые переходы первого рода характеризуются **постоянством температуры**, которая зависит от давления, изменениями энтропии и объема вещества. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей и разрушение кристаллической решетки, поэтому плавление происходит при постоянной температуре. При таких переходах – из более упорядоченного кристаллического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние – степень беспорядка увеличивается, следовательно, согласно второму началу термодинамики, этот процесс связан с возрастанием энтропии системы.

Фазовые переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема, называются **фазовыми переходами второго рода**. Эти переходы характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости. Примерами фазовых переходов второго рода являются: переход ферромагнитных веществ при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и некоторых сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние; превращение обыкновенного жидкого гелия в другую жидкую модификацию, обладающую свойствами сверхтекучести.

В данной работе для расчета приращения энтропии необходимо определить температуру фазового перехода, то есть температуру плавления олова. Изменение энтропии при нагревании и переходе системы из состояния 1 в состояние 2 при плавлении олова, с использованием термодинамического понятия энтропии, может быть определено по формуле:

$$\Delta S = \int_{T_K}^{T_{пл}} \frac{\partial Q}{T} + \int_{T_{пл}} \frac{\partial Q}{T} = \int_{T_K}^{T_{пл}} \frac{c \cdot m \cdot dT}{T} + \frac{\lambda \cdot m}{T_{пл}} = c \cdot m \cdot \ln\left(\frac{T_{пл}}{T_K}\right) + \frac{\lambda \cdot m}{T_{пл}}, \quad (8)$$

где  $m$  – масса олова (значение массы уточнить у преподавателя или инженера);  $T_K$  – комнатная температура по шкале Кельвина;  $T_{пл}$  – температура плавления олова по шкале Кельвина;  $c$  – удельная теплоемкость олова;  $\lambda$  – удельная теплота плавления олова.

## ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Рабочая схема установки представлена на рисунке 1. В данной работе температура олова измеряется с помощью хромель-алюмелевой термопары. Один спай термопары 6 погружают в тигель с оловом 5, который подогревается электронагревателем 4. Другой спай 1 помещен в металлический сосуд 3 с маслом, в котором температура практически не изменяется и равна комнатной. ТермоЭДС, возникшая в цепи термопары при наличии разности температур в спаях, измеряется милливольтметром 2.

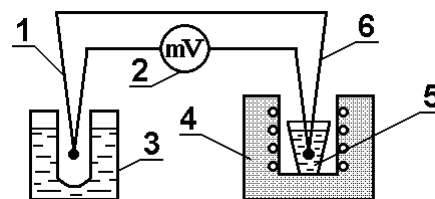


Рисунок 1 - Схема экспериментальной установки

### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И ЗАДАНИЯ

1. Включите установку в сеть. Запишите показания милливольтметра через каждые **10 секунд** при нагревании и плавлении олова. Результаты измерений занесите в таблицу.
2. Когда олово расплавится выключите установку и, продолжая отсчет времени, снимите аналогичные измерения при охлаждении олова.
3. По приведенному на установке градуировочному графику переведите показания милливольтметра в значения температуры.
4. Постройте график зависимости температуры от времени  $T=f(t)$ .
5. По графику определите температуру плавления олова. Этой температуре соответствует участок кривой, параллельной оси времени.
6. По формуле  $\Delta S = c \cdot m \cdot \ln\left(\frac{T_{пл}}{T_k}\right) + \frac{\lambda \cdot m}{T_{пл}}$  вычислите приращение энтропии при нагревании и плавлении олова.

Таблица

№ изм.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Время, с										
Показ. милливольтметра, мВ										
Температура, К										
№ изм.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Время, с										
Показ. милливольтметра, мВ										
Температура, К										
№ изм.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Время, с										
Показ. милливольтметра, мВ										
Температура, К										
№ изм.	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Время, с										
Показ. милливольтметра, мВ										
Температура, К										
Данные установки: $m = (0,0020 \pm 0,0005)$ кг ; $T_k = 293$ К ;										
$c = (0,230 \pm 0,001) \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) ; $\lambda = (58,6 \pm 0,1) \cdot 10^3$ Дж/кг .										
Температура плавления: $T_{пл} =$ К ; Приращение энтропии: $\Delta S =$ Дж/К .										

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что такое термодинамическая система, термодинамические параметры?
2. Какая система называется равновесной?
3. Какие процессы называются обратимыми, какие необратимыми? Приведите примеры таких процессов.
4. Что такое энтропия? Статистическая и термодинамическая интерпретация энтропии.
5. Сформулируйте второе и третье начала термодинамики.
6. Запишите неравенство Клаузиуса.
7. Назовите основные свойства энтропии.
8. Как изменяется энтропия при переходе из одного агрегатного состояния в другое?
9. Что называется фазой? Что такое фазовый переход первого и второго рода? Приведите примеры фазовых переходов.
10. Объясните суть метода измерения приращения энтропии в данной работе.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. Академия.- 2012. – 560 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5 кн. Кн. 1: Механика. М.: Астрель: АСТ, 2004, 2005 –336 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5 кн.: Кн. 3: Молекулярная физика и термодинамика. М.: Астрель: АСТ, 2004, 2005 - 208 с.
4. Трофимова Т.И. Курс физики. М.: Высшая школа, 2002, 2003.- 542 с.
5. Детлаф А.А. Курс физики. М.: Высшая школа, 2002.- 718с.
6. Гольдин Л.Л. Руководство к лабораторным занятиям по физике. М.: Наука. – 1977. 326 с.
7. Каленков С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика. М.: Высш. Школа. 1990. – 111 с.
8. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х тт. Т.1. Механика. Молекулярная физика. 2008.- 352 с. **Доступ из ЭБС «Лань».**
9. Курбачев Ю.Ф. Физика: учебное пособие / Ю.Ф. Курбачев. – М.: изд. центр ЕАОИ, 2011. - 216 с. **Доступ из ЭБС «Университетская библиотека online».**
10. Грабовский Р. И. Курс физики [Электронный ресурс] : учебное пособие. Электрон. Дан. – СПб.: Лань, 2012. - 608 с. **Доступ из ЭБС «Лань».**
11. Кузнецов С.И. Курс физики с примерами решения задач. Часть I. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. 2014.- 464 с. **Доступ из ЭБС «Лань».**
12. Кустов С.Л., Романенко В.В., Черных Е.В., Гурова Н.М., Андрухова О.В., Жуковская Т.М. Лабораторные работы по физике. Часть I. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Методические указания (рабочая тетрадь) по выполнению лабораторных работ для студентов очной формы обучения./ – Барнаул: Изд-во АлтГТУ. - 2012. – 56 с.
13. Кирста Ю. Б. , Орлов В. Л. , Задонцев В. Ф. , Котырло Т. В. Лабораторный практикум по основам механики, молекулярной физике и термодинамике. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ. - 20015. – 142 с.

---

*Ольга Витальевна Андрухова*  
*Наталья Михайловна Гурова*  
*Татьяна Михайловна Жуковская*  
*Юрий Богданович Кирста*  
*Сергей Леонидович Кустов*  
*Людмила Владимировна Науман*  
*Юлия Владимировна Пацева*  
*Вероника Викторовна Романенко*  
*Наталья Александровна Старостенкова*  
*Евгения Владимировна Черных*

Лабораторные работы по физике

Часть I. Механика. Молекулярная физика и термодинамика

Учебное пособие и методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов очной формы обучения