Formulazione Hamiltoniana della meccanica classica

29 settembre 2013

Indice

1 Trasformazione di Legendre $t, q^k, \dot{q}^k \longleftrightarrow t, q^k, P_k$

Siano $t, q^r, \dot{q}^r$ coordinate naturali sullo spazio-tempo degli stati cinetici, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q^r, \dot{q}^r)$ la funzione Lagrangiana e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

le equazioni di Lagrange.
Consideriamo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} t = t & & \text{(2a)} \\ q^k = q^k & \text{k = 1, \ldots, n} & \text{(2b)} \\ P_k = P_k(t, q^r, \dot{q}^r) = \dfrac{\partial \mathcal{L}(t, q^r, \dot{q}^r)}{\partial \dot{q}^k} & & \text{(2c)} \end{cases}$$

detta *trasformazione di Legendre*, che ammette inversa nella forma

$$\begin{cases} t = t & & \text{(3a)} \\ q^k = q^k & \text{k = 1, \ldots, n} & \text{(3b)} \\ \dot{q}^k = \dot{q}^k(t, q^r, P_r) & & \text{(3c)} \end{cases}$$

in virtù del fatto che

$$det\left(\frac{\partial P_k}{\partial \dot{q}^r}\right) = det\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^r}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) \neq 0.$$

Ricordiamo la definizione dell'integrale generalizzato dell'energia

$$H = H(t, q^r, \dot{q}^r) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - \mathcal{L} \tag{4}$$

riguardato, ovviamente, come funzione delle coordinate $t, q^r, \dot{q}^r$. Usando la (3) è possibile esprimere H in funzione delle variabili t, q^k, P_k

$$\begin{aligned} H = H(t, q^k, P_k) &= H\left(t, q^k, \dot{q}^k(t, q^r, P_r)\right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}\left(t, q^k, \dot{q}^k(t, q^r, P_r)\right)}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - \mathcal{L}\left(t, q^k, \dot{q}^k(t, q^r, P_r)\right) \\ &= P_k\dot{q}^k(t, q^r, P_r) - \mathcal{L}\left(t, q^k, \dot{q}^k(t, q^r, P_r)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

l'ultima relazione ottenuta usando $(2c)$.
Sono vere le identità seguenti, dedotte dalla (5)

$$\frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial t} = P_k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{6a}$$

$$\frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial q^r} = P_k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^r} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^r} \tag{6b}$$

$$\frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial P_r} = \frac{\partial P_k}{\partial P_r}\dot{q}^k + P_k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial P_r} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial P_r} = \dot{q}^r \tag{6c}$$

le semplificazioni derivanti dalla definizione ($2c$).
La ($6c$) permette, tra l'altro, di scrivere la trasformazione di Legendre diretta e inversa nella forma

$$\begin{cases} t = t \\ q^k = q^k \\ P_k = \frac{\partial \mathcal{L}(t,q^r,\dot{q}^r)}{\partial \dot{q}^k} \end{cases} k = 1,\dots,n \qquad \begin{cases} t = t \\ q^k = q^k \\ \dot{q}^k = \frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial P_k} \end{cases} k = 1,\dots,n \tag{7}$$

Usando ($2c$), ($6b$), ($6c$) si ha una riscrittura delle equazioni di Lagrange nella forma

$$\begin{cases} \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial P_k} \\ \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial q^k} \end{cases} k = 1,\dots,n \tag{8}$$

che diciamo *Hamiltoniana*.
Ricordando che la derivata lungo i moti di H è

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{lungo\ i\ moti} H = -\frac{\partial \mathcal{L}(t,q^r,\dot{q}^r)}{\partial t}$$

usando la ($6a$) si ha che

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{lungo\ i\ moti} H = \frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial t}$$

ovvero che $H(t,q^r,P_r)$ è un integrale primo se non dipende (esplicitamente) da t.

2 Caratterizzazione di trasformazioni di coordinate che preservano la struttura "Hamiltoniana" delle equazioni

Trasformazioni di coordinate del tipo

$$\begin{cases} t' = t \\ q'^k = q'^k(t,q^r,P_r) \\ P'_k = P'_k(t,q^r,P_r) \end{cases} k = 1,\dots,n \tag{1}$$

tali che *ogni* sistema avente struttura della forma

$$\begin{cases} \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial P_k} \\ \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial q^k} \end{cases} k = 1,\dots,n \tag{2}$$

(*struttura Hamiltoniana*) *mantenga la sua struttura*, nel senso che, fatte nelle equazioni differenziali (2) le sostituzioni date da (1), o meglio, della sua inversa, possa essere scritto ancora in forma Hamiltoniana, cioè nella forma

$$\begin{cases} \frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial H'(t,q'^r,P'_r)}{\partial P'_k} \\ \frac{dP'_k}{dt} = -\frac{\partial H'(t,q'^r,P'_r)}{\partial q'^k} \end{cases} k = 1,\dots,n \tag{3}$$

con H' opportuna funzione delle nuove variabili.
Notare che, in generale, $H' = H'(t, q'^r, P'_r)$ *non* risulta essere la rappresentazione nelle nuove variabili t, q'^r, P'_r dell'Hamiltoniana $H(t, q^r, P_r)$.
Notare inoltre che siamo interessati a caratterizzare trasformazioni del tipo (1) per le quali la presenza della struttura si abbia per *ogni* sistema di equazioni differenziali del tipo (2), ovvero per ogni sistema Hamiltoniano, ovvero per ogni scelta dell'Hamiltoniana H.
Per alleggerire la trattazione si introduce la notazione seguente

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q^n \\ P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \tag{4}$$

per cui il sistema (2) si può rappresentare più compattamente nella forma

$$\frac{d\underline{z}}{dt} - J\frac{\partial H}{\partial \underline{z}} = \underline{0} \tag{5}$$

in cui $\frac{\partial H}{\partial \underline{z}}$ indica il vettore colonna formato dalle derivate parziali di $H(t, q^r, P_r)$ rispetto alle $2n$ coordinate $q^1, \ldots, q^n, P_1, \ldots, P_n$. La trasformazione del tipo (1) verrà indicata nella forma

$$\begin{cases} t' = t \\ \underline{z}' = \underline{z}'(t, \underline{z}) \end{cases} \tag{6}$$

con inversa

$$\begin{cases} t = t' \\ \underline{z} = \underline{z}(t', \underline{z}') \end{cases} \tag{7}$$

Il problema che ci stiamo ponendo è perciò quello di caratterizzare trasformazioni del tipo (6) (o (7)) tali che *ogni* sistema di equazioni differenziali del tipo dato dalla (5) si possa scrivere nella forma

$$\frac{d\underline{z}'}{dt} - J\frac{\partial H'}{\partial \underline{z}'} = \underline{0} \tag{8}$$

con $H' = H'(t, \underline{z}')$ funzione opportuna. Ricordiamo quanto già detto, e cioè che $H'\left(t, \underline{z}'(t, \underline{z})\right)$ in generale *non* coincide con $H(t, \underline{z})$.

Sia

$$M = M(t, \underline{z}') = M_{\alpha,\beta}(t, \underline{z}') = \left(\frac{\partial z_\alpha(t, \underline{z}')}{\partial z'_\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, 2n\right)_{2n\times 2n}$$

la matrice Jacobiana della trasformazione. Notare che t è trattato come un parametro.
Procediamo alla trasformazione dalla (5) sotto il cambiamento di coordianate (7).

$$\frac{\partial H(t,\underline{z})}{\partial z'_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2n} \frac{\partial z_\beta(t,\underline{z}')}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}_\beta} = \sum_{\beta=1}^{2n} M^T_{\alpha,\beta}\frac{\partial H}{\partial z_\beta} \qquad \alpha = 1,\ldots,2n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} = M^T \frac{\partial H}{\partial \underline{z}} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \underline{z}} = (M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_\alpha}{dt} &= \frac{\partial z_\alpha(t,\underline{z}')}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{2n} \frac{\partial z_\alpha(t,\underline{z}')}{\partial z'_\beta}\frac{dz'_\beta}{dt} \qquad \alpha = 1,\ldots,2n \\ &= \frac{\partial z_\alpha(t,\underline{z}')}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{2n} M_{\alpha,\beta}\frac{dz'_\beta}{dt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{\partial t} + M\frac{d\underline{z}'}{dt} \tag{10}$$

Usando la (9) e la (10) il primo membro del sistema di equazioni (5) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{z}}{dt} - J\frac{\partial H}{\partial \underline{z}} &= \frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{dt} + M\frac{d\underline{z}'}{dt} - J(M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \\ &= M\left(\frac{d\underline{z}'}{dt} + M^{-1}\frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{dt} - M^{-1}J(M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

pertanto la condizione che ogni sistema Hamiltoniano (2) si possa scrivere nella forma (3) è che esista $H' = H'(t,q',P')$ tale che

$$\frac{d\underline{z}'}{dt} - J\frac{\partial H'}{\partial \underline{z}'} = \frac{d\underline{z}'}{dt} + M^{-1}\frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{\partial t} - M^{-1}J(M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \tag{12}$$

ovvero

$$-J\frac{\partial H'}{\partial \underline{z}'} = M^{-1}\frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{\partial t} - M^{-1}J(M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \tag{13}$$

Notare che nello scrivere la (12) è stata omessa la matrice Jacobiana M presente nella (11). Questo è lecito in quanto $\underline{z} = \underline{z}(t,\underline{z}')$ è una trasformazione di coordinate e il suo Jacobiano è non nullo. L'omissione non altera l'equivalenza dei sistemi di equazioni (5) e (8) essendo il secondo membro uguale a $\underline{0}$ per entrambi.
Dalla (13) abbiamo

$$\frac{\partial H'(t,\underline{z}')}{\partial \underline{z}'} = -J^{-1}M^{-1}\frac{\partial \underline{z}(t,\underline{z}')}{\partial t} + J^{-1}M^{-1}J(M^T)^{-1}\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \tag{14}$$

Detto $\underline{s} = \underline{s}(t,\underline{z}')$ il secondo membro della (14), notiamo che esso è completamente determinato da $H(t,\underline{z})$ e dalla trasformazione $\underline{z} = \underline{z}(t,\underline{z}')$; pertanto, in generale, *non esisterà* una funzione $H' = H'(t, \underline{z}')$ che deve, in sostanza, giocare il ruolo di *"potenziale"* delle $2n$ componenti di $\underline{s}(t, \underline{z}')$ che figurano a secondo membro della (14). In altre parole, l'esistenza di una $H'(t, \underline{z}')$ soddisfacente la (14) si avrà solo se il secondo membro $\underline{s}(t, \underline{z}')$ *soddisferà opportune condizioni di integrabilità*. Queste condizioni, che devono essere verificate per *ogni* $H'(t, \underline{z}')$, caratterizzeremo le trasformazioni (1) (o (6)) che stiamo cercando.

Posto

$$Q(t, \underline{z}') = -J^{-1}M^{-1} \tag{15}$$

$$P(t, \underline{z}') = J^{-1}M^{-1}J(M^T)^{-1} \tag{16}$$

la (14) si riscrive nella forma

$$\frac{\partial H'}{\partial \underline{z}} = Q(t, \underline{z}')\frac{\partial \underline{z}(t, \underline{z}')}{\partial t} + P(t, \underline{z}')\frac{\partial H}{\partial \underline{z}'} \tag{17}$$

ovvero, in componenti

$$\frac{\partial H'}{\partial z'_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{2n} Q_{\alpha\beta}(t, \underline{z}')\frac{\partial z_\beta(t, \underline{z}')}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{2n} P_{\alpha\beta}(t, \underline{z}')\frac{\partial H}{\partial z'_\beta} \tag{18}$$

per cui le condizioni di integrabilità (locale), ovvero le condizioni di esistenza (locale) di un "potenziale" $H'(t, \underline{z}')$ sono

$$\frac{\partial}{\partial z'_\mu}\left[Q_{\alpha\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + P_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta}\right] = \frac{\partial}{\partial z'_\alpha}\left[Q_{\mu\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + P_{\mu\beta}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta}\right] \qquad \forall \mu, \alpha = 1, \dots, 2n \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial z'_\mu}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + Q_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\mu \partial t} + \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial z'_\mu}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta} + P_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 H}{\partial z'_\mu \partial z'_\beta} = \\ &= \frac{\partial Q_{\mu\beta}}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + Q_{\mu\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\alpha \partial t} + \frac{\partial P_{\mu\beta}}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta} + P_{\mu\beta}\frac{\partial^2 H}{\partial z'_\alpha \partial z'_\beta} \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \dots, 2n \end{aligned} \tag{20}$$

Osserviamo inanzitutto che, dovendo la condizione (20) valere per *ogni* $H(t, \underline{z})$, si deve avere

$$P_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 H}{\partial z'_\mu \partial z'_\beta} = P_{\mu\beta}\frac{\partial^2 H}{\partial z'_\alpha \partial z'_\beta} \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \dots, 2n \tag{21a}$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial z'_\mu}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta} = \frac{\partial P_{\mu\beta}}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial H}{\partial z'_\beta} \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \dots, 2n \tag{21b}$$

che sono soddisfatte solo se

$$P_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{con } \alpha \neq \beta \tag{22a}$$
$$P_{\alpha\alpha} = P_{\beta\beta} \qquad \forall \alpha, \beta = 1, \ldots, 2n \tag{22b}$$
$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial z'_\mu} = \frac{\partial P_{\mu\beta}}{\partial z'_\alpha} \qquad \forall \alpha, \beta, \mu = 1, \ldots, 2n \tag{22c}$$

e di conseguenza, la matrice P può differire dall'identità solo per un fattore scalare che non dipende da $\underline{z}'$, e che può dipendere al più da t.

$$P = k(t) I_{2n\times 2n} \tag{23}$$

Pertanto la condizione di integrabilità (20) si riduce a

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial z'_\mu}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + Q_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\mu \partial t} = \frac{\partial Q_{\mu\beta}}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + Q_{\mu\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\alpha \partial t} \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \ldots, 2n$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial z'_\mu}\left(Q_{\alpha\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z'_\alpha}\left(Q_{\mu\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t}\right) \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \ldots, 2n. \tag{24}$$

Dalla definizione (15) e (16) di P e Q

$$J^{-1}M^{-1}J(M^T)^{-1} = P \qquad\qquad -J^{-1}M^{-1} = Q \tag{25a}$$

si ha

$$-QJ(M^T)^{-1} = P$$

da cui, dato che $J^{-1} = J^T = -J$, si ha

$$P^{-1}Q = -(M^T)J^{-1} = M^T J \tag{25b}$$

e, ricordando la (23),

$$Q = k(t) M^T J$$

La condizione di integrabilità (24) si riscrive pertanto nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial z'_\mu}\left(M^T_{\alpha\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial z'_\alpha}\left(M^T_{\mu\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t}\right) \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \ldots, 2n \tag{26}$$

ovvero

$$\begin{gathered}\cancel{\frac{\partial M^T_{\alpha\lambda}}{\partial z'_\mu}} J_{\lambda\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + M^T_{\alpha\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\mu \partial t} = \\ = \cancel{\frac{\partial M^T_{\mu\lambda}}{\partial z'_\alpha}} J_{\lambda\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial t} + M^T_{\mu\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial^2 z_\beta}{\partial z'_\alpha \partial t} \qquad \forall \alpha, \mu = 1, \ldots, 2n\end{gathered} \tag{27}$$

la semplificazione essendo dovuta al fatto che

$$\frac{M^T_{\alpha\lambda}}{\partial z'_\mu} = \frac{\partial}{\partial z'_\mu}\frac{\partial z_\lambda(t,\underline{z}')}{\partial z'_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z'_\alpha}\frac{\partial z_\lambda(t,\underline{z}')}{\partial z'_\mu} = \frac{\partial M^T_{\mu\lambda}}{\partial z'_\alpha}$$

.

La (27) diventa perciò, scambiando anche la derivata $\frac{\partial}{\partial t}$ con $\frac{\partial}{\partial z'_\mu}$ e $\frac{\partial}{\partial z'_\alpha}$,

$$M^T_{\alpha\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z_\beta(t,\underline{z}')}{\partial z'_\mu} = M^T_{\mu\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z_\beta(t,\underline{z}')}{\partial z'_\alpha} \qquad \forall\alpha,\mu = 1,\ldots,2n$$

ovvero, ricordando la definizione della matrice jacobiana

$$M_{\beta\mu} = \frac{\partial z_\beta(t,\underline{z}')}{\partial z'_\mu} \qquad M_{\beta\alpha} = \frac{\partial z_\beta(t,\underline{z}')}{\partial z'_\alpha}$$

$$M^T_{\alpha\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial M_{\beta\mu}}{\partial t} = M^T_{\mu\lambda}J_{\lambda\beta}\frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial t} \qquad \forall\alpha,\mu = 1,\ldots,2n \tag{28}$$

Riassumendo, la condizione di integrabilità (27) è:

$$M^T J\frac{\partial M}{\partial t} = \left(M^T J\frac{\partial M}{\partial t}\right)^T \tag{29}$$

(notare che, nella (28), α e μ nel primo e secondo membro risultano scambiati).

Operando ancora sulla (29) si ha

$$\begin{aligned} M^T J\frac{\partial M}{\partial t} &= \left(M^T J\frac{\partial M}{\partial t}\right)^T \\ &= \frac{\partial M^T}{\partial t}J^T M \\ &= \frac{\partial M^T}{\partial t}(-J)M \\ &= -\frac{\partial M^T}{\partial t}JM \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow M^T J\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial M^T}{\partial t}JM = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(M^T JM) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto $M^T JM$ non può dipendere esplicitamente da t. Ricordando la definizione di P data dalla (16) e dalla (25a), anche P non dipende esplicitamente da t, per cui

$$P = kI_{2n\times 2n} = J^{-1}M^{-1}J(M^T)^{-1} \qquad k = \text{cost}$$

da cui, facendo l'inversa di ambo i membri

$$\frac{1}{k}I = M^T J^{-1} M J$$
$$\frac{1}{k}J^{-1} = M^T J^{-1} M$$

$$\frac{1}{k}J = M^T J M \qquad\qquad k \text{ costante} \tag{30}$$

Pertanto la caratterizzazione (locale) delle trasformazioni che preservano la struttura Hamiltoniana di ogni sitema hamiltoniano è che lo jacobiano soddisfi la condizione (30). Notare che questa è una caratterizzazione più *debole* che la trasformazione †[...]† simplettica ($M^T J M = J$).

3 Condizione di Lie su una trasformazione $t' = t$, $q'^k = q'^k(t, q, P)$, $P'_k = P'_k(t, q, P)$

Definizione 1. *Una trasformazione di coordinate*

$$\begin{cases} t' = t \\ q'^k = q'^k(t, q^r, P_r) \\ P'_k = P'_k(t, q^r, P_r) \end{cases} \tag{1}$$

si dice che verifica la condizione di Lie se ogni forma diffrenziale avente la struttura seguente

$$\theta = P_i dq^i - H(t, q^r, P_r)dt \tag{2}$$

con $H = H(t, q^r, P_r)$ funzione arbitraria, se, nelle "nuove" variabili t, q'^r, P'_r, può essere espressa nella forma

$$\theta = P'_i dq'^i - H'(t, q'^r, P'_r)dt + dF \tag{3}$$

con H' e F funzioni opportune.

Per comprendere bene il significato della definizione sopra data occorre osservare che la forma diffrenziale θ ha una struttura molto particolare. Precisamente, detta

$$\theta_0(t, q^r, P_r)dt + \theta_i(t, q^r, P_r)dq^i + \theta^i(t, q^r, P_r)dP_i$$

una generica forma differenziale sullo spazio riferito alle variabili t, q^r, P_r, la forma θ data dalla (2) risulta essere caratterizzata da

$$\theta_0(t, q^r, P_r) = -H(t, q^r, P_r)$$
$$\theta_i(t, q^r, P_r) = P_i$$
$$\theta^i(t, q^r, P_r) = 0$$

Una trasformazione che verifica la condizione di Lie deve pertanto consentire una riscrittura di θ data dalla (2) in una forma (quasi) strutturalmente simile, data dalla (3). Notare che:

- la componente di θ lungo dq'^i è P'_i (similmente al fatto che la componente di θ lungo dq^i fosse P_i)
- la componente di θ lungo dt è una nuova funzione, H', che, in generale, *non coincide* con la rappresentazione della funzione $H(t, q^r, P_r)$ nelle nuove variabili t, q'^r, P'_r.
- la componente di θ lungo dP'_i è nulla.
- F è una opportuna funzione.

Notare che, in generale, partendo dalla rappresentazione (2) di θ e effettuata la trasformazione (1)

$$\begin{cases} t' = t \\ q'^k = q'^k(t, q^r, P_r) \\ P'_k = P'_k(t, q^r, P_r) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} dt' = dt \\ dq'^k = \frac{\partial q'^k}{\partial t} dt + \frac{\partial q'^k}{\partial q^r} dq^r + \frac{\partial q'^k}{\partial P_r} dP_r \\ dP'_k = \frac{\partial P'_k}{\partial t} dt + \frac{\partial P'_k}{\partial q^r} dq^r + \frac{\partial P'_k}{\partial P_r} dP_r \end{cases}$$

non si ottiene una rappresentazione di θ che si lascia inquadrare nella struttura data dalla (3). In pratica non si riesce a ottenere che

$$\theta - P'_i dq'^i + H'(t, q'^r, P'_r) dt$$

si possa scrivere come il differenziale di una opportuna funzione F.

Le considerazioni ora fatte attribuiscono alla funzione F il ruolo di funzione che può essere scelta opportunamente in modo che θ (quasi) preservi la sua struttura (a meno di un dF, appunto). F risulta quindi "determinata" dalla trasformazione (1), ovviamente nel caso in cui la (1) verifichi la condizione di Lie.

È possibile capovolgere questo atteggiamento, e precisamente, fare giocare a F il ruolo di "funzione generatrice" della trasformazione (1).
Per definitezza, assumeremo che F dipenda dalle variabili t, q^k, q'^k. Notare che è rilevante al fine di costruire una trasformazione che F dipenda contemporaneamente da vecchie e nuove variabili (altre scelte possibili: $F = F(t, q^r, P'^r)$, $F = F(t, P_r, q'^r)$, $F = F(t, P_r, P'_r)$).
Il requisito che:

$$P_i dq^i - H dt = P'_i dq'^i - H' dt + dF$$

diventa:

$$P_i dq^i - H dt = P'_i dq'^i - H' dt + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial q'^i} dq'^i$$

che implica:

$$P_i = \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q^i} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4a}$$

$$P'_i = -\frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q'^i} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4b}$$

$$H' = H + \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial t} \tag{4c}$$

Seguendo questo atteggiamento, assegnata arbitrariamente una $F = F(t, q^r, q'^r)$, con la condizione che:

$$det\left(\left.\frac{\partial P_i}{\partial q'^r}\right|_{t,q\ cost}\right) = det\left(\frac{\partial^2 F(t, q^r, q'^r)}{\partial q'^k \partial q^i}\right) \neq 0 \tag{5}$$

in modo che la (4a) possa essere applicata nella forma

$$q'^k = q'^k(t, q^r, P_r) \tag{6}$$

e quindi per la (4b) e per la (6)

$$P'_i = -\frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q'^i}\,(t, q^r, q'^r(t, q^s, P_s)) \tag{7}$$

risulta determinata la trasformazione di coordinate dalle t, q^r, P_r alle $t' = t, q'^r, P'_r$ data appunto dalla (6) e dalla (7), che sarà detta la trasformazione di coordinate *generata dalla funzione generatrice* $F(t, q^i, q'^i)$.

3.1 Una trasformazione che soddisfa la condizione di Lie è simplettica

Teorema 1. *Una trasfomazione*

$$t' = t \qquad q'^i = q'^i(t, q^r, P_r) \qquad P'_i = P'_i(t, q^r, P_r)$$

che verifica la condizione di Lie è simplettica, ovvero, detto M lo jacobiano della trasformazione medesima:

$$M = M(t, q^r, P_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial q'}{\partial P} \\ \frac{\partial P'}{\partial q} & \frac{\partial P'}{\partial P} \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \tag{8}$$

M soddisfa, per ogni t, q^k, P_r, la condizione (di simpletticità)

$$M^T J M = J \tag{9}$$

Dimostriamo il teorema nel caso in cui F dipenda dalle variabili t, q^k, q'^k. Ricordando la condizione di Lie e le sui implicazioni, abbiamo:

$$P_i dq^i - H dt = P'_i dq'^i - H' dt = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial q'^i} dq'^i$$

$$P_i = \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q^i} \qquad i = 1, \dots, n \tag{10a}$$

$$P'_i = -\frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q'^i} \qquad i = 1, \dots, n \tag{10b}$$

$$H' = H + \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial t} \tag{10c}$$

come già osservato le relazioni (4) (o (10)) definiscono la trasformazione dalle t, q^r, P_r alle $t' = t, q'^r, P'_r$ in modo *implicito*, mentre lo jacobiano M che appare nella condizione (9) è definito dalla trasformazione in modo esplicito ($\Rightarrow$ per calcolare M dato dalla (8) occorre conoscere q'^k e P'_k in forma di t, q^k, P_k). Ovviamente però le $(10a, b)$ possono essere lette così:

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}\left(t, q^i, q'^i(t, q^k, P_k)\right) \tag{11a}$$

$$P'_i(t, q^k, P_k) = -\frac{\partial F}{\partial q'^i}\left(t, q^i, q'^i(t, q^k, P_k)\right) \tag{11b}$$

in cui le variabili *indipendenti* sono ora t, q^k, P_k. In altre parole, q'^i e P'_i che appaiono nelle $(10a)$ e $(10b)$ sono pensati come funzione di t, q^r, P_r.
Evidentemente ora, derivando le $(11a, b)$ rispetto alle variabili indipendenti t, q^k, P_k, si ha:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial P_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q'^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q^i}\frac{\partial F}{\partial q^j} \\ \delta_i^j = \frac{\partial P_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q^i}\frac{\partial q'^k}{\partial P_j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q'^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i}\frac{\partial q'^k}{\partial P_j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i}\frac{\partial q'^k}{\partial P_j} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q'^k}\frac{\partial q'^k}{\partial q^j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q'^k}\frac{\partial q'^k}{\partial P_j} = \delta_i^j \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q'^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i}\frac{\partial q'^k}{\partial q^j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i}\frac{\partial q' k}{\partial P_j} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

Sia $D_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q'^k}$, ovviamente $det(D_{ik}) \neq 0$ (vedi formula (5) e commenti seguenti).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} + D_{ik} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} = 0 \\ D_{ik} \frac{\partial q'^k}{\partial P_j} = \delta_i^j \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -D_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} \frac{\partial q' k}{\partial P_j} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

$$\begin{cases} D^{ri} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} + D^{ri} D_{ik} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} = 0 \qquad D^{ri} D_{ik} = \delta_k^r \\ D^r{}_i D_{ik} \frac{\partial q'^k}{\partial P_j} = \delta_i^j D^r{}_i \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -D_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} \frac{\partial q'^k}{\partial q^j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} \frac{\partial q' k}{\partial P_j} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

$$\begin{cases} D^{ri} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial q'^r}{\partial q^j} = 0 \\ \frac{\partial q'^r}{\partial P_j} = D^{rj} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -D_{ij} - \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} \left(-D^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^r} \right) \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} D^{kj} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q'^i}{\partial q^j} = -D^{il} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^l} = -D^{il} \frac{\partial^2 F}{\partial q^l \partial q^j} \\ \frac{\partial q'^i}{\partial P_j} = D^{ij} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial q_j} = -D_{ij} + \frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} D^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial q^j \partial q^l} = -D_{ij} + \frac{\partial^2 F}{\partial q'^i \partial q'^k} D^{kl} \frac{\partial^2 F}{\partial q^l \partial q^j} \\ \frac{\partial P'_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \partial q'^i} D^{kj} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q'^i \partial q'^k} D^{kj} \end{cases} \qquad i, j = 1 \dots n$$

Posto $D_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q'^k}$, $G_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial q'^i \partial q'^k} = G_{ki}$, $E_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial q^k} = E_{ki}$

le equazioni viste precedentemente diventano, in forma matriciale:

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = -D^{-1}E \quad \frac{\partial q'}{\partial p} = D^{-1} \quad \frac{\partial P'}{\partial q} = -D^T + GD^{-1}E \quad \frac{\partial P'}{\partial p} = -GD^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'}{\partial q} & \frac{\partial q'}{\partial p} \\ \frac{\partial P'}{\partial q} & \frac{\partial P'}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D^{-1}E & D^{-1} \\ -D^T + GD^{-1}E & -GD^{-1} \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial q'}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial q'}{\partial p}\right)^T \\ \left(\frac{\partial P'}{\partial q}\right)^T & \left(\frac{\partial P'}{\partial p}\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-D^{-1}E)^T & (D^{-1})^T \\ -D + (GD^{-1}E)^T & (-GD^{-1})^T \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora $M^T J M$

$M^T JM =$

$$= \begin{pmatrix} -E(D^{-1})^T & -D + E(D^{-1})^T G \\ (D^{-1})^T & -(D^{-1})^T G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D^{-1}E & D^{-1} \\ -D^T + GD^{-1}E & -GD^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -E(D^{-1})^T & -D + E(D^{-1})^T G \\ (D^{-1})^T & -(D^{-1})^T G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -D^{-1} + GD^{-1}E & D^{-1} \\ D^{-1}E & -D^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{r} E(D^{-1})^T - E(D^{-1})^T GD^{-1} + \\ -DD^{-1}E + E(D^{-1})^T GD^{-1}E \end{array} & \begin{array}{r} E(D^{-1})^T GD^{-1} + DD^{-1} + \\ -E(D^{-1})^T GD^{-1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} (D^{-1})^T D^T + (D^{-1})^T GD^{-1}E + \\ +(-D^{-1})^T GD^{-1}E \end{array} & \begin{array}{c} -(D^{-1})^T GD^{-1} + \\ +(-D^{-1})G(-D^{-1}) \end{array} \end{array}\right) =$$

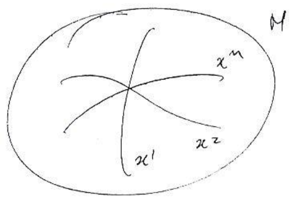
$$= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = J$$

□

4 Legame tra 1-forma differenziale di Poincaré-Cartan e dinamica

4.1 Cenno su forme differenziali e sul "differenziale" di forme differenziali

La differenziazione esterna



$x^1, ..., x^n$ coordinate locali su M

$\eta = \eta_k(x^1, \ldots, x^n)dx^k$ 1-forma differenziale su M
L'operazione di differenziazione, notoriamente definita nelle funzioni $f : M \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k}\,(x^1, \ldots, x^n)dx^k \tag{1}$$

si estende nella 1-forma differenziale nel modo seguente

$$d\eta = \frac{\partial \eta_k}{\partial x^r}\,dx^r \wedge dx^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x^r} - \frac{\partial \eta_r}{\partial x^k}\right) dx^r \otimes dx^k \tag{2}$$

Osserviamo l'intrinsecità dell'operazione. Sia $x'^k = x'^k(x^1, \ldots, x^n)$ un cambiamento di coordinate

$$\eta = \eta_k dx^k = \eta_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} dx'^r \stackrel{def}{=} \eta'_r dx'^r$$
$$\Rightarrow \eta'_r = \eta_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^r}$$

Ora

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \eta'_k}{\partial x'^r} - \frac{\partial \eta'_r}{\partial x'^k}\right) dx'^r \otimes dx'^k = \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x'^r}\left(\eta_s \frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(\eta_s \frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\right)\right] \frac{\partial x'^r}{\partial x^v} dx^v \otimes \frac{\partial x'^k}{\partial x^w} dx^w = \\
&= \left[\frac{\partial \eta_s}{\partial x'^r}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k} + \eta_s \cancel{\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^r \partial x'^k}} - \frac{\partial \eta_s}{\partial x'^k}\frac{\partial x^s}{\partial x'^r} + \eta_s \cancel{\frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^k \partial x'^r}}\right] \frac{\partial x'^r}{\partial x^v} dx^v \otimes \frac{\partial x'^k}{\partial x^w} dx^w = \\
&= \left[\frac{\partial x'^r}{\partial x^v}\frac{\partial \eta_s}{\partial x'^r}\frac{\partial x^s}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^k}{\partial x^w} - \frac{\partial x'^k}{\partial x^w}\frac{\partial \eta_s}{\partial x'^k}\frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^v}\right] dx^v \otimes dx^w = \\
&= \left[\frac{\partial \eta_s}{\partial x^v}\delta^s w - \frac{\partial \eta_s}{\partial x^w}\delta^s v\right] dx^v \otimes dx^w = \\
&= \left(\frac{\partial \eta_w}{\partial x^v} - \frac{\partial \eta_v}{\partial x^w}\right) dx^v \otimes dx^w
\end{aligned}$$

e questo mostra che l'algoritmo di calcolo dato dalla (2) è lo stesso in tutti i sistemi di ambiente, ovvero che l'operazione (2) è intrinseca.
(Per esercizio provare che non è intrinseca l'operazione $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x^r} + \frac{\partial \eta_r}{\partial x^k}\right) dx^r \otimes dx^k$).
In particolare, si osservi che, per un'arbitraria funzione f

$$ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial f}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^r}\right) dx^r \otimes dx^k = 0$$

(vedi nota[1])

Applichiamo queste condizioni alla 1-forma differenziale di Poincaré-Cartan

$$\begin{aligned}
\theta &= P_i dq^i - H(t, q^r, P_r) dt \\
d\theta &= dP_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^r} dq^r \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial P_r} dP_r \wedge dt
\end{aligned}$$

Ordinando gli elementi della base delle 1-forme differenziali nel modo seguente: $\{dt, dq^1, \ldots, dq^n, dP_1, \ldots, dP_n\}$, la matrice (antisimmetrica) rappresentabile dalla 2-forma differenziale $d\theta$ è

[1] Il termine dF nella *condizione di Lie* non influenza la dinamica (ddF è autenticamente nullo)

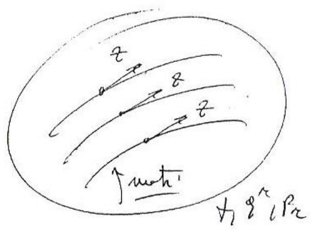
$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & dt & d\underline{q} & d\underline{P} \\
\hline
dt & 0 & \left(-\frac{\partial H}{\partial \underline{q}}\right)^T & \left(-\frac{\partial H}{\partial \underline{P}}\right)^T \\
\hline
d\underline{q} & \frac{\partial H}{\partial \underline{q}} & 0 & I_{n\times n} \\
\hline
d\underline{P} & \frac{\partial H}{\partial \underline{P}} & -I_{n\times n} & 0 \\
\hline
\end{array}_{(2n+1)\times(2n+1)}
$$

Esiste uno ed un solo campo vettoriale Z (con componente 1 lungo $\frac{\partial}{\partial t}$) che "annulla" la 2-forma differenziale $d\theta$; esso è il campo tale che $Z\rfloor d\theta = 0$ e $\langle Z, dt\rangle = 1$. Notare che $d\theta$ è antisimmetrica e lo spazio ha dimensione dispari $(2n+1)$; ma Z t.c. $Z\rfloor d\theta = 0$ esiste certamente, e la condizione $\langle Z, dt\rangle = 1$ lo "normalizza".

$$
Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial P_k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial P_k}
$$

matematicamente equivalente al sistema hamiltoniano

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{dt} &= 1 \\
\frac{dq^k}{dt} &= \frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial P_k} \\
\frac{dP_k}{dt} &= -\frac{\partial H(t, q^r, P_r)}{\partial q^k}
\end{aligned}
$$



4.2 Dinamica di un sistema in termini della 1-forma differenziale di Poincaré-Cartan

$$
\theta_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\, dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\,\omega^k = \mathcal{L}\, dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}(dq^k - \dot{q}^k dt) = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - \mathcal{L}\right) dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} dq^k =
$$
$$
= -H(t, q, \dot{q})dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} dq^k
$$

$\theta_{\mathcal{L}}$ è detta 1-forma di Poincaré-Cartan su $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$ associata alla Lagrangiana $\mathcal{L}$.

$$
\begin{aligned}
d\theta_{\mathcal{L}} &= d\,\mathcal{L}\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k + \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}d\omega^k \\
&= d\,\mathcal{L}\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}d\dot q^k\wedge dt \\
&= \frac{d\,\mathcal{L}}{dq^k}dq^k\wedge dt + \cancel{\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}d\dot q^k}\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k - \cancel{\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}d\dot q^k}\wedge dt \\
&= \frac{d\,\mathcal{L}}{dq^k}dq^k\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k \\
&= \frac{d\,\mathcal{L}}{dq^k}\omega^k\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k
\end{aligned}
$$

Posto $Z = \frac{\partial}{\partial t} + y^i\frac{\partial}{\partial q^i} + Z^i\frac{\partial}{\partial\dot q^i}$ la condizione $Z\rfloor\theta_{\mathcal{L}} = 0$ diventa

$$
\begin{aligned}
0 &= Z\rfloor\left[\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k}\omega^k\wedge dt + d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\wedge\omega^k\right] \\
&= \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k}\left[\left(Z\rfloor\omega^k\right)dt - \langle Z, dt\rangle\omega^k\right] + \langle Z, d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)\rangle\omega^k - d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)Z\rfloor\omega^k
\end{aligned}
$$

ora $Z\rfloor\omega^k = \langle Z, dq^k - \dot q^k dt\rangle = y^k - \dot q^k$, mentre $\langle Z, dt\rangle = 1$ per cui si ha:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}(y^k - \dot q^k)dt - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k}w^k + Z\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)w^k - d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)(y^k - \dot q^k) \\
&= \left[Z\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right) - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k}\right]w^k + \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}(y^k - \dot q^k)dt - d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)(y^k - \dot q^k)
\end{aligned}
$$

Sviluppando l'ultimo termine

$$
-d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)(y^k - \dot q^k) = -\left[\frac{\partial^2\,\mathcal{L}}{\partial t\partial\dot q^k}dt + \frac{\partial^2\,\mathcal{L}}{\partial q^r\partial\dot q^k}dq^r + \frac{\partial^2\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^r\partial\dot q^k}d\dot q^r\right](y^k - \dot q^k)
$$

si vede che esso è l'unico ad avere componenti lungo $d\dot q^r$ (si assuma, ad esempio, di usare la base $\{dt, w^k = dq^k - \dot q^k dt, d\dot q^k\}$ per le forme differenziali su $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$).
La condizione $Z\rfloor d\theta_{\mathcal{L}} = 0$ implica pertanto che il termine $-d\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right)(y^k - \dot q^k)$ debba essere nullo e, nell'ipotesi di non singolarità di $\mathcal{L}$ $\left(\Leftrightarrow det\left(\frac{\partial^2\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^r\partial\dot q^k}\right)\neq 0\right)$ che $y^k = \dot q^k$.
Pertanto la condizione $Z\rfloor d\theta_{\mathcal{L}} = 0$ si riduce a

$$
\left(Z\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right) - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k}\right)w^k = 0
$$

ovvero

$$
Z\left(\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\right) - \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial q^k} = 0 \qquad\qquad k = 1,\ldots,n
$$

Risulta pertanto provato il fatto seguente: data $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q^r, \dot{q}^r)$ e definita la 1-forma di Poincaré-Cartan $\theta_{\mathcal{L}}$, le condizioni

$$\begin{cases} Z\rfloor d\theta_{\mathcal{L}} = 0 \\ \langle Z, dt\rangle = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Z = \tfrac{\partial}{\partial t} + y^i \tfrac{\partial}{\partial q^i} + Z^i \tfrac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$$

determinano univocamente il campo vettoriale dinamico $Z = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Z^i(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$ che *geometrizza* le equazioni di Lagrange.
Quanto visto fino ad ora può essere riscritto in linguaggio Hamiltoniano. Detta

$$\theta_H = P_i dq^i - H(t, q^k, P_k)dt$$

la 1-forma di Poincaré-Cartan associata all'Hamiltoniana H, mostriamo che il campo vettoriale dello spazio tempo delle fasi che *geometrizza* la meccanica Hamiltoniana

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

è esprimibile intrinsecamente attraverso le condizioni

$$\begin{cases} Z\rfloor d\theta_H = 0 \\ \langle Z, dt\rangle = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione $\langle Z, dt\rangle = 1$ impone che la componente lungo $\frac{\partial}{\partial t}$ sia uguale a 1. Partiamo perciò da un campo Z del tipo

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Z_i \frac{\partial}{\partial P_i}$$

e imponiamo la condizione $Z\rfloor d\theta_H = 0$

$$\begin{aligned} Z\rfloor d\theta_H &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Z_i \frac{\partial}{\partial P_i}\right)\rfloor(dP_k \wedge dq^k - dH(t, q^r, P_r) \wedge dt) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Z_i \frac{\partial}{\partial P_i}\right)\rfloor \left(dP_k \wedge dq^k - \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial P_k} dP_k \wedge dt\right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial P_k} dP_k - Z^i dP_i - Z^i \frac{\partial H}{\partial q^i} dt + Z_i dq^i - Z_i \frac{\partial H}{\partial P_i} dt \end{aligned}$$

per cui la condizione $Z\rfloor d\theta_H = 0$ implica

$$Z_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad e \qquad Z^i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

ovvero

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i}$$

Quanto visto precedentemente mostra che il campo dinamico Z *più che dalla forma differenziale* θ_H (o $\theta_{\mathcal{L}}$ in linguaggio lagrangiano) dipende *dal suo differenziale* $d\theta_H$ attraverso la condizione $Z\rfloor d\theta_H = 0$ (o da $d\theta_{\mathcal{L}}$ attraverso la condizione

$Z\rfloor d\theta_H = 0$ in linguaggio lagrangiano). [2]
Risulta pertanto completamente motivata l'introduzione della *"condizione di Lie"* su una trasformazione di coordinate $t, q^k, P_k \to t, q'^k, P'^k$. Se una trasformazione soddisfa la condizione di Lie, la forma differenziale

$$\theta = P_i dq^i - H(t, q^r, P_r)dt$$

si esprime nelle nuove coordinate, nella forma

$$\theta = P'_i dq'^i - H(t, q^r, P_r)dt + dF$$

ma

$$d\theta = d(P_i dq^i - Hdt) + ddF$$

e $ddF = 0$ [3] per ogni F, e il campo dinamico Z determinato da

$$\begin{aligned} &Z\rfloor(dP_i \wedge dq^i - H \wedge dt) = 0 \\ &\langle Z, dt\rangle = 1 \end{aligned}$$

oppure da

$$\begin{aligned} &Z\rfloor(dP'_i \wedge dq'^i - H' \wedge dt) = 0 \\ &\langle Z, dt\rangle = 1 \end{aligned}$$

hanno la stessa truttura (Hamiltoniana) rappresentativa:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial H'}{\partial P'_i}\frac{\partial}{\partial q'^i} - \frac{\partial H'}{\partial q'^i}\frac{\partial}{\partial P'_i}$$

5 Teoria di Hamilton-Jacobi

Abbiamo visto che una funzione $F = F(t, q^i, q'^i)$ con la proprietà che

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i\, \partial q'^k}\right) \neq 0$$

può giocare il ruolo di funzione generatrice di una trasformazione

$$t' = t \qquad q'^k = q'^k(t, q^r, P_r) \qquad P'_k = P'_k(t, q^r, P_r) \tag{1}$$

che preserva la struttura di ogni sistema Hamiltoniano. Precisamente, dalla condizione di Lie abbiamo che

[2] Si potrebbe commentare questo fatto dicendo che θ_H (o $\theta_{\mathcal{L}}$) è un "potenziale" per la dinamica.
[3] L'aggiunta di un differenziale al "potenziale" non cambia la dinamica

$$
\begin{cases}
P_i = \dfrac{\partial F(t, q^k, q'^k)}{\partial q^i} & \qquad\qquad (2a) \\[2ex]
P'_i = -\dfrac{\partial F(t, q^k, q'^k)}{\partial q'^i} \qquad \text{i=1,...,n} & \qquad\qquad (2b) \\[2ex]
H' = H + \dfrac{\partial F(t, q^k, q'^k)}{\partial t} & \qquad\qquad (2c)
\end{cases}
$$

e abbiamo visto che una trasformazione che soddisfa la condizione di Lie ha jacobiano $M = M(t, q^r, P_r)$ che soddisfa $M^T JM = J$. Di conseguenza una trasformazione che soddisfa la condizione di Lie preserva la struttura di ogni sistema Hamiltoniano.
Nel seguito chiameremo *canoniche* queste trasformazioni.

Il carattere *non invariante* di H rispetto a trasformazioni canoniche (come risulta esplicitamente dalla $(2c)$) può essere utilmente sfruttato, e precisamente è possibile porsi il problema di determinare una opportuna trasformazione canonica, generata da un'opportuna funzione generatrice $F = F(t, q^k, q'^k)$, tale che la "nuova" Hamiltoniana $H' = H'(t, q'^k, P'_k)$ risulti *identicamente nulla*.
Essendo la trasformazione canonica, la struttura Hamiltoniana del sistema verrà preservata e precisamente il sistema:

$$
\begin{cases}
\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial P_k} \\
\frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial H(t,q^r,P_r)}{\partial q^k}
\end{cases}
\qquad k = 1, \ldots, n
$$

dopo aver subito la trasformazione

$$
t' = t, \quad q'^k = q'^k(t, q^r, P_r), \quad P'_k = P'_k(t, q^r, P_r)
$$

si potrà riscrivere ancora nella forma

$$
\begin{cases}
\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial H'(t,q'^r,P'_r)}{\partial P'_k} \\
\frac{dP'_k}{dt} = -\frac{\partial H'(t,q'^r,P'_r)}{\partial q'^k}
\end{cases}
\qquad k = 1, \ldots, n
$$

Ora, se $H' = H'(t, q'^r, P'_r) = 0$

$$
\begin{cases}
\frac{dq'^k}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P'_k} = 0 \\
\frac{dP'_k}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'^k} = 0
\end{cases}
\qquad k = 1, \ldots, n
$$

Pertanto, nelle variabili q'^k, P'_k ogni moto del sistema avrà una descrizione banale, e precisamente

$$
q'^k(t) = q'^k_0
$$
$$
P'_k(t) = P'_{k0}
$$

le quantità q'^k_0 e P'_{k0} dipendono dai $2n$ dati iniziali del problema.
La soluzione del problema del moto è pertanto ricondotta alla determinazione del legame tra le variabili q'^k, P'_k e le variabili q^k, P_k, ovvero alla trasformazione

$$
\begin{aligned}
q^k &= q^k(t, q'^k, P'_k) = q^k(t, q'^k_0, P'_{k0}) \\
P_k &= P_k(t, q'^k, P'_k) = P_k(t, q'^k_0, P'_{k0})
\end{aligned}
$$

La condizione che determina la $F = F(t, q^k, q'^k)$ tale che $H'(t, q'^k, P'_k) = 0$ è, per la $(2c)$

$$0 = H\left(t, q^k, P_k(t, q^r, q'^r)\right) + \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial t}$$

ovvero, per la $(2a)$

$$0 = H\left(t, q'^k, \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial F(t, q^r, q'^r)}{\partial t} \tag{3}$$

[Notare che si sono usate le coordinate t, q^r, q'^r, trattate come indipendenti, per esprimere tutte le quantità che compaiono nella relazione $(2c)$].

L'equazione (3) ha la natura di un'equazione alle derivate parziali del primo ordine, in cui

t, q^k sono le variabili indipendenti

F è la funzione incognita

q'^k intervengono nella (3) parametricamente

Il ruolo dei parametri q'^k sarà ben spiegato nelle righe seguenti.

Come già detto l'equazione

$$H\left(t, q^k, \frac{\partial F}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

è alle derivate parziali del primo ordine, t, q^k sono variabili indipendenti e F la funzione incognita. Nessun dato "al bordo" è significativo, per cui la (4) ha infinite soluzioni.

Per i nostri scopi, ovvero per costruire un trasformazione, della (4) non basta però determinare una soluzione, ma occorre determinare una famiglia di soluzioni, parametrizzate dalle n variabili q'^k (Precisamente, ogni assegnazione della n-upla $q'^1, \ldots, q'^n$ individua una soluzione della (4)).
Occorre che la dipendenza delle soluzioni della (4) dai parametri q'^n sia "significativa", ovvero che

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q'^k \, \partial q^i}\right) \neq 0 \tag{5}$$

Una famiglia di soluzioni $F(t, q^k, q'^1, \ldots, q'^n)$ della (4) è quello che nel gergo viene detto un *integrale completo*, ovviamente quando la (5) è soddisfatta. Noto un integrale completo della (4) è possibile costruire la trasformazione canonica che banalizza il sistema Hamiltoniano.

6 Esercizi sulla teoria di Hamilton-Jacobi

Considerata la funzione generatrice F nella forma:

$$F = F(t, q^k, q'^k)$$

la trasformazione tra le varibili t, q^k, P_k e $t' = t, q'^k, P'_k$ è data, in moto involuto, da

$$P_i = \frac{\partial F(t, q^k, q'^k)}{\partial q^i} \tag{1a}$$

$$P'_i = -\frac{\partial F(t, q^k, q'^k)}{\partial q'^i} \tag{1b}$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi prende la forma

$$H\left(t, q^k, \frac{\partial F}{\partial q^k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Oscillatore armonico

$$H = H(t, q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{3}$$

Cerco F nella forma

$$F = F(t, q, q') = -q't + w(q, q') \tag{4}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial w}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = q' \tag{5}$$

Notare che il parametro q' si identifica con l'energia totale, per cui lo indicheremo con h.

$$\frac{\partial w}{\partial q} = \sqrt{m}\sqrt{2h - m\omega^2 q^2}$$

$$w(q, h) = \int \sqrt{m}\sqrt{2h - m\omega^2 q^2} dq \ (+c)$$

$$F(t, q, h) = -ht + \sqrt{m}\int \sqrt{2h + m\omega^2 q^2} dq \ (+c) \tag{6}$$

per la $(1a, b)$ la trasformazione di coordinate fornita da $F(t, q, q')$, dove $q' = h$ è perciò

$$P = \frac{\partial F(t, q, h)}{\partial q}$$

$$P' = -\frac{\partial F(t, q, h)}{\partial h}$$

$$
\begin{aligned}
P' &= -\frac{\partial F}{\partial h} = t - \frac{\partial w}{\partial h} = t - \sqrt{m}\int \frac{dq}{\sqrt{2h - m\omega^2 q^2}} \\
&= t - \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2h}{m\omega^2} - q^2}} = t - \frac{1}{\omega} arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2h}}q\right)
\end{aligned}
$$

Che, risolta rispetto a q, fornisce

$$
\omega(t - P') = arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2h}}q\right)
$$

$$
q(t, q', P') = \sqrt{\frac{2h}{m\omega^2}} sin(\omega(t - P')) \tag{7}
$$

che fornisce q in funzione del tempo e delle 2 quantità costanti lungo ogni moto

$$
\begin{array}{ll}
q' = h = & \text{(energia totale)} \\
P' & \text{(fase temporale)}
\end{array}
$$

Per completezza abbiamo

$$
P = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial q} = \sqrt{m}\sqrt{2h - m\omega^2 q^2} \tag{8}
$$

e sostituendo in (8) quanto ricavato nella (7), abbiamo $P = P(t, q', P')$ ovvero P in funzione del tempo e delle due quantità conservate $q' = h$, P'.

Campo centrale

$$
H = H(t, r, \theta, P_r, P_\theta) = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \tag{9}
$$

Cerco F nella forma

$$
F = F(t, r, \theta, q'^1, q'^2) = -q'^1 t + w(r, \theta, q'^1, q'^2)
$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$
\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + V(r) = q'^1 \qquad q'^1 \ \textit{energia totale}
$$

Cerchiamo $w(r, \theta, q'^1, q'^2)$ nella forma

$$
w = w(r, \theta, q'^1, q'^2) = w_r(r, q'^1, q'^2) + w_\theta(\theta, q'^1, q'^2)
$$

$$
\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2 + V(r) - q'^1\right] 2mr^2 = -\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}\right)^2
$$

$$
\begin{cases}
\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right)^2 + V(r) - q'^1\right] 2mr^2 = -\left(q'^2\right)^2 \\
\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = \left(q'^2\right)^2
\end{cases}
$$

essendo q'^2 una unica quantità costante lungo ogni moto, che si identifica col momento della quantità di moto del sistema.

$$
\begin{aligned}
w_r(r, q'^1, q'^2) &= \int \sqrt{2mq'^1 - 2mV(r) - \frac{(q'^2)^2}{r^2}} dr \\
w_\theta(\theta, q'^1, q'^2) &= q'^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(t, r, \theta, q'^1, q'^2) = -q'^1 t + w(r, \theta, q'^1, q'^2) = -q'^1 t + q'^2\theta + \\
+ \int \sqrt{2mq'^1 - 2mV(r) - \frac{(q'^2)^2}{r^2}} dr
\end{aligned}
$$

La trasformazione è data da

$$
\begin{aligned}
P_r &= \frac{\partial F}{\partial r} & P_\theta &= \frac{\partial F}{\partial \theta} \\
P'_1 &= \frac{\partial F}{\partial q'^1} & P'_2 &= \frac{\partial F}{\partial q'^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P'_1 &= -\frac{\partial F}{\partial q'^1} = t - \int \frac{2m}{2\sqrt{2mq'^1 - 2mV(r) - \frac{(q'^2)^2}{r^2}}} dr \\
P'_2 &= -\frac{\partial F}{\partial q'^2} = \theta - \int \frac{\frac{-2q'^2}{r^2}}{2\sqrt{2mq'^1 - 2mV(r) - \frac{(q'^2)^2}{r^2}}} dr
\end{aligned}
$$

7 Un po' più di geometria (simplettica)

Riepilogo della formulazione lagrangiana della meccanica classica

$$
\begin{array}{lcl}
j_1(\mathcal{V}_{n+1}) & \xrightarrow[t, q^i, \dot q^i]{\mathcal{L}} & \mathbb{R} \\
\pi \downarrow & & \\
\mathcal{V}_{n+1} \quad t, q^i & & \\
t \downarrow & & \\
\mathbb{R}_t & &
\end{array}
$$

t, q^i coordinate fibrate su $\mathcal{V}_{n+1}$, spazio tempo degli eventi in presenza di vincoli

$t, q^i, \dot q^i$ coordinate naturali in $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$, spazio tempo degli stati cinetici in presenza di vincoli.

$$
\begin{cases}
t' = t \\
q'^i = q'^i(t, q)
\end{cases}
$$

gruppo di trasformazione di coordinate in $\mathcal{V}_{n+1}$

$$\begin{cases} t' = t \\ q'^i = q'^i(t,q) \\ \dot{q}'^i = \frac{\partial q'^i}{\partial t}(t,q) + \frac{\partial q'^i}{\partial q^k}(t,q)\dot{q}^k \end{cases}$$

gruppo di trasfomazioni tra coordinate naturali di $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}$$

equazioni di Lagrange

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ddot{q}^k = \ddot{q}^k(t,q,\dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} Z^k(t,q,\dot{q}) \\ &\Rightarrow Z = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k} + Z^k(t,q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \end{aligned}$$

Nota: $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt}f(t,q)$ e $\mathcal{L}$ determinano la stessa dinamica (gauge Lagrangiano).

Esercizio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i}\frac{\partial q'^i}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial q^k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\right)\frac{\partial q'^i}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q'^i}{\partial q^k} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\right)\frac{\partial q'^i}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i}\frac{\partial \dot{q}'^i}{\partial q^k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i}\right)\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}$$

Risulta pertanto mostrata l'invarianza delle equazioni di Lagrange al variare delle *coordinate* in $\mathcal{V}_{n+1}$.

Posto $\omega^k = dq^k - \dot{q}^k dt$, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} \omega'^i &= dq^k - \dot{q}'^i dt = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k}(dq^k - \dot{q}^k dt) \\ &= \frac{\partial q'^i}{\partial\, q^k}\omega^k \end{aligned}$$

Pertanto le equazioni di Lagrange si possono scrivere in forma *vettoriale* nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q^k}\right)\omega^k=0$$

Similmente, posto $\mathcal{T}_{k|I}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_I}{\partial\dot q^k}-\frac{\partial T_I}{\partial q^k}$ e $Q_{k|I}=\sum_{i=1}^{N}F_{i|I}\cdot\frac{\partial P_i}{\partial q^k}$, si può scrivere:

$$\sum_{k=1}^{N}\mathcal{T}_{k|I}\quad\omega^k=\sum_{k=1}^{N}Q_{k|I}\quad\omega^k$$

$$H=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\dot q^k-\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^i}\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}\dot q^k-\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^i}\left(\dot q'^i-\frac{\partial q^i}{\partial t}\right)-\mathcal{L}=H'-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^i}\frac{\partial q^i}{\partial t}$$

che mostra le leggi di trasformazione della *funzione* Hamiltoniana al variare delle coordinate. *Notare che H non è invariante per trasformazioni di coordinate restanti in $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$.*

Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned}-Hdt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}q^k&=-\left(H'-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^i}\frac{\partial q'^i}{\partial t}\right)dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^i}\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}dq^k\\&=-H'dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q'^i}dq'^i\end{aligned}$$

La quale mostra che la 1-forma differenziale, detta di Poincaré-Cartan,

$$\theta_{\mathcal{L}}=-Hdt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}dq^k$$

ha comportamento *invariantivo* al cambiare delle coordinate.

Sotto una trasformazione di gauge $\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\frac{df}{dt}$,

$$\begin{aligned}\theta_{\mathcal{L}}=-Hdt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}dq^k&=-\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\dot q^k-\mathcal{L}\right)dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}q^k\\&=\mathcal{L}\,dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\left(dq^k-\dot q^k dt\right)=\mathcal{L}\,dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\omega^k\end{aligned}$$

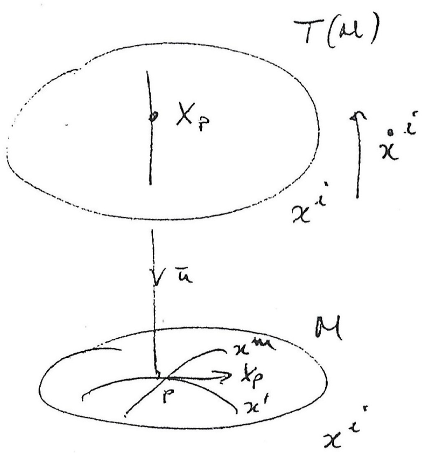
diventa

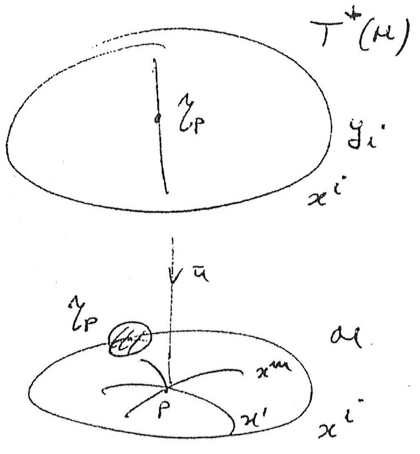
$$\begin{aligned}\theta'_{\mathcal{L}}&=\left(\mathcal{L}+\frac{df}{dt}\right)dt+\frac{\partial}{\partial\dot q^k}\left(\mathcal{L}+\frac{df}{dt}\right)\left(dq^k-\dot q^k dt\right)\\&=\mathcal{L}\,dt+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\omega^k+\frac{\partial f}{\partial q^k}\left(dq^k-\dot q^k dt\right)\\&=\left(\mathcal{L}\,dt+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q^k}\omega^k\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial t}dt+\cancel{\frac{\partial f}{\partial q^k}\dot q^k}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial q^k}\left(dq^k-\cancel{\dot q^k dt}\right)\\&=\theta_{\mathcal{L}}+\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial q^k}dq^k=\theta_{\mathcal{L}}+df\end{aligned}$$

I calcoli come svolti mostrano che la 1-forma differenziale $\theta_{\mathcal{L}} = -H(t,q,\dot{q})dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}(t,q,\dot{q})dq^k$ sullo spazio $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$, detta 1-forma di Poincaré-Cartan associata a $\mathcal{L}$, è un oggetto importante.
La si incontrerà molte volte nelle pagine seguenti.

8 Struttura simplettica del fibrato cotangente

Sia M una varietà differenziabile (che poi identificheremo con $\mathcal{V}_{n+1}$) e che riferiremo per generalità e semplicità a coordinate locali $x^1, \ldots, x^m$.





$$X_p = (X_P)^i \frac{\partial}{\partial x^i} \overset{def}{=} \dot{x}^i_P \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_P$$

$T(M)$ = spazio (fibrato su M) costituito dalla totalità dei *vettori* applicati in tutti i punti di M
x^i, $\dot{x}^i$ coordinate *naturali* su $T(M)$

$$X_P = \dot{x}^i_P \frac{\partial}{\partial x^i} = \dot{x}^i_P \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k}$$

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^1 \ldots x^m) \\ \dot{x}'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}(x^1 \ldots x^m)\dot{x}^k \end{cases}$$

Trasformazione tra coordinate *naturali* in $T(M)$

$$\eta_P = (\eta_P)_i dx^i \overset{def}{=} y_{i_P}(dx^i)_P$$

$T^*(M)$ = spazio (fibrato su M) costituito dalla totalità delle *forme differenziali* applicate in tutti i punti di M
x^i, y_i coordinate *naturali* su $T^*(M)$

$$\eta_P = y_{iP} dx^i = y_{iP} \frac{\partial x'}{\partial x'^k} dx'^k$$

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^1 \ldots x^m) \\ y'^i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}(x^1 \ldots x^m) y_k \end{cases}$$

Trasformazione tra coordinate *naturali* in $T^*(M)$

Concentriamo la nostra attenzione su $T^*(M)$. Esso ammette i seguenti oggetti invarianti o canonici

$$
\begin{aligned}
\theta &= y_i dx^i && \text{1-}\textit{forma di Liouville} \text{ su } T^*(M) \\
\Omega &= d\theta = dy_i \wedge dx^i && \text{2-}\textit{forma simplettica} \text{ su } T^*(M).
\end{aligned}
$$

Per ogni coppia di valori

$$
\begin{aligned}
X &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad && \in T(T^*(M)) \\
Y &= Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad && \in T(T^*(M))
\end{aligned}
$$

l'insieme di Ω sulla coppia (X, Y) è definito da

$$
\Omega(X, Y) = X_i Y^i - X^i Y_i = \begin{pmatrix} X^i & X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^i \\ Y_i \end{pmatrix}
$$

dove $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}_{m \times m}$

Si dimostra facilmente, sulla base della legge di trasformazione tra coordinate naturali in $T^*(M)$ dedotta a pagina precedente, e sulla legge di trasformazione da essa indotta sulle componenti X'^i, X'_i, Y'^i, Y'_i, che $\Omega(X, Y) \in \mathbb{R}$ risulta *indipendente* dalla scelta delle coordinate, cioè che, introdotte componenti X^i, X_i, Y^i, Y_i e X'^i, X'_i, Y'^i, Y'_i dei valori X, Y nelle diverse coordinate naturali su $T^*(M)$ si ha che

$$
X'_i Y'^i - X'^i Y'_i = X_i Y^i - X^i Y_i
$$

(vedi pagina 33).

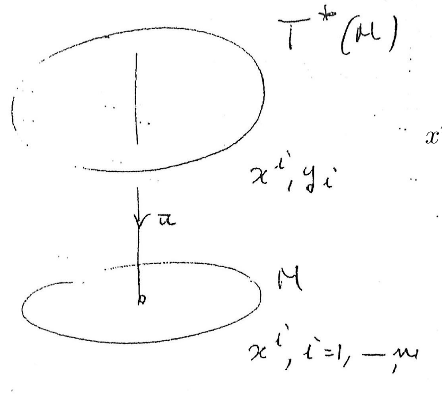
Il funzionale bilineare $\Omega(\cdot, \cdot)$ definisce un prodotto scalare (antisimmetrico), e quindi stabilisce una identificazione tra *vettori* (= vettori *controvarianti*) e *forme differenziali* (= vettori *covarianti*) definiti su $T^*(M)$.

Posto $\omega = a_i dx^i + b^i dy_i \quad \in T^*(T^*(M))$, il vettore ad esso associato risulta essere

$$
X_\omega = -b^i \frac{\partial}{\partial x^i} + a_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \in T(T^*(M))
$$

come facilmente si può verificare dalla definizione

$$
\langle \omega, Y \rangle = \Omega(X_\omega, Y) \qquad \forall\, Y \in T(T^*(M))
$$



$\eta_p \in T^*_p(M) \qquad \eta_p = y_i(dx^i)_p$

x^i, y_i coordinate *"naturali"* in $T^*(M)$

Trasformazione tra coordinate naturali $(x^i, y_i) \to (x'^i, y'_i)$ in $T^*(M)$:

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^1, \ldots x^m) \quad \Leftrightarrow \quad x^k = x^k(x'^1, \ldots x'^m) \\ y'_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}(x^1, \ldots x^m) y_k \end{cases}$$

Sia X un campo vettoriale definito su $T^*(M)$

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\begin{aligned} X &= X^i \left(\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} + \frac{\partial y'_k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y'_k} \right) + X_i \left(\frac{\partial x'^k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x'^k} + \frac{\partial y'_k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y'_k} \right) \\ &= X^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} + X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^r(x')}{\partial x'^k} y_r \right) \frac{\partial}{\partial y'_k} + X_i \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial y'_k} \\ &= X^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} + X^i \frac{\partial x'^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^s} \frac{\partial x^r(x')}{\partial x'^k} y_r \frac{\partial}{\partial y'_k} + X_i \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial y'_k} \\ &= X^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^k} + \left(X^i \frac{\partial x'^s}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x'^s} \frac{\partial x^r(x')}{\partial x'^k} y_r + X_i \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \right) \frac{\partial}{\partial y'_k} \\ &\overset{def}{=} X'^k \frac{\partial}{\partial x'^k} + X'_k \frac{\partial}{\partial y'_k} \end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} X'^k =: X^i \dfrac{\partial x'^k}{\partial x^i} \\ X'_k =: X^i \dfrac{\partial x'^s}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x'^s} \dfrac{\partial x^r(x')}{\partial x'^k} y_r + X_i \dfrac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \end{cases} \tag{1}$$

Riepilogando, sia (x^i, y_i) un sistema di coordinate *naturali* su $T^*(M)$, e sia (x'^i, y'_i) un altro sistema di coordinate *naturali*. Un campo vettoriale X su $T^*(M)$ sarà rappresentato equivalentemente nella forma:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i \frac{\partial}{\partial y_i} = X'^i \frac{\partial}{\partial x'^i} + X'_i \frac{\partial}{\partial y'_i}$$

e il legame tra le componenti (X^i, X_i) e (X'^i, X'_i) nei due sistemi di coordinate è dato dalla formula (1).
Consideriamo ora due campi

$$X = \left\langle \begin{array}{l} X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + X_i \dfrac{\partial}{\partial y_i} \\ X'^i \dfrac{\partial}{\partial x'^i} + X'_i \dfrac{\partial}{\partial y'_i} \end{array} \right. \qquad Y = \left\langle \begin{array}{l} Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i} \\ Y'^i \dfrac{\partial}{\partial x'^i} + Y'_i \dfrac{\partial}{\partial y'_i} \end{array} \right.$$

e il funzionale bilineare (antisimmetrico) definito in coordinate naturali da:

$$\Omega(X, Y) = X_k Y^k - X^k Y_k$$

Mostriamo che la definizione sopra data è *intrinseca*, cioè non dipende dalla scelta delle coordinate, ovvero notiamo che

$$X'_k Y'^k - X'^k Y'_k = X_k Y^k - X^k Y_k$$

in ogni sistema di coordinate naturali.

$$\begin{aligned}
X'_k Y'^k - X'^k Y'_k = & \\
&= \left(X^i \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^r(x')}{\partial x'^s \partial x' k} y_r + X^i \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \right) Y^j \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^j} + \\
&\quad - X^i \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^r(x')}{\partial x'^s \partial x' k} y_r + X^i \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \right) \\
&= X^i Y^j \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^r(x')}{\partial x'^s \partial x' k} \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} y_r + X_i Y^j \frac{\partial x^i(x')}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^j} + \\
&\quad - X^i Y^j \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^r(x')}{\partial x'^s \partial x' k} \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} y_r - X^i Y_j \frac{\partial x'^k(x)}{\partial x^i} \frac{\partial x^j(x')}{\partial x'^k} \\
&= X^i Y^j \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} y_r + X_i Y^j - X^i Y^j \frac{\partial x'^s(x)}{\partial x^i} y_r - X^i Y_j \\
&= X_i Y^j - X^i Y_j
\end{aligned}$$

9 Parentesi di Poisson in $T^*(M)$

Sia $f : T^*(M) \to \mathbb{R}$ e

$$X_{df} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1}$$

il campo vettoriale su $T^*(M)$ ottenuto definendo f e utilizzando l'isomorfismo dato dalla struttura simplettica (vedi pagina 31).

Possiamo definire, partendo da $g : T^*(M) \to \mathbb{R}$

$$\{f, g\} = X_{df}(g) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \tag{2}$$

quella che si definisce come la *parentesi di Poisson tra f e g*.
In particolare, date le coordinate *naturali* x^i, y_j su $T^*(M)$, si hanno le parentesi di Poisson *fondamentali*

$$\begin{aligned} \left\{x^i, x^k\right\} = 0 \qquad \left\{y_i, y_k\right\} = 0 \\ \left\{x^i, y_k\right\} = -\left\{y_k, x^i\right\} = \delta^i_k \end{aligned} \tag{3}$$

Proprietà delle parentesi di Poisson:

1. antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\} \quad \forall f, g \ \in \mathcal{F}(T^*(M))$
2. bilinearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \forall f, g, h, \in \mathcal{F}(T^*(M))$

   $$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}$$
   $$\{f, \alpha g + \beta\} = \alpha \{f, g\} + \beta \{f, h\}$$

3. Regola di Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\} h + g \{f, h\} \qquad \forall f, g, h \in \mathcal{F}(T^*(M))$
4. Assioma sulle funzioni composte : $\varphi_i, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{F}(T^*(M))$ e $g = g(\varphi_i, \ldots, \varphi_k)$

   $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{k} \{f, \varphi_\alpha\} \frac{\partial g}{\partial \varphi_\alpha}$

5. Identità di Jacobi: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(T^*(M))$

   $$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

$$\text{Nota:} \quad X_{d\{f,g\}} = X_{df} X_{dg} - X_{dg} X_{df}$$

$$\text{ovvero} \qquad X_{d\{f,g\}} = [X_{df} X_{dg}]$$

10 Spazio-tempo delle fasi e struttura di Poisson in tale spazio

Consideriamo ora lo spazio $\mathcal{V}_{n+1}$, che identifichiamo con la varietà M delle pagine precedenti, e il corrispondente spazio cotangente $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$.
Identifichiamo le coordinate nel modo seguente

$$x^1, \ldots, x^m \equiv t, q^1, \ldots, q^m \qquad \text{in } \mathcal{V}_{n+1}$$
$$x^1, \ldots, x^m, y_1, \ldots, y_m \equiv t, q^1, \ldots, q^m, P_0, P_1, \ldots, P_m \qquad \text{in } T^*(\mathcal{V}_{n+1})$$

Un elemento di $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ sarà una 1-forma differenziale rappresentata nella forma

$$\omega = P_0(\omega)(dt)_{\pi(\omega)} + P_i(\omega)(dq^i)_{\pi(\omega)}$$

le leggi di trasformazione tra coordinate naturali in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ avranno la forma

$$\begin{aligned} & t' = t \\ & q'^i = q'^i(t, q) \qquad \leftrightarrow q^i = q^i(t, q'^1, \ldots, q'^n) \\ & P'_0 = P_0 + \frac{\partial q^r}{\partial t} P_r \\ & P'_i = P_r \frac{\partial q^r}{\partial q'^i} \end{aligned}$$

La trasformazione di Liouville su $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ sarà

$$\theta = P_0 dt + P_i dq^i \qquad \in T^*(T^*(\mathcal{V}_{n+1}))$$

e il funzionale bilineare

$$\Omega(X,Y) = X_0 Y^0 + X_i Y^i - X^0 Y_0 - X^i Y_i$$

$$\begin{aligned} \text{dove} \quad X &= X^0 \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X_0 \frac{\partial}{\partial P_0} + X_i \frac{\partial}{\partial P_i} \qquad \in T(T^*(\mathcal{V}_{n+1})) \\ Y &= Y^0 \frac{\partial}{\partial t} + Y^i \frac{\partial}{\partial q^i} + Y_0 \frac{\partial}{\partial P_0} + Y_i \frac{\partial}{\partial P_i} \qquad \in T(T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \end{aligned}$$

infine

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial P_0} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_0}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

$$\forall\ f,g \text{ definite in } T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \text{ a valori in } \mathbb{R}.$$

Su $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$, stante l'invarianza della forma differenziale dt (derivante dalla struttura fibrata $t : \mathcal{V}_{n+1} \to \mathbb{R}$), ha senso introdurre la seguente relazione di equivalenza

$$\omega \sim \tilde{\omega} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \pi(\omega) = \pi(\tilde{\omega}) \\ \omega - \tilde{\omega} = \alpha(dt)_{\pi(\omega)} \end{cases}$$

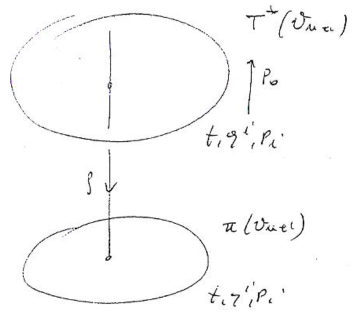
In coordinate

$$\omega \sim \tilde{\omega} \;\Leftrightarrow\; \begin{aligned} t(\omega) &= t(\tilde{\omega}) \\ q^i(\omega) &= q^i(\tilde{\omega}) \\ P_i(\omega) &= P_i(\tilde{\omega}) \end{aligned}$$

cioè ω e $\tilde{\omega}$ sono dette equivalenti (nel senso della $\sim$) se sono applicate nello stesso punto $\pi(\omega) = \pi(\tilde{\omega} \;\in \mathcal{V}_{n+1}$ e differiscono (eventualmente) solo per la componente lungo $(dt)_{\pi(\omega)}$.

$$\pi(\mathcal{V}_{n+1}) = \frac{T^*(\mathcal{V}_{n+1})}{\sim} \qquad \rho : \mathcal{V}_{n+1} \to \pi(\mathcal{V}_{n+1})$$

è detto lo *spazio-tempo delle fasi.*



$\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ risulta essere una varietà differenziabile $2n+1$ dimensionale, riferita a coordinate *naturali* t, q^i, P_i, soggette alle leggi di trasformazione

$$
\begin{aligned}
&t' = t \\
&q'^i = q'^i(t, q) \qquad q^i = q^i(t, q') \\
&P'_i = P_r \frac{\partial q^r}{\partial q'^i}
\end{aligned}
$$

Una funzione $f : \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \to \mathbb{R}$ ($f = f(t, q^i, P_i)$) dà luogo a una funzione $f \circ \rho : T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \to \mathbb{R}$ ($f \circ \rho$ ancora descritta nella forma $f = f(t, q^i, P_i)$). Viceversa, una funzione f definita sullo spazio $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ può essere riguardata come il pull-back (attraverso ρ) di una funzione definita su $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$, se e solo se f è costante lungo le fibre di $\rho : T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \to \pi(\mathcal{V}_{n+1})$ ovvero se

$$\frac{\partial f}{\partial P_0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \{f, t\} = 0 \tag{1}$$

si verifica facilmente che date due funzioni f, g costanti lungo le fibre di $\rho : T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \to \pi(\mathcal{V}_{n+1})$, le loro parentesi di Poisson (ovviamente in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$) risulta indipendente da P_0:
infatti la condizione $\frac{\partial\{f,g\}}{\partial P_0} = 0$ equivale a $\{\{f, g\}, t\} = 0$ (vedi (1)) ma, per l'identità di Jacobi

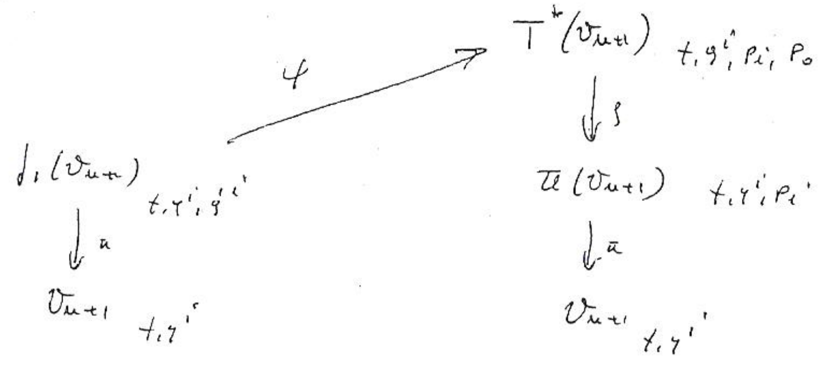
$$\{\{f, g\}, t\} = \{f, \{g, t\}\} - \{g, \{t, f\}\} \tag{2}$$

si ha che $\{g, t\} = 0$ e $\{f, t\} = 0$ ($\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial P_0} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial P_0} = 0$) da cui la conclusione. Pertanto è possibile definire operazione di *parentesi di Poisson* in $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}(\pi(\mathcal{V}_{n+1})) \tag{3}$$

Notare che $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ *non* è una varietà simplettica (ad esempio perchè ha dimensione dispari), quindi l'esistenza di una parentesi di Poisson in $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ risulta un fatto non banale, e, come vedremo, molto importante.

11 Trasformazione di Legendre vista più geometricamente



Vogliamo considerare una applicazione $\psi : j_1(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow T^*(\mathcal{V}_{n+1})$. Dal punto di vista geometrico, essa vuole rappresentare una superficie di dimensione $2n+1$ in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$, precisamente l'immagine $\psi(j_1(\mathcal{V}_{n+1}))$ in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$.

Richiediamo che ψ commuti con la proiezione π, cioè preservi il punto in $\mathcal{V}_{n+1}$. In coordinate, ψ sarà rappresentata nella forma

$$\psi : \quad \begin{cases} t = t \\ q^i = q^i \\ P_0 = P_0(t, q^i, \dot{q}^i) \\ P_i = P_i(t, q^i, \dot{q}^i) \end{cases} \qquad (\ \psi \text{ commuta con } \pi\ )$$

Ricordiamo che, su $j_1(\mathcal{V}_{n+1})$, (che, ricordiamo, rappresenta la totalità degli stati cinetici del sistema) dato un sistema dinamico Lagrangiano, abbiamo una funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ e una 1-forma di *Poincaré-Cartan*

$$\theta_{\mathcal{L}} = -H dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} dq^i \qquad H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k - \mathcal{L}$$

Su $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ abbiamo invece la 1-forma *canonica di Liouville*

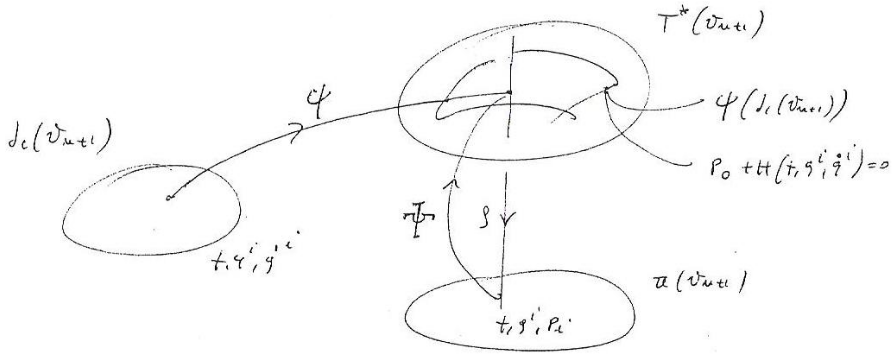
$$\theta = P_0 dt + P_i d\dot{q}^i$$

Sussiste il seguente risultato (trasformazione di Legendre):
Esiste un'unica $\psi : j_1(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ fibrata in $\mathcal{V}_{n+1}$ (cioè commutante con le proiezioni $\pi : j_1(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{V}_{n+1}$ e $\pi \cdot \rho : T^*(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow \mathcal{V}_{n+1}$) tale che

$$\theta_{\mathcal{L}} = \psi^*(\theta)$$

In coordinate, questa condizione diventa

$$\begin{cases} t = t \\ q^i = q^i \\ P_0 = -H(t, q^i, \dot{q}^i) \\ P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(t, q^i, \dot{q}^i) \end{cases} \qquad H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - \mathcal{L}$$



Ammesso, almeno localmente, che $det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\right) \neq 0$, la relazione $P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}(t, q^i, P_i)$ può essere posta nella forma

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(t, q^i, P_i)$$

e la funzione H, definita inusualmente in funzione di $t, q^i, \dot{q}^i$, può essere espressa in forma di t, q^i, P_i:

$$\begin{aligned} H\left(t, q^i, P_i\right) &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k - \mathcal{L}\right)\left(t, q^i, \dot{q}^i\left(t, q^i, P_i\right)\right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\left(t, q^i, P_i\right) - \mathcal{L}\left(t, q^i, \dot{q}^i\left(t, q^i, P_i\right)\right) \\ &= P_k \dot{q}^k\left(t, q^i, P_i\right) - \mathcal{L}\left(t, q^i, \dot{q}^i\left(t, q^i, P_i\right)\right) \end{aligned}$$

la superficie $\Psi\left(j_1(\mathcal{V}_{n+1})\right)$ può, a questo punto, essere espressa come luogo di zeri di

$$P_0 + H\left(t, q^i, P_i\right) = 0$$

ovvero può essere rappresentata parametricamente nella forma

$$t = t, \quad q^i = q^i, \quad P_i = P_i, \quad P_0 = -H\left(t, q^i, P_i\right)$$

come immagine attraverso Ψ, di $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$.

La funzione $H = H\left(t, q^i, P_i\right)$, riguardata come funzione di t, q^i, P_i, è detta la *funzione Hamiltoniana* del sistema (descritto dalla precedente Lagrangiana $\mathcal{L}$).

Con calcoli banali, abbiamo le ralazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_r} &= \dot{q}^r - \cancel{P_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial P_r}} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial P_r}} = \dot{q}^r \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \cancel{P_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial t}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} &= \cancel{P_k \frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial q^i}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Infine, le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \end{cases}$$

diventano, ponendo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = P_i$

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \\ \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \end{cases}$$

e, per le relazioni dedotte sopra,

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \qquad H = H(t, q^i, P_i)$$

dette *equazioni di Hamilton*, matematicamente equivalenti al campo

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i} \qquad \text{su } \pi(\mathcal{V}_{n+1})$$

Data una funzione $f : \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \to \mathbb{R}$, $f = f(t, q^i, P_i)$ l'evoluzione di f lungo i moti (cioè le curve in $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ soluzioni delle equazioni di Hamilton) è data da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{dP_i}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \\ &= \{f, P_0\} + \{f, H\} \end{aligned}$$

con $\{f, H\}$ parentesi di Poisson in $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ e $\{f, P_0\}$ parentesi di Poisson in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ (in $\{f, P_0\}$, f viene riguardata ovviamente come funzione definita su $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$, descitta ancora nella forma $f = f(t, q^i, P_i)$). Riassumendo

$$\frac{df}{dt} = \{f, P_0 + H\} \qquad \longleftarrow \qquad \text{parentesi di Poisson in } T^*(\mathcal{V}_{n+1})$$

In particolare, le equazioni di Hamilton diventano

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \{q^i, P_0 + H\} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} = \{P_i, P_0 + H\} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

Infine

$$\frac{dH}{dt} = \{H, P_0 + H\} = \{H, P_0\} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Facilmente si verificano i fatti seguenti:

- H non dipende esplicitamente dal tempo $\Longrightarrow$ H integrale primo;

- H non dipende esplicitamente da $q^k \implies P_k$ integrale primo;
- f, g integrali primi $\longrightarrow \{f, g\}$ integrale primo (conseguenza dell'identità di Jacobi).

12 Trasformazioni canoniche sul cotangente e sullo spazio-tempo delle fasi

Esaminiamo preliminarmente il problema nello spazio cotangente $T^*(M)$, M essendo una varietà differenziabile di dimensione m. Come abbiamo visto, riferito M a coordinate locali $x^1, \dots, x^m$, è possibile riferire $T^*(M)$ a coordinate $x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_m$, dette *naturali*, sulla base dell'identificazione seguente

$$\eta \in T^*(M) \iff \eta = y_i(r)(dx^i)_{\pi(\eta)}$$

Una trasformazione tra 2 sistemi di coordinate *naturali* è, come abbiamo già visto, del tipo

$$\begin{cases} x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^m) \\ y'_i = y_r \frac{\partial x^r}{\partial x'^i} \qquad\qquad x^r = x^r(x'^1, \dots, x'^m) \end{cases}$$

$T^*(M)$ è dotato canonicamente di una struttura simplettica

$$\Omega(X, Y) = X_i Y^i - X^i Y_i$$

dove

$$\begin{cases} X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i \frac{\partial}{\partial y_i} \\ Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \end{cases} \in T^*(M)$$

e che, per *trasformazioni di coordinate naturali*, Ω risulta invariante nella sua descrizione in coordinate, cioè

$$\Omega(X, Y) = X_i Y^i - X^i Y_i = X'_i Y'^i - X'^i Y'_i$$

Ciò che vedremo è che Ω *risulta invariante in forma rispetto a un gruppo di trasformazioni più generale del gruppo delle trasformazioni tra coordinate naturali.*
Tale gruppo, che caratterizzeremo nelle pagine seguenti, sarà detto il gruppo delle *trasformazioni canoniche.*

Definizioni equivalenti:

Definizione 1. *Una trasformazione di coordinate in $T^*(M)$*

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_m)$$
$$y'^i = y'^i(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_m)$$

è detta canonica se la rappresentazione delle parentesi di Poisson in $T^*(M)$ viene primata :

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x^i} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x'^i}\frac{\partial g}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y'_i}\frac{\partial g}{\partial x'^i} \end{aligned} \qquad \forall f,g \in \mathcal{F}(T^*(M))$$

(si è indicato con f, g le funzioni f, g espresse nei diversi sistemi di coordinate).

Definizione 2. *Una trasformazione di coordinate in $T^*(M)$ è detta canonica se vengono primate le parentesi di Poisson fondamentali:*

$$\{x'^i, x'^j\} = 0 \quad \{y'_i, y'_j\} = 0 \quad \{x'^i, y'_j\} = \delta^i_j$$

L'equivalenza tra le due definizioni segue dalla proprietà 4 di pagina 34:

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= \frac{\partial f}{\partial x'^i}\{x'^i, g\} + \frac{\partial f}{\partial y'_i}\{y'_i, g\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x'^i}\left(\{x'^i, x'^j\}\frac{\partial f}{\partial x'^j} + \{x'^i, y'_j\}\frac{\partial f}{\partial y'_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial y'_i}\left(\{y'_i, x'^j\}\frac{\partial f}{\partial x'^j} + \{y'_i, y'_j\}\frac{\partial f}{\partial y'_j}\right) \end{aligned}$$

La conclusione è ovvia.

Torniamo al problema della caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$.
Osserviamo innanzitutto che le *trasformazioni di scambio* del tipo

$$\begin{cases} x'^k = y'_k \\ y'_k = -x^k \end{cases} \quad \text{per qualche } k \in \{1, \dots, m\}$$

$$e \qquad \begin{cases} x'^r = x^r \\ y'_r = y_r \end{cases} \quad \text{per } r \text{ diverso dai } k \text{ presi sopra}$$

sono canoniche.
A parte questi casi particolari (non banali e interessanti per l'interpretazione fisica ($P \to q, q \to -P$)), la caratterizzazione delle trasformazioni canoniche in $T^*(M)$, anzichè a partire dalla rappresentazione *esplicita*

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_m) \\ y'_i &= y'_i(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

sarà svolta più agevolmente a partire dalla rappresentazione *implicita*

$$\begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^1, \dots, x^m, y'_1, \dots, y'_m) \\ y_i &= y_i(x^1, \dots, x^m, y'_1, \dots, y'_m) \end{aligned}$$

il legame tra le due rappresentazioni, essendo garantito almeno localmente dal teorema della funzione implicita, ogni volta che sia valida la condizione

$$det\left(\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(y'_1,\ldots,y'_m)}\right)\neq 0$$

(con $x^1,\ldots,x^m$ aventi un ruolo parametrico).
Sussiste il seguente risultato:
Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione di coordinate in $T^*(M)$ data nella forma

$$x'^i = x'^i(x,y')$$
$$y_i = y_i(x,y')$$

sia *canonica*, è che le funzioni x'^i , y_i sopra introdotte soddisfino le condizioni di *irrotazionalità*

$$\frac{\partial x'^i}{\partial y'_j}=\frac{\partial x'^j}{\partial y'_i},\qquad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}=\frac{\partial y_j}{\partial y'_i},\qquad \frac{\partial y_i}{\partial x^j}=\frac{\partial y_j}{\partial x^i}.$$

Esprimiamo la trasformazione $x^i, y_i \longleftrightarrow x'^i, y'_i$ nella forma

$$x'^i = x'^i(x^1,\ldots,x^m,y'_1,\ldots,y'_m) = x'^i(x,y')$$
$$y_i = y_i(x^1,\ldots,x^m,y'_1,\ldots,y'_m) = y_i(x,y')$$

e caratterizziamo le trasformazioni tali che

$$X'_iY'^i - X'^iY'_i = X_iY^i - X^iY_i$$

per ogni coppia di campi X, Y.
La condizione suddetta equivale a:

$$\begin{aligned}&< dy'_i, X >< dx'^i, Y > - < dx'^i, X >< dy'_i, Y >=\\ &=< dy_i, X >< dx^i, Y > - < dx^i, X >< dy_i, Y > \qquad \forall X, Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&< dy'_i, X >< \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k}dy'_k, Y > - < \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k}dy'_k, X >< dy'_i, Y >=\\ &=< \frac{\partial y_i}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k}dy'_k, X >< dx^i, Y > - < dx^i, X >< \frac{\partial y_i}{\partial x^k}dx^k + \frac{\partial y_i}{\partial y'_k}dy'_k, Y > \qquad \forall X, Y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} < dy'_i\underline{, X >} < dx^k, Y > + \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k} < dy'_i\underline{, X >} < dy'_k, Y > - \\
&\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} < dx^k\underline{\underline{, X >}} < dy'_i, Y > - \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k} < dy'_k\underline{, X >} < dy'_i, Y >= \\
&= \frac{\partial y_i}{\partial x^k} < dx^k, X > < dx^i, Y > + \frac{\partial y_i}{\partial y'_k} < dy'_k\underline{, X >} < dx^i, Y > - \\
&\frac{\partial y_i}{\partial x^k} < dx^i, X > < dx^k, Y > - \frac{\partial y_i}{\partial y'_k} < dx^i\underline{\underline{, X >}} < dy'_k, Y > \qquad \forall X, Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} - \frac{\partial y_k}{\partial y'_i}\right) < dy'_i, X >< dx^k, Y > + \left(\frac{\partial x'^i}{\partial y'_k} - \frac{\partial x'^k}{\partial y'_i}\right) < dy'_i, X >< dy'_k, Y > - \\
&\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} - \frac{\partial y_k}{\partial y'_i}\right) < dx^k, X >< dy'_i, Y > - \left(\frac{\partial y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial y_k}{\partial x^i}\right) < dx^k, X >< dx^i, Y >= 0
\end{aligned}
$$

e, per l'arbitrarietà dei campi X, Y, si ha

$$
\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} - \frac{\partial y_k}{\partial y'_i} = 0, \qquad \frac{\partial x'^i}{\partial y'_k} - \frac{\partial x'^k}{\partial y'_i} = 0, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial y_k}{\partial x^i} = 0 \qquad i, k = 1, \ldots, m
$$

che possono essere riguardate come condizioni necessarie e localmente sufficienti per l'esistenza della rappresentazione

$$
\begin{aligned}
x'^i = x'^i(x, y') &= \frac{\partial F(x, y')}{\partial y'_i} \\
y_i = y_i(x, y') &= \frac{\partial F(x, y')}{\partial x^i}
\end{aligned}
$$

della trasformazione di coordinate $x^i, y_i \longleftrightarrow x'^i, y'_i$ in termini della funzione $F = F(x, y') = F(x^1, \ldots, x^m, y'_1, \ldots, y'_m)$, detta *funzione generatrice* della trasformazione.
Ovviamente, assegnata una funzione $F(x, y')$, essa definirà effettivamente una trasformazione se

$$
det\left(\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(y'_1, \ldots, y'_m)}\right) = det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial x^j}\right) \neq 0
$$

Notare che F risulta funzione delle *vecchie* variabili $x^1, \ldots, x^m$ e delle *nuove* variabili $y'_1, \ldots, y'_m$, e che quindi F definisce sempre una trasformazione canonica in modo *implicito*.
Infine possiamo affermare che la *più generale trasformazione canonica* si ottiene componendo una trasformazione canonica generata da $F = F(x, y')$ nel modo sopra detto con trasformazioni di *scambio* (vedi pagina 41).

13 Funzione generatrice

Torniamo ora a $\mathcal{V}_{n+1}$ e a $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$. Le considerazioni precedenti si riportano a questo contesto restringendo l'attributo di *canonico* ai sistemi di coordinate

$$x^1, \ldots, x^m, y_1, \ldots, y_n \equiv q^0, q^1, \ldots, q^n, P_0, P_1, \ldots, P_n$$

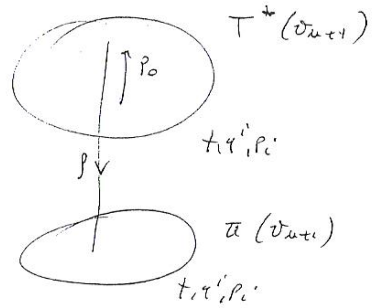
che, oltre a dare luogo alla *rappresentazione* della 2-forma simplettica nella forma

$$\Omega(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{n} \left(\langle dP_\alpha, X\rangle \langle dq^\alpha, Y\rangle - \langle dq^\alpha, X\rangle \langle dP_\alpha, Y\rangle \right)$$

$$\left(\iff \Omega(X,Y) = \sum_{\alpha=0}^{n} X_\alpha Y^\alpha - X^\alpha Y_\alpha \right)$$

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_\alpha \frac{\partial}{\partial P_\alpha}$$
$$Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + Y_\alpha \frac{\partial}{\partial P_\alpha}$$

sussista l'identificazione $q^o \equiv t$. $\quad$ (t = tempo).



Le trasformazioni canoniche in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ saranno quelle che preservano la rappresentazione della 2-forma simplettica di $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ insieme all'identificazione $q^0 = t$ (cioè $q^{0'} = t' = t$ nelle nuove coordinate).

Avendo in mente la caratterizzazione delle trasformazioni canoniche data a pagina 43 in termini di una funzione generatrice, che ora chiamiamo $\tilde{F} = \tilde{F}(t, q^1, \ldots, q^n, P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$, abbiamo

$$q'^0 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P'_0}(t, q^1, \ldots, q^n, P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$$
$$q'^i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P'_i}(t, q^1, \ldots, q^n, P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$$
$$P_0 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, q^1, \ldots, q^n, P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$$
$$P_i = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q^i}(t, q^1, \ldots, q^n, P'_0, P'_1, \ldots, P'_n)$$

Vediamo subito che la condizione $q^{0'} = t' = t = q^0$ implica

$$t' = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial P'_0} = t$$

da cui

$$\tilde{F}(t, q^1, \dots, q^n, P'_0, P'_1, \dots, P'_n) = P'_0 \cdot t + F(t, q^1, \dots, q^n, P'_0, P'_1, \dots, P'_n)$$

(da qui in avanti, dato l'uso frequente, chiameremo con F la parte di $\tilde{F}$ depurata di $P'_0 \cdot t$ (la F introdotta ora, evidentemente, *non* è la F introdotta a pagina 43)).

Pertanto abbiamo

$$\begin{cases} t' = t \\ q'^i = \frac{\partial F}{\partial P'_i} \\ P_0 = P'_0 + \frac{\partial F}{\partial t} \\ P_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \end{cases} \qquad F = F(t, q^1, \dots, q^n, P'_1, \dots, P'_n)$$

dove $F = F(t, q^1, \dots, q^n, P'_1, \dots, P'_n)$

Le relazioni

$$q'^i = \frac{\partial F}{\partial P'_i}(t, q^i, P'_i)$$
$$P_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}(t, q^i, P'_i)$$

esprimono, in forma implicita (ma esplicitabile ogniqualvolta sia soddisfatta la condizione

$$det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial P'_j}\right) \neq 0$$

che assicura l'applicabilità del teorema della funzione inversa) la trasformazione canonica generata da $F(t, q^i, P'_i)$, mentre la relazione

$$P_0 = P'_0 + \frac{\partial F}{\partial t}$$

fornisce, indirettamente, la legge di trasformazione della funzione Hamiltoniana. Rappresentata la superficie $\Psi(j_1(\mathcal{V}_{n+1})) = \Psi(\pi(\mathcal{V}_{n+1})) \subset T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ nella forma

$$P_0 + H = P'_0 + H' = 0$$

si deduce

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

(Ovviamente, affinché i due membri di quest'ultima relazione siano effettivamente confrontabili, occorre che il secondo membro (ad esempio) venga espresso in termini delle variabili del primo, t, q', P', utilizzando la trasformazione di coordinate generata da F).

Riprendiamo la formula data a pagina 39 che esprime l'evoluzione lungo i moti (cioè lungo le soluzioni delle equazioni di Hamilton) di una generica funzione $f : \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dt} = \{f, P_0 + H(t, q, P)\} = \{f, P'_0 + H'(t, q', P')\}$$

(Le parentesi di Poisson qui coinvolte sono ovviamente quelle in $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$, e la f va pensata come il pull-back a $T^*(\mathcal{V}_{n+1})$ della f definita su $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$).

$$\frac{df}{dt} = \{f, P_0'\} + \{f, H'\} = \frac{df}{dt} + \frac{df}{dq'^i}\frac{dH'}{dP_i'} - \frac{df}{dP_i'}\frac{dH'}{dq'^i}$$

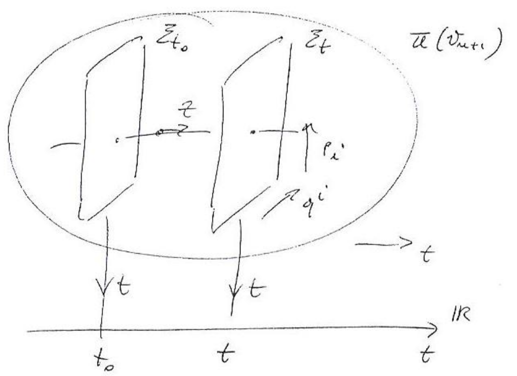
ovvero, in particolare, quando $f = q'^i$ e $f = P_i'$

$$\frac{dq'^i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i'}$$
$$\frac{dP_i'}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'^i}$$

ovvero, $Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial P_i'}\frac{\partial}{\partial q'^i} - \frac{\partial H'}{\partial q'^i}\frac{\partial}{\partial P_i}$ il che mostra *l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton per effetto di una trasformazione canonica.*

14 Teorema di Liouville sulla preservazione del *volume* nello spazio delle fasi da parte della dinamica Hamiltoniana

Consideriamo lo spazio-tempo delle fasi $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$. Come abbiamo visto, esso risulta naturalmente fibrato su $\mathcal{V}_{n+1}$. Ricordando che $\mathcal{V}_{n+1}$ è *fibrato su* $\mathbb{R}$ attraverso la proiezione al tempo assoluto t, ne segue che $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ può essere riguardato come fibrato su $\mathbb{R}$, attraverso una proiezione che continueremo a chiamare t.



indichiamo con Σ_t la fibra a t costante di $t : \pi(\mathcal{V}_{n+1}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Evidentemente Σ_t costituisce una varietà differenziabile $2n$-dimensionale, riferibile a coordinate q^i, P_i. La dinamica Hamiltoniana, espressa dal campo vettoriale

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i}$$

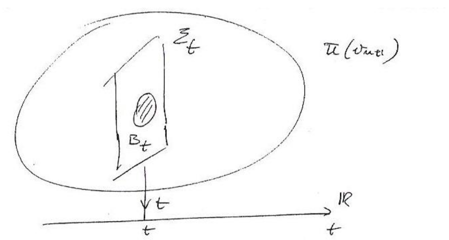
ovvero, le curve integrali di Z, stabiliscono un processo di *identificazione* tra le fibre Σ_t a tempi diversi. In relazione al risultato (*teorema di Liouville*) che vogliamo provare, risulta rilevante il fatto che le varietà Σ_t risultano essere dotate *canonicamente di una struttura simplettica*, espressa in coordinate di $\pi(\mathcal{V}_{n+1})$ nella forma

$$\omega = dP_i \wedge dq^i \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\right)$$

Da questo fatto segue che la $2n$-forma differenziale

$$\omega^n \stackrel{def}{=} dP_i \wedge \cdots \wedge dP_n \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n$$

fornisce una definizione *canonica dell'elemento di volume in* Σ_t, mediante il quale impostare un metodo *intrinseco di integrazione.*

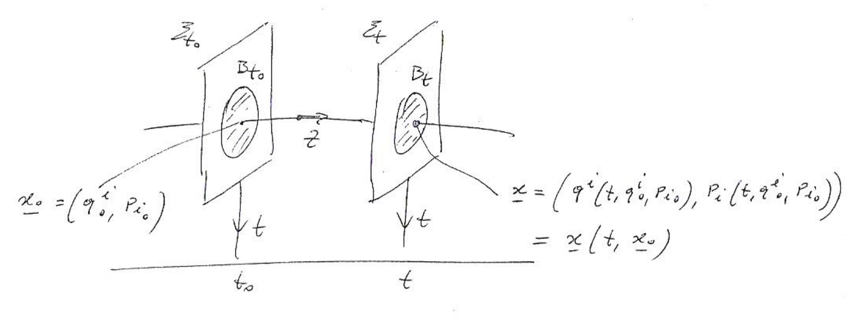


Quanto detto consente di attribuire a un dominio integrabile ($2n$-dimensionale) $B_t \subset \Sigma_t$ un volume

$$Vol\, B_t = \int_{B_t} \omega^n = \int_{B_t} dP_i \,\ldots\, dP_n\, dq^1 \,\ldots\, dq^n$$

Ciò che è rilevante è *l'intrinsecità* della valutazione data, ovvero l'indipendenza della stessa dalla scelta del sistema di coordinate.

Consideriamo nuovamente la dinamica *Hamiltoniana* Z.



Sia B_{t_0} un arbitrario dominio integrabile su Σ_{T_0} sia B_t (t arbitrario), il dominio che le curve integrali del vettore dinamico gli fanno corrispondere su Σ_t.

Posto per semplicità di notazione

$$\underline{x} = (\underline{P}, \underline{P}) = (q^1 \,\ldots\, q^n, P_1 \,\ldots\, P_n)$$

e indicato con

$$\underline{x} = \underline{x}(t, \underline{x}_0)$$

le curve integrali (moti del sistema) di Z, si ha

$$Vol\,B_t = \int_{B_t} dP_i\,\ldots\,dP_n\,dq^1\,\ldots\,dq^n = \int_{B_t}(dx)^2n = \int_{B_{t_0}}\left|det\left(\frac{\partial\underline{x}(t,\underline{x}_0}{\partial\underline{x}_0}\right)\right|(dx_0)^{2n}$$

Notare che abbiamo ricondotto l'integrale nel dominio *dipendente* dal tempo B_t all'integrale su un dominio *fissato* B_0. Ovviamente l'integrando ora dipenderà da t. Ora, per questo fatto,

$$\frac{d}{dt}Vol\;B_t = \int_{B_{t_0}}\frac{\partial}{\partial t}\left|det\left(\frac{\partial\underline{x}(t,\underline{x}_0)}{\partial\underline{x}_0}\right)\right|(dx_0)^{2n}$$

Cominciamo a osservare che il segno di modulo è superfluo, essendo l'argomento dello stesso positivo, Consideriamo nuovamente il campo dinamico

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial t} + X^i\frac{\partial}{\partial q^i} + X_i\frac{\partial}{\partial P_i}$$

dove

$$X = X(t,\underline{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial P_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial P_n},\ldots,-\frac{\partial H}{\partial q^1},\ldots,-\frac{\partial H}{\partial q^n}\right)$$

Sussiste il risultato seguente, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}det\left(\frac{\partial\underline{x}(t,\underline{x}_0}{\partial\underline{x}_0}\right) = \left(\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)det\left(\frac{\partial\underline{x}(t,\underline{x}_0}{\partial\underline{x}_0}\right)$$

Osserviamo però che

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2n}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X^k}{\partial q^k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X^{n+k}}{\partial P_k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial P_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial P_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^k}\right) = 0\end{aligned}$$

Collegando i passaggi so conclude che

$$\frac{d}{dt}Vol\,B_t = 0$$

cioè che la dinamica Hamiltoniana preserva il volume di dominio arbitrario (integrabile) negli iperpiani Σ_t. Questo risultato è noto come *Teorema di Liouville.*