CHƯƠNG 4

ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

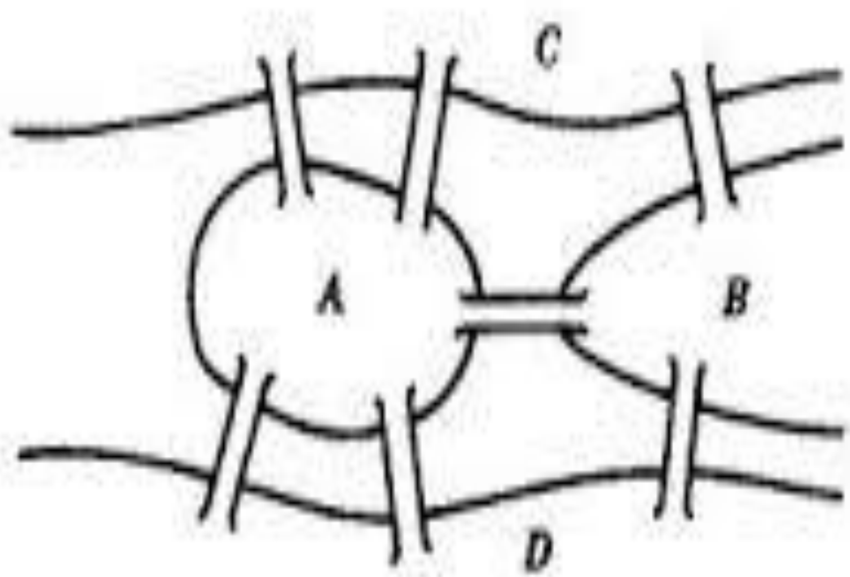
Nội dung

1. Đồ thị Euler
2. Đồ thị Hamilton
3. Thảo luận & Bài tập

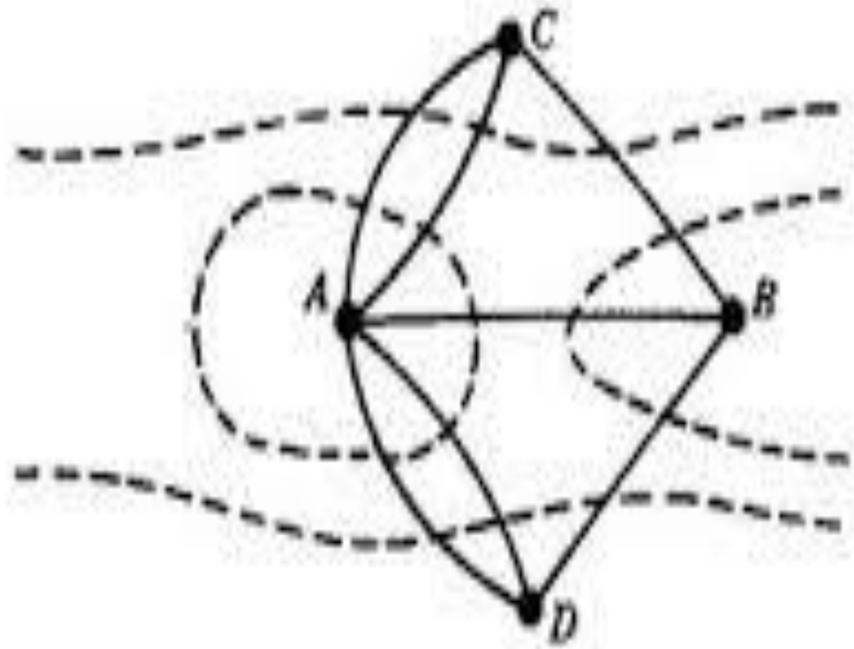
Đồ thị Euler (1/8)

❖ Bài toán mở đầu:

- Có thể đi qua cả 7 cây cầu, mỗi cầu đúng một lần, rồi quay về vị trí xuất phát được hay không?



(a) Königsberg in 1736



(b) Euler's graphical representation

Đồ thị Euler (2/8)

- Bài toán đã làm say mê cư dân của thành phố. Họ háo hức đi thử nhưng không thành công.
- Năm 1736, Leonhard Euler (nhà toán học Thụy Sĩ) đã chứng minh rằng bài toán không có lời giải.
- Từ bài toán này dẫn đến các khái niệm về đường đi, chu trình Euler và đồ thị Euler.

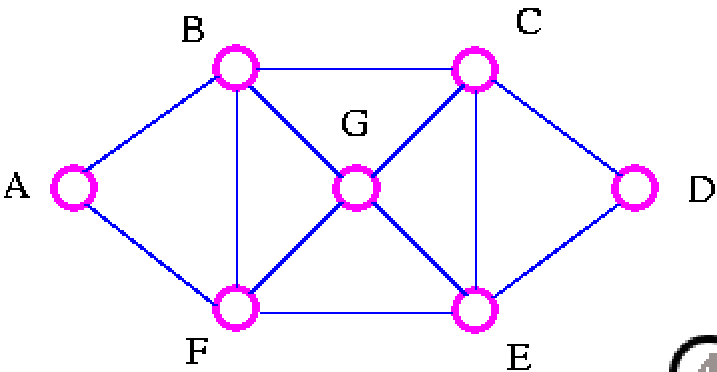
Đồ thị Euler (3/8)

❖ Một số định nghĩa:

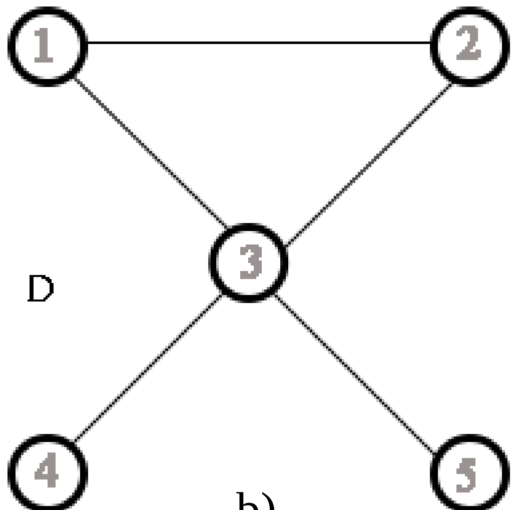
- *Đường Euler* là đường đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.
- *Chu trình Euler* là chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.
- *Đồ thị Euler* là đồ thị có chu trình Euler.
- *Đồ thị nửa Euler* là đồ thị có đường đi Euler.

Đồ thị Euler (4/8)

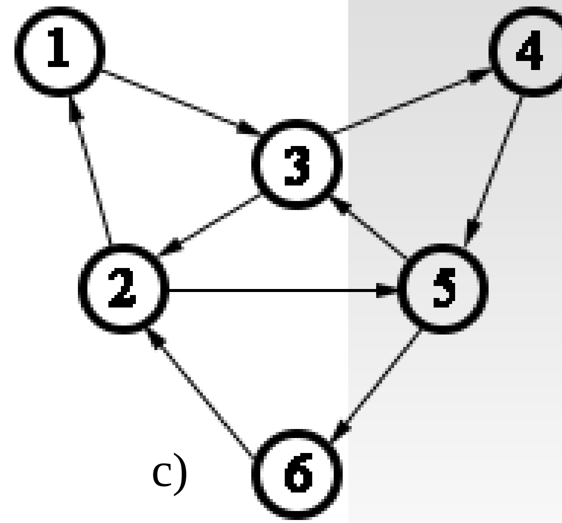
❖ Ví dụ



a)



b)



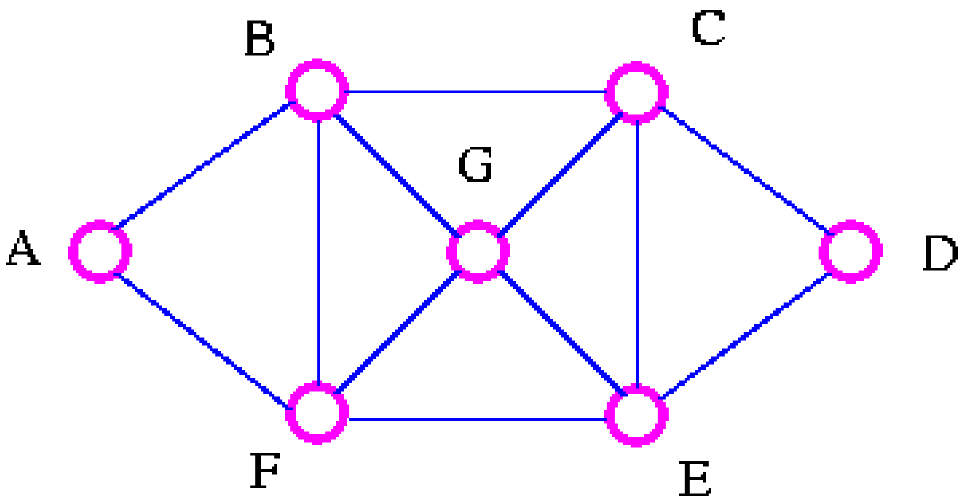
c)

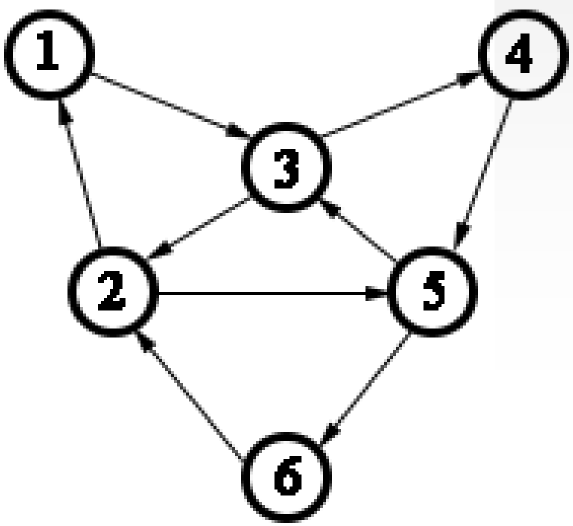
1. Hãy cho biết đâu là đồ thị Euler, nửa Euler? Vì sao?
2. Chỉ ra đường đi Euler và chu trình Euler

Đồ thị Euler (5/8)

❖ Định lý

- Đồ thị vô hướng liên thông là Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh đều có bậc chẵn.
- Đồ thị có hướng liên thông là Euler khi và chỉ khi với mọi đỉnh tổng bán bậc vào bằng tổng bán bậc ra của nó (tức là mọi đỉnh đều cân bằng).

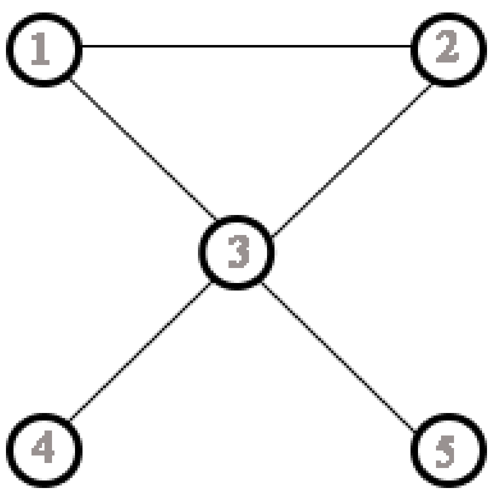


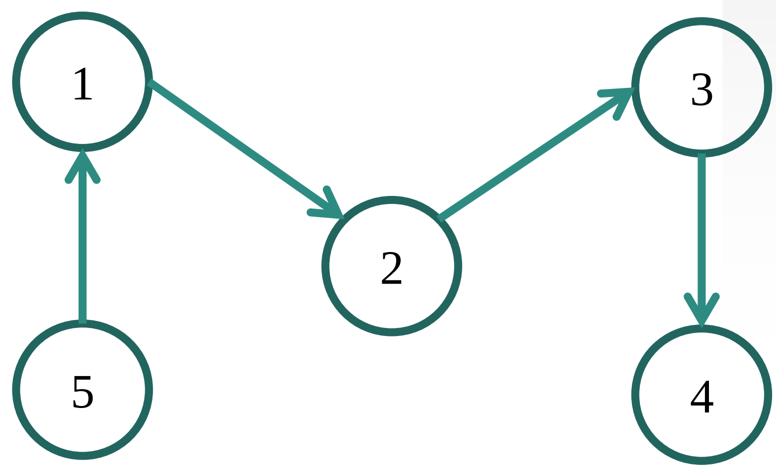


Đồ thị Euler (6/8)

❖ Hệ quả

- Đồ thị vô hướng liên thông là nửa Euler khi và chỉ khi nó chứa không quá 2 đỉnh bậc lẻ.
- Đồ thị có hướng liên thông là nửa Euler khi và chỉ khi nó chứa 2 đỉnh *a*, *b* thoả mãn: indeg(*a*) = outdeg(*a*) – 1 và indeg(*b*) = outdeg(*b*) + 1, còn các đỉnh khác đều cân bằng





Đồ thị Euler (7/8)

❖ Thuật toán tìm chu trình Euler

- *Đầu vào*: Đồ thị Euler G = (*V*, *E*) biểu diễn bởi mảng các danh sách kề *DK*.

- *Đầu ra*: Chu trình vô hướng Euler với danh sách các đỉnh nằm trong stack *EC*.

Đồ thị Euler (8/8)

- **Để tìm một chu trình Euler, ta thực hiện theo thuật toán sau:**

  *Tạo một **stack EC** để ghi đường đi và một **Stack** để xếp các đỉnh ta sẽ xét. Xếp vào đó một đỉnh tuỳ ý **v** nào đó của đồ thị, nghĩa là đỉnh **v** sẽ được xét đầu tiên.

  *Xét đỉnh trên cùng của ngăn xếp, giả sử đỉnh đó là đỉnh **v** và thực hiện:

  - Nếu **v** là đỉnh cô lập thì lấy **v** khỏi ngăn xếp và đưa vào **CE**;
  - Nếu **v** là liên thông với đỉnh **u** thì xếp **u** vào ngăn xếp sau đó xoá bỏ cạnh **(v, u)**;

  *Quay lại bước 2 cho tới khi ngăn xếp rỗng. Kết quả chu trình Euler được chứa trong **EC** theo thứ tự ngược lại.

Thuật toán tìm chu trình Euler

```
Begin
    Stack := ∅ ; EC := ∅ ; v := đỉnh tuỳ ý của đồ thị;
    push v onto Stack; /*thêm v vào Stack*/
    while Stack ≠ ∅ do
    begin
        v := top(Stack) ;
        if DK(v) ≠ ∅ then
            begin
                u:=đỉnh đầu tiên trong danh sách DK[v] ;
                push u onto Stack ;
                xoá cạnh (v,u);
                v := u;
            end
        else
            begin
                v := pop(Stack) ; /*xóa v khỏi Stack*/
                push v onto EC
            end
    end
End
```

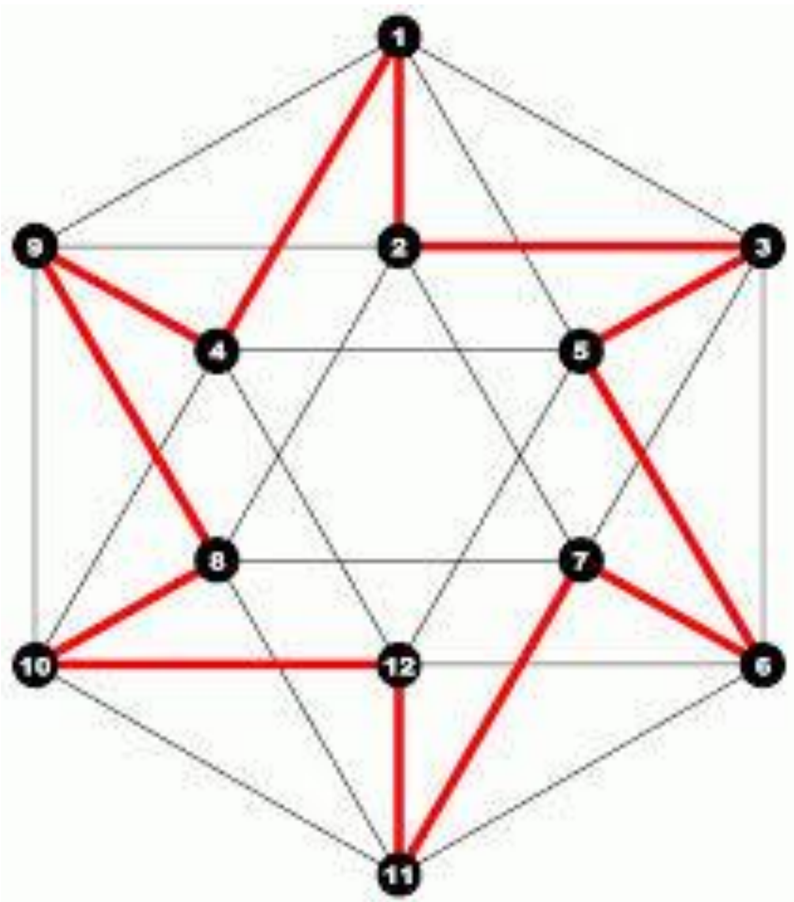
Đồ thị Hamilton (1/4)

Các định nghĩa

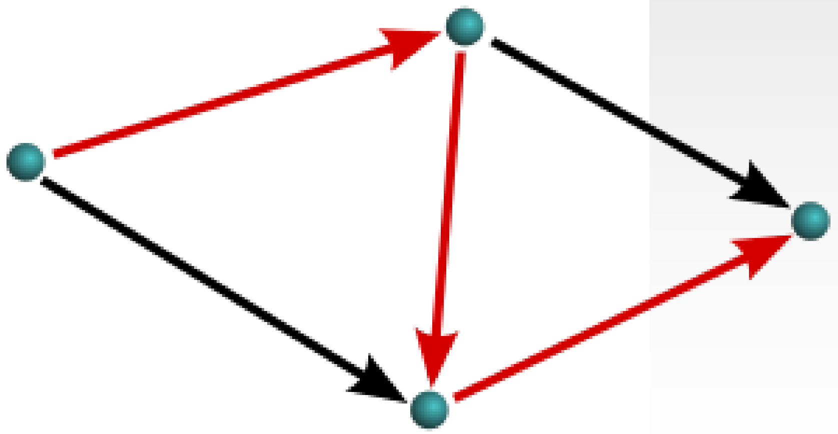
- *Đường Hamilton* là đường đi qua mỗi đỉnh của đồ thị đúng một lần.
- *Chu trình Hamilton* là chu trình đi qua mỗi đỉnh của đồ thị đúng một lần.
- *Đồ thị Hamilton* là đồ thị có chu trình Hamilton.
- *Đồ thị nửa Hamilton* là đồ thị có đường đi Hamilton.

Đồ thị Hamilton (2/4)

❖ Các ví dụ (1/2)



Đồ thị Hamilton



Đồ thị nửa Hamilton

Đồ thị Hamilton (3/4)

Các ví dụ (2/2)

- Tổ chức tour du lịch sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần
- *Bài toán mã đi tuần*: cho con mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần.

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**

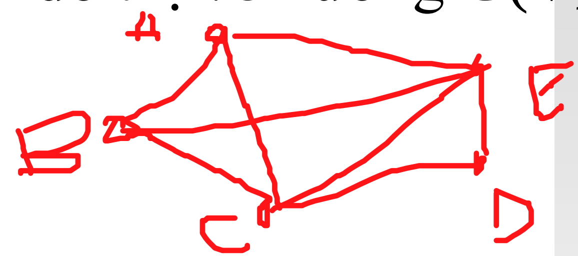
Đường Hamilton biểu diễn nước đi của con mã trên bàn cờ 3x4:

H = [8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4]

Đồ thị Hamilton (4/4)

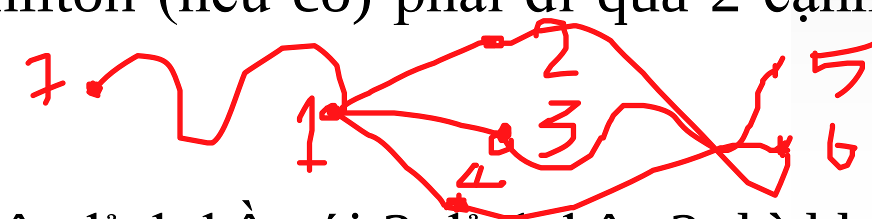
❖ Định lý Dirac

Nếu $\forall\ a \in V,\ deg(a) \geq (n/2)$ thì đồ thị vô hướng G(V,E) có chu trình Hamilton.



❖ Nhận xét

1. Đồ thị có đỉnh bậc ≤ 1 thì không có chu trình Hamilton.
2. Nếu đồ thị có các đỉnh đều có bậc ≥ 2 và có một đỉnh bậc 2 thì mọi chu trình Hamilton (nếu có) phải đi qua 2 cạnh kề của đỉnh này.



3. Nếu trong đồ thị có một đỉnh kề với 3 đỉnh bậc 2 thì không có chu trình Hamilton.

Thảo luận & bài tập (1/1)

- Cài đặt thuật toán tìm chu trình Euler.
- Xây dựng & cài đặt thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton.