Иркутский Государственный Университет

Сборник задач для практических занятий

по курсу «Математическая Логика»

Автор: Каташевцев М. Д.

LaTeX

2014г.

Оглавление

Глава 1

Формулы исчисления высказываний

Задача 1.1. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a,b – действительные числа)

1. $a \cdot b \neq 0$
2. $a^2 + b^2 = 0$
3. $ab > 0$
4. $|a| < 3$
5. $a/b \neq 0$
6. $ab \leq 0$

Задача 1.2. Пусть A = «Это число целое», B = «Это число положительное», C = «Это число простое», D = «Это число делится на 3». Запишите высказывания на естественном языке и подберите два числа удовлетворяющих данному высказыванию

1. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
2. $\neg A \vee \neg D$
3. $(A \wedge B \wedge C) \vee D$
4. $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$

Задача 1.3. По заданному числу постройте формулу содержащую не менее трех высказываний, одно отрицание конъюнкцию и дизъюнкцию

Задача 1.4. Из трех данных высказываний A, B, C постройте такое составное высказывание, которое:

1. истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;
2. истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;
3. ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;
4. ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C.

Задача 1.5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

1. $\lambda(A \to B) = 1,\ \lambda(A \leftrightarrow B) = 0,\ \lambda(B \to A) = ?$
2. $\lambda(A \to B) = 1,\ \lambda((\neg A \wedge B) \to (\neg A \vee B) = ?$
3. $\lambda(A \to B) = 0,\ \lambda(\neg B \to A) = ?$
4. $\lambda(A \wedge B) = 0,\ \lambda(A \to B) = 1,\ \lambda(B \to \neg A) = ?$
5. $\lambda(A \vee B) = 1,\ \lambda(A \to B) = 1,\ \lambda(\neg B \to A) = ?$
6. $\lambda((A \vee B) \to A) = 1,\ \lambda(A \to B) = 1,\ \lambda(\neg A \leftrightarrow \neg B) = ?$
7. $\lambda(A \leftrightarrow B) = 1,\ \lambda((A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B) = ?$

Задача 1.6. Для каждого из помещенных ниже высказываний определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить его логическое значение (если достаточно, то укажите это значение, если недостаточно то покажите на примерах, что возможны и одно и другое истинностные значение)

1. $A \wedge (B \to C),\ \lambda(B \to C) = 0$
2. $A \wedge (B \to C),\ \lambda(B) = 0$
3. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg B \wedge \neg A),\ \lambda(A) = 1$
4. $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B), \lambda(B) = 1$
5. $(A \wedge B) \to (A \vee C), \lambda(A) = 0$
6. $\neg(B \to A) \leftrightarrow \neg(A \vee C), \lambda(A) = 1$
7. $(A \leftrightarrow B) \vee (A \wedge C), \lambda(A) = 0$
8. $(\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)) \vee C, \lambda(A \to B) = 0$
9. $(A \wedge \neg C) \leftrightarrow ((A \vee \neg C) \to (B \wedge D)), \lambda(A \wedge B) = 0$
10. $(A \wedge B) \to ((\neg A \leftrightarrow C) \wedge (B \vee C)), \lambda(A \wedge B) = 1$

Задача 1.7. Докажите что следующие формулы выполнимы, не составляя для них таблиц истинности.

1. $\neg(P \to \neg P)$
2. $(P \to Q) \to (Q \to P)$
3. $(Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \to Q)$
4. $\neg(P \leftrightarrow \neg Q) \vee R) \wedge Q$
5. $(((P \to Q) \to (R \to Q)) \to (R \to P)) \to (P \to Q)$
6. $((Q \to \neg P) \to P) \to (P \to (\neg P \to Q))$
7. $(P \to ((Q \to R) \to R)) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$

Задача 1.8. Определить, является ли каждая из следующих форм тавтологией, противоречием или ни тем и ни другим:

1. $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$
2. $((P \to Q) \to P) \to Q$
3. $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$
4. $((P \wedge \neg Q) \to Q) \to (P \to Q)$
5. $A \equiv (A \vee A)$
6. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
7. $((A \to B) \wedge B) \to A$
8. $A \wedge (\neg(A \vee B))$
9. $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$
10. $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Задача 1.9. Доказать что следующие формы эквивалентны и построить соответствующие тавтологии

1. $A \vee B$ и $\neg(\bar{A} \wedge \bar{B})$
2. $A \wedge B$ и $\neg(\bar{A} \vee \bar{B})$
3. $(A \wedge B) \vee C$ и $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
4. $(A \vee B) \wedge C$ и $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Задача 1.10. Докажите что если:

1. $F \wedge G, F \leftrightarrow G$, то $G \to H$
2. $F \vee G, G \to H$, то $F \vee H$
3. $\neg F \to G, \neg G \wedge \neg H$, то $H \to F$
4. $\neg G \wedge \neg H, F \vee G$, то $\neg F \to H$
5. $F \vee G, F \leftrightarrow G$, то G
6. $F, F \leftrightarrow G, F \leftrightarrow H$, то $G \wedge H$
7. $\neg F \to G, \neg G \wedge \neg H$, то $F \vee H$
8. $F \leftrightarrow G, G \leftrightarrow H$, то $F \leftrightarrow H$

Задача 1.11. Докажите методом от противного

1. $F \to G, K \to L, F \vee K \models G \vee L$
2. $F \to G, ((F \vee L) \wedge H) \to M, L \to H \models ((F \vee L) \wedge G) \to \neg M$

Задача 1.12. Выразить через

1. $\vee, \neg$ связки $\wedge, \to$
2. $\wedge, \neg$ связки $\vee, \to$
3. $\to, \neg$ связки $\wedge, \vee$
4. $\downarrow$ связки $\wedge, \to, \neg$
5. $|$ связки $\wedge, \to, \neg$

Задача 1.13. Построить КНФ, ДНФ, СКНФ и СДНФ:

1. $X \to (Y \to Z)$
2. $\neg(X \vee Z) \wedge (X \to Y)$
3. $(X \to Y) \to Z$
4. $(X \equiv Y) \wedge \neg(Z \to T)$

Глава 2

Теория множеств. Отношения

2.1 Теория множеств

Задача 2.1. Доказать эквивалентность:

1. $\emptyset \cap X$ и $\emptyset$
2. $(X \cup Y) \cap Z$ и $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
3. $\neg(X \cup Y)$ и $\bar{X} \cap \bar{Y}$
4. $X \cap (Y \cup \bar{Y})$ и X
5. $X \cap (Y \setminus X)$ и $\emptyset$
6. $X \setminus Y$ и $X \setminus (X \cap Y)$
7. $(X \setminus Y) \setminus Z$ и $(X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$
8. $(X \cup Y) \setminus Z$ и $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
9. $A \cap (B \setminus C)$ и $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$ и $(A \cap B) \setminus C$

2.2 Общие понятия об отношениях

Задача 2.2. Доказать, и построить представление на графике

1. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$
5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
7. $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, где $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$
8. $U^2 \setminus (A \times B) = [(U \setminus A) \times U] \cup [U \times (U \setminus B)]$

Задача 2.3. Построить декартово произведение:

1. $X \times X$, где $X = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $X \times X$, где $X = \{5, 1, 9, 0\}$
3. $X \times Y$, где $X = \{1, 2, 3\}$, а $Y = \{5, 6, 7\}$

4. $X \times Y$, где $X = \{1,2,3\}$, а $Y = \{2,3,4\}$
5. $X \times Y$, где $X = \{1,2,3\}$, а $Y = \{x,y,z\}$
6. $X \times X \times X$, где $X = \{1,2\}$
7. $X \times X \times Z$, где $X = \{a,b\}$, а $Z = \{1,2\}$

Задача 2.4. Построить бинарные отношения «>», «<» и «=» заданные на:

1. на множестве $X = \{5,6,7,8\}$
2. на декартовом произведении $X \times Y$, где $X = \{1,2,3,4\}$, а $Y = \{3,4,5,6\}$
3. на декартовом произведении $X \times Y$, где $X = \{b,a,c\}$, а $Y = \{c,y,z\}$

Задача 2.5. Построить тернарное отношение β заданное на множества $S = \{1,2,3,4\}$, истинное для $x,y,z \in S$ тогда и только тогда когда $x < y < z$.

Задача 2.6. Построить унарное отношение α (свойство) заданное на множестве $S = \{$А ... Я$\}$ истинное для $x \in S$ тогда и только тогда когда x – гласная.

Задача 2.7. Построить следующие отношения

1. $> \cup =$
2. $(> \cup <) \setminus =$
3. $\geq \cap \leq$

Задача 2.8. Построить произведение отношений заданных на множестве $X = \{1,2,3,4\}$:

1. $<$ и $=$
2. $<$ и $<$
3. $>$ и $<$
4. $<$ и $>$
5. $>$ и $>$
6. $=$ и $<$

Задача 2.9. Доказать следующие утверждения:

1. $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$
2. $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$
3. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$
4. $(\alpha^{-1})' = (a')^{-1}$
5. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
6. $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$
7. $(\beta \cup \gamma)\alpha = \beta\alpha \cup \gamma\alpha$

Задача 2.10. Построить отношение $<^{100}$ на множестве $A = \{1,2,..103\}$

2.3 Отношения эквивалентности

Задача 2.11. Доказать что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

1. Отношение равенства по модулю
2. Отношения сравнимости по модулю n

Задача 2.12. Показать что следующее отношения являются отношениями эквивалентности и построить матрицы инцидентности

1. Отношение равенства по модулю на множестве $\{-2,-1,0,1,2\}$
2. Отношение равенства тангенсов двух углов на множестве $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$
3. Отношения сравнимости по модулю 3 на множестве $\{1,10,14,23,24\}$

Задача 2.13. Пусть α и β эквивалентности доказать следующие утверждения:

1. $\alpha \cap \beta$ – эквивалентность

2. $\alpha\beta$ – эквивалентность $\leftrightarrow$ α и β перестановочны

Задача 2.14. Построить фактор множество множества A по отношению α

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha \sim=$
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\alpha \sim mod 2$
3. $A = \{4, 7, 23, 56, 31, 45\}$, $\alpha \sim mod 3$
4. $A = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{2}\}$, $a\alpha b \leftrightarrow sin(a) = sin(b)$

Глава 3

Формулы исчисления предикатов

Задача 3.1. Выразить через логические операции

1. $\forall x P(x)$
2. $\exists x P(x)$

Задача 3.2. Докажите эквивалентность

1. $\neg\exists x P(x)$ и $\forall x \neg P(x)$
2. $\neg\forall x P(x)$ и $\exists x \neg P(x)$

Задача 3.3. Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Все люди умеют летать
2. Любой житель Европы свободно владеет английским, арабским или китайским (2-мя способами)
3. Все планеты солнечной системы вращаются вокруг солнца (планеты, космические объекты)
4. Некоторые люди не умеют летать
5. У каждой планеты есть своя звезда вокруг которой она кружится (планеты, космические объекты)
6. Некоторые люди в силу определенных обстоятельств не любят летать
7. Только на планетах с атмосферой можно обнаружить воду

Задача 3.4. Расшифровать следующие высказывания

1. $\forall a_1 \forall a_2 (\forall b (b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2) \to a_1 = a_2)$
2. $\exists a \forall b (b \notin a)$
3. $\exists a : (\emptyset \in a \land \forall b (b \in a \leftrightarrow b \cup \{b\} \in a)$
4. $\forall a_1 \forall a_2 \exists c \forall b (b \in a \leftrightarrow (b = a_1 \lor b = a_2))$

Задача 3.5. Привести к предваренное нормальной форме, если A не содержит свободных вхождений переменной x

1. $A \land \forall x B(x)$
2. $A \lor \forall x B(x)$
3. $A \land \exists x B(x)$
4. $A \lor \exists x B(x)$
5. $\forall x B(x) \land A$
6. $\forall x B(x) \lor A$
7. $\exists x B(x) \land A$
8. $A \to \exists x B(x)$
9. $A \to \forall x B(x)$
10. $\exists x B(x) \to A$
11. $\forall x B(x) \to A$

Задача 3.6. Привести к предваренное нормальной форме

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $\forall x P(x) \to P(x, y)$
3. $\forall x P(x) \to \exists y \exists x P(x, y)$
4. $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists y Q(y)$
5. $\forall x (P(x) \to \forall x Q(x)$
6. $\forall x Q(x, y) \vee (\exists x Q(x, x) \to \forall z (R(t, z) \to \exists x Q(x, x))$
7. $\forall y Q(y, z) \to \exists x R(x, t, z)$
8. $\forall y Q(x, y) \to R(x, x)$
9. $(P(y) \wedge Q(x)) \to \neg \forall y R(y, z)$
10. $\forall x (A(x) \to \forall y (A(x, y) \to \neg \forall z A(y, z)))$
11. $A(x, y) \to \exists y [A(y) \to (\exists x A(x) \to A(y))]$

Задача 3.7. Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Существует ровно один элемент x такой что P(x)
2. Существует не более одного элемента x такого что P(x)
3. Существует не более двух элементов x таких что P(x)
4. Между любыми двумя различными точками на прямой лежит по меньшей мере одна, с ними не совпадающая
5. Через две различные точки на плоскости проходит единственная прямая
6. Существование четных число
7. Существование нечетных число
8. Существование простых числа
9. Существование периодических функций

Задача 3.8. Докажите что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $P(y) \to \exists x P(x)$
3. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
4. $\exists y P(y) \to P(x)$
5. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x P(x, x)$
6. $\exists x P(x, x) \to \exists x \exists y P(x, y)$
7. $\forall x \forall y Q(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$
8. $\exists x \exists y Q(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$
9. $\forall x \exists z (F(x, y) \vee \neg F(z, y))$
10. $\forall x \exists y \forall z ((P(x) \wedge P(y)) \to Q(z))$
11. $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall \exists P(x, y)$

Глава 4

Вывод в ФИВ

Задача 4.1. Построить вывод

1. $\vdash A \to (B \to A)$
2. $\vdash C \to (D \to C)$
3. $\vdash B \to ((A \to B) \to B)$
4. $\vdash B \to (A \to (B \to A))$
5. $\vdash B \to (B \to (A \to B))$
6. $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$
7. $\vdash (A \to A) \to (A \to A)$
8. $\vdash (\neg A \to A) \to A$
9. $\vdash A \to (B \to ((C \to A) \to B))$
10. $\vdash A \to A$
11. $\vdash (A \to A) \to (B \to (A \to A))$
12. $\vdash F \to ((H \to F) \to (G \to G))$
13. $\vdash F \to ((G \to G) \to (H \to F))$

Задача 4.2. Построить вывод используя гипотезы:

1. $A, A \to B \vdash B$
2. $A, B \vdash C \to A$
3. $A \vdash B \to A$
4. $B \vdash C \to (A \to B)$
5. $B, B \to C \vdash D \to C$
6. $A \to (A \to C) \vdash A \to C$
7. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
8. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$
9. $\neg B \to A, \neg A \vdash B$
10. $\neg B \to \neg A, A \vdash B$
11. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
12. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
13. $\neg B \to A \vdash (\neg B \to \neg A) \to B$
14. $\vdash A \to (B \to (C \to A))$
15. $F, G, F \to (G \to H) \vdash H$
16. $A, \neg A \vdash B$

Задача 4.3. Построить вывод используя теорему дедукции:

1. $F \to ((F \to G) \to G)$
2. $(F \to G) \to ((H \to F) \to (H \to G))$
3. $(F \to (F \to G)) \to (F \to G)$
4. $(F \to G) \to ((F \to (G \to H)) \to (F \to H))$
5. $\neg\neg L \to L$
6. $U \to \neg\neg U$
7. $(\neg B \to \neg A) \vdash (A \to B)$
8. $(\neg B \to A) \vdash (\neg A \to B)$
9. $(B \to \neg A) \vdash (A \to \neg B)$
10. $(B \to A) \vdash (\neg A \to \neg B)$
11. $A \to B, \neg A \to B \vdash B$
12. $E \to D, E \to \neg D \vdash E$

Глава 5

Теория алгоритмов

5.1 Машина Тьюринга

Задача 5.1. Построить машины тьюринга:

1. Добавление единицы справа
2. Удаление единицы слева
3. Заменяющая все единицы на нули
4. Заменяющая все нули на пустые символы
5. Сложение единиц
6. Увеличение целого числа на единицу
7. Вычитание единицы из целого числа
8. Подсчет единиц (дешифратор)
9. Выбор наибольшой последовательности из единиц
10. Выбор наименьшей последовательности из единиц
11. Вычитание единиц
12. Умножение единиц
13. Десятичное число в единицы (шифратор)
14. Удвоение единиц
15. Перестановка последовательностей из единиц

5.2 Конечный Автомат

Задача 5.2. Построить конечный автомат

1. Распознающий строку не содержащую единиц
2. Распознающий числа заданные в двоичной системе счисления делящиеся на 4
3. Распознающий числа заданные в двоичной системе счисления делящиеся на 16
4. Распознающий числа заданные в единичной системе счисления делящиеся на 2
5. Распознающие числа с плавающей запятой
6. Распознающий предложения содержащие четное кол-во слов
7. Распознающий адреса e-mail
8. Распознающий ip-адреса

Задача 5.3. Построить МНР машину

1. Перестановка регистров

2. Сложение положительных чисел
3. Остаток от деления
4. Целочисленное деления
5. Умножение чисел
6. Вычитание положительных чисел