Иркутский Государственный Университет

Сборник задач для практических занятий

по курсу «Математическая Логика»

Автор: Каташевцев М. Д.

LaTeX

2014г.

Оглавление

Глава 1

Формулы исчисления высказываний

Задача 1.1. Доказать что следующие формы эквивалентны:

1. $A \vee B$ и $\neg(\bar{A} \wedge \bar{B})$
2. $A \wedge B$ и $\neg(\bar{A} \vee \bar{B})$
3. $(A \wedge B) \vee C$ и $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
4. $(A \vee B) \wedge C$ и $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Задача 1.2. Расставить скобки и построить таблицу истинности для форм:

1. $\neg A \to A \wedge B$
2. $A \vee \neg B \to C \equiv A$
3. $A \vee B \wedge C \to D$

Задача 1.3. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a,b – действительные числа)

1. $a \cdot b \neq 0$
2. $a^2 + b^2 = 0$
3. $ab > 0$
4. $|a| < 3$
5. $a/b \neq 0$
6. $ab \leq 0$

Задача 1.4. Пусть A = «Это число целое», B = «Это число положительное», C = «Это число простое», D = «Это число делится на 3». Запишите высказывания на естественном языке и подберите числа

1. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
2. $\neg A \vee \neg D$
3. $(A \wedge B \wedge C) \vee D$
4. $(A \wedge C) \vee (B \wedge D)$

Задача 1.5. Определить, является ли каждая из следующих форм тавтологией, противоречием или ни тем и ни другим:

1. $A \equiv (A \vee A)$
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
3. $((A \to B) \wedge B) \to A$
4. $A \wedge (\neg(A \vee B))$
5. $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$
6. $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Задача 1.6. Выразить через

1. $\vee, \neg$ связки $\wedge, \to$
2. $\wedge, \neg$ связки $\vee, \to$
3. $\to, \neg$ связки $\wedge, \vee$
4. $\downarrow$ связки $\wedge, \to, \neg$
5. $|$ связки $\wedge, \to, \neg$

Задача 1.7. Построить КНФ, ДНФ, СКНФ и СДНФ:

1. $X \to (Y \to Z)$
2. $\neg(X \vee Z) \wedge (X \to Y)$
3. $(X \to Y) \to Z$
4. $(X \equiv Y) \wedge \neg(Z \to T)$

Глава 2

Теория множеств. Отношения

2.1 Теория множеств

Задача 2.1. Доказать эквивалентность:

1. $\emptyset \cap X$ и $\emptyset$
2. $(X \cup Y) \cap Z$ и $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
3. $\neg(X \cup Y)$ и $\bar{X} \cap \bar{Y}$
4. $X \cap (Y \cup \bar{Y})$ и X
5. $X \cap (Y \setminus X)$ и $\emptyset$
6. $X \setminus Y$ и $X \setminus (X \cap Y)$
7. $(X \setminus Y) \setminus Z$ и $(X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$
8. $(X \cup Y) \setminus Z$ и $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
9. $A \cap (B \setminus C)$ и $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$ и $(A \cap B) \setminus C$

2.2 Общие понятия об отношениях

Задача 2.2. Построить декартово произведение:

1. $X \times X$, где $X = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $X \times Y$, где $X = \{1, 2, 3, 4\}$, а $Y = \{5, 6, 7\}$
3. $X \times Y$, где $X = \{b, a, c\}$, а $Y = \{x, y, z\}$

Задача 2.3. Построить бинарные отношения «>», «<» и «=» заданные на:

1. на множестве $X = \{5, 6, 7, 8\}$
2. на декартовом произведении $X \times Y$, где $X = \{1, 2, 3, 4\}$, а $Y = \{5, 6, 7\}$
3. на декартовом произведении $X \times Y$, где $X = \{b, a, c\}$, а $Y = \{c, y, z\}$

Задача 2.4. Построить тернарное отношение β заданное на множества $S = \{1, 2, 3, 4\}$, истинное для $x, y, z \in S$ тогда и только тогда когда $x < y < z$.

Задача 2.5. Построить унарное отношение α (свойство) заданное на множестве $S = \{$А ... Я$\}$ истинное для $x \in S$ тогда и только тогда когда x – гласная.

Задача 2.6. Построить тернарное отношение w заданное на множестве $S = \{$А ... Я$\}$ истинное для $a, b, c \in S$ тогда и только тогда когда abc – некоторое слово из трех букв

Задача 2.7. Построить следующие отношения

1. $> \cup =$
2. $(> \cup <) \setminus =$
3. $\geq \cap \leq$

Задача 2.8. Построить произведение отношений заданных на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$:

1. $<$ и $=$

2. $<$ и $<$

3. $>$ и $<$

4. $<$ и $>$

5. $>$ и $>$

6. $=$ и $<$

Задача 2.9. Доказать следующие утверждения:

1. $(\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$

2. $(\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$

3. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$

4. $(\alpha^{-1})' = (a')^{-1}$

5. $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

6. $\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$

7. $(\beta \cup \gamma)\alpha = \beta\alpha \cup \gamma\alpha$

Задача 2.10. Построить отношение $<^{100}$ на множестве $A = \{1, 2, ..103\}$

2.3 Отношения эквивалентности

Задача 2.11. Доказать что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

1. Отношение равенства по модулю

2. Отношения сравнимости по модулю n

Задача 2.12. Показать что следующее отношения являются отношениями эквивалентности и построить матрицы инцидентности

1. Отношение равенства по модулю на множестве $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. Отношение равенства тангенсов двух углов на множестве $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

3. Отношения сравнимости по модулю 3 на множестве $\{1, 10, 14, 23, 24\}$

Задача 2.13. Пусть α и β эквивалентности доказать следующие утверждения:

1. $\alpha \cap \beta$ – эквивалентность

2. $\alpha\beta$ – эквивалентность $\leftrightarrow$ α и β перестановочны

Задача 2.14. Построить фактор множество множества A по отношению α

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha \sim =$

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\alpha \sim mod2$

3. $A = \{4, 7, 23, 56, 31, 45\}$, $\alpha \sim mod3$

4. $A = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{2}\}$, $a\alpha b \leftrightarrow sin(a) = sin(b)$

Глава 3

Формулы исчисления предикатов

Задача 3.1. Выразить через логические операции

1. $\forall x P(x)$
2. $\exists x P(x)$

Задача 3.2. Докажите эквивалентность

1. $\neg\exists x P(x)$ и $\forall x \neg P(x)$
2. $\neg\forall x P(x)$ и $\exists x \neg P(x)$

Задача 3.3. Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Все люди умеют летать
2. Любой житель Европы свободно владеет английским, арабским или китайским (2-мя способами)
3. Все планеты солнечной системы вращаются вокруг солнца (планеты, космические объекты)
4. Некоторые люди не умеют летать
5. У каждой планеты есть своя звезда вокруг которой она кружится (планеты, космические объекты)
6. Некоторые люди в силу определенных обстоятельств не любят летать
7. Только на планетах с атмосферой можно обнаружить воду

Задача 3.4. Расшифровать следующие высказывания

1. $\forall a_1 \forall a_2 (\forall b (b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2) \to a_1 = a_2)$
2. $\exists a \forall b (b \notin a)$
3. $\exists a : (\emptyset \in a \wedge \forall b (b \in a \leftrightarrow b \cup \{b\} \in a)$
4. $\forall a_1 \forall a_2 \exists c \forall b (b \in a \leftrightarrow (b = a_1 \vee b = a_2))$

Задача 3.5. Привести к предваренное нормальной форме, если A не содержит свободных вхождений переменной x

1. $A \wedge \forall x B(x)$
2. $A \vee \forall x B(x)$
3. $A \wedge \exists x B(x)$
4. $A \vee \exists x B(x)$
5. $\forall x B(x) \wedge A$
6. $\forall x B(x) \vee A$
7. $\exists x B(x) \wedge A$
8. $A \to \exists x B(x)$
9. $A \to \forall x B(x)$
10. $\exists x B(x) \to A$
11. $\forall x B(x) \to A$

Задача 3.6. Привести к предваренное нормальной форме

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $\forall x P(x) \to P(x, y)$
3. $\forall x P(x) \to \exists y \exists x P(x, y)$
4. $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists y Q(y)$
5. $\forall x (P(x) \to \forall x Q(x)$
6. $\forall x Q(x, y) \vee (\exists x Q(x, x) \to \forall z (R(t, z) \to \exists x Q(x, x))$
7. $\forall y Q(y, z) \to \exists x R(x, t, z)$
8. $\forall y Q(x, y) \to R(x, x)$
9. $(P(y) \wedge Q(x)) \to \neg \forall y R(y, z)$
10. $\forall x (A(x) \to \forall y (A(x, y) \to \neg \forall z A(y, z)))$
11. $A(x, y) \to \exists y [A(y) \to (\exists x A(x) \to A(y))]$

Задача 3.7. Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Существует ровно один элемент x такой что P(x)
2. Существует не более одного элемента x такого что P(x)
3. Существует не более двух элементов x таких что P(x)
4. Между любыми двумя различными точками на прямой лежит по меньшей мере одна, с ними не совпадающая
5. Через две различные точки на плоскости проходит единственная прямая
6. Существование четных число
7. Существование нечетных число
8. Существование простых числа
9. Существование периодических функций

Задача 3.8. Докажите что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $P(y) \to \exists x P(x)$
3. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
4. $\exists y P(y) \to P(x)$
5. $\forall x \forall y P(x, y) \to \forall x P(x, x)$
6. $\exists x P(x, x) \to \exists x \exists y P(x, y)$
7. $\forall x \forall y Q(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$
8. $\exists x \exists y Q(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$
9. $\forall x \exists z (F(x, y) \vee \neg F(z, y))$
10. $\forall x \exists y \forall z ((P(x) \wedge P(y)) \to Q(z))$
11. $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall \exists P(x, y)$

Глава 4

Вывод в ФИВ

Задача 4.1. Построить вывод

1. $\vdash A \to (B \to A)$
2. $\vdash C \to (D \to C)$
3. $\vdash B \to ((A \to B) \to B)$
4. $\vdash B \to (A \to (B \to A))$
5. $\vdash B \to (B \to (A \to B))$
6. $\vdash (A \to B) \to (A \to A)$
7. $\vdash (A \to A) \to (A \to A)$
8. $\vdash (\neg A \to A) \to A$
9. $\vdash A \to (B \to ((C \to A) \to B))$
10. $\vdash A \to A$
11. $\vdash (A \to A) \to (B \to (A \to A))$
12. $\vdash F \to ((H \to F) \to (G \to G))$
13. $\vdash F \to ((G \to G) \to (H \to F))$

Задача 4.2. Построить вывод используя гипотезы:

1. $A, A \to B \vdash B$
2. $A, B \vdash C \to A$
3. $A \vdash B \to A$
4. $B \vdash C \to (A \to B)$
5. $B, B \to C \vdash D \to C$
6. $A \to (A \to C) \vdash A \to C$
7. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
8. $A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$
9. $\neg B \to A, \neg A \vdash B$
10. $\neg B \to \neg A, A \vdash B$
11. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
12. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$
13. $\neg B \to A \vdash (\neg B \to \neg A) \to B$
14. $\vdash A \to (B \to (C \to A))$
15. $F, G, F \to (G \to H) \vdash H$
16. $A, \neg A \vdash B$