

Иркутский Государственный Университет

# Сборник задач для практических занятий

по курсу «Математическая Логика»

*Автор:* Каташевцев М. Д.

Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

2013г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Формулы исчисления высказываний</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория множеств. Отношения</b>	<b>3</b>
2.1	Теория множеств . . . . .	3
2.2	Общие понятия об отношениях . . . . .	3
2.3	Отношения эквивалентности . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Формулы исчисления предикатов</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Вывод в ФИВ</b>	<b>7</b>

# Глава 1

## Формулы исчисления высказываний

**Задача 1.1.** Доказать что следующие формы эквивалентны:

1.  $A \vee B$  и  $\neg(\bar{A} \wedge \bar{B})$
2.  $A \wedge B$  и  $\neg(\bar{A} \vee \bar{B})$
3.  $(A \wedge B) \vee C$  и  $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
4.  $(A \vee B) \wedge C$  и  $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

**Задача 1.2.** Расставить скобки и построить таблицу истинности для форм:

1.  $\neg A \rightarrow A \wedge B$
2.  $A \vee \neg B \rightarrow C \equiv A$
3.  $A \vee B \wedge C \rightarrow D$

**Задача 1.3.** Определить, является ли каждая из следующих форм тавтологией, противоречием или ни тем и ни другим:

1.  $A \equiv (A \vee A)$
2.  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3.  $((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A$

$$4. A \wedge (\neg(A \vee B))$$

$$5. (A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$$

$$6. (A \rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

**Задача 1.4.** Выразить через

1.  $\vee, \neg$  связки  $\wedge, \rightarrow$
2.  $\wedge, \neg$  связки  $\vee, \rightarrow$
3.  $\rightarrow, \neg$  связки  $\wedge, \vee$
4.  $\downarrow$  связки  $\wedge, \rightarrow, \neg$
5.  $|$  связки  $\wedge, \rightarrow, \neg$

**Задача 1.5.** Построить КНФ, ДНФ, СКНФ и СДНФ:

1.  $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$
2.  $\neg(X \vee Z) \wedge (X \rightarrow Y)$
3.  $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
4.  $(X \equiv Y) \wedge \neg(Z \rightarrow T)$

## Глава 2

# Теория множеств. Отношения

### 2.1 Теория множеств

**Задача 2.1.** Доказать эквивалентность:

1.  $\emptyset \cap X$  и  $\emptyset$
2.  $(X \cup Y) \cap Z$  и  $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
3.  $\neg(X \cup Y)$  и  $\bar{X} \cap \bar{Y}$
4.  $X \cap (Y \cup \bar{Y})$  и  $X$
5.  $X \cap (Y \setminus X)$  и  $\emptyset$
6.  $X \setminus Y$  и  $X \setminus (X \cap Y)$
7.  $(X \setminus Y) \setminus Z$  и  $(X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$
8.  $(X \cup Y) \setminus Z$  и  $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$
9.  $A \cap (B \setminus C)$  и  $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$  и  $(A \cap B) \setminus C$

1. на множестве  $X = \{5, 6, 7, 8\}$
2. на декартовом произведении  $X \times Y$ , где  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , а  $Y = \{5, 6, 7\}$
3. на декартовом произведении  $X \times Y$ , где  $X = \{b, a, c\}$ , а  $Y = \{c, y, z\}$

**Задача 2.4.** Построить тернарное отношение  $\beta$  заданное на множества  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ , истинное для  $x, y, z \in S$  тогда и только тогда когда  $x < y < z$ .

**Задача 2.5.** Построить унарное отношение  $\alpha$  (свойство) заданное на множестве  $S = \{A \dots Я\}$  истинное для  $x \in S$  тогда и только тогда когда  $x$  – гласная.

**Задача 2.6.** Построить тернарное отношение  $w$  заданное на множестве  $S = \{A \dots Я\}$  истинное для  $a, b, c \in S$  тогда и только тогда когда  $abc$  – некоторое слово из трех букв

**Задача 2.7.** Построить следующие отношения

1.  $> \cup =$
2.  $(> \cup <) \setminus =$
3.  $\geq \cap \leq$

### 2.2 Общие понятия об отношениях

**Задача 2.2.** Построить декартово произведение:

1.  $X \times X$ , где  $X = \{1, 2, 3, 4\}$
2.  $X \times Y$ , где  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , а  $Y = \{5, 6, 7\}$
3.  $X \times Y$ , где  $X = \{b, a, c\}$ , а  $Y = \{x, y, z\}$

**Задача 2.3.** Построить бинарные отношения « $>$ », « $<$ » и « $=$ » заданные на:

**Задача 2.8.** Построить произведение отношений заданных на множестве  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ :

1.  $<$  и  $=$

$$2. < \text{ и } <$$

$$3. > \text{ и } <$$

$$4. < \text{ и } >$$

$$5. > \text{ и } >$$

$$6. = \text{ и } <$$

$$2. (\alpha \cap \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$$

$$3. (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$$

$$4. (\alpha^{-1})' = (\alpha')^{-1}$$

$$5. \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$6. \alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$$

$$7. (\beta \cup \gamma)\alpha = \beta\alpha \cup \gamma\alpha$$

**Задача 2.9.** Доказать следующие утверждения:

$$1. (\alpha \cup \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$$

**Задача 2.10.** Построить отношение  $<^{100}$  на множестве  $A = \{1, 2, \dots, 103\}$

## 2.3 Отношения эквивалентности

**Задача 2.11.** Доказать что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

1. Отношение равенства по модулю

2. Отношения сравнимости по модулю  $n$

**Задача 2.13.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  эквивалентности доказать следующие утверждения:

1.  $\alpha \cap \beta$  – эквивалентность

2.  $\alpha\beta$  – эквивалентность  $\leftrightarrow \alpha$  и  $\beta$  перестановочны

**Задача 2.12.** Показать что следующее отношение являются отношениями эквивалентности и построить матрицы инцидентности

1. Отношение равенства по модулю на множестве  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. Отношение равенства тангенсов двух углов на множестве  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$

3. Отношения сравнимости по модулю 3 на множестве  $\{1, 10, 14, 23, 24\}$

**Задача 2.14.** Построить фактор множество множества  $A$  по отношению  $\alpha$

1.  $A = \{1, 2, 3, 4\}, \alpha \sim =$

2.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \alpha \sim \text{mod} 2$

3.  $A = \{4, 7, 23, 56, 31, 45\}, \alpha \sim \text{mod} 3$

4.  $A = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{2}\}, a\alpha b \leftrightarrow \sin(a) = \sin(b)$

## Глава 3

# Формулы исчисления предикатов

**Задача 3.1.** Выразить через логические операции

1.  $\forall xP(x)$
2.  $\exists xP(x)$

**Задача 3.2.** Докажите эквивалентность

1.  $\neg\exists xP(x)$  и  $\forall x\neg P(x)$
2.  $\neg\forall xP(x)$  и  $\exists x\neg P(x)$

**Задача 3.3.** Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Все люди умеют летать
2. Любой житель Европы свободно владеет английским, арабским или китайским (2-мя способами)
3. Все планеты солнечной системы вращаются вокруг солнца (планеты, космические объекты)
4. Некоторые люди не умеют летать
5. У каждой планеты есть своя звезда вокруг которой она кружится (планеты, космические объекты)
6. Некоторые люди в силу определенных обстоятельств не любят летать
7. Только на планетах с атмосферой можно обнаружить воду

**Задача 3.4.** Расшифровать следующие высказывания

1.  $\forall a_1\forall a_2(\forall b(b \in a_1 \leftrightarrow b \in a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$
2.  $\exists a\forall b(b \notin a)$
3.  $\exists a : (\emptyset \in a \wedge \forall b(b \in a \leftrightarrow b \cup \{b\} \in a)$
4.  $\forall a_1\forall a_2\exists c\forall b(b \in a \leftrightarrow (b = a_1 \vee b = a_2))$

**Задача 3.5.** Привести к предваренное нормальной форме, если  $A$  не содержит свободных вхождений переменной  $x$

1.  $A \wedge \forall xB(x)$
2.  $A \vee \forall xB(x)$
3.  $A \wedge \exists xB(x)$
4.  $A \vee \exists xB(x)$
5.  $\forall xB(x) \wedge A$
6.  $\forall xB(x) \vee A$
7.  $\exists xB(x) \wedge A$
8.  $A \rightarrow \exists xB(x)$
9.  $A \rightarrow \forall xB(x)$
10.  $\exists xB(x) \rightarrow A$
11.  $\forall xB(x) \rightarrow A$

**Задача 3.6.** Привести к предваренное нормальной форме

1.  $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$
2.  $\forall x P(x) \rightarrow P(x, y)$
3.  $\forall x P(x) \rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$
4.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$
5.  $\forall x (P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$
6.  $\forall x Q(x, y) \vee (\exists x Q(x, x) \rightarrow \forall z (R(t, z) \rightarrow \exists x Q(x, x)))$
7.  $\forall y Q(y, z) \rightarrow \exists x R(x, t, z)$
8.  $\forall y Q(x, y) \rightarrow R(x, x)$
9.  $(P(y) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \forall y R(y, z)$
10.  $\forall x (A(x) \rightarrow \forall y (A(x, y) \rightarrow \neg \forall z A(y, z)))$
11.  $A(x, y) \rightarrow \exists y [A(y) \rightarrow (\exists x A(x) \rightarrow A(y))]$

**Задача 3.7.** Используя формулы исчисления предикатов построить следующие высказывания

1. Существует ровно один элемент  $x$  такой что  $P(x)$
2. Существует не более одного элемента  $x$  такого что  $P(x)$
3. Существует не более двух элементов  $x$  таких что  $P(x)$
4. Между любыми двумя различными точками на прямой лежит по меньшей мере одна, с ними не совпадающая
5. Через две различные точки на плоскости проходит единственная прямая
6. Существование четных число
7. Существование нечетных число
8. Существование простых числа
9. Существование периодических функций

**Задача 3.8.** Докажите что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$                           | 6. $\exists x P(x, x) \rightarrow \exists x \exists y P(x, y)$               |
| 2. $P(y) \rightarrow \exists x P(x)$                           | 7. $\forall x \forall y Q(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$ |
| 3. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$                 | 8. $\exists x \exists y Q(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$ |
| 4. $\exists y P(y) \rightarrow P(x)$                           | 9. $\forall x \exists z (F(x, y) \vee \neg F(z, y))$                         |
| 5. $\forall x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x P(x, x)$ | 10. $\forall x \exists y \forall z ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow Q(z))$    |
|  | 11. $\exists y \forall x P(x, y) \rightarrow \forall \exists P(x, y)$        |

## Глава 4

# Вывод в ФИВ

**Задача 4.1.** Построить вывод

1.  $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2.  $\vdash C \rightarrow (D \rightarrow C)$
3.  $\vdash B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$
4.  $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))$
5.  $\vdash B \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow B))$
6.  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$
7.  $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A)$
8.  $\vdash (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$
9.  $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow B))$
10.  $\vdash A \rightarrow A$
11.  $\vdash (A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow A))$
12.  $\vdash F \rightarrow ((H \rightarrow F) \rightarrow (G \rightarrow G))$
13.  $\vdash F \rightarrow ((G \rightarrow G) \rightarrow (H \rightarrow F))$

**Задача 4.2.** Построить вывод используя гипотезы:

1.  $A, A \rightarrow B \vdash B$
2.  $A, B \vdash C \rightarrow A$
3.  $A \vdash B \rightarrow A$
4.  $B \vdash C \rightarrow (A \rightarrow B)$
5.  $B, B \rightarrow C \vdash D \rightarrow C$
6.  $A \rightarrow (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
7.  $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$
8.  $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A \vdash C$
9.  $\neg B \rightarrow A, \neg A \vdash B$
10.  $\neg B \rightarrow \neg A, A \vdash B$
11.  $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
12.  $A \rightarrow (B \rightarrow C), B \vdash A \rightarrow C$
13.  $\neg B \rightarrow A \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow B$
14.  $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow A))$
15.  $F, G, F \rightarrow (G \rightarrow H) \vdash H$
16.  $A, \neg A \vdash B$