

# 同伦论笔记

Lin Wangyang

January 12, 2023

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International”](#) license.



# Contents

|          |   |
|----------|---|
| Contents | 2 |
| 1 同伦群    | 3 |
| 1.1 预备   | 3 |

# Chapter 1

## 同伦群

### 1.1 预备

设  $X$  与  $Y$  是拓扑空间, 连续函数  $f: X \rightarrow Y$  在后文中都称为**映射**. 设  $X', X''$  是  $X$  的子空间,  $Y', Y''$  是  $Y$  的子空间, 如果映射  $f: X \rightarrow Y$  满足  $f(X') \subset Y', f(X'') \subset Y''$ , 则记  $f: (X, X', X'') \rightarrow (Y, Y', Y'')$ . 记  $I = [0, 1]$ .

**Definition 1.1.1** 设  $f, f': (X, X', X'') \rightarrow (Y, Y', Y'')$  是两个映射. 如果存在映射  $F: (X \times I, X' \times I, X'' \times I) \rightarrow (Y, Y', Y'')$ , 使得

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x), \\ F(x, 1) &= f'(x), \forall x \in X \end{aligned}$$

则称  $f, f'$  相对于  $(X', X''), (Y', Y'')$  是同伦的, 并记作

$$f \simeq f': (X, X', X'') \rightarrow (Y, Y', Y'').$$

简记  $f \simeq f'$ .

**Remark 1.1.2** 当  $X', X'', Y', Y''$  都是空集的时候, 就是通常我们说的 (绝对) 同伦, 记为  $f \simeq f': X \rightarrow Y$ .

当  $X'' = X', Y'' = Y'$  时, 记为  $f \simeq f': (X, X') \rightarrow (Y, Y')$ . 特别地, 当  $F(x, t) = f(x), \forall x \in X, t \in I$  时, 记  $f \simeq f' \text{ rel } X'$ .

**Remark 1.1.3** 映射  $f$  与  $f'$  之间的同伦可以用直观的方式理解, 即连接  $f$  和  $f'$  之间的连续形变. 对于  $(x, t) \in X \times I$  可以把  $t$  理解为时间, 可以将  $f_t(x) = F(x, t)$  视为映射族  $f_t: X \rightarrow Y$ . 这种记号后面也经常使用. 在定义 1.1.1 中对于任意  $t \in I$  有  $f_t(X') \subset Y', f_t(X'') \subset Y''$ .

**Example 1.1.4** 设