同伦论笔记

Lin Wangyang

January 12, 2023

Contents

Chapter 1

同伦群

1.1 预备

设 X 与 Y 是拓扑空间，连续函数 $f : X \to Y$ 在后文中都称为**映射**. 设 X', X'' 是 X 的子空间，Y', Y'' 是 Y 的子空间，如果映射 $f : X \to Y$ 满足 $f(X') \subset Y', f(X'') \subset Y''$，则记 $f : (X, X', X'') \to (Y, Y', Y'')$. 记 $I = [0, 1]$.

Definition 1.1.1 设 $f, f' : (X, X', X'') \to (Y, Y', Y'')$ 是两个映射. 如果存在映射 $F : (X \times I, X' \times I, X'' \times I) \to (Y, Y', Y'')$，使得

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x), \\ F(x, 1) &= f'(x), \forall x \in X \end{aligned}$$

则称 f, f' 相对于 $(X', X''), (Y', Y'')$ 是同伦的，并记作

$$f \simeq f' : (X, X', X'') \to (Y, Y', Y'').$$

简记 $f \simeq f'$.

Remark 1.1.2 当 X', X'', Y', Y'' 都是空集的时候，就是通常我们说的（绝对）同伦，记为 $f \simeq f' : X \to Y$.

当 $X'' = X', Y'' = Y'$ 时，记为 $f \simeq f' : (X, X') \to (Y, Y')$. 特别地，当 $F(x, t) = f(x), \forall x \in X, t \in I$ 时，记 $f \simeq f' \operatorname{rel} X'$.

Remark 1.1.3 映射 f 与 f' 之间的同伦可以用直观的方式理解，即连接 f 和 f' 之间的连续形变. 对于 $(x, t) \in X \times I$ 可以把 t 理解为时间，可以将 $f_t(x) = F(x, t)$ 视为映射族 $f_t : X \to Y$. 这种记号后面也经常使用. 在定义 1.1.1 中对于任意 $t \in I$ 有 $f_t(X') \subset Y', f_t(X'') \subset Y''$.

Example 1.1.4 设