

Interpolacja część III

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

10.04.2025

1 Treść ćwiczenia

Dla poniższej funkcji wyznacz wielomian interpolujący, używając funkcji sklejaney.

$$f(x) = -2x \sin(3x - 3)$$

dla $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$.

2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Do rozwiązywania układów równań wykorzystano funkcję `linalg.solve` z Numpy, używającą algorytmu rozkładu LU. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

3 Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory na wartości interpolacji funkcji sklejaney drugiego i trzeciego stopnia. Użyto przy tym naturalnego i *clamped boundary* warunku brzegowego. Do obliczeń użyto $N = 1000$ punktów na przedziale $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$, zarówno dla funkcji interpolowanej, jak i wielomianu interpolującego. Pochodną wyliczono i wynosi ona:

$$f'(x) = -6x \cos(3 - 3x) + 2 \sin(3 - 3x)$$

Wyznaczono węzły interpolacyjne, rozmieszczone równomiernie. W eksperymentach przyjęto liczbę węzłów n (każdy o innej wartości) z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 100\}$$

3.1 Wykorzystane wzory dla sześciennych funkcji sklejaney

Dla naturalnego warunku brzegowego $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$, przy użyciu wzoru (3.1), układ równań to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla warunku brzegowego *clamped boundary* $S'(x_1) = f'(x_1), S'(x_n) = f'(x_n)$, przy użyciu wzoru (3.1), układ równań to:

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 - f'(x_1) \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ f'(x_n) - \Delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

W powyższych układach równań przyjęto oznaczenia:

- $x_i : i \in 1, 2, \dots, n$ - węzły
- $y_i = f(x_i) : i \in 1, 2, \dots, n$
- $\sigma_i = \frac{S''(x)}{6}$
- $h_i = x_{i+1} - x_i$
- $\Delta_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)}{h_i}$

Po uzyskaniu układu równań wyszukiwano przedział $[x_i, x_{i+1}]$ do którego należała wartość x , dla której obliczono $S(x)$, uzyskane na podstawie wzoru:

$$S(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \text{ dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.1)$$

Gdzie:

- $b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - h_i \cdot (\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$
- $c_i = 3 \cdot \sigma_i$
- $d_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{h_i}$

3.2 Wykorzystane wzory dla kwadratowej funkcji sklejaney

Wartości kwadratowej funkcji sklejaney obliczano iteracyjnie według wzoru $S(x)$ (3.2). Najpierw wyszukiwano i dla którego $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Następnie obliczono iteracyjnie współczynniki a_i, b_i .

Warunki początkowe dla naturalnego warunku brzegowego $S'(x_1) = 0$ $S(x)$:

- $h_1 = x_2 - x_1$
- $a_1 = 0$
- $b_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}$
- $c_1 = f'(x_1)$

Warunki początkowe dla warunku brzegowego *clamped boundary* $S'(x_1) = f'(x_1)$:

- $h_1 = x_2 - x_1$
- $a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)}{h_1^2}$
- $b_1 = f'(x_1)$
- $c_1 = f(x_1)$

Następnie (dla $j = 2, \dots, i$) oblicza:

- $h_j = x_{j+1} - x_j$
- $b_j = b_{j-1} + 2a_{j-1}(x_j - x_{j-1})$
- $a_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j) - b_j h_j}{h_j^2}$

- $c_j = f(x_j)$

Gdy dojdzie do przedziału zawierającego punkt x oblicza $S(x)$ na podstawie wzoru:

$$S(x) = y_i + b_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 \quad \text{dla } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.2)$$

3.3 Wykorzystane wzory dla błędów

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P} (f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$ oznacza wartość funkcji interpolowanej w punkcie x .
- $w(x)$ oznacza wartość wielomianu interpolującego w punkcie x .
- P jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.
- $|P|$ oznacza moc zbioru P .

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

4 Wyniki

4.1 Tabele błędów dla sklejeń

Tabela 1: Porównanie błędów dla sześcienniej funkcji sklejaney z naturalnym i *clamped boundary* warunkiem brzegowym

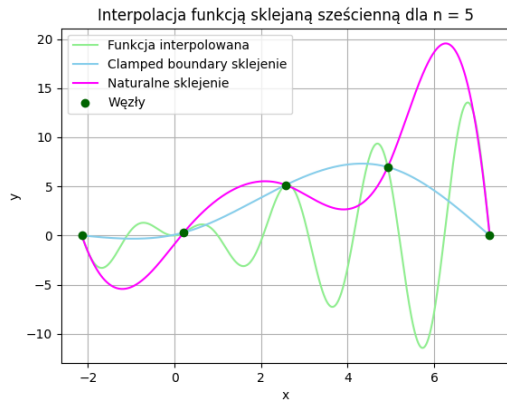
Liczba węzłów	Błąd średni nat.	Błąd maks. nat.	Błąd średni <i>clamped</i>	Błąd maks. <i>clamped</i>
2	1.663 35 $\times 10^{-1}$	1.353 50 $\times 10^1$	1.026 46	5.702 41 $\times 10^1$
3	2.008 75 $\times 10^{-1}$	1.390 13 $\times 10^1$	6.625 64 $\times 10^{-1}$	4.827 26 $\times 10^1$
4	1.663 35 $\times 10^{-1}$	1.353 50 $\times 10^1$	3.372 22 $\times 10^{-1}$	3.325 36 $\times 10^1$
5	2.141 91 $\times 10^{-1}$	1.683 48 $\times 10^1$	2.923 70 $\times 10^{-1}$	2.828 47 $\times 10^1$
6	2.154 77 $\times 10^{-1}$	1.654 59 $\times 10^1$	2.280 30 $\times 10^{-1}$	2.058 82 $\times 10^1$
7	2.281 70 $\times 10^{-1}$	1.945 88 $\times 10^1$	1.928 50 $\times 10^{-1}$	1.816 73 $\times 10^1$
8	2.102 26 $\times 10^{-1}$	2.064 59 $\times 10^1$	1.382 08 $\times 10^{-1}$	1.088 66 $\times 10^1$
9	1.811 22 $\times 10^{-1}$	1.809 81 $\times 10^1$	1.089 56 $\times 10^{-1}$	9.301 47
10	1.663 35 $\times 10^{-1}$	1.353 50 $\times 10^1$	1.269 35 $\times 10^{-1}$	9.481 01
11	1.036 85 $\times 10^{-1}$	9.178 50	7.606 24 $\times 10^{-2}$	6.266 73
12	5.951 65 $\times 10^{-2}$	5.994 65	4.037 94 $\times 10^{-2}$	3.312 35
13	3.717 90 $\times 10^{-2}$	3.928 31	2.545 24 $\times 10^{-2}$	1.993 66
14	2.416 36 $\times 10^{-2}$	2.637 64	1.688 92 $\times 10^{-2}$	1.569 39
15	1.629 31 $\times 10^{-2}$	1.827 41	1.157 36 $\times 10^{-2}$	1.016 34
16	1.137 72 $\times 10^{-2}$	1.307 75	8.151 60 $\times 10^{-3}$	8.438 47 $\times 10^{-1}$
17	8.204 43 $\times 10^{-3}$	9.651 71 $\times 10^{-1}$	5.885 96 $\times 10^{-3}$	6.358 55 $\times 10^{-1}$
18	6.091 08 $\times 10^{-3}$	7.324 21 $\times 10^{-1}$	4.346 97 $\times 10^{-3}$	4.545 89 $\times 10^{-1}$
19	4.641 61 $\times 10^{-3}$	5.697 18 $\times 10^{-1}$	3.276 32 $\times 10^{-3}$	3.139 74 $\times 10^{-1}$
20	3.620 72 $\times 10^{-3}$	4.532 35 $\times 10^{-1}$	2.514 88 $\times 10^{-3}$	2.116 83 $\times 10^{-1}$
25	1.381 11 $\times 10^{-3}$	2.766 60 $\times 10^{-1}$	8.310 53 $\times 10^{-4}$	9.658 70 $\times 10^{-2}$
30	7.363 74 $\times 10^{-4}$	2.129 69 $\times 10^{-1}$	3.534 33 $\times 10^{-4}$	4.425 63 $\times 10^{-2}$
35	4.891 91 $\times 10^{-4}$	1.808 20 $\times 10^{-1}$	1.772 00 $\times 10^{-4}$	2.565 82 $\times 10^{-2}$
40	3.748 52 $\times 10^{-4}$	1.619 27 $\times 10^{-1}$	9.988 03 $\times 10^{-5}$	1.926 61 $\times 10^{-2}$
...				
90	2.021 05 $\times 10^{-4}$	1.188 45 $\times 10^{-1}$	7.525 78 $\times 10^{-6}$	4.647 90 $\times 10^{-3}$
100	1.978 64 $\times 10^{-4}$	1.178 31 $\times 10^{-1}$	6.220 31 $\times 10^{-6}$	4.009 39 $\times 10^{-3}$

Tabela 2: Porównanie błędów dla kwadratowej funkcji sklejaney z naturalnym i *clamped boundary* warunkiem brzegowym

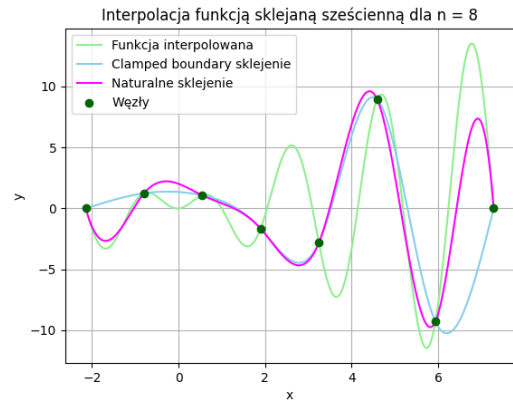
Liczba węzłów	Błąd średni nat.	Błąd maks. nat.	Błąd średni clamp.	Błąd maks. clamp.
2	$1.663\,35 \times 10^{-1}$	$1.353\,50 \times 10^1$	$7.149\,79 \times 10^{-1}$	$3.545\,74 \times 10^1$
3	$2.056\,85 \times 10^{-1}$	$1.542\,39 \times 10^1$	$4.529\,69 \times 10^{-1}$	$3.011\,31 \times 10^1$
4	$1.663\,35 \times 10^{-1}$	$1.353\,50 \times 10^1$	$2.887\,50 \times 10^{-1}$	$1.929\,31 \times 10^1$
5	$2.158\,97 \times 10^{-1}$	$1.635\,02 \times 10^1$	$2.660\,68 \times 10^{-1}$	$2.319\,74 \times 10^1$
6	$2.173\,63 \times 10^{-1}$	$1.643\,41 \times 10^1$	$2.667\,10 \times 10^{-1}$	$2.158\,68 \times 10^1$
7	$2.466\,08 \times 10^{-1}$	$1.982\,73 \times 10^1$	$2.846\,21 \times 10^{-1}$	$2.187\,27 \times 10^1$
8	$3.185\,52 \times 10^{-1}$	$3.389\,69 \times 10^1$	$3.649\,05 \times 10^{-1}$	$3.849\,23 \times 10^1$
9	$4.442\,28 \times 10^{-1}$	$4.039\,74 \times 10^1$	$3.911\,01 \times 10^{-1}$	$3.643\,39 \times 10^1$
10	$1.663\,35 \times 10^{-1}$	$1.353\,50 \times 10^1$	$2.265\,73 \times 10^{-1}$	$1.689\,68 \times 10^1$
11	$2.576\,69 \times 10^{-1}$	$2.017\,13 \times 10^1$	$3.043\,54 \times 10^{-1}$	$2.301\,36 \times 10^1$
12	$2.229\,67 \times 10^{-1}$	$2.033\,81 \times 10^1$	$1.871\,88 \times 10^{-1}$	$1.793\,32 \times 10^1$
13	$1.191\,08 \times 10^{-1}$	$8.950\,22$	$8.814\,32 \times 10^{-2}$	$6.908\,38$
14	$9.338\,77 \times 10^{-2}$	$7.849\,22$	$6.198\,26 \times 10^{-2}$	$6.113\,29$
15	$6.734\,82 \times 10^{-2}$	$4.738\,48$	$3.994\,10 \times 10^{-2}$	$3.260\,09$
16	$5.605\,87 \times 10^{-2}$	$4.357\,21$	$3.087\,31 \times 10^{-2}$	$3.398\,78$
18	$3.822\,75 \times 10^{-2}$	$3.331\,99$	$1.822\,78 \times 10^{-2}$	$1.351\,54$
20	$2.788\,96 \times 10^{-2}$	$2.698\,66$	$1.189\,48 \times 10^{-2}$	$1.949\,17$
22	$2.125\,57 \times 10^{-2}$	$2.266\,69$	$8.311\,69 \times 10^{-3}$	$1.594\,75$
24	$1.672\,01 \times 10^{-2}$	$1.952\,87$	$6.110\,44 \times 10^{-3}$	$1.345\,16$
26	$1.347\,89 \times 10^{-2}$	$1.714\,70$	$4.674\,24 \times 10^{-3}$	$1.160\,64$
28	$1.108\,40 \times 10^{-2}$	$1.527\,99$	$3.692\,70 \times 10^{-3}$	$1.019\,18$
30	$9.266\,93 \times 10^{-3}$	$1.377\,93$	$2.996\,51 \times 10^{-3}$	$9.076\,10 \times 10^{-1}$
32	$7.858\,08 \times 10^{-3}$	$1.254\,88$	$2.487\,38 \times 10^{-3}$	$8.176\,06 \times 10^{-1}$
34	$6.745\,58 \times 10^{-3}$	$1.152\,31$	$2.105\,33 \times 10^{-3}$	$7.436\,32 \times 10^{-1}$
36	$5.853\,21 \times 10^{-3}$	$1.065\,63$	$1.812\,22 \times 10^{-3}$	$6.818\,78 \times 10^{-1}$
38	$5.127\,59 \times 10^{-3}$	$9.914\,96 \times 10^{-1}$	$1.582\,95 \times 10^{-3}$	$6.296\,38 \times 10^{-1}$
40	$4.530\,44 \times 10^{-3}$	$9.274\,55 \times 10^{-1}$	$1.400\,52 \times 10^{-3}$	$5.849\,40 \times 10^{-1}$
45	$3.121\,21 \times 10^{-3}$	$1.551\,64 \times 10^{-1}$	$8.907\,79 \times 10^{-4}$	$3.620\,67 \times 10^{-1}$
50	$2.702\,70 \times 10^{-3}$	$7.059\,89 \times 10^{-1}$	$8.769\,39 \times 10^{-4}$	$4.335\,68 \times 10^{-1}$
...				
90	$8.801\,77 \times 10^{-4}$	$3.909\,10 \times 10^{-1}$	$3.779\,55 \times 10^{-4}$	$2.276\,26 \times 10^{-1}$
100	$7.543\,06 \times 10^{-4}$	$3.581\,53 \times 10^{-1}$	$3.383\,15 \times 10^{-4}$	$2.069\,48 \times 10^{-1}$

4.2 Wizualizacje

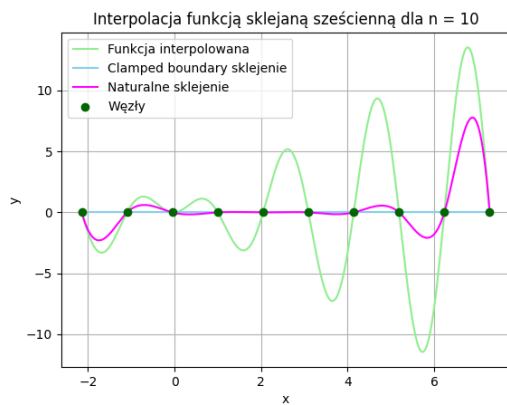
4.2.1 Interpolacja poprzez sześciennie sklejenie funkcji



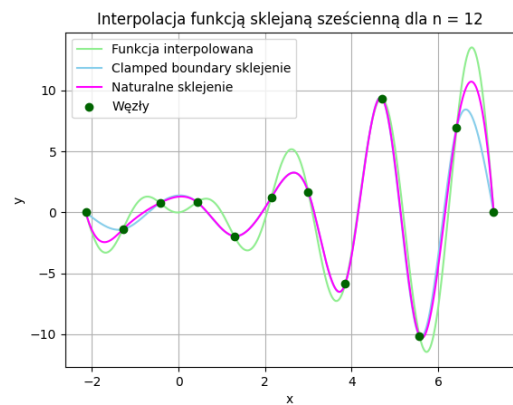
(a)



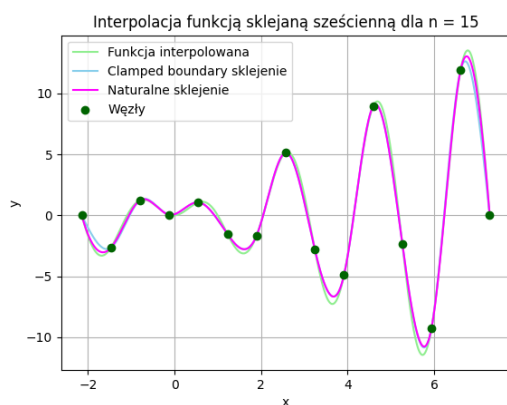
(b)



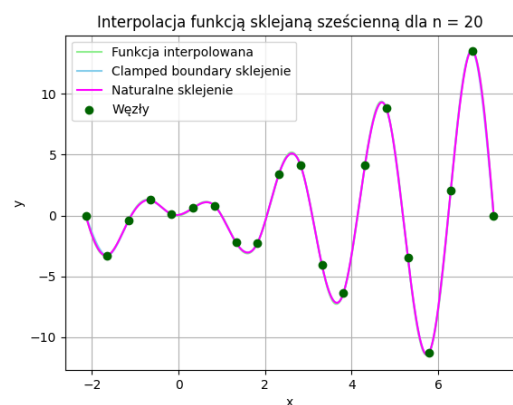
(c)



(d)

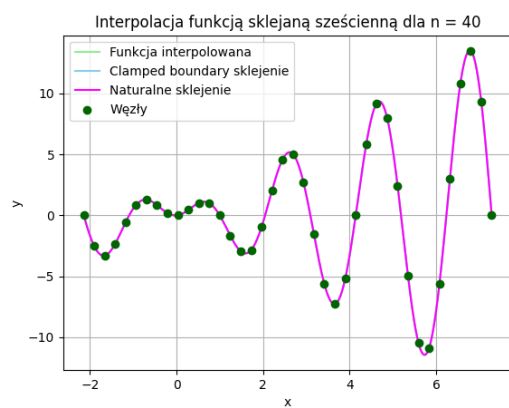


(e)

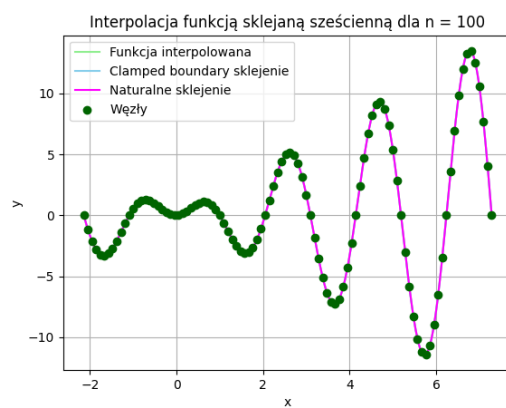


(f)

Rysunek 1: Porównanie wykresów interpolacji sześcienniej funkcją sklejaną dla $n \in \{5, 8, 10, 12, 15, 20\}$



(a)



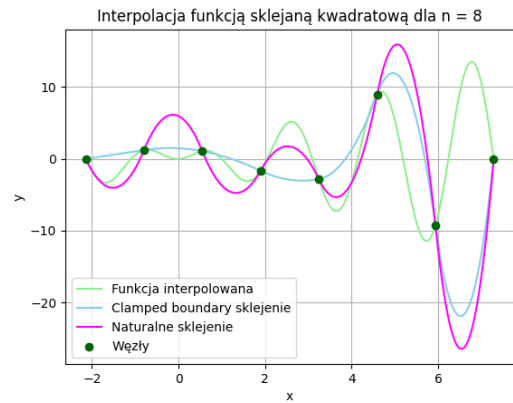
(b)

Rysunek 2: Porównanie wykresów interpolacji funkcją sześcienną dla $n \in \{40, 100\}$

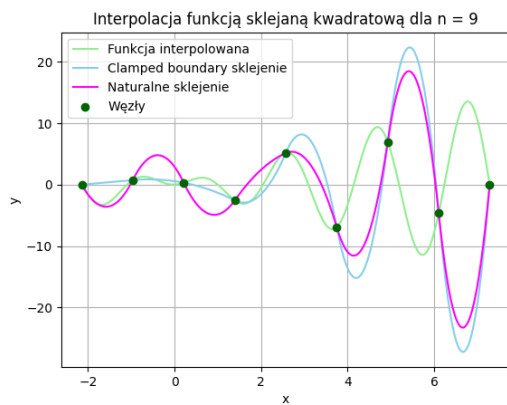
4.2.2 Interpolacja poprzez kwadratowe sklejenie funkcji



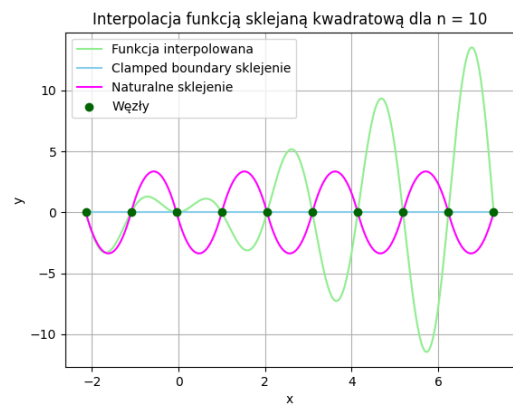
(a)



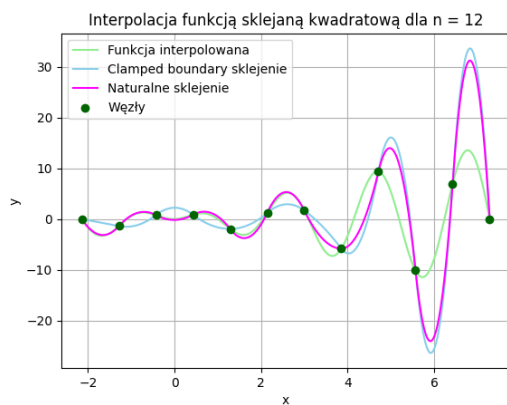
(b)



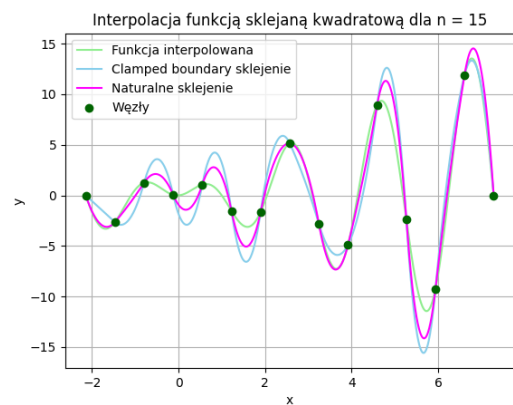
(c)



(d)



(e)

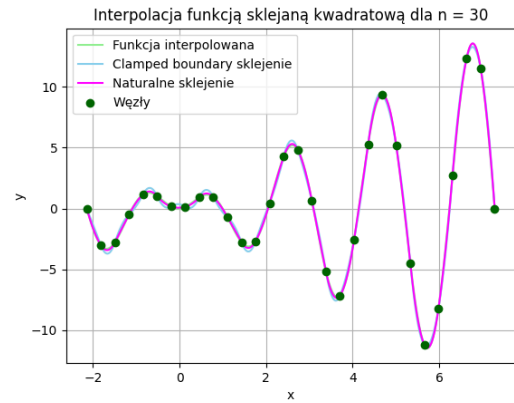


(f)

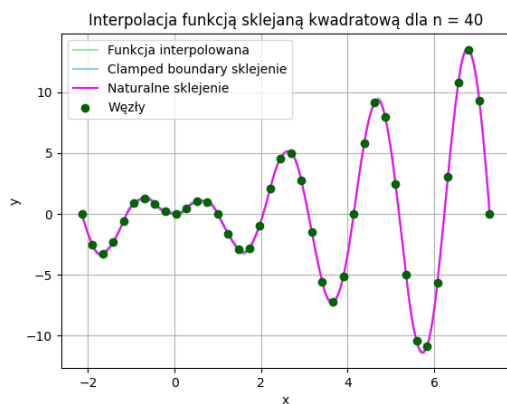
Rysunek 3: Porównanie wykresów interpolacji funkcją sześcienną dla $n \in \{4, 8, 9, 10, 12, 15\}$



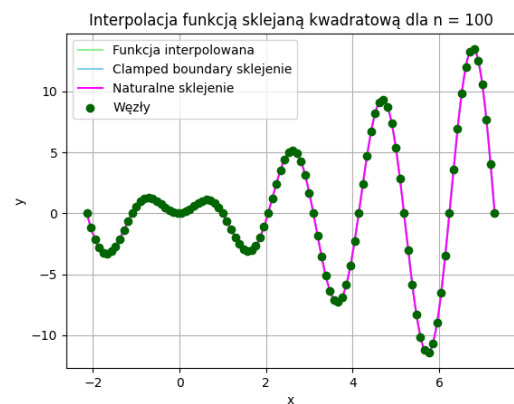
(a)



(b)



(c)



(d)

Rysunek 4: Porównanie wykresów interpolacji funkcją sześcienną dla $n \in \{20, 30, 40, 100\}$

5 Obserwacje

- Wraz ze wzrostem liczby węzłów dokładność interpolacji się polepsza.
- Funkcje skleane sześciennne dają dokładną interpolację dla mniejszego n .
- Warunek brzegowy *clamped boundary* daje dokładniejsze wartości dla mniejszego n , aniżeli warunek naturalny
- Można zauważyć, że dla $n=20$ przy sklejanu funkcji sześciennych oraz dla $n=40$ przy sklejanu funkcji kwadratowych, różnica między interpolacją z różnymi warunkami brzegowymi staje się zaniedbywalna