

# Interpolacja część 1

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

27.03.2025

## 1 Treść ćwiczenia

Dla poniższej funkcji wyznacz dla zagadnienia Lagrange’a wielomian interpolujący w postaci Lagrange’a i Newtona.

$$f(x) = -2x \sin(3x - 3)$$

dla  $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$ .

## 2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6 rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

## 3 Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory na wartości interpolacji Lagrange’a i Newtona. Do obliczeń użyto  $N = 1000$  punktów na przedziale  $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$ , zarówno dla funkcji interpolowanej, jak i wielomianu interpolującego.

Wyznaczono węzły interpolacyjne, rozmieszczone równomiernie lub według pierwiastków wielomianu Czebyszewa. W eksperymentach przyjęto liczbę węzłów  $n$  z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 200\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P} (f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$  oznacza wartość funkcji interpolowanej w punkcie  $x$ .
- $w(x)$  oznacza wartość wielomianu interpolującego w punkcie  $x$ .
- $P$  jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.
- $|P|$  oznacza moc zbioru  $P$ .

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

## 4 Wyniki

### 4.1 Tabele błędów dla węzłów rozmieszczonych równomiernie

Tabela 1: Zestawienie błędów dla metod Newtona i Lagrange’a przy nie wielkiej ilości węzłów

| Liczba węzłów | Błąd maksymalny            | Błąd średni |
|---------------|----------------------------|-------------|
| 2             | $2.030\,25 \times 10^1$    | 2.495 03    |
| 3             | $2.142\,33 \times 10^1$    | 3.057 94    |
| 4             | $2.030\,25 \times 10^1$    | 2.495 03    |
| 5             | $2.592\,19 \times 10^1$    | 3.220 03    |
| 6             | $2.474\,27 \times 10^1$    | 3.247 10    |
| 7             | $3.325\,32 \times 10^1$    | 3.744 18    |
| 8             | $6.465\,98 \times 10^1$    | 5.875 89    |
| 9             | $1.012\,40 \times 10^2$    | 9.278 47    |
| 15            | $2.390\,97 \times 10^2$    | 1.317 44    |
| 20            | $1.514\,71 \times 10^2$    | 3.193 58    |
| 20            | $1.514\,71 \times 10^2$    | 3.193 58    |
| 25            | 5.149 63                   | 1.044 81    |
| 30            | $9.142\,33 \times 10^{-2}$ | 1.533 79    |

Tabela 2: Zestawienie błędów dla większej ilości węzłów

| Liczba węzłów | Błąd maks. (Newton)        | Błąd maks. (Lagrange)      | Błąd średni (Newton)       | Błąd średni (Lagrange)     |
|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 31            | $3.832\,04 \times 10^{-2}$ | $3.832\,05 \times 10^{-2}$ | $6.542\,27 \times 10^{-5}$ | $6.542\,26 \times 10^{-5}$ |
| 32            | $1.246\,09 \times 10^{-2}$ | $1.246\,08 \times 10^{-2}$ | $2.050\,28 \times 10^{-5}$ | $2.050\,27 \times 10^{-5}$ |
| 33            | $5.351\,50 \times 10^{-3}$ | $5.352\,03 \times 10^{-3}$ | $8.889\,20 \times 10^{-6}$ | $8.890\,12 \times 10^{-6}$ |
| 34            | $1.481\,62 \times 10^{-3}$ | $1.481\,48 \times 10^{-3}$ | $2.397\,17 \times 10^{-6}$ | $2.396\,95 \times 10^{-6}$ |
| 35            | $6.486\,45 \times 10^{-4}$ | $6.479\,71 \times 10^{-4}$ | $1.054\,55 \times 10^{-6}$ | $1.053\,22 \times 10^{-6}$ |
| 40            | $2.335\,52 \times 10^{-6}$ | $3.695\,90 \times 10^{-5}$ | $4.129\,61 \times 10^{-9}$ | $5.920\,29 \times 10^{-8}$ |
| 45            | $3.686\,50 \times 10^{-4}$ | $1.192\,37 \times 10^{-3}$ | $5.580\,59 \times 10^{-7}$ | $1.736\,37 \times 10^{-6}$ |
| 50            | $5.153\,37 \times 10^{-3}$ | $1.237\,35 \times 10^{-1}$ | $7.613\,29 \times 10^{-6}$ | $1.968\,74 \times 10^{-4}$ |
| 55            | 1.170 90                   | 1.794 10                   | $1.686\,60 \times 10^{-3}$ | $2.390\,49 \times 10^{-3}$ |
| 60            | $5.703\,95 \times 10^1$    | $3.845\,46 \times 10^1$    | $8.036\,46 \times 10^{-2}$ | $5.136\,96 \times 10^{-2}$ |
| 70            | $1.555\,74 \times 10^4$    | $9.775\,02 \times 10^4$    | $2.105\,64 \times 10^1$    | $1.102\,10 \times 10^2$    |
| 80            | $1.039\,55 \times 10^8$    | $2.404\,38 \times 10^8$    | $1.361\,16 \times 10^{51}$ | $3.707\,17 \times 10^5$    |
| ...           |                            |                            |                            |                            |
| 180           | $1.022\,54 \times 10^{53}$ | $2.304\,26 \times 10^{41}$ | $1.372\,06 \times 10^{50}$ | $2.536\,46 \times 10^{38}$ |
| 190           | $4.648\,38 \times 10^{57}$ | $3.200\,22 \times 10^{44}$ | $7.819\,82 \times 10^{54}$ | $3.345\,44 \times 10^{41}$ |
| 200           | $9.831\,86 \times 10^{61}$ | $9.734\,46 \times 10^{47}$ | $1.386\,52 \times 10^{59}$ | $1.056\,93 \times 10^{45}$ |

### 4.2 Tabele błędów dla węzłów rozmieszczonych w zerach Czebyszewa

Tabela 3: Zestawienie błędów dla metod Newtona i Lagrange’a przy nie wielkiej ilości węzłów

| Liczba węzłów | Błąd maksymalny            | Błąd średni                |
|---------------|----------------------------|----------------------------|
| 2             | $3.741\,55 \times 10^1$    | $4.278\,47 \times 10^{-1}$ |
| 3             | $3.365\,30 \times 10^1$    | $3.872\,07 \times 10^{-1}$ |
| 4             | $3.001\,47 \times 10^1$    | $3.278\,86 \times 10^{-1}$ |
| 5             | $3.160\,53 \times 10^1$    | $2.819\,27 \times 10^{-1}$ |
| 6             | $2.863\,45 \times 10^1$    | $3.487\,06 \times 10^{-1}$ |
| 7             | $2.423\,52 \times 10^1$    | $3.342\,34 \times 10^{-1}$ |
| 8             | $2.415\,36 \times 10^1$    | $2.940\,79 \times 10^{-1}$ |
| 9             | $2.412\,71 \times 10^1$    | $2.752\,71 \times 10^{-1}$ |
| 10            | $3.870\,42 \times 10^1$    | $2.454\,40 \times 10^{-1}$ |
| 15            | $1.356\,24 \times 10^1$    | $6.911\,49 \times 10^{-2}$ |
| 20            | 3.167 72                   | $5.531\,52 \times 10^{-3}$ |
| 25            | $3.269\,07 \times 10^{-2}$ | $5.279\,33 \times 10^{-5}$ |
| 30            | $2.038\,76 \times 10^{-4}$ | $2.965\,64 \times 10^{-7}$ |

Tabela 4: Zestawienie błędów dla większej ilości węzłów

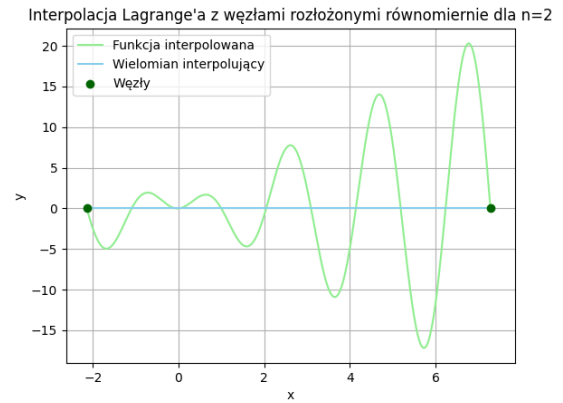
| Liczba węzłów | Błąd maks. (Newton)        | Błąd maks. (Lagrange)      | Błąd średni (Newton)       | Błąd średni (Lagrange)      |
|---------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 31            | $3.832\,04 \times 10^{-2}$ | $3.832\,05 \times 10^{-2}$ | $6.542\,27 \times 10^{-5}$ | $6.542\,26 \times 10^{-5}$  |
| 32            | $1.246\,09 \times 10^{-2}$ | $1.246\,08 \times 10^{-2}$ | $2.050\,28 \times 10^{-5}$ | $2.050\,27 \times 10^{-5}$  |
| 33            | $5.351\,50 \times 10^{-3}$ | $5.352\,03 \times 10^{-3}$ | $8.889\,20 \times 10^{-6}$ | $8.890\,12 \times 10^{-6}$  |
| 34            | $1.481\,62 \times 10^{-3}$ | $1.481\,48 \times 10^{-3}$ | $2.397\,17 \times 10^{-6}$ | $2.396\,95 \times 10^{-6}$  |
| 35            | $6.486\,45 \times 10^{-4}$ | $6.479\,71 \times 10^{-4}$ | $1.054\,55 \times 10^{-6}$ | $1.053\,22 \times 10^{-6}$  |
| 40            | $2.335\,52 \times 10^{-6}$ | $3.695\,90 \times 10^{-5}$ | $4.129\,61 \times 10^{-9}$ | $5.920\,29 \times 10^{-8}$  |
| 45            | $3.686\,50 \times 10^{-4}$ | $1.192\,37 \times 10^{-3}$ | $5.580\,59 \times 10^{-7}$ | $1.736\,37 \times 10^{-6}$  |
| 50            | $5.153\,37 \times 10^{-3}$ | $1.237\,35 \times 10^{-1}$ | $7.613\,29 \times 10^{-6}$ | $1.968\,74 \times 10^{-4}$  |
| 55            | 1.170 90                   | 1.794 10                   | $1.686\,60 \times 10^{-3}$ | $2.390\,49 \times 10^{-3}$  |
| 60            | $5.703\,95 \times 10^1$    | $3.845\,46 \times 10^1$    | $8.036\,46 \times 10^{-2}$ | $5.136\,96 \times 10^{-2}$  |
| 70            | $1.461\,62 \times 10^2$    | $2.748\,75 \times 10^{-9}$ | $3.242\,68 \times 10^{-1}$ | $2.884\,85 \times 10^{-12}$ |
| 80            | $8.247\,34 \times 10^8$    | $5.648\,44 \times 10^{-8}$ | $1.495\,11 \times 10^6$    | $6.292\,32 \times 10^{-11}$ |
|               |                            | ...                        |                            |                             |
| 180           | $5.050\,08 \times 10^{58}$ | $4.403\,79 \times 10^1$    | $1.056\,01 \times 10^{56}$ | $4.422\,07 \times 10^{-2}$  |
| 190           | $1.493\,37 \times 10^{63}$ | $2.104\,26 \times 10^2$    | $2.345\,89 \times 10^{60}$ | $2.118\,31 \times 10^{-1}$  |
| 200           | $1.919\,32 \times 10^{68}$ | $2.680\,20 \times 10^2$    | $3.445\,46 \times 10^{65}$ | $2.684\,66 \times 10^{-1}$  |

## 4.3 Wizualizacje

### 4.3.1 Zerowanie się wielomianów interpolujących dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



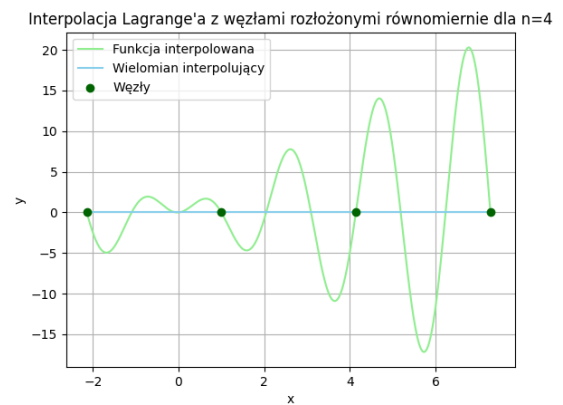
(a) Interpolacja Newtona ( $n=2$ )



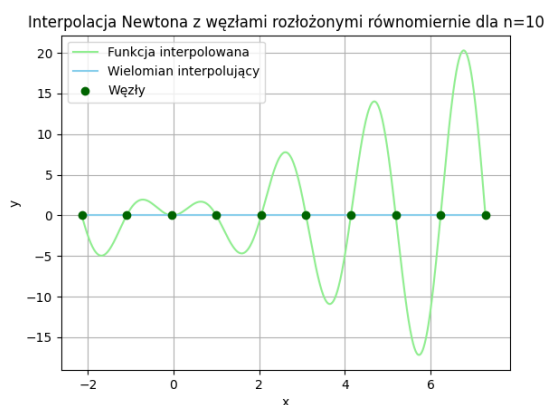
(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=2$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=4$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=4$ )



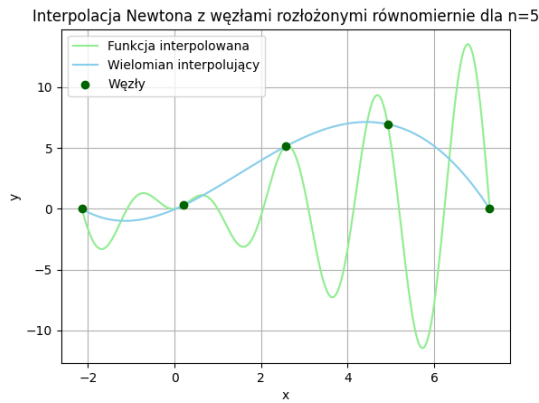
(e) Interpolacja Newtona ( $n=10$ )



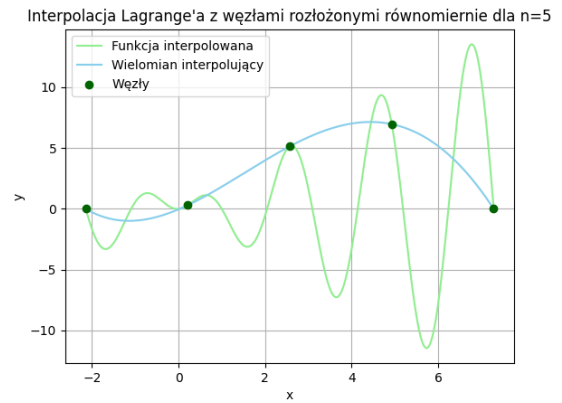
(f) Interpolacja Lagrange'a ( $n=10$ )

Rysunek 1: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{2, 4, 10\}$

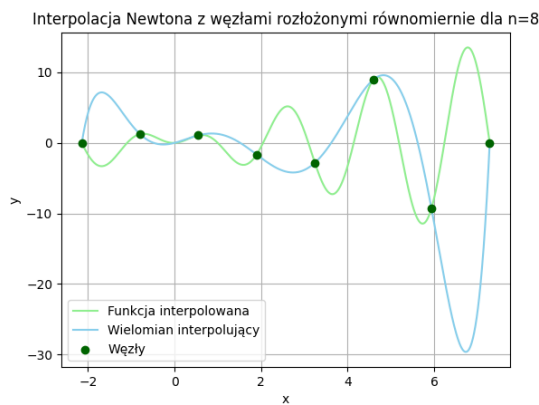
### 4.3.2 Wybrane wykresy przy niewielkich wartościach $n$ dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



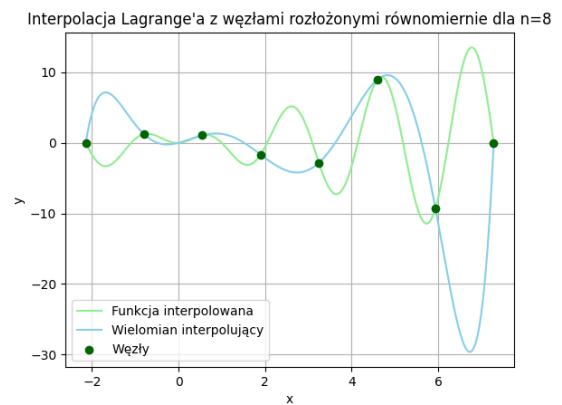
(a) Interpolacja Newtona ( $n=5$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=5$ )



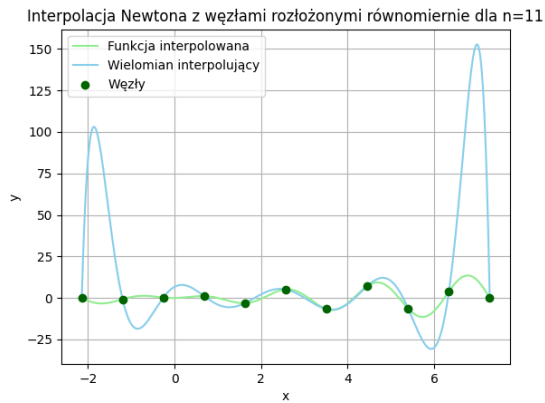
(c) Interpolacja Newtona ( $n=8$ )



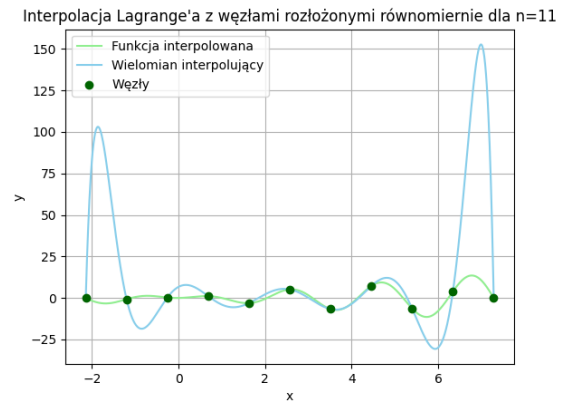
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=8$ )

Rysunek 2: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

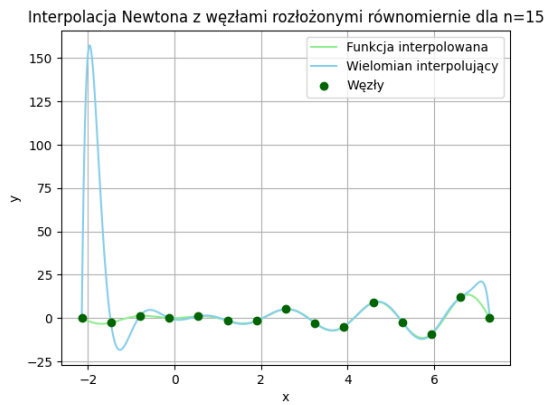
### 4.3.3 Zauważenie efektu Rungego dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



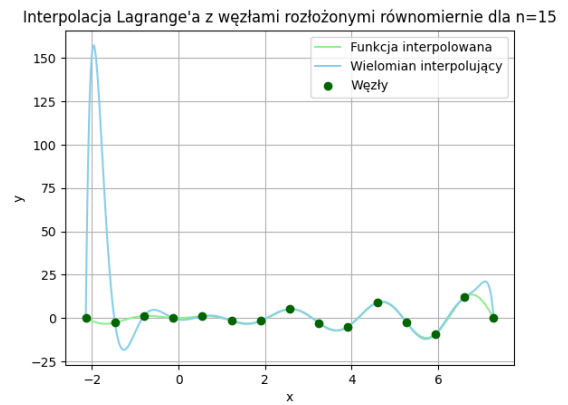
(a) Interpolacja Newtona ( $n=11$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=11$ )



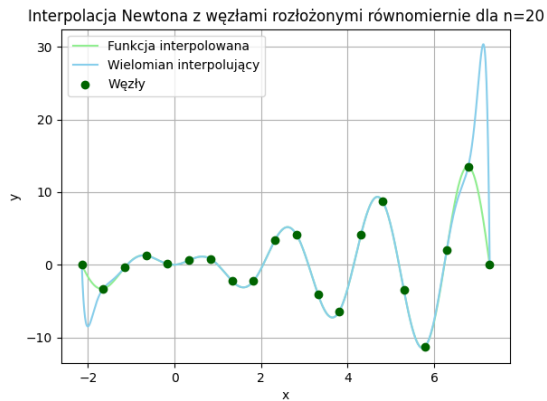
(c) Interpolacja Newtona ( $n=15$ )



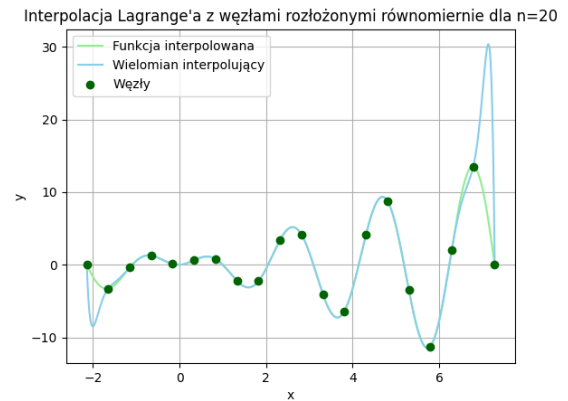
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=15$ )

Rysunek 3: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{11, 15\}$

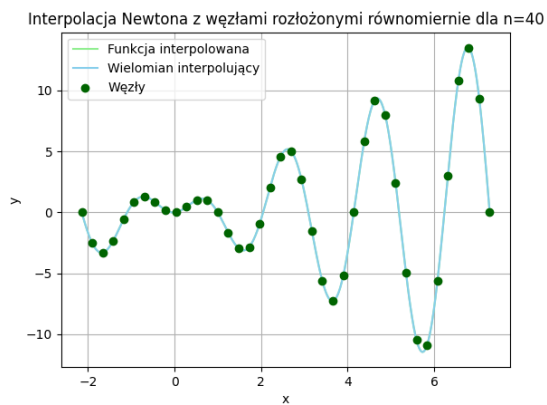
#### 4.3.4 Zanik efektu Rungego i pojawienie się błędu arytmetycznego dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



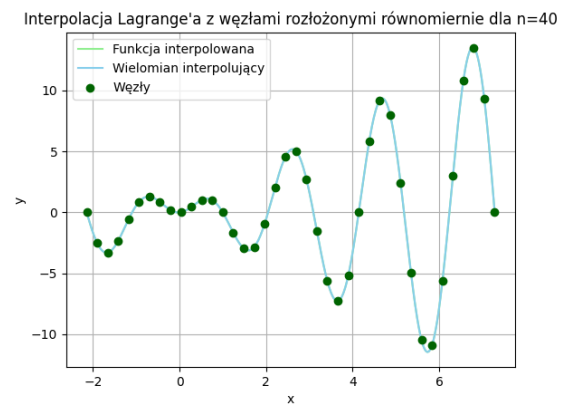
(a) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )



(b) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )

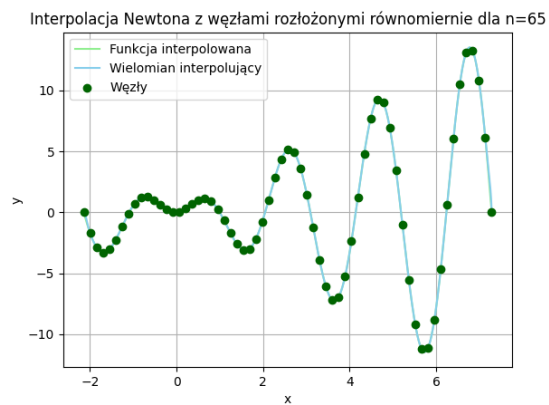


(c) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )



(d) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )

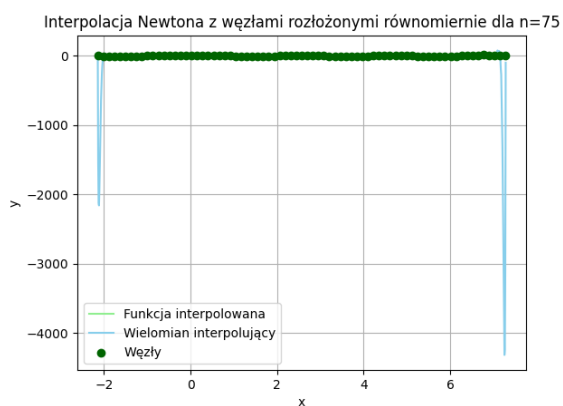
Rysunek 4: Porównanie zaniku efektu Rungego w interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{20, 40\}$



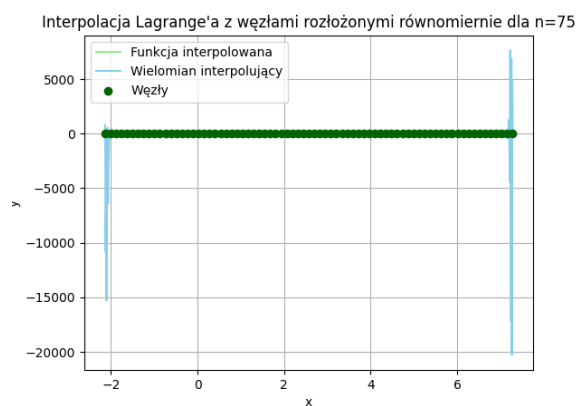
(a) Interpolacja Newtona ( $n=65$ )



(b) Interpolacja Newtona ( $n=65$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=75$ )

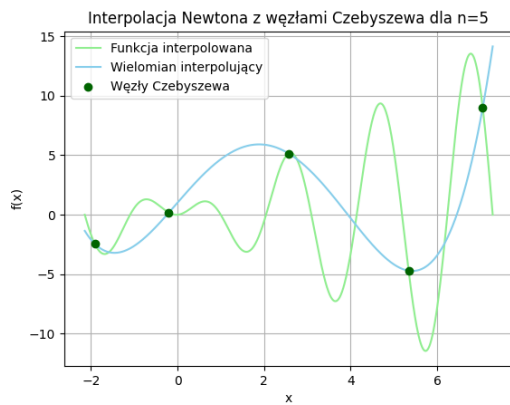


(d) Interpolacja Newtona ( $n=75$ )

Rysunek 5: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona po pojawieniu się widocznych błędów arytmetycznych  $n \in \{65, 75\}$



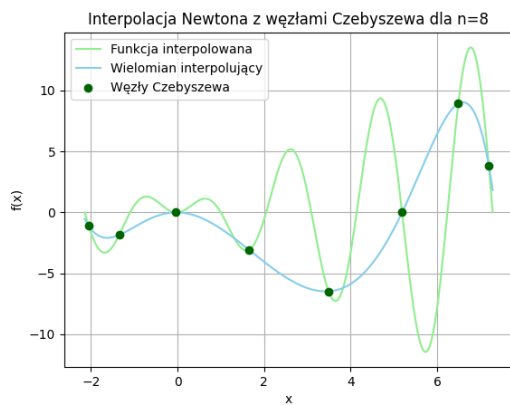
#### 4.3.5 Wybrane wykresy przy niewielkich wartościach $n$ dla węzłów Czebyszewa



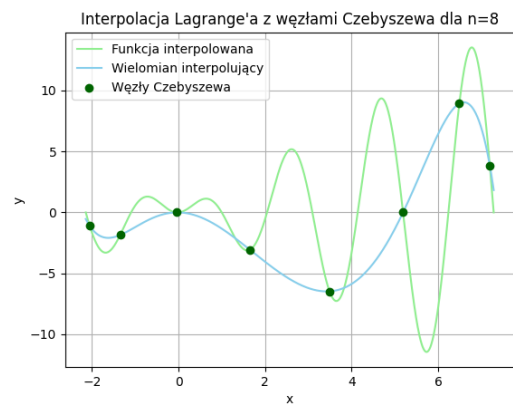
(a) Interpolacja Newtona ( $n=5$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=5$ )



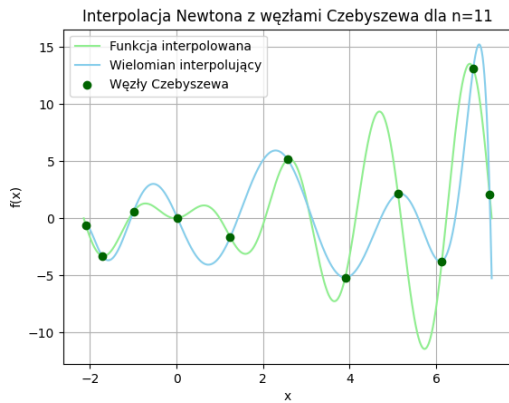
(c) Interpolacja Newtona ( $n=8$ )



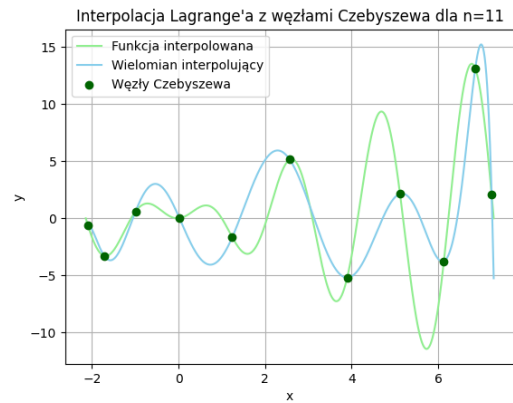
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=8$ )

Rysunek 6: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

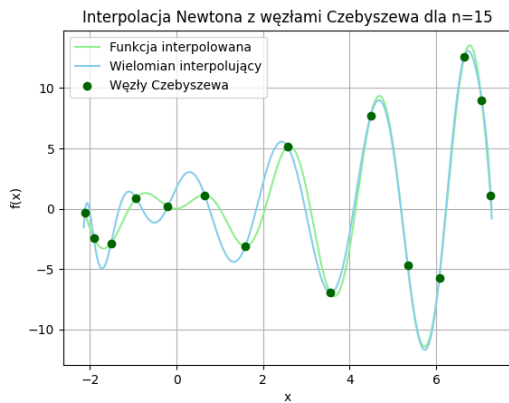
### 4.3.6 Brak efektu Rungego dla węzłów Czebyszewa



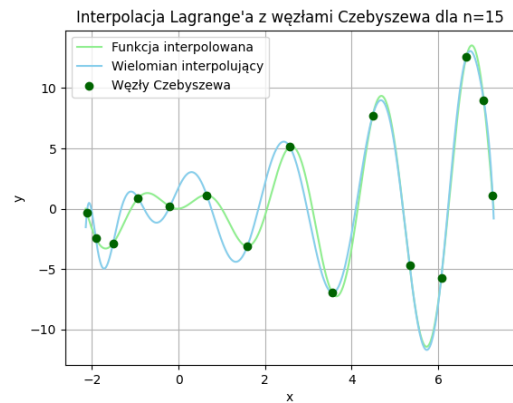
(a) Interpolacja Newtona ( $n=11$ )



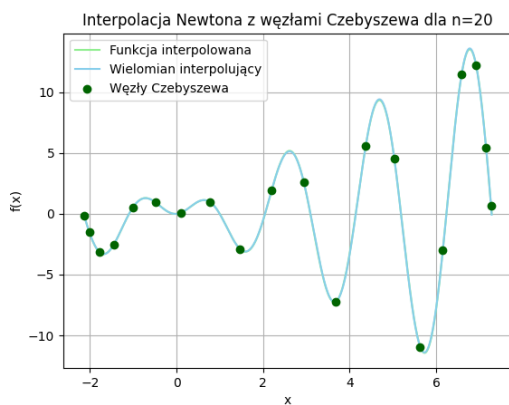
(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=11$ )



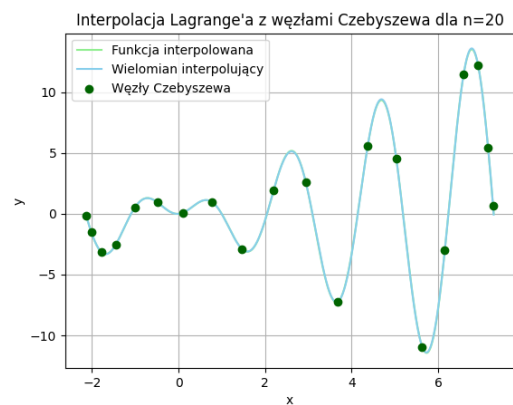
(c) Interpolacja Newtona ( $n=15$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=15$ )



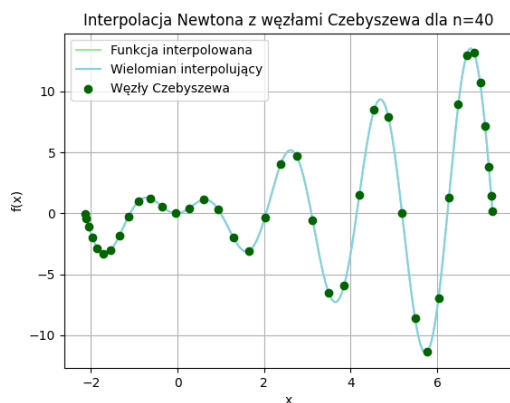
(e) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )



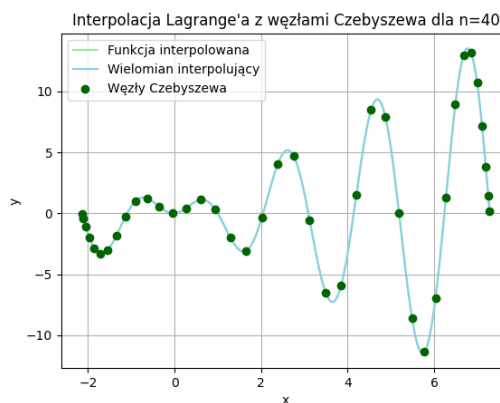
(f) Interpolacja Lagrange'a ( $n=20$ )

Rysunek 7: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{11, 15, 20\}$

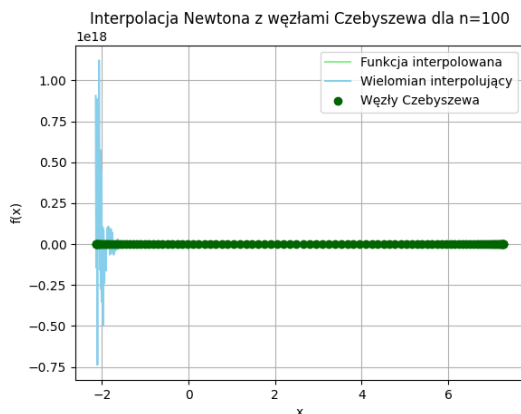
### 4.3.7 Wybrane wykresy przy większych wartościach $n$ dla węzłów Czebyszewa



(a) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=40$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=100$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=100$ )

Rysunek 8: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

## 5 Obserwacje

### • Dokładność przybliżenia:

- Dla małych wartości  $n$  (np. 3, 4, 5) węzły Czebyszewa wykazują nieco lepszą dokładność przybliżeń.
- Wraz ze wzrostem  $n$ , dokładność interpolacji znacząco się poprawia, szczególnie dla węzłów Czebyszewa.
- Przy bardzo dużych wartościach  $n$ , pojawiają się błędy arytmetyczne, które ograniczają dalszą poprawę dokładności.

### • Najlepsze przybliżenie:

- Węzły Czebyszewa polepszają przybliżenie, szczególnie metoda Lagrange'a.
- Optymalna liczba węzłów zależy od funkcji, ale ogólnie,  $n$  w zakresie 20-40 daje bardzo dobre wyniki dla węzłów Czebyszewa.
- Znacząca różnica pomiędzy metodami Lagrange'a i Newtona dla węzłów Czebyszewa, może wynikać ze sposobu obliczeń, który wpływa na kumulację błędów arytmetycznych

### • Efekt Rungego:

- Efekt Rungego jest wyraźnie widoczny dla węzłów równomiernie rozmieszczonych przy  $n > 10$ .
- Węzły Czebyszewa eliminują efekt Rungego, zapewniając stabilną zbieżność nawet przy dużych wartościach  $n$ .

- Porównując wykresy dla węzłów równomiernie rozmieszczonych i Czebyszewa, widać znaczącą różnicę w zachowaniu wielomianu interpolującego szczególnie dla  $n \in \{5, \dots, 20\}$ .