

# Interpolacja część 1

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

27.03.2025

## 1 Treść ćwiczenia

Dla poniższej funkcji wyznacz dla zagadnienia Lagrange’a wielomian interpolujący w postaci Lagrange’a i Newtona.

$$f(x) = -2x \sin(3x - 3)$$

dla  $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$ .

## 2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6 rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

## 3 Przebieg ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory na wartości interpolacji Lagrange’a i Newtona. Do obliczeń użyto  $N = 1000$  punktów na przedziale  $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$ , zarówno dla funkcji interpolowanej, jak i wielomianu interpolującego.

Wyznaczono węzły interpolacyjne, rozmieszczone równomiernie lub według pierwiastków wielomianu Czebyszewa. W eksperymentach przyjęto liczbę węzłów  $n$  z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 200\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P} (f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$  oznacza wartość funkcji interpolowanej w punkcie  $x$ .
- $w(x)$  oznacza wartość wielomianu interpolującego w punkcie  $x$ .
- $P$  jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.
- $|P|$  oznacza moc zbioru  $P$ .

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

## 4 Wyniki

### 4.1 Tabele błędów dla węzłów rozmieszczonych równomiernie

Tabela 1: Zestawienie błędów dla metod Newtona i Lagrange’a przy niewielkiej liczbie węzłów

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$2.030\,25 \times 10^1$	2.495 03
3	$2.142\,33 \times 10^1$	3.057 94
4	$2.030\,25 \times 10^1$	2.495 03
5	$2.592\,19 \times 10^1$	3.220 03
6	$2.474\,27 \times 10^1$	3.247 10
7	$3.325\,32 \times 10^1$	3.744 18
8	$6.465\,98 \times 10^1$	5.875 89
9	$1.012\,40 \times 10^2$	9.278 47
15	$2.390\,97 \times 10^2$	1.317 44
20	$1.514\,71 \times 10^2$	3.193 58
20	$1.514\,71 \times 10^2$	3.193 58
25	5.149 63	1.044 81
30	$9.142\,33 \times 10^{-2}$	1.533 79

Tabela 2: Zestawienie błędów dla większej liczby węzłów

Liczba węzłów	Błąd maks. (Newton)	Błąd maks. (Lagrange)	Błąd średni (Newton)	Błąd średni (Lagrange)
31	$3.832\,04 \times 10^{-2}$	$3.832\,05 \times 10^{-2}$	$6.542\,27 \times 10^{-5}$	$6.542\,26 \times 10^{-5}$
32	$1.246\,09 \times 10^{-2}$	$1.246\,08 \times 10^{-2}$	$2.050\,28 \times 10^{-5}$	$2.050\,27 \times 10^{-5}$
33	$5.351\,50 \times 10^{-3}$	$5.352\,03 \times 10^{-3}$	$8.889\,20 \times 10^{-6}$	$8.890\,12 \times 10^{-6}$
34	$1.481\,62 \times 10^{-3}$	$1.481\,48 \times 10^{-3}$	$2.397\,17 \times 10^{-6}$	$2.396\,95 \times 10^{-6}$
35	$6.486\,45 \times 10^{-4}$	$6.479\,71 \times 10^{-4}$	$1.054\,55 \times 10^{-6}$	$1.053\,22 \times 10^{-6}$
40	$2.335\,52 \times 10^{-6}$	$3.695\,90 \times 10^{-5}$	$4.129\,61 \times 10^{-9}$	$5.920\,29 \times 10^{-8}$
45	$3.686\,50 \times 10^{-4}$	$1.192\,37 \times 10^{-3}$	$5.580\,59 \times 10^{-7}$	$1.736\,37 \times 10^{-6}$
50	$5.153\,37 \times 10^{-3}$	$1.237\,35 \times 10^{-1}$	$7.613\,29 \times 10^{-6}$	$1.968\,74 \times 10^{-4}$
55	1.170 90	1.794 10	$1.686\,60 \times 10^{-3}$	$2.390\,49 \times 10^{-3}$
60	$5.703\,95 \times 10^1$	$3.845\,46 \times 10^1$	$8.036\,46 \times 10^{-2}$	$5.136\,96 \times 10^{-2}$
70	$1.555\,74 \times 10^4$	$9.775\,02 \times 10^4$	$2.105\,64 \times 10^1$	$1.102\,10 \times 10^2$
80	$1.039\,55 \times 10^8$	$2.404\,38 \times 10^8$	$1.361\,16 \times 10^{51}$	$3.707\,17 \times 10^5$
...				
180	$1.022\,54 \times 10^{53}$	$2.304\,26 \times 10^{41}$	$1.372\,06 \times 10^{50}$	$2.536\,46 \times 10^{38}$
190	$4.648\,38 \times 10^{57}$	$3.200\,22 \times 10^{44}$	$7.819\,82 \times 10^{54}$	$3.345\,44 \times 10^{41}$
200	$9.831\,86 \times 10^{61}$	$9.734\,46 \times 10^{47}$	$1.386\,52 \times 10^{59}$	$1.056\,93 \times 10^{45}$

### 4.2 Tabele błędów dla węzłów rozmieszczonych w zerach Czebyszewa

Tabela 3: Zestawienie błędów dla metod Newtona i Lagrange’a przy niewielkiej liczbie węzłów

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$3.741\,55 \times 10^1$	$4.278\,47 \times 10^{-1}$
3	$3.365\,30 \times 10^1$	$3.872\,07 \times 10^{-1}$
4	$3.001\,47 \times 10^1$	$3.278\,86 \times 10^{-1}$
5	$3.160\,53 \times 10^1$	$2.819\,27 \times 10^{-1}$
6	$2.863\,45 \times 10^1$	$3.487\,06 \times 10^{-1}$
7	$2.423\,52 \times 10^1$	$3.342\,34 \times 10^{-1}$
8	$2.415\,36 \times 10^1$	$2.940\,79 \times 10^{-1}$
9	$2.412\,71 \times 10^1$	$2.752\,71 \times 10^{-1}$
10	$3.870\,42 \times 10^1$	$2.454\,40 \times 10^{-1}$
15	$1.356\,24 \times 10^1$	$6.911\,49 \times 10^{-2}$
20	3.167 72	$5.531\,52 \times 10^{-3}$
25	$3.269\,07 \times 10^{-2}$	$5.279\,33 \times 10^{-5}$
30	$2.038\,76 \times 10^{-4}$	$2.965\,64 \times 10^{-7}$

Tabela 4: Zestawienie błędów dla większej liczby węzłów

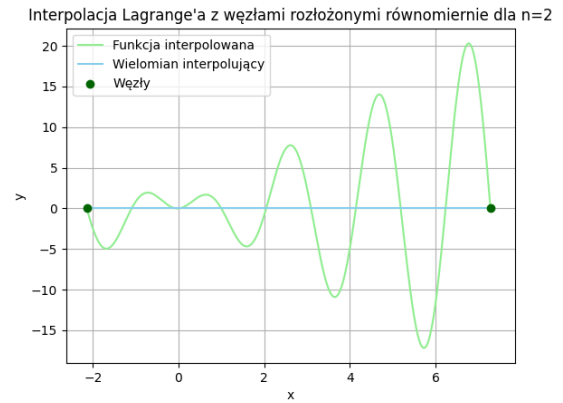
Liczba węzłów	Błąd maks. (Newton)	Błąd maks. (Lagrange)	Błąd średni (Newton)	Błąd średni (Lagrange)
31	$3.832\,04 \times 10^{-2}$	$3.832\,05 \times 10^{-2}$	$6.542\,27 \times 10^{-5}$	$6.542\,26 \times 10^{-5}$
32	$1.246\,09 \times 10^{-2}$	$1.246\,08 \times 10^{-2}$	$2.050\,28 \times 10^{-5}$	$2.050\,27 \times 10^{-5}$
33	$5.351\,50 \times 10^{-3}$	$5.352\,03 \times 10^{-3}$	$8.889\,20 \times 10^{-6}$	$8.890\,12 \times 10^{-6}$
34	$1.481\,62 \times 10^{-3}$	$1.481\,48 \times 10^{-3}$	$2.397\,17 \times 10^{-6}$	$2.396\,95 \times 10^{-6}$
35	$6.486\,45 \times 10^{-4}$	$6.479\,71 \times 10^{-4}$	$1.054\,55 \times 10^{-6}$	$1.053\,22 \times 10^{-6}$
40	$2.335\,52 \times 10^{-6}$	$3.695\,90 \times 10^{-5}$	$4.129\,61 \times 10^{-9}$	$5.920\,29 \times 10^{-8}$
45	$3.686\,50 \times 10^{-4}$	$1.192\,37 \times 10^{-3}$	$5.580\,59 \times 10^{-7}$	$1.736\,37 \times 10^{-6}$
50	$5.153\,37 \times 10^{-3}$	$1.237\,35 \times 10^{-1}$	$7.613\,29 \times 10^{-6}$	$1.968\,74 \times 10^{-4}$
55	1.170 90	1.794 10	$1.686\,60 \times 10^{-3}$	$2.390\,49 \times 10^{-3}$
60	$5.703\,95 \times 10^1$	$3.845\,46 \times 10^1$	$8.036\,46 \times 10^{-2}$	$5.136\,96 \times 10^{-2}$
70	$1.461\,62 \times 10^2$	$2.748\,75 \times 10^{-9}$	$3.242\,68 \times 10^{-1}$	$2.884\,85 \times 10^{-12}$
80	$8.247\,34 \times 10^8$	$5.648\,44 \times 10^{-8}$	$1.495\,11 \times 10^6$	$6.292\,32 \times 10^{-11}$
		...		
180	$5.050\,08 \times 10^{58}$	$4.403\,79 \times 10^1$	$1.056\,01 \times 10^{56}$	$4.422\,07 \times 10^{-2}$
190	$1.493\,37 \times 10^{63}$	$2.104\,26 \times 10^2$	$2.345\,89 \times 10^{60}$	$2.118\,31 \times 10^{-1}$
200	$1.919\,32 \times 10^{68}$	$2.680\,20 \times 10^2$	$3.445\,46 \times 10^{65}$	$2.684\,66 \times 10^{-1}$

## 4.3 Wizualizacje

### 4.3.1 Zerowanie się wielomianów interpolujących dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



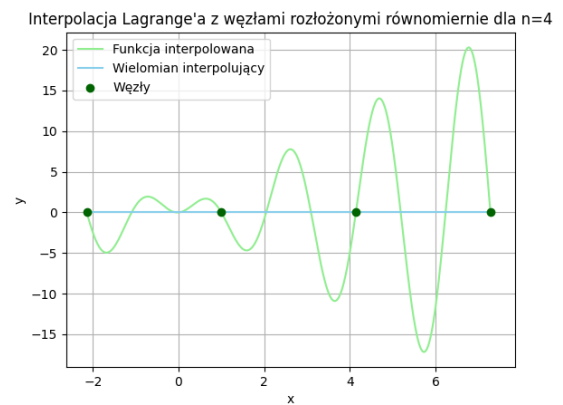
(a) Interpolacja Newtona ( $n=2$ )



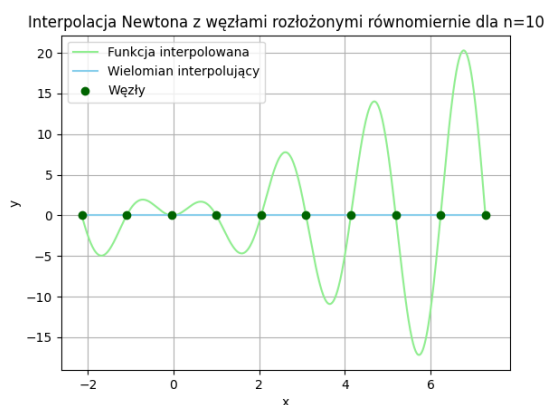
(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=2$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=4$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=4$ )



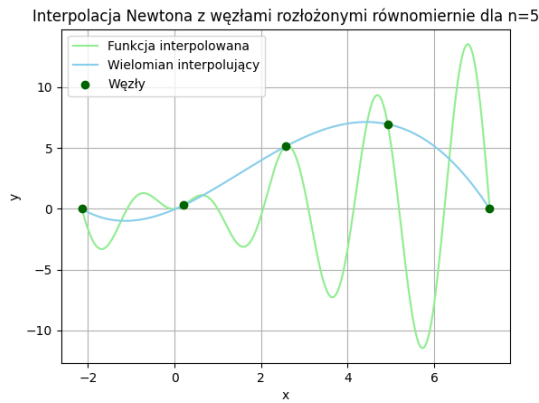
(e) Interpolacja Newtona ( $n=10$ )



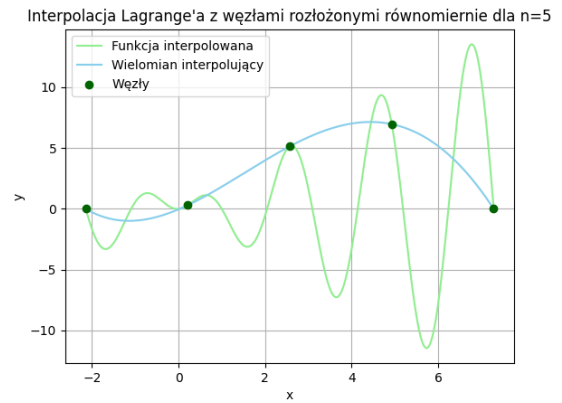
(f) Interpolacja Lagrange'a ( $n=10$ )

Rysunek 1: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{2, 4, 10\}$

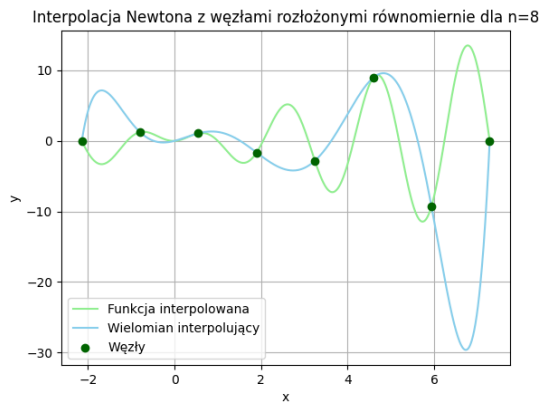
### 4.3.2 Wybrane wykresy przy niewielkich wartościach $n$ dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



(a) Interpolacja Newtona ( $n=5$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=5$ )



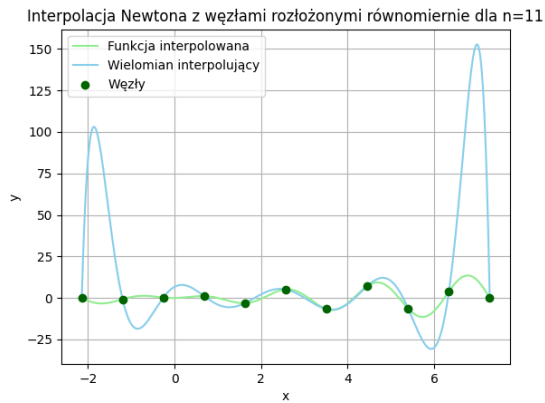
(c) Interpolacja Newtona ( $n=8$ )



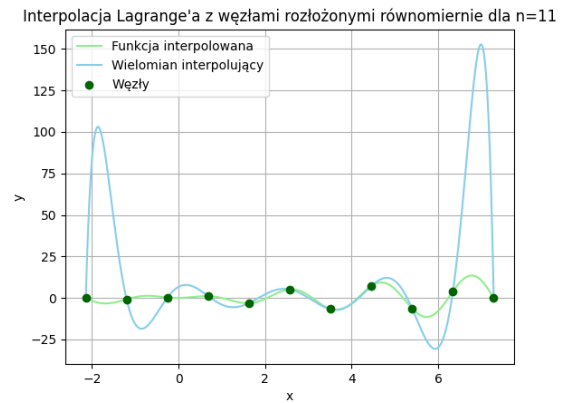
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=8$ )

Rysunek 2: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

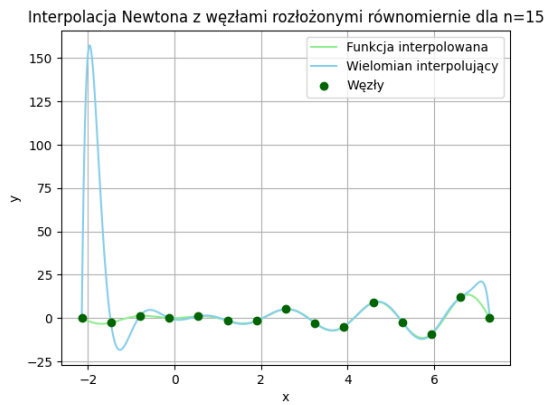
### 4.3.3 Zauważenie efektu Runge'a dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



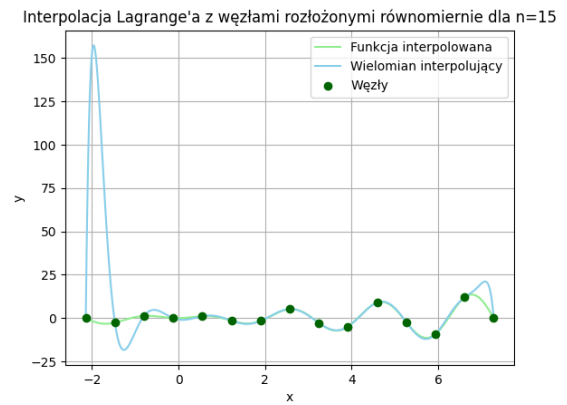
(a) Interpolacja Newtona ( $n=11$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=11$ )



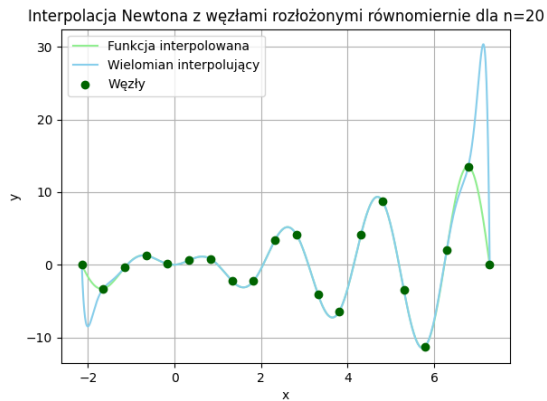
(c) Interpolacja Newtona ( $n=15$ )



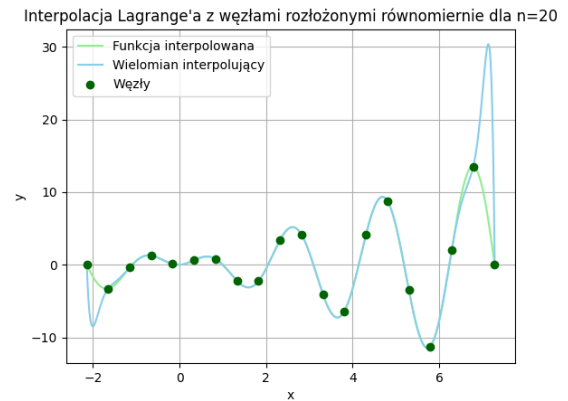
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=15$ )

Rysunek 3: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{11, 15\}$

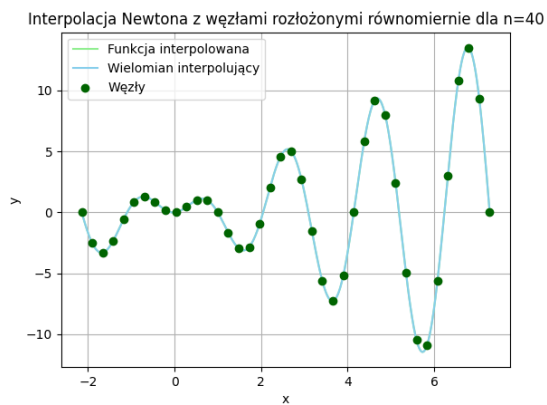
#### 4.3.4 Zanik efektu Rungego i pojawienie się błędu arytmetycznego dla węzłów rozmieszczonych równomiernie



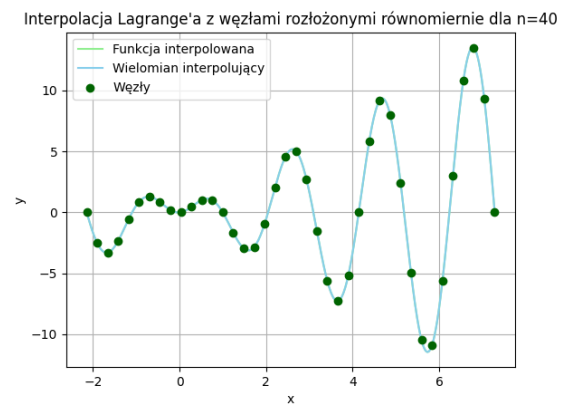
(a) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )



(b) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )

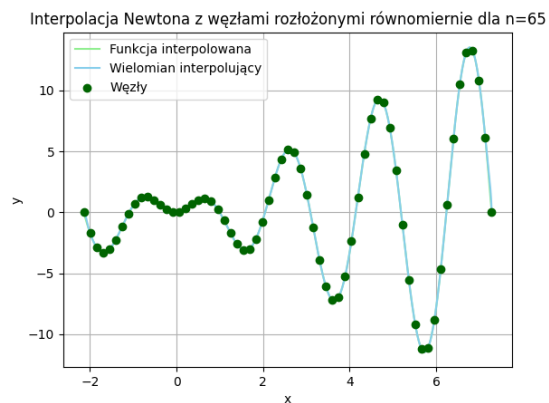


(c) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )

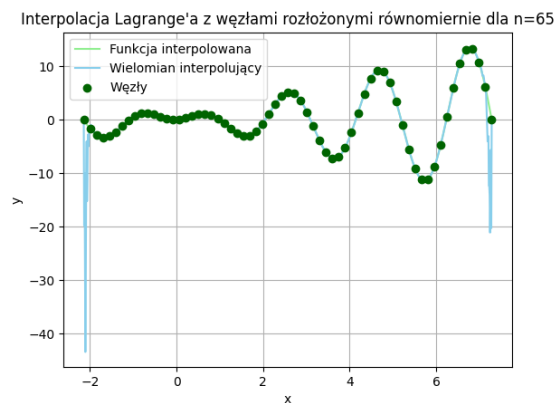


(d) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )

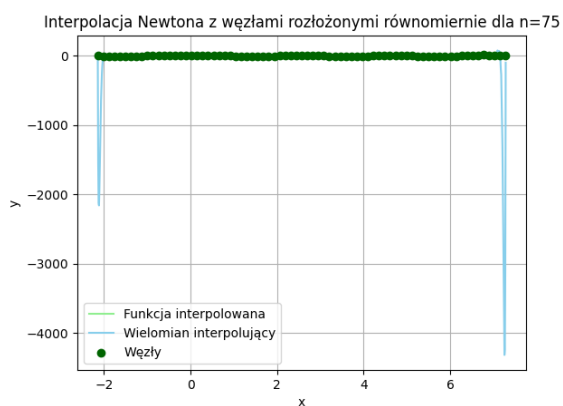
Rysunek 4: Porównanie zaniku efektu Rungego w interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{20, 40\}$



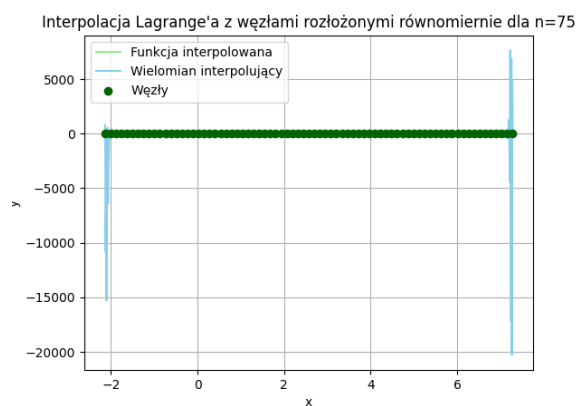
(a) Interpolacja Newtona ( $n=65$ )



(b) Interpolacja Newtona ( $n=65$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=75$ )

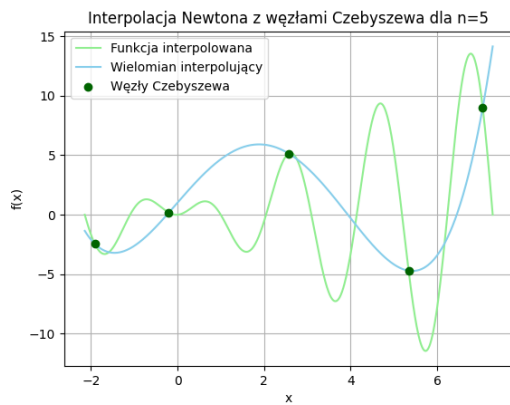


(d) Interpolacja Newtona ( $n=75$ )

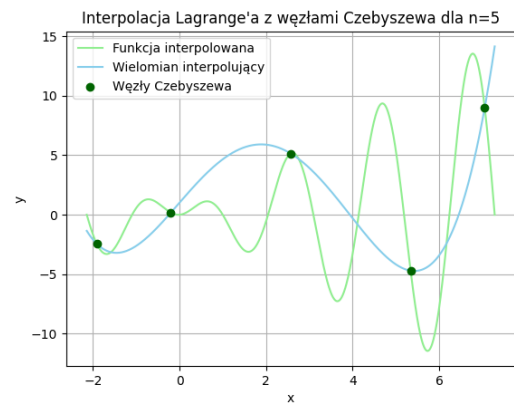
Rysunek 5: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona po pojawieniu się widocznych błędów arytmetycznych  $n \in \{65, 75\}$



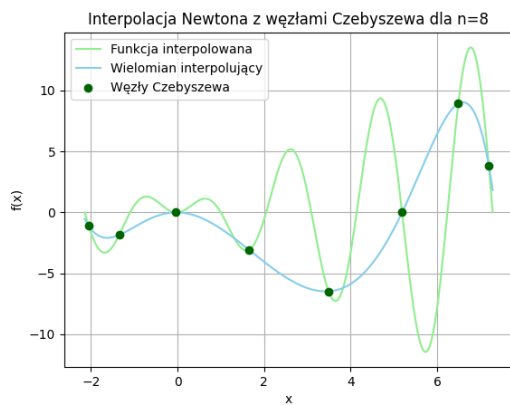
#### 4.3.5 Wybrane wykresy przy niewielkich wartościach $n$ dla węzłów Czebyszewa



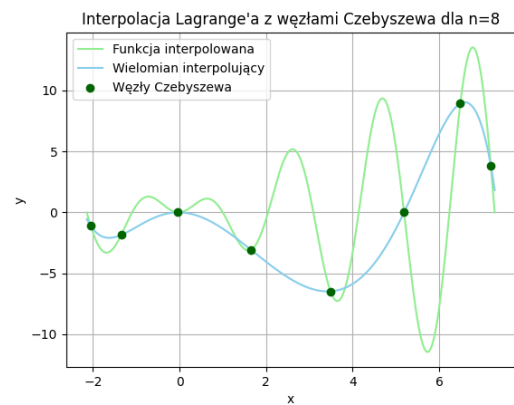
(a) Interpolacja Newtona ( $n=5$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=5$ )



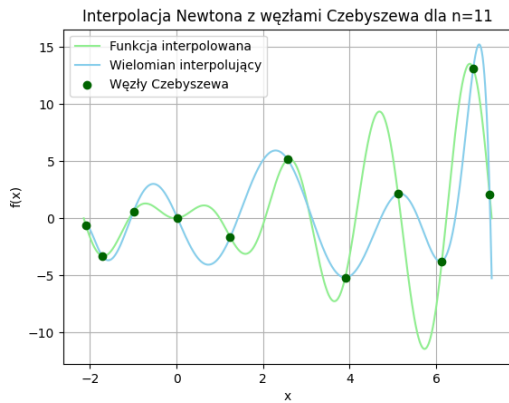
(c) Interpolacja Newtona ( $n=8$ )



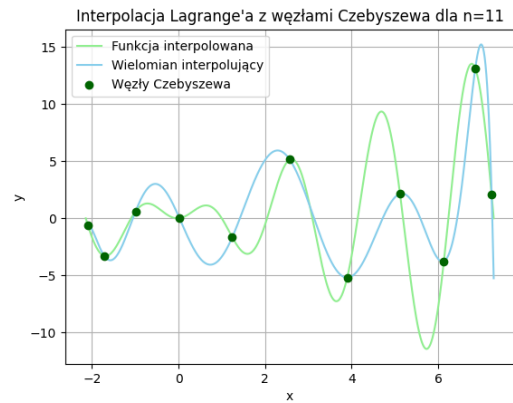
(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=8$ )

Rysunek 6: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

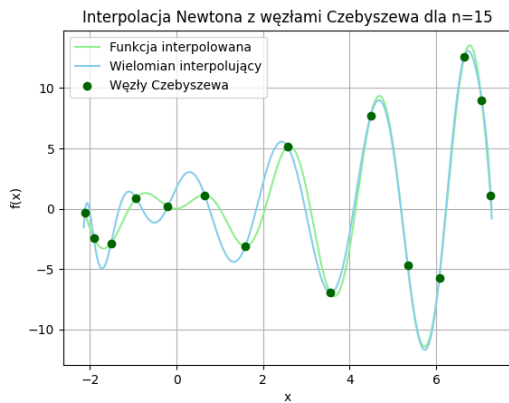
### 4.3.6 Brak efektu Runge'a dla węzłów Czebyszewa



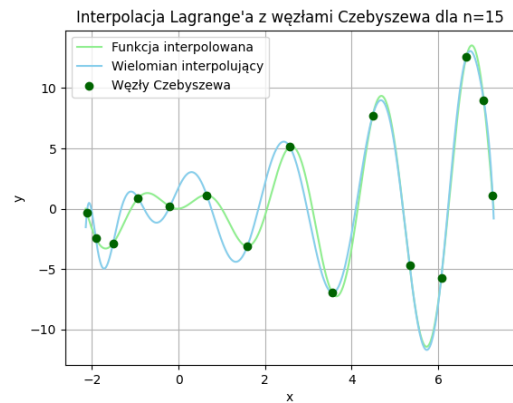
(a) Interpolacja Newtona ( $n=11$ )



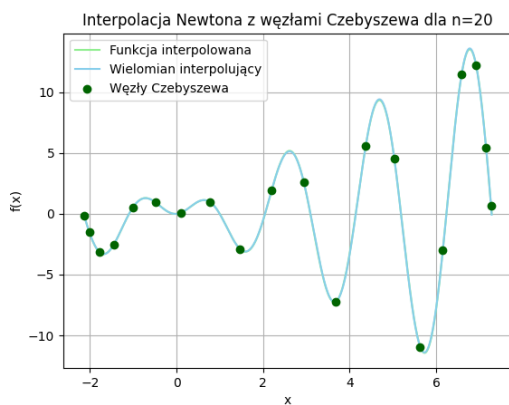
(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=11$ )



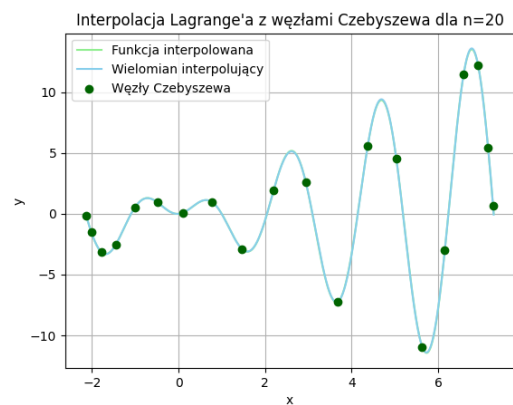
(c) Interpolacja Newtona ( $n=15$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=15$ )



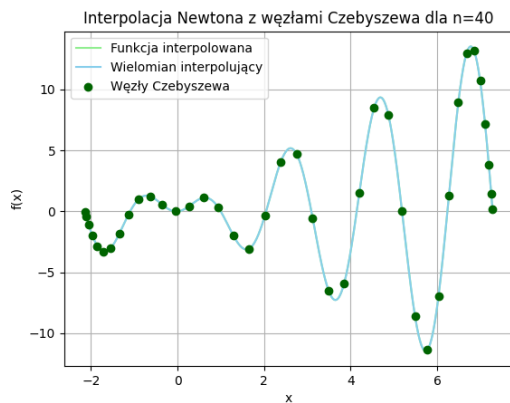
(e) Interpolacja Newtona ( $n=20$ )



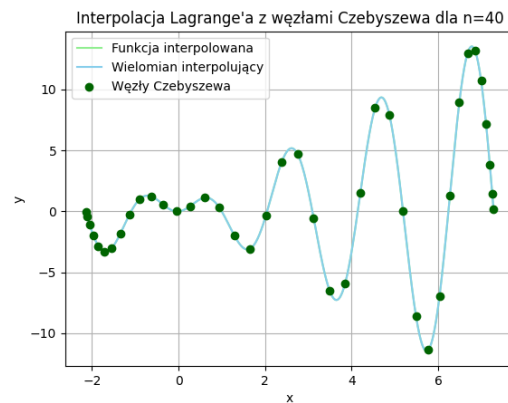
(f) Interpolacja Lagrange'a ( $n=20$ )

Rysunek 7: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{11, 15, 20\}$

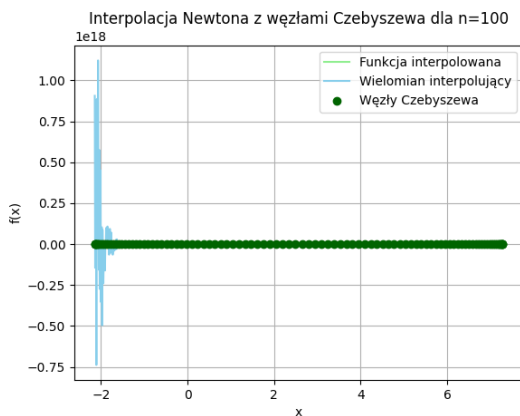
### 4.3.7 Wybrane wykresy przy większych wartościach $n$ dla węzłów Czebyszewa



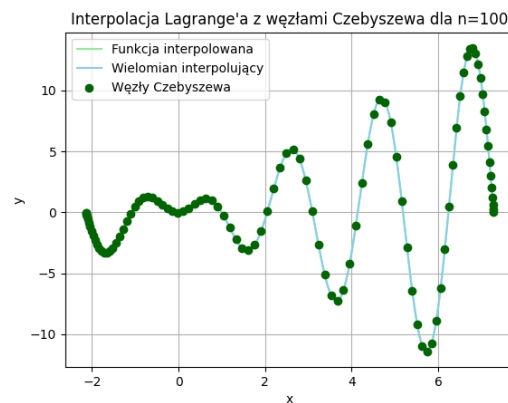
(a) Interpolacja Newtona ( $n=40$ )



(b) Interpolacja Lagrange'a ( $n=40$ )



(c) Interpolacja Newtona ( $n=100$ )



(d) Interpolacja Lagrange'a ( $n=100$ )

Rysunek 8: Porównanie interpolacji Lagrange'a i Newtona dla  $n \in \{5, 8\}$

## 5 Obserwacje

### • Dokładność przybliżenia:

- Dla małych wartości  $n$  (np. 3, 4, 5) węzły Czebyszewa wykazują nieco lepszą dokładność przybliżeń.
- Wraz ze wzrostem  $n$ , dokładność interpolacji znacząco się poprawia, szczególnie dla węzłów Czebyszewa.
- Przy bardzo dużych wartościach  $n$ , pojawiają się błędy arytmetyczne, które ograniczają dalszą poprawę dokładności.

### • Najlepsze przybliżenie:

- Węzły Czebyszewa polepszają przybliżenie, szczególnie metoda Lagrange'a.
- Optymalna liczba węzłów zależy od funkcji, ale ogólnie,  $n$  w zakresie 20-40 daje bardzo dobre wyniki dla węzłów Czebyszewa.
- Znacząca różnica pomiędzy metodami Lagrange'a i Newtona dla węzłów Czebyszewa, może wynikać ze sposobu obliczeń, który wpływa na kumulację błędów arytmetycznych

### • Efekt Rungego:

- Efekt Rungego jest wyraźnie widoczny dla węzłów równomiernie rozmieszczonych przy  $n > 10$ .
- Węzły Czebyszewa eliminują efekt Rungego, zapewniając stabilną zbieżność nawet przy dużych wartościach  $n$ .

- Porównując wykresy dla węzłów równomiernie rozmieszczonych i Czebyszewa, widać znaczącą różnicę w zachowaniu wielomianu interpolującego szczególnie dla  $n \in \{5, \dots, 20\}$ .