Aproksymacja średniokwadratowa wielomiananami algebraicznymi

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

17.04.2025

1 Wprowadzenie

1.1 Treść ćwiczenia

Dla funkcji $f(x)$ wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

$$f(x) = -2xsin(3x - 3)$$

dla $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$.

1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Do rozwiązywania układów równań wykorzystano funkcję linalg.solve z Numpy, używającą algorytmu rozkładu LU. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory dla zagadnienia aproksymacji średnio kwadratowej. Do obliczeń użyto $N = 1000$ punktów na przedziale $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$, zarówno dla funkcji aproksymującej, jak i wielomianu aproksymującego.

Wyznaczone punkty dyskretne są rozmieszczone równomiernie. W eksperymentach przyjęto ich liczbę jako n z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \ldots, 20\}$$

Natomiast stopień wielomianu aproksymującego m przyjęto jako:

$$m \in \{2, 3, 4, \ldots, 30\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P}(f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$ oznacza wartość funkcji interpolowanej w punkcie x.
- $w(x)$ oznacza wartość wielomianu interpolującego w punkcie x.
- P jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.

- $|P|$ oznacza moc zbioru P.

Na podstawie uzyskanych wyników, sporządzono wykresy, porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

3 Wyniki i analiza

3.1 Błędy

3.1.1 Tabele błędów

Tabela 1: Zestawienie błędów maksymalnych aproksymacji średniokwadratowej

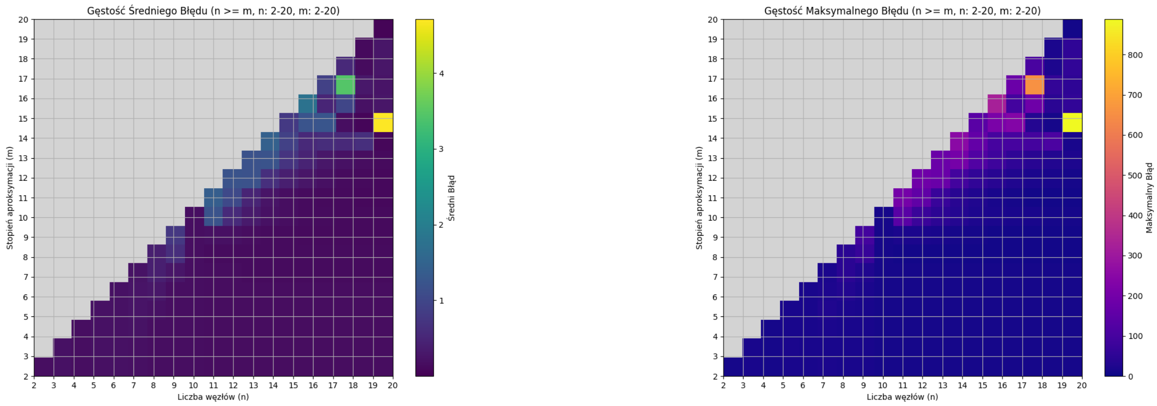
n	m									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	1.66e-01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	2.03e-01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1.66e-01	1.66e-01	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1.99e-01	2.14e-01	—	—	—	—	—	—	—	—
6	2.09e-01	2.17e-01	2.16e-01	—	—	—	—	—	—	—
7	1.88e-01	2.29e-01	2.49e-01	—	—	—	—	—	—	—
8	1.75e-01	1.75e-01	2.87e-01	3.98e-01	—	—	—	—	—	—
9	1.69e-01	1.69e-01	1.82e-01	6.18e-01	—	—	—	—	—	—
10	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	—	—	—	—	—
11	1.64e-01	1.64e-01	1.62e-01	1.40e-01	1.23	—	—	—	—	—
12	1.63e-01	1.62e-01	1.61e-01	1.38e-01	5.76e-01	1.28	—	—	—	—
13	1.63e-01	1.61e-01	1.60e-01	1.38e-01	3.36e-01	1.22	—	—	—	—
14	1.62e-01	1.60e-01	1.59e-01	1.37e-01	2.31e-01	6.60e-01	1.68	—	—	—
15	1.62e-01	1.59e-01	1.58e-01	1.36e-01	1.79e-01	4.12e-01	1.08	—	—	—
16	1.62e-01	1.58e-01	1.58e-01	1.36e-01	1.52e-01	2.79e-01	6.68e-01	2.26	—	—
17	1.61e-01	1.57e-01	1.57e-01	1.36e-01	1.37e-01	2.05e-01	7.25e-01	6.54e-01	—	—
18	1.61e-01	1.57e-01	1.57e-01	1.36e-01	1.29e-01	1.60e-01	5.78e-01	1.35	7.71e-01	—
19	1.61e-01	1.57e-01	1.56e-01	1.36e-01	1.24e-01	1.31e-01	7.18e-01	3.15e-01	1.87e-01	—
20	1.61e-01	1.56e-01	1.56e-01	1.35e-01	1.21e-01	1.13e-01	9.34e-02	4.13e-01	4.30e-01	4.99e-02

Tabela 2: Zestawienie błedów średnich aproksymacji średniokwadratowej

n	m									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	1.35e+01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1.42e+01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1.35e+01	1.35e+01	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1.50e+01	1.72e+01	—	—	—	—	—	—	—	—
6	1.60e+01	1.64e+01	1.64e+01	—	—	—	—	—	—	—
7	1.74e+01	2.02e+01	2.21e+01	—	—	—	—	—	—	—
8	1.53e+01	1.57e+01	3.05e+01	4.42e+01	—	—	—	—	—	—
9	1.42e+01	1.43e+01	1.75e+01	6.74e+01	—	—	—	—	—	—
10	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	—	—	—	—	—
11	1.30e+01	1.29e+01	1.19e+01	9.66	1.63e+02	—	—	—	—	—
12	1.26e+01	1.25e+01	1.19e+01	9.80	9.07e+01	2.47e+02	—	—	—	—
13	1.23e+01	1.22e+01	1.20e+01	9.86	5.92e+01	1.74e+02	—	—	—	—
14	1.23e+01	1.19e+01	1.20e+01	9.88	4.31e+01	1.05e+02	4.71e+02	—	—	—
15	1.24e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.90	3.40e+01	7.54e+01	3.25e+02	—	—	—
16	1.25e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.91	2.84e+01	5.69e+01	2.11e+02	7.79e+02	—	—
17	1.26e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.91	2.47e+01	4.53e+01	2.31e+02	2.42e+02	—	—
18	1.26e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	2.22e+01	3.74e+01	1.16e+02	5.13e+02	3.08e+02	—
19	1.27e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	2.05e+01	3.18e+01	1.82e+02	1.30e+02	6.74e+01	—
20	1.27e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	1.93e+01	2.78e+01	1.70e+01	1.74e+02	1.85e+02	8.11

.

3.1.2 Wykresy gęstościowe błędów



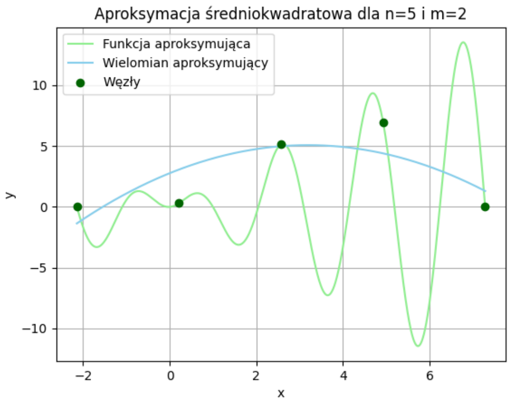
a) Przyjmowanie wartości zero przez wielomiany interpolujące dla $n = 4$.

b) Pojawienie się pierwszego większego odchylenia na krańcach dla wielomianu interpolującego przy $n = 8$.

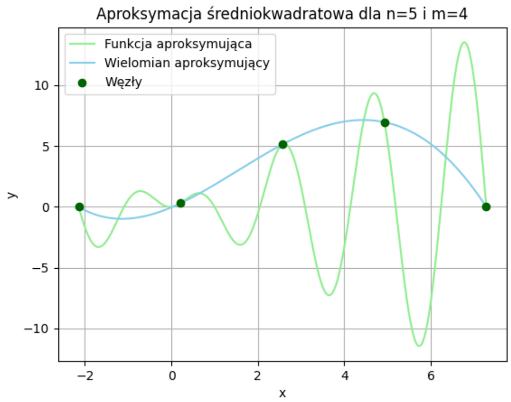
Rysunek 1: Porównanie wykresów gęstościowe dla obu rodzajów błędów dla $n = 2...20$ oraz $m = 2...20$

3.2 Wizualizacje

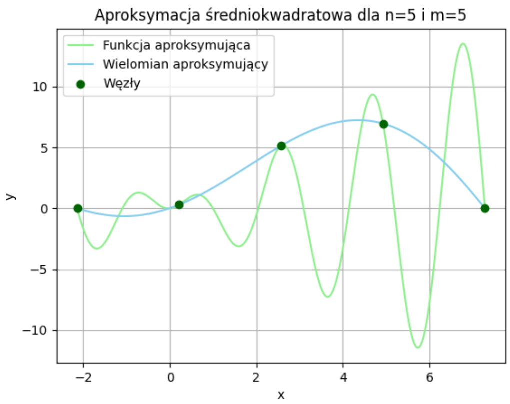
3.2.1 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 5$



a) Prosta aproksymacja dla $m = 2$.



b) Dokładniejsze aproksymowanie dla $m = 4$.

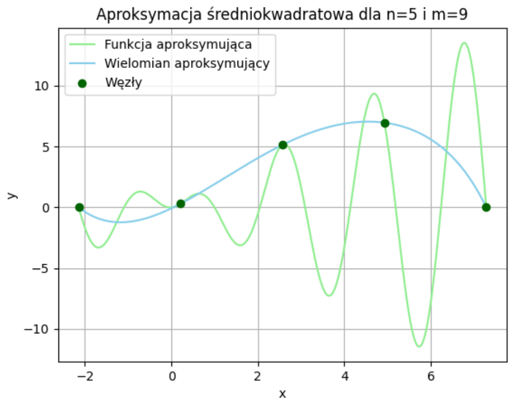


c) Stopień wielomianu aproksymującego równy liczbie węzłów $n = 5$.

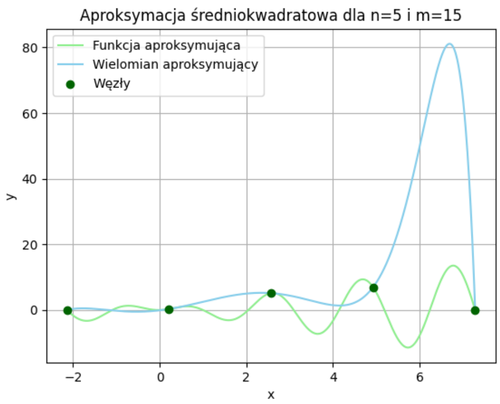
d) Brak znaczacej zmiany przebiegu wielomianu $m = 6$.

Rysunek 2: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 5$ dla $m <= 6$

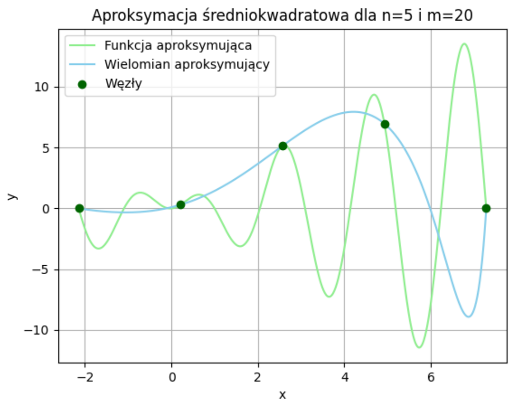
a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



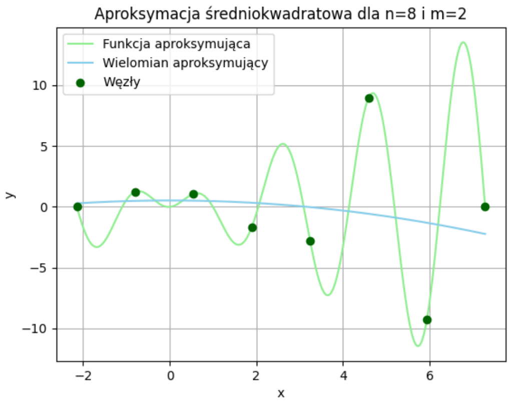
c) Pojawienie się efektu Rungego $m = 15$.



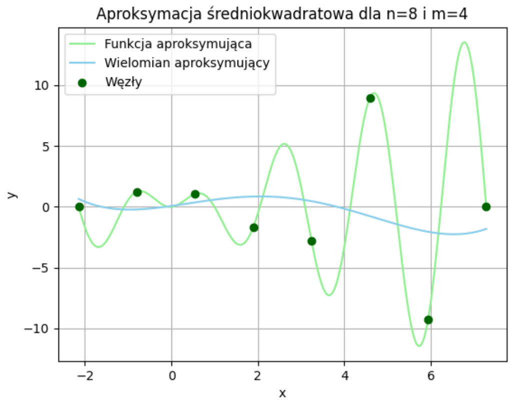
d) Zaniknięcie efektu Rungego $m = 20$.

Rysunek 3: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 5$ dla $m > 6$

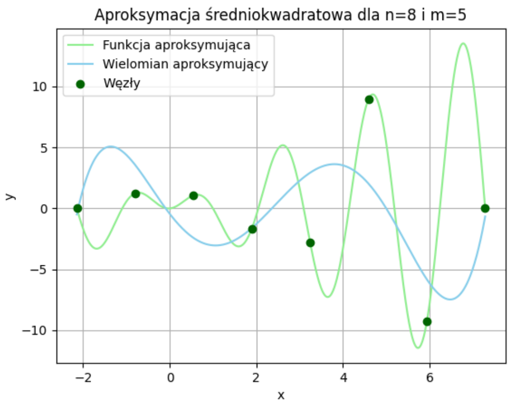
3.2.2 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 8$



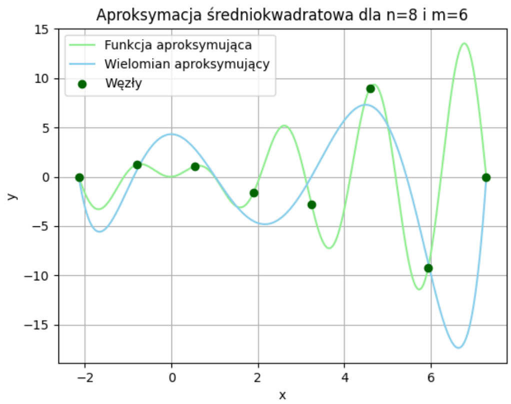
a) Prosta aproksymacja dla $m = 2$.



b) Zwiększenie dokładności aproksymacja dla $m = 4$.

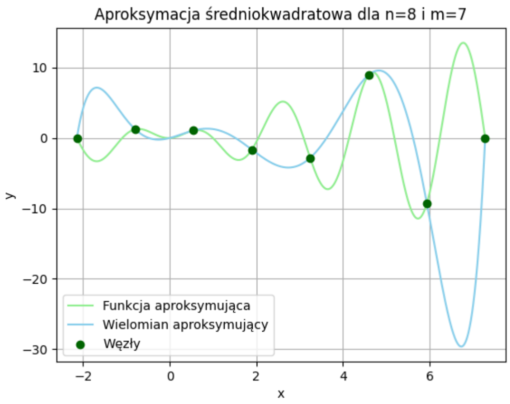


c) $m = 5$.

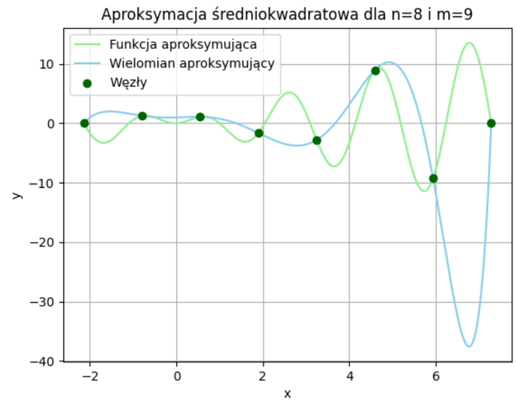


d) $m = 6$.

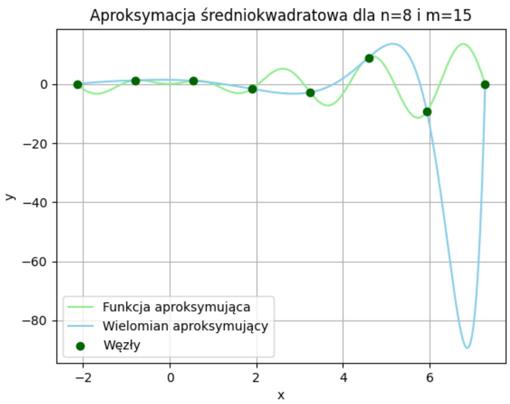
Rysunek 4: Porównanie wykresów aprokszymacji $n = 5$ dla $m <= 6$



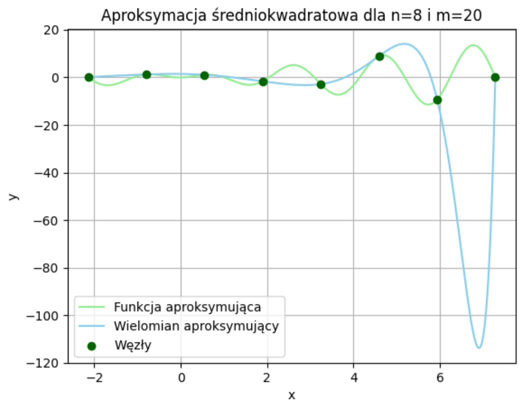
a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



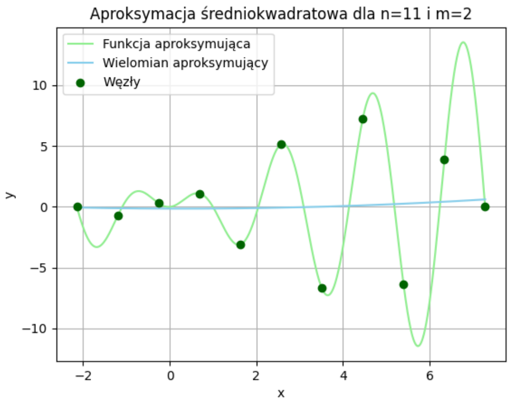
c) $m = 15$.



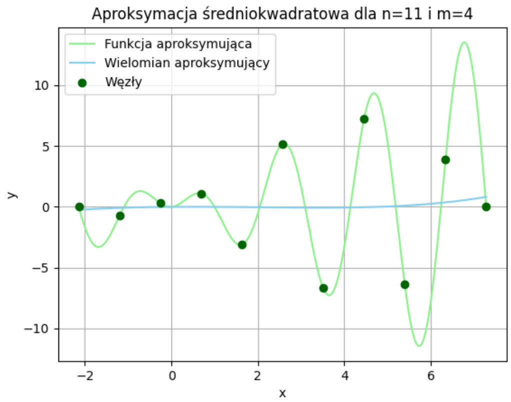
d) $m = 20$.

Rysunek 5: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 11$ dla $m > 6$

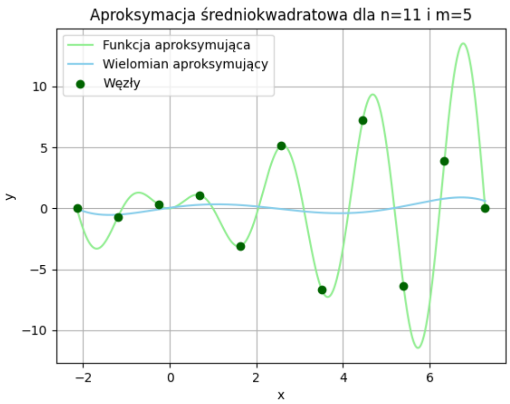
3.2.3 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 11$



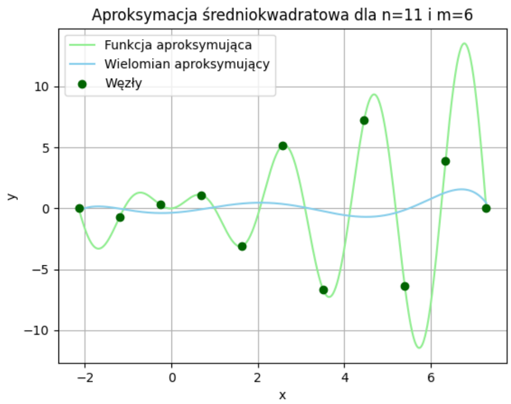
a) $m = 2$.



b) $m = 4$.

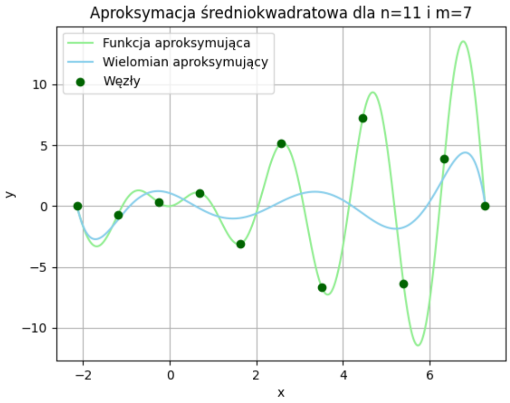


c) $m = 5$.

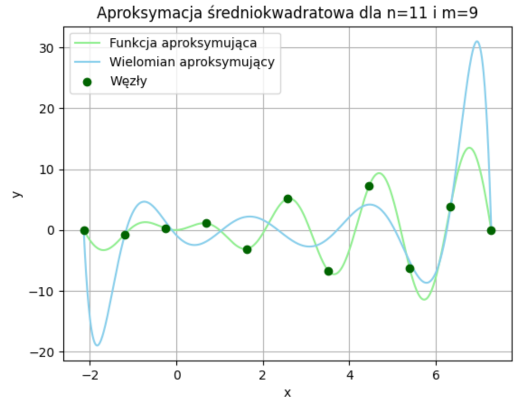


d) $m = 6$.

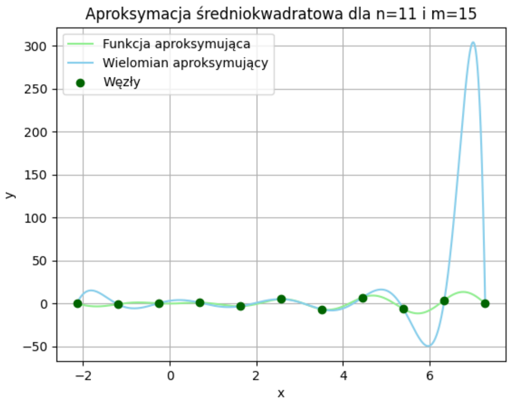
Rysunek 6: Porównanie wykresów aprokszymacji $n = 11$ dla $m <= 6$



a) $m = 7$.



b) $m = 9$.

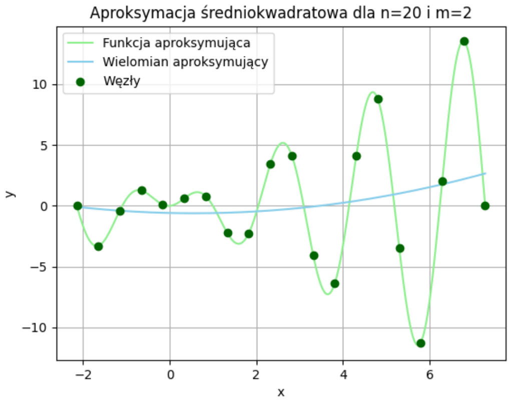


c) $m = 15$.

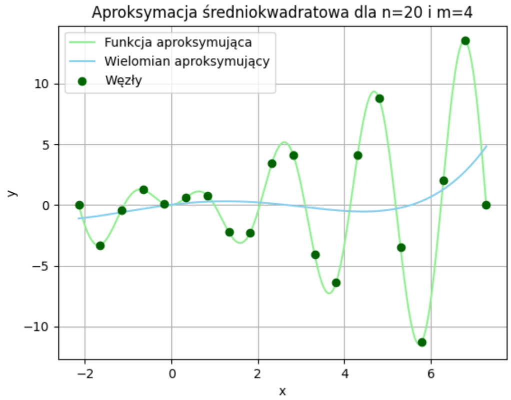
d) $m = 20$.

Rysunek 7: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 11$ dla $m > 6$

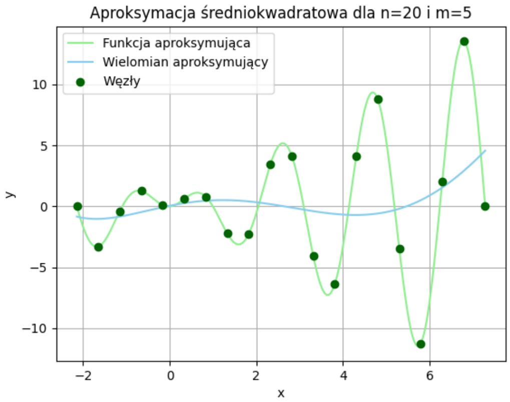
3.2.4 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 20$



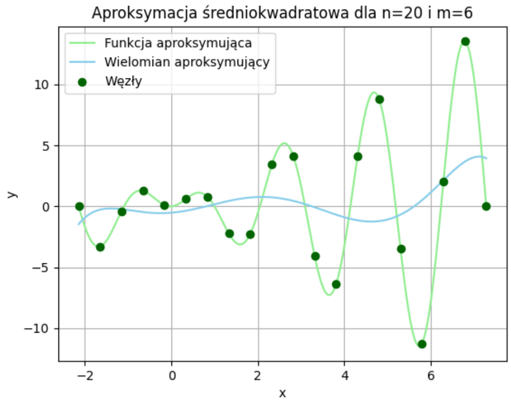
a) $m = 2$.



b) $m = 4$.

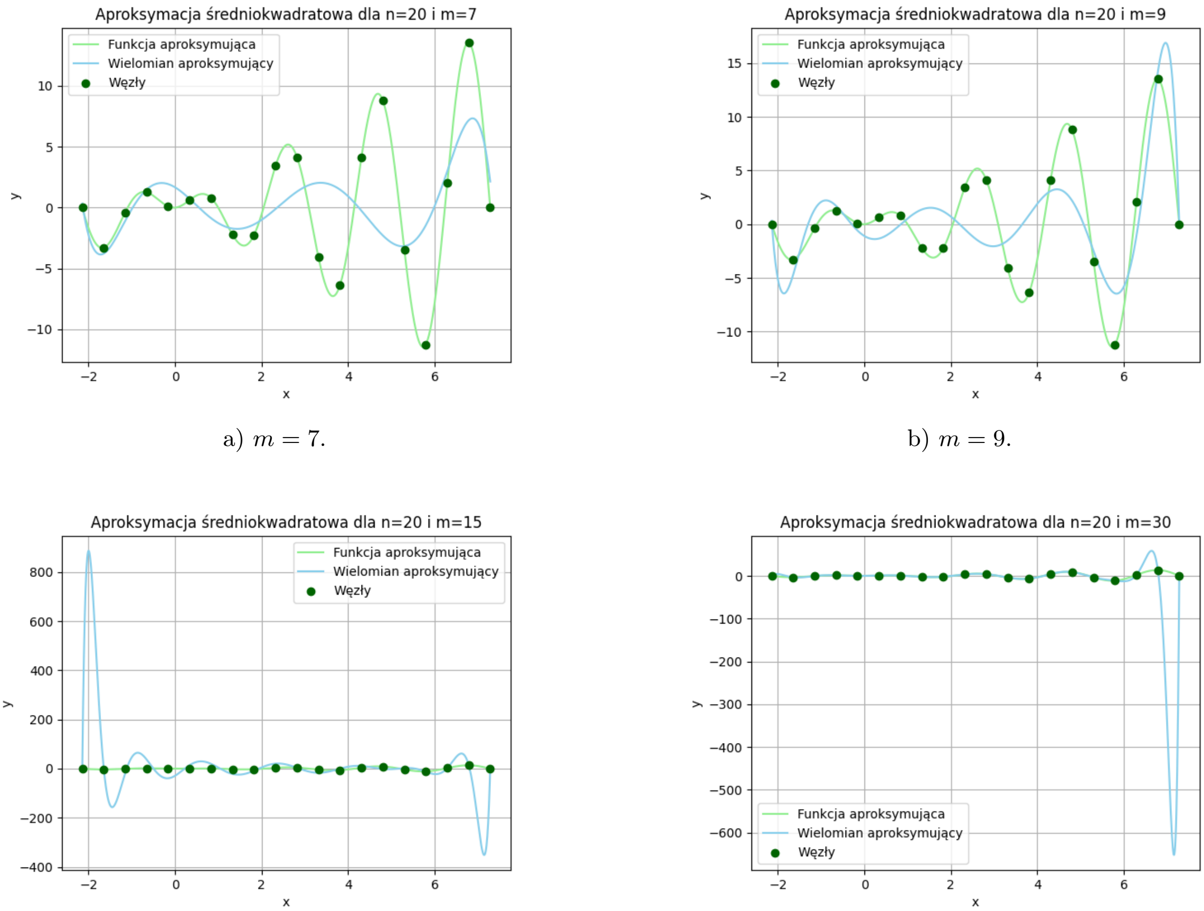


c) $m = 5$.



d) $m = 6$.

Rysunek 8: orównanie wykresów aprokszymacji $n = 20$ dla $m <= 6$



a) $m = 7$.

b) $m = 9$.

c) $m = 15$.

d) $m = 30$.

Rysunek 9: orównanie wykresów aprokszymacji $n = 20$ dla $m > 6$

4 Wnioski

- **Dokładność przybliżeń:**
  - Jak pokazują **Tabela ??** i **Tabela ??**, zarówno dla węzłów Czebyszewa, jak i węzłów rozłożonych równomiernie, dokładność przybliżenia wzrasta wraz ze zwiększaniem liczby węzłów n.
  - Jednakże, przy bardzo dużych wartościach n, w obu przypadkach pojawiają się błędy arytmetyczne, co ogranicza dalszą poprawę dokładności (widoczne w **Tabeli ??**, **Tabeli ??**, **Tabeli ??** i **Tabeli ??**).
  - Dla węzłów równomiernie rozłożonych, w pewnych przypadkach występuje efekt Rungego, który negatywnie wpływa na dokładność interpolacji, co jest widoczne na **Rysunku ??** c) dla $n = 11$ oraz **Rysunku ??** ?? dla $n = 7$.
- **Zagadnienie msa'a a Hermita:**
  - Zastosowanie interpolacji Hermita pozwala na osiągnięcie większej dokładności obliczeń, co jest widoczne na przykładzie porównania **Tabela ??** i **Tabeli ??** dla niewielkich wartości n.
  - Znając pochodną funkcji interpolowanej, zaleca się stosowanie węzłów drugiego stopnia w celu uzyskania lepszej dokładności interpolacji.
  - W metodach msa'a i , błędy arytmetyki komputerowej, pojawiają się przy znacząco większym n (**Rysunek** 9 ?? i **Rysunek ??** ??), w porównaniu do metody Hermita. Tak więc przy dużych wartościach n w metodzie Hermita należy rozważyć zmniejszenie liczby węzłów, aby ograniczyć błędy, takie jak ilustruje **Rysunek ??** ?? dla $n = 34$.
- **Najlepsze przybliżenie:**

- Węzły Czebyszewa generalnie polepszają jakość przybliżenia, minimalizując efekt Rungego, co jest widoczne na porównaniu **Rysunku ?? ??** dla $n = 11$ i **Rysunku ?? ??** dla $n = 7$.
- Optymalna liczba węzłów n zależy od interpolowanej funkcji, ale jak sugerują wyniki zawarte w **Tabeli ??** i **Tabeli ??**, dla węzłów Czebyszewa, wartości n w zakresie 15-40 dają zazwyczaj najlepsze przybliżenia.