

# Sprawozdanie nr 1

## Zagadnienie Lagrange’a i Hermita

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

17.04.2025

## 1 Wprowadzenie

### 1.1 Treść ćwiczenia

Dla poniższej funkcji wyznacz dla zagadnienia Lagrange’a i Hermita wielomian interpolujący funkcji:

$$f(x) = -2x \sin(3x - 3)$$

dla  $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$ .

### 1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

## 2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory dla zagadnienia Lagrange’a i Hermita. Dla pierwszego zagadnienia użyto wzory na wartości interpolacji Lagrange’a i Newtona, natomiast dla drugiego skorzystano ze wzoru Newtona. Do obliczeń użyto  $N = 1000$  punktów na przedziale  $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$ , zarówno dla funkcji interpolowanej oraz wielomianu interpolującego. Pochodną funkcji wyliczono i wynosi ona:

$$f'(x) = -6x \cos(3 - 3x) + 2 \sin(3 - 3x)$$

Wyznaczono węzły interpolacyjne, rozmieszczone równomiernie lub według pierwiastków wielomianu Czebyszewa. Dla zagadnienia Hermita wszystkie węzły są krotności 2. W eksperymentach przyjęto liczbę węzłów  $n$  z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 200\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P} (f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$  oznacza wartość funkcji interpolowanej w punkcie  $x$ .
- $w(x)$  oznacza wartość wielomianu interpolującego w punkcie  $x$ .
- $P$  jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.
- $|P|$  oznacza moc zbioru  $P$ .

Na podstawie uzyskanych wyników, sporządzono wykresy, porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

### 3 Wyniki i analiza

#### 3.1 Błędy

##### 3.1.1 Tabele błędów i ich analiza dla węzłów rozmieszczonych równomiernie

Tabela 1: Zestawienie błędów dla wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a i Newtona przy niewielkiej liczbie węzłów.

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$2.030\,25 \times 10^1$	2.495 03
3	$2.142\,33 \times 10^1$	3.057 94
4	$2.030\,25 \times 10^1$	2.495 03
5	$2.592\,19 \times 10^1$	3.220 03
6	$2.474\,27 \times 10^1$	3.247 10
7	$3.325\,32 \times 10^1$	3.744 18
8	$6.465\,98 \times 10^1$	5.875 89
9	$1.012\,40 \times 10^2$	9.278 47
15	$2.390\,97 \times 10^2$	1.317 44
20	$1.514\,71 \times 10^2$	3.193 58
25	5.149 63	1.044 81
30	$9.142\,33 \times 10^{-2}$	1.533 79

Tabela 2: Zestawienie błędów dla wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a i Newtona przy większej liczbie węzłów

Liczba węzłów	Błąd maks. (Newton)	Błąd maks. (Lagrange)	Błąd średni (Newton)	Błąd średni (Lagrange)
31	$3.832\,04 \times 10^{-2}$	$3.832\,05 \times 10^{-2}$	$6.542\,27 \times 10^{-5}$	$6.542\,26 \times 10^{-5}$
32	$1.246\,09 \times 10^{-2}$	$1.246\,08 \times 10^{-2}$	$2.050\,28 \times 10^{-5}$	$2.050\,27 \times 10^{-5}$
33	$5.351\,50 \times 10^{-3}$	$5.352\,03 \times 10^{-3}$	$8.889\,20 \times 10^{-6}$	$8.890\,12 \times 10^{-6}$
34	$1.481\,62 \times 10^{-3}$	$1.481\,48 \times 10^{-3}$	$2.397\,17 \times 10^{-6}$	$2.396\,95 \times 10^{-6}$
35	$6.486\,45 \times 10^{-4}$	$6.479\,71 \times 10^{-4}$	$1.054\,55 \times 10^{-6}$	$1.053\,22 \times 10^{-6}$
40	$2.335\,52 \times 10^{-6}$	$3.695\,90 \times 10^{-5}$	$4.129\,61 \times 10^{-9}$	$5.920\,29 \times 10^{-8}$
45	$3.686\,50 \times 10^{-4}$	$1.192\,37 \times 10^{-3}$	$5.580\,59 \times 10^{-7}$	$1.736\,37 \times 10^{-6}$
50	$5.153\,37 \times 10^{-3}$	$1.237\,35 \times 10^{-1}$	$7.613\,29 \times 10^{-6}$	$1.968\,74 \times 10^{-4}$
55	1.170 90	1.794 10	$1.686\,60 \times 10^{-3}$	$2.390\,49 \times 10^{-3}$
60	$5.703\,95 \times 10^1$	$3.845\,46 \times 10^1$	$8.036\,46 \times 10^{-2}$	$5.136\,96 \times 10^{-2}$
70	$1.555\,74 \times 10^4$	$9.775\,02 \times 10^4$	$2.105\,64 \times 10^1$	$1.102\,10 \times 10^2$
80	$1.039\,55 \times 10^8$	$2.404\,38 \times 10^8$	$1.361\,16 \times 10^{51}$	$3.707\,17 \times 10^5$
		...		
180	$1.022\,54 \times 10^{53}$	$2.304\,26 \times 10^{41}$	$1.372\,06 \times 10^{50}$	$2.536\,46 \times 10^{38}$
190	$4.648\,38 \times 10^{57}$	$3.200\,22 \times 10^{44}$	$7.819\,82 \times 10^{54}$	$3.345\,44 \times 10^{41}$
200	$9.831\,86 \times 10^{61}$	$9.734\,46 \times 10^{47}$	$1.386\,52 \times 10^{59}$	$1.056\,93 \times 10^{45}$

Z tabeli 1 wynika, że dla początkowych liczb węzłów obserwujemy zmniejszanie się błędu wraz z ich wzrostem. Od 7 węzła pojawia się zjawisko zwane efektem Rungego, polegające na pogorszeniu jakości interpolacji. Utrzymuje się ono do około 15 węzła, poczym stopniowo zanika. W tabeli 2 zauważono, że od około 40. węzła, błąd ponownie wzrasta, co jest spowodowane kumulacją błędów arytmetycznych. Dodatkowo dostrzeżono, że metoda Lagrange’a jest dokładniejsza niż metoda Newtona, szczególnie dla dużej liczby węzłów.

Tabela 3: Zestawienie błędów dla metody Hermita

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$5.702\,41 \times 10^1$	1.026 46
3	$3.500\,10 \times 10^1$	$3.915\,34 \times 10^{-1}$
4	$4.968\,40 \times 10^1$	$5.508\,71 \times 10^{-1}$
5	$2.351\,98 \times 10^1$	$2.783\,99 \times 10^{-1}$
6	$6.455\,17 \times 10^1$	$5.804\,41 \times 10^{-1}$
7	$9.517\,59 \times 10^1$	$7.445\,06 \times 10^{-1}$
8	$6.611\,24 \times 10^1$	$4.720\,44 \times 10^{-1}$
9	$2.994\,89 \times 10^1$	$1.994\,35 \times 10^{-1}$
10	$1.078\,43 \times 10^1$	$6.299\,24 \times 10^{-2}$
11	3.979 10	$1.590\,66 \times 10^{-2}$
12	1.150 37	$3.369\,82 \times 10^{-3}$
13	$2.693\,34 \times 10^{-1}$	$6.205\,29 \times 10^{-4}$
14	$5.232\,46 \times 10^{-2}$	$1.014\,58 \times 10^{-4}$
15	$8.594\,65 \times 10^{-3}$	$1.484\,14 \times 10^{-5}$
20	$5.907\,73 \times 10^{-7}$	$1.472\,04 \times 10^{-9}$
25	$4.827\,88 \times 10^{-4}$	$6.592\,22 \times 10^{-7}$
30	$6.738\,63 \times 10^{-1}$	$8.901\,29 \times 10^{-4}$
35	$2.446\,19 \times 10^1$	$3.146\,71 \times 10^{-2}$
40	$8.051\,89 \times 10^5$	$1.009\,10 \times 10^3$
45	$9.527\,65 \times 10^8$	$2.617\,42 \times 10^6$
50	$1.010\,86 \times 10^{13}$	$2.499\,28 \times 10^{10}$
55	$1.664\,61 \times 10^{19}$	$3.262\,22 \times 10^{16}$
60	$3.362\,55 \times 10^{23}$	$4.996\,76 \times 10^{20}$
70	$2.934\,00 \times 10^{32}$	$5.242\,75 \times 10^{29}$
...		
170	$7.383\,46 \times 10^{127}$	$7.928\,47 \times 10^{124}$
180	$1.892\,94 \times 10^{138}$	$2.304\,04 \times 10^{135}$
190	$6.409\,96 \times 10^{147}$	$8.923\,10 \times 10^{144}$
200	$2.858\,14 \times 10^{157}$	inf

Podobnie, w tabeli 3 dla początkowych liczb węzłów obserwujemy zmniejszanie się błędu wraz z ich wzrostem. Jednak w węzle 6. i 7. następuje pogorszenie jakości interpolacji. Następnie, aż do około  $n = 20$ , dokładność ulega poprawie. W wyniku kumulacji błędów arytmetycznych, przy większej liczbie węzłów, dokładność interpolacji spada.

### 3.1.2 Tabele błędów i ich analiza dla węzłów rozmieszczonych w zerach Czebyszewa

Tabela 4: Zestawienie błędów dla wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a i Newtona przy niewielkiej liczbie węzłów.

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$3.741\,55 \times 10^1$	$4.278\,47 \times 10^{-1}$
3	$3.365\,30 \times 10^1$	$3.872\,07 \times 10^{-1}$
4	$3.001\,47 \times 10^1$	$3.278\,86 \times 10^{-1}$
5	$3.160\,53 \times 10^1$	$2.819\,27 \times 10^{-1}$
6	$2.863\,45 \times 10^1$	$3.487\,06 \times 10^{-1}$
7	$2.423\,52 \times 10^1$	$3.342\,34 \times 10^{-1}$
8	$2.415\,36 \times 10^1$	$2.940\,79 \times 10^{-1}$
9	$2.412\,71 \times 10^1$	$2.752\,71 \times 10^{-1}$
10	$3.870\,42 \times 10^1$	$2.454\,40 \times 10^{-1}$
15	$1.356\,24 \times 10^1$	$6.911\,49 \times 10^{-2}$
20	3.167 72	$5.531\,52 \times 10^{-3}$
25	$3.269\,07 \times 10^{-2}$	$5.279\,33 \times 10^{-5}$
30	$2.038\,76 \times 10^{-4}$	$2.965\,64 \times 10^{-7}$

Tabela 5: Zestawienie błędów dla wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a i Newtona przy większej liczbie węzłów

Liczba węzłów	Błąd maks. (Newton)	Błąd maks. (Lagrange)	Błąd średni (Newton)	Błąd średni (Lagrange)
31	$3.832\,04 \times 10^{-2}$	$3.832\,05 \times 10^{-2}$	$6.542\,27 \times 10^{-5}$	$6.542\,26 \times 10^{-5}$
32	$1.246\,09 \times 10^{-2}$	$1.246\,08 \times 10^{-2}$	$2.050\,28 \times 10^{-5}$	$2.050\,27 \times 10^{-5}$
33	$5.351\,50 \times 10^{-3}$	$5.352\,03 \times 10^{-3}$	$8.889\,20 \times 10^{-6}$	$8.890\,12 \times 10^{-6}$
34	$1.481\,62 \times 10^{-3}$	$1.481\,48 \times 10^{-3}$	$2.397\,17 \times 10^{-6}$	$2.396\,95 \times 10^{-6}$
35	$6.486\,45 \times 10^{-4}$	$6.479\,71 \times 10^{-4}$	$1.054\,55 \times 10^{-6}$	$1.053\,22 \times 10^{-6}$
40	$2.335\,52 \times 10^{-6}$	$3.695\,90 \times 10^{-5}$	$4.129\,61 \times 10^{-9}$	$5.920\,29 \times 10^{-8}$
45	$3.686\,50 \times 10^{-4}$	$1.192\,37 \times 10^{-3}$	$5.580\,59 \times 10^{-7}$	$1.736\,37 \times 10^{-6}$
50	$5.153\,37 \times 10^{-3}$	$1.237\,35 \times 10^{-1}$	$7.613\,29 \times 10^{-6}$	$1.968\,74 \times 10^{-4}$
55	1.170 90	1.794 10	$1.686\,60 \times 10^{-3}$	$2.390\,49 \times 10^{-3}$
60	$5.703\,95 \times 10^1$	$3.845\,46 \times 10^1$	$8.036\,46 \times 10^{-2}$	$5.136\,96 \times 10^{-2}$
70	$1.461\,62 \times 10^2$	$2.748\,75 \times 10^{-9}$	$3.242\,68 \times 10^{-1}$	$2.884\,85 \times 10^{-12}$
80	$8.247\,34 \times 10^8$	$5.648\,44 \times 10^{-8}$	$1.495\,11 \times 10^6$	$6.292\,32 \times 10^{-11}$
180	$5.050\,08 \times 10^{58}$	$4.403\,79 \times 10^1$	$1.056\,01 \times 10^{56}$	$4.422\,07 \times 10^{-2}$
190	$1.493\,37 \times 10^{63}$	$2.104\,26 \times 10^2$	$2.345\,89 \times 10^{60}$	$2.118\,31 \times 10^{-1}$
200	$1.919\,32 \times 10^{68}$	$2.680\,20 \times 10^2$	$3.445\,46 \times 10^{65}$	$2.684\,66 \times 10^{-1}$

W Tabeli 4 dla początkowych liczb węzłów obserwujemy zmniejszanie się błędu wraz z ich wzrostem. Nie pojawia się efekt Rungego - dokładność obliczeń ciągle się poprawia. W Tabeli 5 zauważono, że od około 40. węzła, błąd zaczyna wzrastać. Również dla takiego rozmieszczenia węzłów jest widoczne, że metoda Lagrange’a jest dokładniejsza, szczególnie przy dużej ich liczbie w porównaniu do metody Newtona.

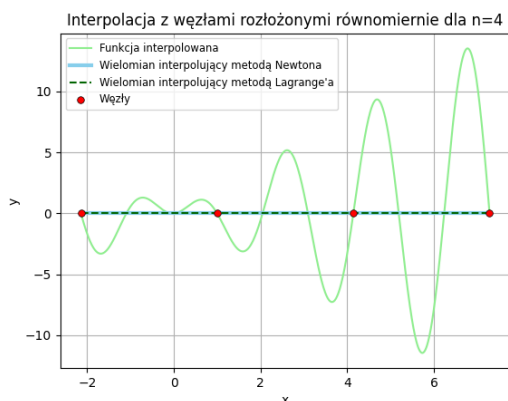
Tabela 6: Zestawienie błędów dla metody Hermita

Liczba węzłów	Błąd maksymalny	Błąd średni
2	$3.530\,54 \times 10^1$	$4.699\,93 \times 10^{-1}$
3	$3.407\,32 \times 10^1$	$2.444\,82 \times 10^{-1}$
4	$3.904\,68 \times 10^1$	$4.180\,67 \times 10^{-1}$
5	$3.160\,99 \times 10^1$	$2.600\,44 \times 10^{-1}$
6	$1.804\,86 \times 10^1$	$2.204\,21 \times 10^{-1}$
7	$2.246\,80 \times 10^1$	$1.327\,65 \times 10^{-1}$
8	$1.740\,98 \times 10^1$	$5.470\,08 \times 10^{-2}$
9	7.438 10	$1.693\,59 \times 10^{-2}$
10	2.180 89	$4.155\,67 \times 10^{-3}$
11	$4.793\,25 \times 10^{-1}$	$8.249\,63 \times 10^{-4}$
12	$8.297\,47 \times 10^{-2}$	$1.341\,38 \times 10^{-4}$
13	$1.168\,74 \times 10^{-2}$	$1.810\,26 \times 10^{-5}$
14	$1.371\,38 \times 10^{-3}$	$2.056\,39 \times 10^{-6}$
15	$1.364\,86 \times 10^{-4}$	$1.992\,99 \times 10^{-7}$
20	$2.006\,40 \times 10^{-6}$	$6.065\,21 \times 10^{-9}$
25	$1.015\,39 \times 10^{-5}$	$2.319\,17 \times 10^{-8}$
30	$7.185\,14 \times 10^{-3}$	$1.635\,54 \times 10^{-5}$
35	$7.443\,79 \times 10^1$	$1.618\,65 \times 10^{-1}$
40	$2.532\,73 \times 10^7$	$5.244\,85 \times 10^4$
45	$4.076\,11 \times 10^{10}$	$1.036\,85 \times 10^8$
50	$3.854\,52 \times 10^{17}$	$6.216\,65 \times 10^{14}$
55	$2.882\,25 \times 10^{22}$	$5.161\,46 \times 10^{19}$
60	$1.434\,96 \times 10^{27}$	$2.394\,58 \times 10^{24}$
70	$7.935\,23 \times 10^{36}$	$1.725\,14 \times 10^{34}$
150	$1.024\,09 \times 10^{118}$	$1.164\,79 \times 10^{115}$
160	$7.721\,30 \times 10^{127}$	$1.376\,29 \times 10^{125}$
170	$2.154\,88 \times 10^{137}$	$3.211\,09 \times 10^{134}$

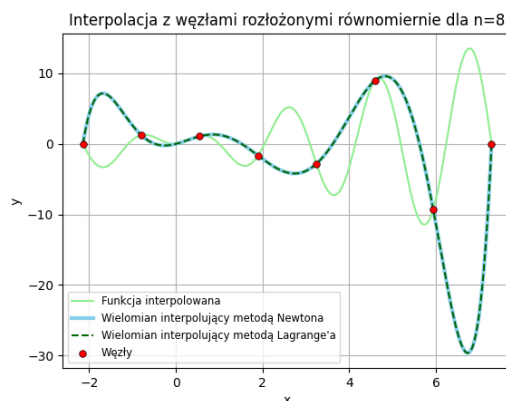
W Tabeli 6 względu na inne rozmieszczenie węzłów, błędy dla początkowych wartości  $n$  są mniejsze w porównaniu do Tabeli 3. Błędy wynikające z kumulacji arytmetycznej pojawiają się w około 20. węźle.

## 3.2 Wizualizacje

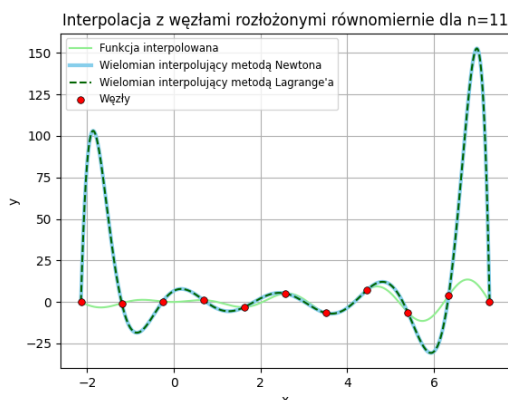
### 3.2.1 Wykresy dla metod interpolacji Lagrange'a i Newtona przy węzłach rozłożonych równomiernie



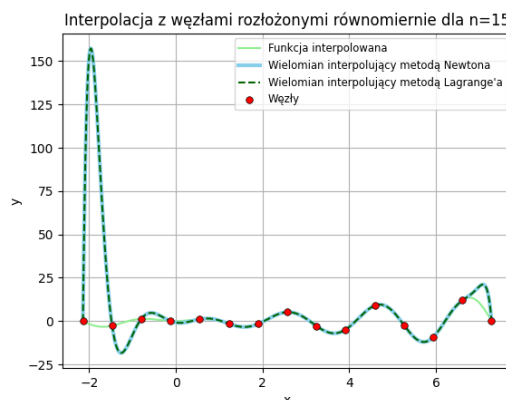
a) Przyjmowanie wartości zero przez wielomiany interpolujące dla  $n = 4$ .



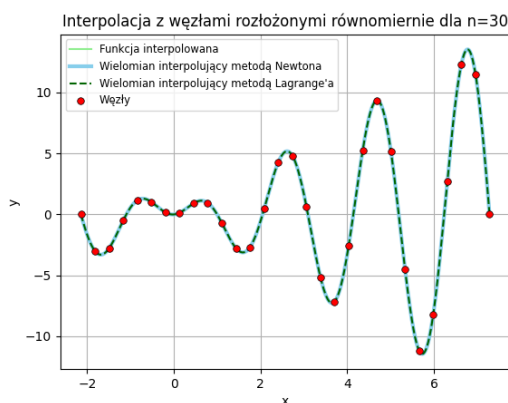
b) Pojawienie się pierwszego większego odchylenia na krańcach dla wielomianu interpolującego przy  $n = 8$ .



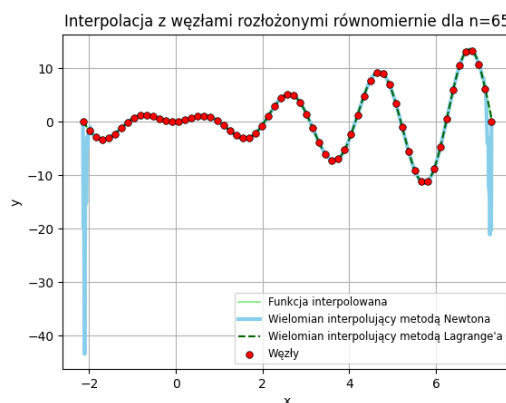
c) Efekt Rungego dla obu metod interpolacji przy  $n = 11$ .



d) Zanikanie efektu Rungego dla interpolacji przy  $n = 15$ .



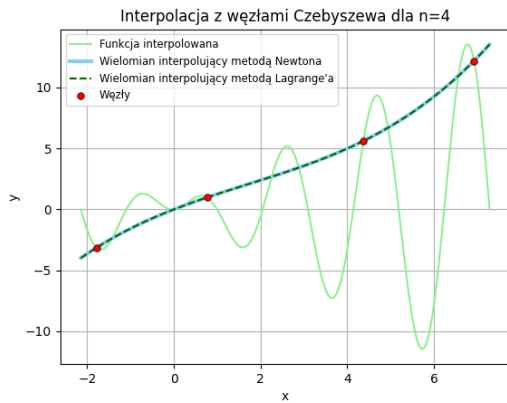
e) Dokładne dopasowanie interpolacji do funkcji interpolowanej dla  $n = 30$ .



f) Kumulacja błędów arytmetycznych powoduje pogorszenie jakości interpolacji dla  $n = 65$ .

Rysunek 1: Porównanie wykresów dla metod interpolacji Lagrange'a i Newtona z węzłami rozmieszczonymi równomiernie przy  $n \in \{4, 8, 11, 15, 30, 65\}$

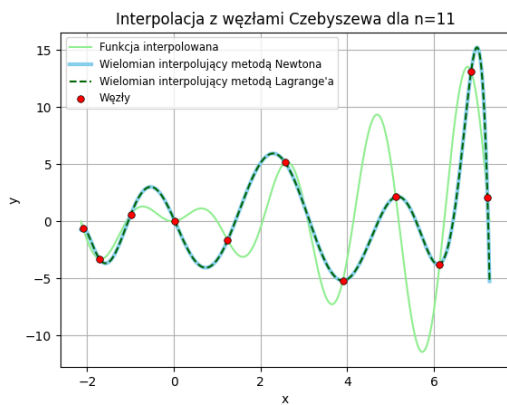
### 3.2.2 Wykresy dla metod interpolacji Lagrange'a i Newtona przy węzłach rozłożonych w zerach Czebyszewa



a) Początkowe przybliżenie wartości funkcji przez wielomiany interpolacyjne dla  $n = 4$ .



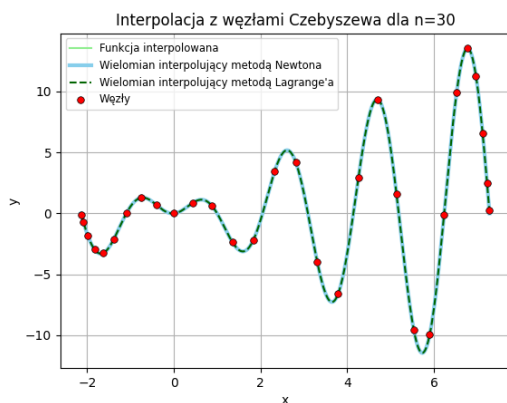
b) Poprawa dokładności przy użyciu węzłów Czebyszewa dla  $n = 8$ .



c) Brak efektu Rungego przy  $n = 11$  dzięki węzłom Czebyszewa.



d) Utrzymanie stabilności interpolacji dla  $n = 15$ .



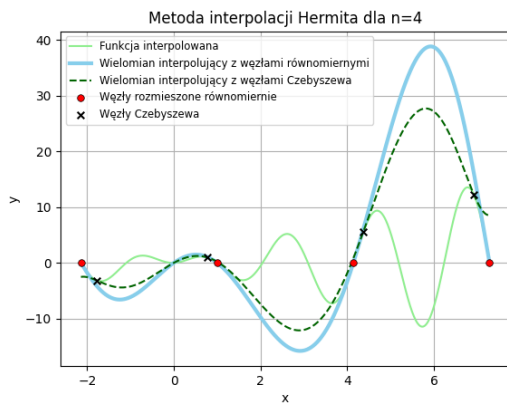
e) Dokładne dopasowanie interpolacji dla  $n = 30$ .



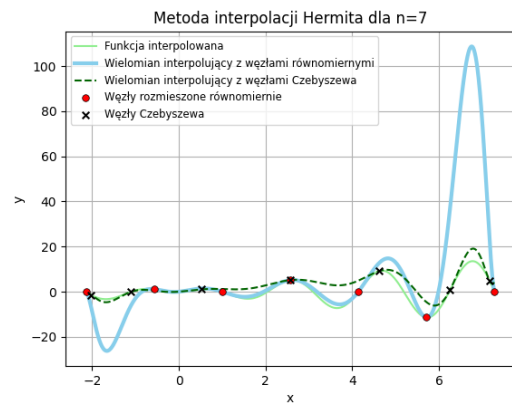
f) Pojawienie się błędów arytmetyki komputerowej dla  $n = 65$ .

Rysunek 2: Porównanie wykresów dla metod interpolacji Lagrange'a i Newtona z węzłami Czebyszewa przy  $n \in \{4, 8, 11, 15, 30, 65\}$ .

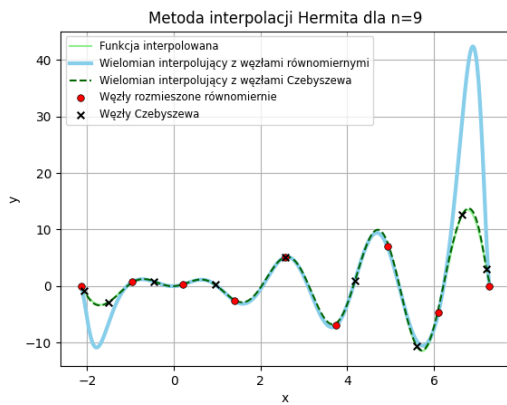
### 3.2.3 Wykresy dla metody interpolacji Hermita przy węzłach Czebyszewa oraz rozłożonych równomiernie



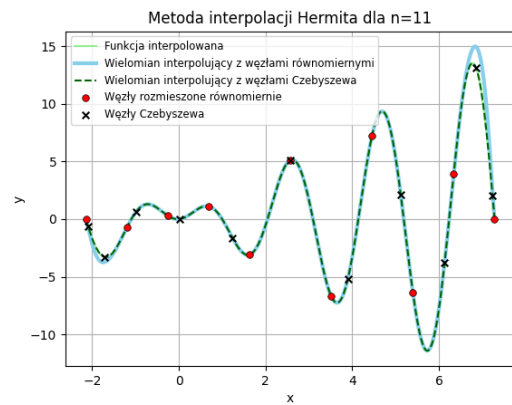
a) Początkowe dobre dopasowanie interpolacji do wykresu funkcji dla  $n = 4$ .



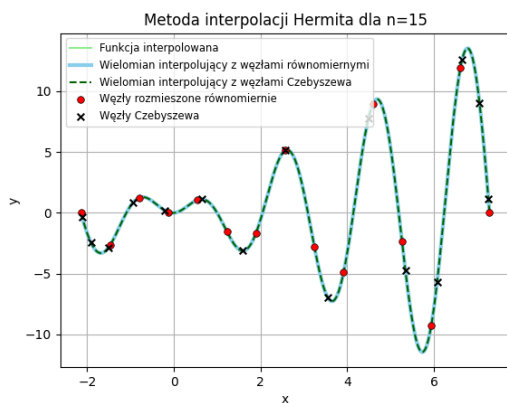
b) Pogorszenie jakości interpolacji wykresu funkcji przy węzłach rozmieszczonych równomiernie; brak efektu Rungego dla węzłów Czebyszewa,  $n = 7$ .



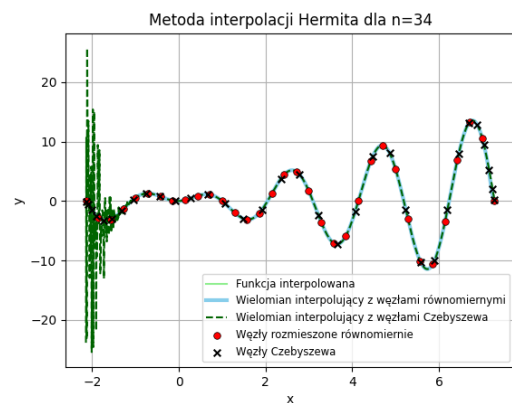
c) Zanik efektu Rungego dla węzłów równomiernych; bardzo dobre dopasowanie dla węzłów Czebyszewa,  $n = 9$ .



d) Dla węzłów rozłożonych równomiernie błąd staje się pomijalny,  $n = 11$ .



e) Dokładne dopasowanie do funkcji przez oba wielomiany interpolujące dla  $n = 15$ .



f) Znaczne pogorszenie interpolacji przy  $n = 34$  z powodu kumulacji błędów arytmetycznych.

Rysunek 3: Porównanie wykresów dla metody interpolacji Hermita przy  $n \in \{4, 7, 9, 11, 15, 34\}$

## 4 Wnioski

- **Dokładność przybliżeń:**

- Jak pokazują **Tabela 3** i **Tabela 6**, zarówno dla węzłów Czebyszewa, jak i węzłów rozłożonych równomiernie, dokładność przybliżenia wzrasta wraz ze zwiększaniem liczby węzłów  $n$ .
- Jednakże, przy bardzo dużych wartościach  $n$ , w obu przypadkach pojawiają się błędy arytmetyczne, co ogranicza dalszą poprawę dokładności (widoczne w **Tabeli 2**, **Tabeli 3**, **Tabeli 5** i **Tabeli 6**).
- Dla węzłów równomiernie rozłożonych, w pewnych przypadkach występuje efekt Rungego, który negatywnie wpływa na dokładność interpolacji, co jest widoczne na **Rysunku 2 c)** dla  $n = 11$  oraz **Rysunku 3 b)** dla  $n = 7$ .

- **Zagadnienie Lagrange’a a Hermita:**

- Zastosowanie interpolacji Hermita pozwala na osiągnięcie większej dokładności obliczeń, co jest widoczne na przykładzie porównania **Tabela 3** i **Tabeli 6** dla niewielkich wartości  $n$ .
- Znając pochodną funkcji interpolowanej, zaleca się stosowanie węzłów drugiego stopnia w celu uzyskania lepszej dokładności interpolacji.
- W metodach Lagrange’a i Newtona, błędy arytmetyki komputerowej, pojawiają się przy znacząco większym  $n$  (**Rysunek 1 f)** i **Rysunek 2 f)**), w porównaniu do metody Hermita. Tak więc przy dużych wartościach  $n$  w metodzie Hermita należy rozważyć zmniejszenie liczby węzłów, aby ograniczyć błędy, takie jak ilustruje **Rysunek 3 f)** dla  $n = 34$ .

- **Najlepsze przybliżenie:**

- Węzły Czebyszewa generalnie polepszają jakość przybliżenia, minimalizując efekt Rungego, co jest widoczne na porównaniu **Rysunku 2 c)** dla  $n = 11$  i **Rysunku 3 b)** dla  $n = 7$ .
- Optymalna liczba węzłów  $n$  zależy od interpolowanej funkcji, ale jak sugerują wyniki zawarte w **Tabeli 4** i **Tabeli 5**, dla węzłów Czebyszewa, wartości  $n$  w zakresie 15-40 dają zazwyczaj najlepsze przybliżenia.