Rozwiązywanie równań i układów równań nieliniowych cz. II

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

22.05.2025

1 Wprowadzenie

1.1 Zagadnienie

Celem ćwiczenia jest analiza stabilności numerycznej rozwiązywania układów równań liniowych metodą eliminacji Gaussa. W tym celu zostało przeprowadzone porównanie wyników otrzymanych dla różnych macierzy, z wykorzystaniem normy maksimum i wskaźnika uwarunkowania macierzy.

1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki numpy. Do inwersji macierzy zastosowano funkcje linalg.inv, a do liczenia iloczynów macierzy np.dot.

Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu zaimplementowano macierze kwadratowe A o rozmiarach nxn, według podanych wzorów:

Wzór dla zadania 1:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{1}{i+j-1} & dla\ i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Wzór dla zadania 2:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{2i}{j} & dla\ j \geq i \\ a_{ji} & dla\ j < i \end{cases} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Zmienna n w obliczeniach przyjmowała następujące zakresy wartości:

- $n \in \{1, 2, .., 20\}$, dla wzoru z zadania 1
- $n \in \{1, 2, .., 20, 30, 50, 80, 100, 200\}$, dla wzoru z zadania 2

Następnie dla każdego n wyliczono wektor x jako dowolną n-elementową permutację ze zbioru $\{1, -1\}$, według powyższych wzorów utworzono macierz A, obliczono wektor b jako iloczyn A i x. Otrzymane b wraz z macierzą A, wykorzystano do obliczenia metodą Gaussa wektora y

Aby sprawdzić zaburzenia rozwiązań układów, porównano oba wektory x i y (*zadany* i *otrzymany*) za pomocą normy maksimum:

$$\sigma(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - y_i|\}$$

gdzie:

- x_i – i-ta współrzędna zadanego wektora $\mathbf{x}$
- y_i – i-ta współrzędna obliczonego wektora $\mathbf{y}$

Do oceny wrażliwości rozwiązania układu na małe zaburzenia w danych wejściowych wykorzystano **współczynnik uwarunkowania**. Mówi on, jak bardzo błędy zaokrągleń w obliczeniach komputerowych mogą zostać "wzmocnione"i wpłynąć na dokładność uzyskanego rozwiązania. Jeśli jest on bliski 1, to oznacza, że jest dobrze uwarunkowany i jest mało podatny na błędy. W przypadku, gdy jest on duży, to macierz jest nazywana źle uwarunkowaną, więc nawet małe błędy w danych mogą pogorszyć znacznie wyniki. Współczynnik można dostać z macierzy A na podstawie wzoru:

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

Przyjęto normę wzorem:

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

gdzie:

- A – macierz kwadratowa
- n – rozmiar macierzy
- $a_{i,j}$ – element macierzy o współrzędnych i, j

Przeprowadzono eksperymenty dla dwóch różnych precyzji liczbowych: float i double. Wyniki przedstawiono w tabelach.

2.1 Wyniki w tabelach błędów

Tabela 1: Błędy dla układu 1 w zależności od wielkości macierzy A, precyzje float32

n	$\kappa(A)$	$\sigma(x,y)$
2	1.80×10^{1}	1.79×10^{-7}
3	8.64×10^{2}	1.79×10^{-7}
4	3.79×10^{4}	3.07×10^{-4}
5	1.44×10^{6}	2.02×10^{-3}
6	5.79×10^{7}	2.83×10^{-2}
7	4.27×10^{9}	1.55×10^{0}
8	1.03×10^{10}	5.79×10^{0}
9	3.23×10^{10}	1.88×10^{1}
10	1.55×10^{10}	1.11×10^{0}
11	9.65×10^{9}	6.76×10^{0}
12	1.26×10^{10}	3.68×10^{0}
13	2.53×10^{10}	3.29×10^{0}
14	1.84×10^{10}	7.97×10^{0}
15	4.36×10^{10}	9.01×10^{0}
16	6.39×10^{10}	1.65×10^{1}
17	1.06×10^{11}	6.00×10^{1}
18	7.65×10^{10}	2.41×10^{1}
19	8.81×10^{10}	4.14×10^{1}
20	1.71×10^{11}	3.91×10^{1}

Tabela 2: Błędy dla układu 1 w zależności od wielkości macierzy A, precyzja float64

n	$\kappa(A)$	$\sigma(x,y)$
2	1.80×10^{1}	2.22×10^{-16}
3	8.64×10^{2}	2.71×10^{-14}
4	3.79×10^{4}	2.44×10^{-13}
5	1.44×10^{6}	4.85×10^{-12}
6	5.63×10^{7}	2.93×10^{-12}
7	2.23×10^{9}	6.08×10^{-9}
8	8.16×10^{10}	6.80×10^{-9}
9	2.84×10^{12}	3.67×10^{-6}
10	1.09×10^{14}	5.23×10^{-5}
11	3.95×10^{15}	4.50×10^{-3}
12	1.36×10^{17}	8.66×10^{-2}
13	2.73×10^{18}	8.99×10^{0}
14	2.75×10^{18}	1.38×10^{0}
15	1.04×10^{19}	3.50×10^{0}
16	2.90×10^{18}	2.33×10^{0}
17	1.35×10^{19}	6.73×10^{0}
18	6.56×10^{19}	1.72×10^{1}
19	∞	4.70×10^{1}
20	1.26×10^{19}	1.21×10^{1}

Powższe tabele pokazują, że dla układu 1 niezależnie od precyzji, wraz ze wzrostem n wykładniczo rośnie wartość uwarunkowania, co oznacza,że układ jest źle uwarunkowany. Od około $n = 7$ zauważono wysoką wartość normy maksimum w tabeli 1, oznacza, że rozwiązanie układu równań znacznie odbiega od oczekiwanego. Dla precyzji typu double taką niedokładność zauważono przy $n = 13$.

Tabela 3: Błędy dla układu 2 w zależności od wielkości macierzy A, precyzja float32

n	$\kappa(A)$	$\sigma(x,y)$
2	3.00×10^{0}	0.00×10^{0}
3	8.67×10^{0}	1.43×10^{-7}
4	1.65×10^{1}	7.15×10^{-8}
5	2.68×10^{1}	2.36×10^{-7}
6	3.97×10^{1}	6.25×10^{-7}
7	5.46×10^{1}	4.45×10^{-7}
8	7.24×10^{1}	7.82×10^{-7}
9	9.24×10^{1}	4.76×10^{-7}
10	1.15×10^{2}	1.59×10^{-6}
11	1.40×10^{2}	8.79×10^{-7}
12	1.67×10^{2}	3.03×10^{-6}
13	1.97×10^{2}	2.86×10^{-6}
14	2.29×10^{2}	3.26×10^{-6}
15	2.63×10^{2}	1.17×10^{-6}
16	3.01×10^{2}	3.12×10^{-6}
17	3.40×10^{2}	2.89×10^{-6}
18	3.82×10^{2}	2.74×10^{-6}
19	4.26×10^{2}	7.01×10^{-6}
20	4.73×10^{2}	4.96×10^{-6}
30	1.07×10^{3}	1.29×10^{-5}
50	3.00×10^{3}	1.58×10^{-5}
80	7.71×10^{3}	6.40×10^{-5}
100	1.21×10^{4}	7.21×10^{-5}
200	4.84×10^{4}	4.04×10^{-4}

Tabela 4: Błędy dla układu 2 w zależności od wielkości macierzy A, precyzja float64

n	$\kappa(A)$	$\sigma(x,y)$
2	3.00×10^{0}	0.00×10^{0}
3	8.67×10^{0}	0.00×10^{0}
4	1.65×10^{1}	4.44×10^{-16}
5	2.68×10^{1}	2.22×10^{-16}
6	3.97×10^{1}	8.88×10^{-16}
7	5.46×10^{1}	1.11×10^{-15}
8	7.24×10^{1}	1.78×10^{-15}
9	9.24×10^{1}	1.55×10^{-15}
10	1.15×10^{2}	5.00×10^{-15}
11	1.40×10^{2}	4.88×10^{-15}
12	1.67×10^{2}	4.11×10^{-15}
13	1.97×10^{2}	6.88×10^{-15}
14	2.29×10^{2}	1.22×10^{-14}
15	2.63×10^{2}	6.66×10^{-15}
16	3.01×10^{2}	7.22×10^{-15}
17	3.40×10^{2}	1.55×10^{-14}
18	3.82×10^{2}	5.22×10^{-15}
19	4.26×10^{2}	2.42×10^{-14}
20	4.73×10^{2}	1.47×10^{-14}
30	1.07×10^{3}	2.24×10^{-14}
50	3.00×10^{3}	1.07×10^{-13}
80	7.71×10^{3}	4.35×10^{-13}
100	1.21×10^{4}	6.59×10^{-13}
200	4.84×10^{4}	3.26×10^{-12}

W kontraście do poprzednich tabel błędów, powyższe tabele ukazują niskie wartości uwarunkowań, nawet dla bardzo dużego n, oznaczające dobre dopasowanie układu. Wartości normy maksimum są bardzo niskie, niezależnie od precyzji, co odpowiada dobrym wynikom rozwiązań dla układu równań numer 2.

2.2 Porównanie wyników układów 1 i 2

Dla układu pierwszego zaobserwowano duże zaburzenia wyników, w porównaniu z układem drugim. Wynika to z uwarunkowania macierzy Hilberta, co w praktyce oznacza bardzo dużą wrażliwość na błędy numeryczne i nawet podwójna precyzja nie wystarcza, by uzyskać dokładne rozwiązanie dla większych n. Natomiast precyzja dla układu 1 nie ma znaczenia.

Wnioski

- Układ pierwszy (macierz Hilberta) jest źle uwarunkowany, co skutkuje znaczącymi błędami w rozwiązaniu, niezależnie od precyzji (float czy double). Wzrost n potęguje to zjawisko, prowadząc do wykładniczego wzrostu uwarunkowania i wysokich wartości normy błędu.
- Układ drugi charakteryzuje się dobrym uwarunkowaniem i bardzo niskimi wartościami normy błędu, nawet dla dużych n i obu precyzji.
- Stabilność numeryczna układu pierwszego jest znacznie niższa niż układu drugiego; w przypadku macierzy Hilberta nawet podwójna precyzja nie gwarantuje dokładnych rozwiązań dla większych n.