Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

13.06.2025

1 Wprowadzenie

1.1 Treść ćwiczenia

Dane jest równanie różniczkowe:

$$y' - 6y\sin(3x) = 12\sin(3x)\cos(3x), \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = a$$

Znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia $y(x)$ w zadanym przedziale $[-\pi/4, 2\pi]$ metodą Eulera oraz metodą Rungego-Kutty. Eksperymenty przeprowadzić dla różnych kroków.

1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory dla metod Eulera i Rungego Kutty 4 stopnia. Do obliczeń użyto $N = 1000$ punktów na przedziale $[-\pi/4, 2\pi]$, przy szkicowaniu każdej z funkcji.

W metodzie Rungego-Kutty przyjęto k jako:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i), \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right), \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3)
\end{aligned}$$

Kroki w zadaniu przyjęto za stałe i wyznaczono je jako:

$$h \in \{0.1, 0.01, 0.0001\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następującego wzoru:

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |y_o(x) - y_d(x)|$$

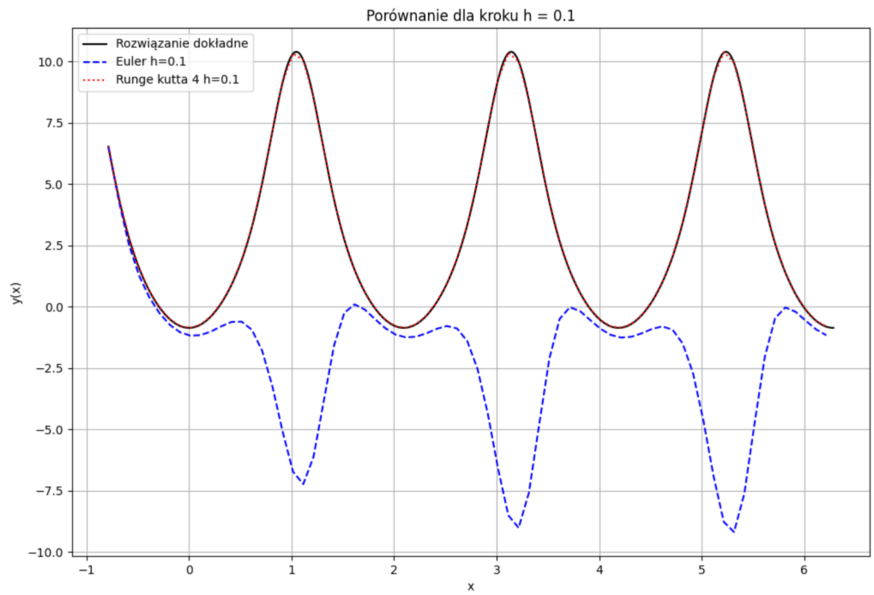
Gdzie:

- $y_o(x)$ oznacza wartość funkcji oszacowanej w punkcie x.
- $y_d(x)$ oznacza wartość funkcji oryginalnej w punkcie x.
- P jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy, porównujące wyniki rozwiązań równania różniczkowego.

3 Wyniki i analiza

3.1 Krok $h = 0.1$



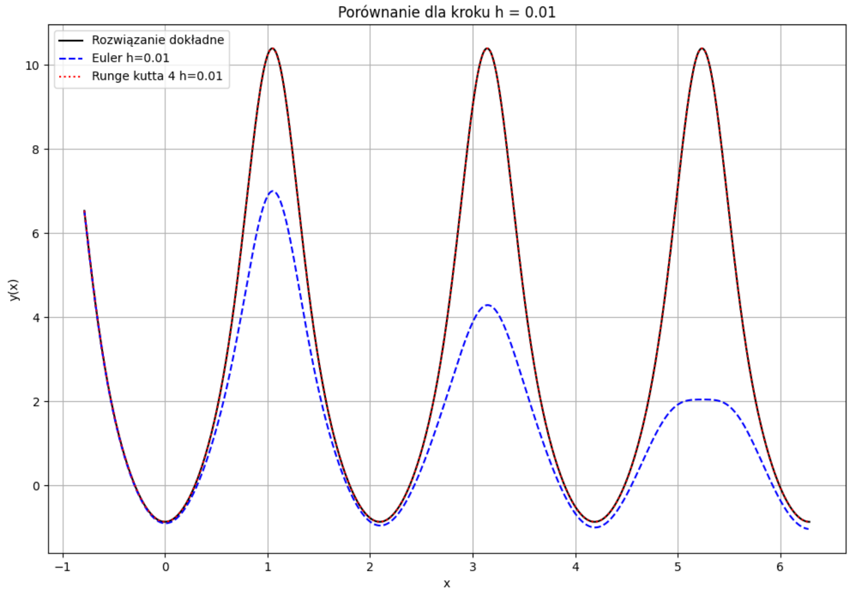
Rysunek 1: Porównanie wykresów funkcji rozwiązania dokładnego metody Eulera i Rungego Kuty dla $h = 0.1$

Taki dobór kroku powoduje zaburzenia przebiegu funkcji w metodzie Eulera: niektóre ekstrema funkcji są odwrotne. Dla drugiego, trzeciego i czwartego ekstremum funkcji dokładnej i metody Rungego-Kutty pojawia się maksimum,natomiast dla metod wspomnianych w zadaniu pojawią się minima.

Błędy maksymalne dla podanego h:

- Maksymalny błąd Eulera: 19.12761443
- Maksymalny błąd Rungego-Kutty: 0.01690520

3.2 Krok $h = 0.01$



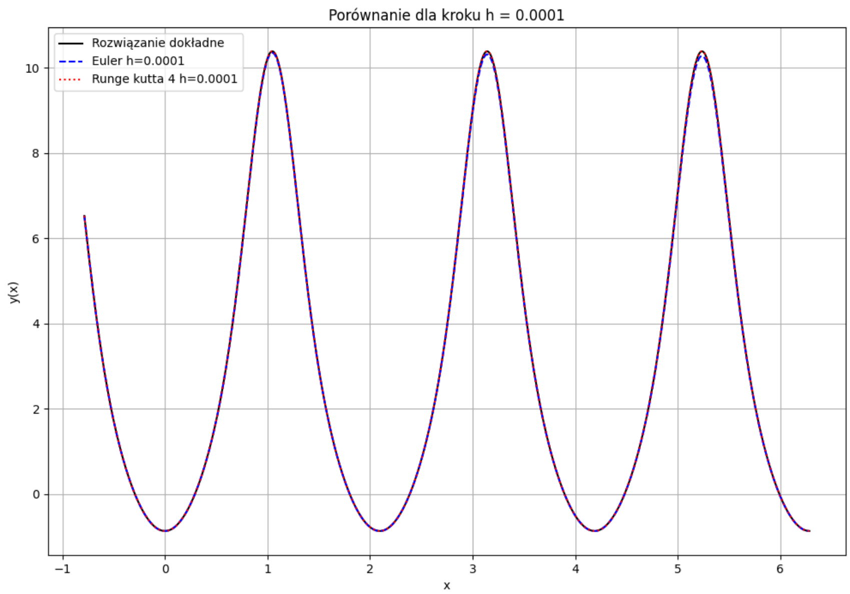
Rysunek 2: Porównanie wykresów funkcji rozwiązania dokładnego metody Eulera i Rungego Kuty dla $h = 0.01$

Przy tym kroku metoda Eulera przyjmuje w tych samych miejscach ekstrema. Jednak metoda Eulera ciągle przyjmuje niewystarczająco dokładne wyniki.

Błędy maksymalne dla podanego h:

- Maksymalny błąd Eulera: 8.34597642
- Maksymalny błąd Rungego-Kutty: 0.00000016

3.3 Krok $h = 0.0001$



Rysunek 3: Porównanie wykresów funkcji rozwiązania dokładnego metody Eulera i Rungego Kuty dla $h = 0.0001$

Dobrane h daje dokładne wyniki metody Eulera pokrywające się z funkcją metody Rungego-Kutty i dokładnego
Błędy maksymalne dla podanego h:

- Maksymalny błąd Eulera: 0.10914279
- Maksymalny błąd Rungego-Kutty: 0.00000000

3.4 Wnioski

Dobór kroku w rozwiązywaniu równań różniczkowych pierwszego rzędu ma kluczowe znaczenie. Wielkość kroku wpływa bezpośrednio na dokładność otrzymanego rozwiązania. Jest to szczególnie widoczne w przypadku metody Eulera, dzie zbyt duży krok może prowadzić do niestabilności i załamania rozwiązania, dobrze widocznych w ekstramach funkcji. Dla rozważanego równania krok równy 0.0001 zapewnia oczekiwaną stabilność i precyzję.