

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

17.04.2025

1 Wprowadzenie

1.1 Treść ćwiczenia

Dla funkcji $f(x)$ wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

$$f(x) = -2x \sin(3x - 3)$$

dla $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$.

1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki Numpy. Do rozwiązywania układów równań wykorzystano funkcję `linalg.solve` z Numpy, używającą algorytmu rozkładu LU. Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano wzory, układ równań dla zagadnienia aproksymacji średnio kwadratowej. Do obliczeń użyto $N = 1000$ punktów na przedziale $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$, zarówno dla funkcji aproksymującej, jak i wielomianu aproksymującego.

Wyznaczone punkty dyskretne są rozmieszczone równomiernie. W eksperymentach przyjęto ich liczbę jako n z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \dots, 20\}$$

Natomiast stopień wielomianu aproksymującego m przyjęto jako:

$$m \in \{2, 3, 4, \dots, 20\}$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P} (f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$ oznacza wartość funkcji aproksymowanej w punkcie x .
- $w(x)$ oznacza wartość wielomianu aproksymującego w punkcie x .
- P jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.

- $|P|$ oznacza moc zbioru P .

Na podstawie uzyskanych wyników, sporządzono wykresy, porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

3 Wyniki i analiza

3.1 Błędy

3.1.1 Tabele błędów

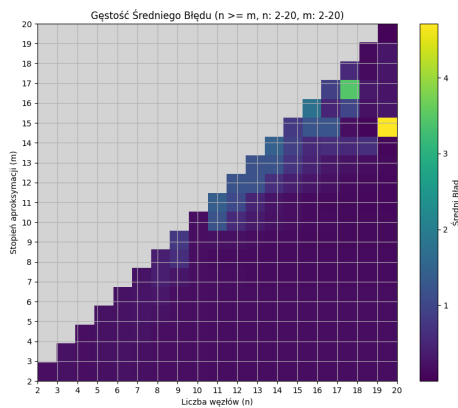
Tabela 1: Zestawienie błędów maksymalnych aproksymacji średniokwadratowej

n	m									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	1.66e-01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	2.03e-01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1.66e-01	1.66e-01	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1.99e-01	2.14e-01	—	—	—	—	—	—	—	—
6	2.09e-01	2.17e-01	2.16e-01	—	—	—	—	—	—	—
7	1.88e-01	2.29e-01	2.49e-01	—	—	—	—	—	—	—
8	1.75e-01	1.75e-01	2.87e-01	3.98e-01	—	—	—	—	—	—
9	1.69e-01	1.69e-01	1.82e-01	6.18e-01	—	—	—	—	—	—
10	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	1.66e-01	—	—	—	—	—
11	1.64e-01	1.64e-01	1.62e-01	1.40e-01	1.23	—	—	—	—	—
12	1.63e-01	1.62e-01	1.61e-01	1.38e-01	5.76e-01	1.28	—	—	—	—
13	1.63e-01	1.61e-01	1.60e-01	1.38e-01	3.36e-01	1.22	—	—	—	—
14	1.62e-01	1.60e-01	1.59e-01	1.37e-01	2.31e-01	6.60e-01	1.68	—	—	—
15	1.62e-01	1.59e-01	1.58e-01	1.36e-01	1.79e-01	4.12e-01	1.08	—	—	—
16	1.62e-01	1.58e-01	1.58e-01	1.36e-01	1.52e-01	2.79e-01	6.68e-01	2.26	—	—
17	1.61e-01	1.57e-01	1.57e-01	1.36e-01	1.37e-01	2.05e-01	7.25e-01	6.54e-01	—	—
18	1.61e-01	1.57e-01	1.57e-01	1.36e-01	1.29e-01	1.60e-01	5.78e-01	1.35	7.71e-01	—
19	1.61e-01	1.57e-01	1.56e-01	1.36e-01	1.24e-01	1.31e-01	7.18e-01	3.15e-01	1.87e-01	—
20	1.61e-01	1.56e-01	1.56e-01	1.35e-01	1.21e-01	1.13e-01	9.34e-02	4.13e-01	4.30e-01	4.99e-02

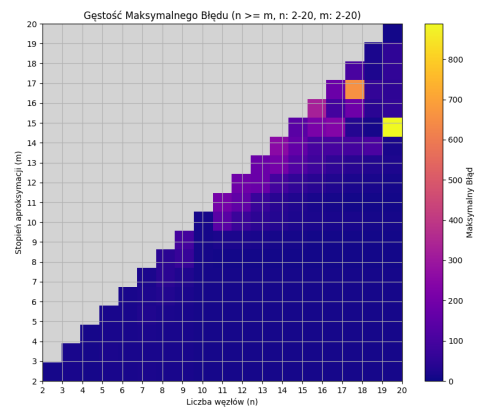
Tabela 2: Zestawienie błędów średnich aproksymacji średniokwadratowej

n	m									
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
2	1.35e+01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1.42e+01	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1.35e+01	1.35e+01	—	—	—	—	—	—	—	—
5	1.50e+01	1.72e+01	—	—	—	—	—	—	—	—
6	1.60e+01	1.64e+01	1.64e+01	—	—	—	—	—	—	—
7	1.74e+01	2.02e+01	2.21e+01	—	—	—	—	—	—	—
8	1.53e+01	1.57e+01	3.05e+01	4.42e+01	—	—	—	—	—	—
9	1.42e+01	1.43e+01	1.75e+01	6.74e+01	—	—	—	—	—	—
10	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	1.35e+01	—	—	—	—	—
11	1.30e+01	1.29e+01	1.19e+01	9.66	1.63e+02	—	—	—	—	—
12	1.26e+01	1.25e+01	1.19e+01	9.80	9.07e+01	2.47e+02	—	—	—	—
13	1.23e+01	1.22e+01	1.20e+01	9.86	5.92e+01	1.74e+02	—	—	—	—
14	1.23e+01	1.19e+01	1.20e+01	9.88	4.31e+01	1.05e+02	4.71e+02	—	—	—
15	1.24e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.90	3.40e+01	7.54e+01	3.25e+02	—	—	—
16	1.25e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.91	2.84e+01	5.69e+01	2.11e+02	7.79e+02	—	—
17	1.26e+01	1.17e+01	1.19e+01	9.91	2.47e+01	4.53e+01	2.31e+02	2.42e+02	—	—
18	1.26e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	2.22e+01	3.74e+01	1.16e+02	5.13e+02	3.08e+02	—
19	1.27e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	2.05e+01	3.18e+01	1.82e+02	1.30e+02	6.74e+01	—
20	1.27e+01	1.17e+01	1.18e+01	9.91	1.93e+01	2.78e+01	1.70e+01	1.74e+02	1.85e+02	8.11

3.1.2 Wykresy gęstościowe błędów



a)

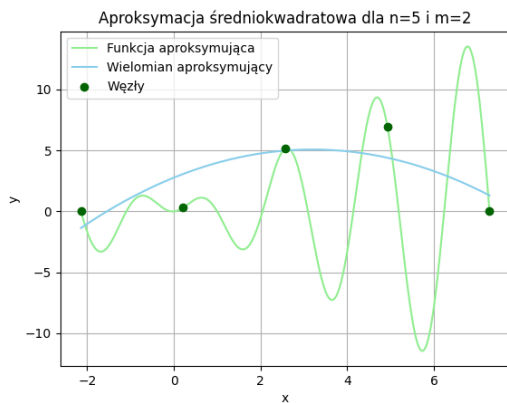


b)

Rysunek 1: Porównanie wykresów gęstościowych dla obu rodzajów błędów dla $n = 2 \dots 20$ oraz $m = 2 \dots 20$

3.2 Wizualizacje

3.2.1 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 5$



a) Prosta aproksymacja dla $m = 2$.



b) Dokładniejsze aproksymowanie dla $m = 4$.



c) Stopień wielomianu aproksymującego równy liczbie węzłów $n = 5$.

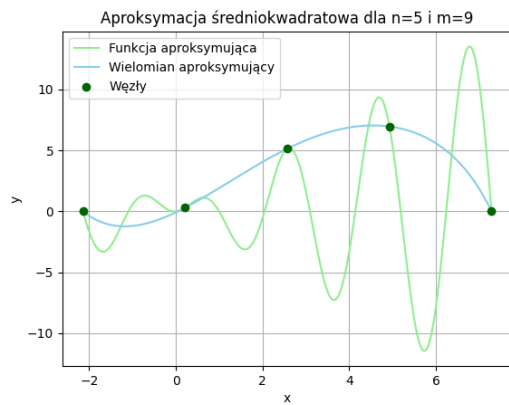


d) Brak znaczącej zmiany przebiegu wielomianu $m = 6$.

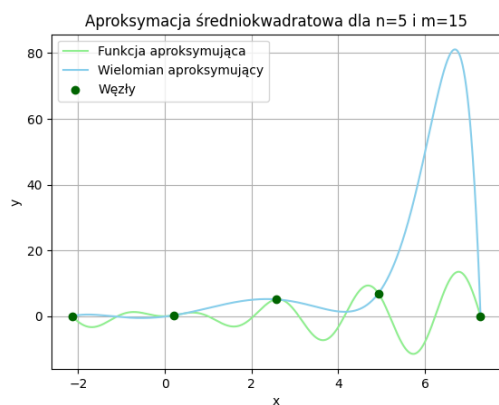
Rysunek 2: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 5$ dla $m \leq 6$



a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



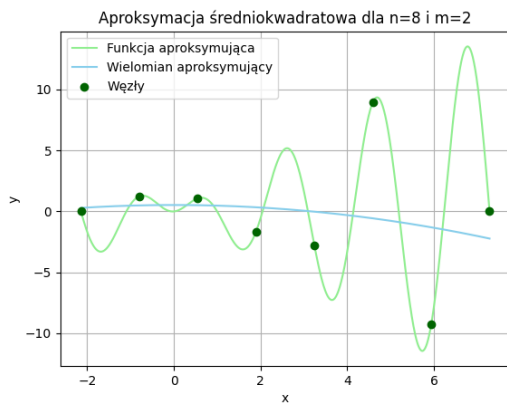
c) Pojawienie się efektu Rungego $m = 15$.



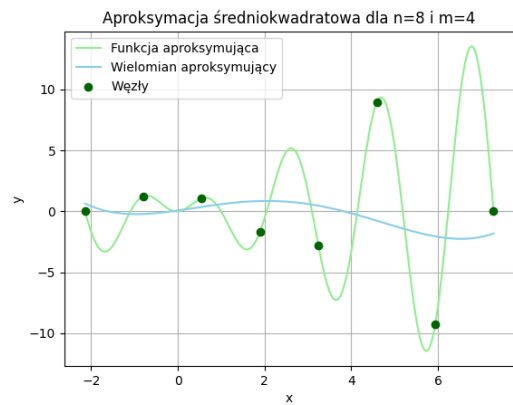
d) Zniknięcie efektu Rungego $m = 20$.

Rysunek 3: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 5$ dla $m > 6$

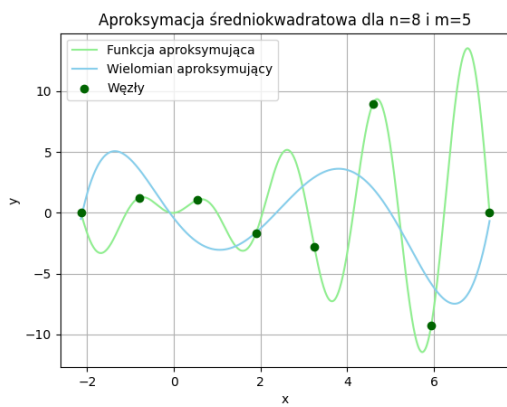
3.2.2 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 8$



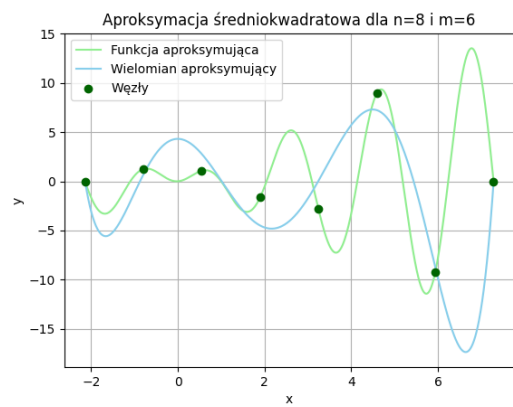
a) Prosta aproksymacja dla $m = 2$.



b) Zwiększenie dokładności aproksymacja dla $m = 4$.

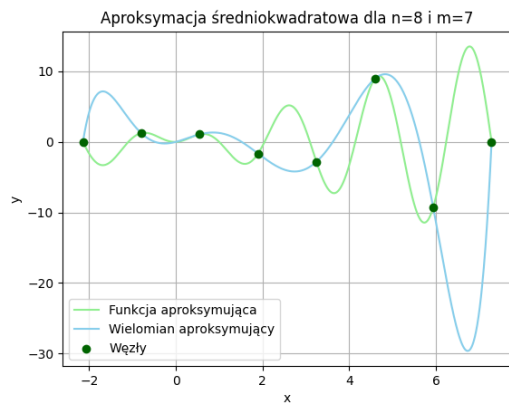


c) $m = 5$.

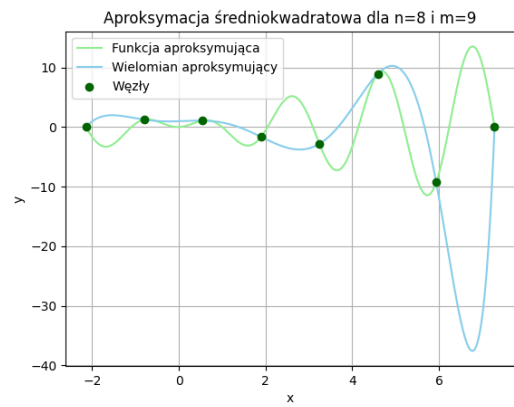


d) $m = 6$.

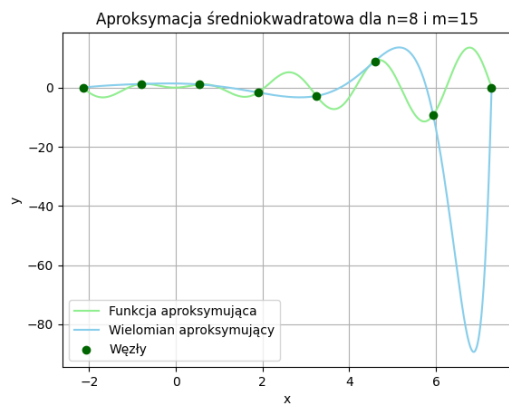
Rysunek 4: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 5$ dla $m \leq 6$



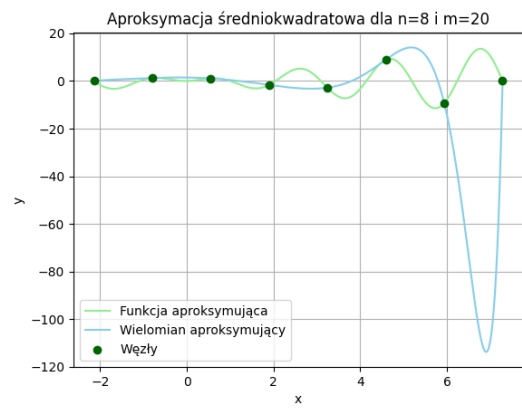
a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



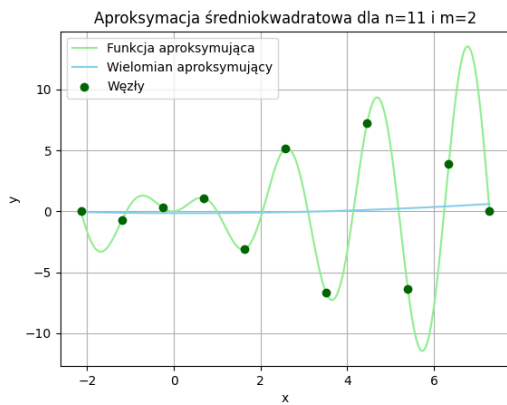
c) $m = 15$.



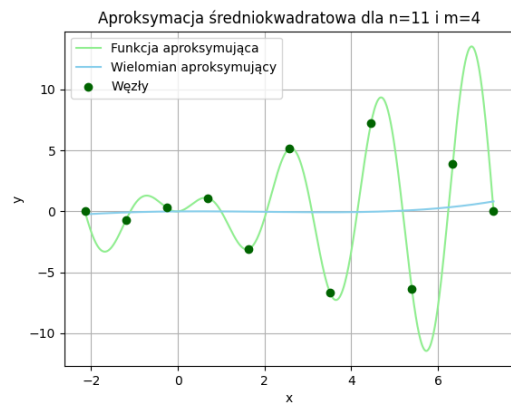
d) $m = 20$.

Rysunek 5: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 11$ dla $m > 6$

3.2.3 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 11$



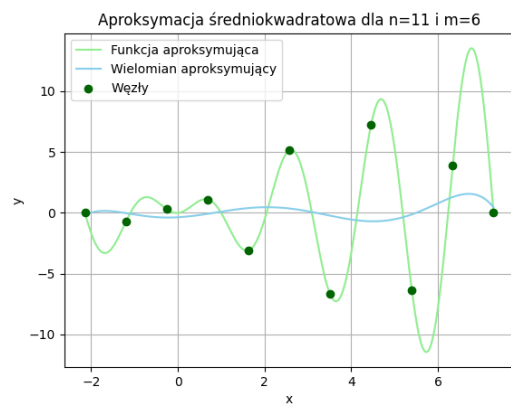
a) $m = 2$.



b) $m = 4$.

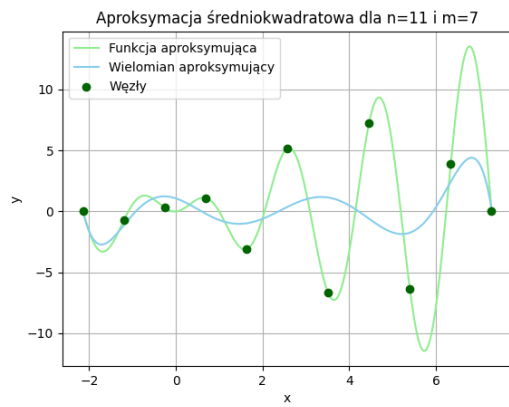


c) $m = 5$.

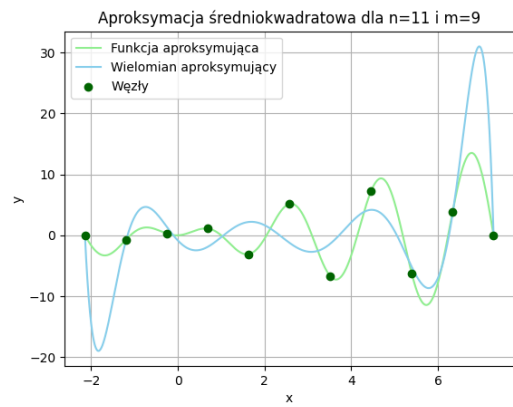


d) $m = 6$.

Rysunek 6: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 11$ dla $m \leq 6$



a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



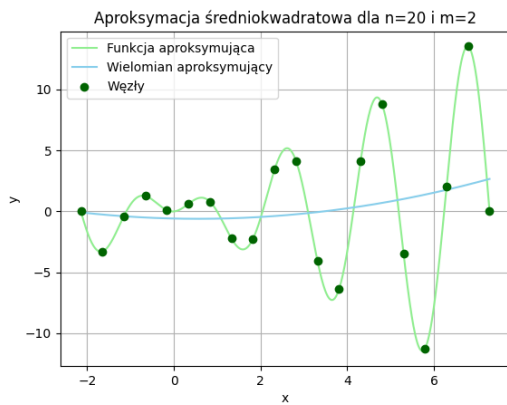
c) $m = 15$.



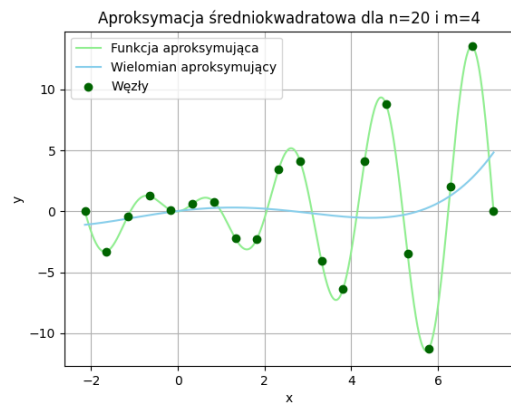
d) $m = 20$.

Rysunek 7: Porównanie wykresów aproksymacji $n = 11$ dla $m > 6$

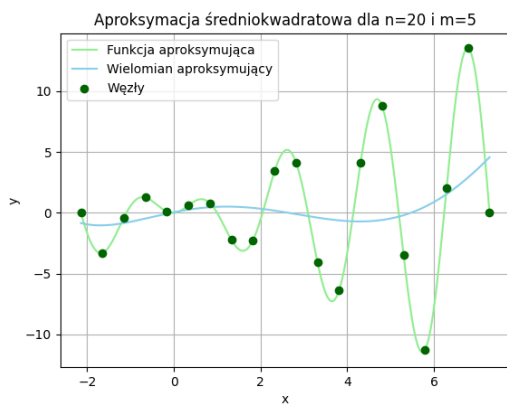
3.2.4 Wykresy aproksymacji średniokwadratowej dla $n = 20$



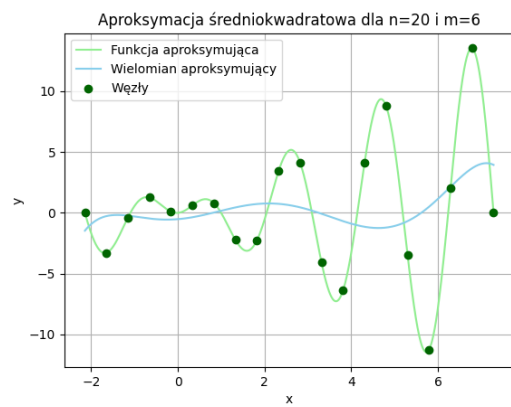
a) $m = 2$.



b) $m = 4$.

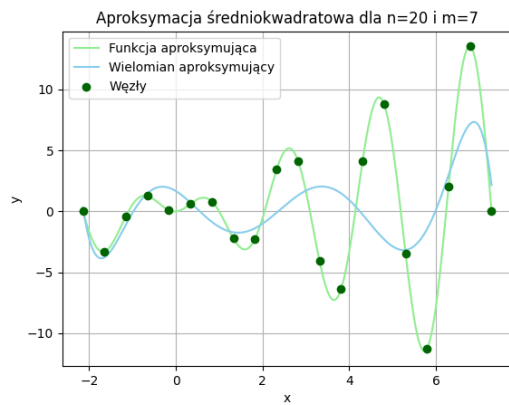


c) $m = 5$.

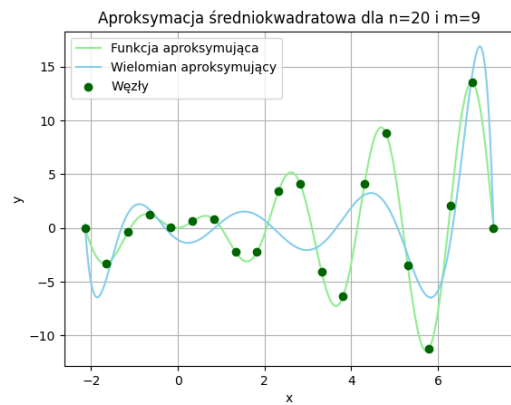


d) $m = 6$.

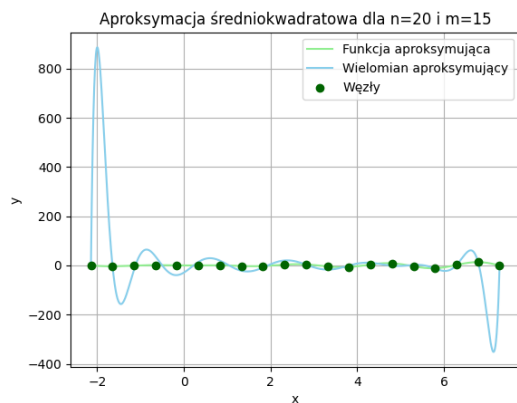
Rysunek 8: orównanie wykresów aproksymacji $n = 20$ dla $m \leq 6$



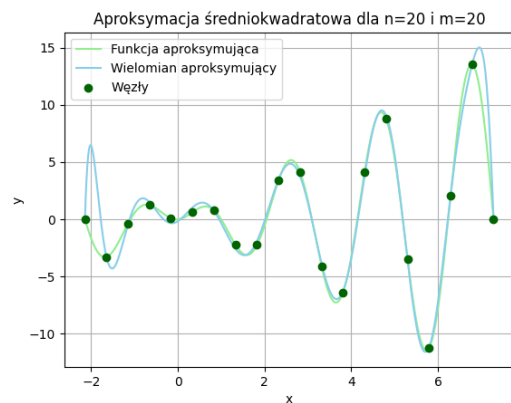
a) $m = 7$.



b) $m = 9$.



c) $m = 15$.



d) $m = 20$.

Rysunek 9: orównanie wykresów aproksymacji $n = 20$ dla $m > 6$

4 Wnioski

• Dokładność przybliżeń:

- Dokładność aproksymacji wzrasta wraz ze zwiększaniem liczby węzłów (n).
- Przy bardzo dużych wartościach (n), pojawiają się błędy arytmetyczne, które ograniczają dalszą poprawę dokładności.
- Dla węzłów równomiernie rozłożonych, w niektórych przypadkach występuje efekt Rungego, który negatywnie wpływa na dokładność aproksymacji.