Aproksymacja tygonometryczna

Seweryn Tasior, WI, grupa 5

30.04.2025

1 Wprowadzenie

1.1 Treść ćwiczenia

Dla funkcji $f(x)$ wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie, w oparciu o te punkty, wyznaczyć przybliżenie funkcji, wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami trygonometrycznymi.

$$f(x) = -2xsin(3x - 3)$$

dla $x \in [-\pi + 1, 2\pi + 1]$.

1.2 Dane techniczne

Programy zostały napisane w języku Python w wersji 3.11.5. Dodatkowo, do narysowania wykresów i tabel zostały użyte biblioteki Pandas i matplotlib. Pomocniczo do wykonywania obliczeń zastosowano funkcjonalności biblioteki.

Zadania programistyczne wykonano na laptopie Lenovo IdeaPad Gaming 3 15ACH6. Urządzenie posiada 6-rdzeniowy procesor o taktowaniu 4,4 GHz. Korzystano przy tym z systemu operacyjnego Windows 11.

2 Realizacja ćwiczenia

W ćwiczeniu wykorzystano i zaimplementowano iteracyjne wzory na szereg trygonometryczny Fouriera na przedziale $[-\pi, \pi]$. Następnie wzory te przeskalowano dla przedziału zadanego przez funkcję. Dla przeskalowanych wartości obliczono aproksymację średnio kwadratową.

Do obliczeń użyto $N = 1000$ punktów na przedziale $[-\pi + 1, 2\pi + 1]$, zarówno dla funkcji aproksymującej, jak i wielomianu aproksymującego.

Wyznaczone punkty dyskretne są rozmieszczone równomiernie. W eksperymentach przyjęto liczbę punktów n z zakresu:

$$n \in \{2, 3, 4, \ldots, 60\}$$

Stopień wielomianu aproksymującego m przyjęto jako:

$$m \in \{2, 3, 4, \ldots, 29\}$$

Przy czym dla każdego wielomianu aproksymującego spełniony jest warunek:

$$2m + 1 \leq n$$

Oszacowanie błędów wykonano na podstawie następujących wzorów:

$$\text{Błąd średni} = \sqrt{\frac{\sum_{x \in P}(f(x) - w(x))^2}{|P|}}$$

$$\text{Błąd maksymalny} = \max_{x \in P} |f(x) - w(x)|$$

Gdzie:

- $f(x)$ oznacza wartość funkcji aproksymowanej w punkcie x.

- $w(x)$ oznacza wartość wielomianu aproksymującego w punkcie x.
- P jest zbiorem punktów, w których obliczane są błędy.
- $|P|$ oznacza moc zbioru P.

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykresy, porównujące wyniki interpolacji. Wartości błędów średnich i maksymalnych zostały przedstawione w tabelach.

3 Wyniki i analiza

3.1 Błędy

3.1.1 Tabele błędów

Tabela 1: Zestawienie błędów średnich aproksymacji trygonometrycznej

m	n												
	5	8	10	12	15	18	20	24	28	30	40	50	60
2	2.00×10^{-1}	1.99×10^{-1}	1.66×10^{-1}	1.65×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}	1.64×10^{-1}
3	—	2.17×10^{-1}	1.66×10^{-1}	1.63×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}	1.62×10^{-1}
4	—	—	1.66×10^{-1}	1.19×10^{-1}	1.17×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}	1.16×10^{-1}
5	—	—	—	5.00×10^{-2}	3.65×10^{-2}	3.42×10^{-2}	3.35×10^{-2}	3.30×10^{-2}	3.27×10^{-2}	3.27×10^{-2}	3.26×10^{-2}	3.26×10^{-2}	3.26×10^{-2}
6	—	—	—	—	2.87×10^{-2}	2.42×10^{-2}	2.30×10^{-2}	2.20×10^{-2}	2.16×10^{-2}	2.15×10^{-2}	2.13×10^{-2}	2.12×10^{-2}	2.12×10^{-2}
7	—	—	—	—	2.89×10^{-2}	2.09×10^{-2}	1.92×10^{-2}	1.76×10^{-2}	1.70×10^{-2}	1.68×10^{-2}	1.65×10^{-2}	1.64×10^{-2}	1.64×10^{-2}
8	—	—	—	—	—	2.02×10^{-2}	1.75×10^{-2}	1.53×10^{-2}	1.45×10^{-2}	1.43×10^{-2}	1.38×10^{-2}	1.37×10^{-2}	1.36×10^{-2}
9	—	—	—	—	—	—	1.71×10^{-2}	1.41×10^{-2}	1.30×10^{-2}	1.27×10^{-2}	1.21×10^{-2}	1.19×10^{-2}	1.19×10^{-2}
10	—	—	—	—	—	—	—	1.34×10^{-2}	1.20×10^{-2}	1.16×10^{-2}	1.09×10^{-2}	1.07×10^{-2}	1.07×10^{-2}
11	—	—	—	—	—	—	—	1.32×10^{-2}	1.14×10^{-2}	1.09×10^{-2}	1.01×10^{-2}	9.85×10^{-3}	9.78×10^{-3}
13	—	—	—	—	—	—	—	—	1.09×10^{-2}	1.02×10^{-2}	8.94×10^{-3}	8.66×10^{-3}	8.58×10^{-3}
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.01×10^{-2}	8.57×10^{-3}	8.26×10^{-3}	8.16×10^{-3}
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8.07×10^{-3}	7.66×10^{-3}	7.55×10^{-3}
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7.73×10^{-3}	7.12×10^{-3}	6.97×10^{-3}
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.77×10^{-3}	6.51×10^{-3}
29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.38×10^{-3}

Tabela 2: Zestawienie błędów maksymalnych aproksymacji trygonometrycznej

m	n												
	5	8	10	12	15	18	20	24	28	30	40	50	60
2	1.56×10^{1}	1.87×10^{1}	1.35×10^{1}	1.28×10^{1}	1.23×10^{1}	1.21×10^{1}	1.20×10^{1}	1.19×10^{1}	1.19×10^{1}	1.19×10^{1}	1.19×10^{1}	1.19×10^{1}	1.19×10^{1}
3	—	1.97×10^{1}	1.35×10^{1}	1.22×10^{1}	1.15×10^{1}	1.13×10^{1}	1.11×10^{1}	1.10×10^{1}	1.09×10^{1}	1.09×10^{1}	1.08×10^{1}	1.07×10^{1}	1.07×10^{1}
4	—	—	1.35×10^{1}	8.53	8.34	8.83	9.02	9.27	9.42	9.47	9.63	9.71	9.76
5	—	—	—	5.14	4.11	4.69	4.91	5.17	5.32	5.38	5.53	5.60	5.64
6	—	—	—	—	3.21	3.52	3.78	4.10	4.27	4.33	4.50	4.58	4.62
7	—	—	—	—	3.32	2.80	3.13	3.50	3.70	3.77	3.96	4.05	4.09
8	—	—	—	—	—	2.39	2.64	3.09	3.32	3.40	3.61	3.71	3.76
9	—	—	—	—	—	—	2.24	2.77	3.03	3.12	3.37	3.47	3.53
10	—	—	—	—	—	—	—	2.50	2.81	2.91	3.18	3.30	3.36
11	—	—	—	—	—	—	—	2.27	2.62	2.74	3.04	3.16	3.23
13	—	—	—	—	—	—	—	—	2.33	2.47	2.83	2.97	3.04
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.36	2.75	2.90	2.98
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.63	2.80	2.89
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.51	2.71	2.81
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.67	2.77
29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2.82

3.1.2 Opis i analiza tabeli błędów

W tabelach kolorem szarym zaznaczono wartości m, dla których następuje duży, około 2-krotny, spadek błędu, w porównaniu z wartościami dla m mniejszym o 1.

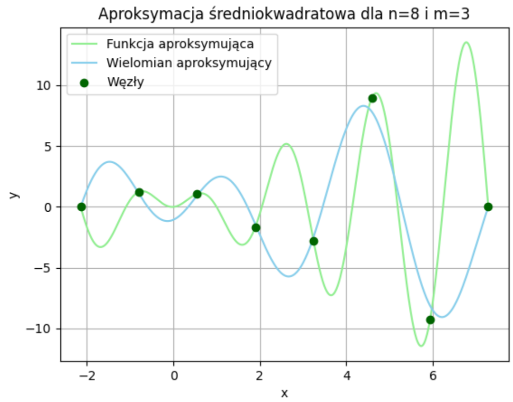
W tabelach kolorami zielonymi i niebieskimi oznaczono rozważne bardziej szczegółowo przypadki. Szczególnie interesujące oznaczyłem kolorem niebieskim. Można zauważyć, że dla $n = 10$ błąd jest stały, co wynika ze zerowania się wielomianu, które natomiast wynika z rozłożenia węzłów w miejscach zerowych funkcji aproksymowanej. Za najbardziej "opłacalne"aproksymacje uznano dla $n = 15$ przy $m = 5$ oraz dla $n = 20$ przy $m = 9$. Charakteryzują się one relatywnie niskimi błędami i wymagają użycia niewielkiej liczby n oraz m. W przypadku konieczności uzyskania bardzo niskiego błędu średniego, poniżej 10^{-3}, należy rozważyć użycie aproksymacji dla $n = 40$ lub $n = 50$.

Dodatkowo można zauważyć, że przy $m > 4$ wraz ze wzrostem liczby węzłów zwiększa się, w zdecydowanej większości przypadków, błąd maksymalny, a błąd średni o o niewielką wartość się poprawia. Dla $m = 5$ takie zachowanie można zauważyć pomiędzy wykresami 2 b), 2 c), 3 a) oraz 3 c).

3.2 Wizualizacje

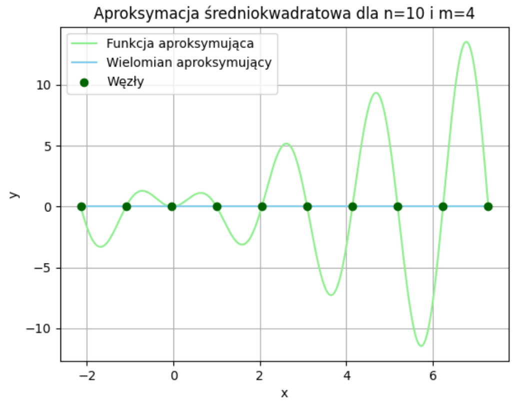
3.2.1 Wykresy dla niedokładnego dopasowania aproksymacji przy niskiej wartości n

a) Prosta aproksymacja dla $m = 2$.



b) Dokładniejsze aproksymowanie dla $m = 3$.

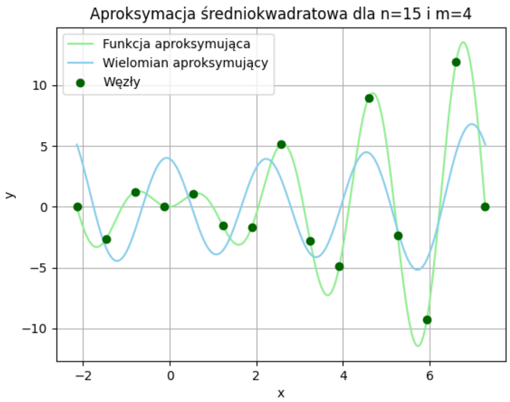
c) Zerowanie się wykreu aproksymacji dla węzłów w miejscach zerowych $m = 3$.



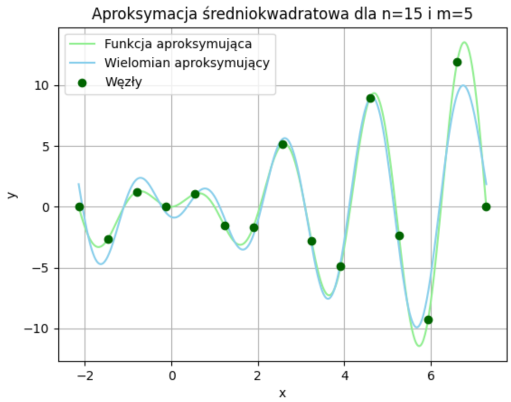
d) Zerowanie się wykreu aproksymacji dla węzłów w miejscach zerowych $m = 4$.

Rysunek 1: Porównanie wykresów aproksymacji trygonometrycznej $n \in \{8, 10\}$

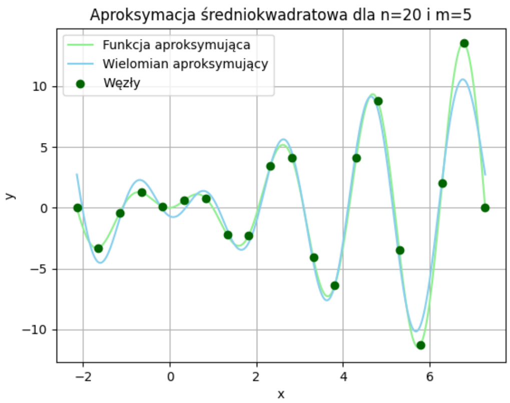
3.2.2 Wykresy dobrze dopasowanych aproksymacji trygonometrycznych



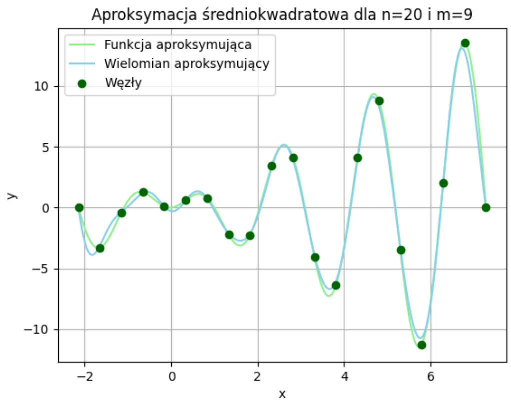
a) Słabo dopasowano aproksymacja dla $m = 4$.



b) Bardzo dobrze dopasowana aproksymacja dla $m = 5$.



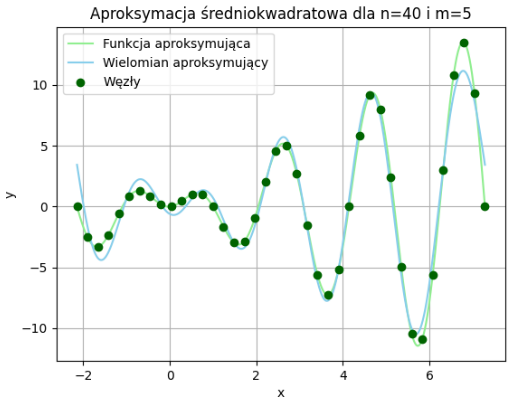
c) Bardzo dobrze dopasowana aproksymacja, z relatywnie wysokim błędem maksymalnym $m = 5$.



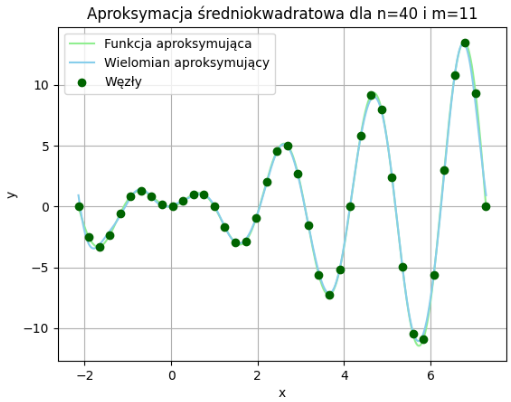
d) Dokładnie dopasowana aproksymacja z niksim błędem średnim i maksymalnym $m = 9$.

Rysunek 2: Porównanie wykresów aproksymacji trygonometrycznej $n \in \{15, 20\}$

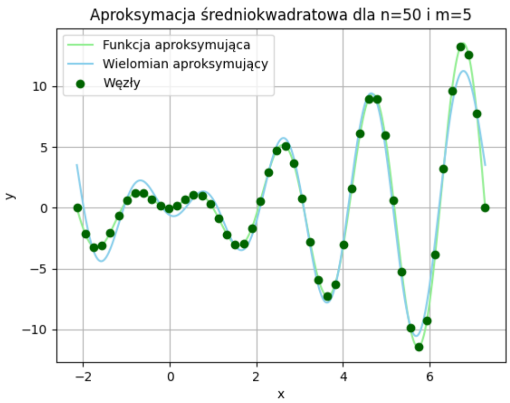
3.2.3 Wykresy dokładnie dopasowanych aproksymacji trygonometrycznych przy duże liczbie węzłów



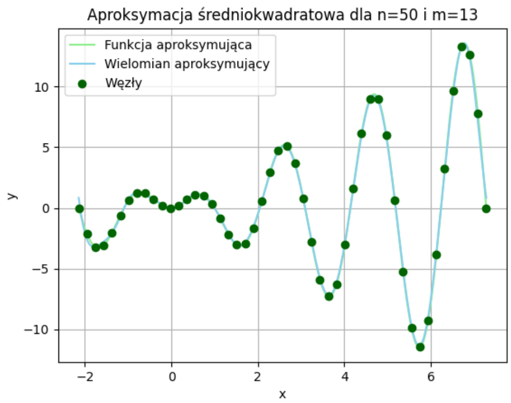
a) Bardzo dobre przybliżenie, wysoki błąd maksymalny dla $m = 5$



b) Dokładne przybliżenie z bardzo niskim błędem średnim i maksymalnym $m = 11$



c) Bardzo dobre przybliżenie, wysoki błąd maksymalny dla $m = 5$.



d) Dokładne przybliżenie z bardzo niskim błędem średnim i maksymalnym $m = 13$.

Rysunek 3: Porównanie wykresów aproksymacji trygonometrycznej $n \in \{40, 50\}$

4 Wnioski

- Przejście z 3. stopnia na 4. stopień wielomianu aproksymującego, znacząco zmniejsza błędy. Tak więc aproksymowanie daje najkorzystniejsze wyniki dla $n >= 4$
- Dla wielomianu aproksymującego z liczbą węzłów 15 występuje bardzo dobre przybliżenie funkcji. Znacząco dokładniejsza aproksymacja występuje przy $n = 20$ oraz $m = 9$. Bardzo niskie błędy średnie uzyskano przy $n = 40$ i $n = 50$. W zależności wymagań, najbardziej korzystne wydają się aproksymacje przy $n = 15$ i $n = 20$, a w szczególnych przypadkach dla $n = 40$ i $n = 50$.
- Przeprowadzone analizy sugerują, że najlepsze wyniki dają wielomiany aproksymujące, których stopień jest wielkorotnościami liczby ekstremów funkcji aproksymowanej (która wynosi 10)
- W zdecydowanej większości przypadków dla konkretnego m wraz ze wzrostem liczby węzłów, błąd maksymalny się zwiększa, natomiast błąd średni maleje o niewielkie wartości. Dlatego należy oszacować opłacalność dodania nowych węzłów, w przypadku określonego z góry stopnia wielomianu aproksymującego. Dla $m = 5$ różnica pomiędzy aproksymacjami zostałą przedstawiona na wykresach: 2 b), 2 c), 3 a) oraz 3 c).