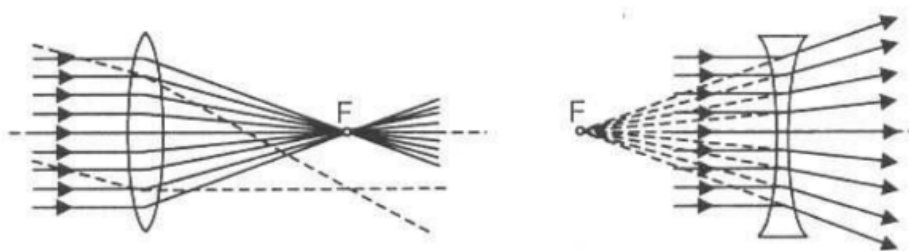


Wyznaczanie ogniskowych soczewek ze wzoru soczewkowego oraz metodą Bessela

Student Seweryn Wasilewski
Nr Albumu 160128
Kierunek Informatyka
Wydział Wydział Informatyki i Teleinformatyki
Ćwiczenie 302

Wstęp Teoretyczny

Soczewki cienkie i grube: Soczewką nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema sferycznymi powierzchniami. Soczewkę nazywamy cienką, jeżeli jej grubość jest mała w porównaniu z jej promieniem krzywizny, a grubą, gdy grubość jest większa w porównaniu z jej krzywizną. Załamanie światła to proces, w którym fala świetlna zmienia kierunek, gdy przechodzi z jednego ośrodka do drugiego o innym współczynniku załamania. Soczewka wykorzystuje to zjawisko, aby zmieniać tor promieni świetlnych i formować obraz. Rozróżniamy soczewki skupiające i rozpraszające (Rysunek 1).



Rysunek 1: skupianie promieni w ognisku soczewki skupiającej (po lewej) i rozpraszającej (po prawej). Źródło: Krzysztof Łapsa, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008 str. 150 Rys. 37.1.

Odwrotność ogniskowej nazywamy *zdolnością skupiającą* soczewki D :

$$D = \frac{1}{f} \quad (1)$$

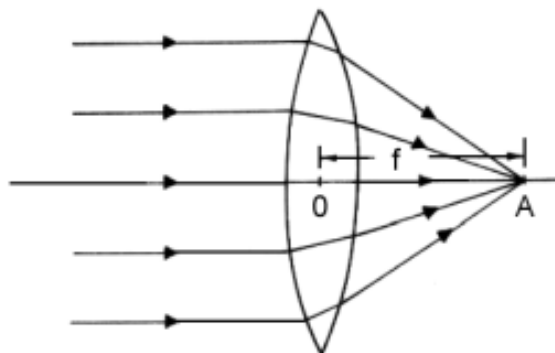
,gdzie:

- D zdolnością skupiającą wyrażana w dioptrach o wymiarze m^{-1} ,
- f ogniskowa obiektywu, mierzona w metrach.

Oś optyczna: prosta przechodząca przez środki krzywizn elementów układu optycznego, pokrywająca się z osią symetrii tych elementów.

Środek optyczny: nazywamy punkt położony na jej osi optycznej i mający tę własność, że promienie przechodzące przez niego mają ten sam kierunek przed wejściem do soczewki i po wyjściu z niej

Ognisko i ogniskowa Punkt, w którym przecinają się promienie (lub ich przedłużenia) wiązki równoległej światła po przejściu przez soczewkę lub po odbiciu się od zwierciadła nosi nazwę ogniska. Odległość ogniska od soczewki lub zwierciadła nazywamy ogniskową (Rysunek 2).



Rysunek 2: A - Ognisko, f - ogniskowa. Źródło: Politechnika Gdańska Pracownia Fizyczna ćwiczenie 50 rys. 50.2 (https://pg.edu.pl/files/ftims/2021-03/cw_50.pdf)

Równanie soczewkowe jest równaniem określającym zależność pomiędzy odległością przedmiotu od soczewki (punkt P), a odległością jego obrazu otrzymanego w tej soczewce (punkt O)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{p} \quad (2)$$

,gdzie:

- o jest odległością obrazu od soczewki,
- p jest odległością przedmiotu od soczewki,
- f jest ogniskową soczewki.

Równanie to można stosować, gdy:

- promienie wybiegające z punktu P tworzą mały kąt z osią optyczną,
- soczewka jest soczewką cienką
- f jest ogniskową soczewki.

W stosunku do odległości p , o , R_1 , R_2 oraz f obowiązuje umowa określająca ich znaki (Rysunek 3:

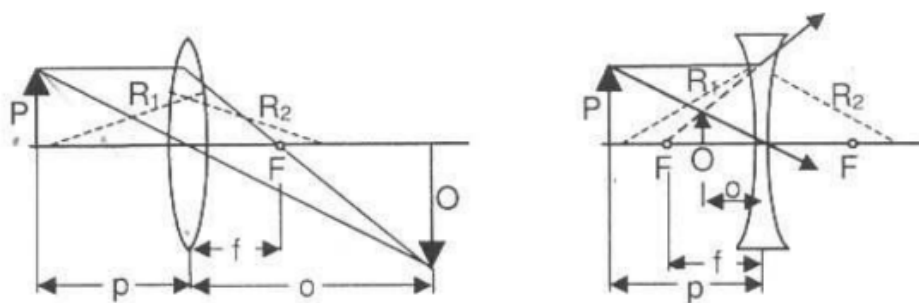
- p jest zawsze dodatnie
- o , R oraz f są dodatnie, gdy leżą po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot
- R oraz f są ujemne, gdy leżą po stronie przedmiotu

Metoda Bessela to klasyczna metoda optyczna stosowana do wyznaczania ogniskowej soczewki przy użyciu prostego układu optycznego. Charakteryzuje się tym, że pozwala na dokładne określenie ogniskowej soczewki bez konieczności bezpośredniego pomiaru odległości ogniska od soczewki. Przy stałej odległości l przedmiotu od ekranu obraz powstaje w odległości o od obrazu oraz

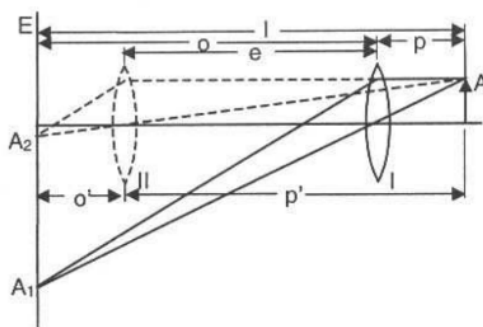
$$o' = p \quad (3)$$

od soczewki. W jednym położeniu obraz jest pomniejszony a w drugim powiększony w stosunku do przedmiotu na podstawie równania (2) możemy napisać układ równań:

$$\begin{aligned} l &= o + p \\ e &= o - p \end{aligned}$$



Rysunek 3: Konstrukcja Obrazu w soczewce skupiającej (lewa soczewka) i rozpraszająca (prawa soczewka). Źródło: Krzysztof Łapsa, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008 str. 151 Rys. 37.2.



Rysunek 4: wyznaczanie ogniskowej soczewki metodą Bessela. Źródło: Krzysztof Łapsa, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008 str. 153 Rys. 37.4.

po wyliczeniu z tych równań o oraz p i wstawiamy uzyskane wartości do równania (2). Po przekształceniach uzyskujemy:

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l} \quad (4)$$

Teraz by wyznaczyć ogniskową soczewki lub układu soczewek z powyższego równania wystarczy zmierzyć odległości przedmiotu od ekranu l i odległość e między dwoma położeniami soczewki, dla których obraz na ekranie jest ostry.

Ogniskowa układu składająca się z dwóch soczewek cienkich o ogniskowych f_1 , f_2 we wzajemnej odległości d można obliczyć z wzoru:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (5)$$

Zestaw ćwiczeniowy

- Ława optyczna
- Świecący obraz
- Soczewki w uchwytach
 - skupiające: A, B, C
 - rozpraszające: 1, 2, 3
- Ekran

Objaśnienie symboli używanych w pomiarach i wyliczeniach

- e - odległość między dwoma pozycjami soczewki dającymi ostr obraz,
- l - odległość między ekranem, a przedmiotem,
- p, p' - odległość soczewki od przedmiotu w której obraz jest ostry (p - bliżej przedmiotu, p' bliżej ekranu),
- o, o' - odległość soczewki od ekranu w której obraz jest ostry odpowiednio dla p i p' ,
- f_1 oraz f_2 jest ogniskową obliczną z równania soczewkowego (2). Tyle, że zostały wyliczone dla innych położeń. f_1 został obliczony dla p , natomiast f_2 dla p' .
- $f_{bessela}$ zostały obliczone z równania (4).
- Δx - jest błędem symbolu x , gdzie x może być jednym z powyższych symboli,
- f_x - jest wyliczoną ogniskową, gdzie x jest oznaczeniem soczewki lub układu soczewek

Wyniki Pomiarów

Wyniki zostały zapisane w [cm].

Odległość między ekranem, a przedmiotem:

$$l = 100[cm]$$

soczewka	A		B		C	
nr.	p	p'	p	p'	p	p'
1	11,35	89,35	17,50	83,10	28,30	72,25
2	11,35	89,50	17,30	82,90	28,35	72,75
3	11,20	89,40	17,85	83,10	28,15	71,90
4	11,30	89,40	17,45	82,95	28,20	72,00
5	11,25	89,45	17,50	82,95	28,25	72,35
śr. arytm.	11,29	89,42	17,52	83,00	28,25	72,25
odch. stand.	0,065	0,057	0,202	0,094	0,079	0,334

Tabela 1: Zmierzone pozycje soczewek skupiających o ostrym obrazie na ekranie

Odległość między soczewkami w układzie:

$$d = 6[cm]$$

p oraz p' są odległościami od przedmiotu do uchwytu na soczewki. Patrz rysunek 4.

układ soczewek	A+1		A+2		A+3	
nr.	p	p'	p	p'	p	p'
1	24,85	89,90	18,20	91,45	16,75	91,85
2	24,60	90,00	18,35	91,40	16,60	91,65
3	24,85	89,35	18,10	91,35	16,60	91,70
4	24,60	89,80	18,15	91,35	16,70	91,80
5	24,80	89,40	18,15	91,10	16,70	91,80
śr. arytm.	24,74	89,69	18,19	91,33	16,67	91,76
odch. stand.	0,129	0,297	0,096	0,135	0,067	0,082

Tabela 2: Zmierzone pozycje układów soczewek (skupiająca + rozpraszająca) o ostrym obrazie na ekranie

Obliczenia

Obliczenia zostały wykonane oraz zapisane w [cm].

A									
	p	o	p'	o'	f_1	f_2	e	l	$f_{bessela}$
1	11,35	88,65	89,35	10,65	10,061775	9,515775	78,00	100	9,79
2	11,35	88,65	89,50	10,50	10,061775	9,3975	78,15		9,73144375
3	11,20	88,80	89,40	10,60	9,9456	9,4764	78,20		9,7119
4	11,30	88,70	89,40	10,60	10,0231	9,4764	78,10		9,750975
5	11,25	88,75	89,45	10,55	9,984375	9,436975	78,20		9,7119
					f_1	f_2	$f_{bessela}$		
śr. Arytm.					10,015325	9,46061	9,73924375		
odch. Stand					0,050485477	0,044953617	0,032672697		
Δf					0,033236426	0,029064411	0,016823974		

Tabela 3: Wyliczenia ogniskowej dla soczewki skupiającej A

B									
	p	o	p'	o'	f_1	f_2	e	l	$f_{bessela}$
1	17,50	82,50	83,10	16,90	14,4375	14,0439	65,60	100	14,2416
2	17,30	82,70	82,90	17,10	14,3071	14,1759	65,60		14,2416
3	17,85	82,15	83,10	16,90	14,663775	14,0439	65,25		14,35609375
4	17,45	82,55	82,95	17,05	14,404975	14,142975	65,50		14,274375
5	17,50	82,50	82,95	17,05	14,4375	14,142975	65,45		14,29074375
					f_1	f_2	$f_{bessela}$		
śr. Arytm.					14,45017	14,10993	14,2808825		
odch. Stand					0,130824087	0,061757402	0,04712365		
Δf					0,102916179	0,047689622	0,013965212		

Tabela 4: Wyliczenia ogniskowej dla soczewki skupiającej B

C									
	p	o	p'	o'	f_1	f_2	e	l	$f_{bessela}$
1	28,30	71,70	72,25	27,75	20,2911	20,049375	43,95	100	20,17099375
2	28,35	71,65	72,75	27,25	20,312775	19,824375	44,40		20,0716
3	28,15	71,85	71,90	28,10	20,225775	20,2039	43,75		20,21484375
4	28,20	71,80	72,00	28,00	20,2476	20,16	43,80		20,2039
5	28,25	71,75	72,35	27,65	20,269375	20,004775	44,10		20,137975
					f_1	f_2	$f_{bessela}$		
śr. Aryt.					20,269325	20,048485	20,1598625		
odch. Stand					0,034389801	0,148934605	0,057782946		
Δf					0,040305087	0,170047346	0,009384077		

Tabela 5: Wyliczenia ogniskowej dla soczewki skupiającej C

A+1				A+1	
	e	l	$f_{bessela}$		$f_{bessela}$
1	65,05	100	14,42124375	śr. Aryt.	14,45344375
2	65,40		14,3071	Odch. Stand.	0,125732947
3	64,50		14,599375	Δf	0,064265434
4	65,20		14,3724		
5	64,60		14,5671		

Tabela 6: Wyliczenia ogniskowej dla układu soczewek skupiającej A i rozpraszającej 1

A+2				A+2	
	e	l	$f_{bessela}$		$f_{bessela}$
1	73,25	100	11,58609375	śr. Aryt.	11,626315
2	73,05		11,65924375	Odch. Stand.	0,049041867
3	73,25		11,58609375	Δf	0,072208852
4	73,20		11,6044		
5	72,95		11,69574375		

Tabela 7: Wyliczenia ogniskowej dla układu soczewek skupiającej A i rozpraszającej 2

A+3				A+3	
	e	l	$f_{bessela}$		$f_{bessela}$
1	75,10	100	10,89997500	śr. Aryt.	10,90372875
2	75,05		10,91874375	Odch. Stand.	0,00839364
3	75,10		10,89997500	Δf	0,074134026
4	75,10		10,89997500		
5	75,10		10,89997500		

Tabela 8: Wyliczenia ogniskowej dla układu soczewek skupiającej A i rozpraszającej 3

Błędy zachodzące przy wyznaczaniu ogniskowych soczewek

Korzystając z wzoru na błąd maksymalny:

$$z = h(x_1, x_2, \dots)$$

$$\Delta z = \left| \frac{\partial h}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial h}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots$$

,można wyznaczyć wzór na błąd ogniskowej:

- liczonej równaniem soczewkowym dla obu pozycji soczewki p i p':

$$\Delta f_{socz} = \left| \frac{\partial f}{\partial p} \Delta p \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial o} \Delta o \right| = \frac{o^2}{o^2 + p^2} \Delta p + \frac{p^2}{o^2 + p^2} \Delta o$$

,gdzie f jest równaniem soczewkowym (2)

- liczonej równaniem metody Bessela:

$$\Delta f_{\text{bessela}} = \left| \frac{\partial f}{\partial l} \Delta l \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial e} \Delta e \right| = \frac{e^2 + l^2}{4l^2} \Delta l + \frac{e}{2l} \Delta e$$

,gdzie f jest równaniem metody Bessela (4)

- liczonej z równania dla układu soczewek (5)

$$\Delta f_i = \left| \frac{\partial f}{\partial f_A} \Delta f_A \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \Delta d \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial f_{A+i}} \Delta f_{A+i} \right|$$

$$\Delta f_i = \left| \frac{f_{A+i}(d - f_{A+i})}{(f_A + i - f_A)^2} \Delta f_A \right| + \left| \frac{f_{A+i}}{f_{A+i} - f_A} \Delta f_{A+i} \right| + \left| \frac{f_A(f_A - d)}{(f_{A+i} - f_A)^2} \Delta f_{A+i} \right|$$

, gdzie

- f_i jest soczewką rozpraszającą której wartość ogniskowej jest liczona,
- f jest przekształconym równaniem (5) do postaci $f_i = \frac{f_{A+i}(d - f_A)}{f_{A+i} - f_A}$,
- f_{A+i} jest ogniskową układu soczewki skupiającej A oraz rozpraszającej i,
- f_A jest ogniskową soczewki skupiającej A.

Przykład Obliczeń ogniskowej soczewki skupiającej

dla soczewki A pomiaru nr. 1

wzór soczewkowy (2)

Dane:

$$p = 11,35[cm]$$

$$l = 100[cm]$$

Obliczenia:

$$o = l - p = 100,00 - 11,35 = 88,65[cm]$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{p} = \frac{1}{88,65} + \frac{1}{11,35} = 0,0993860427210905[cm^{-1}]$$

$$f = \frac{1}{0,0993860427210905} = 10,061775[cm]$$

metoda Bessela (4)

Dane:

$$p = 11,35[cm]$$

$$p' = 89,35[cm]$$

$$l = 100[cm]$$

Obliczenia:

$$e = p' - p = 89,35 - 11,35 = 78,00[cm]$$

$$f = \frac{l^2 - e^2}{4l} = \frac{100^2 - 78,00^2}{4 \cdot 100} = \frac{3916}{400} = 9,79[cm]$$

Wyliczanie ogniskowej soczewki rozpraszającej z równania (5):

- nr. 1

$$f_{A+1} = 14,45344375[cm]$$

$$f_A = 9.73839291667[cm]$$

$$d = 6[cm]$$

$$\frac{1}{f_{A+1}} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_A \cdot f_1}$$

$$f_1 = \frac{f_{A+1}(d - f_A)}{f_{A+1} - f_A}$$

$$\frac{1}{f_1} = -0,087262992[cm^{-1}]$$

$$f_1 = -11,45961171[cm]$$

$$\Delta f_1 = 0,203936935377946$$

- nr. 2

$$f_{A+2} = 11,626315[cm]$$

$$f_A = 9.73839291667[cm]$$

$$d = 6[cm]$$

$$\frac{1}{f_{A+2}} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_A \cdot f_2}$$

$$f_2 = \frac{f_{A+2}(d - f_A)}{f_{A+2} - f_A}$$

$$\frac{1}{f_2} = -0,043436721[cm^{-1}]$$

$$f_2 = -23,02199547[cm]$$

$$\Delta f_2 = 1,05981750570769$$

- nr. 3

$$f_{A+3} = 10,90372875[cm]$$

$$f_A = 9.73839291667[cm]$$

$$d = 6[cm]$$

$$\frac{1}{f_{A+3}} = \frac{1}{f_A} + \frac{1}{f_3} - \frac{d}{f_A \cdot f_3}$$

$$f_3 = \frac{f_{A+3}(d - f_A)}{f_{A+3} - f_A}$$

$$\frac{1}{f_3} = -0,028588483[cm^{-1}]$$

$$f_3 = -34,97912032[cm]$$

$$\Delta f_3 = 2,6730498469569$$

Wnioski

Wnioski z przeprowadzonych pomiarów wykazały zgodność wyników obliczeń ogniskowej soczewek przy użyciu metody Bessela oraz równania soczewkowego. Średnie wartości ogniskowej f_1 , f_2 oraz $f_{bessela}$ dla każdej soczewki skupiającej są zbliżone, a niskie odchylenia standardowe wskazują na poprawność i wiarygodność pomiarów. Różnice między metodami są niewielkie i mogą wynikać z błędów związanych z ustawieniem ostrości obrazu, ograniczeniami dokładności przyrządów, błędem drubym lub też niepoprawnie ustawioną ostrością obrazu. Obie metody - równanie soczewkowe, metoda Bessela - dobrze sprawdziły się w warunkach laboratoryjnych, a wyniki są zgodne z teorią optyki soczewek. Łączna niepewność była niska, co sugeruje, że procedura pomiarowa była przeprowadzona poprawnie. Wartości ogniskowej dla soczewek rozpraszających wyliczone z wzoru na ogniskową układu są również wiarygodne, a wartości błędów wynikają z nałożonych na siebie błędów ogniskowych soczewek, które to wynikają z błędów pomiarowych. Ostatecznie porównując metodę Bessela i równania soczewkowego, metoda Bessela daje większą pewność wyliczenia dokładniejszej ogniskowej soczewki.

Soczewka	Ogniskowa f
A	$9.80 \pm 0,017[cm]$
B	$14.30 \pm 0,014[cm]$
C	$20.20 \pm 0,001[cm]$
1	$-11,50 \pm 0,20[cm]$
2	$-23,03 \pm 1,06[cm]$
3	$-35,00 \pm 2,67[cm]$

Tabela 9: Uzyskane ogniskowe badanych soczewek

Bibliografia

1. Krzysztof Łapsa, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2008,
2. Wikipedia Wolna Encyklopedia równanie soczewkowe [https://pl.wikipedia.org/wiki/Równanie_soczewki](https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_soczewki)
3. Wikipedia Wolna Encyklopedia soczewka <https://pl.wikipedia.org/wiki/Soczewka>