



دانشکده فنی دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پروژه اول درس ریاضیات مهندسی

طراحان

محمدامین کشمیری

سروش مس فروش

مقدمه

هدف از این تمرین آشنایی مفدمتی دانشجویان با محیط متلب و آنالیز فوریه می باشد. این تمرین در سه بخش طراحی شده است.

- آشنایی با متلب

بخش اول غالباً شامل مفاهیم اولیه کار در محیط متلب شامل کار با ماتریس ها و رسم چند نمودار ساده می باشد.

- سری فوریه

در این قسمت شما باید تابعی بنویسید که سری فوریه تابع دلخواه را محاسبه نماید و در ادامه به رسم سری فوریه و خود تابع و مقایسه آنها می پردازید، همچنین در انتها از شما خواسته می شود که سری فوریه یک تابع خاص را محاسبه کرده و نتیجه را با حل دستی تطابق دهید.

- تبدیل فوریه

در این قسمت برای درک بهتر تبدیل فوریه، به صورت گام به گام، با رسم یک تابع در حوزه زمان و سپس انتقال آن به حوزه فرکانس را به کمک تبدیل فوریه بررسی می کنید، و رسم آن می پردازید.

در ادامه برای بررسی کاربردی تبدیل فوریه و درک بهتر مفهوم فرکانس نمونه برداری یک فایل صوتی در اختیار شما قرار گرفته است و انجام یک سری عملیات از شما مطالبه می گردد.

۱ آشنایی با MATLAB

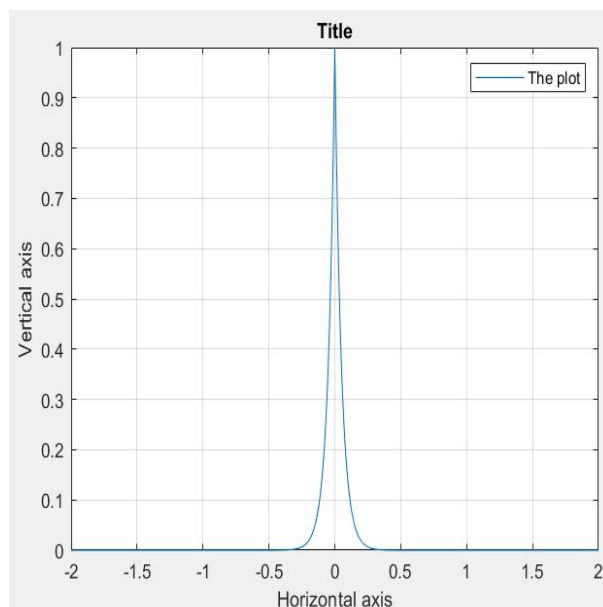
ابتدا برای این که در طی پروژه کمتر درگیر Syntax Error شوید، مراحل رسم دو تابع در MATLAB بررسی می‌شود.

مثال اول

در این بخش رسم تابع، $x(t) = e^{-20|t|}$ بررسی می‌شود.

```
%Sample plotting
fs=100;
t=-30:1/fs:30;
x = exp(-20.*abs(t));
plot(t,x);
xlabel('Horizontal axis')
ylabel('Vertical axis')
xlim([-2 2])
ylim([0 1])
title('Title')
grid on
```

شکل ۱: کد مثال اول



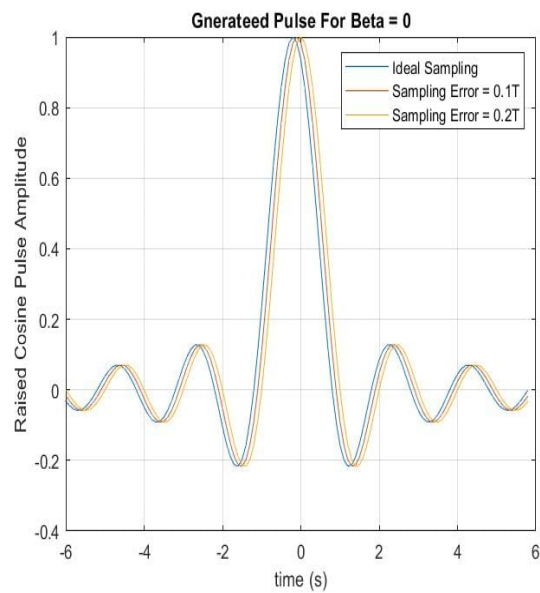
شکل ۲: شکل مثال اول

مثال دوم

در این بخش رسم تابع پیچیده‌تری بررسی می‌شود.

```
plot (t3,P_r_Beta_0)
hold on
grid on
plot (t3,P_r2_Beta_0)
plot (t3,P_r3_Beta_0)
legend('Ideal Sampling ', 'Sampling Error = 0.1T', 'Sampling Error = 0.2T');
xlabel('time (s)'); ylabel('Raised Cosine Pulse Amplitude');
title ('Gnerateed Pulse For Beta = 0');
xlim([-6 6]);
hold off
```

شکل ۳: کد مثال دوم



شکل ۴: شکل مثال دوم

در ادامه به بررسی چند نکته درباره مراحل رسم می‌پردازیم.

- توجه کنید که در هنگام رسم یک تابع اندازه دو ماتریس باید برابر باشد.
- برای تعریف دقیق مجور افقی می‌توانید به دو روش عمل کنید:
 – ابتدا و انتهای بازه و گام حرکت را مشخص کنید. (مشابه روشی که در مثال اول انجام شده است).
 – از تابع linspace در متلب استفاده کنید.
- در مثال اول متغیری تحت عنوان f_s وجود دارد که به نام ”فرکانس نمونه برداری” شناخته می‌شود. در این پروژه شما آشنایی مختصری با فرکانس نمونه برداری پیدا خواهید کرد.
- در مثال دوم تابع پیچیده تری ترسیم شده است. هدف از این تصویر آشنایی شما با feature های ترسیم نمودار در متلب است.

Hold on/off •

این دستور برای ترسیم همزمان چند نمودار در یک plot استفاده می‌شود.

Grid on/off •

صفحه نمایش خط کشی می‌شود.

Legend •

هنگام ترسیم چند نمودار به طور همزمان برای نامگذاری یک به یک آن‌ها به کار می‌رود.

xlabel/ylabel •

محورهای افقی و عمودی را نام گذاری می‌کند.

xlim / ylim •

محورهای افقی و عمودی را در بازه دلخواه ما نمایش می‌دهد.

۱.۱ رسم نمودار

با توجه به توضیحات ارائه شده، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\cot\left(\frac{\pi t}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \bullet$$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{t^2}\right) \bullet$$

•

$$\begin{cases} -1, & t < -3 \\ 3\operatorname{ramp}(t), & -3 < t < 3 \\ e^{-2.5t}, & t > 3 \end{cases}$$

۲ سری فوریه

در این قسمت به بررسی سری فوریه با MATLAB می‌پردازیم.

۱.۲ محاسبه سری فوریه

تابعی بنویسید که سری فوریه تابعی به فرم $f(x) = x^\alpha$ را محاسبه نماید، ورودی های تابع به صورت زیر خواهد بود.

Num •

تعداد جملات سری فوریه.

P •

تناوب‌های مدنظر برای نمایش تابع.

α •

توان چندجمله‌ای.

Nshow •

تعداد جملات سری فوریه جهت نمایش هنگام خروجی گرفتن.

۲.۲ محاسبه سری فوریه یک تابع خاص

به کمک تابع قسمت ۱.۲ سری فوریه تابع $f(x) = x^\beta \ln(\alpha x)$ را برای $Num = 10$ محاسبه کنید و در خروجی به ازای $Nshow = 5$ نمایش دهید.

۳.۲ رسم سری فوریه و مقایسه با تابع اصلی

در این قسمت سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ را در یک Plot رسم کنید و نتیجه را توجیه کنید. توجه: این کار را برای $Num = 10, 50, 100$ انجام دهید.

۴.۲ محاسبه حد مجموع و تطبیق نتایج

ابتدا به صورت دستی نشان دهید که سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ به صورت زیر است:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}, \quad -\pi < x < \pi$$

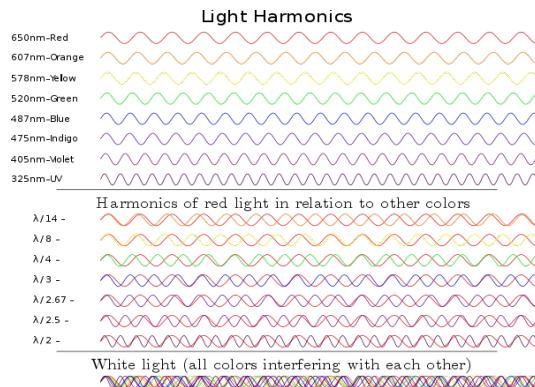
سپس به صورت دستی نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

و سپس به کمک قطعه کدی که نوشتید و انتخاب x مناسب پس از تشکیل سری فوریه، تطابق تحلیل دستی با کامپیوتری را بررسی کنید.

۵.۲ آنالیز هارمونیک در سری فوریه

آنالیز هارمونیک شاخه‌ای از ریاضیات است که مرتبط با نمایش توابع به صورت برآیندی از امواج پایه بوده و به مطالعه و نمایش مفاهیم سری فوریه و تبدیل فوریه می‌پردازد. اخیراً، این شاخه کاربردهای گسترده‌ای در نظریه اعداد، پردازش سیگنال، مکانیک کوانتومی، و علوم اعصاب دارد.



به روند یافتن ضرایب سری فوریه برای تابع با کمک مقادیر عددی آنالیز هارمونیک گفته می‌شود، روابط پایه مورد نیاز در این قسمت به شرح زیر است.

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)),$$

$$A_0 = \frac{2 \sum f(x)}{n}, \quad A_n = \frac{2 \sum f(x) \cos(nx)}{n}, \quad B_n = \frac{2 \sum f(x) \sin(nx)}{n}$$

لازم به ذکر است که در بسط سری فوریه، $(A_1 \cos(x) + B_1 \sin(x))$ را هارمونیک اول، $(A_2 \cos(2x) + B_2 \sin(2x))$ را هارمونیک دوم و $(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$ را هارمونیک n ام می‌نامیم.

۱۰.۵.۲ شبیه‌سازی آنالیز هارمونیک

در این قسمت، شما باید تابعی بنویسید که با گرفتن نقاط x و مقدار تابع $f(x)$ در آن نقطه، n هارمونیک اول سری فری را با روش بیان شده، محاسبه کرده، نمایش داده و رسم کند.

در نهایت قطعه کد خود را برای ورودی نمونه زیر و تا ۴ هارمونیک آزمایش کنید.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x)$	1	1.4	1.9	1.7	1.5	1.2	1

خروجی کد شما برای جدول ارائه شده به صورت زیر خواهد بود:

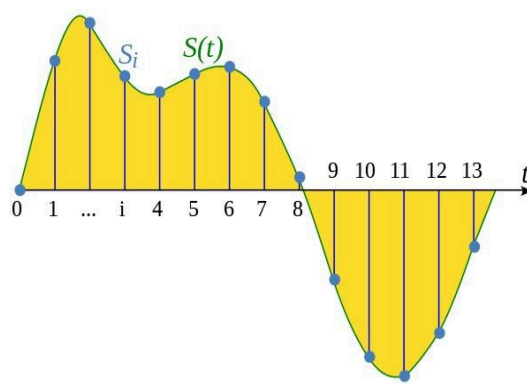
$$f(x) = 1.3857 - 0.2 \cos(x) + 1.0392 \sin(x) + 0.7 \cos(2x) - 0.1732 \sin(2x) + 0.7333 \cos(3x) + \dots$$

۳ تبدیل فوریه

در این قسمت به بررسی حوزه فرکانس چند تابع می‌پردازیم و سپس مفاهیم و کاربردهای تبدیل فوریه را در کار با Audio بررسی می‌کنیم.

۱.۳ فرکانس نمونه برداری

تصویر زیر را در نظر بگیرید.



تابع پیوسته‌زمان $S(t)$ را در نظر بگیرید، از این تابع در بازه‌های زمانی Δt ثانیه نمونه‌برداری می‌شود و تابع گسسته‌زمان S_i به دست می‌آید. فاصله زمانی بین هر دو نمونه را نرخ نمونه‌برداری می‌نامیم و فرکانس نمونه‌برداری به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\text{Sampling Freq} = \frac{1}{\text{Sampling Rate}}$$

۲.۳ بررسی حوزه زمان و فرکانس چند تابع

تابع $\cos(\pi t)$ را در نظر بگیرید.

- ابتدا تابع $\cos(\pi t)$ را در حوزه زمان در 2 دوره تناوب رسم کنید.

– تذکر: در این بخش برای ترسیم توابع فرکانس نمونه برداری را $f_s = 1000$ در نظر بگیرید.

- تبدیل فوریه این تابع را با کمک دستور `fft` و `fftshift` حساب کنید.

– تذکر: در `help` متلب در مورد دستورهای `fft` و `fftshift` مطالعه کنید و لزوم استفاده از `fftshift` برای گرفتن خروجی دقیق را تحقیق نمایید.

- تبدیل فوریه این تابع را به صورت تئوری محاسبه کنید و نتیجه این بخش را با خروجی MATLAB مطابقت دهید.

حال تمامی مراحل بالا را برای دو تابع $f(x) = 1$ و $f(x) = \delta(x)$ تکرار کنید.

۳.۳ موسیقی

در این قسمت به کار با یک فایل موسیقی می‌پردازیم.

- فایل audio داده شده را با کمک دستور audioread در متلب باز کنید.
- با کمک دستور sound به صدای آن گوش کنید.
- فرکانس نمونه برداری این فایل صوتی را گزارش کرده و در مورد علت آن تحقیق کنید.
– راهنمایی : در مورد قضیه نمونه برداری نایکوئیست مطالعه کنید.
- حال فرکانس نمونه برداری را دو برابر حالت اولیه کرده و نتیجه را با کمک دستور audiowrite گزارش کنید.
- با کمک دستور sound به صدای فایل صوتی جدید گوش کنید.
- حال فرکانس نمونه برداری را نصف حالت اولیه کرده و نتیجه را با کمک دستور audiowrite گزارش کنید.
- با کمک دستور sound به صدای فایل صوتی جدید گوش کنید.
- نتیجه گیری خود را از تغییر دادن فرکانس نمونه برداری گزارش کنید.

نکات کلی درباره پروژه

- در صورتی که در پروژه هر گونه ابهام و یا پرسشی دارید می‌توانید با [محمد امین کشمیری](#) یا [سروش مس‌فروش](#) در ارتباط باشید.
- در صورتی که سوالی از پروژه دارید که ممکن است برای دیگران نیز مفید باشد، آن را در گروه درس مطرح کنید.
- گزارش کار شما اصلی‌ترین معیار ارزیابی خواهد بود؛ در نتیجه زمان کافی را برای تکمیل آن اختصاص دهید.
- لطفاً تمامی خروجی‌ها، نمودارها و نتیجه‌گیری‌ها و همچنین نکات و فرض‌هایی که برای پیاده‌سازی و محاسبات خود در نظر می‌گیرید را در توضیحات ذکر کرده و نشان دهید.
- برای نوشتن گزارش کار می‌توانید از محیط MATLAB live script استفاده کنید اما اجباری به استفاده از آن در این درس وجود ندارد. در صورت تمایل می‌توانید برای نوشتن گزارش کار از محیط word یا $\text{L}^{\text{A}}\text{T}^{\text{E}}\text{X}$ نیز استفاده کنید.
- مشورت و همفکری با دوستان خود هنگام انجام پروژه کاری مفید و سازنده است و از انجام آن پرهیز نکنید، اما این کار باید در راستای فهم درس و پروژه باشد و از کپی‌کردن کدهای یکدیگر خودداری کنید.
- پاسخ‌های خود (فایل‌های MATLAB و گزارشکار و دو فایل صوتی خروجی گرفته شده) را به صورت یک فایل زیپ در سامانه درس با فرمت نامگذاری Engmath-CANum-SID بارگذاری نمایید.