

---

# INTRODUCTION AUX SURFACES DE RIEMANN

---

Nicolas Bergeron et Antonin Guilloux

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction aux divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine.

De nombreux passages de ces notes sont directement empruntés au livre [Sai2011]. Deux autres importantes sources d'inspiration, dont nous reprenons certaines figures, sont les textes de J.B. Bost [Bos1992] et É. Reyssat [Rey1989].



# Sommaire

<b>I Introduction</b>	3
I.1 Définitions et premières propriétés	3
I.2 Trois exemples simplement connexes	5
I.3 Structures conformes	10
I.4 Courbes elliptiques	13
<b>II Courbes algébriques et surface de Riemann</b>	23
II.1 Surface de Riemann d'un germe de fonction	23
II.2 Surfaces de Riemann épointées et revêtements ramifiés	26
II.3 Courbes algébriques et normalisation	29
II.4 Algébrisation des surfaces de Riemann compactes	35
<b>III Classification topologique des surfaces</b>	39
III.1 Surfaces orientables et triangulables	39
III.2 Classification topologique des surfaces compactes orientables	41
III.3 Quelques conséquences	45
III.4 Un exemple : la courbe de Klein	48
<b>IV Surfaces quotients, uniformisation</b>	53
IV.1 Quotient de surfaces de Riemann	53
IV.2 Le théorème de Belyi	60
IV.3 Classification des surfaces de Riemann	62
<b>Bibliographie</b>	65



# Introduction

## I.1. Définitions et premières propriétés

Une surface de Riemann est définie comme une variété complexe de dimension 1 :

**Définition I.1.1 (Surface de Riemann).** — Une *surface de Riemann* est un espace topologique  $X$  (connexe, séparé) muni d'un *atlas*  $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  où  $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  forme un recouvrement ouvert de  $X$  et les  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda$  sont des homéomorphismes vers des ouverts de  $\mathbb{C}$  (*les cartes*) tels que les compositions

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$$

sont des transformations biholomorphes (c'est-à-dire des bijections holomorphes).

Avec cette définition, on peut étendre immédiatement les propriétés et objets locaux de  $\mathbb{C}$  et définir les notions de fonctions et de formes holomorphes ou méromorphes, d'applications holomorphes et de biholomorphismes (ou isomorphismes) entre surfaces de Riemann :

- Une fonction complexe  $\psi$  définie sur un ouvert  $U \subset X$  est *holomorphe* si pour tout  $P \in U$  et pour toute carte  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  telle que  $P \in U_\lambda$ , la fonction  $\psi \circ \varphi_\lambda^{-1}$  est holomorphe au voisinage de  $z = \varphi_\lambda(P)$ . De plus : la fonction  $\psi$  a un zéro d'ordre  $n$  en  $P$  si et seulement si  $\psi \circ \varphi_\lambda$  a un zéro d'ordre  $n$  en  $z$ .

- De la même manière on définit les fonctions *méromorphes* sur les surfaces de Riemann ainsi que l'ordre d'un pôle d'une fonction méromorphe.
- Une application continue  $f : Y \rightarrow X$  entre deux surfaces de Riemann est *holomorphe* si, pour toute carte locale  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  dans  $X$ , l'application  $\varphi_\lambda \circ f$  est holomorphe. Une telle application est un *isomorphisme* de surfaces de Riemann, ou un *biholomorphisme*, si c'est un homéomorphisme et son inverse est holomorphe.

On note  $\mathcal{M}(X)$  le corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann  $X$ .

**Remarque I.1.2.** — Ces définitions ne dépendent pas de la carte choisie, notamment l'ordre des pôles et zéros car les changements de cartes sont des biholomorphismes.

Parmi les propriétés des fonctions holomorphes qui s'étendent aux fonctions sur les surfaces de Riemann, on commence par citer le théorème d'extension holomorphe d'une fonction bornée sur un disque épointé :

**Proposition I.1.3.** — Soient  $U$  un ouvert d'une surface de Riemann  $X$ ,  $p$  un point de  $U$  et  $f$  holomorphe bornée sur  $U \setminus \{p\}$ . Alors  $f$  s'étend en une fonction holomorphe sur  $U$

*Démonstration.* — Cela découle immédiatement du théorème d'extension des fonctions holomorphes bornées sur un disque épointé de  $\mathbb{C}$  [Rud1987] en considérant une carte locale autour de  $p$ .  $\square$

Une autre propriété importante est le fait que deux fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble avec un point d'accumulation coïncident partout :

**Proposition I.1.4.** — Soient  $U \subset X$  un ouvert connexe,  $D \subset U$  un sous-ensemble possédant un point d'accumulation et deux fonctions  $f$  et  $g$  méromorphes sur  $U$ .

Si  $f$  et  $g$  coïncident sur  $D$ , elles coïncident sur  $U$ .

*Démonstration.* — On commence par choisir un ouvert de carte  $U_\lambda$  tel que  $U_\lambda \cap D$  a un point d'accumulation. Dans cette carte locale, on peut appliquer le résultat pour les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  [Rud1987] :  $f$  et  $g$  coïncident donc sur  $U \cap U_\lambda$ . Maintenant, si  $U_\mu$  est un autre ouvert

de carte qui intersecte  $U \cap U_\lambda$ ,  $f$  et  $g$  sont holomorphes sur  $U \cap U_\mu$ , coïncident sur l'ouvert non-vide  $U \cap U_\lambda \cap U_\mu$ , donc – en appliquant encore une fois la même propriété –  $f$  et  $g$  coïncident aussi sur  $U \cap U_\mu$ .

On propage ainsi l'égalité  $f = g$  de proche en proche à tout l'ouvert  $U$ . □

Une conséquence de cette dernière proposition et du principe du maximum est que, sur une surface de Riemann compacte, les fonctions holomorphes sont constantes.

***Théorème 1.1.5.*** — *Toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante.*

*Démonstration.* — Soit  $X$  une surface de Riemann compacte. Le module d'une fonction holomorphe  $f$  sur  $X$  est continu. Il atteint son maximum en un point. La fonction  $f$  est donc constante sur toute carte locale autour de ce point, d'après le principe du maximum pour les fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  [Rud1987]. En utilisant la proposition précédente ( $X$  est supposée connexe dans la définition) on conclut que  $f$  est constante sur  $X$ . □

## 1.2. Trois exemples simplement connexes

On décrit ici trois exemples simplement connexes de surfaces de Riemann. Le théorème d'uniformisation, qu'on verra plus loin, énonce que ce sont les seuls et que toute surface de Riemann est un quotient d'un de ces exemples. On décrira donc les groupes d'automorphismes de chacun de ces exemples ce qui permettra plus tard de décrire leurs quotients.

### 1.2.1. Le plan $\mathbb{C}$

Le plan est évidemment une surface de Riemann simplement connexe !

### 1.2.2. Le disque $\mathbb{D}$ ou le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$

Tout ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  est une surface de Riemann simplement connexe. Cependant, du point de vue des surfaces de Riemann, ils ne donnent qu'un seul exemple en plus de  $\mathbb{C}$  lui-même. En effet, le théorème de représentation conforme de Riemann [Rud1987]

énonce que tout ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}$  différent de  $\mathbb{C}$  est bi-holomorphe au disque unité

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Nous préférons souvent au disque le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Un biholomorphisme entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} \\ z &\mapsto i \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

et s'étend en un homéomorphisme des bords :  $\mathbb{S}^1 \simeq \partial \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \partial \mathbb{H} \simeq \mathbb{RP}^1$ .

### I.2.3. La sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ ou $\mathbb{CP}^1$

En plus de  $\mathbb{C}$  et de ses ouverts, un exemple fondamental de surface de Riemann est la *sphère de Riemann* : on peut en effet recouvrir la sphère unité

$$\mathbb{S}^2 := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

par les deux ouverts  $\mathbb{S}^2 \setminus N$  et  $\mathbb{S}^2 \setminus S$  (où  $S = (0, 0, -1)$  et  $N = (0, 0, 1)$  sont les pôles sud et nord) que l'on munit des *projections stéréographiques* (voir figure 1)

$$\begin{aligned} \varphi_N : \quad \mathbb{S}^2 \setminus N &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X+iY}{1-Z} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_S : \quad \mathbb{S}^2 \setminus S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \\ P = (X, Y, Z) &\mapsto \frac{X-iY}{1+Z}. \end{aligned}$$

Pour un point  $P$  de la sphère différent des pôles, on vérifie l'équation  $\varphi_N(P) = 1/\varphi_S(P)$ ; puisque  $z \mapsto 1/z$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}^*$ , cela munit la sphère d'une structure de surface de Riemann, notée  $\overline{\mathbb{C}}$ , que l'on peut penser comme la compactification naturelle  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{C}$  par un point à l'infini, ou de manière équivalente comme la droite projective  $\mathbb{CP}^1$ . Les deux notations cohabitent d'ailleurs dans ces notes.

**Remarque I.2.1.** — Une application méromorphe sur une surface de Riemann  $X$  peut être vue comme une fonction holomorphe de  $X$  vers  $\mathbb{CP}^1$ .



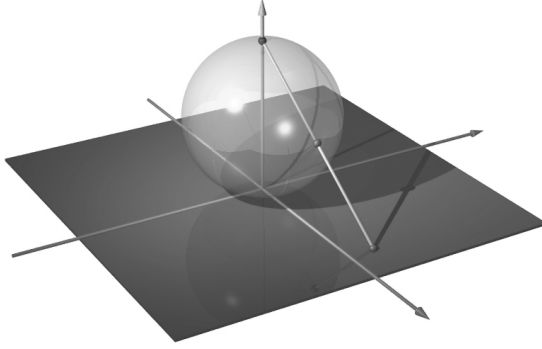


FIGURE 1. Projection stéréographique

#### I.2.4. Leurs groupes d'automorphismes

On détermine ici le groupe d'automorphisme de chacun des trois exemples, en commençant par déterminer le corps des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{CP}^1$ .

**Théorème I.2.2.** — *Le corps des fonctions méromorphes  $\mathcal{M}(\mathbb{CP}^1)$  est isomorphe au corps des fractions rationnelles  $\mathbb{C}(z)$  au-dessus de  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* — Toute fraction rationnelle  $r(z) \in \mathbb{C}(z)$  définit une fonction méromorphe sur  $\mathbb{CP}^1$ . Réciproquement, considérons une fonction méromorphe  $f$  sur  $\mathbb{CP}^1$ . Quitte à post-composer par  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , on peut supposer que  $f(\infty) \in \mathbb{C}$ . Dans la coordonnée  $\varphi_N$  on écrit :

$$f_N := f \circ \varphi_N^{-1} = \sum_{i=1}^m p_i(z) + q(z),$$

où

$$p_i(z) = \frac{b_{i,m_i}}{(z - a_i)^{m_i}} + \dots + \frac{b_{i,1}}{z - a_i}$$

est la partie principale du polynôme de Laurent de  $f$  autour d'un pôle  $a_i$ , et  $q(z)$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Comme  $\infty$  n'est pas un pôle de  $f$ , alors  $q(z)$  est bornée et donc constante. Ainsi :

$$f_N = \sum_{i=1}^m p_i(z) + c$$

est une fraction rationnelle. □

Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  est donc le groupe des fractions rationnelles bijectives. Ce sont les *homographies* :

**Proposition I.2.3.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  des automorphismes de la sphère de Riemann est le groupe de Moebius  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  agissant par homographie :*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*Démonstration.* — On vérifie d'abord que cette action est bien définie (i.e. ne dépend pas du représentant choisi de l'élément de  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ ) et est une action par automorphisme : l'inverse de l'action d'une matrice est donnée par l'action de la matrice inverse. On vérifie enfin élémentairement que cette action est bien fidèle (deux éléments différents de  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  n'agissent pas de la même façon).

Il reste à montrer que tout automorphisme est une homographie. Un automorphisme étant une application méromorphe, le théorème précédent implique que c'est une fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$ . Elle doit être injective, or  $\frac{P}{Q} = z$  a autant de racines que le maximum des degrés de  $P$  et  $Q$ . Donc le numérateur et le dénominateur sont de degré au plus 1 et  $\frac{P}{Q}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  pour certains  $a, b, c$  et  $d$  dans  $\mathbb{C}$ . Comme la fraction rationnelle est surjective, elle ne doit pas être constante. Donc le dénominateur et le numérateur ne sont pas proportionnels, autrement dit on a  $ad - bc \neq 0$ . On voit que  $\frac{P}{Q}$  est donnée par l'action d'un élément de  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

On détermine les automorphismes du plan en les étendant en des automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  :

**Proposition I.2.4.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  des automorphismes du plan est le groupe affine  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  des transformations affines de  $\mathbb{C}$ ,*

*Démonstration.* — D'après la proposition I.1.3, un automorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}$  s'étend holomorphiquement à  $\mathbb{CP}^1$  en posant  $f(\infty) = \infty$  et cette extension est un automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$ . C'est donc une homographie qui fixe l'infini, donc une application affine de la forme  $z \mapsto az + b$ .  $\square$

Le groupe d'automorphisme du disque se détermine grâce au lemme de Schwarz (qui se montre facilement à l'aide du principe du maximum [Rud1987]) :

**Lemme I.2.5.** — *Toute fonction holomorphe  $f$  de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  fixant 0 vérifie  $|f(z)| \leq |z|$  pour  $z \in \mathbb{D}$  et  $|f'(0)| < 1$ . De plus, si  $|f'(0)| = 1$ , alors il existe  $a \in \mathbb{C}$  avec  $|a| = 1$  et  $f(z) = az$*

On obtient :

**Proposition I.2.6.** — *Le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  des automorphismes du demi-plan est le groupe  $\text{PU}(1, 1)$  agissant par homographie.*

*Démonstration.* — D'abord, l'action par homographie du groupe  $\text{PU}(1, 1)$  – donnée, pour tout  $a, b$  avec  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ , par  $z \rightarrow \frac{az+b}{-bz+a}$  – envoie  $\mathbb{D}$  dans lui-même, est transitive. Donc, étant donné un biholomorphisme  $f$ , quitte à composer par une telle homographie, on peut supposer qu'il fixe 0. D'après le lemme précédent,  $|f'(z)| < 1$ . Comme ce doit être vrai pour sa réciproque, on a finalement  $|f'(0)| = 1$ , donc il existe  $t$  tel que  $f(z) = e^{it}z$ . Donc  $f$  est donnée par l'action de la matrice  $\begin{pmatrix} e^{i\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$  de  $\text{U}(1, 1)$ .  $\square$

On en déduit, grâce au biholomorphisme donné entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$ , le groupe des biholomorphisme de  $\mathbb{H}$  :

**Corollaire I.2.7.** — *Les groupe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  des biholomorphismes du demi-plan est le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant par homographie.*

*Démonstration.* — On le déduit de deux remarques : l'isomorphisme donné entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$  se prolonge en un automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$ . De plus, la description des automorphismes de  $\mathbb{D}$  montre que ce sont exactement les automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  qui préservent  $\mathbb{D}$ . Ainsi les automorphismes de  $\mathbb{H}$  sont les automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  préservant  $\mathbb{H}$ .

Il reste à déterminer ces derniers. S'ils préservent  $\mathbb{H}$ , ils préservent son bord  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{RP}^1$ . On voit facilement qu'ils sont donc donnés par l'action d'un élément de  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ . De plus, pour préserver  $\mathbb{H}$ , il faut que le déterminant soit positif. Donc, quitte à renormaliser, ils sont donnés par l'action d'un élément de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ .  $\square$

Concluons en mentionnant les diverses transitivités de l'action de ces groupes :

1.  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  est 1-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par l'image d'un point de  $\mathbb{H}$  et d'un point de  $\partial\mathbb{H}$  (auquel l'action du groupe se prolonge par continuité).

2.  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  est 2-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de deux points distincts de  $\mathbb{C}$ .
3.  $\text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$  est 3-transitif et un élément de ce groupe est complètement déterminé par les images de trois points distincts de  $\mathbb{CP}^1$ .

### I.3. Structures conformes

Un théorème de Gauss fournit une large source d'exemples de surfaces de Riemann. Nous expliquons ce théorème dans cette section. On peut le réinterpréter en disant que toute métrique riemannienne analytique réelle sur une surface analytique la munit d'une structure de surface de Riemann. L'interaction entre cette structure et la géométrie de la métrique est au cœur de la théorie de Hodge que nous détaillons plus loin. Gauss démontre que *toute surface (analytique) est localement conformément équivalente au plan euclidien*<sup>(1)</sup>.

On appelle *carte conforme* un système de coordonnées locales  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  dans lequel la métrique prend la forme  $m(x, y)(dx^2 + dy^2)$ . Le théorème de Gauss s'énonce alors :

**Théorème I.3.1 (Gauss).** — *Soit  $g$  une métrique riemannienne analytique réelle, définie au voisinage d'un point  $p$  sur une surface analytique. Alors il existe une carte conforme  $V \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie sur un voisinage ouvert de  $p$  et à valeurs dans le plan euclidien.*

**Remarque I.3.2.** — Après avoir pris des coordonnées au voisinage de  $p$ , on dispose donc d'une métrique analytique  $g$  dans un voisinage  $U$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$ .

Pour mieux comprendre la démonstration de Gauss, commençons par démontrer un théorème analogue mais dans le cas où l'ouvert  $U$  est muni d'une métrique *lorentzienne*  $g$ . On se donne donc en chaque point de  $U$  une forme quadratique de signature  $(+, -)$  et il s'agit de montrer que cette métrique lorentzienne est conforme à la métrique lorentzienne standard  $dx^2 - dy^2$  de  $\mathbb{R}^2$  (pour une généralisation évidente du concept de conformité dans le cadre lorentzien).

<sup>(1)</sup>Mentionnons que, pour Gauss, les surfaces sont plongées dans l'espace et munies de la métrique induite.

En chaque point de  $U$ , la métrique  $g$  définit deux droites sur lesquelles elle s'annule : les deux directions isotropes. Localement, on peut trouver deux champs de vecteurs non singuliers qui paramètrent ces directions. Lorsqu'on les intègre, on définit ainsi deux réseaux de courbes isotropes qui s'intersectent transversalement. Pour la métrique lorentzienne standard  $dx^2 - dy^2$ , ces courbes ne sont bien entendu que les droites parallèles de pente  $\pm 1$ .

On fixe maintenant l'origine  $O$  comme point base dans  $U$  et on choisit arbitrairement un point  $P_0$  de  $\mathbb{R}^2$ . Par le point  $O$  passent deux courbes isotropes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Par  $P_0$  passent deux droites isotropes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de la métrique lorentzienne standard de  $\mathbb{R}^2$ . On envoie  $\mathcal{C}_1$  sur  $\mathcal{D}_1$  par un difféomorphisme  $f_1$  arbitraire, et  $\mathcal{C}_2$  sur  $\mathcal{D}_2$  par un autre difféomorphisme  $f_2$ . Soit maintenant un point  $m$  de  $U$  suffisamment proche de l'origine. Par  $m$  passent deux courbes isotropes  $\widetilde{\mathcal{C}}_1$  et  $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ . Quitte à restreindre l'ouvert  $U$  en un ouvert plus petit  $V$ , on peut supposer que  $\widetilde{\mathcal{C}}_1$  intersecte  $\mathcal{C}_2$  en un seul point  $p_2$ , et l'autre,  $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ , intersecte  $\mathcal{C}_1$  en un seul point  $p_1$ .

La carte  $\psi$  que l'on cherche à construire est celle qui envoie le point  $m$  de  $V$  sur le point  $M = \psi(m)$  de  $\mathbb{R}^2$ , intersection des droites isotropes de  $\mathbb{R}^2$  passant par les points  $P_1 = f_1(p_1)$  et  $P_2 = f_2(p_2)$ . La transformation  $\psi$  ainsi définie envoie courbes isotropes de  $V$  sur droites isotropes de  $\mathbb{R}^2$  et donc directions isotropes de la métrique lorentzienne  $g$  sur  $V$  sur directions isotropes de la métrique lorentzienne standard de  $\mathbb{R}^2$  (voir figure 2). Autrement dit, on redresse les deux champs de vecteurs directeurs.

Remarquons – c'est un point crucial – que deux formes quadratiques de signature  $(+, -)$  sur un espace vectoriel réel de dimension 2 sont proportionnelles si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

On peut donc écrire  $\psi_*g = m(x, y)(dx^2 - dy^2)$  où  $m$  est une fonction qui ne s'annule pas. Autrement dit,  $\psi$  est une carte conforme et le théorème de Gauss est établi *dans le cadre lorentzien* (sans hypothèse d'analyticité).

Revenons maintenant au théorème de Gauss. Dans ce cas,  $g$  est une métrique *riemannienne* analytique réelle, il n'y a pas de direction isotrope. Pour y remédier, on complexifie l'ouvert  $U$  en un ouvert  $\hat{U} \subset \mathbb{C}^2$ ; c'est un voisinage ouvert de  $U$  considéré maintenant comme contenu

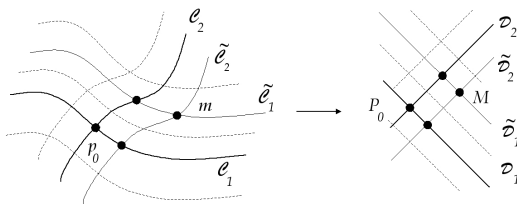


FIGURE 2. Théorème de GAUSS, version lorentzienne

dans  $\mathbb{C}^2$ . On notera  $\hat{g}_0 = dx^2 + dy^2$  la métrique « riemannienne complexe » standard de  $\mathbb{C}^2$ , où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées (complexes !) usuelles sur  $\mathbb{C}^2$  (à strictement parler ce n'est pas une métrique riemannienne puisque cette forme quadratique prend des valeurs complexes). Les coefficients de la métrique  $g$  étant des fonctions analytiques réelles, on peut – quitte à diminuer  $\hat{U}$  – prolonger  $g$  de manière unique en une métrique  $\hat{g}$  analytique complexe (*i.e.* holomorphe) sur l'ouvert  $\hat{U}$ . Puisque les coefficients de  $g$  sont réels,  $\hat{g}$  est invariant par la conjugaison complexe  $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ . Sur  $\mathbb{C}^2$  on dispose de deux réseaux transverses de droites complexes isotropes pour la métrique standard  $\hat{g}_0$ , d'équations  $y = \pm ix + \text{cste}$ . Sur  $\hat{U}$  on dispose de deux champs de droites complexes holomorphes, isotropes pour la métrique  $\hat{g}$ . On les intègre pour obtenir deux champs de courbes holomorphes se coupant transversalement (ces courbes dans  $\mathbb{C}^2$  correspondent à des surfaces dans  $\mathbb{R}^4$ ).

On envoie alors l'origine  $O$  de  $U$  sur un point réel arbitraire  $P_0$  de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ . Par  $O$  passe une courbe complexe isotrope  $\mathcal{C}_1$ . Par  $O$  passe également la courbe complexe  $\mathcal{C}_2$  transformée par conjugaison complexe de la courbe  $\mathcal{C}_1$ . À l'aide de ces courbes on définit, exactement comme dans le cadre lorentzien, une transformation  $\hat{\psi}$  d'un voisinage  $\hat{V}$  de  $O$  inclus dans  $\hat{U}$ , à image dans  $\mathbb{C}^2$ . Le difféomorphisme  $\hat{\psi}$  a la propriété additionnelle d'être invariant par la conjugaison complexe. Il induit donc un difféomorphisme de  $V = \hat{V} \cap \mathbb{R}^2$  sur son image  $\hat{\psi}(\hat{V}) \cap \mathbb{R}^2$ . Le fait que la complexification d'un difféomorphisme  $\psi$  préserve les directions isotropes de la complexification d'une métrique signifie précisément que la carte est conforme. Le théorème de Gauss est établi.  $\square$

Bien entendu, les cartes conformes locales  $\psi$  ne sont pas uniques. Deux d'entre elles diffèrent par une transformation conforme du plan. Il

s'agit donc de décrire la nature des transformations  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  entre ouverts de  $\mathbb{R}^2$  préservant la structure conforme standard ce qui s'exprime par  $dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2)$  pour une certaine fonction  $m$ .

Autrement dit, il faut et il suffit que la différentielle soit une similitude en tout point. Si l'on suppose que l'orientation est préservée (similitude directe), ceci s'écrit en formules

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}; \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On reconnaît bien sûr les équations de « Cauchy-Riemann » qui expriment que  $X + iY$  est une fonction holomorphe de  $x + iy$ .

Résumons ce que Gauss obtient :

*Toute surface (analytique et orientée) peut être représentée par des cartes locales conformes préservant l'orientation à valeurs dans le plan euclidien, identifié au plan complexe. Deux de ces cartes diffèrent d'un changement de cartes holomorphe.*

Toute métrique riemannienne sur une surface orientée définit donc une *surface de Riemann*.

Le théorème de Gauss que nous avons établi dans le cas des métriques analytiques réelles reste vrai pour des métriques  $C^\infty$  ou même mesurables, mais il est alors bien plus difficile. Il sera démontré par Korn en 1914 et Lichtenshtein en 1916 dans le cadre  $C^\infty$ , et finalement par Ahlfors et Bers en 1960 dans le cadre mesurable.

## I.4. Courbes elliptiques

Nous discutons ici une troisième famille d'exemples, fondamentale : les courbes elliptiques. Nous verrons germer deux idées-forces de la théorie, sur lesquelles nous reviendrons longuement : le lien entre surfaces de Riemann (compacte) et géométrie algébrique, ainsi que la détermination des fonctions à pôles et zéros fixés

### I.4.1. Définition

On a déjà mentionné le théorème d'uniformisation : toute surface de Riemann est un quotient de la sphère, du plan ou du disque. On voit qu'il n'y a pas d'automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  qui agissent sans point fixe : il n'y a

donc pas de quotients non triviaux de  $\mathbb{CP}^1$ . On regarde ensuite les quotients du plan  $\mathbb{C}$ . Si l'on cherche un quotient compact, il est forcément de la forme  $\mathbb{C}/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbb{C}$  :

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \text{ avec } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ deux vecteurs } \mathbb{R}\text{-indépendants de } \mathbb{C}.$$

Ces surfaces sont topologiquement des tores, et on montrera plus loin que toute surface de Riemann qui est un tore (« de genre 1 ») est de ce type. Ces tores, considérés comme surfaces de Riemann, sont appelés *courbes elliptiques*. Ils ne sont pas holomorphiquement équivalents les uns aux autres. Étant donnés deux réseaux  $\Lambda_1, \Lambda_2$  dans  $\mathbb{C}$ , il n'y a bijection holomorphe entre  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  et  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  que si  $\Lambda_2 = k\Lambda_1$  pour un certain  $k \in \mathbb{C}$  non nul. Ainsi les courbes elliptiques dépendent d'un paramètre complexe (les réseaux à homothétie près) qu'on appelle un *module*. Une particularité très importante est que ces courbes elliptiques portent une structure de groupe abélien, héritée de celle de  $\mathbb{C}$ .

### I.4.2. Fonctions elliptiques

Considérons un réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  avec  $\omega_1, \omega_2$  deux nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  et notons  $E$  la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Le corps des fonctions méromorphes  $\mathcal{M}(E)$  définies sur la courbe  $E$  est constitué des fonctions méromorphes  $f$  dans le plan complexe qui admettent deux périodes indépendantes  $\omega_1, \omega_2$  :

$$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z)$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $m, n$  entiers relatifs. Ces fonctions sont appelées *fonctions elliptiques*. Il n'est pas encore clair que de telles fonctions (non-constantes) existent. Retraçons brièvement l'émergence de ces fonctions.

À partir de maintenant, on normalise notre réseau par une homothétie bien choisie, de sorte qu'il soit de la forme  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ , avec  $\text{Im}(\omega) > 0$ .

*Digression historique.* — Au dix-neuvième siècle, les analystes disposaient d'un petit nombre de *fonctions élémentaires* : les polynômes et les fractions rationnelles bien sûr, les *fonctions algébriques*  $y(x)$  vérifiant une équation polynomiale  $F(x, y) = 0$  (même si elles sont multiformes) mais aussi les fonctions exponentielles et trigonométriques. La première tentative pour « trouver de nouvelles transcendentes qui enrichissent l'analyse » consiste à étudier les primitives des fonctions déjà connues.



Cette technique avait déjà fait ses preuves pour « découvrir » par exemple le logarithme

$$\log(x) = \int \frac{dx}{x}.$$

Euler, Gauss, Legendre, Abel, Jacobi, entre autres, s'attaquèrent à l'étude générale des intégrales que, suivant Jacobi, on appelle aujourd'hui *intégrales abéliennes*, c'est-à-dire de la forme

$$\int R(x, y) dx$$

où  $R$  est une fraction rationnelle en deux variables  $x, y$  et où  $y$  est une fonction algébrique de  $x$ .

La première étude est un calcul un peu « magique » fait par Euler alors qu'il commentait un article de Fagnano. Il s'agit d'étudier l'une des premières primitives qu'on ne pouvait exprimer par des fonctions élémentaires :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

qui entre dans le cadre précédent avec  $y^2 = 1 - x^4$  et  $R(x, y) = 1/y$ . Cette primitive intervient lorsque l'on veut calculer la longueur d'un arc de lemniscate dont l'équation en coordonnées polaires est  $r^2 = \sin(2\theta)$ .

Euler démontre un « théorème d'addition » en 1752 :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

avec

$$z = (x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4})/(1+x^2y^2).$$

Sa motivation provient sans aucun doute de l'intégrale analogue

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x).$$

Si bien que la formule

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

donne la formule d'addition :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

avec

$$z = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

On peut voir cette dernière formule comme la formule d'addition pour les points  $(\sqrt{1-x^2}, x)$  du cercle unité. Il faut noter qu'à ce stade, ces identités sont établies pour des  $x, y$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Mais elles posent des problèmes de choix de détermination de la racine carrée dès qu'on sort de cet intervalle. Mentionnons en outre qu'Euler ne fait pas explicitement usage de variables complexes dans ce travail.

Gauss n'a rien publié de son vivant sur le sujet mais ses lettres attestent qu'il avait compris la question, à partir de 1796. Sa première idée est d'inverser la fonction

$$a = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

et de considérer  $x$  comme une fonction de  $a$ , qu'il note  $x = \sin \operatorname{lemn}(a)$ . Là encore, on peut penser à l'analogie avec le cercle ; il est agréable de paramétrer le cercle par longueur d'arc, en sinus et cosinus. Suivant Euler, il peut établir une formule d'addition pour  $\sin \operatorname{lemn}(a+b)$  mais il ne s'arrête pas là.

Même s'il hésite encore (à cette époque) à considérer l'intégrale précédente lorsque  $x$  est un nombre complexe, il est tenté de choisir  $x$  imaginaire pur, de la forme  $iy$ , et de considérer l'intégrale

$$\int_0^y \frac{i dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

On est donc amené à poser  $\sin \operatorname{lemn}(ib) = i \sin \operatorname{lemn}(b)$ . Puisque l'on dispose d'une formule d'addition, cela permet de définir  $\sin \operatorname{lemn}(a+ib)$  en fonction de  $\sin \operatorname{lemn}(a)$  et  $\sin \operatorname{lemn}(b)$ . *La fonction elliptique sin lemn d'une variable complexe  $a+ib$  venait de naître.*

Gauss continue alors l'étude de cette fonction par analogie avec la fonction sinus. À partir de la formule d'addition, convenablement étendue sur tout  $\mathbb{R}$ , on montre que la fonction  $\sin \operatorname{lemn}$  est périodique de période

$$2\varpi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

De la même façon, on trouve une seconde période égale à  $2i\varpi^{(2)}$ . La fonction  $\sin \operatorname{lemn}$  admet donc *deux* périodes linéairement indépendantes, ce qui est la *définition* des fonctions elliptiques. La terminologie « elliptique » provient du fait que ces transcendentes interviennent non seulement pour calculer la longueur des arcs de la lemniscate, mais aussi des ellipses.

Vingt-cinq ans plus tard, Abel et Jacobi reprendront le chemin suivi par Gauss. Mais autour de 1827 ils iront beaucoup plus loin. Abel et Jacobi étudient

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

et ont la bonne idée de penser à  $x$  comme une fonction de  $u$  (sans savoir que Gauss avait eu la même idée). Le « module »  $k$  étant fixé, ils notent  $x = \sin \operatorname{am}(u)$ . Ils « établissent » que  $x$  est une fonction méromorphe uniforme et doublement périodique de  $u$ , qui vérifie une formule d'addition. Ils obtiennent par ailleurs un grand nombre de développements en séries de ces fonctions.

Jacobi développe par ailleurs des outils extrêmement puissants pour construire des fonctions elliptiques comme quotients de fonctions holomorphes. Ce sont les fonctions  $\vartheta$ . Leur écriture est relativement simple. Partant d'un paramètre  $\omega$  complexe, on pose  $p = \exp(i\pi z)$  et  $q = \exp(i\pi\omega)$ . On note alors :

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= \vartheta_1(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_2(z) &= \vartheta_2(z|\omega) = i \sum p^{2n-1} q^{(n-1/2)^2}, \\ \vartheta_3(z) &= \vartheta_3(z|\omega) = i \sum p^{2n} q^{n^2}, \\ \vartheta_4(z) &= \vartheta_4(z|\omega) = i \sum (-1)^n p^{2n} q^{n^2}.\end{aligned}$$

Lorsqu'on a  $\operatorname{Im} \omega > 0$ , ces séries convergent et définissent des fonctions 1-périodiques de  $z$ . Elles ne sont néanmoins pas elliptiques dans le sens où elles n'ont pas d'autre période linéairement indépendante. Cependant  $\vartheta_i(z + \omega)$  s'exprime très simplement à partir de  $\vartheta_i(z)$ . Par exemple :

$$\vartheta_1(z + \omega) = -p^{-2} q^{-1} \vartheta_1(z).$$

<sup>(2)</sup> $2\varpi$  est le périmètre de la lemniscate considérée. C'est pour cette raison que la notation  $\varpi$  a été introduite.

L'intérêt est donc que des quotients de deux fonctions  $\vartheta$  peuvent être des fonctions doublement périodiques. Ainsi  $\vartheta_1/\vartheta_4$  est une fonction elliptique de périodes 1 et  $\omega$ . Les fonctions  $\vartheta$  vérifient un nombre incroyable d'identités aussi étonnantes les unes que les autres et leurs applications – notamment en théorie des nombres – n'ont cessé de prouver leur intérêt.

On peut consulter par exemple [McKMo1997, Mum1983, Mum1999], pour en savoir *beaucoup* plus.

Après 1840, la théorie des *fonctions elliptiques* se stabilise et prend la forme qu'on lui connaît aujourd'hui. Les fonctions obtenues par Abel et Jacobi comme réciproques de primitives de  $1/\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$  sont des exemples de telles fonctions, mais y en a-t-il d'autres ? Peut-on choisir arbitrairement les périodes ?

*Théorème d'Abel-Jacobi.* — Pour construire des fonctions elliptiques, on peut aussi considérer la fonction  $\sigma$  de Weierstrass :

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}}.$$

On vérifie que  $\sigma$  est convergente et a un zéro simple en chaque point de  $\Lambda$ . Elle n'est elle non plus pas elliptique, mais on peut montrer la règle de transformation suivante : pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $n_\lambda \in \{0, 1\}$  et  $c_\lambda \in \mathbb{C}$  tels que

$$\sigma(z + \lambda) = (-1)^{n_\lambda} e^{c_\lambda(z - \frac{\lambda}{2})} \sigma(z).$$

Cette fonction permet de prouver le théorème suivant, dû à Abel et Jacobi, qui décrit les fonctions elliptiques à pôles et zéros prescrits :

***Théorème I.4.1 (Abel-Jacobi pour les courbes elliptiques)***

*Soit  $(a_i)_{i \in I}$  un nombre fini de points de  $E$  pondérés de poids  $n_i \in \mathbb{Z}^*$ . Alors il existe une fonction elliptique sur  $E$  ayant en chaque  $a_i$  un pôle d'ordre  $-n_i$  si  $n_i < 0$  ou un zéro de multiplicité  $n_i$  si  $n_i > 0$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned} \sum n_i &= 0 \\ \sum n_i a_i &= 0 \end{aligned}$$

**Remarque I.4.2.** — Une telle fonction est unique à multiplication par un scalaire près. En effet, si on dispose de deux telles fonctions, leur quotient est holomorphe sur  $E$ , donc constant.

*Démonstration.* — La condition est suffisante, et la fonction est alors donnée par les fonctions  $\sigma$ . En effet, soient  $\tilde{a}_i$  des relevés des  $a_i$  à  $\mathbb{C}$  avec  $\sum n_i \tilde{a}_i = 0$ . Alors la fonction

$$f(z) = \prod \sigma(z - \tilde{a}_i)^{n_i}$$

vérifie l'égalité :

$$f(z + \lambda) = \prod (-1)^{n_i} e^{c_\lambda \left( (z - \frac{\lambda}{2}) \sum n_i - \sum n_i \tilde{a}_i \right)} f(z).$$

L'hypothèse sur les  $n_i$  et les  $a_i$  garantit alors que cette fonction est elliptique, donc peut-être considéré comme une fonction méromorphe sur  $E$ . De plus, comme  $\sigma(z)$  a un zéro simple en tous les points du réseau,  $f$  a exactement les pôles et zéros prescrits.

Le fait que la condition soit nécessaire découle de la formule des résidus. On choisit un parallélogramme fondamental pour le réseau  $\Lambda$  tel que son bord ne contienne pas de relevé des  $a_i$ . Pour simplifier les notations, on supposera que le parallélogramme  $P$  de sommets  $0, 1, \omega$  et  $1 + \omega$  vérifie cette hypothèse. On choisit cette fois comme relevé de  $\tilde{a}_i$  celui (il est unique) qui est à l'intérieur du parallélogramme  $P$ . La formule des résidus donne alors dans un premier temps :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n_i.$$

Or la fonction  $f$  est elliptique, donc prend les mêmes valeurs sur les côtés parallèles. Comme on les parcourt une fois dans un sens, une fois dans l'autre en parcourant  $\partial P$ , cette intégrale s'annule.

Pour la deuxième condition, on calcule cette fois les résidus de  $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ . On montre (exercice) que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum n_i \tilde{a}_i.$$

On décompose cette intégrale sur les 4 côtés et on les associe par côtés opposés. Par exemple, montrons que  $\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{1+\omega}^\omega z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in$

$\mathbb{Z}\omega$ . En effet, on écrit, grâce à la  $\omega$ -périodicité de  $f$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{1+\omega}^\omega z \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega) \frac{f'(z+\omega)}{f(z+\omega)} dz \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 z \frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
 &= -\frac{\omega}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
 &= -\frac{\omega}{2i\pi} [\ln(f(z))]_0^1
 \end{aligned}$$

Or  $f(0) = f(1)$ , donc  $[\ln(f(z))]_0^1$  appartient à  $2i\pi\mathbb{Z}$  (seule la détermination de l'argument change, d'un multiple entier de  $2\pi$ ). Ce qui prouve le résultat annoncé.

On montre de même que la somme  $\frac{1}{2i\pi} \int_1^{1+\omega} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_\omega^0 z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

Ainsi le résidu calculé appartient à  $\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = \Lambda$ . En projetant dans la courbe elliptique, on a bien  $\sum n_i a_i = 0$ .  $\square$

*Diviseurs.* — On reviendra dans le chapitre ?? sur ce théorème et expliquerons comment le généraliser à d'autres surfaces de Riemann. La notion cruciale sera celle de *diviseur* que nous introduisons dès maintenant.

**Définition I.4.3.** — Un diviseur sur une surface de Riemann  $S$  est la donnée d'un ensemble  $(a_i, n_i)$  fini de points pondérés par des entiers non nuls. L'ensemble des diviseurs est naturellement muni d'une structure de groupe commutatif (c'est le  $\mathbb{Z}$ -module engendré par l'ensemble des points de la courbe).

Il est dit *effectif* si  $\sum n_i = 0$  et *principal* si c'est le diviseur  $\text{div}(f)$  donné par les pôles et zéros d'une fonction  $f$  méromorphe sur  $S$ .

Le théorème qu'on vient de montrer peut se réinterpréter comme l'isomorphisme de groupes :

$$\{\text{Diviseurs effectifs}\} / \{\text{Diviseurs principaux}\} \xrightarrow{\sim} E.$$

### I.4.3. Algébrisation

La fonction  $\wp$  de Weierstrass est une autre fonction elliptique fondamentale. Elle est définie par la proposition suivante :

**Proposition I.4.4.** — *Il existe une unique fonction, notée  $\wp$ , elliptique sur  $E$ , qui n'a qu'un pôle double en 0, et qui au voisinage de 0 s'écrit  $\wp(z) = z^{-2} + h(z)$ , avec  $h$  holomorphe s'annulant en 0.*

*Démonstration.* — Montrons d'abord l'unicité : si vous avez deux telles fonctions, leur différence est une fonction holomorphe sur  $E$  (on a gommé le pôle) qui s'annule en 0 (par la condition sur  $h$ ). Elle est donc constante (car  $E$  est compacte) égale à 0.

L'existence est donnée par la série

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

dont on vérifie qu'elle converge et vérifie les conditions de la proposition.  $\square$

**Remarque I.4.5.** — La fonction  $\wp$  est paire : en effet  $z \mapsto \wp(-z)$  vérifie aussi les conditions de la proposition !

On établit une *équation différentielle* pour cette fonction. Pour cela on introduit les *sommes d'Eisenstein* :

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-4}$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-6}$$

On montre alors la

**Proposition I.4.6.** — *La fonction  $\wp$  vérifie l'équation différentielle :*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Pour montrer ce genre d'égalité, on utilise une méthode à la Liouville : la différence entre les deux membres est une fonction méromorphe elliptique et les coefficients ont été choisis pour que le pôle disparaisse. Elle est donc holomorphe sur  $E$ , donc constante. Nous prouvons seulement ici l'existence d'une équation différentielle du type  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - a\wp - b$  pour deux constantes  $a$  et  $b$ .

*Démonstration.* — Comme  $\wp$  est paire, son développement en série au voisinage de 0 est de la forme  $\wp(z) = z^{-2} + cz^2 + \dots$ . On obtient alors (les « ... » désignent des termes de degré positifs) :

$$\begin{aligned} (\wp')^2 &= 4z^{-6} - 8cz^{-2} + \dots \\ -4\wp^3 &= -4z^{-6} - 12cz^{-2} + \dots \\ 20c\wp &= 20cz^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi  $(\wp')^2 - 4\wp^3 + 20c\wp$  n'a pas de pôle en 0, donc est holomorphe sur  $E$ , donc est constante. Un examen plus attentif des développements en série montrerait que  $20c = g_2$  et que la constante en question est  $-g_3$ .  $\square$

Concrètement, cela montre que l'application  $z \mapsto [\wp(z), \wp'(z), 1]$  pour  $z \in \mathbb{C} - \Lambda$  et  $z \mapsto (0, 1, 0)$  pour  $z \in \Lambda$ , définit un plongement holomorphe  $C \rightarrow \mathbb{CP}^2$  dont l'image est la courbe algébrique projective  $C$  d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Un théorème de géométrie algébrique nous dit que  $\mathcal{M}(C) = \mathbb{C}(x, y)/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$ . On en déduit que le corps des fonctions elliptiques est

$$\mathcal{M}(E) = \mathbb{C}(\wp, \wp').$$

On verra plus tard la réciproque de cette algébrisation : toute cubique non-singulière est une courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Mais commençons par explorer plus avant le lien entre surface de Riemann et courbes algébriques.



# Courbes algébriques et surface de Riemann

Riemann introduit les surfaces de Riemann afin de rendre uniformes des « fonctions » multiformes (fonctions algébriques, logarithme, *etc.*...) en « dédoublant » la variable :

Il remplace  $\mathbb{C}$  par une surface qui est localement homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{C}$  et « étendue au-dessus du plan », c'est-à-dire munie d'une projection

$$X \rightarrow \mathbb{C}$$

aussi loin que la fonction se *prolonge analytiquement*. Nous commençons par rappeler cette construction.

## II.1. Surface de Riemann d'un germe de fonction

Soit  $f : (\mathbb{C}, x_0) \rightarrow \mathbb{C}$  un *germe d'une fonction holomorphe*, c'est-à-dire une série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - x_0)^n$$

avec un rayon de convergence strictement positif (de sorte que  $f$  n'est bien définie que sur un petit voisinage de  $x_0$ ). Nous allons associer à  $f$  une surface  $X$  – et une projection holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{C}$  – sur laquelle le germe  $f$  peut être prolongé analytiquement.

**La construction**

Soit

$$\mathcal{G} = \left\{ (x, f) \mid x \in \mathbb{C} \text{ et } f \text{ germe d'une fonction holomorphe } (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C} \right\}.$$

muni de la topologie engendrée par les

$$\mathcal{U}(U, \varphi) = \left\{ \text{germes } \varphi_x = (x, \varphi) \mid x \in U \right\}$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.

En particulier, l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi_x = (x, \varphi) & \mapsto x \end{cases}$$

est continue et induit des homéomorphismes locaux en restriction aux ouverts  $\mathcal{U}(U, \varphi)$ .

**Lemme II.1.1.** — *L'espace topologique  $\mathcal{G}$  est séparée.*

*Démonstration.* — Deux germes basés en deux points différents sont déjà séparés par la fonction continue  $\pi$ . Prenons maintenant  $\varphi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\psi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}$  deux germes basés en  $x$ . Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $x$  tel que  $\varphi_x$  et  $\psi_x$  soient les germes de  $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Si on a un germe dans l'intersection  $\mathcal{U}(U, \varphi) \cap \mathcal{U}(U, \psi)$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident sur un ouvert de définition du germe commun et sont donc égales, ce qui implique  $\varphi_x = \psi_x$ . Ainsi, si  $\varphi_x \neq \psi_x$ , les ouverts  $\mathcal{U}(U, \varphi)$  et  $\mathcal{U}(U, \psi)$  sont disjoints, et séparent donc les deux germes.  $\square$

L'espace  $\mathcal{G}$  est donc naturellement une « surface de Riemann » **non connexe** (la surface ainsi obtenue n'est pas à base dénombrable d'ouverts), et l'application

$$F : \begin{cases} \mathcal{G} & \rightarrow \mathbb{C} \\ (\varphi_x : (\mathbb{C}, x) \rightarrow \mathbb{C}) & \mapsto \varphi_x(x) \end{cases}$$

est holomorphe.

**Définition II.1.2.** — *La surface de Riemann associée au germe*

$$f : (\mathbb{C}, x_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

est la composante connexe  $\mathcal{S}(f)$  de  $\mathcal{G}$  contenant  $f$ .

La surface  $\mathcal{S}(f)$  vient avec deux applications holomorphes : la projection

$$\pi : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathbb{C}$$

et l'application

$$\hat{f} = F_{|\mathcal{S}(f)} : \mathcal{S}(f) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui « détermine »  $f$ . L'existence de fonctions méromorphes est un phénomène général que nous démontrerons plus loin (c'est un cas particulier du théorème de Riemann-Roch) :

**Théorème II.1.3.** — *Toute surface de Riemann  $X$  possède des fonctions méromorphes non constantes. De plus, quitte à lui enlever un nombre fini de points,  $X$  est isomorphe à une surface  $\mathcal{S}(f)$ .*

**Remarque II.1.4.** — Le théorème de Poincaré-Volterra<sup>(1)</sup> implique que  $\mathcal{S}(f)$  (et donc toute surface de Riemann) est à base dénombrable d'ouverts.

On peut imiter la construction de  $\mathcal{S}(f)$  en étudiant d'autres classes de régularités de germes. Par exemple, on pourrait construire de la même façon le prolongement méromorphe maximal. Plus généralement, ce processus a été étendu à un faisceau sur un espace topologique, fournissant ce que l'on appelle *l'espace étalé* associé au faisceau.

## Exemples

1. Un exemple fameux est celui de la *surface de Riemann associée au logarithme*. On l'obtient en appliquant la construction précédente à

$$(x_0, f) = \left( 1, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \right).$$

La surface de Riemann associée  $\mathcal{S}(f)$  est un revêtement (non ramifié) de  $\mathbb{C}^*$  de degré infini. Elle est biholomorphe à  $\mathbb{C}$  *via* l'application « exponentielle » :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{S}(f) \\ x &\mapsto \left( e^x, x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n} (z - e^x)^n \right). \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup>Selon lequel *un espace connexe étalé au-dessus d'un espace séparé à base dénombrable d'ouverts est lui-même à base dénombrable d'ouverts.*

2. Un autre exemple est celui de la racine carrée au voisinage de 1. On écrit

$$\sqrt{z} = \sqrt{1 + (z - 1)}$$

et on fait de même. La surface de Riemann associée  $\mathcal{S}(f)$  est un revêtement (non ramifié) de  $\mathbb{C}^*$  de degré 2. Elle est biholomorphe à  $\mathbb{C}^*$  via l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathcal{S}(f) \\ x &\mapsto \left( x^2, x + \frac{1}{2} \left( \frac{z-x^2}{x} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

## II.2. Surfaces de Riemann épointées et revêtements ramifiés

**Définition II.2.1.** — Une *surface de Riemann compacte épointée* est une surface de Riemann  $X$  telle qu'il existe un ouvert  $U \subset X$  tel que :

1. Il existe un biholomorphisme entre  $U$  et la réunion disjointe d'un nombre fini de disques épointés  $\{0 < |z| < 1\}$ .
2.  $X - U$  est compact.

On peut associer à toute surface de Riemann compacte épointée  $X$  une surface de Riemann  $\widehat{X}$  en recollant à  $X$  une union disjointe finie de disques  $\{|z| < 1\}$ . La surface  $\widehat{X}$  est compacte et contient  $X$ ; de plus  $\widehat{X} - X$  est un ensemble fini. Ces propriétés caractérisent  $\widehat{X}$  qui est donc bien définie.

**Remarque II.2.2.** — Si  $X$  est une surface de Riemann compacte épointée et  $\Sigma$  est un sous-ensemble fini de  $X$  alors  $X - \Sigma$  est encore une surface de Riemann compacte épointée et  $\widehat{X} = \widehat{X - \Sigma}$ .

**Proposition II.2.3.** — Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann,  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe,  $x_0$  un point de  $X$  et  $y_0 = f(x_0)$  son image par  $f$ . On suppose  $f$  non constante au voisinage de  $x_0$ . Soit  $\psi$  une carte de  $Y$  centrée en  $y_0$  avec  $\psi(y_0) = 0$ . Alors il existe une carte  $\varphi$  de  $X$  centrée en  $x_0$  telle que, dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$ , la fonction  $f$  prend la forme  $z \mapsto z^d$ , où  $d$  est un entier naturel indépendant des cartes.

*Démonstration.* — Soit  $\varphi_0$  une carte de  $X$  centrée en  $x_0$  telle que  $\varphi_0(x_0) = 0$ . Alors l'application  $\dot{f} = \psi \circ f \circ \varphi_0^{-1}$  est holomorphe et vérifie  $\dot{f}(0) = 0$ . On écrit :

$$\dot{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Soient  $d = \min\{k : a_k \neq 0\}$  et  $c = a_d^{1/d}$ . On a alors :

$$\hat{f}(z) = (cz)^d(1 + u(z))$$

avec  $u$  holomorphe et  $u(0) = 0$ . Mais  $w \mapsto w^{1/d}$  est holomorphe au voisinage de 1. On peut donc écrire  $1 + u = h^d$  avec  $h$  holomorphe au voisinage de 0 et  $h(0) = 1$ . Finalement on a

$$\hat{f}(z) = (czh(z))^d.$$

Posons alors  $\varphi(x) = c\varphi_0(x)h(\varphi(x))$ . Le théorème d'inversion local implique que  $\varphi$  définit une carte locale au voisinage de  $x_0$  et, dans les cartes  $\varphi$  et  $\psi$ , la fonction  $f$  prend la forme  $z \mapsto z^d$ .

Enfin, si dans des cartes  $\varphi : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  et  $\psi : (V, y_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , la fonction  $f$  se lit  $z \mapsto z^d$ , alors pour tout  $y \in V - \{y_0\}$ , on a :

$$\#f^{-1}(y) \cap U = d.$$

L'entier  $d$  est donc indépendant des cartes. □

**Définition II.2.4.** — Soient  $f$  en  $x_0$  comme dans la proposition. On appelle *ordre de ramification* de  $f$  en  $x_0$  l'entier  $d$ .

La proposition II.2.3 conduit naturellement à introduire la notion de revêtement ramifié :

**Définition II.2.5.** — Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux surfaces de Riemann est un *revêtement ramifié* si il existe un ensemble discret  $S \subset Y$  tel que :

1. L'application  $f|_{f^{-1}(Y-S)}$  est un revêtement.
2. Pour tout  $x_0 \in f^{-1}(S)$ , il existe des cartes  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$$

On appelle  $d$  l'*ordre de ramification* de  $f$  en  $x_0$ ; on le note  $v(x_0)$ . Par extension, l'ordre de ramification de  $f$  en un point de  $X - f^{-1}(S)$  est 1.

*Exemples.* — 1. Tout revêtement est un revêtement ramifié; l'ordre de ramification en tout point vaut 1.

2. Il découle de la proposition II.2.3 que toute application holomorphe *non constante*  $f : X \rightarrow Y$  entre surfaces de Riemann compactes est un revêtement ramifié.

Par transport de structure, tout revêtement « topologique » d'une surface de Riemann est naturellement muni d'une structure de surface de

Riemann qui rend la projection de revêtement holomorphe. Un isomorphisme de revêtement devient alors un biholomorphisme.

**Lemme II.2.6.** — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement fini (non ramifié) d'une surface de Riemann compacte épointée  $Y$ . Alors  $X$  est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte épointée qui rend  $f$  holomorphe. De plus  $f$  s'étend de manière unique en  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  holomorphe.

*Démonstration.* — Seule la deuxième partie du lemme reste à démontrer. Quelque soit  $y \in \hat{Y} - Y$ , on fixe un voisinage  $D_y$  de  $y$  biholomorphe au disque unité tel que si  $y$  et  $y'$  sont deux points distincts de  $\hat{Y} - Y$ , alors  $D_y \cap D_{y'} = \emptyset$ . L'application  $f|_{f^{-1}(D_y - \{y\})}$  induit alors un revêtement fini de  $D_y - \{y\}$ .

Puisque  $D_y - \{y\}$  est biholomorphe au disque épointé  $\{0 < |z| < 1\}$  et que les revêtements connexes du disque unité privé de 0 sont déterminés par le degré et tous biholomorphes au disque épointé, on en déduit que l'ouvert

$$U = \bigcup_{y \in \hat{Y} - Y} f^{-1}(D_y - \{y\})$$

est biholomorphe à une réunion finie de disques épointés. La surface de Riemann  $X$  est donc une surface de Riemann compacte épointée. Il lui correspond donc la surface de Riemann compacte  $\hat{X}$ .

Enfin, pour toute composante connexe  $\Delta$  de  $U$ , l'image de la restriction  $f|_{\Delta}$  est contenue dans un  $D_y$ . Par extension des fonctions holomorphes bornées (cf. proposition I.1.3), l'application  $f$  s'étend (de manière unique) à  $\hat{X}$  en une application holomorphe  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  (qui peut être ramifiée au-dessus de  $\hat{Y} - Y$ ).  $\square$

*Exemple.* — Soit  $S \subset \mathbb{CP}^1$  un sous-ensemble fini et soit  $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1 - S$  un revêtement (non ramifié) fini. Alors  $X$  est une surface de Riemann compacte épointée.

Nous allons maintenant voir, en retour, comment ce point de vue « topologique » éclaire l'étude des courbes algébriques.

### II.3. Courbes algébriques et normalisation

Soit  $P \in \mathbb{C}[x, y]$  un polynôme irréductible (non-constant). Alors

$$C_P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0 \text{ et } \left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) \neq (0, 0) \right\}$$

est une sous-variété complexe de dimension 1 dans  $\mathbb{C}^2$ ; c'est donc une surface de Riemann.

*Exemples.* — 1. Soit  $P(x, y) = x^2 - y^3$ . Alors

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} : x^2 = y^3\}$$

et l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C}^* & \rightarrow C_P \\ t & \mapsto (t^3, t^2) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

La courbe  $C_P$  est ce que l'on appelle une *courbe rationnelle* c'est-à-dire qu'elle peut être paramétrée par des fractions rationnelles :

$$x = p(t)/r(t) \quad ; \quad y = q(t)/r(t)$$

où  $p, q$  et  $r$  sont des polynômes en une variable (complexe)  $t$ , ce paramétrage étant une bijection en dehors d'un nombre fini de valeurs de  $t$ .

Toute *conique* ou toute *cubique singulière* est rationnelle :

- Si  $C$  est une conique,  $m$  un point sur  $C$  et  $D$  une droite projective qui ne passe pas par  $m$  (voir figure 1), alors pour chaque point  $t$  de  $D$ , la droite  $mt$  coupe la conique en deux points dont l'un est  $m$ . Si l'on désigne par  $\gamma(t)$  l'autre point, l'application  $\gamma : D \rightarrow C$  est un paramétrage rationnel de  $C$ .
- Une cubique présentant un point double est également une courbe rationnelle. Il suffit de prendre une droite qui ne passe pas par le point singulier et de joindre chaque point de cette droite au point double (voir figure 1). L'intersection est constituée de trois points, deux d'entre eux étant le même point multiple situé au point singulier. Le troisième définit un paramétrage rationnelle, par la droite, de la cubique. Par exemple, l'origine est un point double de la courbe  $y^2 = x^2(1 - x)$ . Choisissons la droite  $x = 2$ . La droite passant par l'origine et le point  $(2, t)$  a comme équation  $y = tx/2$  et son intersection avec la cubique est donnée par  $t^2x^2/4 = x^2(1 - x)$ . Lorsqu'on retire la solution double  $x = 0$ , on trouve  $x = 1 - t^2/4$  et donc

$y = t(1 - t^2/4)/2$  et nous avons bien un paramétrage rationnel de la courbe.

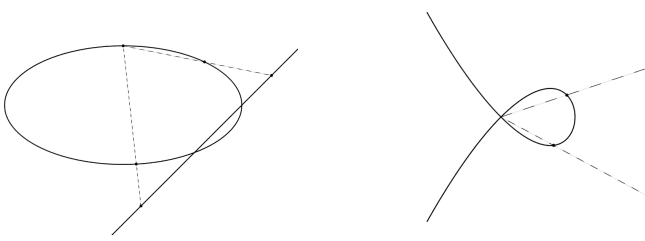


FIGURE 1. Paramétrage d'une conique et d'une cubique singulière

Les courbes rationnelles sont très intéressantes mais nous verrons qu'elles ne constituent qu'une petite partie des courbes algébriques.

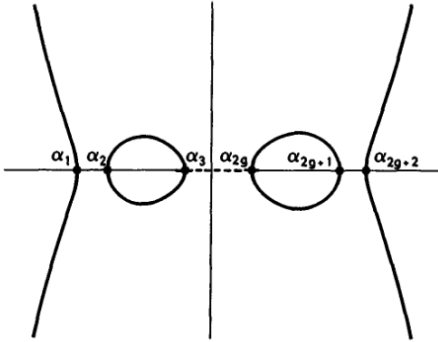


FIGURE 2. Les points réels de la courbe  $C_P$

2. Soit  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  un polynôme à racines simples. Alors  $P(x, y) := y^2 - Q(x)$  est irréductible et

$$C_P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = Q(x)\}$$

est une surface de Riemann. Si

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - \alpha_i),$$



(voir la figure 2, tirée des notes de J.-B. Bost [Bos1992]) alors l'application

$$\begin{cases} C_P & \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

est un revêtement de degré 2 ramifié en  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g+2}$ . La courbe  $C_P$  est donc homéomorphe à une surface de genre  $g$  privé de 2 points (voir la figure 3, tirée des notes de J.-B. Bost [Bos1992]).

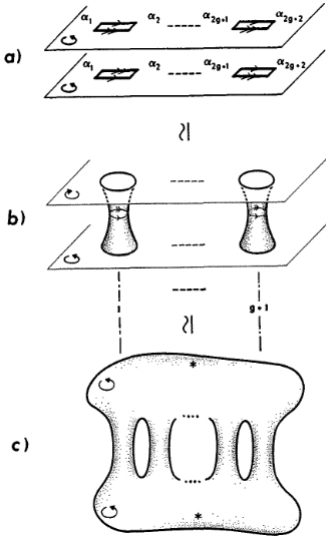


FIGURE 3. Topologie de la courbe  $C_P$

On va maintenant chercher à mieux comprendre la courbe  $C_P$  ou plutôt la *surface de Riemann compacte* associée à  $C_P$  :

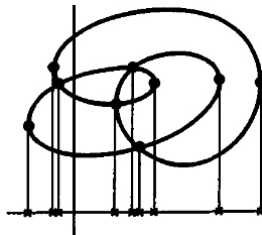
Supposons  $P \notin \mathbb{C}[x]$ , c'est-à-dire que  $C_P$  n'est pas une droite parallèle à l'axe des  $y$ . Notons  $n$  le degré de  $y$  dans  $P(x, y)$ . Alors

$$S_0 := \{x \in \mathbb{C} : P(x, \cdot) \text{ est de degré } < n \text{ ou a une racine multiple}\}$$

est un sous-ensemble *fini* de  $\mathbb{C}$ , voir figure 4.

Posons alors

$$X := \{(x, y) \in C_P : x \notin S_0\}, \quad S := S_0 \cup \{\infty\}.$$

FIGURE 4. La courbe  $C_P$  et l'ensemble  $S_0$ 

L'application

$$\pi : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{C} - S_0 = \mathbb{CP}^1 - S \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}$$

est un revêtement (non ramifié) de degré  $n$ . Le lemme II.2.6 implique alors que  $X$  est naturellement munie d'une structure de surface de Riemann compacte épointée et donc  $C_P$  aussi.

**Définition II.3.1.** — La surface de Riemann compacte  $\hat{X} = \hat{C}_P$  est canoniquement associée à la courbe algébrique définie par  $P$ ; on l'appelle la *normalisation* de  $C_P$ .

*Exemples.* — 1. Si  $P(x, y) = x^2 - y^3$ . Alors  $\hat{C}_P$  est isomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

2. Si  $P(x, y) = y^2 - Q(x)$  avec  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  un polynôme à racines simples de degré  $2g + 1$  ou  $2g + 2$  alors  $\hat{C}_P$  est une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . Les surfaces de ce type sont appelées *surfaces de Riemann hyperelliptiques*.

### Équivalence birationnelle

Nous avons pour l'instant considéré les courbes algébriques comme des sous-ensembles de  $\mathbb{C}^2$  définis comme le lieu d'annulation d'un polynôme  $P \in \mathbb{C}(x, y)$ . Cependant, il est par de nombreux aspects plus intéressant de les considérer comme des sous-ensembles de  $\mathbb{CP}^2$  définis comme le lieu d'annulation d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$  homogène. Le passage d'un point de vue à l'autre se fait dans un sens en homogénéisant  $P$  : on écrit  $x = \frac{X}{Z}$  et  $y = \frac{Y}{Z}$  et on supprime les dénominateurs. Dans l'autre sens, on se restreint à un plan affine dans le plan projectif en ôtant une droite « à l'infini ». Le point de vue projectif permet de mieux comprendre quelles sont les différentes courbes algébriques dont on voudrait dire qu'elles sont « les mêmes ». Il semble évident qu'un changement

de coordonnées projectives (soit l'action d'un élément de  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ ) ne change pas les propriétés de la courbe. Cependant, on peut aller plus loin : une transformation polynomiale des coordonnées ne change pas intrinsèquement la courbe : la surface de Riemann associée reste inchangée. Prévenons le lecteur que les points de vue affine et projectif sur les courbes algébriques cohabitent dans ces notes.

Deux courbes algébriques projectives  $\bar{F}(X, Y, Z) = 0$  et  $\bar{G}(X, Y, Z) = 0$  sont donc dites *birationnellement équivalentes* si l'on peut trouver une transformation non linéaire  $(X, Y, Z) \mapsto (p(X, Y, Z), q(X, Y, Z), r(X, Y, Z))$  dont les coordonnées sont des polynômes homogènes de même degré, qui envoie « bijectivement » la première courbe sur la seconde. Les guillemets sont relatifs au fait que cette transformation n'est pas nécessairement définie partout ni injective. On demande précisément qu'il existe un ensemble fini de points sur chaque courbe tels que la transformation envoie bijectivement le complémentaire du premier sur le complémentaire du second.

L'un des intérêts de ces transformations birationnelles est qu'il permet de se débarrasser du problème des *points singuliers*. L'analyse locale des points singuliers des courbes complexes s'avère en effet incroyablement riche : initiée par Newton puis développée par, leur description topologique est liée à la théorie des nœuds, mais nous n'en dirons pas plus.

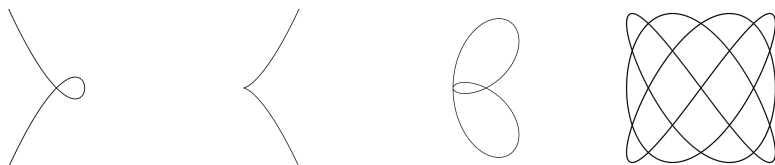


FIGURE 5. Quelques points singuliers

La normalisation – ou surface de Riemann compacte associée – est un invariant birationnel des courbes algébriques ; cela permet donc de classer les courbes à équivalence birationnelle près. Ainsi les courbes *rationnelles*, c'est-à-dire les courbes birationnellement équivalentes à  $\mathbb{CP}^1$ , sont de genre 1. Comme annoncée plus haut, on constate donc que les courbes rationnelles ne constituent qu'une petite partie des courbes algébriques. On peut aussi s'en convaincre par un argument de comptage : On peut constater que la courbe définie par  $x = p(t)/r(t)$  ;  $y = q(t)/r(t)$

est de degré<sup>(2)</sup>  $d$  (où  $d$  est le plus grand des degrés des polynômes  $p, q, r$ ) : il suffit en effet de compter le nombre de points d'intersection avec une droite générique qui est une équation de degré  $d$ . L'espace des triplets de polynômes de degrés  $d$  est de dimension  $3(d+1)$ . Bien sûr, on peut multiplier  $p, q, r$  par le même scalaire ou effectuer sur  $t$  une homographie (qui dépend de trois paramètres) sans changer la courbe. On obtient donc que l'espace des courbes rationnelles dépend d'au plus  $3d-1$  paramètres. Maintenant le décompte des coefficients dans un polynôme en deux variables montre que l'espace des courbes algébriques dépend de  $d(d+3)/2$  paramètres. Dès que  $d \geq 3$ , on obtient  $d(d+3)/2 > 3d-1$  si bien que *les courbes algébriques de degré au moins 3 ne sont en général pas des courbes rationnelles.*

### Lien avec la construction par prolongement analytique

L'équation  $P(x, y) = 0$  définit implicitement la fonction algébrique  $y(x)$ . Le graphe de  $y$ , dans  $\overline{\mathbb{C}}_x \times \overline{\mathbb{C}}_y$ , est en effet défini par l'équation polynomiale irréductible  $P(x, y) = 0$ . Soit  $X$  la surface de Riemann associée à la partie régulière de la fonction, c'est-à-dire

$$X = \mathcal{S}(f),$$

où  $f$  est n'importe lequel des germes réguliers (holomorphes et uniformes) de  $y$ . Alors l'application

$$\begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, y(x)) \end{cases}$$

induit un isomorphisme entre  $X$  et l'ouvert de  $C_P$  obtenu en enlevant l'ensemble fini

$$\left\{ (x, y) \in C_P : \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

des points de  $C_P$  où la projection  $(x, y) \mapsto x$  est ramifiée. La surface  $\widehat{X}$  est donc une *désingularisation* (ou *normalisation*) de la courbe définie par l'équation  $P(x, y) = 0$  ; elle est unique.

**Remarque II.3.2.** — Riemann désingularise ainsi les courbes algébriques *via* la monodromie locale des déterminations de  $y$ . Il court-circuite ainsi l'*algorithme de Newton-Puiseux*.

<sup>(2)</sup>Ce degré est le degré de la projection sur la coordonnée  $x$ , ou de la projection sur toute droite projective

*Exemples.* — 1. Considérons l'équation  $y^2 = x^2 + 1$ . La surface de Riemann associée est  $\widehat{X}$  où  $X$  est la surface de Riemann de n'importe quel germe régulier de

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{(x - i)(x + i)}.$$

Or la fonction  $y$  détermine un germe régulier au voisinage de tout point de  $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ . Il lui correspond la surface de Riemann compacte épointée  $X$  qui est un revêtement (non ramifié) de degré 2 au-dessus de  $\mathbb{C} - \{\pm i\}$ . De plus le revêtement correspond au noyau du morphisme  $\pi_1(\mathbb{C} - \{\pm i\}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui envoie chacun des générateurs de  $\pi_1(\mathbb{C} - \{\pm i\})$  (c'est-à-dire les classes des lacets autour de  $\pm i$ ) sur la classe de 1 dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le revêtement correspondant est isomorphe au plan privé de 3 points et donc  $\widehat{X}$  est de genre 0 isomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ .

2. On peut de même considérer le germe

$$y = \sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)}, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

On procède de même, sauf que le groupe fondamental de  $\mathbb{C} - \{\alpha, \beta, \gamma\}$  est maintenant un groupe libre sur 3 générateurs. La monodromie locale autour de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  est encore d'ordre 2. On obtient donc un revêtement de degré 2 qui se compactifie de manière unique en une surface de Riemann  $\widehat{X}$  de genre 1 (homéomorphe au tore).

## II.4. Algébrisation des surfaces de Riemann compactes

Tout germe de fonction algébrique  $\widehat{f}$  donne naturellement naissance à une surface de Riemann compacte  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$ , son prolongement analytique méromorphe maximal. On s'intéresse ici à la réciproque de ce théorème : si le prolongement analytique méromorphe maximal de  $f$  est compact, alors  $f$  est algébrique.

En anticipant sur la théorie de Riemann-Roch, remarquons que toute surface de Riemann (abstraite) porte suffisamment de fonctions méromorphes pour séparer les points.<sup>(3)</sup> Cela permet de montrer le théorème suivant.

<sup>(3)</sup>C'est évidemment le cas des fonctions  $\pi$  et  $\widehat{f}$  sur  $\mathcal{S}(f)$ .

**Théorème II.4.1.** — *Toute surface de Riemann  $X$  compacte  $X$  est isomorphe à la surface de Riemann  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$  associée à un germe de fonction algébrique  $f$ .*

*Démonstration.* — Soit  $f_1$  une fonction méromorphe non constante sur  $X$ . On voit  $f_1$  comme un revêtement ramifié de degré  $d$  de  $\mathbb{CP}^1$ , et on considère l'une de ses fibres génériques  $\{P_1, \dots, P_d\}$ . Soit alors  $f_2$  une fonction méromorphe qui sépare ces  $d$  points.<sup>(4)</sup>

L'image  $C$  par  $(f_1, f_2)$  est une courbe analytique de  $\mathbb{CP}_z^1 \times \mathbb{CP}_w^1$ . Nous voulons montrer que cette courbe est algébrique.

Soit  $S$  l'ensemble fini des points de  $\mathbb{CP}^1$  au-dessus desquels  $f_1$  ramifie. Soit  $z \in \mathbb{CP}^1 - S$ . Posons  $f_1^{-1}(z) = \{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$ . On prendra garde au fait que les  $P_i(z)$  sont multiformes : l'ensemble  $\{P_1(z), \dots, P_d(z)\}$  est bien défini mais il n'est pas possible d'ordonner ses éléments pour former  $d$  fonctions holomorphes globales sur  $\mathbb{CP}^1 - S$ .

Les ordonnées des  $d$  points où la droite  $\{z\} \times \mathbb{CP}_w^1$  coupe  $C$  sont données par

$$w_i(z) = f_2(P_i(z))$$

pour  $i$  variant de 1 à  $d$ . Là encore, on obtient ainsi  $d$  « fonctions »  $w_i$  multiformes sur  $\mathbb{CP}^1 - S$ . Pour conclure, on fait usage des fonctions symétriques des  $w_i(z)$  :

$$\begin{aligned} S_1(z) &= w_1(z) + \dots + w_d(z), \\ S_2(z) &= w_1(z)w_2(z) + \dots + w_{d-1}(z)w_d(z), \\ &\vdots \\ S_d(z) &= w_1(z) \cdots w_d(z). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont méromorphes sur  $\mathbb{CP}_z^1$  ; ce sont donc des fractions rationnelles en la variable  $z$ . Le polynôme  $P(z, w)$  obtenu à partir de  $w^d - S_1(z)w^{d-1} + \dots + (-1)^d S_d(z)$  par multiplication par un polynôme convenable de  $z$ , pour chasser les dénominateurs, a pour lieu d'annulation la courbe  $C$ . La surface de Riemann  $X$  n'est autre que la surface de Riemann de n'importe quel germe  $w(z)$  annulant le polynôme  $P$  : elles

<sup>(4)</sup>Dans cette démonstration on peut prendre  $X = \widehat{\mathcal{S}(f)}$ ,  $f_1 = \pi$  et  $f_2 = \widehat{f}$ . L'application  $(f_1, f_2)$  est alors obtenue en prolongeant holomorphiquement à  $\widehat{\mathcal{S}(f)}$  l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S}(f) & \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, \varphi) & \mapsto (x, \varphi(x)). \end{cases}$$

sont toutes les deux compactes et coïncident en dehors d'un nombre fini de points.  $\square$

Remarquons que nous avons montré que le corps  $\mathbb{C}(f_1, f_2)$  est de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}(f_1)$ . La même preuve montre que pour toute autre fonction méromorphe  $g$ , le corps  $\mathbb{C}(f_1, g)$  est de degré au plus  $d$ . Ainsi, d'après le théorème de l'élément primitif, le corps engendré par  $f_1$ ,  $f_2$  et  $g$  est le même que celui engendré par  $f_1$  et  $f_2$ . Finalement le corps des fonctions méromorphes sur  $X$  est  $\mathbb{C}(f_1, f_2)$ .

On déduit de ces considérations que si l'on choisit deux autres fonctions  $f'_1$  et  $f'_2$  comme dans la démonstration ci-dessus, alors la courbe  $C'$  construite est birationnellement équivalente à  $C$  : en effet  $f'_1$  et  $f'_2$  s'écrivent comme fonctions rationnelles de  $f_1$  et  $f_2$ . Cela a pour conséquence que deux surfaces de Riemann isomorphes donnent naissance à une unique courbe algébrique à transformation birationnelle près.

Notons que le théorème II.4.1 peut être rendu plus précis :

**Théorème II.4.2.** — *Toute surface de Riemann compacte  $X$  admet une immersion dans  $\mathbb{CP}^2$ , injective en dehors d'un nombre fini de points, et dont l'image est une courbe algébrique  $C$  qui ne présente comme singularités que des points doubles à tangentes distinctes.*

Pour se convaincre de ceci, on plonge tout d'abord la surface de Riemann dans un espace projectif  $\mathbb{CP}^n$ . Ce plongement est donné en coordonnées projectives par

$$z \mapsto (1 : f_1(z) : f_2(z) : \cdots : f_n(z))$$

où l'on aura rajouté aux deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  précédemment construites ce qu'il faut de fonctions  $f_i$  méromorphes sur  $X$  pour supprimer les accidents :

- lorsque chaque  $f_i$  prend la même valeur sur deux points donnés de  $X$ , on ajoute une fonction prenant des valeurs distinctes en ces deux points ;
- lorsqu'un point de  $X$  est critique pour tous les  $f_i$ , on ajoute une fonction régulière en ce point.

On peut construire ces fonctions à la main à partir de  $f_1$  et  $f_2$  (dans le corps engendré) ou encore mieux, avec l'aide du théorème de Riemann-Roch. Ceci étant fait, une projection linéaire générique  $\mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^2$  nous fournit l'immersion cherchée.





# Classification topologique des surfaces

L'existence de fonctions méromorphes peut être utilisée pour démontrer la caractérisation topologique suivante des surfaces de Riemann :

**Théorème III.0.3.** — *Toute surface de Riemann est triangulable et orientable. Réciproquement, toute surface (réelle) triangulable et orientable peut être munie d'une structure de surface de Riemann.*

**Remarque III.0.4.** — En fait toute surface topologique (dénombrable à l'infini) peut être triangulée mais de manière plus fondamentale la bonne catégorie « topologique » est celle des surfaces triangulées.

On commence par donner quelques idées de la démonstration du théorème III.0.3.

## III.1. Surfaces orientables et triangulables

**Proposition III.1.1.** — *Toute surface de Riemann est orientable.*

*Démonstration.* — Une application holomorphe est une application conforme qui préserve l'orientation : En effet, une application  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  entre ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est conforme si et seulement si

$$dX^2 + dY^2 = m(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

L'application  $(x, y) \mapsto (X, Y)$  est donc conforme et préserve l'orientation si et seulement si sa différentielle

$$\begin{pmatrix} \partial X / \partial x & \partial X / \partial y \\ \partial Y / \partial x & \partial Y / \partial y \end{pmatrix}$$

est une similitude directe, c'est-à-dire la composée d'une rotation positive avec une homothétie. Cette dernière condition est équivalente aux *équations de Cauchy-Riemann* :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

qui caractérisent les fonctions holomorphes. □

**Définition III.1.2.** — Soit  $T$  le triangle de sommets de 0, 1 et  $e^{i\pi/3}$  dans  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Un *2-simplex* d'une surface  $X$  est une injection continue  $T \hookrightarrow X$  ; l'image est un *triangle* avec 3 *arêtes* et 3 *sommets*. Une surface  $X$  est *triangulable* si elle admet une triangulation, c'est-à-dire qu'il existe des 2-simplexes  $f_i : T \hookrightarrow X$  dont les images recouvrent  $X$  et tels que pour tout point  $P \in X$  :

1. Si  $P$  n'est pas sur un arête, il appartient à un unique triangle  $f_i(T)$  qui est alors un voisinage de  $P$ .
2. Si  $P$  est sur une arête  $a$ , mais pas sur un sommet, il appartient exactement à 2 triangles  $t_i = f_i(T)$  et  $t_j = f_j(T)$  tel que  $t_i \cap t_j = a$  et  $t_i \cup t_j$  est un voisinage de  $P$ .
3. Si  $P$  est un sommet, il appartient à un nombre fini de triangles  $t_1, \dots, t_k$  ; ceux-ci ont  $P$  comme sommet, leur réunion est un voisinage de  $P$  et  $t_i$  et  $t_{i+1}$  ( $i \bmod k$ ) ont exactement une arête en commun.

**Remarque III.1.3.** — Soit  $X$  une surface triangulable. Alors,  $X$  est compacte si et seulement si toute (une) triangulation est finie.

**Proposition III.1.4.** — *Toute surface de Riemann (compacte)  $X$  est triangulable.*

*Démonstration dans le cas où  $X$  est compacte.* — Il existe une fonction holomorphe non-constante  $f : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . C'est un revêtement ramifié. Soit  $S \subset \mathbb{CP}^1$  l'ensemble fini des points au-dessus desquels  $f$  ramifie. Il existe une triangulation  $\tau$  de  $\mathbb{CP}^1$  telle que tous les points de  $S$  sont des sommets de  $\tau$ . Alors  $f^{-1}(\tau)$  est une triangulation. □

**Remarque III.1.5.** — Il est plus généralement vrai que toute surface topologique compacte, ou plus généralement à base dénombrable d'ouverts, est triangulable; c'est un théorème de Rado [Rad1925]. D'après le théorème de Poincaré-Volterra toute surface de Riemann est à base dénombrable d'ouverts, la proposition III.1.4 est donc vraie pour toute surface de Riemann.

La proposition suivante est laissée en exercice.

**Proposition III.1.6.** — *Toute surface triangulable et orientable peut être munie d'une structure de surface de Riemann.*

On en déduit le théorème III.0.3 de caractérisation topologique des surfaces de Riemann.

### III.2. Classification topologique des surfaces compactes orientables

Soit  $X$  une surface topologique compacte orientable triangulée. On note  $\tau$  la triangulation. Soient  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ( $n > 1$ ) les triangles de  $\tau$  énumérés de telle manière que  $T_{i-1}$  et  $T_i$  aient une arête en commun. En recollant par récurrence les  $T_i$ , on obtient un polygône à  $2n$  côtés deux à deux identifiés.

Il s'agit alors de mettre de l'ordre dans les côtés de ce polygône de manière à le ramener à une *forme normale*: L'orientation de la surface définit un sens de parcours du bord; en énumérant dans l'ordre les arêtes (sur lesquelles on aura choisi une fois pour toutes une orientation) représentées par les côtés du polygône, on obtient un symbole de type  $abcb^{-1}da^{-1}\dots$  où chaque lettre apparaît une fois sans exposant (lorsque l'orientation de l'arête coïncide avec celle du polygône) et une fois avec exposant  $-1$  (car, des deux triangles bordant une arête, un exactement a une orientation compatible avec celle de l'arête).

**Définition III.2.1.** — On appelle forme normale un symbole du type

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

pour un certain  $g \geq 1$  ou  $aa^{-1}$  si  $g = 0$ .

Noter, qu'après identification, il correspond à une forme normale une somme connexe de  $g$  tores (surface de genre  $g$ ), si  $g \geq 1$ , et une sphère si  $g = 0$ .

La réduction à une forme normale se fait à travers une suite d'opérations qui simplifient la structure des identifications au bord du polygône.

### Première étape

On commence par se ramener à un polygône dont tous les sommets sont identifiés. En effet : partant de  $ab \cdots b^{-1} \cdots$  où  $a$  est une arête allant d'un sommet  $p$  à un sommet  $q \neq p$  et  $b$  une arête allant de  $q$  à un sommet  $r$ , l'opération consistant à couper le polygône le long d'une diagonale  $pr$  et de coller  $b$  sur  $b^{-1}$  permet de remplacer le sommet  $q$  par un sommet  $p$ , voir la figure 1 tiré du livre de Reyssat [Rey1989].

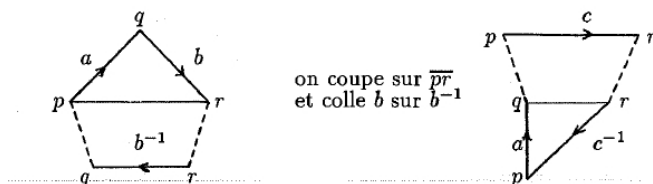


FIGURE 1. Première étape

### Deuxième étape

On élimine ensuite les arêtes adjacentes  $aa^{-1}$  tant que le polygône a plus de deux arêtes, voir la figure 2 tiré du livre de Reyssat [Rey1989]. Cela ne change pas la topologie puisque cela correspond à une somme connexe avec une sphère.

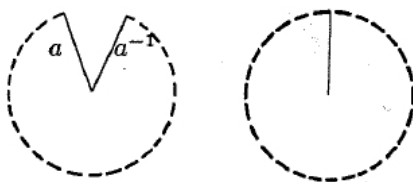


FIGURE 2. Deuxième étape

Troisième étape

À l'issue des deux premières étapes on vérifie facilement que si  $a$  est un côté alors il existe un autre côté  $b$  tel que  $a$  et  $b$  apparaissent (à permutation circulaire près) dans l'ordre  $a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1}$ , voir la figure 3 tiré du livre de Reyssat [Rey1989]. On dira qu'ils sont *enchaînés*.

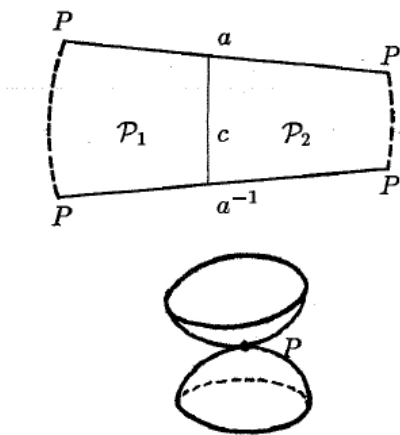


FIGURE 3. Si  $a$  n'est enchaîné à aucune autre arête l'espace quotient n'est pas une surface

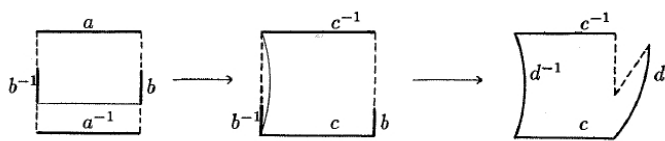


FIGURE 4. Troisième étape

Quitte à couper et coller deux fois on peut alors se ramener à ce que 4 côtés enchaînés se suivent toujours, voir la figure 4 tiré du livre de Reyssat [Rey1989]. En recommençant à partir de la première étape on met ainsi le polygône sous forme normale. On en déduit :

**Théorème III.2.2.** — *Toute surface orientable compacte est homéomorphe à une sphère à  $g$  anses  $\Sigma_g$ .*

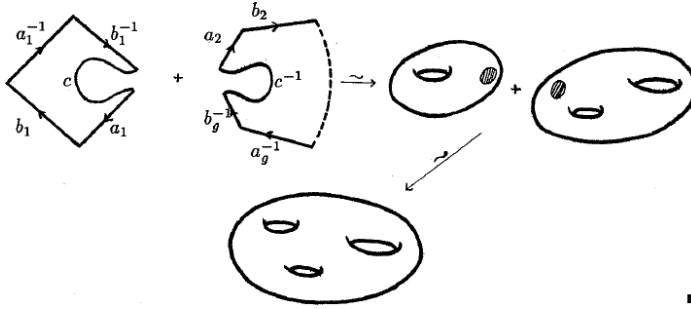


FIGURE 5. Des formes normales aux surfaces

**Remarque III.2.3.** — Le groupe fondamental de la surface  $\Sigma_g$  est

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Son abélianisé

$$\pi_1(\Sigma_g) / [\pi_1(\Sigma_g), \pi_1(\Sigma_g)]$$

est un groupe abélien libre de rang  $2g$ . En particulier si  $g \neq g'$  alors  $\Sigma_g \not\cong \Sigma_{g'}$ . L'entier  $g$  est donc uniquement déterminée par (la surface topologique)  $X$ ; on l'appelle le *genre* de la surface.

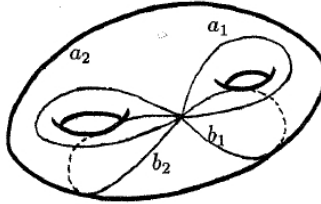


FIGURE 6. Générateurs du groupe fondamental

La proposition suivante est laissée en exercice.

**Proposition III.2.4.** — Soient  $S$ ,  $A$  et  $F$  le nombre de sommets, arêtes, triangles de la triangulation  $\tau$ . La caractéristique d'Euler

$$\chi = S - A + F$$

est indépendante du choix de la triangulation  $\tau$  de la surface  $X$ . On a  $\chi = 2 - 2g$ , où  $g$  est le genre de  $X$ .

**Remarque III.2.5.** — Le genre  $g$  est également égal à  $\frac{1}{2} \dim H^1(X)$  ou encore au nombre maximum de courbes simples fermées 2 à 2 disjointes tracées sur  $X$  et indépendantes en homologie.

### III.3. Quelques conséquences

#### Formule de Riemann-Hurwitz

**Théorème III.3.1.** — Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes ( $\equiv$  revêtement ramifié) de degré  $d$ . Pour  $y \in Y$ , on note  $v(y)$  l'indice de ramification de  $f$  en  $y$ . Alors :

$$\underbrace{\chi(Y)}_{=2-2g(Y)} = d \underbrace{\chi(X)}_{=2-2g(X)} - \sum_{y \in Y} (v(y) - 1).$$

*Démonstration.* — On part d'une triangulation  $\tau$  de  $X$  dont l'ensemble des sommets contient tous les points de ramification de  $f$ . Considérons maintenant la triangulation  $f^{-1}(\tau)$  de  $Y$ . Le nombre de triangles de  $f^{-1}(\tau)$  est égal à  $d$  fois le nombre de triangles de  $\tau$ . Il en est de même pour le nombre d'arêtes. On s'attend de même à ce que le nombre de sommets soit multiplié par  $d$ , mais chaque point de ramification  $y$  fait diminuer de  $v(y) - 1$  le nombre attendu.  $\square$

#### La formule du genre

Si  $X$  est la surface de Riemann compacte associée à une équation polynomiale irréductible  $P(x, y) = 0$ , on peut calculer son genre  $g$  à l'aide du théorème de Riemann-Hurwitz :

**Proposition III.3.2.** — Une courbe de  $\mathbb{CP}^2$  définie par  $P$  de degré  $n$  avec pour seules singularités  $r$  points doubles à tangentes distinctes (plongement générique) est de genre

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - r.$$

*Démonstration dans le cas où la courbe est lisse.* — On associe à  $P$  le polynôme homogène de degré  $n$  :

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_0^n P(z_1/z_0, z_2/z_0).$$

On note alors

$$C = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : F(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

C'est une courbe que nous supposons, pour simplifier, partout lisse (de sorte que  $r = 0$ ). On applique le théorème de Riemann-Hurwitz à une projection convenable de  $C$  sur  $\mathbb{CP}^1$ . Par exemple la projection<sup>(1)</sup>  $f : [z_0 : z_1 : z_2] \in C \mapsto [z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1$  après un changement de coordonnées de sorte que  $n = \deg P = \deg_y P$ . Ainsi  $f$  est un revêtement de  $\mathbb{CP}^1$  de degré  $n$ . On a donc :

$$2 - 2g = 2n - \sum_{q \in C} (v(q) - 1).$$

Il reste à calculer  $\sum_{q \in C} (v(q) - 1)$ . Quitte à modifier le changement de coordonnées remarquons que l'on peut de plus supposer que la droite à l'infini  $L = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : z_0 = 0\}$  rencontre  $C$  transversalement, c'est-à-dire que  $f$  ne ramifie pas au-dessus de l'infini. Tous les points  $q$  de  $C$  où  $v(q)$  est strictement supérieur à 1 sont donc dans le plan fini  $z_0 \neq 0$ . On est ramené à travailler avec la courbe  $C_P$  et la projection  $f : (x, y) \in C_P \mapsto x \in \mathbb{C}$ . En un point de  $C_P$  où  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ , alors  $x$  est une coordonnée locale sur  $C_P$  et  $f$  est non ramifiée. Maintenant en un point  $q$  de  $C_P$  où  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , puisque la courbe est lisse, on a :  $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$  et on peut prendre  $y$  comme coordonnée locale. Mais en différentiant, par rapport à  $y$ , l'équation  $P(x(y), y) = 0$  on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

sur  $C_P$ . L'ordre d'annulation de  $\frac{\partial x}{\partial y}$  en  $q$ , c'est-à-dire  $v(q) - 1$ , est donc égal à l'ordre d'annulation de  $\frac{\partial P}{\partial y}$  en  $q$  le long de  $C_P$ , c'est-à-dire à la multiplicité de

$$C_P \cap \left\{ (x, y) : \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0 \right\}$$

en  $q$ . Puisque le polynôme  $P \frac{\partial P}{\partial y}$  est de degré  $n(n-1)$ , on conclut que  $2 - 2g = 2n - n(n-1)$  soit  $g = (n-1)(n-2)/2$ .  $\square$

### Le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann

Soit  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ , et  $\text{Aut}(X)$  son groupe d'automorphisme. On admet qu'il est fini (voir par exemple Reyssat [Rey1989]).

<sup>(1)</sup>Projection depuis le point  $p = [0 : 0 : 1]$  sur la droite  $H = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : z_2 = 0\}$  qui ne passe pas par  $p$ .



**Théorème III.3.3 (Hurwitz).** — On a :

$$|\mathrm{Aut}(X)| \leq 84(g-1).$$

*Démonstration.* — Notons  $N$  le cardinal de  $\mathrm{Aut}(X)$ . Étant donné un point  $p \in X$ , on note  $n_p$  le cardinal du stabilisateur de  $p$  dans  $\mathrm{Aut}(X)$ . On note enfin  $\pi$  la projection de  $X \rightarrow \mathrm{Aut}(X) \backslash X$ . Notons d'ores et déjà, même si nous ne le verrons qu'on chapitre suivant, que  $\mathrm{Aut}(X) \backslash X$  est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann

Si  $p$  et  $p'$  ont la même projection dans  $\mathrm{Aut}(X) \backslash X$ , alors il existe un élément  $g \in \mathrm{Aut}(X)$  tel que  $g(p) = p'$  et

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(p') = g \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(X)}(p) g^{-1}.$$

En particulier  $n_p = n_{p'}$ . Si  $q$  est un point de  $\mathrm{Aut}(X) \backslash X$ , on note  $n_q$  la valeur commune des  $n_p$  où  $p$  est n'importe quel point de  $X$  tel que  $\pi(p) = q$ . On pourra donc notamment parler de son genre.

Soit  $\gamma$  le genre de  $\mathrm{Aut}(X) \backslash X$ . La formule de Riemann-Hurwitz s'écrit :

$$\chi(X) = N \chi(\mathrm{Aut}(X) \backslash X) - \sum_{x \in X} (v(x) - 1)$$

où  $v(x)$  désigne l'indice de ramification de  $\pi$  en  $x$ . Si  $x$  se projette sur  $q \in \mathrm{Aut}(X) \backslash X$  on a

$$v(x) = n_q \text{ et } |\pi^{-1}(q)| = \frac{N}{n_q}.$$

Puisque  $\chi(X) = 2 - 2g$  et  $\chi(\mathrm{Aut}(X) \backslash X) = 2 - 2\gamma$ , on en déduit :

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + \sum_{q \in \mathrm{Aut}(X) \backslash X} \frac{N}{n_q} (n_q - 1)$$

ou encore

$$2g - 2 = N(2\gamma - 2) + \sum_{q \in \mathrm{Aut}(X) \backslash X} N \left(1 - \frac{1}{n_q}\right). \quad (1)$$

On distingue alors différents cas :

- Si  $\gamma > 1$  on a  $2\gamma - 2 \geq 2$  et il découle de (1) que  $2g - 2 \geq 2N$  et donc que  $N \leq g - 1$ .
- Si  $\gamma = 1$ , il découle de (1) que

$$2g - 2 = N \sum_{q \in \mathrm{Aut}(X) \backslash X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right).$$

Et comme cette expression est non nulle ( $g \geq 2$ ) la somme du membre de droite est  $\geq 1/2$ . On en déduit que  $N \leq 4g - 4$ .

– Si  $\gamma = 0$ , il découle de (1) que

$$2g - 2 = N \left( \sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) - 2 \right). \quad (2)$$

Maintenant, puisque  $2g - 2 > 0$ , il découle de (2) que la somme

$$\sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) \leq |\{q \in \text{Aut}(X) \setminus X : n_q > 1\}|$$

est strictement supérieur à 2. En particulier  $\pi$  ramifie au-dessus d'au moins 3 points.

Si  $\pi$  ramifie au-dessus d'au moins 5 points, la somme du membre de droite de (2) est  $\geq 5/2$  et donc  $2g - 2 \geq N/2$  soit  $N \leq 4g - 4$ .

Il reste à considérer le cas où  $\gamma = 0$  et  $\pi$  ramifie au-dessus de 3 ou 4 points. Puisque  $\gamma = 0$  (et  $2g - 2 > 0$ ), il découle de (2) que

$$\sum_{q \in \text{Aut}(X) \setminus X} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) > 2.$$

Il s'agit donc de majorer  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}$  et  $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}$  pour les  $n_i$  entiers sous les contraintes (respectivement) :

$$0 < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$$

et

$$0 < \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} < 2.$$

La solution la pire est  $(2, 3, 7)$ . Dans ce cas (2) s'écrit :

$$2g - 2 = \frac{N}{42}.$$

Dans tous les cas on obtient comme annoncé que  $N \leq 84(g - 1)$ . □

### III.4. Un exemple : la courbe de Klein

Dans cette section on détaille un exemple – la courbe de Klein – dont on montrera plus tard que son groupe d'automorphisme réalise la borne d'Hurwitz.

Soient  $P(x, y) = y^7 - x^2(x - 1)$ ,  $C = C_P$  la courbe lisse dans  $\mathbb{C}^2$  associée à  $P$  et  $X = \widehat{C}$  la surface de Riemann compacte associée à  $C$ .

**Proposition III.4.1.** — *La coordonnée  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  se prolonge en une application holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  qui ramifie au-dessus de 0, 1 et  $\infty$ . Les ordres de ramifications sont tous égaux à 7.*

*Démonstration.* — On a

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} : y^7 = x^2(x - 1)\}.$$

Et puisque  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 6y^6$ , pour tout  $x \neq 0, 1$  le polynôme  $P(x, \cdot)$  est de degré 7 et à racines simples. La projection sur la première coordonnée  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  induit donc un revêtement non ramifié de degré 7 de  $C - \{(1, 0)\}$  sur  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ .

Par le théorème de prolongement des fonctions holomorphes la fonction  $x : C \rightarrow \mathbb{C}$  se prolonge alors en une application holomorphe  $X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  qui ramifie au-dessus de 0, 1 et  $\infty$ .

Les points 0, 1 et  $\infty$  ont chacun un unique antécédent par  $x$ , leurs ordres de ramifications sont donc égaux à 7.  $\square$

**Remarque III.4.2.** — Le polynôme  $(x, y) \mapsto y^7 - x^2(x - 1)$  est irréductible (par exemple en appliquant le critère d'Eisenstein) ; la courbe  $X$  est donc bien connexe.

Soit  $g$  le genre de  $X$ . D'après la proposition précédente, la formule de Hurwitz s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 - 2g = \chi(X) &= 7\chi(\mathbb{CP}^1) - (7 - 1) - (7 - 1) - (7 - 1) \\ &= 14 - 18 = -4. \end{aligned}$$

Donc  $g = 3$ .

**Proposition III.4.3.** — *Les trois différentielles suivantes sur  $C$  se prolongent en des différentielles holomorphes sur  $X$  :*

$$\frac{dx}{y^3}, \quad \frac{-x dx}{y^5}, \quad \frac{-x dx}{y^6}.$$

*Démonstration.* — Le cas le plus délicat à traiter est celui de  $\frac{dx}{y^3}$  au voisinage du point  $(0, 0)$ . Mais au voisinage de ce point on peut se donner une coordonnée locale  $t$  de sorte que  $x = t^7$  (la coordonnée  $x$  ramifie à l'ordre 7 au-dessus de 0). Alors

$$y^7 = t^{14}(t^7 - 1) = -t^{14}(1 + o(t))$$

de sorte que, à une constante multiplicative près,  $y = -t^2(1 + o(t))$  au voisinage de  $t = 0$ . Et

$$\frac{dx}{y^3} = \frac{7t^6 dt}{-t^6(1 + o(t))}$$

est holomorphe au voisinage de  $t = 0$ . Les autres formes en 0 et 1 se traitent soit de la même manière, soit en utilisant que sur  $X$ , on a  $7y^6 dy = (3x^2 - 2x)dx$ . Pour le point à l'infini, il suffit de passer dans la carte à l'infini.  $\square$

Considérons maintenant l'application  $f : C \rightarrow \mathbb{CP}^2$  donnée par

$$(x, y) \mapsto [U : V : W] = \left[ \frac{1}{y^3}, \frac{-x}{y^5}, \frac{-x}{y^6} \right].$$

**Proposition III.4.4.** — *L'application  $f$  se prolonge en une application holomorphe  $F$  de  $X$  dans la courbe  $Q$  d'équation :*

$$UW^3 + WV^3 + VU^3 = 0.$$

*Démonstration.* — On a :

$$\begin{aligned} UW^3 + WV^3 + VU^3 &= -\frac{x^3}{y^{21}} + \frac{x^4}{y^{21}} - \frac{x}{y^{14}} \\ &= -\frac{x}{y^{21}} \{y^7 - x^2(x - 1)\} = 0. \end{aligned}$$

L'application  $f| : C - \{(1, 0)\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$  est donc à image dans la courbe  $Q$  et le théorème de prolongement des fonctions holomorphe implique que  $f$  se prolonge en une application holomorphe  $F$  de  $X$  dans la courbe  $Q$ .  $\square$

**Proposition III.4.5.** — *La courbe  $Q$  est lisse de genre 3.*

*Démonstration.* — Les trois cartes affines  $U = 1$ ,  $V = 1$  et  $W = 1$  couvrent tout  $\mathbb{CP}^2$ , par symétrie de l'équation, il suffit de vérifier que la courbe  $Q$  est lisse dans la carte affine  $W = 1$ . Dans cette carte, l'équation devient :

$$F(u, v) := u + v^3 + vu^3 = 0.$$

Mais

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 1 + 2u^2v \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 3v^2 + u^3.$$

De sorte que si  $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} = 0$  alors

$$u = -2vu^3 \quad \text{et} \quad v^3 = -\frac{1}{3}vu^3$$

et  $F(u, v) = \frac{8}{3} \nu u^3$ . Finalement, le système d'équations :

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

n'a pas de solution. La courbe  $Q$  est donc lisse.

Notons que  $F$  est irréductible et donc que  $Q$  est connexe. Puisque  $F$  est de degré 4, la formule du genre implique finalement que le genre  $g$  de  $Q$  est :

$$g = \frac{1}{2}(4-1)(4-2) = 3.$$

□

L'application  $F : X \rightarrow Q$  étant holomorphe entre surfaces de Riemann (connexes), c'est un revêtement ramifié et il découle de la formule de Riemann-Hurwitz que

$$2g(X) - 2 \geq \deg(F)(2g(Q) - 2).$$

Mais  $g(X) = g(Q) = 3$ . Donc  $F$  est de degré 1 et  $F$  est un biholomorphisme.



# Surfaces quotients, uniformisation

## IV.1. Quotient de surfaces de Riemann

### Surface de Riemann quotient

Une autre manière de construire des surfaces de Riemann est de les obtenir comme *quotient* sous l'action de groupes sur d'autres surfaces de Riemann. C'est l'opération inverse du revêtement ramifié.

Par exemple une courbe elliptique  $\mathbb{C}/\Lambda$  est le quotient de plan complexe par l'action par translation du réseau  $\Lambda$ .

En général on dispose du théorème suivant :

**Théorème IV.1.1.** — *Soit  $X$  une surface de Riemann et soit  $\Gamma$  un groupe discret opérant sur  $X$  de telle sorte que :*

1. *Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , l'application  $x \mapsto \gamma \cdot x$  est une application holomorphe de  $X$  dans lui-même.*
2. *L'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est propre.*

*Alors l'espace quotient  $X/\Gamma$  possède une structure naturelle de surface de Riemann, caractérisée par la propriété suivante :*

*Soit  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  l'application quotient. Pour tout ouvert  $U \subset X/\Gamma$ ,  $\pi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$  et une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si  $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.*

**Exemples.** — 1. Considérons le disque unité  $\mathbb{D}$ . Le groupe  $\mathbb{U}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  des racines  $n$ -ième de l'unité opère par multiplication sur  $\mathbb{D}$ . L'action n'est pas libre, néanmoins l'application  $\mathbb{U}_n$ -invariante  $z \mapsto z^n$  induit un

isomorphisme

$$\mathbb{D}/\mathbb{U}_n \cong \mathbb{D}.$$

Le quotient est donc lisse bien que l'action ne soit pas libre. Il découle de la démonstration ci-dessous que cet exemple est même l'exemple typique.

2. Le groupe  $\mathbb{Z}$  opère sur le plan complexe  $\mathbb{C}$  par translation et cette action vérifie les hypothèses du théorème IV.1.1. La fonction  $\mathbb{Z}$ -périodique  $z \mapsto \exp(2i\pi z)$  induit un isomorphisme

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*.$$

*Démonstration du théorème IV.1.1.* — Considérons un point  $\bar{p} = \pi(p) \in X/\Gamma$ . Si

$$\Gamma_p := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(p) = p\} = \{\text{id}\},$$

alors l'application quotient  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  est un biholomorphisme local au voisinage de  $p$ . On peut donc prendre pour carte autour de  $\bar{p}$  la composée  $\varphi \circ \pi^{-1}$  d'une carte locale  $\varphi$  autour de  $p$  avec  $\pi^{-1}$ .

Remarquons maintenant que l'ensemble des points  $p$  tels que  $\Gamma_p \neq \{\text{id}\}$  est discret : En effet, pour tout ouvert  $U$  relativement compact dans  $X$ , l'ensemble  $\{\gamma : \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$  est fini. Et quelque soit  $\gamma \neq \text{id}$ , le nombre de points fixes de  $\gamma$  dans un ouvert relativement compact est fini.<sup>(1)</sup>

Soit donc  $p$  un tel point. Montrons que  $p$  a un voisinage  $O$  simplement connexe stabilisé par  $\Gamma_p$ , mais tel que pour  $\gamma \notin \Gamma_p$ ,  $\gamma.O \cap O = \emptyset$ . On part d'un ouvert de carte autour de  $p$  suffisamment petit pour vérifier la deuxième condition. En lisant dans cette carte, on peut travailler dans  $\mathbb{C}$  : considérons  $U$  un voisinage simplement connexe (inclus dans la carte et tel que toutes ses images sous  $\Gamma_p$  le soient). On peut prendre pour  $O$  la composante connexe de  $\cup_{\gamma \in \Gamma_p} \gamma.U$ . C'est un ouvert simplement connexe<sup>(2)</sup>. D'après le théorème de représentation conforme,  $O$  est biholomorphe au disque unité. Choisissons comme carte autour de  $p$  un tel biholomorphisme  $\varphi$  sur  $O$  tel que  $\varphi(p) = 0$ . Alors, lu dans cette carte,  $\Gamma_p$  est un groupe fini d'automorphismes du disque qui fixe 0. C'est donc un sous-groupe du groupe des rotations, notamment il est cyclique : c'est un groupe  $\mathbb{U}_n$  pour un certain entier  $n$ .

<sup>(1)</sup> Si  $\gamma = \text{id}$  sur un ensemble contenant un point d'accumulation alors  $\gamma = \text{id}$  partout.

<sup>(2)</sup> En effet, dans le plan, un ouvert est simplement connexe si et seulement si toute courbe de Jordan contenue dans l'ouvert a son intérieur contenu dans l'ouvert. Merci aux élèves pour cette remarque.



Dans cette carte l'action de  $\Gamma_p$  se lit comme l'action des racines  $n$ -ième de l'unité sur  $\mathbb{D}$ . Alors dans le quotient  $X/\Gamma$ , l'ouvert  $\pi(U)$  peut être identifié au quotient  $U/\Gamma_p$  et donc au quotient  $\mathbb{D}/\mathbb{U}_n \cong \mathbb{D}$ .  $\square$

### Groupes fuchsien, courbes modulaires

**Définition IV.1.2.** — Un *groupe fuchsien* est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

*Exemple.* — Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  est un groupe fuchsien.

Comme l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$  est propre, celle de tout groupe fuchsien l'est aussi.

**Définition IV.1.3.** — Soit  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Un *domaine fondamental* pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{H}$  fermé tel que  $\overline{\mathrm{int}(D)} = D$ , que toute orbite de  $\Gamma$  rencontre  $D$  et que les translatés  $\gamma \cdot \mathrm{int}(D)$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) sont deux à deux disjoints.

Gauss démontre le célèbre théorème suivant (voir [Ser1970]) :

**Théorème IV.1.4 (Gauss).** — *Le sous-ensemble*

$$D = \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Re}(\tau)| \leq 1/2\}$$

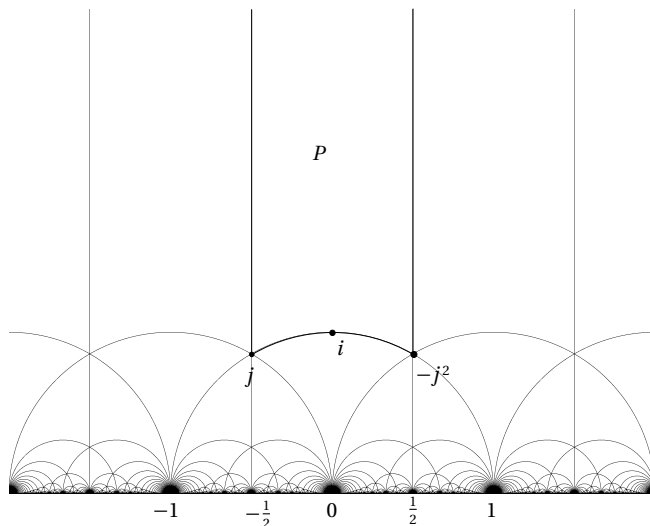
*de  $\mathbb{H}$  est un domaine fondamental pour l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\tau \in \mathbb{H}$ . Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est un élément de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , alors :

$$\mathrm{Im}(\gamma\tau) = \frac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2}. \quad (1)$$

Puisque  $c$  et  $d$  sont des entiers, le nombre de couples  $(c, d)$  tels que  $|c\tau + d|$  soit inférieur à un réel donné est *fini*. Il existe donc un élément  $\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tel que  $\mathrm{Im}(\gamma\tau)$  soit maximum et de partie réelle comprise entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ . Alors l'élément  $\gamma\tau$  appartient à  $D$  : en effet  $|\gamma\tau| \geq 1$  (car  $\mathrm{Im}(-1/\gamma(\tau)) = \mathrm{Im}(\tau)/|\gamma\tau|$ ). Cela prouve que toute  $\Gamma$ -orbite rencontre  $D$ .

Considérons maintenant un élément  $\tau \in D$  et un élément  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tels que  $\gamma\tau$  appartienne à  $D$ . Quitte à remplacer le couple  $(\tau, \gamma)$  par  $(\gamma\tau, \gamma^{-1})$  on peut supposer  $\mathrm{Im}(\gamma\tau) \geq \mathrm{Im}(\tau)$ , c'est-à-dire que  $|c\tau + d| \leq 1$ . C'est clairement impossible si  $|c| \geq 2$ , il reste donc à analyser les cas où  $c = 0, 1$  ou  $-1$  :

FIGURE 1. Un pavage pour  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ 

- Si  $c = 0$ , on a  $d = \pm 1$  et  $\gamma$  opère par translation de  $\pm b$ . Puisque les parties réelles de  $\tau$  et  $\gamma\tau$  sont toutes deux comprises entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , on conclut que soit  $\gamma$  est la transformation identité soit une translation par  $\pm 1$  et l'un des nombres  $\text{Re}(\tau)$  et  $\text{Re}(\gamma\tau)$  est égal à  $-\frac{1}{2}$  et l'autre à  $\frac{1}{2}$ .
- Si  $c = 1$ , le fait que  $|z + d| \leq 1$  impose  $d = 0$  sauf si  $z = j$ , resp.  $-\bar{j}$ , auquel cas on peut avoir  $d = 0$  ou  $1$ , resp.  $d = 0$  ou  $-1$ ). Le cas  $d = 0$  donne  $|z| \geq 1$  donc  $|z| = 1$ . Par ailleurs  $ad - bc = 1$  implique que  $b = -1$  soit  $\gamma\tau = a - 1/\tau$ . En considérant encore la partie réelle on en déduit que  $a = 0$  sauf si  $\text{Re}(\tau) = \pm\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire si  $\tau = j$  ou  $-\bar{j}$  auquel cas on a  $a = 0, \pm 1$ .
- Si  $c = -1$  on se ramène au cas précédent en remplaçant  $\gamma$  par  $-\gamma$ .

□

**Remarque IV.1.5.** — La démonstration montre plus précisément que si  $\tau \in D$  le stabilisateur  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est trivial sauf exactement dans les 3 cas suivants :

- $\tau = i$ , auquel cas  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 2 engendré par  $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ;
- $\tau = j$ , auquel cas  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 3 engendré par  $ST$ , où  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;

–  $\tau = -\bar{j}$ , auquel cas  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})_\tau$  est le groupe d'ordre 3 engendré par  $TS$ .

On peut ainsi vérifier que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$ .

**Proposition IV.1.6.** — Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Le quotient

$$Y_\Gamma = \mathbb{H}/\Gamma$$

admet une structure de surface de Riemann compacte épointée ; on notera  $X_\Gamma = \widehat{Y}_\Gamma$ .

*Démonstration.* — Commençons par le cas  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Comme quotient  $Y(1) = Y_\Gamma$  est une surface de Riemann (non compacte de genre 0 et à un bout). Les *horoboules* centrées en l'infini

$$B_a = \{\tau \in \mathbb{H} : \mathrm{Im} \tau \geq a\} \quad (a > 0)$$

deviennent par passage au quotient des disques épointés, voisinages du bout de  $Y_\Gamma$ . On pose  $q = e^{2i\pi\tau}$  que l'on prend comme carte. On obtient ainsi une surface compacte  $X_\Gamma$  qui est une complétion de la surface de Riemann ouverte  $Y_\Gamma$ .

Dans le cas général d'un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ , le quotient  $Y_\Gamma$  est un revêtement ramifié au-dessus de  $Y(1)$ . Il se compactifie de manière unique en un revêtement ramifié  $X_\Gamma$  au-dessus de  $X(1)$ . L'action projective de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{QP}^1$  est transitive ; l'ensemble  $X_\Gamma \setminus Y_\Gamma$  est fini, en bijection avec les classes  $\Gamma \backslash \mathbb{QP}^1$ . Ses éléments sont encore appelés les *pointes* de  $X_\Gamma$  (ou de  $\Gamma$ ). Soit  $x = \rho(\infty)$  un représentant d'une pointe ( $\rho \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ ) et soit  $\Gamma_x$  le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ . Le groupe  $\rho^{-1}\Gamma_x\rho$ , indépendant du choix du représentant de la pointe et de  $\rho$ , est engendré par  $\gamma(z) = z + m$  pour un certain entier  $m \geq 1$ . On pose  $q = e^{2i\pi\tau}$  et on prend comme carte  $\rho(w)$  avec

$$w = e^{2i\pi\tau/m} = q^{1/m}. \quad (2)$$

Noter enfin que toute inclusion  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  entre sous-groupes d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  induit une application holomorphe de  $X_{\Gamma_1}$  sur  $X_{\Gamma_2}$ .  $\square$

Pour  $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  on a  $Y_\Gamma \simeq \mathbb{C}$  et  $X_\Gamma \simeq \mathbb{CP}^1$  (une seule pointe). En général l'application holomorphe correspondante  $X_\Gamma \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est un revêtement ramifié au-dessus de 3 points (qui correspondent à  $i$ ,  $j$  et  $\infty$  dans  $X(1)$ ).

*Exemple.* — Le groupe

$$\Gamma(2) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \gamma \equiv \mathrm{Id} \pmod{2}\}$$

est un sous-groupe sans torsion de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  et  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma(2)$  est un revêtement. L'ensemble des classes d'équivalence  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma(2)$  est de cardinal 3 (on laissera le lecteur dessiner le domaine fondamental), les points 0, 1 et  $\infty$  représentent les 3 différentes classes d'équivalence  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma(2)$ . On en déduit que  $\mathbb{H}/\Gamma(2)$  est un revêtement de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$  puis que  $X(2) := X_{\Gamma(2)} \simeq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

En général on peut appliquer la formule de Riemann-Hurwitz pour calculer le genre de  $X_\Gamma$  :

**Proposition IV.1.7.** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Le genre  $g$  de  $X_\Gamma$  est donné par la formule :*

$$g = 1 + \frac{[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma]}{12} - \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_3}{3} - \frac{\mu_\infty}{2},$$

où  $\mu_2$ , resp.  $\mu_3$ , désigne le nombre de classes de  $\Gamma$ -équivalence de points elliptiques d'ordre 2, resp. 3, et  $\mu_\infty$  est le cardinal de  $\mathbb{Q}\mathbb{P}^1/\Gamma$ .

*Démonstration.* — Le revêtement  $X_\Gamma \rightarrow X(1)$  est ramifié au-dessus des classes de  $i$ ,  $j$  et  $\infty$ . Raisonnons sur les points au-dessus de  $j$  : soient  $v_1, \dots, v_n$  les indices de ramifications des points de  $X_\Gamma$  au-dessus de la classe de  $j$  dans  $X(1)$ . Alors  $[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] = v_1 + \dots + v_n$  et chaque  $v_k$  est égal à 1 ou 3. Le nombre de  $k$  pour lesquels  $v_k$  est égal à 1 est le nombre de classes de  $\Gamma$ -équivalence de points elliptiques d'ordre 3 : c'est  $\mu_3$ . De sorte qu'on a :

$$[\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] = \mu_3 + 3(n - \mu_3)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n (v_k - 1) = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - n = \frac{2}{3} ([\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_3).$$

De la même manière on montre que

$$\sum_q (v(q) - 1) = \frac{1}{2} ([\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_2)$$

si  $q$  parcourt les points au-dessus de la classe de  $i$ , et

$$\sum_q (v(q) - 1) = [\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) : \Gamma] - \mu_\infty$$

si  $q$  parcourt les points au-dessus de l'infini. La proposition découle alors de la formule de Hurwitz.  $\square$

Lorsque  $\Gamma$  est l'un des sous-groupes principaux de congruence

$$\Gamma(N) = \text{Ker}(\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})),$$

on peut en déduire des formules explicites pour les invariants numériques (genre, nombre de pointes) de la surface de Riemann associée, voir [Shi1971, p. 20-23]. On note  $Y(N) = Y_{\Gamma(N)}$  et  $X(N) = X_{\Gamma(N)}$ .

### Un exemple : la courbe $X(7)$

Considérons le cas  $N = 7$ . Soit  $f$  la projection  $X(7) \rightarrow X(1)$ .

**Proposition IV.1.8.** — *Le groupe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal 168.*

*Démonstration.* — Une matrice de  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est la donnée d'un vecteur non nul de  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$  et d'un autre qui ne lui est pas colinéaire. Le cardinal de  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est donc égal à  $(49-1)(49-7) = 48 \cdot 42$ . Puis le groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est le noyau du morphisme surjectif vers  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$  donné par le déterminant. C'est donc un sous-groupe d'indice 6 ; il est donc de cardinal  $8 \cdot 42$ . Enfin le centre de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal 2. On conclut que  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  est de cardinal  $8 \cdot 21 = 168$ .  $\square$

**Proposition IV.1.9.** — *Le sous-groupe  $\Gamma(7)$  est d'indice 168 dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition précédente, il suffit de démontrer que l'application  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  de réduction modulo 7 est surjective. Il est plus généralement vrai que l'application  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  de réduction modulo  $N$  est surjective ; montrons-le lorsque  $N = p$  est premier.<sup>(3)</sup> Dans ce cas l'anneau  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un corps  $k$ . Mais la méthode du pivot de Gauss implique que  $\text{PSL}(2, k)$  est engendré par les matrices de transvections

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad (x, y \in k).$$

Puisque les transvections sont évidemment dans l'image de l'application de réduction modulo  $p$ , le résultat voulu s'en déduit.  $\square$

**Proposition IV.1.10.** — *La surface  $X(7)$  est de genre 3.*

<sup>(3)</sup>Le cas général s'y ramène facilement, nous n'en aurons pas besoin ici.

*Démonstration.* — Les classes de conjugaison des éléments elliptiques dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  sont représentés par les éléments

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aucun de ces éléments n'est congru à l'identité modulo 7. Le groupe  $\Gamma(7)$  opère donc librement sur  $\mathbb{H}$ . On en déduit que  $f$  ramifie d'ordre 2 en tous les points au-dessus de  $i$  et d'ordre 3 en tous les points au-dessus de  $j$ .

Maintenant si  $s$  est une pointe,  $s$  est  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -équivalente à  $l'∞$ . Mais le stabilisateur de  $l'∞$  dans  $\Gamma(7)$  est

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 7m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

qui est d'indice 7 dans le stabilisateur de  $l'∞$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . On en déduit que  $f$  ramifie d'ordre 7 en tous les points au-dessus de  $l'∞$ .

En conservant les notations de la proposition IV.1.7 on a donc :

$$\mu_2 = 0, \mu_3 = 0 \text{ et } \mu_\infty = 24$$

et le genre de la courbe  $X(7)$  est égal à

$$1 + \frac{168}{12} - \frac{24}{2} = 3.$$

□

**Proposition IV.1.11.** — *La surface  $X(7)$  réalise la borne d'Hurwitz :*

$$|\mathrm{Aut}(X(7))| = 168 = 84(3 - 1).$$

*Démonstration.* — Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$  opère par automorphismes sur  $X(7)$ . Le groupe des automorphismes de  $X(7)$  est donc de cardinal  $\geq 168 = 84(3 - 1)$ . Puisque  $X(7)$  est de genre 3 on en déduit que cette surface réalise la borne d'Hurwitz. □

On peut vérifier – c'est un bon exercice – que la surface  $X(7)$  est biholomorphe à la surface de Klein étudiée au chapitre précédent.

## IV.2. Le théorème de Belyi

**Définition IV.2.1.** — Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ . Une surface de Riemann  $X$  est *définie sur  $K$*  si elle est biholomorphe à la normalisation  $\widehat{C}_P$  d'une courbe algébrique  $C_P$  avec  $P \in K[x, y]$ .

On peut montrer que la courbe modulaire  $X(1)$  est définie sur  $\mathbb{Q}$ ; nous l'admettons. Étant donné un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$  la courbe  $X_\Gamma$  est un revêtement ramifié *fini* de  $X(1)$ . Il n'est alors pas difficile d'en conclure que  $X_\Gamma$  est définie sur une extension finie de  $\mathbb{Q}$  et donc sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire des nombres complexes qui sont racines d'un polynôme non-nul à coefficients rationnels; là encore nous admettons ce résultat. Il est plus surprenant (et en fait assez élémentaire) que la réciproque soit vraie :

**Théorème IV.2.2 (Belyi).** — *Une surface de Riemann  $X$  est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  si et seulement si  $X$  est isomorphe à une surface de Riemann  $X_\Gamma$  pour un certain sous-groupe  $\Gamma$  d'indice fini dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* — Nous ne démontrons que la condition nécessaire, plus précisément nous montrons qu'une courbe  $X$  définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  est isomorphe à  $\widehat{Y}$  où  $Y$  est un revêtement fini (non ramifié) de  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Puisque  $X$  peut être définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , il existe une application holomorphe  $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$  et un ensemble fini  $S \subset \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$  tel que la restriction de  $\pi$  à  $X - \pi^{-1}(S)$  soit un revêtement fini (non ramifié) au-dessus de  $\mathbb{CP}^1 - S$ . En composant  $\pi$  par un polynôme à coefficients rationnels on peut diminuer le degré maximal des points de  $S$  et finalement se ramener au cas  $S \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Quitte à composer  $\pi$  par une homographie on peut en outre supposer que  $S$  contient l'ensemble  $\{0, 1, \infty\}$ . L'observation clef de Belyi est alors qu'étant donnés deux entiers  $n, m \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $n + m \neq 0$ , l'application

$$\varphi_{nm} : \begin{cases} \mathbb{CP}^1 & \rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ z & \mapsto \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} z^n (1-z)^m \end{cases}$$

induit un revêtement (non ramifié)  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\} \rightarrow \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Si l'on choisit  $n$  et  $m$  de sorte que  $\frac{n}{n+m} \in S - \{0, 1, \infty\}$ , l'application  $\varphi_{nm} \circ \pi$  est donc un revêtement au-dessus de  $\mathbb{CP}^1 - (\{0, 1, \infty\} \cup \pi(S - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\}))$ . Puisque l'ensemble  $\{0, 1, \infty\} \cup \pi(S - \{0, 1, \infty, \frac{n}{n+m}\})$  est de cardinal plus petit que  $S$  on conclut par récurrence que l'on peut se ramener au cas où  $S = \{0, 1, \infty\}$ .

Remarquons finalement que le sous-groupe de congruence  $\Gamma(2)$  opère librement sur  $\mathbb{H}$  et que le quotient  $\mathbb{H}/\Gamma(2)$  est isomorphe à  $\mathbb{C} - \{0, 1\} \cong \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Un revêtement (non ramifié)  $Y$  de  $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$  est donc isomorphe à un quotient  $Y_\Gamma$  avec  $\Gamma$  sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma(2)$  et donc de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Finalement  $X \cong X_\Gamma$ .  $\square$

### IV.3. Classification des surfaces de Riemann

#### IV.3.1. Le théorème d'uniformisation

Un théorème de la théorie des surfaces de Riemann affirme que toute surface de Riemann connexe peut être obtenue comme quotient de la sphère de Riemann  $\mathbb{CP}^1$ , du plan complexe  $\mathbb{C}$  ou du disque  $\mathbb{D}$ . On obtient plus précisément :

**Théorème IV.3.1.** — *L'ensemble des surfaces de Riemann peut être partitionné en trois sous-ensembles :*

- Les surfaces de Riemann elliptiques : ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes à la sphère de Riemann  $\mathbb{CP}^1$ . Elles sont caractérisées par le fait de posséder une fonction holomorphe non constante  $\mathbb{CP}^1 \rightarrow X$ .<sup>(4)</sup>
- Les surfaces de Riemann paraboliques : ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes au plan complexe  $\mathbb{C}$ , ou à  $\mathbb{C}^*$  ou à une courbe elliptique<sup>(5)</sup>  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Elles sont caractérisées par le fait qu'elles ne sont pas elliptiques et qu'il existe une application holomorphe non constante  $\mathbb{C} \rightarrow X$ , où encore par comme étant exactement les surfaces de Riemann isomorphes à un quotient du plan complexe  $\mathbb{C}$  par une action de groupe vérifiant les hypothèses du théorème IV.1.1, c'est-à-dire par l'action d'un sous-groupe discret de translations complexes.

Parmi les surfaces paraboliques,  $\mathbb{C}$  est la seule qui soit simplement connexe,  $\mathbb{C}^*$  la seule qui ne soit pas simplement connexe et non compacte et les courbes elliptiques sont les seules qui soient compactes. Par ailleurs deux courbes elliptiques  $\mathbb{C}/\Lambda$  et  $\mathbb{C}/\Lambda'$  sont isomorphes si il existe  $k \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\Lambda' = k\Lambda$ . Dans une même classe d'isomorphie on peut prendre  $\Lambda = \Lambda_\tau := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  avec  $\tau \in \mathbb{H}$ . Et  $\mathbb{C}/\Lambda_\tau \cong \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$  si et seulement  $\tau$  et  $\tau'$  représentent la même classe dans  $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

- Les surfaces de Riemann hyperboliques : ce sont les surfaces de Riemann  $X$  isomorphes à un quotient  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant librement sur  $\mathbb{H}$ . Elles sont caractérisées par le fait qu'il n'existe pas d'application holomorphe non constante  $\mathbb{C} \rightarrow X$ . De plus, deux surfaces  $\mathbb{H}/\Gamma$  et  $\mathbb{H}/\Gamma'$  sont isomorphes si et seulement s'il existe un élément  $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $\Gamma' = g\Gamma g^{-1}$ .

<sup>(4)</sup>En prenant  $\mathbb{CP}^1$  dans le théorème IV.1.1, alors  $\Gamma$  est fini et  $X \cong \mathbb{CP}^1/\Gamma (\cong \mathbb{CP}^1)$ .

<sup>(5)</sup>La terminologie parabolique/elliptique apparaît ici bien malheureuse, mais il n'y a plus rien à faire !



On peut reformuler cette trichotomie en passant au revêtement universel : Si  $X$  est une surface de Riemann connexe et si  $\tilde{X}$  désigne son revêtement universel, alors :

- $X$  est elliptique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{CP}^1$  (et en fait  $X \cong \mathbb{CP}^1$ ) ;
- $X$  est parabolique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{C}$  ;
- $X$  est hyperbolique si et seulement si  $\tilde{X} \cong \mathbb{H}$ .

En particulier, le théorème IV.3.1 peut se formuler simplement :

*Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe au plan, au disque ou à la sphère.*

Cet énoncé est appelé *théorème d'uniformisation*. Nous l'admettons, voir [Hub2006]. Nous en donnerons néanmoins une démonstration « heuristique » un peu plus loin.

### IV.3.2. Uniformisation, version métrique

On peut bien naturellement transporter le théorème IV.3.1 en un théorème de classification des structures conformes :

**Théorème IV.3.2.** — *Une surface de Riemann connexe est elliptique (resp. parabolique, resp. hyperbolique) si et seulement si elle peut être munie d'une métrique riemannienne complète induisant sa structure conforme et dont la courbure de Gauss est  $+1$  (resp.  $0$ , resp.  $-1$ ).*

La condition nécessaire est facile à vérifier :

- Une surface de Riemann elliptique est isomorphe à la sphère de Riemann  $\mathbb{CP}^1$  que l'on peut munir de la métrique conforme de courbure  $+1$  définie par

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

- La métrique plate sur  $\mathbb{C}$

$$ds^2 = |dz|^2$$

est invariante par translation. Elle induit donc une métrique complète de courbure nulle sur toute surface parabolique  $\mathbb{C}/\Gamma$  ( $\Gamma$  sous-groupe discret de  $\mathbb{C}$ ).

- La *métrique de Poincaré*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

sur  $\mathbb{H}$  est une métrique riemannienne de courbure  $-1$ , qui est préservée par l'action de  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}$ . Elle induit donc une métrique complète

de courbure  $-1$  sur toute surface de Riemann de la forme  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  opérant librement sur  $\mathbb{H}$ .

Dans un cours fameux – qu’il faut absolument lire – Klein [Kle1882c] utilise le point de vue des métriques riemanniennes pour démontrer l’existence de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann abstraite, c’est ce point de vue que nous développons dans le chapitre suivant.

# Bibliographie

- [Bea1983] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Grad. Texts in Math. 91, Springer, New York, 1983.
- [Bos1992] J.-B. BOST – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelian varieties », *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 64–211.
- [DoDo1977] R. & A. DOUADY – *Algèbre et théories galoisiennes*, CEDIC, Paris, 1977. Nouvelle édition augmentée, Cassini, Paris, 2005.
- [FaKr1980] H. M. FARKAS, I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer, New York, 1980.
- [Forst1977] O. FORSTER – *Riemannsche Flächen*, Springer, Berlin, 1977. Traduction anglaise : *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer, New York, 1981.
- [GrHa1978] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [Gun1972] ———, *Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties*, Math. Notes 12, Princeton Univ. Press, 1972.
- [HaMo1998] J. HARRIS & I. MORRISON – *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math. 187, Springer, New York, 1998.
- [Hod1941] W. V. D. HODGE – *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.
- [Hub2006] ———, *Teichmüller theory, vol. 1*, Matrix Editions, Ithaca NY, 2006.
- [ImTa1992] Y. IMAYOSHI & M. TANIGUCHI – *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, Tokyo, 1992.
- [Jos2002] J. JOST – *Compact Riemann surfaces, An introduction to Contemporary mathematics, Second edition*, Springer, New York, 2002.

- [Kat1992] S. KATOK – *Fuchsian Groups*, The Univ. of Chicago Press, 1992.
- [Kle1882c] ———, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [McKMo1997] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Mum1983] ———, *Tata lectures on theta I*, Progr. in Mathematics 28, Birkhäuser, Bâle, 1983.
- [Mum1999] ———, *The red book of varieties and schemes*, seconde édition. Contient [Mum1975]. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer, Berlin, 1999.
- [Mum1975] D. MUMFORD – *Curves and their Jacobians*, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [Rad1925] T. RADÓ – « Über den Begriffe der Riemannsche Fläche », *Acta Litt. Sci. Szeged* 2 (1925), p. 101–121.
- [Rey1989] É. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [Rud1987] W. RUDIN – *Real and complex analysis*, seconde édition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [Sai2011] ———, *Uniformisation des Surfaces de Riemann*, ENS Éditions, 2011.
- [Ser1970] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Univ. France, Paris, 1970.
- [Shi1971] ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kanô Memorial Lectures, n° 1*, Publ. Math. Soc. Japan, n° 11. Iwanami Shoten, Tokyo, & Princeton Univ. Press, 1971.
- [Spr1957] G. SPRINGER – *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1957.