Fonctions holomorphes et dynamique complexe à plusieurs variables

Tien-Cuong Dinh

(Version préliminaire)

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions holomorphes et variétés complexes

Dans ce chapitre, nous allons introduire les fonctions holomorphes à plusieurs variables et donner des propriétés de base de ces fonctions. Les variétés complexes et les courants de de Rham seront également introduits. Ils nous permettront d'avoir un point de vue général et intrinsèque sur certains objets et certains résultats présentés dans ce chapitre. Ils seront systématiquement utilisés plus tard.

1.1 Fonctions holomorphes et équation $\overline{\partial}$

Dans l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^n$, considérons le système de coordonnées complexes canonique

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \quad \text{avec} \quad z_j \in \mathbb{C}.$$

Notons x_j et y_j la partie réelle et la partie imaginaire de z_j. On a

$$z_j = x_j + iy_j \quad \text{et} \quad \overline{z}_j = x_j - iy_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n.$$

On peut alors identifier $\mathbb{C}^n$ avec l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées réelles

$$(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

et de l'orientation canonique associée à ce système de coordonnées.

Les dérivations par rapport au variables z_j et $\overline{z}_j$ sont définies par les formules suivantes

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big).$$

On peut ainsi exprimer les dérivations par rapport à x_j, y_j en termes des dérivations par rapport à $z_j, \overline{z}_j$ par les formules suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = i\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\Big).$$

Définition 1.1.1. Soit Ω un domaine, i.e. un ouvert connexe, de $\mathbb{C}^n$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur Ω et à valeurs complexes. On dit que f *est holomorphe* si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = 0 \quad \text{pour tout} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, la fonction f est holomorphe si elle l'est en chaque variable z_j.

En chaque point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de Ω, on peut considérer le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f en a

$$f(z) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (z_j - a_j) + \beta_j (\overline{z}_j - \overline{a}_j) + o(\|z - a\|)$$

où

$$\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) \quad \text{et} \quad \beta_j = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(a).$$

La fonction f est donc holomorphe si et seulement si la partie polynomiale dans le développement ci-dessus est affine en z_j, c.-à-d. la différentielle de f en a est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $a \in \Omega$.

Rappel. La différentielle de f en a est l'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$z \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j + \beta_j \overline{z}_j.$$

Définition 1.1.2. Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}^m$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans un espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^m$. On écrit $F = (f_1, \ldots, f_m)$ en utilisant le système de coordonnées canonique de $\mathbb{C}^m$. On dit que l'application F est *holomorphe* si toutes les fonctions coordonnées f_j le sont. Une application bijective $F : \Omega \to \Omega'$ entre deux domaines de $\mathbb{C}^n$ est *bi-holomorphe* si F et son inverse F^{-1} sont holomorphes.

Notons $w_j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe qui associe à chaque point de $\mathbb{C}^m$ sa j-ième coordonnée complexe, c.-à-d. $(w_1, \ldots, w_m)$ est le système de coordonnées complexes canonique de $\mathbb{C}^m$. Alors $F : \Omega \to \mathbb{C}^m$ est holomorphe si et seulement si $w_j \circ F$ est holomorphe pour tout $j = 1, \ldots, m$. Cette propriété est aussi équivalente au fait que la différentielle de F est $\mathbb{C}$-linéaire en chaque point a de Ω.

Proposition 1.1.3. *La composition de deux applications holomorphes est holomorphe sur son domaine de définition.*

Démonstration. Si F est holomorphe au voisinage de a, elle est égale à l'ordre 1 en a à une application $\mathbb{C}$-affine. Si G est holomorphe au voisinage de $F(a)$ elle est aussi égale à l'ordre 1 à une application $\mathbb{C}$-affine. On déduit que $G \circ F$ est égale à l'ordre 1 à une application $\mathbb{C}$-affine. Ceci est valable en tout point dans le domaine de définition de $G \circ F$. On conclut que $G \circ F$ est holomorphe. □

Proposition 1.1.4. *Soit $F : \Omega \to \mathbb{C}^m$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Si F est holomorphe pour des systèmes linéaires de coordonnées complexes sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$, alors elle holomorphe pour tous systèmes linéaires de coordonnées complexes sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente car un changement de coordonnées complexes correspond à la composition avec une application $\mathbb{C}$-affine. Cette dernière est holomorphe par définition. □

Exemples 1.1.5. Par définition, si f et g sont holomorphes sur Ω, $f \pm g$ l'est aussi. La proposition 1.1.3 entraîne que f^2, g^2 et $(f \pm g)^2$ sont holomorphes. On déduit que fg est holomorphe. Par définition, les applications linéaires en $z_1, \ldots, z_n$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}^n$. On en déduit que les polynômes en $z_1, \ldots, z_n$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}^n$. En appliquant à nouveau la proposition 1.1.3, on obtient que les fractions rationnelles en $z_1, \ldots, z_n$ ainsi que leurs compositions avec $\exp(\cdot), \sin(\cdot), \cos(\cdot), \log(\cdot) \ldots$ sont holomorphes sur leurs domaines de définition. La fonction $|z_1|^2$ n'est pas holomorphe car sa différentielle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Les deux résultats suivants sont des conséquences directes de la définition de fonction holomorphe et les propriétés de fonctions holomorphes d'une variable.

Théorème 1.1.6 (théorème d'unicité)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Si f est nulle sur un ouvert non-vide, alors f est identiquement nulle sur Ω.*

Ce résultat peut être aussi déduit de la formule de Cauchy et ses conséquences qui seront présentées au paragraphe suivant.

Théorème 1.1.7. *Soit $F = (f_1, \ldots, f_n)$ une application holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Soit a un point de Ω tel que la matrice jacobienne complexe*

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}} F(a) = \Big(\frac{\partial f_j}{\partial z_l}(a)\Big)_{1 \leq j,l \leq n}$$

soit inversible. Alors F admet une application inverse holomorphe F^{-1} d'un voisinage de $F(a)$ dans un voisinage de a telle que $F^{-1}(F(a)) = a$ et $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}$.

En effet, on sait que F admet un inverse F^{-1} de classe $\mathscr{C}^1$. Pour vérifier que F^{-1} est holomorphe il suffit de vérifier que sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Pour ceci, on peut supposer que $a = 0$ et que F est une fonction linéaire. La vérification est donc triviale.

Nous verrons plus tard que toutes les fonctions et applications holomorphes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour terminer ce paragraphe, nous allons exprimer la notion d'holomorphie sous une forme plus compacte et intrinsèque.

Les relations entre z_j et ses parties réelle et imaginaire entraînent les relations suivantes entre les formes linéaires $dz_j, d\overline{z}_j$ et dx_j, dy_j :

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{et} \quad d\overline{z}_j = dx_j - idy_j.$$

On en déduit que

$$dx_j = \frac{1}{2}\big(dz_j + d\overline{z}_j\big) \quad \text{et} \quad dy_j = \frac{1}{2i}\big(dz_j - d\overline{z}_j\big).$$

Ainsi, on peut exprimer toute forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ en termes de $z_j, \overline{z}_j, dz_j$ et $d\overline{z}_j$ avec $j = 1, \ldots, n$. Par exemple, on peut écrire

$$x_1 dx_2 \wedge dy_3 = \Big(\frac{z_1 + \overline{z}_1}{2}\Big)\frac{1}{2}\big(dz_2 + d\overline{z}_2\big) \wedge \frac{1}{2i}\big(dz_3 - d\overline{z}_3\big).$$

Définition 1.1.8. On dit qu'une p-forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est de bidegré (r, s) si elle est de degré r en dz_j et de degré s en $d\overline{z}_j$. On dit aussi que c'est une (r, s)-forme différentielle.

On voit que toute p-forme différentielle se décompose en somme de (r, s)-formes différentielles avec $r + s = p$.

On définit deux opérateurs différentiels ∂ et $\overline{\partial}$ sur l'espace des fonctions $\mathscr{C}^1$ par

$$\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \quad \text{et} \quad \overline{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $d = \partial + \overline{\partial}$.

La fonction f est alors holomorphe si et seulement si elle satisfait l'équation

$$\overline{\partial} f = 0.$$

La $(0, 1)$-forme différentielle $\overline{\partial} f$ mesure donc le défaut d'holomorphie de la fonction f. La résolution de l'équation $\overline{\partial}$

$$\overline{\partial} f = g \quad \text{avec l'inconnue } f \text{ et la donnée } g$$

et ses variantes est l'un des problèmes les plus fondamentaux en analyse et géométrie complexes. On verra plus tard plusieurs applications de cette équation dans des situations variées.

Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sont également définis sur les formes de bidegré quelconque. Notons pour $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_k \leq n$

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \quad \text{et} \quad d\overline{z}_I = d\overline{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_p}.$$

Toute (p,q)-forme s'écrit comme combinaison linéaire de (p,q)-formes du type

$$h_{IJ}(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad \text{with} \quad |I| = p \text{ et } |J| = q$$

où $h_{IJ}(z)$ est une fonction. Cette écriture est en plus unique si l'on considère seulement les multi-indices I, J avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $j_1 < \cdots < j_q$.

Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sont définis sur la dernière forme par

$$\partial\Big(h_{IJ}(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J\Big) = \partial h_{IJ}(z) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J$$

et

$$\overline{\partial}\Big(h_{IJ}(z) dz_I \wedge d\overline{z}_J\Big) = \overline{\partial} h_{IJ}(z) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Ils s'étendent par linéarité à toutes les (p,q)-formes de classe $\mathscr{C}^1$. Si φ est de bidegré (p,q) alors $\partial\varphi$ et $\overline{\partial}\phi$ sont de degrés $(p+1,q)$ et $(p,q+1)$ respectivement. En particulier, $\partial\varphi = 0$ si $p = n$ et $\overline{\partial}\varphi = 0$ si $q = n$.

On vérifie sans difficulté que $d = \partial + \overline{\partial}$. L'identité $d \circ d = 0$ entraîne que

$$\partial \circ \partial = 0, \quad \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0 \quad \text{et} \quad \partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = 0.$$

En particulier, une condition nécessaire pour que l'équation

$$\overline{\partial} f = g$$

avec comme inconnue une (p,q)-forme f de classe $\mathscr{C}^2$, admette une solution, est que la $(p,q+1)$-forme donnée g soit $\overline{\partial}$-*fermée*, c.-à-d. $\overline{\partial} g = 0$.

Théorème 1.1.9 (Serre 1953). *Soit g une (p,q)-forme lisse $\overline{\partial}$-fermée à support compact dans $\mathbb{C}^n$ avec $1 \leq q \leq n-1$. Alors il existe une $(p,q-1)$-forme lisse f à support compact dans $\mathbb{C}^n$ telle que*

$$\overline{\partial} f = g.$$

Démonstration. Nous donnons ici la preuve seulement pour le cas où $q = 1$ qu'on utilisera plus tard. Soit $I = (i_1, \ldots, i_p)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$. En écrivant g avec le système de coordonnées canonique sur $\mathbb{C}^n$, on vérifie sans difficulté que la somme des composantes de g qui contiennent dz_I est $\overline{\partial}$-fermée. Par conséquence, il suffit de considérer le cas où g est le produit de dz_I avec une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée. Sans perdre de généralité, on peut supposer que g est elle-même une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée car on peut multiplier la solution avec dz_I afin d'obtenir le cas $p \neq 0$.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on suppose que $n = 2$. Le cas général se traite exactement de la même manière. On a donc

$$g(z) = g_1(z)d\overline{z}_1 + g_2(z)d\overline{z}_2$$

où g_1, g_2 sont des fonctions lisses à support compact dans $\mathbb{C}^2$.

Rappelons la formule de Cauchy-Pompeiu (1912) que nous allons utiliser dans la suite, voir le théorème 1.5.13 ci-dessous. Soit Ω un domaine borné à bord lisse dans $\mathbb{C}$. Son bord $b\Omega$ est orientée dans le sens positif (on utilisera toujours cette orientation pour le bord d'un domaine ou d'une variété complexe). Soit h une fonction sur Ω lisse jusqu'au bord. Alors on a

$$\frac{1}{2i\pi}\Big\{\int_{b\Omega}\frac{h(\xi)d\xi}{\xi - z} + \int_{\Omega}\frac{\frac{\partial h}{\partial \overline{z}}(\xi)d\xi\wedge d\overline{\xi}}{\xi - z}\Big\} = \begin{cases} h(z) & \text{si } z\in\Omega \\ 0 & \text{si } z\not\in\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Notons que si h est à support compact dans Ω la première intégrale est nulle. C'est le cas qu'on utilisera.

La formule de Cauchy-Pompeiu suggère de poser

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\xi\in\mathbb{C}}\frac{g_1(\xi, z_2)d\xi\wedge d\overline{\xi}}{\xi - z_1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\eta\in\mathbb{C}}\frac{g_1(\eta + z_1, z_2)d\eta\wedge d\overline{\eta}}{\eta}\cdot$$

En utilisant les coordonnées polaires pour η, on voit que f est une fonction lisse.

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_1}(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\eta\in\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial g_1}{\partial \overline{z}_1}(\eta + z_1, z_2)d\eta\wedge d\overline{\eta}}{\eta} = g_1(z_1, z_2).$$

D'autre part, le fait que $\overline{\partial} g = 0$ est équivalent à

$$\frac{\partial g_2}{\partial\overline{z}_1} = \frac{\partial g_1}{\partial\overline{z}_2}\cdot$$

En utilisant la formule de Cauchy-Pompeiu, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\eta\in\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial g_1}{\partial \overline{z}_2}(\eta, z_2)d\xi\wedge d\overline{\xi}}{\xi - z_1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\eta\in\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial g_2}{\partial \overline{z}_1}(\eta, z_2)d\xi\wedge d\overline{\xi}}{\xi - z_1} = g_2(z_1, z_2).$$

Donc f satisfait l'équation

$$\overline{\partial} f = g.$$

Il reste à vérifier que le support de f est compact. La dernière équation montre que f est holomorphe au voisinage de l'infini car g est à support compact. On déduit de sa définition que f est nulle quand $|z_2|$ est suffisamment grand. Le théorème 1.1.6 entraîne que f est nulle au voisinage de l'infini. Ceci termine la preuve du théorème pour le cas $q = 1$. □

On dit qu'une forme g est $\overline{\partial}$-*exacte* si elle est égale à $\overline{\partial} f$ pour une certaine forme f. Les formes $\overline{\partial}$-exactes sont $\overline{\partial}$-fermées car $\overline{\partial}\circ\overline{\partial}=0$. L'obstruction pour résoudre l'équation $\overline{\partial}$ à support compact dans un domaine Ω est le groupe de cohomologie de Dolbeault défini par

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Omega)_{\text{compact}} = \frac{\big\{(p,q)\text{-formes lisses } \overline{\partial}\text{-fermées à support compact dans } \Omega\big\}}{\big\{(p,q)\text{-formes lisses } \overline{\partial}\text{-exactes à support compact dans } \Omega\big\}}.$$

Cette notion admet de nombreuses variantes, e.g. pour les variétés complexes générales et pour les formes à support non-compact

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Omega) = \frac{\big\{(p,q)\text{-formes lisses } \overline{\partial}\text{-fermées dans } \Omega\big\}}{\big\{(p,q)\text{-formes lisses } \overline{\partial}\text{-exactes dans } \Omega\big\}}.$$

Il est important d'étudier la grandeur de ces groupes. Le théorème 1.1.9 ci-dessus dit que

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\mathbb{C}^n)_{\text{compact}} = 0 \quad \text{si } 1\leq q\leq n-1.$$

Il faut souligner ici que cette propriété n'est pas valable pour $q=n$. On trouvera au paragraphe suivant une application de ce résultat.

Finalement, notons que quand $q=0$, le groupe de Dolbeault est égal à

$$H^{p,0}_{\overline{\partial}}(\Omega) = \big\{(p,0)\text{-formes lisses } \overline{\partial}\text{-fermées dans } \Omega\big\}.$$

C'est l'espace des p-formes qui ne dépendent pas de $d\overline{z}_1,\ldots,d\overline{z}_n$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes. On les appelle $(p,0)$-*formes holomorphes.* On déduit du théorème 1.1.6 que $H^{p,0}(\Omega)_{\text{compact}}=0$ pour tout p.

1.2 Formule de Cauchy et applications

Pour tous $a\in\mathbb{C}$ et $r>0$, notons $\mathbb{D}(a,r)$ le disque ouvert de centre a et de rayon r dans $\mathbb{C}$. Pour $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ et $r=(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{R}^n_+$, *le polydisque de centre a et de rayon r* est défini par

$$\mathbb{D}_n(a,r) = \prod_{j=1}^n \mathbb{D}(a_j,r_j).$$

La formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes d'une variable se généralise au cas de plusieurs variables de manière suivante.

Théorème 1.2.1 (formule de Cauchy)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur le polydisque $\mathbb{D}_n(a,r)$ de $\mathbb{C}^n$ et continue jusqu'au bord. Alors on a pour tout $z\in\mathbb{D}_n(a,r)$*

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{|\xi_1-a_1|=r_1}\cdots\int_{|\xi_n-a_n|=r_n}\frac{f(\xi)}{(\xi_1-z_1)\ldots(\xi_n-z_n)}d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Démonstration. La preuve de ce théorème utilise une simple récurrence en n et la formule de Cauchy classique. On présente ici le cas $n = 2$ pour simplifier les notations. Par continuité, il suffit de montrer la même formule pour le polydisque de rayon $(r_1 - \epsilon, \ldots, r_n - \epsilon)$ et puis prendre $\epsilon \to 0$. Donc on peut réduire le polydisque afin de supposer que f est holomorphe dans un voisinage Ω de $\overline{\mathbb{D}}_2(a, r)$.

Considérons dans $\mathbb{C}^2$ la droite complexe verticale L passant par z, c.-à-d. l'ensemble des points dont la première coordonnée est égale à z_1. Son intersection avec Ω est un ouvert contenant le disque $L \cap \overline{\mathbb{D}}_2(a, r)$. Comme la restriction de f à $L \cap \Omega$ est holomorphe, la formule de Cauchy appliquée au disque $L \cap \overline{\mathbb{D}}_2(a, r)$ donne

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi_2 - a_2| = r_2} \frac{f(z_1, \xi_2)}{\xi_2 - z_2} d\xi_2.$$

Maintenant, pour chaque ξ_2 fixé avec $|\xi_2 - a_2| = r_2$, considérons la droite complexe horizontale L' qui est l'ensemble des points dont la deuxième coordonnée vaut ξ_2. Son intersection avec $\overline{\mathbb{D}}_2(a, r)$ est un disque dans L' sur lequel on peut appliquer à nouveau la formule de Cauchy. On obtient

$$f(z_1, \xi_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi_1 - z_1| = r_1} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 - z_1} d\xi_1.$$

En remplaçant la valeur obtenue de $f(z_1, \xi_2)$ dans la formule ci-dessus de $f(z)$, on obtient la formule anoncée. □

Nous déduisons de la définition d'une fonction holomorphe, de la formule de Cauchy ci-dessus et des propriétés de fonctions holomorphes d'une variable plusieurs conséquences. A l'exception du théorème de Hartogs, les résultats suivants se démontrent comme dans le cas de dimension 1 et nous ne donnons pas ici les preuves.

Corollaire 1.2.2. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω. Si $\mathbb{D}_n(a, r)$ est un polydisque relativement compact dans Ω, alors f est développable en série entière*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} c_k (z - a)^k \quad \textit{avec} \quad c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^k z}(a)$$

qui converge normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{D}_n(a, r)$ vers $f(z)$.

Notations. Pour $k = (k_1, \ldots, k_n)$, on note $k! = k_1! \ldots k_n!$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$ et

$$(z - a)^k = (z - a_1)^{k_1} \ldots (z - a_n)^{k_n} \quad \text{et} \quad \partial^k z = \partial^{k_1} z_1 \ldots \partial^{k_n} z_n.$$

Corollaire 1.2.3. *Avec les notations comme dans le dernier corollaire, on a*

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial^k z} = \frac{k!}{(2i\pi)^n} \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\xi_n - a_n| = r_n} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - z_1)^{k_1 + 1} \ldots (\xi_n - z_n)^{k_n + 1}} d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Corollaire 1.2.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω. Si $\mathbb{D}_n(a,r)$ est un polydisque relativement compact dans Ω, alors f est développable en série entière*

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} c_k(z-a)^k \quad \textit{avec} \quad c_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f}{\partial^k z}(a)$$

qui converge normalement (et donc uniformément) sur $\mathbb{D}_n(a,r)$ vers $f(z)$.

Corollaire 1.2.5 (principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω de $\mathbb{C}^n$. Supposons que $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω. Alors f est constante.*

Corollaire 1.2.6 (théorème de Liouville)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ à croissance polynomiale à l'infini. Alors f est un polynôme. Plus précisément, supposons qu'il existe une constante $N \geq 0$ telle que $f(z) = O(\|z\|^N)$ quand $\|z\| \to \infty$. Alors, f est un polynôme de degré au plus N en $z_1, \ldots, z_n$. En particulier, si f est bornée, elle est constante.*

Corollaire 1.2.7 (critère de normalité)**.** *Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ et K un compact de $\mathbb{C}^m$. Alors l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications holomorphes sur Ω à valeurs dans K est compact dans le sens suivant : toute suite de $\mathscr{F}$ admet une sous-suite qui converge localement et uniformément sur Ω vers un élélement de $\mathscr{F}$.*

Dans la suite, nous allons présenter le phénomène de Hartogs comme une conséquence de la formule de Cauchy. Cette découverte, due à Hartogs, est la première propriété qui sépare l'analyse complexe de plusieurs variables avec la théorie plus classique d'une variable.

Considérons un polydisque $\mathbb{D}_n(a,r)$ dans $\mathbb{C}^n$. Soit p un nombre entier tel que $1 \leq p < n$ (donc $n \geq 2$) et soit $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ avec ϵ_j des constantes vérifiant $0 < \epsilon < r_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Notons $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$ le domaine de $\mathbb{C}^n$ qui est la réunion des deux domaines suivants :

$$\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{D}_n(a,r), \quad |z_j - a_j| < \epsilon_j \quad \text{pour } j > p\big\}$$

et

$$\mathbb{A} := \big\{z \in \mathbb{D}_n(a,r), \quad |z_j - a_j| > r_j - \epsilon_j \quad \text{pour } j \leq p\big\}.$$

On appelle $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$ *une figure d'Hartogs* ou *une marmite d'Hartogs.*

Théorème 1.2.8 (Hartogs 1906)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur une figure d'Hartogs $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$ comme ci-dessus. Alors f s'étend de manière unique en fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(a,r)$.*

Démonstration. L'unicité de l'extension est une conséquence du théorème 1.1.6. Soit $r' = (r_1', \ldots, r_n')$ tel que $r_j - \epsilon_j < r_j' < r_j$ pour $j \leq p$ et $\epsilon_j < r_j' < r_j$ pour $j > p$. Il suffit de montrer que f se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(a,r')$.

Comme f est holomorphe sur $\mathbb{H}_n(a, r, \epsilon)$, en raisonnant comme dans le théorème 1.2.1, on obtient pour tout $z \in \mathbb{D}_n(a, r') \cap \mathbb{H}_n(a, r, \epsilon)$

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\xi_1 - a_1| = r'_1} \cdots \int_{|\xi_n - a_n| = r'_n} \frac{f(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_n - z_n)} d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

La dernière expression définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(a, r')$ qui est donc un prolongement holomorphe de f sur $\mathbb{D}_n(a, r')$. Ceci termine la preuve du théorème. □

Notons qu'en dimension 1, toute domaine Ω de $\mathbb{C}$ admet une fonction holomorphe qui ne se prolonge pas holomorphiquement sur aucun ouvert plus grand. Voici une variante utile du théorème de Hartogs.

Théorème 1.2.9 (Hartogs 1906, Brown 1936, Fueter 1939)**.** *Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ et K un compact de Ω. Supposons que $\Omega \setminus K$ est connexe. Alors toute fonction holomorphe sur $\Omega \setminus K$ se prolonge de manière unique en fonction holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus K$. Soit χ une fonction lisse à support compact dans Ω telle que $\chi = 1$ au voisinage de K. Considérons la fonction $(1 - \chi)f$. Elle est bien définie sur Ω et on la prolonge par zéro à travers K. Cette fonction n'est pas holomorphe mais on va la "corriger" pour obtenir une extension holomorphe de f sur Ω.

Considérons la $(0, 1)$-forme lisse g définie par

$$g = \overline{\partial}(-\chi f) = \overline{\partial}((1 - \chi)f).$$

Cette forme est définie et $\overline{\partial}$-exacte sur $\Omega \setminus K$. Elle est nulle près du bord de $\Omega \setminus K$. Par conséquent, elle se prolonge par zéro en une $(0, 1)$-forme lisse $\overline{\partial}$-fermée à support compact dans $\mathbb{C}^n$.

D'après le théorème 1.1.9, il existe une fonction h lisse à support compact dans $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\overline{\partial}h = g.$$

On utilise ici l'hypothèse que $n \geq 2$. Cette équation montre que h est holomorphe en dehors du support de g. Notons D la composante non bornée du complémentaire du support de g dans $\mathbb{C}^n$. Comme h est nulle au voisinage de l'infini, elle est nulle sur D.

Rappelons qu'on a prolongé la fonction $(1 - \chi)f$ par zéro à travers K. Posons

$$\widetilde{f} = (1 - \chi)f - h.$$

Cette fonction est bien définie sur Ω et satisfait

$$\overline{\partial}\widetilde{f} = \overline{\partial}((1 - \chi)f) - \overline{\partial}h = 0.$$

C'est donc une fonction holomorphe sur Ω. Elle est égale à f sur l'ouvert non-vide $D \cap (\Omega \setminus K)$. Comme $\Omega \setminus K$ est connexe, le théorème 1.1.6 entraîne que $\widetilde{f} = f$ sur $\Omega \setminus K$. Donc $\widetilde{f}$ est une extension holomorphe de f à Ω. □

La démonstration du dernière théorème illustre une idée fondamentale en analyse complexe. Elle peut être résumée comme suit. Lorsqu'on veut construire des fonctions holomorphes (ou plus généralement, des applications ou d'autres objets holomorphes) satisfaisant certaines propriétés, il est plus facile de construire des fonctions lisses satisfaisant des propriétés similaires. Ensuite, on résout, quand c'est possible, une équation $\overline{\partial}$ adaptée pour corriger la fonction lisse afin d'obtenir une fonction holomorphe.

Nous terminons ce paragraphe avec la remarque importante suivante. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$. En général, il peut exister différents domaines $\widetilde{\Omega}$ contenant Ω tels que toute fonction holomorphe sur Ω admette une extension holomorphe sur $\widetilde{\Omega}$. Par exemple, si Ω contient une figure de Hartogs $\mathbb{H}_n(a, r, \epsilon)$ telle que $\Omega \cap \mathbb{D}_n(a, r)$ soit connexe, alors toute fonction holomorphe sur Ω admet une extension holomorphe à $\Omega \cup \mathbb{D}_n(a, r)$. Ceci n'est plus vrai en général sans hypothèse sur la connexité de $\Omega \cap \mathbb{D}_n(a, r)$. En général, si une fonction holomorphe admet des prolongements holomorphes sur $\widetilde{\Omega}$ et $\widetilde{\Omega}'$, il n'est pas toujours vrai que les extensions coïncident sur $\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{\Omega}'$ lorsque cette intersection n'est pas connexe.

1.3 Variétés complexes et ensembles analytiques

Les variétés complexes de dimension n sont des espaces topologiques localement modélés par les ouverts de $\mathbb{C}^n$. Elles sont définies comme les variétés (réelles) différentiables sauf qu'on demande que les applications de transition soient holomorphes.

Définition 1.3.1. Soit X un espace topologique séparé qui est une réunion dénombrable de compacts. Soit n un entier positif. On appelle *atlas (holomorphe de dimension n) sur X* la donnée d'un recouvrement de X par une famille d'ouverts $(U_j)_{j\in J}$ et des homeomorphismes $\phi_j : U_j \to \Omega_j$ à valeurs dans des ouverts Ω_j de $\mathbb{C}^n$ tels que pour tous $j, k \in J$ l'application de transition

$$\phi_j \circ \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap U_k) \to \phi_j(U_j \cap U_k)$$

soit holomorphe.

Définition 1.3.2. Deux atlas sur X sont *équivalents* si leur réunion est aussi un atlas. L'espace X muni d'une classe d'équivalence d'atlas de dimension n est appelé *une variété complexe de dimension n*. Le couple (U_j, ϕ_j) est appelé *une carte (holomorphe)* de X. Les composantes de ϕ_j sont *des coordonnées locales de X*. Une variété complexe de dimension 1 s'appelle aussi *une surface de Riemann.*

Pour simplifier les notations, on se ramène souvent à oublier l'application ϕ_j, à identifier U_j avec un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et à considérer $z = (z_1, \ldots, z_n)$ comme des coordonnées locales de X.

Définition 1.3.3. Avec les notations ci-dessus, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* si $f \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur Ω_j pour tout $j \in J$. Si X' est une variété complexe de dimension n' muni d'un atlas $(U'_k, \phi'_k)_{k\in K}$, une application $F : X \to X'$ est *holomorphe* si $\phi'_k \circ F \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur son domaine de définition pour tous $j \in J$ et $k \in K$.

On vérifie sans peine que la dernière définition ne dépend pas du choix des atlas dans les classes d'équivalence données. Il faut souligner que les fonctions méromorphes d'une variable complexe sont les applications holomorphes à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$ (voir la définition ci-dessous).

Convention. On suppose souvent qu'une variété est connexe. Si un énoncé est faux lorsque la variété a plusieurs composantes connexes, cette convention s'applique.

Exemples 1.3.4 (espaces projectifs)**.** L'espace euclidien $\mathbb{C}^n$ et ses ouverts sont des variétés complexes de dimension n. L'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par 0 est muni d'une structure naturelle d'une variété complexe compacte de dimension n. Il est noté par $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{CP}^n$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Nous donnons maintenant la construction de la structure complexe de $\mathbb{P}^n$ qui est naturellement induite par celle de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Notons $(z_0, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes standard de $\mathbb{C}^{n+1}$. Deux vecteurs dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sont considérés comme équivalents s'ils sont $\mathbb{C}$-colinéaire. Alors $\mathbb{P}^n$ est identifié au quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence considérée. Notons π la projection canonique

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n.$$

L'image d'un point $z = (z_0, \ldots, z_n)$ par π est notée $[z] = [z_0 : \cdots : z_n]$. La dernière expression s'appelle *les coordonnées homogènes* du point $[z] = \pi(z)$.

Considérons sur $\mathbb{P}^n$ la topologie induite par celle de $\mathbb{C}^{n+1}$ via l'application π. Pour tout $0 \leq j \leq n$, notons U_j l'image de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_j = 0\}$ par π. Ces ouverts recouvrent $\mathbb{P}^n$. Considérons l'application bijective $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ définie par

$$\phi_j[z] = \Big(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\Big).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que les (U_j, ϕ_j) forment un atlas et définissent donc une structure complexe sur $\mathbb{P}^n$ pour laquelle π est holomorphe.

Exemple 1.3.5 (tores complexes)**.** Soit Γ un sous-groupe discret commutatif libre de rang maximal $2n$ de $\mathbb{C}^n$, i.e. $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^{2n}$. On peut prendre par exemple

$\Gamma = \mathbb{Z}^n + i\mathbb{Z}^n$. Deux points de $\mathbb{C}^n$ sont considérés comme équivalents s'ils sont égaux modulo Γ. Considérons le quotient de $\mathbb{C}^n$ par cette relation d'équivalence

$$\mathbb{T} = \mathbb{C}^n/\Gamma.$$

Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ une famille génératrice de Γ. Notons Ω le parallélépépède engendré par ces vecteurs. On obtient $\mathbb{T}$ en identifiant successivement les faces parallèles de Ω. Ainsi qu'on voit que $\mathbb{T}$ est compact.

Notons $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{T}$ la projection naturelle. Si Ω est un ouvert suffisamment petit de $\mathbb{C}^n$, la restriction de π sur Ω est bijective sur $\pi(\Omega)$. On vérifie sans peine que ouverts $\pi(\Omega)$ de $\mathbb{T}$ définissent un atlas et donc une structure complexe sur $\mathbb{T}$.

La variété $\mathbb{T}$ construite ainsi s'appelle *un tore complexe de dimension* n. Les tores complexes de même dimension sont tous difféomorphes l'un à l'autre mais ils ne sont pas tous biholomorphes l'un à l'autre.

Exemple 1.3.6 (variété de Hopf)**.** Soit $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application $A(z) = \frac{1}{2}z$. Elle induit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad \text{avec} \quad (k, z) \mapsto A^k(z) = A \circ \cdots \circ A(z) \ (k \text{ fois}).$$

Notons $\mathbb{H}$ l'ensemble des orbites de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, i.e. le quotient de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence : $z \sim w$ si $z = A^k(w)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Si $\mathbb{B}(0, r)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon r, alors $\mathbb{H}$ peut être obtenu en identifant les deux composantes du bord de $\mathbb{B}(0, 2) \setminus \mathbb{B}(0, 1)$ via l'application A. On voit que $\mathbb{H}$ est compact.

La projection naturelle de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{H}$ induit une structure complexe sur $\mathbb{H}$. C'est un exemple de variété de Hopf. La construction peut s'étendre à toute application holomorphe injective $A : \Omega \to \Omega$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ telle que $A(\Omega)$ soit relativement compact dans Ω.

Définition 1.3.7. Soient X et Y des variétés complexes de dimension n et m respectivement avec $m \leq n$. Soit $\tau : Y \to X$ une application holomorphe, injective, propre et de rang maximal en tout point. Alors l'image $\tau(Y)$ de τ est appelée *une sous-variété de dimension* m *et de codimension* $n - m$ *de* X. On dit aussi que $\tau(Y)$ est une variété complexe plongée dans X.

Le rang d'une application holomorphe est le rang de sa matrice jacobienne complexe qui est définie sur des cartes de Y et de X. Le rang ne dépend pas du choix de ces cartes.

Exemples 1.3.8. L'ensemble des zéros d'une fonction affine holomorphe non-constante sur $\mathbb{C}^n$ est une sous-variété de dimension $n - 1$ de $\mathbb{C}^n$ qui s'appelle *hyperplan complexe de* $\mathbb{C}^n$. Il est bi-holomorphe à $\mathbb{C}^{n-1}$.

Le fermé $\mathbb{P}^n \setminus U_j$ est l'image de $\{z_j = 0\} \setminus \{0\}$ par π. Il est donc bi-holomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$. Ainsi, lorsqu'on identifie U_j à $\mathbb{C}^n$ via l'application ϕ_j, l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ peut être vu comme une compactification de $\mathbb{C}^n$ en ajoutant à l'infini une copie de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$. Les fonctions linéaires complexes non-nulles sur $\mathbb{C}^{n+1}$ définissent des hyperplans passant par 0. Leurs images par π sont bi-holomorphes à $\mathbb{P}^{n-1}$ et s'appellent *les hyperplans projectifs de* $\mathbb{P}^n$.

Le graphe d'une application holomorphe de X dans X' est une sous-variété complexe de $X \times X'$. En particulier, la diagonale de $X \times X$ est une sous-variété de $X \times X$. Il existe des variétés complexes de toute dimension, i.e. les tores génériques, qui ne contiennent aucune sous-variété de dimension et codimension positives.

Théorème 1.3.9. *Soit Z une sous-variété complexe de dimension m d'une variété complexe X de dimension n. Soit a un point dans Z. Alors il existe une carte (U, ϕ) de X contenant a telle que $\phi(a) = 0$ et $Z \cap U$ est l'image réciproque par ϕ du sous-espace linéaire $\{z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$ de $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. On peut se restreindre à une carte de X qui contient a. Par conséquent, on peut supposer que X est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et $a = 0$. De plus, avec les notations comme ci-dessus, on peut aussi supposer que Y est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^m$ avec $\tau(Y) = Z$ et $\tau(0) = 0$. On écrit $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ en utilisant les coordonnées standard $w = (w_1, \ldots, w_m)$ sur $\mathbb{C}^m$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sur $\mathbb{C}^n$.

Comme τ est de rang maximal, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées complexes de $\mathbb{C}^n$, on peut supposer que

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial w_k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \leq m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème 1.1.7, en utilisant un changement holomorphe de coordonnées au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^m$, on peut supposer que

$$\tau_j(w) = w_j \quad \text{for } j = 1, \ldots, m.$$

Finalement, considérons l'application biholomorphe ϕ d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ dans un autre voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ définie par

$$\phi(z) = \big(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1} - \tau_{m+1}(z'), \ldots, z_n - \tau_n(z')\big) \quad \text{avec } z' = (z_1, \ldots, z_m).$$

Il est clair qu'au voisinage de 0 la sous-variété Z est l'image réciproque par ϕ du sous-espace $\{z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$. Le théorème s'en déduit. $\square$

On vérifie aisément avec la définition de variété qu'un fermé non-vide Z de X vérifiant la propriété anoncée dans le théorème précédent est une sous-variété complexe de dimension m de X.

Exemple 1.3.10 (éclatement)**.** Dans cet exemple, nous donnons une construction très utile de variétés complexes. Il s'agit de l'éclatement d'une variété le long d'une sous-variété lisse. On considère d'abord le cas le plus simple : l'éclatement d'un point.

Soit $\mathbb{C}^n$ l'espace euclidien muni des coordonnées canoniques $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Soit $\mathbb{P}^{n-1}$ l'espace projective de dimension $n-1$ muni des coordonnées homogènes $[\xi] = [\xi_1 : \cdots : \xi_n]$. Notons $\widehat{\mathbb{C}}^n$ l'ensemble des zéros communs des polynômes $z_j\xi_k - z_k\xi_j$, c.-à-d.

$$\widehat{\mathbb{C}}^n = \big\{(z, [\xi]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : \quad z_j\xi_k = z_k\xi_j \text{ pour tous } 1 \leq j, k \leq n\big\}.$$

Notons π la projection canonique de $\widehat{\mathbb{C}}^n$ sur $\mathbb{C}^n$. Observons que

$$\pi^{-1}(z) = (z, [z]) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

En particulier, $\widehat{\mathbb{C}}^n \setminus \pi^{-1}(0)$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Ainsi, $\widehat{\mathbb{C}}^n$ est obtenu en remplaçant le point 0 par un espace projective de dimension $n-1$. On peut également voir $\mathbb{C}^n$ comme la réunion des droites complexes passant par 0 et $\widehat{\mathbb{C}}^n$ s'obtient en séparant en 0 ces droites. Ainsi $\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ s'identifie à l'espace des paramètres pour ces droites. Nous montrons que $\widehat{\mathbb{C}}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Fixons un point $a \in \widehat{\mathbb{C}}^n$. Il suffit de vérifier qu'il y a des coordonnées locales en a vérifiant une propriété similaire à celle du théorème 1.3.9. Il suffit de considérer le cas où a appartient à $\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $a = (0, [\xi])$ avec $\xi_n = 1$. Dans la carte $\{\xi_n = 1\}$, avec coordonnées $(z_1, \ldots, z_n, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}^n$ est défini par les équations $z_j = \xi_j z_n$ pour $j = 1, \ldots, n-1$. On voit que dans les coordonnées

$$(w_1, \ldots, w_{2n-1}) = (z_1 - \xi_1 z_n, \ldots, z_{n-1} - \xi_{n-1} z_n, z_n, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$$

$\widehat{\mathbb{C}}^n$ s'identifie à un sous-espace linéaire $\{w_1 = \cdots = w_{n-1} = 0\}$. On conclut que $\widehat{\mathbb{C}}^n$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ et on voit aussi que $\{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\widehat{\mathbb{C}}^n$ qui est définie dans les coordonnées ci-dessus par l'équation $w_n = 0$.

Soient maintenant X une variété complexe de dimension n et a un point de X. On peut identifier un voisinage U de a avec un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ qu'on notera aussi par U. L'éclatement de X en a s'obtient en recollant $X \setminus U$ avec l'éclatement $\widehat{U} = \pi^{-1}(U)$ de U en 0. La construction utilise un système de coordonnées locales complexes. Cependant, elle ne dépend pas du choix de ces coordonnées car on a le lemme suivant.

Lemme 1.3.11. *Soit ϕ une application bi-holomorphe d'un voisinage U de 0 dans un autre voisinage U' de 0 dans $\mathbb{C}^n$ avec $\phi(0) = 0$. Notons $\pi : \widehat{U} \to U$ et $\pi' : \widehat{U'} \to U'$ les éclatements de U et U' en 0. Alors ϕ se relève en une application bi-holomorphe $\widehat{\phi} : \widehat{U} \to \widehat{U'}$. Plus précisément, il existe une application bi-holomorphe $\widehat{\phi} : \widehat{U} \to \widehat{U'}$ telle que*

$$\pi' \circ \widehat{\phi} = \phi \circ \pi.$$

Démonstration. Observons que la dernière identité définit une application unique

$$\widehat{\phi} : \widehat{U} \setminus \pi^{-1}(0) \to \widehat{U}' \setminus \pi'^{-1}(0).$$

Elle est égale à $\pi'^{-1} \circ \phi \circ \pi$.

Fait. $\widehat{\phi}$ se prolonge par continuité en une application de $\widehat{U}$ dans $\widehat{U}'$. Cette extension est aussi notée par $\widehat{\phi}$.

On admet ce fait pour le moment et on termine d'abord la preuve du lemme. Observons que $\widehat{\phi}$ est holomorphe. Ceci est une simple application de la formule de Cauchy en utilisant des coordonnées locales sur $\widehat{U}$ et $\widehat{U}'$, voir le théorème 1.3.19 pour une situation plus générale. Ceci s'applique également à l'application ϕ^{-1} et on obtient une application holomorphe $\widehat{\phi^{-1}} : \widehat{U}' \to \widehat{U}$. L'observation faite au début de la preuve montre que $\widehat{\phi^{-1}} \circ \widehat{\phi} = \mathrm{id}$ sur $\widehat{U} \setminus \pi^{-1}(0)$. Cette identité s'étend à $\widehat{U}$ par continuité. On constate que $\widehat{\phi} : \widehat{U} \to \widehat{U}'$ est bi-holomorphe.

Il reste à démontrer le fait. Il suffit de considérer les cas suivants :

Cas 1. ϕ est une application linéaire.

Cas 2. $\phi = \mathrm{id} + O(\|z\|^2)$ quand $z \to 0$.

En effet, toute application ϕ peut être composée par ces deux types d'applications. Pour le premier cas, on obtient le fait avec les calculs directs. Ceci est laissé au lecteur. On montre le fait dans le deuxième cas.

Soit (a_m) une suite de points dans $\widehat{U} \setminus \pi^{-1}(0)$ qui converge vers un point $a \in \pi^{-1}(0)$. Il faut montrer que la suite $\widehat{\phi}(a_m)$ converge. On peut écrire $a_m = (z^{(m)}, [z^{(m)}])$ avec $z^{(m)} \neq 0$ et $a = (0, [\xi])$. Alors on a $z^{(m)} \to 0$ et $[z^{(m)}] \to [\xi]$. Comme $\phi = \mathrm{id} + O(\|z\|^2)$, il n'est pas difficile de voir que

$$\widehat{\phi}(z^{(m)}) = (\phi(z^{(m)}), [\phi(z^{(m)}]) \to (0, [\xi]).$$

Ceci complète la preuve du lemme. □

Si Y est une autre variété complexe, l'éclatement de $X \times Y$ le long $\{a\} \times Y$ est égal au produit $\widehat{X} \times Y$ de l'éclatement $\widehat{X}$ de X en a avec Y.

Si Z est une sous-variété de X, l'éclatement $\widehat{X}$ de X le long Z est obtenu de manière suivante. Localement sur une carte convenable, grâce au théorème 1.3.9, on se ramène au dernier cas. On recouvre Z par une famille de telles cartes. On construira les éclatements en utilisant le modèle local ci-dessus. Ensuite, on peut montrer qu'ils se recollent de manière naturelle et canonique en une variété complexe $\widehat{X}$. Pour ce dernier point, il nous faut une propriété un peu plus compliquée que le lemme 1.3.11. On ne le présente pas ici.

Il y a une projection holomorphe canonique $\pi : \widehat{X} \to X$ qui définit une bijection entre $\widehat{X} \setminus \pi^{-1}(Z)$ et $X \setminus Z$. L'ensemble $\pi^{-1}(Z)$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\widehat{X}$. La restriction de π à $\pi^{-1}(Z)$ est une submersion (i.e. surjective et de rang maximal) holomorphe sur Z dont les fibres sont biholomorphes à $\mathbb{P}^{n-m-1}$ si $m = \dim Z$.

Définition 1.3.12. Une variété complexe X est dite *de Stein* si elle est biholomorphe à une sous-variété d'un espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^N$. On dit que X est *projective* si elle est biholomorphe à une sous-variété d'un espace projective $\mathbb{P}^N$.

Une variété projective est toujours compacte. En utilisant le principe du maximum, on peut montrer que les variétés de Stein ne contiennent aucune sous-variété complexe compacte de dimension positive. Ces deux très importantes classes de variétés sont donc disjointes lorsque la dimension n est positive.

Définition 1.3.13. Soit X une variété complexe de dimension n. On appelle *métrique hermitienne* sur X la donnée un produit hermitien h sur l'espace tangent complexe $\mathrm{Tan}_a(X)$ en chaque point a de X qui dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ du point a.

Dans les coordonnées locales $z = (z_1, \ldots, z_n)$, l'espace tangent complexe $\mathrm{Tan}_a(X)$ peut être identifié à l'espace vectoriel engendré par les dérivées $\partial/\partial z_j$. Pour tous vecteurs

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

dans $\mathrm{Tan}_a(X)$, on a

$$h(u,v) = \sum_{j,k=1}^n h_{j,k} u_j \overline{v}_k$$

où la matrice $(h_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ est hermitienne, définie positive et dépend de façons $\mathscr{C}^\infty$ en a.

Le produit hermitien h induit un produit scalaire sur $\mathrm{Tan}_a(X)$ vue comme un espace réel de dimension $2n$. Ainsi, h induit une métrique riemannienne g sur X définie par

$$g(u,v) = \operatorname{Re} h(u,v) = \frac{1}{2}\big(h(u,v) + h(v,u)\big).$$

Posons

$$\omega(u,v) = -\operatorname{Im} h(u,v) = -\frac{1}{2i}\big(h(u,v) - h(v,u)\big).$$

C'est une forme anti-symétrique. On peut donc l'identifier à une $(1,1)$-forme différentielle sur X. Dans les coordonnées locales ci-dessus, on a

$$\omega(z) = -\frac{1}{2i} \sum_{j,k=1}^n h_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z}_k = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n h_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z}_k.$$

Une $(1,1)$-forme différentielle ω associée à des matrices hermitiennes définies positives comme ci-dessus est dite *strictement positive*. La métrique hermitienne h est complétement déterminée par une telle forme ω. C'est pourquoi on appelle aussi métrique hermitienne toute $(1,1)$-forme lisse strictement positive. On peut noter ici qu'il est facile de construire des métriques hermitiennes sur une variété complexe : il suffit de construire d'abord localement les $(1,1)$-formes strictement positives et puis les "coller" en utilisant une partition de l'unité.

Le résultat suivant donne une propriété remarquable des variétés complexes et des métriques hermitiennes.

Théorème 1.3.14 (Wirtinger 1936). *Soit X une variété complexe munie d'une métrique hermitienne ω. Soit Y une sous-variété complexe de dimension m de X. Alors le volume $2m$-dimensionnelle de Y est égal à*

$$\mathrm{vol}_{2m}(Y) = \frac{1}{m!}\int_Y \omega^m.$$

Notons que le volume d'une variété riemannienne de dimension $2m$ est l'intégrale de la forme volume sur cette variété. C'est une $2m$-forme différentielle qui, en chaque point, vaut 1 sur une base orthonormée de l'espace tangent en ce point.

Démonstration. Fixons un point $a \in Y$. D'après le théorème 1.3.9, on peut choisir des coordonnées locales z telles que $z = 0$ en a et le plan tangent de Y en a est donné par $\{z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'en 0 on a

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{1\leq j\leq n} dz_j \wedge d\overline{z}_j = \sum_{1\leq j\leq n} dx_j \wedge dy_j.$$

Cette forme est en fait associée à la métrique standard sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

La forme volume de Y en 0 est donc égale à $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_m$. On vérifie sans peine que cette forme est égale en 0 à la restriction de $\frac{1}{p!}\omega^p$ à Y. Le théorème s'en découle. $\square$

Définition 1.3.15. Une métrique hermitienne ω est appelée *métrique kählérienne* si elle est fermée, c.-à-d. $d\omega = 0$.

Notons que toute sous-variété Y d'une variété kählérienne (X, ω) est aussi kählérienne avec comme métrique kählérienne la restriction de ω à Y. Le produit de deux variétés kählériennes est aussi kählérien. Les variétés de Hopf en dimension ≥ 2 ne sont pas kählériennes. Les variétés kählériennes forment une très large classe de variétés avec beaucoup de propriétés remarquables. Nous ne pouvons malheureusement considérer dans ce cours que des cas très particuliers.

L'espace euclidien $\mathbb{C}^n$ est kählérien avec par exemple la métrique standard

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{1\leq j\leq n} dz_j \wedge d\overline{z}_j$$

qui est clairement kählérienne. Les variétés de Stein et leur ouverts sont donc des variétés kählériennes.

L'espace projectif $\mathbb{P}^n$ ainsi que toutes les variétés projectives sont kählériennes. On peut vérifier que la forme ω donnée sur les cartes $\{z_j \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n$ par

$$\omega = i\partial\overline{\partial} \log\Big(\sum_{k=0}^{n} \Big|\frac{z_k}{z_j}\Big|^2\Big)$$

est bien définie et kählérienne. Elle s'appelle la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n$.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons introduire les ensembles analytiques qui généralisent la notion de sous-variétés complexes. Soit X une variété complexe de dimension n.

Définition 1.3.16. *Une hypersurface complexe de* X est un sous-ensemble fermé non vide H de X tel que chaque point $a \in H$ admet un voisinage dans lequel H est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle.

On donnera dans la suite une description locale des hypersurfaces. Soient H une hypersurface complexe de X et a un point de H. Soient U un voisinage de a et h une fonction holomorphe sur U tels que

$$H \cap U = \{h = 0\}.$$

Quitte à réduire U, on peut trouver des coordonnées locales $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sur U telles que la restriction de h à la droite $L = \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$ est non identiquement nulle. Cette dernière propriété équivaut au fait que $H \cap U \cap L$ est discret dans $U \cap L$.

Comme H est fermé, on peut encore réduire U afin de supposer que U est un polydisque $\mathbb{D}_n(0, r)$ et que h ne s'annule pas sur la partie horizontale du bord de $\mathbb{D}_n(0, r)$ qui est définie par

$$\big\{|z_1| < r_1, \ldots, |z_{n-1}| < r_{n-1}, |z_n| = r_n\big\}.$$

Afin de rester dans une situation assez générale, on ne suppose pas que $a = 0$ mais seulement que a appartient à $\mathbb{D}_n(0, r)$.

Notons $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$, $r' = (r_1, \ldots, r_{n-1})$ et $\mathbb{D}_{n-1}(0, r')$ le polydisque de centre 0 et de rayon r' dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Le résultat suivant donne la structure locale des hypersurfaces complexes.

Théorème 1.3.17. *Avec les notations ci-dessus, il existe un polynôme unitaire en z_n, appelé polynôme de Weierstrass,*

$$P(z) = z_n^d + a_1(z')z_n^{d-1} + \cdots + a_d(z')$$

dont les coefficients sont des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_{n-1}(0, r')$ tels que

$$H \cap \mathbb{D}_n(0, r) = \{P = 0\}$$

et que h soit égale au produit de P avec une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur $\mathbb{D}_n(0, r)$. En particulier, l'ensemble $H \cap \big(\{z'\} \times \mathbb{D}(0, r_n)\big)$ dépend continûment de $z' \in \mathbb{D}_{n-1}(r')$.

Démonstration. La restriction de h au disque $D_{z'} = \{z'\} \times \{|z_n| < r_n\}$ est une fonction holomorphe en z_n qui ne s'annule pas sur le bord du disque. Le nombre de ses zéros comptés avec multiplicité est égal à

$$d = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD_{z'}} \frac{\frac{\partial h}{\partial z_n} dz_n}{h}.$$

La formule montre que ce nombre entier dépend continûment de z'. Il est donc constant.

Notons $\xi_1(z'), \ldots, \xi_d(z')$ ces zéros et posons

$$P(z) = \prod_{j=1}^{d} (z_n - \xi_j(z')) = z_n^d + b_1(z') z_n^{d-1} + \cdots + b_d(z').$$

Il est clair que

$$H \cap \mathbb{D}_n(0, r) = \{P = 0\}.$$

Posons

$$c_k(z') = \sum_{j=1}^{d} \xi_j(z')^k.$$

Observons que les $b_k(z')$ sont des polynômes symétriques en $\xi_j(z')$ qui peuvent être calculés en fonction polynomiale des $c_k(z')$. D'autre part, la formule des résidus en une variable implique que

$$c_k(z') = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD_{z'}} z_n^k \frac{\frac{\partial h}{\partial z_n} dz_n}{h}.$$

On en déduit que les c_k sont des fonctions holomorphes en z'. Par conséquent, les $b_k(z')$ les sont aussi.

Posons $f = h/P$. C'est une fonction bien définie sur $\overline{\mathbb{D}}_n(0, r) \setminus H$ qui se prolonge sur chaque disque verticale en fonction holomorphe ne s'annulant pas sur ce disque. Il reste à montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{D}_n(0, r)$. Utilisant le fait que cette fonction est holomorphe au voisinage de la partie horizontale du bord de $\mathbb{D}_n(0, r)$ et la formule de Cauchy appliquée d'abord au variable z_n et puis aux autres variables comme dans le théorème 1.2.8, on obtient pour $\xi \in \mathbb{D}_n(0, r)$ que

$$f(w) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n} \frac{f(z) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n}{(z_1 - w_1) \ldots (z_n - w_n)}.$$

Il est clair que f est holomorphe. □

Théorème 1.3.18. *Avec les notations ci-dessus, il existe un polynôme unitaire unique $P_{\min}(z)$ en z_n à coefficients holomorphes sur $\mathbb{D}_{n-1}(0, r')$ tel que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(0, r)$ nulle sur H est un produit de $P_{\min}$ avec une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(0, r)$.*

Pour la preuve, nous avons besoin du résultat suivant.

Théorème 1.3.19. *Soit E un fermé contenu dans une hypersurface de X. Soit f une fonction holomorphe sur $X \setminus E$. Supposons que f soit bornée au voisinage de tout point de E. Alors, f se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur X.*

Démonstration. C'est un problème local. On peut donc se ramène au cas où X est un voisinage d'un polydisque $\mathbb{D}_n(0,r)$ et E est contenu dans une hypersurface H comme ci-dessus. Comme f est bornée dans $\mathbb{D}_n(0,r)$, sur chaque disque verticale elle se prolonge en fonction holomorphe sur ce disque de manière unique. En utilisant la formule de Cauchy comme à la fin de la preuve du théorème 1.3.17, on montre que cette extension est holomorphe sur $\mathbb{D}_n(0,r)$. □

Démonstration du théorème 1.3.18. Soit $\mathscr{F}$ la famille des polynômes unitaires en z_n à coefficients holomorphes sur $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$ qui sont nulle sur $H \cap \mathbb{D}_n(0,r)$. D'après le théorème 1.3.17, cette famille est non-vide. Soit $P_{\min}$ un élément de $\mathscr{F}$ de degré minimal d. On montre qu'il vérifie le théorème.

Si g est une fonction holomorphe nulle sur $H \cap \mathbb{D}_n(0,r)$, on construit comme dans le théorème 1.3.17 un élément de $\mathscr{F}$ qui divise g. Considérons un polynôme arbitraire Q en z_n, pas nécessairement unitaire, qui est nulle sur $H \cap \mathbb{D}_n(0,r)$. On montre que Q est divisible par $P_{\min}$. Cela entraînera que $P_{\min}$ divise g et aussi l'unicité de $P_{\min}$.

Notons $\mathscr{M}$ l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme f/g avec f, g holomorphes sur $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$ et g non identiquement nulle. La fonction f/g est holomorphe en dehors des zéros de g. On considère Q et $P_{\min}$ comme fonctions à coefficients dans $\mathscr{M}$. Soit R le polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{M}$ qui est le plus grand diviseur commun de Q et $P_{\min}$. Il suffit de montrer que $R = P_{\min}$. Pour ceci, on doit seulement prouver que $\deg R \geq \deg P_{\min}$ ou encore $R \in \mathscr{F}$.

Le polynôme R peut être obtenu par algorithme euclidien. Suivant cet algorithme, on voit qu'il existe une fonction holomorphe b non identiquement nulle sur $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$ telle que si $b(z') \neq 0$, $R(z',\cdot)$ est le plus grand diviseur commun de $Q(z',\cdot)$ et $P_{\min}(z',\cdot)$. Comme $P_{\min}$ est nul exactement sur H, les zéros de $R(z',\cdot)$ sont dans $H \cap (\{z'\} \times \mathbb{D}(0,r_n))$. On constate que les coefficients de R, qui sont des fonctions symétriques en leurs racines, doivent être holomorphes et bornés en dehors de $\{b = 0\}$. D'après le théorème 1.3.19, les coefficients de R sont holomorphes sur $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$.

Le polynôme R s'annule sur $H \cap (\{z'\} \times \mathbb{D}(0,r_n))$ si z' n'est pas dans $\{b = 0\}$. La dernière assertion du théorème 1.3.17 montre que cette propriété est vraie pour tout z'. On en déduit que R est un élément de $\mathscr{F}$. Ceci complète la preuve du théorème. □

Théorème 1.3.20. *Avec les notations comme dans le théorème 1.3.18, l'ensemble Σ des $z' \in \mathbb{D}_{n-1}(0,r')$ tels que les racines de $P_{\min}(z',\cdot)$ soient toutes simples, est une hypersurface de $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$. En particulier, $H \setminus (\Sigma \times \mathbb{C})$ est un* *revêtement holomorphe de degré d au-dessus de $\mathbb{D}_{n-1}(0,r') \setminus \Sigma$, où d est le degré de P en z_n.*

Démonstration. Notons $\xi_1(z'),\ldots,\xi_d(z')$ les racines de $P_{\min}(z',\cdot)$ comptés avec multiplicité. Considérons le discriminant de $P_{\min}$ défini par

$$\Delta(z') = \prod_{j\neq l}(\xi_j(z') - \xi_l(z')).$$

Observons que cette fonction est holomorphe en z' car c'est une fonction symétrique en ξ_j. L'ensemble Σ, qui est aussi l'ensemble des zéros de Δ, est donc une hypersurface de $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')$. Il suffit pour la première assertion de montrer que Δ n'est pas identiquement nul.

Supposons que Δ est nul. Alors pour chaque z' les polynômes $P_{\min}(z',\cdot)$ et $\frac{\partial P_{\min}(z',\cdot)}{\partial z_n}$ ont une racine commune. En utilisant l'algorithme euclidien comme ci-dessus, on peut construit un polynôme unitaire non-constant S qui est le plus grand diviseur commun de ces deux polynômes. On en déduit que $P_{\min}/S$ est un polynôme qui est nul sur $H\cap\mathbb{D}_n(0,r)$. Ceci contredit la définition de $P_{\min}$ et complète la preuve de la première assertion.

Considérons un point $a'\not\in\Sigma$. Alors les points $\xi_1(a'),\ldots\xi_d(a')$ sont distincts. Pour z' dans un polydisque D' assez petit centré en a', les zéros de $P_{\min}(z',\cdot)$ sont simples. Comme l'ensemble des zéros de $P_{\min}(z',\cdot)$ dépend continûment de z', on peut numéroter $\xi_j(z')$ de sorte qu'ils dépendent continûment de $z'\in D'$. Ainsi, au-dessus de D', H est une réunion de d petits graphes disjoints. On peut appliquer le théorème 1.3.18 au voisinage de chacun de ces graphes et conclure qu'ils sont les ensembles des zéros de polynômes de degré 1. Autrement dit, ce sont les graphes de fonctions holomorphes. Donc H est un revêtement holomorphe de degré d au-dessus de $\mathbb{D}_{n-1}(0,r')\setminus\Sigma$. □

Définition 1.3.21. Soit Z un fermé de X. On dit que Z est *un sous-ensemble analytique de* X si pour tout point $a\in Z$ il existe un voisinage U de a et une famille de fonctions holomorphes sur U tels que $Z\cap U$ soit l'ensemble des zéros communs de ces fonctions holomorphes, i.e. $Z\cap U$ soit l'intersection d'une famille d'hypersurfaces de U. Un sous-ensemble analytique Z est *irréductible* s'il n'est pas la réunion de deux sous-ensembles analytiques différents.

Nous donnons maintenant quelques propriétés des sous-ensembles analytiques. Leurs démonstrations (à l'exception du théorème d'Hironaka) sont élémentaires mais assez longues. Elles ne sont pas présentées ici.

Théorème 1.3.22. *Tout sous-ensemble analytique Z de X est une réunion localement finie de sous-ensembles analytiques irréductibles. On les appelle composantes irréductibles de Z.*

La première assertion de ce théorème signifie que chaque compact de X rencontre seulement un nombre fini de composantes irréductibles de Z.

Théorème 1.3.23. *Soit Z un sous-ensemble analytique irréductible de X. Soit a un point de Z. Alors il existe des coordonnées locales $z = (z', z'')$ avec $z' = (z_1, \ldots, z_p)$ et $z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$ sur un voisinage de a qui s'identifie à un polydisque $\mathbb{D}_n(0, r) = \mathbb{D}_p(0, r') \times \mathbb{D}_{n-p}(0, r'')$ avec $r = (r', r'')$, $r' = (r_1, \ldots, r_p)$ et $r'' = (r_{p+1}, \ldots, r_n)$ telles que*

1. *L'ensemble Z n'intersecte pas $\mathbb{D}_p(0, r') \times b\mathbb{D}_{n-p}(0, r'')$;*
2. *La projection de $Z \setminus (\Sigma \times \mathbb{D}_{n-p}(0, r''))$ sur $\mathbb{D}_p(0, r') \setminus \Sigma$ est un revêtement fini non-vide pour une certaine hypersurface Σ de $\mathbb{D}_p(0, r')$;*
3. *L'intersection $Z \cap \mathbb{D}_n(0, r)$ est l'ensemble des zéros communs d'une famille finie de polynômes en z'' à coefficients holomorphes sur $\mathbb{D}_p(0, r')$;*
4. *L'entier p ne dépend pas du point a et s'appelle la dimension de Z.*

Notons que le nombre de polynômes au point 3) ci-dessus est au moins égal à $n - p$.

Définition 1.3.24. Quand Z n'est pas irréductible, *la dimension de Z* est le maximum de dimension de ses composantes irréductibles. Quand toutes les composantes de Z sont de dimension p, on dit que Z est *de dimension pure p*. Un point a de Z est dit *régulier* s'il appartient à une seule composante irréductible de Z et si dans le théorème précédent, on peut trouver des coordonnées locales sur un voisinage de a telles que le revêtement mentionné dans ce théorème soit de degré 1. Un point non-régulier de X est dit *singulier*.

On voit que a est régulier si et seulement s'il existe des coordonnées locales telles qu'au voisinage de ce point Z est identifié à un sous-espace linéaire comme dans le théorème 1.3.9.

Théorème 1.3.25. *Soit Z un sous-ensemble analytique irréductible de dimension p de X. Soit $\operatorname{reg}(Z)$ et $\operatorname{sing}(Z)$ les ensembles des points réguliers et singuliers de Z respectivement. Alors $\operatorname{sing}(Z)$ est un sous-ensemble analytique de dimension au plus $p - 1$ de X et $\operatorname{reg}(Z)$ est une sous-variété connexe de dimension p de $X \setminus \operatorname{sing}(Z)$. En particulier, $\operatorname{sing}(Z)$ est un fermé de X.*

Exemples 1.3.26. Dans $\mathbb{C}^2$, la réunion de de deux axes est un sous-ensemble analytique de dimension singulier en 0. La courbe complexe d'équation $z_1^2 = z_2^3$ est singulière en 0. Elle est aussi l'image de l'application $t \mapsto (t^3, t^2)$ définie sur $\mathbb{C}$. En dimension supérieure, les singularités d'un ensemble analytique peuvent être beaucoup plus compliquées. Les théorèmes précédents permettent d'avoir une stratification en considérant les singularités de la partie singulière qui est aussi un sous-ensemble analytique ; les singularités de ce dernier, etc.

On termine ce paragraphe avec le théorème important et difficile suivant.

Théorème 1.3.27 (Hironaka)**.** *Soit Z un sous-ensemble analytique de X. Alors il existe une variété complexe $\widehat{X}$ et une application holomorphe propre $\pi : \widehat{X} \to X$ telles que*

1. *L'application π définit une bijection entre $\widehat{X} \setminus \pi^{-1}(\mathrm{sing}(Z))$ et $X \setminus \mathrm{sing}(Z)$;*
2. *L'adhérence de $\pi^{-1}(\mathrm{reg}(Z))$ dans $\widehat{X}$ est un sous-ensemble analytique régulier de $\widehat{X}$; on l'appelle transformée stricte de Z par π ;*
3. *L'application π est une composition localement finie d'éclatements.*

1.4 Formules de Bochner-Martinelli et de Leray

La formule de Cauchy que nous avons vue est valide seulement pour des domaines spécifiques de $\mathbb{C}^n$, à savoir les polydisques. Elle permet de calculer les valeurs d'une fonction holomorphe, ainsi que de ses dérivées, sur un tel domaine en termes des valeurs au bord du domaine. Nous allons donner dans ce paragraphe des formules qui sont valables pour les domaines généraux à bord lisse par morceaux.

Posons pour $z \in \mathbb{C}^n$

$$\omega(z) = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

et

$$\omega'(z) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} z_j dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

Ces formes sont reliées par la formule suivante

$$d\omega' = n\omega.$$

Théorème 1.4.1 (Bochner-Martinelli 1943)**.** *Soit Ω un domaine borné à bord lisse par morceaux dans $\mathbb{C}^n$. Soit f une fonction holomorphe sur Ω et continue jusqu'au bord. Alors on a pour tout $a \in \Omega$*

$$f(a) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{z \in b\Omega} f(z) \frac{\omega'(\overline{z} - \overline{a}) \wedge \omega(z)}{\|z-a\|^{2n}}.$$

En dimension 1, on retrouve la formule de Cauchy. La formule de Cauchy peut être appliquée à toute droite passant par a. En prenant une moyenne des résultats obtenus, on peut prouver la formule de Bochner-Martinelli ci-dessus. Nous allons donner dans la suite une autre démonstration du théorème 1.4.1 mais avant cela nous introduisons quelques notions utiles.

Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ muni des coordonnées homogènes standard $[z] = [z_0 : \cdots : z_n]$. On considère aussi $\mathbb{C}^n$ comme une carte de $\mathbb{P}^n$ en l'identifiant à l'ouvert $\{z_0 = 1\}$ de $\mathbb{P}^n$ sur lequel on peut utiliser comme avant les coordonnées standard $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Tout hyperplan projectif de $\mathbb{P}^n$ est défini par un polynôme homogène non-nul de degré 1 en $z_0, \ldots, z_n$

$$\langle \xi, z \rangle = \sum_{j=0}^{n} \xi_j z_j.$$

Ce polynôme est unique à une constante multiplicative près. Autrement dit, on peut paramétrer ces hyperplans projectifs par les points $[\xi] = [\xi_0 : \cdots : \xi_n]$ d'un autre espace projectif de dimension n noté par $\mathbb{P}^{n*}$. L'hyperplan associé à ξ est notée par H_ξ.

Pour chaque z fixé, $\langle \xi, z\rangle$ est un polynôme homogène de degré 1 en ξ. Il définit un hyperplan de $\mathbb{P}^{n*}$ qu'on notera H^*_z. On a ainsi $(\mathbb{P}^n)^{**} = \mathbb{P}^n$. On définit aussi la variété d'incidence Q par

$$Q := \big\{(\xi, z) \in \mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{C}^n : \quad \langle \xi, z\rangle = 0\big\}.$$

On va dans la suite considérer seulement $z \in \mathbb{C}^n$. Afin de simplifier les notations, on suppose systématiquement que $z_0 = 1$.

Posons

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_{j-1} \wedge d\xi_{j+1} \wedge \ldots \wedge d\xi_n.$$

Observons que pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ fixé, la forme

$$\frac{\widetilde{\omega}(\xi) \wedge \omega(z)}{\langle \xi, a\rangle^n}$$

sur $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$ induit une une $(2n-1, 0)$-forme holomorphe sur $(\mathbb{P}^{n*} \setminus H^*_a) \times \mathbb{C}^n$. On utilisera la même formule pour la forme induite.

Notons que cette forme est fermée sur $Q \setminus (H^*_a \times \mathbb{C}^n)$ car c'est une $(2n-1, 0)$-forme holomorphe sur une variété complexe de dimension $2n - 1$.

Considérons l'application $\underline{\xi}^a(z)$ définie sur $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{P}^{n*}$ par

$$\underline{\xi}^a_j(z) = \overline{z}_j - \overline{a}_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \underline{\xi}^a_0(z) = -\sum_{j=1}^{n} \xi^a_j(z) z_j.$$

L'hyperplan projectif associé à $\underline{\xi}^a(z)$ est celui orthogonal en z à la droite complexe joignant a et z. Ainsi, le graphe de $\underline{\xi}^a$ dans $\mathbb{P}^{n*} \times \mathbb{C}^n$ est contenu dans

$$Q^a_\Omega = Q \cap (\mathbb{P}^{n*} \times (\overline{\Omega} \setminus \{a\})).$$

Démonstration du théorème 1.4.1. Quitte à réduire légèrement Ω, on peut supposer que f est holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$. Observons que la forme

$$\frac{\omega'(\overline{z} - \overline{a}) \wedge \omega(z)}{\|z - a\|^{2n}}$$

sur $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$ est l'image réciproque par l'application $\overline{\xi}^a$ de la forme

$$(-1)^n \frac{\widetilde{\omega}(\xi) \wedge \omega(z)}{\langle \xi, a\rangle^n}$$

introduite ci-dessus sur $(\mathbb{P}^{n*} \setminus H_a^*) \times \mathbb{C}^n$. Par conséquent, la forme considérée sur $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$ est fermée. Ce point peut être vérifié par un calcul direct assez simple.

Comme f est holomorphe, on en déduit que la forme

$$f(z)\frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a}) \wedge \omega(z)}{\|z-a\|^{2n}}$$

est aussi fermée sur $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, d'après la formule de Stokes appliquée au domaine $\Omega \setminus \{\|z-a\| \leq \epsilon\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{z\in b\Omega} f(z)\frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a}) \wedge \omega(z)}{\|z-a\|^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\|z-a\|=\epsilon} f(z)\frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a}) \wedge \omega(z)}{\|z-a\|^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n\epsilon^{2n}}\int_{\|z-a\|=\epsilon} f(z)\omega'(\overline{z}-\overline{a}) \wedge \omega(z).
\end{aligned}$$

Comme $d\omega' = n\omega$, la formule de Stokes appliquée à la boule $\{\|z-a\| \leq \epsilon\}$ entraîne que la dernière intégale est égale à

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!}{(2i\pi)^n\epsilon^{2n}}\int_{\|z-a\|\leq\epsilon} f(z)\omega(\overline{z}) \wedge \omega(z).$$

Quand $\epsilon \to 0$, la dernière expression tends vers $f(z)$ car

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!}{(2i\pi)^n\epsilon^{2n}}\int_{\|z-a\|\leq\epsilon} \omega(\overline{z}) \wedge \omega(z) = 1.$$

Le théorème en résulte. $\square$

Rappel. (formule de Stokes) Soit Ω est un domaine borné à bord lisse par morceaux dans $\mathbb{R}^n$. Soit α une $(n-1)$-forme de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, continue juqu'au bord. Alors on a

$$\int_\Omega d\alpha = (-1)^{n-1}\int_{b\Omega} \alpha.$$

Définition 1.4.2. Une application lisse $\xi^a : b\Omega \to \mathbb{P}^{n*}$ est dite *de Leray* si son graphe est contenu dans Q_Ω^a et si ce graphe est homotope au graphe de l'application $\underline{\xi}^a$ restreinte à $b\Omega$.

Notons que pour une telle application l'hyperplan projectif associé à $\xi^a(z)$ passe par z mais ne contient pas le point a. C'est une déformation continue de $\underline{\xi}^a$ dans la classe des applications avec les mêmes propriétés.

Théorème 1.4.3 (Leray 1959). *Soient* Ω, a *et* ξ^a *une application de Leray comme ci-dessus. Soit* f *une fonction holomorphe sur* Ω *continue jusqu'au bord. Alors on a*

$$f(a) = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{z\in b\Omega} f(z) \frac{\widetilde{\omega}(\xi^a(z)) \wedge \omega(z)}{\langle \xi^a(z), a\rangle^n}.$$

Démonstration. Par continuité, on peut réduire Ω et supposer que f est holomorphe au voisinage de $\overline{\Omega}$. Observons que la forme

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} f(z) \frac{\widetilde{\omega}(\xi) \wedge \omega(z)}{\langle \xi, a\rangle^n}$$

est fermée sur Q^a_Ω car f est holomorphe.

Par conséquent, son intégrale sur le graphe de ξ^a est égale à celle sur le graphe au-dessus de $b\Omega$ de l'application $\underline{\xi}^a$. On utilise ici l'invariance par homotopie. D'après le théorème 1.4.1, la deuxième intégrale vaut $f(a)$. La première est exactement celle donnée dans l'énoncé. Le résultat s'en déduit. □

Considérons le cas particulier où Ω est convexe à bord lisse et défini par une fonction réelle lisse convexe ρ sur $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\Omega = \big\{z \in \mathbb{C}^n : \quad \rho(z) < 0\big\}.$$

Considérons l'application ξ définie sur $b\Omega$ par

$$\xi_j(z) = \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z) \text{ pour } j = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \xi_0(z) = -\sum_{j=1}^n \xi_j(z) z_j.$$

qui associe à chaque point $z \in b\Omega$ l'hyperplan complexe tangent à $b\Omega$ en z.

Comme Ω est convexe, on peut vérifier que l'application ξ est de Leray. En effet, on peut d'abord déformer Ω vers une petite boule $\mathbb{B}$ de centre a en gardant la convexité. Les hyperplans complexes tangents à $b\Omega$ se déforment continûment aux hyperplans tangents complexes de $b\mathbb{B}$ en restant dans $\mathbb{C}^n \setminus \{a\}$. Finalement, on peut utiliser des homothéties de centre a pour déformer les hyperplans tangents complexes de $b\mathbb{B}$ aux hyperplans associés à $\underline{\xi}^a$.

On déduit de la formule de Leray le résultat suivant.

Corollaire 1.4.4 (Leray 1956). *Avec les notations ci-dessus, si* f *est holomorphe sur* Ω *et continue jusqu'au bord, on a*

$$f(a) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{z\in b\Omega} f(z) \frac{\omega'(\frac{\partial\rho}{\partial z}) \wedge \omega(z)}{\langle \frac{\partial\rho}{\partial z}, z-a\rangle^n}$$

où

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} = \Big(\frac{\partial\rho}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial z_n}\Big).$$

Notons qu'un avantage de cette formule par rapport à la formule de Bochner-Martinelli est que le noyau utilisé ici dépend holomorphiquement de a. En appliquant le dernier corollaire à la boule de centre 0 et de rayon R, on obtient la formule suivante.

Corollaire 1.4.5 (Szegö-Bochner 1943). *Soit f une fonction holomorphe sur la boule de centre 0 et de rayon R qui est continue jusqu'au bord. Alors pour tout point a dans cette boule on a*

$$f(a) = \frac{(n-1)!R}{(2i\pi)^n} \int_{\|z\|=R} \frac{f(z) d\mathrm{vol}_{2n-1}(z)}{(R^2 - \langle a, \overline{z} \rangle)^n}$$

où $d\mathrm{vol}_{2n-1}$ est la forme volume sur la sphère $\{\|z\| = R\}$.

Quand $n = 1$, on retrouve la formule de Cauchy sur un disque.

Nous terminons ce paragraphe en donnons la solution de l'équation $\overline{\partial}$ pour les données à support compact dans $\mathbb{C}^n$. La démonstration sera donnée au paragraphe suivant.

Théorème 1.4.6. *Soit g une (p, q)-forme lisse $\overline{\partial}$-fermée à support compact dans $\mathbb{C}^n$ avec $0 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$. Alors la $(p, q-1)$-forme f suivante satisfait l'équation $\overline{\partial} f = g$*

$$f(a) = (-1)^{p+q-1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{z \in \mathbb{C}^n} g(z) \wedge \frac{\omega'(\overline{z} - \overline{a}) \wedge \omega(z-a)}{\|z-a\|^{2n}}.$$

La forme différentielle sous le signe de l'intégration dépend de $dz_j, d\overline{z}_j$ et aussi de $da_j, d\overline{a}_j$. Les termes qui ne sont pas de degré maximal en $dz_j, d\overline{z}_j$ ne contribuent pas pour cette intégrale.

Il existe des formules intégrales similaires donnant la solution de l'équation $\overline{\partial}$ dans un domaine convexe à bord lisse pour les formes g sur Ω lisse jusqu'au bord qui ne sont pas nécessairement à support compact. Ces formules sont plus compliquées et font intervenir les valeurs de g sur le bord de Ω.

1.5 Courants de de Rham

Les courants de de Rham sont un outil fondamental en analyse, en géométrie et en dynamique complexes. Nous allons les introduire et donner des intéprétations plus conceptuelles de certains résultats présentés aux paragraphes précédents.

Soit X une variété **réelle** lisse orientée de dimension n. Notons $\mathscr{D}^p(X)$ l'espace des p-formes lisses à support compact dans X.

Définition 1.5.1. *Un courant de degré p (on dit aussi de dimension $n-p$ ou encore un p-courant) sur X* est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathscr{D}^{n-p}(X)$ muni de la topologie canonique. *Une distribution au sens de Schwartz* est un courant de degré maximal n et de dimension 0.

Si T est un p-courant sur X, sa valeur en $\varphi \in \mathscr{D}^{n-p}(X)$ est notée par $\langle T, \varphi\rangle$ ou par $T(\varphi)$. Cette valeur dépend linéairement de φ. La continuité de T est équivalente à la propriété suivante :

$$\text{si } \varphi_k \to \varphi \text{ dans } \mathscr{D}^{n-p}(X) \text{ alors } \langle T, \varphi_k\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

Rappelons que $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{D}^{n-p}(X)$ si et seulement si ces formes sont supportées par un même compact et $\|\varphi_k - \varphi\|_{\mathscr{C}^r} \to 0$ pour tout $0 \leq r < \infty$.

On utilise souvent sur l'espace des courants *la topologie faible* donnée par la définition suivante.

Définition 1.5.2. On dit que *la suite des p-courants T_k sur X converge faiblement vers un p-courant T* si

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ pour toute forme test } \varphi \in \mathscr{D}^{n-p}(X).$$

Si U est un ouvert de X, on peut considérer la restriction de T à l'espace $\mathscr{D}^{n-p}(U)$ qui est considéré comme un sous espace de $\mathscr{D}^{n-p}(X)$. C'est la restriction du courant T à l'ouvert U.

Proposition 1.5.3. *Soit T un p-courant sur X.*

1. *Il existe un fermé F qui est le plus petit fermé tel que la restriction de T sur $X \setminus F$ soit nul. Ce fermé s'appelle le support de T et est noté par* $\mathrm{supp}(T)$ *;*
2. *Le courant T se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue, encore notée par T, sur les $(n-p)$-formes lisses φ avec* $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T)$ *compact tel que $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi'\rangle$ si $\varphi = \varphi'$ sur un voisinage de* $\mathrm{supp}(T)$.

Démonstration. 1. Soit $\mathscr{F}$ la famille de tous les ouverts de X sur lesquels T est nul. Soit U la réunion de ces ouverts. Pour la première assertion, il suffit de montrer que U est un élément de $\mathscr{F}$ et de poser $F = X \setminus U$.

Soit φ une forme lisse à support dans un compact K de U. Il faut montrer que $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Comme K est compact, il existe une famille finie d'ouverts $U_j \in \mathscr{F}$ telle que $K \subset \cup_j U_j$. Soit (χ_j) une famille de fonctions lisses à support compact dans U_j telle que $\sum \chi_j = 1$ sur K. On a

$$\langle T, \varphi\rangle = \Big\langle T, \sum \chi_j \varphi\Big\rangle = \sum \langle T, \chi_j \varphi\rangle.$$

Comme $\chi_j \varphi$ est supporté par U_j, la dernière expression est nulle. D'où le résultat.

2. Soit φ une $(n-p)$-forme lisse telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T)$ est compact. Soit χ une fonction lisse à support compact qui est égale à 1 au voisinage de $\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(T)$. Posons

$$\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle.$$

Par définition de $\mathrm{supp}(T)$, on voit que cette formule ne dépend pas du choix de χ. En particulier, on a $\langle \widetilde{T}, \phi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ si φ est à support compacte. On vérifie sans peine que $\widetilde{T}$ vérifie la proposition. L'unicité est aussi claire car la dernière identité dans la proposition impose que l'extension soit définie par la formule ci-dessus. □

Notons qu'on montre avec des arguments similaires qu'un courant sur un ouvert U de X à support compact définit aussi un courant sur X.

Définition 1.5.4. On dit que T *est un courant d'ordre* s si pour tout compact $K \subset X$, il existe une constante $c_K > 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \|\varphi\|_{\mathscr{C}^s} \text{ pour toute forme test } \varphi \text{ à support dans } K.$$

Si un tel s n'existe pas, on dit que T *est d'ordre infini. Les mesures de Radon* sont les distributions d'ordre 0.

Proposition 1.5.5. *La restriction d'un p-courant T de X à un ouvert relativement compact dans X est d'ordre fini. Si T est d'ordre s, il s'étend de manière unique en forme linéaire continue sur l'espace des $(n-p)$-formes de classe $\mathscr{C}^s$ à support compact dans X.*

Démonstration. Soit U un ouvert relativement compact dans X. Supposons que la restriction de T à U n'est pas d'ordre fini. Alors pour tout $s \in \mathbb{N}$ il existe une $(n-p)$-forme φ_s lisse à support compact dans U telle que

$$\|\varphi_s\|_{\mathscr{C}^s} = 1 \quad \text{et} \quad \langle T, \varphi_s \rangle \geq 2^s.$$

Posons

$$\Phi_s = \sum_{j=0}^{s} 2^{-j} \varphi_j \quad \text{et} \quad \Phi = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \varphi_j.$$

Comme $U \Subset X$, on a $\Phi_s \to \Phi$ dans $\mathscr{D}^{n-p}(X)$. La continuité de T implique que

$$\langle T, \Phi \rangle = \lim_{s \to \infty} \langle T, \Phi_s \rangle = \infty.$$

C'est une contradiction. Donc la restriction de T à U est d'ordre fini.

Supposons maintenant que T est d'ordre s sur X. L'inégalité dans la définition 1.5.4 permet d'étendre T de manière unique en forme linéaire continue sur la complétude de $\mathscr{D}^{n-p}(X)$ pour la norme $\mathscr{C}^s$. Cette complétude est l'espace des $(n-p)$-formes de classe $\mathscr{C}^s$ à support compact dans X. □

Nous donnons maintenant deux autres exemples fondamentaux de courants d'ordre 0 qui justifient les terminologies "degré" et "dimension" pour les courants.

Exemple 1.5.6. Si α est une p-forme différentielle à coefficients localement intégrables, alors α définit un p-courant d'ordre 0 par la formule

$$\langle \alpha, \varphi \rangle = \int_X \alpha \wedge \varphi \text{ pour } \varphi \in \mathscr{D}^{n-p}(X).$$

Exemple 1.5.7. Soit Y une sous-variété réelle orientée de dimension $n-p$ de X. Alors Y définit un p-courant d'ordre 0, noté $[Y]$, avec

$$\langle [Y], \varphi\rangle = \int_Y \varphi \text{ pour } \varphi \in \mathscr{D}^{n-p}(X).$$

C'est *le courant d'intégration sur* Y. La définition s'étend aux variétés réelles orientées non nécessairement fermées mais qui ont un volume $(n-p)$-dimensionnel fini dans chaque compact de X.

Les deux exemples précédents sont très importants pour les applications mais aussi pour tester les propriétés qu'on veut vérifier pour une classe plus grande de courants.

Définition 1.5.8. Soit T un p-courant sur X. On définit le $(p+1)$-courant dT sur X par

$$\langle dT, \psi\rangle = (-1)^{p+1}\langle T, d\psi\rangle \text{ pour tout } \psi \in \mathscr{D}^{n-p-1}(X).$$

Par convention, on a $dT = 0$ si $p = n$ et plus généralement tout courant de degré strictement plus grand que n est nul.

Si T est d'ordre s et si α est une q-forme de classe $\mathscr{C}^s$, on définit le produit $T \wedge \alpha$ par

$$\langle T\wedge\alpha, \psi\rangle = \langle T, \alpha\wedge\psi\rangle \text{ pour tout } \psi \in \mathscr{D}^{n-p-q}(X).$$

Le courant dT est d'ordre $s+1$ si T est d'ordre s. Si T est donnée par une forme différentielle α de classe $\mathscr{C}^1$, d'après la formule de Stokes sur X, dT est donnée par la forme $d\alpha$. Si Y est une sous-variété orientée à bord lisse de dimension $n-p$ de X, la formule de Stokes sur Y s'écrit dans le langage des courants sous la forme

$$d[Y] = (-1)^{n-p+1}[bY].$$

L'identité $d\circ d = 0$ sur les formes différentielles implique la même identité pour les courants.

Introduisons maintenant deux autres opérations importantes sur les courants. Soit $\pi : X \to Y$ une application lisse entre deux variétés réelles lisses orientées. Soit T un courant de dimension k sur X. Supposons que la restriction de π à $\mathrm{supp}(T)$ est propre. Alors on peut définir l'image directe de T par π. C'est un courant de dimension k sur Y, noté par $\pi_*(T)$, défini par

$$\langle \pi_*(T), \psi\rangle = \langle T, \pi^*(\psi)\rangle \text{ pour toute } k\text{-forme lisse } \psi \text{ à support compact dans } X.$$

La propreté de π sur $\mathrm{supp}(T)$ assure que la dernière expression est bien définie.

Considérons maintenant une **submersion** $\pi : X \to Y$. On a le lemme suivant.

Lemme 1.5.9. *Si α est une forme lisse à support compact dans X, alors le courant $\pi_*(\alpha)$ est défini par une forme lisse sur Y.*

Démonstration. Observons que si $(\chi_j)_{j\in J}$ est une partition de l'unité de X, alors

$$\pi_*(\alpha) = \sum_{j\in J} \pi_*(\chi_j \alpha).$$

Par conséquent, comme π est une submersion, en utilisant une partition de l'unité adaptée, on se ramène au cas où X est le produit $Y \times Z$ de Y avec une autre variété et π est la projection canonique sur Y. De plus, on peut supposer que Y et Z sont des ouverts d'espace euclidien.

Notons (y, z) les coordonnées standard sur Y et Z. Soit ψ une forme lisse à support compact dans Y de degré convenable. Alors on a d'après le théorème de Fubini

$$\langle \pi_*(\alpha), \psi\rangle = \int_{Y\times Z} \alpha(y,z) \wedge \psi(y) = \int_{y\in Y} \Big(\int_{z\in Z} \alpha(y,z)\Big)\psi(y).$$

Donc

$$\pi_*(\alpha) = \int_{z\in Z} \alpha(y,z).$$

La dernière expression est une forme dont les coefficients sont obtenus en intégrant les coefficients de α lelong les fibres de π. On voit que $\pi_*(\alpha)$ est égale donc à une forme lisse. □

Soit S un p-courant sur Y. Le lemme dernier permet de définir l'image réciproque de S par π. C'est un p-courant sur X noté par $\pi^*(S)$ et donné par

$$\langle \pi^*(S), \varphi\rangle = \langle S, \pi_*(\varphi)\rangle \text{ pour tout } \varphi \in \mathscr{D}^{n-p}(X).$$

La proposition suivante est une conséquence directe des définitions ci-dessus.

Proposition 1.5.10. *Les opérateurs image directe et image réciproque sur les courants, lorsqu'ils sont bien définis, commutent avec l'opérateur d.*

Nous allons utiliser les courants sur les variétés complexes. Soit maintenant X une variété **complexe** de dimension n (et donc de dimension réelle $2n$).

Définition 1.5.11. Un p-courant T sur X est *de bidegré (r,s) et de bidimension $(n-r, n-s)$* avec $r+s=p$ s'il annulle les formes de bidegré $(n-r', n-s')$ dans $\mathscr{D}^{2n-p}(X)$ lorsque $(r', s') \neq (r,s)$. On définit aussi les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ par

$$\langle \partial T, \psi\rangle = (-1)^{p+1}\langle T, \partial\psi\rangle \quad \text{et} \quad \langle \overline{\partial} T, \psi\rangle = (-1)^{p+1}\langle T, \overline{\partial}\psi\rangle \quad \text{pour } \psi \in \mathscr{D}^{2n-p-1}(X).$$

On vérifie facilement que si T est un (r,s)-courant, ∂T et $\overline{\partial} T$ sont de bidegrés $(r+1, s)$ et $(r, s+1)$ respectivement. De plus, les identités suivantes sont vraies sur les courants comme c'est le cas pour les formes lisses :

$$d = \partial + \overline{\partial}, \quad \partial\circ\partial = 0, \quad \overline{\partial}\circ\overline{\partial} = 0 \quad \text{et} \quad \partial\circ\overline{\partial} + \overline{\partial}\circ\partial = 0.$$

Ces opérateurs commutent avec les opérateurs image directe et image réciproque par une application **holomorphe** lorsque ces derniers sont bien définis.

Nous allons maintenant interpréter quelques résultats connus en langage de courants ce qui donne un point de vue plus conceptuel.

Formule de Cauchy-Pompeiu. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}$ à bord lisse par morceaux. Il définit par intégration un $(0,0)$-courant sur $\mathbb{C}$ noté par $[\Omega]$. On a d'après la formule de Stokes
$$d[\Omega] = -[b\Omega].$$
C'est pour définir $[b\Omega]$ qu'on utilise l'hypothèse lisse par morceaux. Fixons un point $a \in \mathbb{C} \setminus b\Omega$ et considérons le $(1,0)$-courant
$$T = \frac{dz}{2i\pi(z-a)} \wedge [\Omega].$$
Ce courant est bien défini car avec les coordonnées polaires, on vérifie facilement que la forme différentielle intervenue ici est localement intégrable. Le support de T est égal à $\overline{\Omega}$.

Lemme 1.5.12. *On a*
$$\overline{\partial} T = dT = \begin{cases} \frac{dz}{2i\pi(z-a)} \wedge [b\Omega] - \delta_a & \text{si } a \in \Omega \\ \frac{dz}{2i\pi(z-a)} \wedge [b\Omega] & \text{si } a \not\in \overline{\Omega} \end{cases}$$
où δ_a est la masse de Dirac en a.

Démonstration. La première identité est claire en raison de bidegré. Sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, la forme différentielle intervenue dans la définition de T est lisse et fermée. Par conséquent, la définition de l'opérateur d implique
$$dT = -\frac{dz}{2i\pi(z-a)} \wedge d[\Omega] = \frac{dz}{2i\pi(z-a)} \wedge [b\Omega] \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \{a\}.$$
Lorsque a n'est pas dans $\overline{\Omega}$, il n'appartient pas au support de T et par conséquent, la dernière identité est valable sur $\mathbb{C}$.

Il reste à vérifier que $dT = -\delta_a$ au voisinage de a en supposant que $a \in \Omega$. Pour ceci, afin de simplifier les notations, on peut supposer que $\Omega = \mathbb{C}$ et $a = 0$. On a alors
$$T = \frac{dz}{2i\pi z}\cdot$$
On doit montrer que $\overline{\partial} T = -\delta_0$.

Comme T est invariant par les rotations en 0, il suffit de considérer les fonctions test radiales lisses à support compact $h(r)$ avec $r = |z|$. En utilisant les coordonnées polaires (r, θ) on a
$$\langle \overline{\partial} T, h\rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{dz}{2i\pi z} \wedge \overline{\partial} h = \int_{\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]} \frac{1}{2\pi} h'(r) dr \wedge d\theta = -h(0).$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Notons qu'avec des calculs similaires on obtient

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z-a| = \delta_a.$$

On utilisera systématiquement les identités analogues pour les fonctions plurisousharmoniques et les courants positifs fermés. $\square$

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1.5.13 (Cauchy-Pompeiu 1912)**.** *Soit Ω un domaine borné à bord lisse par morceaux. Soit f une fonction sur Ω lisse jusqu'au bord. Alors on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\Big\{\int_{b\Omega}\frac{f(z)dz}{z-a} + \int_{\Omega}\frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)dz\wedge d\overline{z}}{z-a}\Big\} = \begin{cases} f(a) & si\ a\in\Omega \\ 0 & si\ a\not\in\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Démonstration. On prolonge f en une fonction lisse sur $\mathbb{C}$. Cet étape n'est pas nécessaire si on est habitué avec les calculs sur les courants. Considérons le cas $a\in\Omega$. L'autre cas sera traité de la même manière.

D'après le lemme précédent, on a

$$-\int_{\Omega}\frac{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dz\wedge d\overline{z}}{2i\pi(z-a)} = -\langle T,\overline{\partial}f\rangle = \langle\overline{\partial}T,f\rangle = \int_{b\Omega}\frac{f(z)dz}{2i\pi(z-a)} - f(a).$$

Le résultat s'en déduit. $\square$

Lorsque f est une fonction holomorphe sur Ω, lisse jusqu'au bord, on obtient la formule de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{b\Omega}\frac{f(z)dz}{z-a} \text{ pour } a\in\Omega.$$

La formule est valable si f est holomorphe sur Ω et continue jusqu'au bord. En effet, on peut réduire Ω pour se ramène au cas précédent.

Formules de Bochner-Martinelli. La formule de Bochner-Martinelli donnée dans le théorème 1.4.1 peut être interprétée de la même manière. Soit Ω un domaine à bord lisse par morceaux dans $\mathbb{C}^n$. Considérons le $(n,n-1)$-courant

$$T = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\cdot\frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a})\wedge\omega(z)}{\|z-a\|^{2n}}\wedge[\Omega].$$

Avec les calculs comme dans le théorème 1.4.1 et le lemme 1.5.12, on a le résultat suivant qui implique la formule de Bochner-Martinelli.

Lemme 1.5.14. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\overline{\partial} T = dT = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \cdot \frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a})\wedge\omega(z)}{\|z-a\|^{2n}} \wedge [b\Omega] - c\delta_a$$

avec $c = 1$ *si* $a \in \Omega$ *et* $c = 0$ *si* $a \not\in \overline{\Omega}$.

Notons aussi qu'on a

$$(n-1)!\frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a})\wedge\omega(z)}{\|z-a\|^{2n}} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\partial \log\|z-a\|^2)\wedge(i\partial\overline{\partial}\log\|z-a\|^2)^{n-1}$$

sur $\mathbb{C}^n \setminus \{a\}$. Pour vérifier cette identité, on peut supposer $a = 0$ et utiliser l'invariance des formes par le groupe unitaire et par homogénéité. Il reste ensuite à vérifier l'identité en un point, e.g. $(1, 0\ldots, 0)$. Les calculs sont alors simples.

Equation $\overline{\partial}$. Nous allons construire ici la solution pour l'équation $\overline{\partial}$. L'idée directrice est très générale. Elle peut être utilisée pour d'autres équations comme $\partial\overline{\partial}, d$ ou ∂.

Considérons l'application $\pi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ donnée par $\pi(z, a) = z - a$. Le paramètre a dans les paragraphes précédents deviennent ici une variable. La diagonale Δ de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est égale à $\pi^{-1}(0)$. Cette propriété s'écrit en terme des courants sous la formule

$$[\Delta] = \pi^*(\delta_0).$$

Notons que l'opérateur π^* est bien défini car π est une submersion.

On déduit du lemme 1.5.14, appliqué au cas où $\Omega = \mathbb{C}^n$, que

$$[\Delta] = \overline{\partial}\pi^*(T) = \overline{\partial}\Big\{\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \cdot \frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a})\wedge\omega(z-a)}{\|z-a\|^{2n}}\Big\} \text{ sur } \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n.$$

On dit que $\pi^*(T)$ *est un noyau pour la résolution de* $\overline{\partial}$ sur $\mathbb{C}^n$.

Démonstration du théorème 1.4.6. Soit g comme dans ce théorème. Considérons le courant

$$S = (-1)^{p+q-1}g(z)\wedge\pi^*(T) = (-1)^{p+q-1}g(z)\wedge\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \cdot \frac{\omega'(\overline{z}-\overline{a})\wedge\omega(z-a)}{\|z-a\|^{2n}}$$

sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. Comme g est lisse et $\overline{\partial}$-fermée, on a

$$\overline{\partial} S = g(z) \wedge [\Delta] = g(a) \wedge [\Delta].$$

Observons que comme g est à support compact, la projection Π_2 de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ sur le deuxième facteur est propre sur le support de S. De plus, la forme f définie dans le théorème est exactement égale à $(\Pi_2)_*(S)$. D'où

$$\overline{\partial} f(a) = \overline{\partial}(\Pi_2)_*(S) = (\Pi_2)_*(\overline{\partial} S) = (\Pi_2)_*(g(a)\wedge[\Delta]) = g(a).$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Chapitre 2

Méthode L^2, variétés de Stein et théorie du pluripotentiel

Ce chapitre contient une introduction à la méthode L^2. Nous allons donner plusieurs propriétés des variétés de Stein et des domaines pseudoconvexes dans $\mathbb{C}^n$ qui montrent une efficacité remarquable de cette méthode. Les courants positifs fermés sont des objets centraux de cette théorie. Ils seront introduits avec leur propriétés de base. On verra au dernier chapitre le rôle important de ces courants en dynamique complexe.

2.1 Fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{R}^n$

Les fonctions plurisouharmoniques que nous allons utiliser plus tard sont sous-harmoniques dans tout système de coordonnées complexes locales. Nous rappelons dans ce paragraphe la notion de fonctions sous-harmoniques sur $\mathbb{R}^n$ et les propriétés fondamentales de ces fonctions.

Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées standard de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que l'opérateur de Laplace sur les fonctions est défini par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\cdot$$

Définition 2.1.1. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$. Une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est *harmonique* si

$$\Delta v = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Notons que cette notion dépend du système de coordonnées qu'on utilise sur $\mathbb{R}^n$. Le théorème suivant implique que les fonctions harmoniques sont lisses.

Théorème 2.1.2 (formule de Poisson)**.** *Soit v une fonction harmonique sur une boule $\mathbb{B}$ de centre 0 et de rayon r qui est continue jusqu'au bord. Alors pour tout*

$y \in \mathbb{B}$ on a

$$v(y) = \int_{x \in b\mathbb{B}} v(x) \frac{r^2 - \|y\|^2}{\pi_n r \|x-y\|^n} \mathrm{dvol}_{n-1}(x),$$

où π_n est le volume $(n-1)$-dimensionnel de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{dvol}_{n-1}(\cdot)$ est la forme volume sur $b\mathbb{B}$. En particulier, u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{B}$.

Lorsque y est le centre de $\mathbb{B}$, on déduit que $v(0)$ est la moyenne des valeurs de v sur la sphère $b\mathbb{B}$.

On va d'abord montrer le résultat suivant qui donne la solution pour le problème de Dirichlet sur une boule. Il s'agit de trouver une fonction harmonique sur cette boule en connaissant ses valeurs au bord.

Théorème 2.1.3. *Soit v une fonction continue sur $b\mathbb{B}$, alors l'intégrale de Poisson comme dans le théorème ci-dessus*

$$\widetilde{v}(y) = \int_{x \in b\mathbb{B}} v(x) \frac{r^2 - \|y\|^2}{\pi_n r \|x-y\|^n} \mathrm{dvol}_{n-1}(x),$$

définit une fonction harmonique sur $\mathbb{B}$ qui est continue jusqu'au bord et est égale sur $b\mathbb{B}$ à la fonction v.

Démonstration. Par homogénéité, afin de simplifier les notations, on peut supposer $r = 1$. Pour montrer que $\widetilde{v}$ est harmonique, il suffit de vérifier que le noyau de Poisson est harmonique en y, i.e.

$$\Delta_y \Big(\frac{1 - \|y\|^2}{\pi_n \|x-y\|^n} \Big) = 0.$$

Ceci se fait par un calcul direct qui est laissé au lecteur. On peut pour simplicité supposer ici que $x = (1, 0, \ldots, 0)$.

Il reste à montrer que $\widetilde{v}$ se prolonge continûment jusqu'au bord de $\mathbb{B}$ et est égale à v sur $b\mathbb{B}$. Quand $v = 1$, la fonction $\widetilde{v}$ est harmonique et radiale. Comme $\widetilde{v}$ est lisse en 0, on a $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \rho}(0) = 0$. Un calcul direct donne $v(0) = 1$. Sur les fonctions lisses radiales on a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \|y\|.$$

On montre que $\widetilde{v}$ est constante. Si ce n'était pas le cas, en considérant un point extrémal pour $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \rho}$, on déduit de l'équation $\Delta \widetilde{v} = 0$ que $\widetilde{v}$ est monotone en $\rho \in [0, 1]$. La même équation montre que $\widetilde{v}$ est soit concave croissante, soit convexe décroissante en ρ. Ceci contredit le fait que sa dérivée en 0 est nulle. On constate que $\widetilde{v} = 1$ et que le théorème est vrai dans ce cas.

Pour le cas général, posons $y' = y\|y\|^{-1}$. Il suffit de prouver que $\widetilde{v}(y) - v(y')$ tend vers 0 uniformément quand y tend vers $b\mathbb{B}$. Fixons une constante $\epsilon > 0$.

Choisissons une constante $\delta > 0$ telle que $|v(x) - v(y')| \leq \epsilon$ quand $\|x - y'\| \leq \delta$. D'après le cas où $v = 1$, on a

$$v(y') = \int_{x \in b\mathbb{B}} v(y') \frac{r^2 - \|y\|^2}{\pi_n r \|x - y\|^n} d\mathrm{vol}_{n-1}(x),$$

et donc

$$\begin{aligned} |\widetilde{v}(y) - v(y')| &\leq \Big| \int_{\|x-y'\|>\delta} (v(x) - v(y')) \frac{1 - \|y\|^2}{\pi_n \|x - y\|^n} d\mathrm{vol}_{n-1}(x) \Big| \\ &\quad + \Big| \int_{\|x-y'\|\leq\delta} (v(x) - v(y')) \frac{1 - \|y\|^2}{\pi_n \|x - y\|^n} d\mathrm{vol}_{n-1}(x) \Big|. \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers 0 uniformément quand $y \to y'$ car $\|y\| \to 1$ et $\|x - y\| \geq \frac{1}{2}\|x - y'\| \geq \frac{\delta}{2}$. La deuxième est majorée par ϵ fois

$$\int_{x \in b\mathbb{B}} \frac{1 - \|y\|^2}{\pi_n \|x - y\|^n} d\mathrm{vol}_{n-1}(x).$$

Cette dernière expression est égale à 1 d'après le cas où $v = 1$. Le théorème s'en découle. □

Démonstration du théorème 2.1.2. En utilisant le théorème 2.1.3, il suffit de prouver que si une fonction harmonique v sur $\mathbb{B}$ est continue jusqu'au bord et nulle sur $b\mathbb{B}$, alors elle est nulle. Supposons que ce n'est pas le cas. En multipliant v par une constante, on peut supposer que $\max v = 3$.

Soit χ une fonction lisse convexe croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi(t) = 0$ si $t < 1$ et et $\chi(t) = t^2 - 3$ si $t \geq 2$. Alors la fonction $\chi(v)$ est nulle près du bord de $\mathbb{B}$. On a de plus

$$\Delta(\chi(v)) = \chi''(v)\|\vec{\nabla} v\|^2 + \chi'(v)\Delta v = \chi''(v)\|\vec{\nabla} v\|^2.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{B}} \chi''(v)\|\vec{\nabla} v\|^2 d\mathrm{vol}_n = \int_{\mathbb{B}} \Delta(\chi(v)) d\mathrm{vol}_n = 0,$$

où la dernière égalité est une conséquence de la formule de Stokes.

La fonction χ étant convexe, on déduit que $\chi'' \geq 0$ et $\vec{\nabla} v = 0$ là où $\chi''(v)$ est strictement positif. En particulier, $\vec{\nabla} v = 0$ quand $v > 2$. Ceci signifie que u est localement constante sur l'ouvert $\{v > 2\}$. Cette propriété contredit la condition $\max v = 3$ et la continuité de v. □

Rappel. On a utilisé la version suivante de la formule de Stokes qui est valable pour les fonctions $\mathscr{C}^2$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta v d\mathrm{vol}_n = \int_{\mathbb{R}^n} v \Delta u d\mathrm{vol}_n.$$

Elle se démontre avec une intégration par partie.

Corollaire 2.1.4. *Soit (v_m) une suite de fonctions harmoniques sur Ω. Supposons que v_m converge dans L^1_{loc} vers une fonction v. Alors v est égale presque partout à une fonction harmonique.*

Démonstration. Soient $\overline{\mathbb{B}}_1$ et $\overline{\mathbb{B}}_2$ deux boules de même centre a et de rayon r_1, r_2 respectivement qui sont contenues dans Ω avec $r_1 < r_2$. On montre que v est égale presque partout sur $\mathbb{B}_1$ à une fonction harmonique. Pour simplifier les notations, on peut supposer que $a = 0$.

On peut appliquer la formule de Poisson pour la boule de centre 0 et de rayon r pour tout $x \in \mathbb{B}_1$ et tout $r_1 \leq r \leq r_2$. En considérant la moyenne de l'intégrale de Poisson en $r \in [r_1, r_2]$, on obtient

$$v_m(y) = \int_{x \in \mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{B}_1} v_m(x) \frac{\|x\|^2 - \|y\|^2}{\|x - y\|^n} \eta(x),$$

où η est une forme lisse indépendante de v et de x qu'on n'a pas besoin de préciser ici. La formule dit que les valeurs de v_m sur $\mathbb{B}_1$ peuvent être calculées comme valeurs moyennes de v_m sur $\mathbb{B}_2 \setminus \mathbb{B}_1$.

Comme la suite (v_m) converge dans L^1_{loc}, on déduit de cette formule que v_m converge localement uniformément sur $\mathbb{B}_1$ vers une fonction v'. De plus, toute dérivée de v_m converge vers la dérivée correspondante de v'. On a en particulier $\Delta v' = \lim \Delta v_m = 0$ et donc v' est harmonique. La fonction v étant la limite de v_m dans L^1_{loc}, elle est donc égale à v' dans L^1_{loc}. Par conséquent, v est égale presque partout à une fonction harmonique. □

Corollaire 2.1.5. *Soit (v_m) une suite de fonctions harmoniques sur Ω. Supposons que cette suite est bornée dans L^1_{loc}. Alors elle admet une sous-suite qui converge locallement uniformément avec toutes les dérivées vers une fonction harmonique sur Ω.*

Démonstration. La formule obtenue dans la preuve du dernier corollaire implique que v_m est localement bornée uniformément en m. En considérant les dérivées par rapport à y des deux membres de cette formule, on voit que les dérivées de v_m sont aussi localement bornées uniformément en m. Par conséquent, la suite (v_m) est localement équicontinues. Ceci est également vrai pour toute suite de dérivées de v_m. Le corollaire se déduit alors du théorème d'Ascoli et le théorème ci-dessus. □

Définition 2.1.6. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, non identiquement $-\infty$, est *sous-harmonique* si elle est semi-continue supérieurement (s.c.s.) et si elle vérifie l'inégalité de sous-moyenne suivante : pour toute boule fermée $\overline{\mathbb{B}}$ de centre a contenue dans Ω, on a

$$u(a) \leq \frac{1}{|b\mathbb{B}|} \int_{b\mathbb{B}} u(x) d\mathrm{vol}_{n-1}(x)$$

où $|b\mathbb{B}|$ est le volume $(n-1)$-dimensionnel de la sphère $b\mathbb{B}$.

Notons que cette inégalité combinée avec la semi-continuité supérieure entraîne que

$$u(a) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|b\mathbb{B}|} \int_{b\mathbb{B}} u(x) d\mathrm{vol}_{n-1}(x),$$

où r est le rayon de $\mathbb{B}$.

La proposition suivante est une conséquence de la définition ci-dessus.

Proposition 2.1.7. *Toute fonction sous-harmonique est localement bornée supérieurement et localement intégrable. De plus, elle vérifie le principe du maximum : elle n'admet pas de maximum local stricte.*

Démonstration. La première propriété est vraie pour toute fonction s.c.s. La troisième est une conséquence de l'inégalité de sous-moyenne. On montre maintenant la deuxième propriété.

Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine Ω comme ci-dessus. Considérons l'ensemble $E = \{u = -\infty\}$ des pôles de u. On montre d'abord que E est d'intérieur vide. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors il existe une boule $\overline{\mathbb{B}}$ de centre $a \notin E$ et de rayon r contenue dans Ω telle que $b\mathbb{B}$ intersecte l'intérieur de E. Mais ceci contredit l'inégalité de sous-moyenne. Donc E est d'intérieur vide. On en déduit que les boules contenue dans Ω avec centres dans $\Omega \setminus E$ recouvrent Ω.

Comme notre problème est local, on peut supposer que u est définie sur une boule $\mathbb{B}$ de centre $a \notin E$. De plus, comme u est localement bornée supérieurement, on peut soustraire de u une constante afin de supposer que u est négative. L'inégalité de sous-moyenne montre que u est intégrable sur $\mathbb{B}$. Ceci complète la preuve de le proposition. Notons que l'intégrabilité locale de u implique que le volume n-dimensionnel de E est nul. □

Proposition 2.1.8. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction non-identiquement $-\infty$ sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$.*

1. *S'il existe une suite $(u_m)_{m \geq 0}$ de fonctions sous-harmoniques sur Ω qui décroit ponctuellement vers u, alors u est aussi sous-harmonique.*
2. *Si u est sous-harmonique, pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω, il existe une suite de fonctions sous-harmoniques lisses $(u_m)_{m \geq 0}$ sur Ω' qui décroit ponctuellement vers u.*

Démonstration. 1. La limite décroissante préserve la semi-continuité supérieure. On en déduit que u est s.c.s. On peut aussi voir ce point en utilisant le fait que $u^{-1}([a, +\infty[)$ est l'intersection des $u_m^{-1}([a, +\infty[)$ et que la semi-continuité de u équivaut à la fermeture de $u^{-1}([a, +\infty[)$ pour tout a. L'inégalité de sous-moyenne est aussi conservée par limite décroissante. Donc u est sous-harmonique.

2. Soit ρ une fonction lisse positive sur $\mathbb{R}$ à support compact dans $[1, 2]$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(\|x\|) d\text{vol}_n(x) = 1.$$

Posons

$$\rho_m(r) = 2^{mn}\rho(2^m r).$$

Cette fonction vérifie les mêmes propriétés que ρ excepte que son support est contenu dans $[2^{-m}, 2^{-m+1}]$ qui tend vers le point 0 si m tend vers l'infini.

Considérons la fonction $u_m = u * \rho_m$, i.e.

$$u_m(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^n} u(y)\rho_m(\|x-y\|)d\text{vol}_n(y) = \int_{\alpha\in\mathbb{R}^n} u(x+\alpha)\rho_m(\|\alpha\|)d\text{vol}_n(\alpha).$$

Elle est bien définie sur Ω' si m est suffisamment grand. Les propriétés de l'opérateur de convolution entraînent que u_m est lisse. C'est aussi une propriété de l'intégrale dépendant de paramètres.

Notons $\tau_\alpha(x) = x + \alpha$ la translation par un vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^n$. La fonction u_m peut être vue comme une moyenne des fonctions sous-harmoniques $u \circ \tau_\alpha$ avec $2^{-m} \leq \|\alpha\| \leq 2^{-m+1}$. On en déduit que u_m est sous-harmonique. En effet, elle est lisse et elle vérifie clairement l'inégalité de sous-moyenne. Il reste à montrer que $u_m(x)$ décroît vers $u(x)$ quand m tend vers l'infini.

Fixons un point $a \in \Omega'$. Posons pour $r \geq 0$ assez petit

$$v(r) = \frac{1}{|b\mathbb{B}(a,r)|}\int_{y\in b\mathbb{B}(a,r)} u(y)d\text{vol}_{n-1}(y).$$

Alors $u_m(a)$ est une valeur moyenne des $v(r)$ pour $r \in \text{supp}(\rho_m)$. On en déduit que $u_m(a)$ tend vers $u(a)$. De plus, pour montrer que la suite $u_m(a)$ est décroissante, il suffit de montrer que la fonction $v(r)$ est croissante.

Dans un voisinage de a, la fonction $v(\|x-a\|)$ est une moyenne de fonctions $u\circ\tau_\alpha$. Elle est donc sous-harmonique car l'inégalité de sous-moyenne est évidente et la semi-continuité supérieure est une conséquence du lemme de Fatou. Comme elle est radiale, on déduit de la définition des fonctions sous-harmoniques qu'elle est croissante. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Rappel. (lemma de Fatou) Soient μ une mesure positive et (h_m) une suite de fonctions positives mesurables. Alors on a

$$\int (\liminf_{m\to\infty} h_m)d\mu \leq \liminf_{m\to\infty}\int h_m d\mu.$$

Les fonctions u_m étant bornées supérieurement, on a appliqué cette inégalité pour $-c - u_m$ pour une certaine constante c.

Proposition 2.1.9. *Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors u est sous-harmonique si et seulement si*

$$\Delta u \geq 0.$$

En particulier, une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ est harmonique si et seulement si u et $-u$ sont sous-harmoniques (la propriété est en fait vraie sans supposer u de classe $\mathscr{C}^2$).

Démonstration. Supposons que u est sous-harmonique. On montre que $\Delta u \geq 0$ en chaque point. Sans perdre de généralité, on peut supposer que 0 est un point de Ω et il suffit de montrer que $\Delta u(0) \geq 0$.

Observons si v est une fonction constante ou si v est égale à x_i ou encore $x_i x_j$ avec $i \neq j$ elle vérifie l'égalité de la moyenne

$$v(0) = \frac{1}{|b\mathbb{B}|} \int_{b\mathbb{B}} v(x) d\mathrm{vol}_{n-1}(x)$$

pour toute boule $\mathbb{B}$ de centre 0. Ceci se vérifie facilement avec la parité de la fonction. La moyenne de x_i^2 sur $b\mathbb{B}$ ne dépend pas de i. Leur somme pour $i = 1, \ldots, n$ est égale à r^2 donc chacune est égale à $\frac{1}{n} r^2$.

On en déduit avec le développement de Taylor de u en 0 que si r est le rayon de $\mathbb{B}$

$$\frac{1}{|b\mathbb{B}|} \int_{b\mathbb{B}} u(x) d\mathrm{vol}_{n-1}(x) - u(0) = \Delta u(0) r^2 + o(r^2).$$

L'inégalité de sous-moyenne implique que $\Delta u(0) \geq 0$.

Supposons maintenant que $\Delta u \geq 0$. On vérifie que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne. Sans perdre de généralité, on suppose que $\mathbb{B}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On doit montrer que

$$u(0) \leq \int_{b\mathbb{B}} u(x) d\mathrm{vol}_{n-1}(x).$$

En considérant les rotations τ autour de 0 et la moyenne des fonctions $u \circ \tau$, on se ramène au cas où u est radiale. On peut donc supposer que u est nulle sur $b\mathbb{B}$ et on montre que $u(0) \leq 0$. Si ceci n'est pas vrai, les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.1.2 s'appliquent et donne une contradiction. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Remarque 2.1.10. Si u est *localement* sous-harmonique alors les fonctions u_m construites dans la proposition 2.1.8 sont lisses et localement sous-harmoniques. D'après la proposition 2.1.9, ces fonctions sont sous-harmoniques. Comme la suite u_m décroit vers u et que le domaine de définition de u_m tend vers Ω, on déduit que u est sous-harmonique sur Ω.

Rappelons qu'une distribution sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un courant de degré maximal n. En utilisant les coordonnées standar $(x_1, \ldots, x_n)$ on identifie souvent un n-courant T à un 0-courant $\widetilde{T}$ défini de manière suivante

$$\langle \widetilde{T}, h dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \rangle = \langle T, h \rangle,$$

pour toute fonction f lisse à support compact dans Ω. On voit ainsi que cette opération définit une bijection entre les n-courants et les 0-courants. Ceci permet en particulier de considérer une fonction L^1_{loc} comme une distribution.

On définit les dérivées d'un n-courant T par

$$\Big\langle \frac{\partial^{|I|} T}{\partial x^I}, h \Big\rangle = (-1)^{|I|} \Big\langle T, \frac{\partial^{|I|} h}{\partial x^I} \Big\rangle.$$

Corollaire 2.1.11. *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors la distribution Δu est une mesure de Radon positive. De plus, si K et L sont des compacts de Ω tels que $K \Subset L$, alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de u telle que*

$$\|\Delta u\|_K \leq c \|u\|_{L^1(L)},$$

où $\|\cdot\|_K$ désigne la mass sur K.

Démonstration. La première assertion est vraie pour les fonctions sous-harmoniques lisses. En appliquant la proposition 2.1.8, on constate que dans le cas général, Δu est la limite faible d'une suite de mesures positives. Elle est donc une mesure positive. On utilise ici le fait que les limites faibles de mesures de Radon positives sont des mesures de Radon positives.

Soit χ une fonction lisse positive à support compact dans L telle que $\chi = 1$ sur K. On a

$$\|\Delta u\|_K \leq \langle \Delta u, \chi \rangle = \int u \Delta \chi d\mathrm{vol}_n \leq c \|u\|_{L^1(L)}$$

pour $c = \|\Delta \chi\|_\infty$ qui est une constante indépendante de u. □

Le résultat suivant est très utile dans la construction des fonctions sous-harmoniques. On a déjà vu une application dans le théorème 2.1.2.

Corollaire 2.1.12. *Soient $u_1, \ldots, u_m$ des fonctions sous-harmoniques sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction convexe qui est croissante en chaque variable. Alors $\chi(u_1, \ldots, \chi_m)$ est sous-harmonique. En particulier,* $\max(u_1, \ldots, u_m)$ *est une fonction sous-harmonique.*

Démonstration. On approche χ et u_i par des suites décroissantes de fonctions lisses de même catégorie pour se ramener au cas lisse. Ensuite on vérifie par calcul direct de dérivées que

$$\Delta \chi(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_i \partial u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial u_j} \Delta u_j.$$

La première somme est positive car comme u est convexe la matrice

$$\Big(\frac{\partial^2\chi}{\partial u_i \partial u_j}\Big)$$

est semi-positive. La deuxième est aussi positive car χ est croissante en chaque variable. Donc $\Delta\chi(u_1,\ldots,u_m) \geq 0$ et $\chi(u_1,\ldots,\chi_m)$ est sous-harmonique. $\square$

On a la proposition suivante.

Proposition 2.1.13 (potentiel de Newton)**.** *Soit*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & si\ n=1 \\ \frac{1}{2\pi}\log\|x\| & si\ n=2 \\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n\|x\|^{n-2}} & si\ n\geq 3, \end{cases}$$

où ω_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Alors Γ est sous-harmonique sur $\mathbb{R}^n$, harmonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a

$$\Delta\Gamma = \delta_0 \quad sur\ \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Le fait que Γ soit harmonique en dehors de 0 se vérifie par un calcul direct de $\Delta\Gamma$. On peut pour ceci utiliser le fait que sur les fonctions radiales on a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \quad \text{où} \quad r = \|x\|.$$

Soit Γ_ϵ la fonction définie comme Γ mais on remplace $\|x\|$ par $\sqrt{\|x\|^2+\epsilon}$ avec $\epsilon > 0$. On vérifie avec un calcul direct que $\Delta\Gamma_\epsilon \geq 0$. Donc Γ_ϵ est sous-harmonique et quand ϵ décroit vers 0, Γ_ϵ décroit vers Γ. On en déduit que Γ est sous-harmonique.

Il reste à montrer que $\Delta\Gamma = \delta_0$ sur $\mathbb{R}^n$. Comme Δ, Γ et δ_0 sont invariants par le groupe orthogonal $\mathbb{O}(n)$, il suffit de montrer pour toute fonction radiale $h(r)$ lisse à support compact que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)\Delta h(r) d\mathrm{vol}_n(x) = h(0)$$

qui équivaut à

$$\int_0^\infty \Gamma(r)\Delta h(r) n\omega_n r^{n-1} dr = h(0).$$

Comme h est lisse et radiale sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$h'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta h = h'' + \frac{n-1}{r}h'.$$

On obtient le résultat en utilisant des intégrations par partie en une variable. $\square$

Corollaire 2.1.14. *Soit μ une mesure de Radon positive à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction*

$$u_\mu(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)d\mu(y)$$

est sous-harmonique sur $\mathbb{R}^n$. De plus on a

$$\Delta u_\mu = \mu$$

au sens des distributions.

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer que μ est une mesure de probabilité. Alors u est une moyenne de fonctions sous-harmoniques. On en déduit qu'elle est aussi sous-harmonique.

On montre la dernière identité du corollaire. En utilisant le théorème de Fubini, on a pour toute fonction lisse à support compact h

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u_\mu, h\rangle &= \langle u_\mu, \Delta h\rangle \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\int_{y\in\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta h(x) d\mu(y)\Big) d\mathrm{vol}_n(x) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^n} \Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)\Delta h(x) d\mathrm{vol}_n(x)\Big) d\mu(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^n} \Big(\int_{x\in\mathbb{R}^n} \Gamma(x)\Delta h(x+y) d\mathrm{vol}_n(x)\Big) d\mu(y).
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.1.13, la dernière expression est égale à l'intégrale de h par rapport à μ car l'intégrale dans les parenthèses vaut $h(y)$. Ceci est vrai pour tout h. On constate que $\Delta u_\mu = \mu$ au sens des distributions. $\square$

Remarque 2.1.15. Soient μ_k des mesures de Radon positives à support dans un compact. Si μ_k converge vers une mesure μ, il n'est pas difficile de voir que u_{μ_k} tend vers u_μ dans L^1_{loc}.

Le résultat suivant donne une propriété de compacité de fonctions sous-harmoniques dans l'espace L^1_{loc}.

Théorème 2.1.16. *Soit u une fonction L^1_{loc} sur Ω. Soit (u_k) une suite de fonctions sous-harmoniques sur Ω.*

1. *Supposons que Δu est une mesure de Radon positive. Alors u est égale presque partout à une fonction sous-harmonique. Si $\Delta u = 0$, u est égale presque partout à une fonction harmonique.*
2. *Supposons que (u_k) est bornée dans L^1_{loc}. Alors on peut extraire de (u_k) une sous-suite qui converge dans L^1_{loc} et aussi presque partout vers une fonction sous-harmonique sur Ω.*

3. *Supposons que (u_k) est localement uniformément bornée supérieurement. Alors soit (u_k) converge uniformément sur les compacts vers $-\infty$ quand $k \to \infty$, soit (u_k) admet une sous-suite qui converge dans L^1_{loc} et aussi presque partout vers une fonction sous-harmonique sur Ω.*

Démonstration. 1. En réduisant le domaine Ω, on peut supposer que la mesure $\mu = \Delta u$ est de masse finie à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Considérons la fonction u_μ définie ci-dessus et posons $v = u - u_\mu$. On a $\Delta v = 0$. Il suffit de montrer que v est égale presque partout à une fonction harmonique. Ceci donne aussi la deuxième partie de cette assertion.

Soient ρ_m comme dans la preuve de la proposition 2.1.8. Posons

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}^n} v(y)\rho_m(\|x-y\|)d\mathrm{vol}_n(y) \\ &= \int_{\alpha\in\mathbb{R}^n} v(x+\alpha)\rho_m(\|\alpha\|)d\mathrm{vol}_n(\alpha). \end{aligned}$$

D'après les propriétés du produit de convolution, v_m est une fonction lisse qui tend vers v dans L^1_{loc} quand m tend vers l'infini. Les calculs comme dans la preuve du corollaire 2.1.14 montrent que $\Delta v_m = 0$. Donc v_m est harmonique. D'après le corollaire 2.1.5, v est égale dans L^1_{loc} à une fonction harmonique. D'où le résultat.

2. Quitte à réduire Ω, on peut supposer que $\overline{\Omega}$ est compact. D'après le corollaire 2.1.11, on peut aussi supposer que $\mu_k = \Delta u_k$ est une mesure à support dans $\overline{\Omega}$ avec masse bornée uniformément en k. Notons u_{μ_k} la fonction construite comme dans le corollaire 2.1.14 pour μ_k. Comme l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\overline{\Omega}$ avec masse bornée par une constante fixée est compacte, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer que μ_k converge vers une mesure μ.

Observons que la famille des fonctions $\Gamma(x-y)$ avec $y \in \overline{\Omega}$ est bornée dans L^1_{loc}. On en déduit que la famille u_{μ_k} est aussi bornée dans L^1_{loc}. On obtient $u_{\mu_k} \to u_\mu$ dans L^1_{loc} car $\mu_k \to \mu$. Il suffit maintenant de montrer que la suite $v_k = u_k - u_{\mu_k}$ admet une sous-suite qui converge dans L^1_{loc} et aussi presque partout vers une fonction harmonique v sur Ω.

D'après la partie 1), v_k est égale presque partout à une fonction harmonique. De plus, la discussion ci-dessus montre que la suite (v_k) est bornée dans L^1_{loc}. Le corollaire 2.1.5 implique le résultat.

3. Comme la suite (u_k) est localement bornée supérieurement, on peut supposer sans perdre de généralité que les fonctions u_k sont négatives. Supposons que (u_k) ne converge pas uniformément sur les compacts vers $-\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $u_k(a_k)$ est minorée pour une certaine suite (a_k) relativement compacte dans Ω. On peut aussi supposer que a_k converge vers un point $a \in \Omega$. D'après la partie 2), il suffit de montrer que (u_k) est bornée dans L^1_{loc}.

Soit $\overline{\mathbb{B}}$ une boule fermée de centre a contenue dans Ω. En appliquant l'inégalité de sous-moyenne aux boules de centre a_k contenant $\overline{\mathbb{B}}$, on déduit que (u_k) est bornée dans $L^1(\overline{\mathbb{B}})$. Soit $\overline{\mathbb{B}}'$ une autre boule fermée contenue dans Ω et centrée en un point a' de $\mathbb{B}$. On montre que (u_k) est bornée dans $L^1(\overline{\mathbb{B}}')$. En itérant cette construction, on peut constater que la suite (u_k) est bornée dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

Soit U un voisinage assez petit de a'. Comme (u_k) est bornée dans $L^1(U)$, il existe $b_k \in U$ tel que $u_k(b_k)$ soit minoré par une constante indépendante de k. Le fait que U soit petit permet d'appliquer l'inégalité de sous-moyenne à des boules de centre b_k qui contiennent $\overline{\mathbb{B}}'$. On en déduit que (u_k) est bornée dans $L^1(\overline{\mathbb{B}}')$. Ceci complète la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 2.1.17. *Soit u une fonction de classe L^1_{loc} sur un domaine Ω. Supposons que Δu est lisse. Alors u est égale presque partout à une fonction lisse. Si de plus u est sous-harmonique, alors u est lisse.*

Démonstration. Posons $\mu = \Delta u$. Comme le problème est locale, on peut supposer que μ est de masse finie et à support compact. Comme μ est lisse sur Ω, le potentiel de Newton u_μ est aussi lisse sur Ω. On déduit du dernier théorème que $u - u_\mu$ est égale presque partout à une fonction harmonique v. Comme les fonctions harmoniques sont lisses, u est égale presque partout à la fonction lisse $u_\mu + v$.

La fonction $u_\mu + v$ est sous-harmonique. Si u est de plus sous-harmonique, elle est égale partout à $u_\mu + v$. On en déduit que u est lisse. $\square$

On a la propriété très utile suivante.

Théorème 2.1.18 (lemme de Hartogs)**.** *Soit (u_k) une suite de fonctions sous-harmoniques sur Ω qui converge dans L^1_{loc} vers une fonction sous-harmonique u. Alors on a*

$$\limsup_{k\to\infty} u_k \leq u.$$

De plus, si K est un compact dans Ω et si v est une fonction continue strictement plus grande que u sur K, alors $u_k < v$ sur K quand k est assez grand.

Démonstration. Il suffit de prouver la deuxième assertion car on en déduit la première assertion en utilisant une suite de fonctions continues sur K qui décroit vers u. Supposons qu'elle est fausse. Alors quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver une suite (a_k) dans K convergeant vers un point a telle que $u_k(a_k) \geq v(a_k)$. Par (semi-)continuité, il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour k assez grand

$$u_k(a_k) > v(a) - \delta \quad \text{et} \quad v(a) - 2\delta > u(a).$$

Comme u est s.c.s., on peut trouver une constante $\epsilon > 0$ telle que la moyenne de u sur la boule $\mathbb{B}(a, \epsilon)$ est plus petite que $v(a) - 2\delta$. L'inégalité de sous-moyenne montre que la moyenne de u_k sur $\mathbb{B}(a_k, \epsilon)$ est au moins égale à $u_k(a_k)$ et donc plus grande que $v(a) - \delta$. Ceci contredit le fait que u_k tend vers u dans L^1_{loc}. $\square$

On termine ce paragraphe avec le résultat suivant qui est valable seulement en dimension 2.

Théorème 2.1.19. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions sous-harmoniques sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$. Supposons que $\mathscr{F}$ est bornée dans L^1_{loc}. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $\alpha > 0$ et $c > 0$ telles que*

$$\int_K e^{\alpha|u(x)|} \mathrm{dvol}_2(x) \leq c \quad \textit{pour tout } u \in \mathscr{F}.$$

Démonstration. Comme le problème est local, on peut supposer que Ω est contenu dans un petit disque de centre 0. D'après le corollaire 2.1.11, quitte à réduire Ω, on peut supposer que la masse de Δu est bornée pour $u \in \mathscr{F}$. En multipliant les fonctions de $\mathscr{F}$ par une même constante, on peut supposer que la masse de Δu est bornée par 1. En ajoutant aux fonctions de $\mathscr{F}$ une même constante, on peut supposer que ces fonctions sont négatives.

Comme dans la preuve du théorème 2.1.16, on peut écrire $u = u_\mu + v$ où $\mu = \Delta u$, v une fonction harmonique bornée de norme L^1 bornée et

$$u_\mu(x) = \int_{y\in\Omega} \frac{1}{2\pi} \log \|x - y\| d\mu(y).$$

L'égalité de la moyenne implique que $|v|$ est bornée sur K par une constante fixée. Il suffit maintenant de vérifie l'inégalité dans le théorème pour la fonction u_μ à la place de u.

Rappelons qu'on a supposé que Ω est contenu dans un petit disque. On considère seulement le cas où μ est une mesure de probabilité ; le cas où la masse de μ est plus petite que 1 s'en déduit facilement. Observons que pour $y \in \Omega$, l'intégrale

$$\int_{x\in K} e^{-\log\|x-y\|} \mathrm{dvol}_2(x)$$

est bornée par une constante c indépendante de y. Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est convexe, on a d'après l'inégalité de Jensen

$$\int_K e^{u_\mu(x)} \mathrm{dvol}_2(x) \leq \int_{y\in\mathbb{C}} \Big(\int_K e^{\log\|x-y\|} \mathrm{dvol}_2(x) \Big) d\mu(y).$$

La dernière expression est bornée par c. Le résultat s'en découle. □

2.2 Fonctions p.s.h. et méthode L^2

Nous considérons dans ce paragraphe le cas des variétés complexes. D'abord, dans le cas d'une variable, en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on définit ainsi les fonctions sous-harmoniques sur des ouverts de $\mathbb{C}$. On a pour toute fonction u

$$i\partial\overline{\partial} u = \frac{1}{2} \Delta u (idz \wedge d\overline{z}).$$

On en déduit que si f est une fonction holomorphe alors

$$\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \Delta u.$$

Ainsi, si une fonction est harmonique ou sous-harmonique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ elle l'est pour toute coordonnée complexe sur cette ouvert. Par conséquent, la notion de (sous-)harmonicité est invariante par changement de coordonnée complexe et donc s'étend aux fonctions sur les surfaces de Riemann.

Définition 2.2.1. Soient X une variété complexe (connexe) et $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction qui n'est pas identiquement $-\infty$. On dit que u est *plurisousharmonique (p.s.h.)* si sa restriction à chaque disque holomorphe dans X est soit identiquement $-\infty$, soit une fonction sous-harmonique. Plus précisément, si $h : \mathbb{D} \to X$ est une application holomorphe sur un disque $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$, $u \circ h$ est soit identiquement $-\infty$ soit une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{D}$. La fonction u est *pluriharmonique* si u et $-u$ sont p.s.h.

Proposition 2.2.2. *Soit $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Alors u est p.s.h. si et seulement si $i\partial\overline{\partial}u$ est une $(1,1)$-forme hermitienne semi-positive. La fonction u est pluriharmonique si et seulement si $\partial\overline{\partial}u = 0$.*

Démonstration. La deuxième assertion est une conséquence directe de la première. On montre la première assertion. Notons que comme u est une fonction réelle, $i\partial\overline{\partial}u$ est toujours une $(1,1)$-forme hermitienne.

Soit $h : \mathbb{D} \to X$ un disque holomorphe comme dans la définition précédente. Si w est la coordonnée standard sur $\mathbb{C}$ on a

$$\frac{1}{2}\Delta(u \circ h) i dw \wedge d\overline{w} = i\partial\overline{\partial}(u \circ h) = h^*(i\partial\overline{\partial}u).$$

Si $i\partial\overline{\partial}u$ est semi-positive, on vérifie sans difficulté avec des coordonnées locales sur X que $h^*(i\partial\overline{\partial}u)$ est positive. On en déduit que u est p.s.h.

Supposons maintenant que $u \circ h$ est sous-harmonique pour tout h ou de manière équivalente, $\Delta(u \circ h) \geq 0$ pour tout h. Fixons un point $a \in X$ et ζ un vecteur tangent complexe de X en a. Il suffit de montrer que $i\partial\overline{\partial}u(a)(\zeta, \overline{\zeta}) \geq 0$.

Choisissons une application h définie sur un disque $\mathbb{D}$ de centre 0 telle que sa différentielle envoie le vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial w}$ en 0 au vecteur ζ. L'identité obtenue ci-dessus montre que

$$i\partial\overline{\partial}u(a)(\zeta, \overline{\zeta}) = \frac{1}{2}\Delta(u \circ h)(0).$$

D'où l'inégalité voulue. $\square$

La proposition ci-dessus permet de démontrer le résultat suivant en utilisant la proposition 2.1.8, les corollaires 2.1.11 et 2.1.12 ou les idées dans ces résultats.

Proposition 2.2.3. *Soit $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction non-identiquement $-\infty$ sur une variété complexe X.*

1. *S'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de fonctions p.s.h. sur X qui décroit ponctuellement vers u, alors u est aussi p.s.h.*
2. *Si u est p.s.h. sur un ouvert X de $\mathbb{C}^n$, pour tout ouvert X' relativement compact dans X, il existe une suite de fonctions p.s.h. lisses $(u_n)_{n\geq 0}$ sur X' qui décroit ponctuellement vers u.*
3. *Soeint $u_1, \ldots, u_m$ des fonctions p.s.h. sur X. Si $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe qui est croissante en chaque variable, alors $\chi(u_1, \ldots, \chi_m)$ est p.s.h. En particulier, $\max(u_1, \ldots, u_m)$ est une fonction p.s.h.*

La proposition suivante permet d'appliquer les propriétés des fonctions sous-harmoniques aux fonctions p.s.h.

Proposition 2.2.4. *Une fonction $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est p.s.h. si et seulement si elle est sous-harmonique par rapport à tout système de coordonnées complexes locales sur X. En particulier, les fonctions p.s.h. sont de classe L^1_{loc}.*

Démonstration. Supposons que u est p.s.h. Soit $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est un système des coordonnées complexes locales. On identifie donc la carte correspondante de X à un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ où $x_j = \operatorname{Re} z_j$ et $y_j = \operatorname{Im} z_j$. Si u est lisse, un calcul direct montre que Δu est égal à deux fois la trace de la matrice des coefficients de $i\partial\overline{\partial} u$. D'après la proposition 2.2.2, $i\partial\overline{\partial} u$ est semi-positive. On en déduit que Δu est positive et donc u est sous-harmonique. Le cas général se ramène au cas lisse grâce à la proposition 2.2.3.

On montre maintenant la réciproque. D'après la remarque 2.1.10, la sous-harmonicité est une propriété locale. On en déduit que la plurisousharmonicité est aussi une propriété locale. On peut donc supposer que u est définie sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et qu'elle est sous-harmonique par rapport à tout système linéaire de coordonnées complexes sur $\mathbb{C}^n$. On montre que u est p.s.h.

Si u est lisse, l'argument utilisé ci-dessus montre que la trace de la matrice des coefficients de $i\partial\overline{\partial} u$ est semi-positive pour tout système de coordonnées linéaires complexes sur $\mathbb{C}^n$. Fixons un point a et un système de coordonnées tels que la matrice associée à $i\partial\overline{\partial} u(a)$ soit diagonale. Pour chaque j, le changement de coordonnées $z_j \mapsto \lambda z_j$ multiplie le j-ième élément de la diagonale de la matrice par $|\lambda|^{-2}$ et conserve les autres. La trace restant positive, on constate que $i\partial\overline{\partial} u$ est semi-positive et donc d'après la proposition 2.2.2, u est p.s.h.

Dans le cas général, on construit comme dans la proposition 2.1.8 une suite de fonctions lisses u_k qui décroît vers u. Comme u est sous-harmonique par rapport à tout système linéaire de coordonnées holomorphes, il est de même pour u_k. D'après le cas précédent, u_k est p.s.h. Finalement, la proposition 2.2.3 implique que u est p.s.h. □

Le résultat suivant est une conséquence des théorèmes 2.1.16 et 2.1.18.

Théorème 2.2.5. *Soit (u_k) une suite de fonctions p.s.h. sur X.*

1. *Supposons que (u_k) est bornée dans L^1_{loc}. Alors on peut extraire de (u_k) une sous-suite qui converge dans L^1_{loc} et aussi presque partout vers une fonction p.s.h. sur X.*
2. *Supposons que (u_k) est localement uniformément bornée supérieurement. Alors soit (u_k) converge uniformément sur les compacts vers $-\infty$ quand $k \to \infty$, soit (u_k) admet une sous-suite qui converge dans L^1_{loc} et aussi presque partout vers une fonction p.s.h. sur Ω.*
3. *Si (u_k) converge dans L^1_{loc} vers une fonction p.s.h. u, alors on a*
$$\limsup_{k\to\infty} u_k \leq u.$$
De plus, si K est un compact dans X et v une fonction continue strictement plus grande que u sur K, alors $u_k < v$ sur K quand k est assez grand.

Théorème 2.2.6. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions p.s.h. sur X qui est bornée dans L^1_{loc}. Soit $\mathrm{dvol}_{2n}(\cdot)$ la forme volume associée à une métrique riemannienne fixée sur X. Alors pour tout compact K dans X il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que*
$$u \leq c \text{ sur } K \quad \text{et} \quad \int_K e^{\alpha|u(z)|}\mathrm{dvol}_{2n}(z) \leq c \text{ pour } u \in \mathscr{F}.$$

Démonstration. Comme $\mathscr{F}$ est bornée dans L^1_{loc}, il n'est pas difficile de déduire de l'inégalité de sous-moyenne que sur les compacts de X les fonctions dans $\mathscr{F}$ sont bornées supérieurement par une même constante. Sans perdre de généralité, quitte à réduire X, on peut supposer que ces fonctions sont négatives sur X et leur normes L^1 sont bornées par 1. Il reste à montrer la deuxième estimée du théorème.

Comme le problème est local, on peut supposer que K et X sont des boules de centre 0 et de rayons 1/4 et 4 de $\mathbb{C}^n$ respectivement. Fixons une constante M assez grande. Pour toute $u \in \mathscr{F}$, comme $\|u\|_{L^1} \leq 1$, l'ensemble $\{u < -M\}$ est de petit volume. On déduit qu'il existe un point $a \in K$ dépendant de u tel que $u(a) \geq -M$. Comme K est contenu dans $\mathbb{B}(a, 1)$, il suffit de montrer que
$$\int_{\mathbb{B}(a,1)} e^{-\alpha u(z)}\mathrm{dvol}_{2n}(z) \leq c$$
pour certaines constantes positives c et α.

En utilisant le théorème de Fubini pour la famille des droites complexes passant par a, on réduit le problème au fait suivant pour les fonctions sous-harmoniques d'une variable.

Fait. Il existe des constantes $\alpha > 0$ et $c > 0$ telles que
$$\int_{|z|<1} e^{-\alpha u} idz \wedge d\overline{z} \leq c$$

pour toute fonction sous-harmonique négative u sur le disque $\{|z| < 3\}$ de $\mathbb{C}$ avec $u(0) \geq -1$.

D'après le théorème 2.1.16, la famille considérées dans le fait ci-dessus est compacte dans L^1_{loc}. L'estimée dans le fait est donc une conséquence du théorème 2.1.19. Ceci complète la preuve du théorème. □

Corollaire 2.2.7. *Toute fonction p.s.h. est de classe L^p_{loc} pour tout $1 \leq p < \infty$. De plus, si une suite (u_k) de fonctions p.s.h. sur X qui converge dans L^1_{loc} vers une fonction p.s.h. u, elle converge aussi vers u dans L^p_{loc} pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. La première propriété se déduit de l'estimée exponentielle ci-dessus et du fait que $e^x \gtrsim x^p$ pour $x \geq 0$.

Pour la deuxième assertion, quitte à retrancher de u_k et u une constante, on peut supposer que ces fonctions sont négatives sur K. Fixons un compact K dans X et une constante $\epsilon > 0$. On doit montrer que

$$\|u_k - u\|_{L^p(K)} \leq 3\epsilon$$

pour k assez grand. Soit $M > 0$ une constante suffisamment grande qu'on fixera plus tard. Posons

$$v_k = \max(u_k, -M) \quad \text{et} \quad v = \max(v, -M).$$

Comme $|v_k - v| \leq \min(M, |u_k - u|)$, on a d'après l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}\Big(\int_K |u_k - u|^p\Big)^{1/p} &\leq \Big(\int_K |v_k - v|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int_K |u_k - v_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int_K |u - v|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(M^{p-1}\int_K |u_k - u|\Big)^{1/p} + \Big(\int_K |u_k - v_k|^p\Big)^{1/p} + \int_K |u - v|^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Observons que $u_k = v_k$ là où $u_k > -M$ et $|u_k - v_k| \leq u_k$. Les fonctions u et v satisfont les mêmes propriétés. On déduit que la dernière somme ci-dessus est majorée par

$$\Big(M^{p-1}\int_K |u_k - u|\Big)^{1/p} + \Big(M^{-1}\int_K |u_k|^{p+1}\Big)^{1/p} + \Big(M^{-1}\int_K |u|^{p+1}\Big)^{1/p}.$$

Le premier terme tend vers 0 car u_k tend vers u dans L^1_{loc}. Les deux derniers termes sont plus petits que ϵ car M est grand et les intégrales de $|u_k|^{p+1}$ et $|u|^{p+1}$ sont bornées grâce à l'estimée exponentielle dans le théorème 2.2.6. □

On termine ce paragraphe en donnant une version d'un théorème fondamental en théorie L^2. La démonstration de ce résultat ne sera pas présentée ici. Nous contentons d'obtenir plusieurs conséquences qui illustrent la puissance de cette méthode en analyse et géométrie complexes.

Définition 2.2.8. Une fonction lisse $u : X \to \mathbb{R}$ est *strictement p.s.h.* si $i\partial\overline{\partial}u$ est une forme hermitienne définie positive en tout point. Une fonction $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est *strictement p.s.h.* si elle est localement la somme d'une fonction lisse strictement p.s.h. et une fonction p.s.h.

Définition 2.2.9. On dit qu'une variété complexe X est *pseudoconvexe* si elle admet une fonction u lisse strictement p.s.h. et *exhaustive*. La dernière propriété signifie que pour tout $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{u \leq c\}$ est compact dans X ou encore que l'application $u : X \to \mathbb{R}$ est bornée inférieurement et propre.

Dans $\mathbb{C}^n$ la fonction $u = \|z\|^2$ vérifie cette propriété. Par conséquent, toute variété de Stein est pseudoconvexe. On verra plus tard que réciproquement les variétés pseudoconvexes sont celles de Stein.

Considérons dans la suite une variété complexe pseudoconvexe de dimension n avec une fonction strictement p.s.h. lisse exhaustive u comme ci-dessus. Fixons une métrique hermitienne sur X et notons $d\mathrm{vol}_{2n}(\cdot)$ la forme volume associée.

Théorème 2.2.10. *Soit φ une fonction p.s.h. lisse sur X. Alors il existe une fonction lisse convexe croissante $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une constante $c > 0$, indépendantes de φ, telles que l'équation $\overline{\partial}f = g$ avec g une $(p, q+1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée donnée admette une solution f qui est une (p, q)-forme vérifiant*

$$\int_X \|f\|^2 e^{-\varphi-\chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \leq c \int_X \|g\|^2 e^{-\varphi-\chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n}$$

sous l'hypothèse que la dernière intégrale est finie.

Notons que dans le dernier énoncé les formes f et g sont de classe L^2_{loc} et l'opérateur $\overline{\partial}$ est défini au sens des courants. Lorsque la donnée g est lisse, on peut obtenir avec cette méthode une solution f lisse. Dans le cas particulier où $q = 1$ que nous allons utiliser, on a le résultat suivant.

Proposition 2.2.11. *Soit g une $(p, 1)$-forme lisse. Alors toute solution f de l'équation*

$$\overline{\partial}f = g$$

au sens des courants est définie par une fonction lisse.

Démonstration. Le problème étant local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Un argument comme dans le théorème 1.1.9 permet de réduire le problème au cas $p = 0$. On a que $\partial\overline{\partial}f$ est une $(1, 1)$-forme lisse car elle est égale à ∂g. On a vu que Δf, qui est, à une constante multiple près, égal au coefficient de $(\partial\overline{\partial}f) \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1}$. Ce dernier courant est égal à $\partial g \wedge (i\partial\overline{\partial}\|z\|^2)^{n-1}$ et donc lisse. On conclut en utilisant le corollaire 2.1.17. □

On a aussi le corollaire suivant du théorème ci-dessus.

Corollaire 2.2.12. *Soit X une variété pseudoconvexe de dimension n. Si g est une (p,q)-forme $\overline{\partial}$-fermée de classe L^2_{loc} (resp. lisse) sur X avec $q \geq 1$, alors il existe une $(p,q-1)$-forme f de classe L^2_{loc} (resp. lisse) sur X telle que*

$$\overline{\partial} f = g.$$

Démonstration. (pour le premier cas) On va appliquer le théorème 2.2.10 à une fonction φ adaptée. D'après ce théorème, il suffit de construire une fonction p.s.h. lisse φ telle que g soit de classe L^2 par rapport à la mesure $e^{-\varphi-\chi(u)}d\mathrm{vol}_{2n}$. Comme la fonction $\chi(u)$ est bornée inférieurement, il suffit de trouver φ telle que g soit de classe L^2 par rapport à la mesure $e^{-\varphi}d\mathrm{vol}_{2n}$.

En ajoutant à u une constante, on peut supposer qu'elle est positive. Notons pour $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = 1 + \int_{\{u<k\}} \|g\|^2 d\mathrm{vol}_{2n}.$$

Choisissons une fonction lisse croissante strictement convexe $\widetilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{\chi}(t) \geq A_{k+1} + k$ pour $t \geq k$ et posons

$$\varphi = \widetilde{\chi}(u).$$

Cette fonction est lisse strictement p.s.h. On a en plus

$$\begin{aligned}
\int_X \|g\|^2 e^{-\varphi} d\mathrm{vol}_{2n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{k \leq u < k+1\}} \|g\|^2 e^{-\widetilde{\chi}(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-A_{k+1}-k} \int_{\{u<k+1\}} \|g\|^2 d\mathrm{vol}_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}.
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. □

Dans certains cas, on peut utiliser le théorème 2.2.10 pour φ singulière. Pour ceci, on approxime φ par des fonctions lisses p.s.h. C'est d'ailleurs une étape indispensable dans de nombreux applications de la méthode L^2. Voici un exemple qu'on utilisera plus tard.

Théorème 2.2.13. *Le théorème 2.2.10 reste valable pour toute fonction p.s.h. φ telle que $\{\varphi = -\infty\}$ soit fermé et φ soit lisse en dehors de cet ensemble.*

Démonstration. Soit ϑ une fonction convexe croissante lisse sur $\mathbb{R}$ qui est égale à $\max(\cdot, 0)$ hors de $[-1/2, 1/2]$. Posons pour $k \geq 0$

$$\varphi_k = \vartheta(\varphi + k) - k.$$

C'est une suite de fonctions p.s.h. lisses qui décroit vers φ.

D'après le théorème 2.2.10, il existe des formes f_k telles que

$$\overline{\partial} f_k = g \quad \text{et} \quad \int_X \|f_k\|^2 e^{-\varphi_k - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \leq c \int_X \|g\|^2 e^{-\varphi_k - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n}.$$

On utilise ici le fait important que c et χ sont indépendantes de φ_k. Dans la dernière ligne, la première intégrale est minorée par une intégrale similaire où on remplace φ_k par φ_0 et le seconde intégrale est majorée par une intégrale similaire où on remplace φ_k par φ. On déduit que la suite (f_k) est bornée dans L^2_{loc}. On peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une forme f de classe L^2_{loc} telle que $\overline{\partial} f = g$ au sens des courants.

Pour tout ouvert Ω relativement compact dans X et tout m fixé on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|f\|^2 e^{-\varphi_m - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} &\leq \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_k\|^2 e^{-\varphi_m - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \int_\Omega \|f_k\|^2 e^{-\varphi_k - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \\
&\leq c \int_X \|g\|^2 e^{-\varphi - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n}.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en prenant $m \to \infty$. □

2.3 Quelques propriétés des variétés de Stein

On va donner dans ce paragraphe des caractérisations et des propriétés des variétés de Stein. Soit X une variété complexe de dimension n. On a besoin de la notion suivante.

Définition 2.3.1. Soit K un sous-ensemble de X. On appelle *enveloppe holomorphiquement convexe* de K dans X l'ensemble $\widehat{K}$ des points $x \in X$ tels que

$$|f(x)| \leq \sup_K |f|$$

pour toute fonction f holomorphe sur X. On dit que K *est holomorphiquement convexe dans* X si $\widehat{K} = K$.

Par définition, $\widehat{K}$ est l'intersection des fermés du type $\{|f| \leq c\}$ qui contiennent K où f est une fonction holomorphe sur X et c est une constante positive. En particulier, $\widehat{K}$ est toujours un fermé contenant K. De plus, l'intersection d'une famille d'ensembles holomorphiquement convexes est aussi holomorphiquement convexe.

Exemple 2.3.2. L'enveloppe holomorphiquement convexe de $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$ dans $\mathbb{D}_n(a,r)$ est égale à $\mathbb{D}_n(a,r)$. En effet, si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(a,r)$, x un point de $\mathbb{D}_n(a,r)$ et $c=f(x)$, alors la fonction

$$\frac{1}{f(z)-c}$$

ne se prolonge pas en fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_n(a,r)$. D'après le théorème 1.2.8, elle ne se prolonge pas holomorphiquement sur $\mathbb{H}_n(a,r)$. Ceci signifie que l'hypersurface $\{f=c\}$ intersecte $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$. On en déduit que x appartient à l'enveloppe holomorphiquement convexe de $\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$.

La proposition suivante décrit un peu la géométrie des ensembles holomorphiquement convexes.

Proposition 2.3.3. *Soit K un sous-ensemble X. Soit $\pi:\Omega\to X$ une application holomorphe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^m$. Soient L un sous-ensemble de Ω et $\widehat{L}$ son enveloppe holomorphiquement convexe dans Ω. Alors si $\pi(L)\subset K$, on a $\pi(\widehat{L})\subset\widehat{K}$.*

Démonstration. Considérons une fonction holomorphe f sur X et un point $y\in\widehat{L}$. On a par définition de $\widehat{L}$ appliquée à la fonction $f\circ\pi$

$$|f(\pi(y))|\leq\sup_{\pi(L)}|f|\leq\sup_K|f|.$$

D'où $\pi(y)$ appartient $\widehat{K}$. Ceci entraîne la proposition. □

On peut appliquer cette proposition au cas où $\Omega\setminus L$ est compact. Dans ce cas, par principe du maximum, on a $\widehat{L}=\Omega$ et donc $\pi(\Omega)\subset\widehat{K}$ si $\pi(\Omega\setminus L)\subset K$. On peut aussi appliquer la proposition au cas où $\Omega=\mathbb{D}_n(a,r)$ et $L=\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon)$. On obtient alors que $\pi(\mathbb{D}_n(a,r))\subset\widehat{K}$ lorsque $\pi(\mathbb{H}_n(a,r,\epsilon))\subset K$.

Définition 2.3.4. Un ouvert relativement compact P de X est appelé *polyèdre analytique d'ordre N de X* s'il est une réunion de composantes connexes de $F^{-1}(\mathbb{D}_N)$ où $F:X\to\mathbb{C}^N$ est une application holomorphe et $\mathbb{D}_N$ est le polydisque unité dans $\mathbb{C}^N$.

On a le lemme suivant.

Lemme 2.3.5. *Soit K un compact holomorphiquement convexe dans X. Alors pour tout voisinage Ω de K, il existe un polyèdre analytique P de X tel que*

$$K\subset P\subset\Omega.$$

Démonstration. On peut supposer que $\overline{\Omega}$ est compact. Pour tout $a \in b\Omega$ on peut trouver une fonction holomorphe f telle que $|f| < 1$ sur K et $|f(a)| > 1$. Donc K est contenu dans l'intersection de tous les ensembles de la forme $\{|f| < 1\}$ avec f comme ci-dessus et $b\Omega$ est recouvert par les ensembles de la forme $\{|f| > 1\}$. Comme $b\Omega$ est compact, il y a une famille finie de fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_N$ telles que $b\Omega$ soit recouvert par les ouverts $\{|f_i| > 1\}$. On en déduit que l'application $F = (f_1, \ldots, f_m)$ fournit un polyèdre analytique qui vérifie le lemme. □

Théorème 2.3.6. *Soit X une variété pseudoconvexe avec une fonction lisse strictement p.s.h. exhaustive u. Si K est contenu dans $\{u \leq c\}$ pour une certaine constante c alors $\widehat{K}$ l'est aussi. En particulier, le compact $\{u \leq c\}$ est holomorphiquement convexe dans X pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer la deuxième assertion. Fixons un point a tel que $u(a) > c$. On va construire une fonction holomorphe f telle que $|f(a)| > \sup_K |f|$ avec $K = \{u \leq c\}$. Sans perdre de généralité, en ajoutant à u une constante puis en multipliant u par une constante positive, on peut supposer $c = -2$ et $u(a) = 1$. L'idée principale ici est de construire d'abord une fonction lisse f' vérifiant la propriété désirée et puis on la corrige afin d'obtenir une fonction holomorphe f. La correction utilise la résolution de l'équation $\overline{\partial}$.

On identifie un petit voisinage de a avec la boule unité dans $\mathbb{C}^n$ et a avec le centre 0. On peut facilement construire une fonction v négative à support compact dans $\{u > 0\}$, lisse sauf en 0, et égale à $2n \log \|z\|$ au voisinage de 0. En particulier, elle est p.s.h. au voisinage de $a = 0$.

Fixons une fonction f' lisse sur X à support compact dans $\{u > 0\}$ telle que $f'(a) = 1$ et f' soit holomorphe au voisinage de a. Posons $g = \overline{\partial} f'$. C'est une $(0,1)$-forme lisse à support compact et nulle au voisinage de a. Soit $A > 0$ une constante assez grande qu'on fixera plus tard. Posons

$$\varphi = v + Au.$$

Comme A est grande et u est strictement p.s.h., la fonction φ est p.s.h.

D'après la proposition 2.2.11 et le théorème 2.2.13, il existe donc une fonction f'' lisse telle que

$$\overline{\partial} f'' = g \quad \text{et} \quad \int_X |f''|^2 e^{-v-Au} e^{-\chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \leq c \int_X \|g\|^2 e^{-v-Au} e^{-\chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n}.$$

Notons que la dernière intégrale est finie car g est nulle au voisinage de a. Rappelons aussi que χ et c ne dépendent pas de A.

Comme e^{-v} n'est pas intégrable au voisinage de a, on a nécessairement $f''(a) = 0$. De plus, comme $u > 0$ sur le support de g, la dernière intégrale est bornée par une constante indépendante de A. On en déduit que si A est assez grand la norme L^2 de f'' sur $\{u < -1\}$ est petite. Comme g est nulle sur $\{u < -1\}$, f''

est holomorphe sur cet ouvert. La formule de Cauchy (théorème 1.2.1) entraîne que f'' est petite sur K.

Posons finalement

$$f = f' - f''.$$

On a d'après la discussion ci-dessus que $f(a) = 1$ et que f est petite sur K. Ceci implique le résultat. □

Théorème 2.3.7. *Soient X une variété pseudoconvexe et K un compact holomorphiquement convexe dans X. Soit h une fonction holomorphe au voisinage de K. Alors h est uniformément approximable sur K par des fonctions holomorphes sur X. Plus précisément, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction f holomorphe sur X telle que*

$$|f - h| < \epsilon \text{ sur } K.$$

Démonstration. Choisissons un polyèdre analytique P associé à une application $F = (f_1, \ldots, f_N)$ tel que $K \subset P$ et h soit définie sur P. Pour $0 < \delta < 1$, posons

$$P_\delta = \{z \in P,\ \max |f_j(z)| < 1 - \delta\}.$$

On choisit aussi une constante $0 < \delta < \frac{1}{2}$ assez petite et une fonction ρ à support compact dans P telles que $K \subset P_{4\delta}$ et $\rho = 1$ sur P_δ.

Considérons l'équation

$$\overline{\partial} f' = \overline{\partial}(\rho h)$$

et la fonction p.s.h. positive

$$\varphi = \log\big(1 + \sum_{j=1}^{N} (1 - 2\delta)^{-\gamma} |f_j|^\gamma\big),$$

où γ est une constante suffisamment grande. Observons que $\overline{\partial}(\rho h)$ est nulle sur P_δ et aussi en dehors de P.

D'après le théorème 2.2.10, il existe une solution f' telle que

$$\int_{P_{3\delta}} |f'|^2 e^{-\varphi - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n} \le c \int_{P \setminus P_\delta} \|\overline{\partial}(\rho h)\|^2 e^{-\varphi - \chi(u)} d\mathrm{vol}_{2n}.$$

Comme γ est grand, φ est très petit sur $P_{3\delta}$ et très grand sur $P \setminus P_\delta$. On en déduit que la norme L^2 de f' sur $P_{3\delta}$ est petite. D'après la formule de Cauchy, f' est petite sur K. La fonction $f = \rho h - f'$ est donc holomorphe et proche de h sur K car elle est égale à $h - f'$ sur K. C'est qu'il faut démontrer. □

Dans la suite, on démontre le théorème principal suivant.

Théorème 2.3.8. *Une variété X est de Stein si et seulement si elle est pseudoconvexe.*

On a déjà vu la condition nécessaire. Supposons dans la suite que X est pseudoconvexe avec une fonction exhaustive p.s.h. lisse u comme ci-dessus. On montre que X est de Stein. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Lemme 2.3.9. *Soient a, b deux points distincts de X. Alors il existe une fonction holomorphe f sur X telle que $f(a) \neq f(b)$.*

Démonstration. Soit φ comme dans le théorème 2.3.6 . On construit les fonctions φ_k comme dans le théorème 2.2.13. Pour k assez grand, on a $\varphi_k(a) \ll \varphi_k(b)$. La fonction $u' = \varphi_k + u$ est donc strictement p.s.h. lisse exhaustive et vérifie $u'(a) < u'(b)$. On déduit du théorème 2.3.6 qu'il existe une fonction holomorphe f telle que $|f(b)| > |f(a)|$. □

Lemme 2.3.10. *Pour tout $a \in X$, il existe une application holomorphe $F : X \to \mathbb{C}^n$ qui définit une application biholomorphe entre un voisinage de a et son image.*

Démonstration. On reprend l'idée principale de la démontration du théorème 2.3.6 mais avec une fonction φ plus singulière en a, e.g. $\varphi = 2v + Au$. Rappelons que la fonction f'' est holomorphe au voisinage de $a = 0$. L'intégrabilité de la fonction

$$|f''|^2 e^{-v-Au} e^{-\chi(u)} \sim |f''|^2 \|z\|^{-4n}$$

implique que f'' s'annule en a, ainsi que ses dérivées d'ordre 1. Par conséquent, la fonction holomorphe $f = f' - f''$ est égale à l'ordre 1 en a à la fonction f'.

Afin d'obtenir une application F comme dans le lemme, il suffit de construire une application F' lisse à support compact, holomorphe au voisinage de a dont la différentielle est de rang maximale en a. Ceci se fait facilement en utilisant les coordonnées locales et une fonction cut-off. La méthode décrite ci-dessus appliquée à chaque composantes de F' permet de construire une application holomorphe F qui est de rang maximal en a. Cette application vérifie le lemme (voir le théorème 1.1.7). □

Lemme 2.3.11. *Soit K un compact de X. Alors il existe une application holomorphe $F : X \to \mathbb{C}^N$ telle que F soit injective et régulière sur K. La dernière propriété signifie que la différentielle de F est de rang n en chaque point de K.*

Démonstration. D'après le lemme 2.3.10, pour chaque point $a \in K$, on peut choisir un voisinage U_a de a et une application holomorphe $F_a : X \to \mathbb{C}^n$ qui envoie U_a biholomorphiquement sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Comme K est compact, on peut choisir une famille finie de (a, U_a, F_a) telle que les U_a recouvrent K. Notons W la réunion des $U_a \times U_a$. C'est un voisinage de la diagonale de $K \times K$.

D'après le lemme 2.3.9, pour chaque point (b, c) dans $K \times K \setminus W$ il existe une fonction holomorphe $f_{b,c}$ telle que $f_{b,c}(b) \neq f_{b,c}(c)$. Par continuité, il existe un voisinage $V_{b,c}$ de (b, c) dans $K \times K$ tel que $f_{b,c}(z) \neq f_{b,c}(w)$ si $(z, w) \in V_{b,c}$.

Comme $K \times K \setminus W$ est compact, il y a une famille finie de $(b, c, f_{b,c}, V_{b,c})$ telle que les $V_{b,c}$ recouvrent $K \times K \setminus W$. Notons maintenant F l'application holomorphe dont les composantes sont les $f_{b,c}$ et les composantes des F_a dans les deux familles finies ci-dessus. Il est clair que cette application vérifie le lemme. $\square$

Rappelons que notre but ici est de montrer que X est de Stein, c.-à-d. de construire une application holomorphe régulière, injective et propre de X dans un espace euclidien. Le reste de la démonstration est un peu technique. On a besoin d'abord de contrôler l'entier N utilisé dans le lemme précédent. Dans les deux lemmes qui suivent, on n'a pas besoin de supposer que X est pseudoconvexe.

Lemme 2.3.12. *Soient $F = (f_1, \ldots, f_{N+1}) : X \to \mathbb{C}^{N+1}$ une application holomorphe avec $N \geq 2n$ et K un compact de X. Supposons que F est régulière au voisinage de K. Alors pour presque tout $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ l'application $F_a : X \to \mathbb{C}^N$ définie par*

$$F_a = (f_1 + a_1 f_{N+1}, \ldots, f_N + a_N f_{N+1})$$

est régulière au voisinage de K.

Démonstration. Soit U un voisinage assez petit de K sur lequel F est régulière. Considérons l'ensemble Y des points $(z, a) \in U \times \mathbb{C}^N$ tel que F_a ne soit pas régulière en z. En coordonnées locales, ceci signifie que le rang de la matrice

$$\Big(\frac{\partial f_j}{\partial z_k} + a_j \frac{\partial f_{N+1}}{\partial z_k}\Big)_{1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq n}$$

est strictement plus petite que n en z. En particulier, Y est un sous-ensemble analytique de $U \times \mathbb{C}^n$.

Pour chaque z fixé dans U, comme F est régulière en z, la matrice

$$\Big(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\Big)_{1 \leq j \leq N+1, 1 \leq k \leq n}$$

est de rang maximal n. Il n'est pas difficile de voir que les $a \in \mathbb{C}^N$ tels que $(z, a) \in Y$ forment un sous-ensemble analytique de dimension au plus $n - 1$ dans $\mathbb{C}^N$.

On en déduit que la dimension de Y est au plus égale à $2n - 1$. Sa projection dans $\mathbb{C}^N$ est donc de volume zéro. Ceci signifie que presque tout $a \in \mathbb{C}^N$ est en dehors de la projection de Y. On constate que pour presque tout a, l'application F_a est régulière sur U. $\square$

Lemme 2.3.13. *Soient $F = (f_1, \ldots, f_{N+1}) : X \to \mathbb{C}^{N+1}$ une application holomorphe avec $N \geq 2n + 1$ et K un compact de X. Supposons que F est injective sur un voisinage de K. Alors pour presque tout $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ l'application $F_a : X \to \mathbb{C}^N$, définie comme dans le lemme précédent, est injective sur un voisinage de K.*

Démonstration. Soit U un voisinage de K sur lequel F est injective. Notons Δ la diagonale de $U \times U$ et Z l'ensemble des points $(z, w, a) \in (U \times U \setminus \Delta) \times \mathbb{C}^N$ tels que $F_a(z) = F_a(w)$. Par définition, c'est un sous-ensemble analytique de $(U \times U \setminus \Delta) \times \mathbb{C}^N$.

Pour chaque $(z, w) \in (U \times U \setminus \Delta)$ fixé, comme $F(z) \neq F(w)$, il y a au plus un point $a \in \mathbb{C}^N$ tel que $(z, w, a) \in Z$. On en déduit que la dimension de Z est au plus égale à $2n$. Sa projection dans $\mathbb{C}^N$ est donc de volume zéro car $N \geq 2n + 1$. Le lemme s'en déduit. □

On a la proposition suivante qui précise le lemme 2.3.5 dans le cas des variétés pseudoconvexes.

Proposition 2.3.14. *Soit K un compact holomorphiquement convexe dans une variété X pseudoconvexe. Alors pour tout voisinage Ω de K, il existe un polyèdre analytique P d'ordre $2n$ tel que*

$$K \subset P \subset \Omega.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.3.5, il suffit de montrer que si P est un polyèdre d'ordre $N + 1 \geq 2n + 1$ tel que $K \subset P \Subset \Omega$, il existe un polyèdre P' d'ordre N tel que $K \subset P' \Subset \Omega$.

Soit $F = (f_1, \ldots, f_{N+1}) : X \to \mathbb{C}^{N+1}$ une application holomorphe telle que P soit une réunion de composantes de

$$\{z \in X,\ |f_j(z)| < 1 \text{ pour } j = 1, \ldots, N + 1\}.$$

D'après les lemmes 2.3.11 et 2.3.12, on peut perturber légèrement F afin de supposer que F est régulière au voisinage de $\overline{P}$.

L'application

$$\Big(\frac{f_1}{f_{N+1}}, \ldots, \frac{f_N}{f_{N+1}}, f_{N+1}\Big)$$

est régulière au voisinage de

$$L = \{z \in \overline{P},\ |f_{N+1}(z)| = 1\}.$$

Le lemme 2.3.12 appliqué à cette application montre qu'on peut perturber F afin de supposer que

$$G = \Big(\frac{f_1}{f_{N+1}}, \ldots, \frac{f_N}{f_{N+1}}\Big)$$

est régulière au voisinage de L.

Soient $0 < c_0 < c_1 < c_2 < 1$ des constantes telles que

$$K \subset \{z,\ |f_j(z)| < c_0 \text{ pour tout } j\}$$

et que G soit régulière au voisinage de

$$\{z \in \overline{P},\ |f_{N+1}(z)| \geq c_2\}.$$

Posons $F' = (f'_1, \ldots, f'_N)$ avec

$$f'_j = c_1^{-k}(f_j^k - f_{N+1}^k)$$

pour un entier k assez grand. Notons P' la réunion des composantes de

$$\Delta = \{z,\ |f'_j(z)| < 1 \text{ pour } j = 1, \ldots, N\}$$

qui intersectent K. Il est clair que K est contenu dans P'.

Il suffit maintenant de vérifier que P' est contenu dans

$$\Omega = \{z \in P,\ |f_{N+1}(z)| < c_2\}$$

car comme k est grand, cette propriété implique que $|f_j| < 1$ sur P' et donc $P' \subset P$.

Soit z un point de $\Delta \cap b\Omega$. On a pour $j \leq N$

$$|f_j(z)^k - f_{N+1}(z)^k| < c_1^k \quad \text{et} \quad |f_{N+1}(z)| \leq c_2.$$

Comme k est grand, on déduit que $|f_j(z)| < 1$ pour tout $j \leq N$ et donc $|f_{N+1}(z)| = c_2$ car $z \in b\Omega$. On en déduit aussi que

$$|G_j(z)^k - 1| \leq c_1^k c_2^{-k} \quad \text{si} \quad G_j = \frac{f_j}{f_{N+1}}\cdot$$

Soit $w \in \overline{P}$ tel que $\operatorname{dist}(w, z) = k^{-2}$. On montre que w n'appartient pas à Δ. Ceci impliquera que z n'appartient pas à P'. On a

$$|f_{N+1}(w)| = |f_{N+1}(z)| + O(k^{-2}) = c_2 + O(k^{-2})$$

et comme G est régulière au voisinage de z

$$|G_j(w) - G_j(z)| = \alpha_j k^{-2} + O(k^{-4})$$

avec $\max_{1 \leq j \leq N} \alpha_j \geq \alpha$ pour une constante $\alpha > 0$ indépendante de k et ξ. On a aussi

$$|G_j(w)^k - G_j(z)^k| = |[G_j(z) + G_j(w) - G_j(z)]^k - G_j(z)^k| = \alpha_j k^{-1} + o(k^{-1}).$$

Finalement, on déduit des estimées ci-dessus que

$$\max_{1 \leq j \leq N} |f_j(w)^k - f_{N+1}(w)^k| = \max_{1 \leq j \leq N} |G_j(w)^k - 1||f_{N+1}(w)|^k > c_1^k.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. □

Proposition 2.3.15. *Soit X une variété pseudoconvexe de dimension n. Alors il existe une application holomorphe propre de X dans $\mathbb{C}^{2n+1}$.*

Démonstration. Soit u une fonction strictement p.s.h. lisse et exhaustive sur X. Posons

$$K_m = \{u \leq m\}.$$

D'après la proposition précédente, on peut trouver une suite $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de polyèdres d'ordre $2n$ telle que

$$\overline{P}_m \subset K_m \subset P_{m+1}.$$

On a donc $\cup P_m = X$. On construit d'abord les fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_{2n}$ telles que

$$\max_{1\leq j\leq 2n} |f_j| > m \text{ sur } bP_m \text{ pour tout } m.$$

Soient $h_1^{(m)}, \ldots, h_{2n}^{(m)}$ des fonctions holomorphes définissant P_m, i.e. P_m est une réunion de composantes de

$$\{z,\ |h_j^{(m)}(z)| < 1 \text{ pour } j = 1, \ldots, 2n\}.$$

En remplaçant les $h_j^{(m)}$ par leur puissances, on peut supposer que

$$\max_{1\leq j\leq 2n} |h_j^{(m+1)}| \leq \frac{1}{4} \text{ sur } P_m.$$

On vérifie sans peine que si (k_m) est une suite de nombre entiers naturels suffisamment croissante, les fonctions

$$f_j = \sum_{k\geq 0} (2h_j^{(m)})^{k_m}$$

sont bien définies et satisfont la propriété désirée.

On construit maintenant la fonction f_{2n+1} telle que l'application $(f_1, \ldots, f_{2n+1})$ soit propre. Pour ceci, il suffit d'obtenir une fonction f_{2n+1} telle que pour tout m on a $|f_{2n+1}| \geq m$ sur

$$G_m = \{z \in P_{m+1} \setminus P_m,\ \max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| \leq m\}$$

car ceci montre que

$$\max_{1\leq j\leq 2n+1} |f_j(z)| \geq m \text{ sur } P_{m+1} \setminus P_m \text{ pour tout } m \text{ et donc sur } X \setminus P_m.$$

Les propriétés de $f_1, \ldots f_{2n}$ impliquent que G_m est un compact disjoint du compact

$$H_m = \{z \in P_m,\ \max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| \leq m\}.$$

De plus, l'enveloppe holomorphiquement convexe de $G_m \cup H_m$ doit être contenue dans l'ensemble

$$\{z \in X,\ \max_{1\leq j\leq 2n} |f_j(z)| \leq m\}.$$

On en déduit que cette enveloppe est la réunion de G_m, H_m et un compact H'_m qui n'intersecte pas P_{m+1}.

En appliquant le théorème 2.3.7 à une fonction qui est nulle au voisinage de $H_m \cup H'_m$ et égale à une grande constante au voisinage de G_m, on obtient une fonction holomorphe g_m sur X qui vérifie

$$|g_m| \leq 2^{-m-1} \text{ sur } H_m \text{ et } |g_m| \geq m+1 \text{ sur } G_m.$$

On vérifie sans peine que la fonction

$$f_{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} g_m$$

correspond à notre besoin. Ceci complète la preuve de la proposition. □

Fin de la démonstration du théorème 2.3.8. Il suffit de construire une application régulière injective F de X dans $\mathbb{C}^{2n+1}$. En effet, l'application constituée par F et celle construite dans la dernière proposition est régulière propre et injective de X dans $\mathbb{C}^{4n+2}$.

On choisit une suite croissante de compacts K_m dans X dont la réunion est égale à X. D'après les lemmes 2.3.11, 2.3.12 et 2.3.13, il existe des applications holomorphes $F_m : X \to \mathbb{C}^{2n+1}$ qui sont injective et régulières au voisinage de K_m. En multipliant F_m avec une petite constante, on peut supposer que F_m et la différentielle de F_m sont de norme plus petite que 2^{-m} sur K_m. On déduit de cette propriété que *si une application holomorphe $G : X \to \mathbb{C}^{2n+1}$ est injective et régulière au voisinage de K_m il existe une constante $\delta > 0$ telle que*

$$G + \sum_{l \geq 0} A_l F_l$$

vérifie la même propriété pour toutes matrices A_l de taille $(2n+1) \times (2n+1)$ à coefficients complexes de norme plus petite que δ.

D'après les lemmes 2.3.12 et 2.3.13, si A_1 est une matrice générique assez petite, alors l'application $F_0 + A_1 F_1$ est injective et régulière sur K_1. Comme on a observé, cette propriété reste valable lorsqu'on ajoute à cette application une petite combinaison des F_l. Ainsi, on obtient par récurrence des matrices A_l assez petites telles que l'application

$$F = F_0 + \sum_{l \geq 1} A_l F_l$$

est injective et régulière sur chaque compact K_m. Ceci complète la preuve du théorème. □

Théorème 2.3.16. *Soit X une variété complexe admettant une fonction lisse positive strictement p.s.h., e.g. un ouvert d'une variété de Stein. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est de Stein ;*
2. *X admet une fonction lisse p.s.h. et exhaustive.*
3. *Pour tout compact K dans X, son enveloppe holomorphiquement convexe est compact.*

Démonstration. On a vu que (1) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (3). On montre que (2) $\Rightarrow$ (1). Soit u une fonction lisse strictement p.s.h. sur X. Soit φ une fonction lisse p.s.h. exhaustive sur X. Il suffit de construire une fonction $\widetilde{u}$ lisse strictement p.s.h. et exhaustive. Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse convexe croissante qu'on fixera plus tard. Posons

$$\widetilde{u} = u + \chi(\varphi).$$

Il est clair que $\widetilde{u}$ est lisse strictement p.s.h. On montre qu'elle est exhaustive pour un choix de χ convenable. Le problème principal ici est le fait que u est peut-être non-bornée inférieurement. Considérons les compacts $K_i = \{\varphi \leq i\}$ et posons

$$\lambda_i = \max_{K_{i+1}} |u| + i.$$

On choisit χ telle que $\chi(i) \geq \lambda_i$ pour $i \geq 0$. Alors on a sur $K_{i+1} \setminus K_i$

$$\widetilde{u} \geq - \max_{K_{i+1}} |u| + \chi(i) \geq i.$$

Donc $\widetilde{u}$ est exhaustive.

Il reste à montrer que (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons la propriété (3). Il suffit de construire une fonction lisse p.s.h. exhaustive sur X. La propriété (3) et le lemme 2.3.5 impliquent l'existence d'une suite de polyèdres analytiques P_m vérifiant

$$\overline{P}_m \subset P_{m+1} \text{ et } \cup P_m = X.$$

On va montrer qu'il existe des fonctions p.s.h. lisse u_m sur X telles que $u_m \geq 1$ sur $X \setminus P_m$ et la norme $\mathscr{C}^m$ de u_m sur P_{m-1} est plus petite que 2^{-m}. Il suffit alors de poser $u = \sum u_m$ pour obtenir une fonction p.s.h. lisse exhaustive.

Soient maintenant P un polyèdre arbitraire de X et K un compact de P. Soient ϵ, A des constantes positives et m un entier natutel. Il suffit de construire une fonction p.s.h. lisse v sur X telle que $v \geq A$ sur $X \setminus P$ et sa norme $\mathscr{C}^m$ sur K soit plus petite que ϵ.

Soit $F = (f_1, \ldots, f_N) : X \to \mathbb{C}^m$ une application holomorphe telle que P soit une réunion de composantes de $\{|f_j| < 1 \text{ pour tout } j\}$. Soit $0 < c < 1$ une constante telle que $|f_j| < c$ sur K pour tout j. Posons

$$v' = \sum_{j=1}^{N} c^{-2k} |f_j|^{2k}$$

où k est un entier assez grand. Il est clair que v' est p.s.h. lisse et sa norme $\mathscr{C}^m$ sur K est petite. De plus $v' > A$ au voisinage de bP.

On va modifier v' en dehors de P afin d'obtenir la fonction v souhaitée. Posons

$$v = \begin{cases} v' & \text{sur } P \\ \max(v', A) & \text{sur } X \setminus P. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement plus grande que A sur $X \setminus P$ et p.s.h. sur $X \setminus \overline{P}$. Elle est donc p.s.h. sur X car elle est égale à v' au voisinage de $\overline{P}$.

Cette fonction n'est pas nécessairement lisse. Afin d'avoir une fonction lisse, il suffit de remplacer la fonction $\max(\cdot, A)$ utilisée dans la définition de v par une fonction lisse convexe croissante, égale à $\max(\cdot, A)$ sauf dans un petit voisinage de A. Ceci complète la preuve du théorème. □

Théorème 2.3.17. *Soit X un domaine d'une variété X'. Supposons que X est de Stein. Alors il existe une fonction holomorphe f sur X qui ne se prolonge nulle part holomorphiquement à travers le bord de X. Plus précisément, il n'existe pas d'ouvert Ω' de X' et une composante Ω de $X \cap \Omega'$ tels que $\Omega \neq \Omega'$ et que la restriction de f à Ω se prolonge holomorphiquement à Ω'.*

Démonstration. Soit u une fonction lisse strictement p.s.h. exhaustive sur X. On choisit une suite (x_m) de points dans X telle que $c_m = u(x_m)$ croît strictement vers l'infini et que tout ouvert Ω' comme rencontre (x_m). On va construire une fonction f telle que $|f(x_m)| \to \infty$. Il est clair que cette fonction vérifie le théorème.

D'après le théorème 2.3.6, le compact $K_m = \{u \leq c_m\}$ est holomorphiquement convexe. Comme x_{m+1} n'est pas dans ce compact, il existe une fonction holomorphe f_m telle que

$$\max_{K_m} |f_m| < 1 < |f_m(x_{m+1})|.$$

Si (k_m) est une suite suffisamment croissante d'entiers positifs, on vérifie sans peine que la somme

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{k_m}$$

converge vers une fonction holomorphe avec $|f(x_m)| \to \infty$. □

Le résultat suivant donne la réciproque du dernier théorème.

Théorème 2.3.18. *Soit X un domaine dans une variété de Stein X'. Supposons que X admet une fonction f qui ne se prolonge nulle part holomorphiquement à travers le bord de X. Alors X est de Stein.*

Démonstration. On donne ici seulement la preuve pour le cas où $X' = \mathbb{C}^n$. Le cas général peut être obtenu avec les mêmes idées et quelques détails techniques de plus. Soit K un compact de X. D'après le théorème 2.3.16, il suffit de montrer que son enveloppe holomorphiquement convexe dans X est compact.

On choisit une constante $r_0 > 0$ suffisamment petite telle que la réunion K' des polydisques de rayon $r = (r_0, \ldots, r_0)$ centrés en un point de K soit un compact de X. Posons $A = \max_{K'} |f|$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$\max_K \Big|\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}\Big| \leq Ak! r^{-|k|} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^n.$$

On en déduit que si w est un point de $\widehat{K}$

$$\Big|\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(w)\Big| \leq Ak! r^{-|k|} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^n.$$

Par conséquent, la série entière associée à f en w converge sur le polydisque de centre w et de rayon r. L'hypothèse sur f implique que ce polydisque doit être contenu dans X. On constate que $\mathrm{dist}(\widehat{K}, bX) \geq r_0$. D'autre part, comme $X \subset \mathbb{C}^n$, $\widehat{K}$ est borné dans $\mathbb{C}^n$. On en déduit que $\widehat{K}$ est compact. □

2.4 Courants positifs fermés

Chapitre 3

Dynamique des polynômes et des fractions rationnelles

Ce chapitre est consacré à l'étude dynamique des polynômes et des fractions rationnelles d'une variable complexe. Il contient d'une part des propriétés de base de la théorie d'itération en dimension 1 complexe et d'autre part une introduction à des notions fondamentales en dynamique comme la théorie ergodique et la notion d'entropie qui ne se limitent pas dans le cadre des applications holomorphes. Pour la simplicité, nous allons nous concentrer au cas des polynômes et donner les commentaires pour le cas des fractions rationnelles.

3.1 Quelques notions de base

Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$ (la dynamique d'un polynôme de degré 1 n'est pas intéressante). Ce polynôme définit une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'équation $f(w) = z$ admet exactement d solutions comptées avec multiplicité. Autrement dit, *les fibres* $f^{-1}(z)$ de f contiennent exactement d points comptés avec multiplicité. De plus, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un *revêtement ramifié de degré* d.

Définition 3.1.1. Un point c est *critique de multiplicité* m si'il est solution de multiplicité m de l'équation $f'(z) = 0$. L'ensemble des points critiques s'appele *l'ensemble critique* de f. Si c est un point critique, $f(c)$ est une *valeur critique* de f.

Comme $\deg f' = d - 1$, f admet exactement $d - 1$ points critiques dans $\mathbb{C}$, comptés avec multiplicité. Le polynôme $f^n := f \circ \cdots \circ f$ est *l'itérée d'ordre* n de f ; il est de degré d^n. Il faut le distinguer avec la puissance d'ordre n de f qui est de degré dn. On définit aussi $f^0(z) = z$, i.e. $f^0 = \mathrm{id}$.

Définition 3.1.2. Un point p *est fixe de multiplicité* m si p est solution de multiplicité m de l'équation $f(z) = z$. Un point p est *périodique de période* n

et de multiplicité m si p est un point fixe de multiplicité m de f^n, i.e. p est une solution de multiplicité m de l'équation $f^n(z) = z$. On dit que p est *pré-périodique* s'il existe $N \geq 0$ tel que $f^N(p)$ soit un point périodique.

Il y a exactement d points fixes dans $\mathbb{C}$ comptés avec multiplicité (on verra plus tard que le point à l'infini peut être considéré comme un point fixe de multiplicité 1 et un point critique de multiplicité $d-1$). Comme f^n est de degré d^n, f admet exactement d^n points périodiques de période n dans $\mathbb{C}$ comptés avec multiplicité. Notons que si p est un point périodique de période n, il est aussi périodique de période kn pour tout $k \geq 1$.

Définition 3.1.3. La suite des points $\mathrm{O}^+(p) := \{p, f(p), f^2(p), \ldots\}$ est *l'orbite* du point p. Toute suite $\{p_{-n}, \ldots, p_{-2}, p_{-1}, p_0\}$ telle que $p_0 = p$ et $f(p_{-i-1}) = f(p_{-i})$ pour $0 \leq i \leq n-1$, est *une branche inverse d'ordre* n de p. L'orbite d'un point périodique d'ordre n est appelée *un cycle (périodique) d'ordre* n.

En général, un point peut avoir plusieurs branches inverses. Les points pré-périodiques sont ceux d'orbite finie.

Définition 3.1.4. Soit p un point périodique de période n de f. On dit que p est

1. *répulsif* si $|(f^n)'(p)| > 1$.

2a. *attractif* si $|(f^n)'(p)| < 1$.

2b. *super-attractif* si $(f^n)'(p) = 0$, i.e. p est aussi un point critique.

3. *neutre rationnel* si $(f^n)'(p)$ est une racine de l'unité.

4. *neutre irrationnel* si $|(f^n)'(p)| = 1$ et si $(f^n)'(p)$ n'est pas une racine de l'unité.

L'orbite de p s'appelle respectivement *cycle répulsif, attractif, super-attractif, neutre rationnel ou neutre irrationnel.*

On montre facilement que si p est périodique de période n la dérivée $(f^n)'(p)$ ne change pas si l'on utilise une autre coordonnée locale au point p. Les notions ci-dessus ne dépendent donc pas de coordonnée.

Définition 3.1.5. Un sous-ensemble K de $\mathbb{C}$ est *invariant* si $f(K) = K$ et *totalement invariant* si $f^{-1}(K) = K$.

Il est facile de voir que si un ensemble est totalement invariant, son bord, son adhérence et son complémentaire le sont aussi. Comme f est surjectif, on voit que les ensembles totalement invariants sont invariants.

Soient $p_0, \ldots, p_{k-1}$ un cycle attractif de période minimal k. On a $f(p_i) = p_{i+1}$ pour $i = 0, \ldots, k-1$ avec la convention $p_k = p_0$. Notons $\widetilde{\Omega}_i$ l'ensemble des points z tels que $f^{nk}(z) \to p_i$ et Ω_i la composante connexe de $\widetilde{\Omega}_i$ qui contient p_i. On appelle $\widetilde{\Omega}_i$ *le bassin* de p_i et Ω_i *le bassin immédiat* de p_i.

Proposition 3.1.6. *Les ensembles* $\widetilde{\Omega}_i$ *sont ouverts et on a* $f(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$. *De plus, la suite* (f^{nk}) *converge localement uniformément sur* $\widetilde{\Omega}_i$ *vers* p_i.

Démonstration. Posons $\lambda = |(f^k)'(p_i)|$. C'est une constante positive indépendante de i et strictement plus petite que 1. Fixons une constante γ telle que $\lambda < \gamma < 1$. Observons que si z appartient à un disque U_i suffisamment petit de centre p_i alors $\text{dist}(f^k(z), p_i) \leq \gamma\,\text{dist}(z, p_i)$. En particulier, $f^{kn}(z) \to p_i$ sur U_i. De plus, on a $\widetilde{\Omega}_i = \cup_{n\geq 0} f^{-kn}(U_i)$. C'est donc un ouvert.

Si K est un compact de $\widetilde{\Omega}_i$, il existe N tel que $f^{Nk}(K) \subset U_i$. On en déduit que f^{nk} converge uniformément sur K vers p_i. Il est aussi clair que $f^{-1}(\widetilde{\Omega}_{i+1}) = \widetilde{\Omega}_i$. Comme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un revêtement ramifié, ceci implique que $f(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$. □

Notons Ω_∞ l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $f^n(z)$ tend vers l'infini. C'est le bassin de l'infini. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$ s'appelle *ensemble de Julia rempli.* On verra plus tard la justification de cette terminologie. La proposition suivante montre que l'ensemble de Julia rempli est le plus grand compact de $\mathbb{C}$ qui est totalement invariant par f.

Proposition 3.1.7. *L'ensemble Ω_∞ est un ouvert connexe totalement invariant qui contient un voisinage de l'infini. La suite (f^n) converge uniformément sur les compacts de Ω_∞ vers l'infini. L'ensemble de Julia rempli $\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$ est compact totalement invariant et est aussi l'ensemble des points d'orbite bornée.*

Démonstration. Soit K l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ d'orbite bornée, i.e. la suite $(f^n(z))$ est bornée. Il n'est pas difficile de voir que $f^{-1}(K) = K = f(K)$. Comme f est de degré $d \geq 2$, il existe une constante $A > 0$ suffisamment grande telle que pour $|z| \geq A$, on a $|f(z)| \geq 2|z|$. Ceci implique que K est compact car c'est l'intersection des compacts $\{z : \ |f^n(z)] \leq A\}$. Si z n'appartient pas à K, son orbite contient des points proches de l'infini et donc elle tend vers l'infini. On en déduit que $K = \mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$. Donc Ω_∞ est ouvert et totalement invariant et elle contient en plus un voisinage de l'infini.

Soit U l'ensemble des points z tels que $|z| > A$. On a $\Omega_\infty = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(U)$. Si L est un compact de Ω_∞, pour n assez grand, on a $f^n(L) \subset U$. Ceci implique que (f^n) converge uniformément sur L vers l'infini.

Il reste à prouver que Ω_∞ est connexe. Notons Ω la composante non-bornée de Ω_∞. C'est un voisinage de l'infini. Comme Ω_∞ est totalement invariant, Ω l'est aussi. On en déduit que $\Omega_\infty \setminus \Omega$ est invariant. Cet ensemble est donc contenu dans K et on constate qu'il est vide. Ceci complète la preuve. □

Exemple 3.1.8. Considérons le polynôme $f(z) = z^d$ avec $d \geq 2$. On a $f^n(z) = z^{d^n}$. Son ensemble de Julia rempli est le disque unité fermé. Le bassin de l'infini est l'ensemble des points z tels que $|z| > 1$. Le point 0 est fixe et super-attractif. Son bassin est le disque unité ouvert. C'est aussi son bassin immédiat. L'ensemble critique de f se réduit à un point $\{0\}$. Le polynôme f admet aussi $d - 1$ points fixes sur le cercle unité. Ils sont tous répulsifs.

3.2 Dynamique locale autour d'un point fixe

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la dynamique autour d'un point fixe. Le problème central ici est de trouver une coordonnée locale complexe dans laquelle le système admet une forme la plus simple possible, e.g. une application linéaire... Une telle forme, si elle existe, s'appelle *forme normale* de l'application au point fixe.

Dans la suite, considérons une application $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ qui est définie et holomorphe au voisinage de 0 et qui envoie 0 en 0, i.e. $f(0) = 0$. On dit que f est *un germe d'application holomorphe. L'itérée d'ordre n de f* est définie par

$$f^n = f \circ \cdots \circ f \qquad (n \text{ fois}).$$

C'est aussi un germe d'application holomorphe. Son domaine de définition peut être plus petit que celui de f. If faut distinguer l'itérée f^n avec la fonction $f(z)^n$ qui est la puissance de d'ordre n de la fonction f.

L'application f admet un développement de Taylor en 0

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = \lambda z + F(z)$$

avec $F(z) = a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$. Si f est définie au voisinage du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ de rayon r alors la formule de Cauchy implique que le coefficient a_n satisfait l'inégalité $|a_n| \leq c r^{-n}$ si $c = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Notons aussi que f admet un inverse $f^{-1} : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ si et seulement si $\lambda \neq 0$. On a dans ce cas,

$$f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z.$$

Définition 3.2.1. On dit que 0 est un point fixe *repulsif* (resp. *attractif, super-attractif, neutre rationnel ou neutre irrationnel*) si $|\lambda| > 1$ (resp. $|\lambda| < 1$, $\lambda = 0$, λ est une racine de l'unité ou $|\lambda| = 1$ mais λ n'est pas une racine de l'unité). On dit que f est *linéarisable* s'il existe un germe d'application holomorphe inversible $h : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tel que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z$.

On a le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 (Koenigs)**.** *Supposons que $|\lambda| \neq 0, 1$. Alors f est linéarisable. Plus précisément, il existe un* **unique** *germe d'application holomorphe inversible $h : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ avec $h'(0) = 1$ tel que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = \lambda z$.*

Pour prouver ce résultat, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.3. *Soient A et t deux constantes strictement positives. Considérons le germe $g : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ défini par*

$$g(z) = z - A(t^2 z^2 + t^3 z^3 + \cdots) = z - A \sum_{n \geq 2} (tz)^n$$

et le développement de Taylor de son inverse

$$g^{-1}(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots .$$

Alors il existe des constantes positives B, s et des polynômes P_n de $n-2$ variables à coefficients positifs tels que $|\alpha_n| \leq Bs^n$ pour $n \geq 1$ et

$$\alpha_2 = At^2, \qquad \alpha_n = P_n(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \quad \textit{pour } n \geq 3.$$

Démonstration. Comme on a déjà vu, l'estimée du type $|\alpha_n| \leq Bs^n$ est en fait vrai pour tout germe d'application holomorphe comme une conséquence de la formule de Cauchy.

On déduit de l'équation $g \circ g^{-1}(z) = z$ l'identité suivante

$$\alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots = A \sum_{n \geq 2} t^n z^n [1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \cdots]^n.$$

En identifiant les coefficients de z^2, on obtient $\alpha_2 = At^2$. Pour cette étape, seul le premier terme de la somme infinie ci-dessus intervient dans le calcul. Ensuite, en identifiant les coefficients de z^3, on obtient $\alpha_3 = 2At^2\alpha_2 + At^3$. Il y a seulement deux termes de la somme infinie qui interviennent dans ce calcul. Une récurrence simple montre l'existence des polynômes P_n satisfaisant le lemme. $\square$

Démonstration du théorème 3.2.2. On cherche un germe $l : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tel que $l^{-1} \circ f \circ l(z) = \lambda z$ et

$$l(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots = z + L(z)$$

avec $L(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$. Le germe $h = l^{-1}$ satisfera le théorème.

L'équation $l^{-1} \circ f \circ l(z) = \lambda z$, qui équivaut à $f \circ l(z) = l(\lambda z)$, s'écrit aussi

$$\lambda l(z) + F(l(z)) = \lambda z + L(\lambda z)$$

ou encore

$$\lambda z + L(\lambda z) - \lambda l(z) = F(l(z)).$$

Sous forme de séries entières, elle est équivalente à

$$\sum_{n \geq 2} b_n (\lambda^n - \lambda) z^n = \sum_{n \geq 2} a_n (z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots)^n.$$

Comme dans le lemme précédent, on déduit qu'il existe des polynômes Q_n tels que la dernière équation est *formellement* équivalente à

$$b_2 = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda} \quad \text{et} \quad b_n = Q_n(b_2, \ldots, b_{n-1}) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

La vraie équivalence exige en plus que pour les b_n obtenus par les dernières relations la série définissant $l(z)$ converge au voisinage de 0. Cependant, on déduit déjà que si $l(z)$ existe, il est unique. Il reste à montrer la convergence de la série définissant $l(z)$.

Comme $|\lambda| \neq 0, 1$, on peut trouver des constantes strictement positives A, t telles que

$$|\lambda^n - \lambda| \geq A^{-1/2} \quad \text{et} \quad |a_n| \leq A^{1/2} t^n \quad \text{pour } n \geq 2.$$

En regardant étape par étape dans la construction de P_n et Q_n, on voit que les coefficients de Q_n sont de module plus petit que les coefficients correspondants de P_n. On en déduit que $|b_n| \leq \alpha_n$. La convergence de $l(z)$ est alors une conséquence des estimées $|\alpha_n| \leq Bs^n$ fournies par le lemme 3.2.3. □

Considérons maintenant le cas d'un point super-attractif, i.e. $\lambda = 0$. On change un peu les notations et écrit

$$f(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p+1} + \cdots = z^p[a_0 + a_1 z + \cdots] = z^p[a_0 + F(z)]$$

avec $p \geq 2$, $a_0 \neq 0$ et $F(z) = a_1 z + \cdots$.

Théorème 3.2.4 (Böttcher)**.** *Il existe un germe d'application holomorphe inversible $h(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tel que $h \circ f \circ h^{-1}(z) = z^p$.*

On a besoin du lemma suivant.

Lemme 3.2.5. *Soit W le disque de centre 1 et de rayon $1/2$. Soit $z^{1/N}$ la branche principale de racine d'ordre N de $z \in W$ avec $N \geq 1$. Alors on a*

$$|z^{1/N} - 1| < \frac{2|z-1|}{N} < \frac{1}{N} \quad \textit{pour } z \in W.$$

Démonstration. On a

$$|(z^{1/N})'| = \frac{1}{N|z|^{1-1/N}} \leq \frac{2^{1-1/N}}{N} < \frac{2}{N}.$$

Le résultat est alors une conséquence du théorème d'accroissement fini. □

Démonstration du théorème 3.2.4. On peut d'abord remplacer f par $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ avec $\varphi(z) = \gamma z$ et $\gamma^{p-1} = a_0$ afin de supposer que $a_0 = 1$. On a alors

$$f(z) = z^p[1 + F(z)].$$

L'idée principale de la preuve est de construire des germes inversibles g_n tels que

$$g_n'(0) = 1 \quad \text{et} \quad [g_n(z)]^{p^{n+1}} = 1 + F(f^n).$$

On montrera ensuite que le produit infini $z \prod_{n \geq 0} g_n$ définit un germe h satisfaisant le théorème.

Soit M et r des constantes positives telles que $|F(z)| \leq M|z|$ quand $|z| \leq r$. Fixons une constante positive ρ plus petite que $r, 1/(2M)$ et $1/4$. Soit $\mathbb{D}$ le disque de centre 0 et de rayon ρ. On construit les fonctions g_n sur $\mathbb{D}$. On a pour $z \in \mathbb{D}$

$$|f(z)| \leq |z|^p(1 + M|z|) \leq |z|\rho^{p-1}(1 + M\rho) < |z|/2.$$

Donc f envoies $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. On obtient en plus par récurrence que

$$|f^n(z)| < |z|/2^n \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

On en déduit que

$$|F(f^n(z))| \leq M|z|/2^n < 1/2 \quad \text{sur } \mathbb{D}.$$

D'après le lemme 3.2.5, on peut définir une fonction holomorphe g_n sur $\mathbb{D}$ telle que

$$g_n(z)^{p^{n+1}} = 1 + F(f^n(z)) \quad \text{et} \quad |g_n(z) - 1| \leq 2/p^{n+1}.$$

Cette estimée implique que les produits

$$h_n(z) := zg_0(z) \ldots g_n(z) = z + \mathrm{o}(z)$$

convergent uniformément sur $\mathbb{D}$ vers une fonction holomorphe h. Comme $h_n(0) = 0$ et $h_n'(0) = 1$, on a aussi $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$. De plus, on a

$$[g_n(f(z))]^{p^{n+1}} = 1 + F(f^{n+1}(z)) = [g_{n+1}(z)]^{p^{n+2}} = [g_{n+1}(z)^p]^{p^{n+1}}.$$

Donc $g_n(f(z)) = g_{n+1}(z)^p$ et en utilisant la définition de $g_0(z)$ on obtient

$$h_n(f(z)) = f(z)g_0(f(z)) \ldots g_n(f(z)) = f(z)[g_1(z) \ldots g_{n+1}(z)]^p = h_{n+1}(z)^p.$$

En prenant $n \to \infty$, on a

$$h(f(z)) = h(z)^p.$$

Ceci complète la preuve du théorème. □

Considérons maintenant le cas d'un point fixe neutre irrationnel. Dans ce cas, il existe des exemples de germes qui ne sont pas linéalisables. Nous avons le théorème suivant qui se démontre avec une idée similaire que celle utilisée dans le dernier théorème.

Théorème 3.2.6 (Siegel). *Supposons que $|\lambda| = 1$ et que λ n'est pas une racine de l'unité. Supposons en plus qu'il existe des constantes strictement positives c et k telles que $|\lambda^n - 1| \geq cn^{-k}$ pourtout $n \geq 1$. Alors f est linéalisable.*

Ce résultat s'applique pour presque tout germe d'application holomorphe avec un point fixe neutre irrationnel. En effet, on a la propriété suivante.

Proposition 3.2.7. *Pour tout $k > 2$, l'ensemble des λ sur le cercle unité vérifiant*

$$\liminf_{n\to\infty} n^k|\lambda^n - 1| = 0$$

est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, notons $E_{m,n}$ l'ensemble des λ sur le cercle unité tels que $n^k|\lambda^n - 1| \leq 1/m$. Cette ensemble est de mesure de Lebesque au plus $Am^{-1}n^{1-k}$ où $A > 0$ est une constante indépendante de m et de n. Pour tout entier $N \geq 1$, la réunion $\cup_{n\geq N} E_{m,n}$ est de mesure au plus $A'm^{-1}N^{2-k}$ où $A' > 0$ est une constante. L'ensemble des λ qui ne vérifient pas la propriété dans le proposition est égale à

$$\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} E_{m,n}.$$

Il est clair que cet ensemble est de mesure nulle lorsque $k > 2$. $\square$

Le dernier cas à considérer est celui d'un point neutre rationnel. Cette situation a été étudiée par Léau. Quitte à remplacer f par une itérée, on se rammène au cas où $\lambda = 1$. On a donc

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$$

Supposons que $f(z) \neq z$, i.e. il y a au moins un coefficient a_n qui est non nul. Il est clair que dans ce cas f n'est pas linéalisable.

Lemme 3.2.8. *Il existe un entier $p \geq 1$ et un germe d'application holomorphe inversible $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ tel que*

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = z - z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{2p+1}).$$

Démonstration. L'entier p est le plus grand qui vérifie $f(z) - z = \mathrm{O}(z^{p+1})$. La dernière propriété est invariante par changement de coordonnée. On a donc $a_2 = \cdots = a_p = 0$ et $a_{p+1} \neq 0$. En utilisant le changement de coordonnée $z \mapsto \gamma z$ avec γ convenable, on peut supposer que $a_{p+1} = -1$.

Soit $2 \leq q \leq p$ un entier. Supposons que $a_{p+2} = \cdots = a_{p+q-1} = 0$. On montre qu'il existe un polynôme

$$l(z) = \varphi^{-1}(z) = z + bz^q$$

tel que

$$l^{-1} \circ f \circ l(z) = z - z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{p+q+1}).$$

La dernière équation est équivalente à

$$f(l(z)) = l(z - z^{p+1}) + \mathrm{O}(z^{p+q+1})$$

ou encore

$$l(z) - l(z)^{p+1} + a_{p+q} l(z)^{p+q} = l(z - z^{p+1}) + \mathrm{O}(z^{p+q+1}).$$

En identifiant les coefficient, on voit qu'il suffit de prendre

$$b = \frac{a_{p+q}}{p+1-q}.$$

Ceci complète la preuve du lemme. $\square$

A partir de maintenant, on suppose que

$$f(z) = z - z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{2p+1}).$$

Considérons la fonction $\sigma(z) = z^{-p}$. Définissons pour $t > 0$

$$\widetilde{\Pi}(t) := \{z = x + iy,\ 2tx + t^2y^2 > 1\}.$$

En utilisant les coordonnées polaires (r, θ), on peut montrer que l'image réciproque de ce dernier ouvert par σ est la réunion de p domaines

$$\Pi_k(t) := \{re^{i\theta},\ r^p < t(1 + \cos(p\theta)),\ |2k\pi/p - \theta| < \pi/p\}$$

pour $k = 0, \ldots, p-1$.

Définition 3.2.9. On dit que $\Pi_k(t)$ est *un pétale* et que la demi-droite réelle $\{re^{2k\pi i/p},\ r > 0\}$ est *l'axe* de $\Pi_k(t)$.

Nous avons le théorème suivant qui décrit la dynamique de f près du point fixe.

Théorème 3.2.10 (théorème du pétale)**.** *Supposons que*

$$f(z) = z - z^{p+1} + \mathrm{O}(z^{2p+1}).$$

Alors pour t suffisament petit

1. *f envoies $\Pi_k(t)$ dans lui-même ;*
2. *f^n converge vers 0 uniformément sur $\Pi_k(t)$;*
3. *$\arg(f^n)$ converge vers $2k\pi/p$ uniformément sur $\Pi_k(t)$;*
4. *$|f(z)| < |z|$ sur un voisinage de l'axe de $\Pi_k(t)$;*
5. *$f : \Pi_k(t) \to \Pi_k(t)$ est conjugué à la translation $z \mapsto z + p$.*

Nous allons considérer seulement le cas $k = 0$. Les autres cas se démontrent de la même manière ou se ramène au premier cas en utilisant un changement de coordonnée. Nous considérons seulement les t suffisament petits.

Notons σ^{-1} la branche inverse de σ qui est une bijection holomorphe entre $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et le secteur angulaire $S = \{re^{i\theta},\ |\theta| < \pi/p\}$. Soit g la fonction

$$g(w) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}(w).$$

Lemme 3.2.11. *La fonction g est définie sur le domaine $\widetilde{\Pi}(t)$ et à valeurs dans le même domaine. De plus, il existe des constantes positives A et B indépendantes de t telles que*

$$g(w) = w + p + A/w + \gamma(w) \quad \textit{and} \quad |\gamma(w)| \le B/|w|^{1+1/p}.$$

En particulier, on a $|g(w)| > |w|$ sur un voisinage de $\widetilde{\Pi}(t) \cap \mathbb{R}$ et $\mathrm{Re}(g^n) \to +\infty$, $\mathrm{Im}(g^n)/\mathrm{Re}(g^n) \to 0$ sur $\widetilde{\Pi}(t)$.

Démonstration. Le développement limité de g est déduit facilement de celui de f. Considérons un point w dans $\widetilde{\Pi}(t)$. Comme t est petit, $|w|$ est grand. On obtient sans difficulté que $g(w)$ appartient aussi à $\widetilde{\Pi}(t)$. De plus, $\mathrm{Re}(g(w)) - \mathrm{Re}(w) \ge p-1$. Donc $\mathrm{Re}(g^n(w)) \ge (p-1)(n-1) + \mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Re}(g^n) \to +\infty$ sur $\widetilde{\Pi}(t)$.

Si $\mathrm{Im}(w)$ est petit, $\mathrm{Re}(w)$ est un grand nombre positif et le développement de g montre aussi que $|g(w)| > |w|$. Par conséquent, cette inégalité est vraie au voisinage de $\widetilde{\Pi}(t) \cap \mathbb{R}$.

Finalement, observons que

$$|\mathrm{Im}(g(w)) - \mathrm{Im}(w)| \le \frac{A+B}{|w|}.$$

Cette inégalité appliquée à $g^j(w)$ à la place de w avec $j = 1, \dots n-1$, combinée avec l'estimée obtenue ci-dessus pour $\mathrm{Re}(g^n(w))$, implique que $\mathrm{Im}(g^n(w)) = \mathrm{O}(\log n)$. La dernière assertion dans le lemme s'en déduit. □

Lemme 3.2.12. *Soit K un compact de $\widetilde{\Pi}(t)$. Alors il existe des constantes $C_i > 0$ telles que pour $w \in K$ et $n \ge 2$, on a*

1. $|g^n(w)| \ge C_1 n$ *and* $|\gamma(g^n(w))| \le C_2 n^{-1-1/p}$ *;*
2. $|g^n(w) - np| \le C_3 \log n$ *;*
3. $|1/g^n(w) - 1/(np)| \le C_4 \log n / n^2$.

Démonstration. 1. La première estimée est une conséquence de celle obtenue pour $\mathrm{Re}(g^n(w))$ dans le lemme précédent. On utilise ici le fait que $\mathrm{Re}(w)$ est minorée par une constante car K est compact. La deuxième s'en déduit.

2. On a d'après le développement de g

$$|(g(w)) - w - p| \le \frac{A+B}{|w|}$$

donc

$$|\mathrm{Im}(g^n(w)) - \mathrm{Im}(g^{n-1}(w))| \le \frac{A+B}{C_1 n}.$$

On obtient le résultat en appliquant cette inégalité à $g^j(w)$ à la place de w pour $j = 1, \dots, n-1$.

3. C'est une conséquence directe des deux premières assertions. □

Fin de la démonstration du théorème 3.2.10. Les quatres premières assertions sont déduites facilement du lemme 3.2.11. On montre la dernière assertion.

Posons

$$u_n(w) = g^n(w) - np - (A/p)\log n.$$

Un calcul direct donne

$$u_{n+1}(w) + p = u_n(g(w)) - (A/p)\log(1 + 1/n)$$

et donc

$$\begin{aligned} u_{n+1}(w) - u_n(w) &= u_n(g(w)) - u_n(w) - p - (A/p)\log(1 + 1/n) \\ &= g^{n+1}(w) - g^n(w) - p - (A/p)\log(1 + 1/n) \\ &= g(g^n(w)) - g^n(w) - p - (A/p)\log(1 + 1/n) \\ &= A[1/g^n(w) - 1/(np)] + \gamma(g^n(w)) + (A/p)[1/n - \log(1 + 1/n)]. \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.2.12, u_n converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe u sur $\widetilde{\Pi}(t)$. L'identité ci-dessus sur $u_{n+1}(w)$ implique que

$$u(w) + p = u(g(w)).$$

On en déduit que g est conjuguée à la translation $w \mapsto w+p$. Comme la restriction de f sur $\Pi_0(t)$ est conjuguée à g, ceci complète la preuve du théorème. □

Remarque 3.2.13. Supposons que λ est une racine de l'unité et notons k son ordre minimal. On construit pour f^k les p pétales comme ci-dessus et on peut vérifier que p est un multiple de k. L'application f envoie la pétale $\Pi_i(t)$ dans la pétale $\Pi_{i+p/k}(t)$.

3.3 Ensembles de Julia et de Fatou

Dans ce paragraphe, nous introduisons l'ensemble de Julia et l'ensemble de Fatou pour un polynôme. Ce sont des objets fondamentaux de la théorie d'itération complexe. Nous donnons le classement des composantes de Fatou. Les propriétés de l'ensemble de Julia seront discutées dans les paragraphes suivants. Pour simplicité, nous traitons d'abord le cas des polynômes et nous donnerons plus tard des commentaires sur le cas des fractions rationnelles.

Rappelons la notion de famille normale de fonctions holomorphes. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Considérons une famille $\mathscr{F}$ de fonctions holomorphes sur D.

Définition 3.3.1. La famille $\mathscr{F}$ est *normale* si elle est relativement compacte dans le sens suivant : pour toute suite $(f_n) \subset \mathscr{F}$ on peut extraire une sous-suite (f_{n_i}) qui converge localement uniformément sur D soit vers ∞ soit vers une fonction holomorphe.

Considérons un polynôme complexe f de degré d. On suppose que $d \geq 2$ car la dynamique d'un polynôme de degré ≤ 1 est facile à décrire.

Définition 3.3.2. *L'ensemble de Fatou* de f est l'ensemble F des points a tels que la famille (f^n) soit normale dans un voisinage de a. *L'ensemble de Julia* J est le complémentaire de l'ensemble de Fatou, i.e. $J = \mathbb{C} \setminus F$.

Autrement dit, F est le plus grand ouvert où (f^n) est normale. Par définition, le comportement de la suite (f^n) est dans un certain sens stable sur F et chaotique sur J. Comme $d \geq 2$, on a $|f(z)| \geq 2|z|$ si $|z|$ est assez grand. On en déduit que F contient un voisinage de l'infini et donc J est compact dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.3.3. *Soit $p \geq 1$ un entier. Soit Ω_∞ le bassin de l'infini. Alors*

1. *F et J sont totalement invariants, i.e. $f^{-1}(F) = F$ et $f^{-1}(J) = J$; En particulier, F et J sont invariants, i.e. $f(F) = F$ et $f(J) = J$;*
2. *L'ensemble de Fatou l'ensemble de Julia de f^p sont égaux à ceux de f pour tout $p \geq 1$;*
3. *J est le bord de Ω_∞ et F est la réunion de Ω_∞ et $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_\infty$.*

Démonstration. 1. Il est clair que (f^n) est normale sur $f^{-1}(F)$. Donc $f^{-1}(F) \subset F$. D'autre part, comme (f^{n+1}) est normale sur F, (f^n) est normale sur $f(F)$. D'où $f(F) \subset F$. On en déduit que $F \subset f^{-1}(F)$. On obtient donc $f^{-1}(F) = F$ ce qui implique aussi $f^{-1}(J) = J$. En considérant les images de ces ensembles par f, on obtient $F = f(F)$ et $J = f(J)$.

2. Il suffit de montrer que l'ensemble de Fatou F' de f^p est égal à F. Il est clair que $F \subset F'$. Comme (f^{pn}) est normale sur F', on déduit que (f^{pn+q}) est aussi normale sur F' pour tout entier $q \geq 0$ fixé. Par conséquent, (f^n) est normale sur F' et donc $F' \subset F$. On constate que $F = F'$ et aussi un similaire identité pour les ensembles de Julia.

3. D'après la proposition 3.1.7, Ω_∞ est contenu dans F et l'ensemble de Julia rempli $K = \mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$ est un compact invariant. Il suffit de montrer que J est le bord de K car c'est aussi le bord de Ω_∞.

Si U est un ouvert qui rencontre bK, il contient des points d'orbite bornée et aussi des points d'orbite non-bornée. On déduit que (f^n) n'est pas normale sur U et donc $bK \subset J$. Soit V un ouvert contenu dans K. Il reste à prouver que (f^n) est normale sur V. La restriction de f^n à V est à valeurs dans K. C'est donc une fonction holomorphe bornée. D'après la formule de Cauchy, les suites de fonctions holomorphes uniformément bornées sont normales. On conclut que (f^n) est normale sur V. Ceci termine la preuve. □

L'un des résultats les plus importants dans la théorie de Julia-Fatou est le théorème de Sullivan qui dit qu'aucune composante (connexe) de Fatou est errante. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.4 (Sullivan). *Soit Ω une composante de Fatou. Alors Ω est prépériodique, i.e. il existe des entiers positifs $p < q$ tels que $f^p(\Omega) = f^q(\Omega)$. En particulier, $f^p(\Omega)$ est périodique de période $q-p$.*

Démonstration abrégée. Nous donnons ici l'idée principale de la preuve du théorème ci-dessus. Supposons qu'il existe une composante de Fatou errante Ω et on cherche une contradiction. Observons que les composantes de Fatou

$$\Omega, f(\Omega), f^2(\Omega), \ldots$$

sont deux à deux disjointes. Comme f a seulement un nombre fini de points critiques, en remplaçant Ω par $f^p(\Omega)$ pour p suffisamment grand on peut supposer que $f^n(\Omega)$ ne contient pas de point critique pour tout n. Donc, f définit une application bi-holomorphe entre $f^n(\Omega)$ et $f^{n+1}(\Omega)$.

Considérons une fonction lisse μ à support compact dans Ω. On prolonge μ à $\widetilde{\Omega} := \cup_{n,m\in\mathbb{N}} f^{-n}(f^m(\Omega))$ par

$$\mu(f(z)) := [f'(z)/\overline{f'(z)}]\mu(z).$$

On définit aussi $\mu = 0$ en dehors de $\widetilde{\Omega}$. On choisit μ suffisamment petit afin d'appliquer le théorème suivant sur l'équation de Beltrami.

Théorème 3.3.5 (Ahlfors-Bers). *Supposons que $|\mu| < 1$. Alors il existe un homéomorphisme lipschitzien $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $\varphi(z) - z \to 0$ quand $|z| \to +\infty$ et*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}} = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

presque partout $\mathbb{C}$.

Bien sûr, quand $\mu = 0$ on obtient $\varphi(z) = z$. En général, φ est holomorphe en dehors du support de μ. Cependant, comme μ satisfait

$$\mu(f(z)) = [f'(z)/\overline{f'(z)}]\mu(z)$$

on peut prouver que $f_\mu := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe. Donc f_μ est conjugué à f par φ. En particulier, les fibres génériques de f_μ contiennent exactement d points comme c'est le cas pour f. En en déduit que f_μ est un polynôme de degré d. Nous avons construit une application $\mu \mapsto f_\mu$. La contradiction vient du fait que l'ensemble des μ est un espace de dimension infinie pendant que l'ensemble des polynômes de degré d est de dimension finie. La preuve complète contient quelques détails techniques. □

Dans la suite, nous présentons le classement des composantes de Fatou périodiques. Pour la simplicité, on ne considère que les composantes invariantes car on se ramène toujours à ce cas en remplaçant f par une itérée.

Définition 3.3.6. Une composante de Fatou invariante Ω est

1a. *un bassin attractif* si elle est le bassin immédiat d'un point fixe attractif.

1b. *un bassin super-attractif* si elle est le bassin immédiat d'un point fixe super-attractif.

2. *une composante parabolique ou composante de Leau* si elle contient un pétale associé à un point fixe neutre rationnel.

3. *un disque de Siegel* si la restriction de f à Ω est conjuguée à une rotation sur un disque ; en particulier Ω est simplement connexe et f admet un point fixe neutre irrationnel dans Ω.

D'après la proposition 3.1.6, le bassin immédiat d'un point périodique attractif est toujours contenu dans l'ensemble de Fatou. Il n'est pas difficile de montrer que c'est une composante de Fatou. D'après le théorème 3.2.10, tout pétale est contenu dans l'ensemble de Fatou. Enfin, par définition, les domaines sur lesquels f est conjugué à une rotation est aussi contenu dans l'ensemble de Fatou. Nous allons voir que la liste ci-dessus de composantes de Fatou invariantes est complète.

Proposition 3.3.7. *Soit Ω une composante de Fatou invariante. Supposons que (f^n) admet une sous-suite qui converge localement uniformément sur Ω vers une fonction non-constante. Alors*

1. *$f : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme de Ω, i.e. une application holomorphe bijective.*
2. *Si une suite (f^{n_i}) converge localement uniformément sur Ω vers une fonction φ alors φ est aussi un automorphisme de Ω.*
3. *Il existe une suite (f^{n_i}) qui converge localement uniformément sur Ω vers l'identité.*

Démonstration. Soit (k_i) une suite croissante d'entiers telle que (f^{k_i}) converge localement uniformément sur Ω vers une fonction non-constante ψ. Comme ψ est ouverte, le théorème de Rouché implique que toute valeur dans $\psi(\Omega)$ appartient à $f^{k_i}(\Omega)$ quand i est suffisamment grand.

En remplaçant (k_i) par une sous-suite, on peut supposer que la suite $l_i := k_{i+1} - k_i$ est strictement croissante. On a $f^{k_{i+1}} = f^{l_i} \circ f^{k_i}$. On en déduit que si h est une limite de (f^{l_i}) sur Ω alors $\psi = h \circ \psi$. Donc, h est identité sur $\psi(\Omega)$ qui est un ouvert. Par théorème d'unicité, h est identité sur Ω. On a donc montré que f^{l_i} converge localement uniformément sur Ω vers l'identité.

Soit (m_i) une sous-suite de (l_i) telle que $n_i < m_i$. Si g est une fonction limite de $(f^{m_i-n_i})$, comme ci-dessus, en utilisant $f^{m_i-n_i} \circ f^{n_i} = f^{m_i}$, on déduit que $g \circ \varphi$ est idetité sur Ω. Donc, φ est inversible. On constate que c'est un automorphisme de Ω. Ceci est vrai en particulier pour $n_i = 1$. On obtient que $f : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme. □

Le résultat suivant donne des critères pour qu'un point fixe neutre irrationnel soit dans l'ensemble de Fatou.

Théorème 3.3.8. *Soit p un point fixe neutre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *p appartient à l'ensemble de Fatou.*
2. *f est linéalisable en p.*
3. *p est le centre d'un disque de Siegel ; en particulier p est irrationnel.*

Démonstration. En utilisant un changement de coordonnée, on peut supposer $p = 0$. Posons $\lambda := f'(0)$. Il est clair que (3) implique (1). Montrons que (2) implique (1). Comme f est linéalisable en 0, pour une coordonnée locale convenable w s'annulant en 0, on a $f(w) = \lambda w$. Donc, $f^n(w) = \lambda^n w$. Comme $|\lambda| = 1$, la famille (f^n) est normale au voisinage de 0 et donc 0 appartient à l'ensemble de Fatou.

Il reste à montrer que (1) implique (3). Comme $|(f^n)'(0)| = |\lambda^n| = 1$, les fonctions limites de (f^n) sur Ω ne sont pas constantes. Soit Ω la composante de Fatou contenant 0. La proposition 3.3.7 implique que $f : \Omega \to \Omega$ est un automorphisme.

Comme Ω est une composante de Fatou, elle est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_\infty$. On en déduit que Ω est simplement connexe. D'après le théorème de Riemann, il existe une application bi-holomorphe σ de Ω au disque unité $\mathbb{D}$ telle que $\sigma(0) = 0$. Posons $g = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$. Alors g est un automorphisme de $\mathbb{D}$ tel que $g(0) = 0$ et $g'(0) = \lambda$. Donc, $g(z) = \lambda z$. Ceci termine la preuve du théorème. □

Pour les autres composantes de Fatou invariantes, on est dans la situation suivante.

Proposition 3.3.9. *Soit Ω une composante de Fatou invariante et bornée. Supposons qu'il y a une suite (f^{n_i}) qui converge localement uniformément sur Ω vers une constante p. Alors p est un point fixe et (f^n) converge localement uniformément sur Ω vers p.*

Démonstration. Soit z un point de Ω. Comme $f^n(z)$ converge vers p, $f^{n+1}(z)$ converge vers $f(p)$. D'autre part, $f(z)$ est aussi un point de Ω. Donc $f^n(f(z))$ converge aussi vers p. On constate que $f(p) = p$ et donc p est un point fixe. D'après la proposition 3.3.7, toute fonction limite de (f^n) sur Ω est une constante fixée par f.

Soient $p_1, \ldots, p_m$ les points fixes de f. Choisissons des voisinages V_i de p_i qui sont disjoints et que $f(V_i) \cap V_j = \varnothing$ pour $i \neq j$. Soit K un compact connexe de Ω. On a montré que $f^n(K)$ est contenu dans $\cup V_i$ si n est suffisamment grand. Le choix de V_i implique que $f^n(K)$ appartient à un seul V_i. On constate que $f^n(K)$ converge vers p_i. Ceci termine la preuve de la proposition. □

On a finalement le classement suivant des composantes de Fatou invariants. Notons que Ω_∞ peut être vu comme le bassin immédiat de l'infini, un point fixe super-attractif.

Théorème 3.3.10 (Fatou-Cremer)**.** *Toute composante de Fatou invariante bornée appartient à la liste décrite dans la définition 3.3.6.*

Rappelons quelques propriétés des automorphismes du disque unité que nous avons besoin.

Lemme 3.3.11. *Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. Si g est un automorphisme n'ayant pas de point fixe dans $\mathbb{D}$, g^n converge localement uniformément vers une constante de module* 1*. Si g a un point fixe non attractif dans $\mathbb{D}$, alors g est un automorphisme de $\mathbb{D}$ et admet un seul point fixe dans $\mathbb{D}$ qui est neutre.*

Démonstration du théorème 3.3.10. Soit Ω une composante de Fatou invariante et bornée. Comme c'est une composante de $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_\infty$, il est simplement connexe. Considérons d'abord le cas où (f^n) admet une fonction limite non-constante sur Ω. D'après la proposition 3.3.7 et le lemme 3.3.11, f admet un point fixe neutre dans Ω. Comme $f^n \neq \mathrm{id}$, c'est un point fixe neutre irrationnel. D'après le théorème 3.3.8, Ω est un disque de Siegel.

Supposons maintenant que toutes les fonctions limites de (f^n) sur Ω sont constantes. D'après la proposition 3.3.9, (f^n) converge localement uniformément sur les compacts vers un point fixe p. D'après le théorème 3.2.2, p n'est pas un point répulsif. Si p est attractif, alors Ω est contenu dans le bassin immédiat de p. Comme ce bassin est contenu dans l'ensemble de Fatou, on déduit que Ω est égal au bassin immédiat de p. Supposons maintenant que p est un point neutre. Comme (f^n) converge vers une constante, d'après le théorème 3.3.8, p est dans l'ensemble de Julia. Il appartient donc au bord de Ω.

Il reste à montrer que p est un point neutre rationnel et que Ω est un domaine de Leau. Pour simplicité, on peut supposer $p = 0$. Donc 0 est un point au bord de Ω. Observons que f est injectif au voisinage de 0.

Considérons un point a dans Ω. Comme f^n converge vers 0 sur Ω, en remplaçant a par $f^k(a)$, avec k assez grand, on peut supposer que $f^n(a)$ est proche de 0 pour tout $n \geq 0$. De plus, on peut trouver un ouvert connexe D contenant a et $f(a)$ tel que f^n soit injectif sur D pour tout n.

Posons $D' := D \cup f(D) \cup f^2(D) \cup \ldots$. C'est un ouvert connexe et on a $f(D') \subset D'$. Comme $f^n(a) \neq 0$ pour tout n, on peut définir sur D' les fonctions holomorphes suivantes

$$g_n(z) := \frac{f^n(z)}{f^n(a)}.$$

Le fait que $f^n : D' \to \Omega$ est injectif implique que $g_n \neq 0, 1, \infty$ sur $D' \setminus \{a\}$. D'après le théorème de Montel 3.3.12 qu'on va rappeler ci-dessous, la famille (g_n) est normale sur $D' \setminus \{a\}$. Considérons une sous-suite (g_{n_i}) convergeant vers une fonction φ sur $D' \setminus \{a\}$. Comme les g_n sont injectives, d'après le théorème de Rouché, si φ n'est pas constante, elle est aussi injective.

Posons $\lambda = f'(0)$. On a donc $\lim_{z\to 0} f(z)/z = \lambda$. On en déduit que g_{n+1}/g_n converge vers 1 sur D' et donc $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$ et $\varphi(f(a)) = \lambda$. On obtient donc $\varphi(f^n(z)) = \lambda^n\varphi(z)$. Il existe des n tels que λ^n est très proche de 1. Pour un tel n, $\varphi(f^n(D))$ contient l'image de $\varphi(D \setminus \{a\})$ par la rotation $z \mapsto \lambda^n z$ qui est très proche de l'identité. On en déduit que φ n'est pas injective et donc elle est constante. On a $\varphi \neq \infty$ car $\varphi(f(a)) = 1$. Donc $\lambda = 1$.

Donc 0 est un point fixe neutre rationnel avec $f'(0) = 1$. On se ramène donc à la situation décrite dans le théorème 3.2.10. Il suffit de montrer que Ω rencontre l'un des pétales $\Pi_k(t)$. En effet, si c'est le cas, Ω contient ce pétale car les pétales sont contenus dans l'ensemble de Fatou. Supposons que ce n'est pas le cas. Fixons une constante $\epsilon > 0$ assez petit. Notons $\mathbb{D}_\epsilon$ le disque de centre 0 et de rayon ϵ. On a $f(\mathbb{D}_\epsilon) \subset f(\mathbb{D}_{2\epsilon})$. Avec la description locale de f comme dans le théorème 3.2.10, on voit que si $z \in \mathbb{D}_{2\epsilon} \setminus \{0\}$ n'appartient pas à la réunion Π des pétales, on a $|f(z)| > |z|$. Si $z \in \Omega$, son orbite converge vers 0 et rencontre nécessairement Π. D'où le résultat. $\square$

Rappelons le théorème de Montel qu'on a utilisé ci-dessus.

Théorème 3.3.12 (Montel). *Soient a, b deux points distincts de $\mathbb{C}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors la famille des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ est normale.*

En résumant, si a est un point dans l'ensemble de Fatou, d'après le théorème de Sullivan, l'orbite de a rencontre une composante de Fatou périodique Ω. Pour n assez grand, $f^n(a)$ appartient à l'orbite de Ω qui est un cycle de composantes de Fatou. La dynamique sur ces composantes est décrite ci-dessus. Sur l'ensemble de Julia, l'orbite d'un point dépend sensiblement du point. On ne peut pas avoir une description dynamique aussi claire que dans le cas de l'ensemble de Fatou. L'étude de l'ensemble de Julia nécessite d'autres approches et conceptes qui seront introduits dans les paragraphes suivants.

3.4 Mesure d'équilibre et propriétés ergodiques

Le but de ce paragraphe est de construire une mesure de probabilité canonique μ totallement invariante par f dont le support est égal à l'ensemble de Julia J. On étudiera aussi quelques propriétés ergodiques de cette mesure. Nous avons besoin d'introduire des notions de base.

Comme f définit une application propre de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on peut définir l'opérateur image directe f_* sur les courants et en particulier sur les mesures. Soit ν une mesure positive à support compact dans $\mathbb{C}$. La mesure $f_*(\nu)$ est définie de manière suivante

$$\langle f_*(\nu), \varphi\rangle = \langle \nu, \varphi \circ f\rangle \quad \text{pour } \varphi \text{ continue sur } \mathbb{C}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $f_*(\nu)$ est aussi une mesure positive à support compact et si B est un ensemble borélien dans $\mathbb{C}$ on a

$$f_*(\nu)(B) = \nu(f^{-1}(B)).$$

En particulier, ν et $f_*(\nu)$ ont la même masse.

Définition 3.4.1. On dit qu'une mesure positive ν à support compact dans $\mathbb{C}$ est *invariante* si $f_*(\nu) = \nu$.

Si ν est une telle mesure, on vérifie sans peine que son support est un compact invariant par f. On en déduit que ν est portée par l'ensemble de Julia rempli de f. Si $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ est un cycle périodique, alors la mesure de probabilité équidistribuée sur ce cycle

$$\frac{1}{m}(\delta_{a_0} + \cdots + \delta_{a_{m-1}})$$

est invariante.

Proposition 3.4.2. *Soit K un compact non-vide de $\mathbb{C}$ invariant par f. Alors l'ensemble $\mathscr{M}(K)$ des mesures de probabilité invariantes à support dans K est convexe et non-vide.*

Démonstration. Rappelons que l'ensemble des mesures de probabilité sur K est un compact convexe non-vide. Considérons maintenant les mesures invariantes. Si ν_1 et ν_2 sont des mesures de probabilité invariantes alors $(\nu_1+\nu_2)/2$ l'est aussi. Donc $\mathscr{M}(K)$ est convexe. Si ν_n converge vers ν, comme f_* est continue, $f_*(\nu_n)$ converge vers $f_*(\nu)$. Si les ν_n sont invariantes, $f_*(\nu_n) = \nu_n$ converge aussi vers ν et donc $\nu = f_*(\nu)$. On en déduit que $\mathscr{M}(K)$ est compact.

Il reste à montrer que $\mathscr{M}(K)$ est non-vide. Soit ν une mesure de probabilité supportée par K. Comme K est invariant, les mesures $(f^n)_*(\nu)$ sont aussi des probabilités sur K. Considérons les moyennes de Cesàro

$$\nu_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(f^n)_*(\nu).$$

Ce sont aussi des probabilités sur K. Considérons une sous-suite (ν_{N_i}) convergeant vers une mesure ν'. On a

$$f_*(\nu_{N_i}) - \nu_{N_i} = \frac{1}{N_i}\big[(f^{N_i})_*(\nu) - \nu\big]$$

qui converge vers 0 car $(f^{N_i})_*(\nu)$ et ν sont de masse 1. On en déduit que $f_*(\nu') = \nu'$ et que ν' est un élément de $\mathscr{M}(K)$. $\square$

Notons $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité invariantes à support compact. Rappelons qu'elles sont supportées par l'ensemble de Julia rempli de f. Cet ensemble est non-vide car il contient les points fixes de f. Donc $\mathscr{M}$ est un convexe compact non-vide.

Définition 3.4.3. Une mesure dans $\mathscr{M}$ est *ergodique* si elle est extrémale dans $\mathscr{M}$, i.e. si $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$ avec ν_1 et ν_2 dans $\mathscr{M}$, alors $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Proposition 3.4.4. *Soit ν une mesure dans $\mathscr{M}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *ν est ergodique.*
2. *$\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = 1$ pour tout borélien totalement invariant B.*
3. *Pour tous boréliens A et B, on a*
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \nu(f^{-n}(A) \cap B) = \nu(A)\nu(B).$$
4. *Toute fonction φ dans $L^1(\nu)$ (resp. dans $L^2(\nu)$, $L^\infty(\nu)$ ou mesurable) vérifiant $\varphi \circ f = \varphi$ ν-presque partout, est constante ν-presque partout.*
5. *Pour toutes fonctions φ et ψ dans $L^2(\nu)$ (resp. bornées, continues ou lisses) on a*
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int (\varphi \circ f^n)\psi d\nu = \Big(\int \varphi d\nu\Big)\Big(\int \psi d\nu\Big).$$

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) On a $\nu = \nu' + \nu''$ où ν' et ν'' sont les restrictions de ν à B et $\mathbb{C} \setminus B$ respectivement. Comme B est totalement invariant, ν' et ν'' sont invariantes. On déduit de l'ergodicité de ν que ν' et ν'' sont proportionnelles à ν. Comme $\nu' = \mathbf{1}_B\nu$, $\mathbf{1}_B$ est constante ν-presque partout. Cette constante doit être 0 ou 1. On constate que $\nu' = 0$ ou $\nu' = \nu$. Donc $\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = 1$.

2) $\Rightarrow$ 4) Pour toutes constantes c_1, c_2 et pour $B = \{c_1 \leq \varphi \leq c_2\}$, l'ensemble $f^{-1}(B)\Delta B$ est de mesure 0. Posons B' l'intersection des $f^n(B)$ avec $n \in \mathbb{Z}$. C'est un ensemble totalement invariant. Il diffère de B d'un ensemble de mesure nulle. On a $\nu(B') = 0$ ou 1. Donc $\nu(B) = 0$ ou 1. Ceci est vrai pour tout c. On constate que φ est constante ν-presque partout.

3) $\Rightarrow$ 5) Observons que l'opérateur
$$\varphi \mapsto \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi \circ f^n$$
est de norme 1 dans $L^2(\nu)$. Comme les fonctions L^2 peuvent être approximées par des fonctions en escalier, on peut approximer φ et ψ par des combinaisons

linéaires des fonctions indicatrices de la forme $\mathbf{1}_A$ ou $\mathbf{1}_B$. On voit que 5) est une conséquence de 3).

3) $\Rightarrow$ 5) Il suffit d'approximer $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$ par φ et ψ respectivement.

4) $\Rightarrow$ 5) On peut supposer que φ et ψ sont bornées car on peut les approximer dans $L^2(\nu)$ par des fonctions bornées. Considérons une limite faible Φ dans $L^2(\nu)$ de la suite

$$\varphi_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi\circ f^n.$$

Comme $\varphi_N\circ f - \varphi_N$ tend vers 0 dans $L^2(\nu)$, on a $\Phi\circ f = \Phi$ ν-presque partout. Donc Φ est constante. D'autre part, comme ν est invariante, on a

$$\langle\nu,\varphi_N\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle\nu,\varphi\circ f^n\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\langle\nu,\varphi\rangle = \langle\nu,\varphi\rangle.$$

On déduit que $\Phi = \langle\nu,\varphi\rangle$ ν-presque partout. Donc φ_N converge vers $\langle\nu,\varphi\rangle$ faiblement dans $L^2(\nu)$. D'où la propriété 5).

5) $\Rightarrow$ 1) Soit ν' une mesure positive invariante plus petite que ν. Il suffit de montrer que ν' est proportionnelle à ν. On peut écrire $\nu' = \psi\nu$ où ψ est une fonction dans $L^1(\nu)$. Comme ν' est invariante, on a pour toute fonction bornée φ

$$\int(\varphi\circ f^n)\psi d\nu = \int\varphi\psi d\nu.$$

Ceci et la propriété 5) impliquent que

$$\int\varphi\psi d\nu = \Big(\int\varphi d\nu\Big)\Big(\int\psi d\nu\Big).$$

On déduit que ψ est constante. D'où la propriété 1). $\square$

Le résutat suivant est une version de la loi des grands nombres en théorie de probabilité.

Théorème 3.4.5 (théorème ergodique de Birkhoff). *Soit ν une mesure invariante ergodique de probabilité. Soit φ une fonction intégrable par rapport à ν. Alors pour ν-presque tout $z\in\mathbb{C}$ on a*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi(f^n(z))\to\int\varphi d\nu.$$

Démonstration. Comme φ peut être écrit comme une somme infinie de fonctions bornées, on peut supposer que φ est bornée. Considérons les fonctions

$$\Phi_0 := 0 \quad \text{et} \quad \Phi_N := \sum_{n=0}^{N-1}\varphi(f^n(z))$$

et

$$\psi^* := \limsup_{N\to\infty} \frac{\Phi_N}{N} \quad \text{et} \quad \psi_* := \liminf_{N\to\infty} \frac{\Phi_N}{N}.$$

Il n'est pas difficile de voir que ψ_* et ψ^* sont bornées et $\psi_* \leq \psi^*$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\Phi_N \circ f - \Phi_N| \leq C := 2\|\Phi\|_\infty.$$

Donc

$$|\psi^* \circ f - \psi^*| \leq C/N \quad \text{et} \quad |\psi_* \circ f - \psi_*| \leq C/N.$$

Par conséquent, $\psi^* \circ f = \psi^*$ et $\psi_* \circ f = \psi_*$. On déduit de la proposition 3.4.4 que ψ^* et ψ_* sont constantes ν-presque partout. Il suffit de montrer que $\psi^* = \psi_* = \int \varphi d\nu$ ν-presque partout.

En utilisant le lemme de Fatou et l'invariance de ν, on obtient

$$\psi^* = \int \psi^* d\nu \geq \limsup_{N\to\infty} \int \frac{1}{N}\Phi_N d\nu = \int \varphi d\nu.$$

Supposons que $\psi^* > \int \varphi d\nu$. On cherche une contradiction.

En ajoutant à φ une constante, on peut supposer que $\psi^* > 0$ ν-presque partout et $\int \varphi d\nu < 0$. Posons $\Psi_N := \max\{\Phi_0, \ldots, \Phi_N\}$ et $A_N := \{\Psi_N > 0\}$. Comme $\psi^* > 0$ ν-presque partout, A_N croit vers un ensemble de ν mesure 1. D'autre part, par définition de Φ_N et comme $\Phi_0 = 0$, on a sur A_N

$$\Psi_N \circ f(x) + \varphi(x) = \max\{\Phi_0 \circ f(x), \ldots, \Phi_N \circ f(x)\} + \varphi(x) \geq \max_{1\leq n\leq N} \Phi_n(x) = \Psi_N(x).$$

Donc $\varphi(x) \geq \Psi_N(x) - \Psi_N \circ f(x)$ sur A_N. Ceci est le fait que $\Psi_N \geq 0$ avec égalité en dehors de A_N impliquent que

$$\int_{A_N} \varphi d\nu \geq \int_{A_N} \Psi_N d\nu - \int_{A_N} (\Psi_N \circ f) d\nu \geq \int \Psi_N d\nu - \int (\Psi_N \circ f) d\nu = 0$$

car ν est invariante. Ceci contredit les faits que $\int \varphi d\nu < 0$ et que A_N croit vers un ensemble de mesure ν totale. $\square$

Définition 3.4.6. Une mesure ν dans $\mathscr{M}$ est *mélangeante* si pour tous boréliens A et B on a

$$\lim_{n\to\infty} \nu(f^{-n}(A) \cap B) = \nu(A)\nu(B).$$

D'après la proposition 3.4.4 que si ν est mélangeante alors elle est ergodique. Comme dans cette proposition, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.4.7. *La mesure ν est mélangeante si et seulement si pour toutes fonctions φ et ψ dans $L^2(\mu)$ (resp. continues ou lisses) on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int (\varphi \circ f^n)\psi d\nu = \Big(\int \varphi d\nu\Big)\Big(\int \psi d\nu\Big).$$

Corollaire 3.4.8. *Soit ν une mesure invariante ergodique. Alors pour ν-presque tout $z \in \mathbb{C}$*

$$\lim_{n\to\infty} |(f^n)'(z)|^{1/n} = \exp\Big(\int \log|f'|d\nu\Big).$$

Démonstration. On a

$$\log|(f^n)'(z)| = \sum_{i=0}^{n-1} \log|f'(f^i(z))|.$$

Quand $\log|f'|$ est intégrable par rapport à ν, il suffit donc d'appliquer le théorème de Birkhoff à $\log|f'|$. En revanche, on approxime $\log|f'|$ par une suite décroissante de fonctions bornées et on obtient le résultat en appliquant le théorème de Birkhoff à chaque élément de cette suite. □

Dans un certain sens, $\lim|(f^n)'|^{1/n}$ mesure le taux de dilatation ou contraction du système dynamique observé avec la mesure invariante ν. Le dernier corollaire dit que par rapport à ν, cette limite existe presque partout et est égale à la constante

$$\chi_\nu = \int \log|f'|d\nu.$$

C'est *l'exposant de Lyapounov de f par rapport à ν.*

Notons que dans le cas de dimension supérieure à 1, il y a plusieurs exposants de Lyapounov car le taux de dilatation ou de contraction dépend de directions. Leur définition sera donnée dans le chapitre suivant.

Nous allons construire pour tout polynôme f une fonction de Green et une mesure d'équilibre. Cette mesure vérifie une propriété d'invariance très forte que nous introduisons ci-dessous.

Soit φ une fonction sur $\mathbb{C}$. On définit $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ et

$$f_*(\varphi)(z) := \sum_{w\in f^{-1}(z)} \varphi(w)$$

où les points de $f^{-1}(z)$ sont comptés avec multiplicité. Il est clair que les opérateurs f^* et f_* sont linéaires. Il n'est pas difficile de voir que $\frac{1}{d}f_*(f^*(\varphi)) = \varphi$. De plus, $f_*(\varphi)$ est continue si φ est continue.

Définition 3.4.9. Soit ν une mesure positive à support compact dans $\mathbb{C}$. On définit la mesure $f^*(\nu)$ par

$$\langle f^*(\nu), \varphi\rangle := \langle \nu, f_*(\varphi)\rangle \text{ pour } \varphi \text{ continue.}$$

Quand φ est positive, $f_*(\varphi)$ l'est aussi. Donc $f^*(\nu)$ est une mesure positive. Pour $\varphi = 1$, on voit que la masse de $f^*(\nu)$ est d fois la masse de ν. Il n'est pas difficile de montrer que l'opérateur f^* est continu pour la topologie faible sur les mesures. De plus, on a $f_*(f^*(\nu)) = d\nu$. Si ν est la masse de Dirac en a, $f^*(\delta_a)$ est la somme des masses de Dirac aux points de $f^{-1}(a)$.

Définition 3.4.10. Une mesure positive ν à support compact dans $\mathbb{C}$ est *totalement invariante* si $\frac{1}{d}f^*(\nu) = \nu$.

On déduit de la relation $f_*(f^*(\nu)) = d\nu$ que toute mesure totalement invariante est invariante. On construit maintenant une mesure totalement invariante pour tout polynôme f de degré $d \geq 2$.

Considérons les fonctions

$$G_n(z) := d^{-n} \log^+ |f^n(z)| \text{ où } \log^+ = \max(\log, 0).$$

Elles sont continues et sous-harmoniques.

Théorème 3.4.11. *La suite (G_n) est presque décroissante et converge uniformément vers une fonction sous-harmonique continue G. Plus précisément, il existe une suite de nombres réels (c_n) décroissant vers 0 telle que $(G_n + c_n)$ décroit vers G. De plus, $G(z) - \log|z|$ admet une limite finie quand n tend vers l'infini.*

Démonstration. Observons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|d^{-1}\log^+ |f(z)| - \log^+ |z|| \leq c.$$

On déduit de cette inégalité que

$$|G_{n+1}(z) - G_n(z)| \leq cd^{-n}.$$

Donc (G_n) converge uniformément vers une fonction continue G. Comme G_n est sous-harmonique, G l'est aussi. De plus $G - G_0$ est borné. On en déduit que $G - \log|z|$ est borné près de l'infini.

Posons $c_n := c(d^{-n} + d^{-n-1} + \cdots)$. Il est clair que (c_n) décroit vers 0. Les inégalités ci-dessus impliquent que

$$G_{n+1} + c_{n+1} \leq G_n + c_n.$$

Donc la suite $(G_n + c_n)$ est décroissante. □

Proposition 3.4.12. *On a $G = 0$ exactement sur l'ensemble de Julia rempli de f. De plus, on a $d^{-1}G \circ f = G$.*

Démonstration. Comme $d^{-1}G_{n+1} = G_n$, on a $G \circ f = dG$. Si z appartient à l'ensemble de Julia rempli, la suite $(f^n(z))$ est bornée et donc $G(z) = 0$. Il suffit maintenant de montrer que $G > 0$ sur Ω_∞.

Comme $G(z) - \log|z|$ est borné près de l'infini, G est positive sur un voisinage U de l'infini. La relation d'invariance de G ci-dessus implique que $G > 0$ sur la réunion des $f^{-n}(U)$ qui est exactement Ω_∞. □

Notons
$$d^c = \frac{1}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial) \quad \text{et} \quad dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$$
et posons
$$\mu := dd^c G \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{C}.$$

Théorème 3.4.13. *μ est une mesure de probabilité totalement invariante dont le support est exactement l'ensemble de Julia de f.*

Démonstration. Comme $G = 0$ sur l'ensemble de Julia rempli $\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$, on a $\mu = 0$ sur l'intérieur de $\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$, i.e. $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}_\infty$.

Fixons une constante $R > 0$ suffisament grande. On a pour $|z| > R$ et pour une constante $c > 0$
$$|f(z)| \geq c|z|^d > |z| > R.$$
Donc f envoie $\{|z| > R\}$ dans lui-même. En particulier, on a $|f^n(z)| > 1$ pour $|z| > R$ et $n \geq 0$. Ceci implique que $G_n = d^{-n} \log |f^n(z)|$ est harmonique sur $\{|z| > R\}$. On déduit que G est harmonique sur $\{|z| > R\}$. L'invariance de G implique que G est harmonique sur Ω_∞ et donc $\mu = 0$ sur Ω_∞. On constate que μ est portée par l'ensemble de Julia. L'invariance de G entraine aussi que μ est totalement invariante.

Pour montrer que le support de μ est exactement l'ensemble Julia, il faut vérifier que G n'est pas harmonique au voisinage de a pour tout a dans l'ensemble de Julia. Comme $G > 0$ sur Ω_∞ et $G(a) = 0$, G ne peut pas être harmonique au voisinage de a d'après la formule de la moyenne pour les fonctions harmoniques. Donc $\mathrm{supp}(\mu) = J$.

Il reste à montrer que la masse de μ est 1. Pour ceci, il suffit de remarquer que $\mu_0 = dd^c \log^+ |z|$ est la mesure de probabilité équidistribuée sur le cercle unité. On déduit que $dd^c G_n = d^{-n}(f^n)^*(\mu_0)$ est aussi une mesure de probabilité. Comme ces mesures sont portées par $\{|z| \leq R\}$, leur limite μ est aussi une mesure de probabilité. Ceci complète la preuve du théorème. □

Définition 3.4.14. On appelle *G la fonction de Green (dynamique)* et *μ la mesure d'équilibre* de f.

Corollaire 3.4.15. *L'ensemble de Julia est parfait, i.e. il ne contient pas de point isolé.*

Démonstration. Supposons que a est un point isolé de J. Comme $\mathrm{supp}(\mu) = J$, on a $\mu(a) > 0$. On écrit
$$\mu = \mu' + c\delta_a$$
avec $c > 0$ et μ' une mesure positive sans masse au voisinage de a. On a
$$dd^c(G - c \log |z - a|) = \mu'.$$

Donc $G - c\log|z-a|$ est égal presque partout à une fonction sous-harmonique au voisinage de a. C'est une contradiction car cette fonction ne peut être égale presque partout à une fonction bornée supérieurement au voisinage de a. Rappelons ici que la fonction G est continue. □

Dans le reste de ce paragraphe, on démontre le résultat suivant.

Théorème 3.4.16. *La mesure μ est mélangeante. En particulier, elle est ergodique et vérifie le théorème de Birkhoff.*

Définition 3.4.17. Soit ν une mesure positive sur un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle *potentiel* de ν sur un ouvert U toute fonction sous-harmonique u sur U telle que $dd^c u = \nu$.

Observons que si elle existe u est unique à une fonction harmonique près. Comme les fonctions harmoniques sont lisses, on peut parler de mesures à potentiel local borné ou continu. La notion ne dépend pas du choix du potentiel local.

Lemme 3.4.18. *Soit ν une mesure positive à potentiel local borné (resp. continu). Si ν' est une mesure positive plus petite ou égale à ν, alors ν' est aussi à potentiel local borné (resp. continu).*

Démonstration. On écrit $\nu = \nu' + \nu''$. Soient u' et u'' des potentiels locaux de ν et ν'. Alors $u' + u''$ est un potentiel local de ν. Cette somme est donc une fonction bornée (resp. continue). Comme u' et u'' sont bornées (resp. semi-continues) supérieurement, on en déduit qu'elles sont bornées (resp. continues). □

Proposition 3.4.19. *Soit ν une mesure de probabilité à support compact dans $\mathbb{C}$. Supposons que ν est à potentiel local borné. Alors la suite $d^{-n}(f^n)^*(\nu)$ converge faiblement vers μ.*

Démonstration. Soit u le potentiel de Newton de ν. C'est une fonction localement bornée et par définition $u - \log|z|$ est bornée au voisinage de l'infini. On en déduit que $u - G$ est bornée. Comme μ est totalement invariante, on a

$$d^{-n}(f^n)^*(\nu) - \mu = d^{-n}(f^n)^*(\nu - \mu) = d^{-n}(f^n)^*(dd^c(u-G)) = dd^c[d^{-n}(u\circ f^n - G\circ f^n)].$$

La suite de fonctions $d^{-n}(u \circ f^n - G \circ f^n)$ tend uniformément vers 0. Donc $d^{-n}(f^n)^*(\nu)$ converge faiblement vers μ. □

Fin de la démonstration du théorème 3.4.16. Soient φ et ψ deux fonctions lisses sur $\mathbb{C}$. Il suffit de montrer que

$$\int (\varphi \circ f^n)\psi d\mu \to \Big(\int \varphi d\mu\Big)\Big(\int \psi d\mu\Big).$$

En ajoutant à φ une constante, puis la multipliant par une autre constante, on peut supposer que $\nu = \varphi\mu$ est une mesure de probabilité. Il suffit de montrer que la suite de mesure $(\varphi \circ f^n)\mu$ tend faiblement vers μ.

On a
$$(\varphi \circ f^n)\mu = (\varphi \circ f^n)d^{-n}(f^n)^*(\mu) = d^{-n}(f^n)^*(\nu).$$
Comme φ est bornée, ν est bornée par une constante fois μ. Comme le potentiel G de μ est continu, on déduit que ν est à potentiel continu. La dernière proposition donne le résultat. □

Théorème 3.4.20. *L'exposant de Lyapounov associé à μ est plus grand ou égal à $\log d$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que
$$\langle \mu, \log|f'|\rangle \geq \log d.$$
Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnée, on peut supposer que le coefficient dominant de f est 1. On vérifie sans peine que ce changement ne modifie par l'intégrale $\langle \mu, \log|f'|\rangle$.

D'après le théorème de Böttcher, il existe une application holomorphe h d'un voisinage de l'infini dans un voisinage de 0 tel que $h(z) = z^{-1} + o(z^{-1})$ et $h \circ f \circ h^{-1}(w) = w^d$. On a aussi $h^{-1}(w) = w^{-1} + o(w^{-1})$. On en déduit que $h \circ f^n \circ h^{-1}(w) = w^{d^n}$. Par conséquent, la fonction de Green G vérifie pour w proche de 0
$$G(h^{-1}(w)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|f^n(h^{-1}(w))| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|h^{-1}(w^{d^n})| = -\log|w|.$$

Posons pour r assez petit $G_r := \min(G, -\log r)$. Cette fonction est harmonique en dehors de la réunion de l'ensemble de Julia et la courbe $\{|h(z)| = r\}$. On vérifie sans difficulté que $dd^c G_r = \mu - \mu_r$ où μ_r est une mesure de probabilité sur la courbe $\{|h(z)| = r\}$. D'autre part, sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, on a
$$dd^c \log|f'| = \sum_{c \text{ critique}} \delta_c - (d-1)\delta_\infty.$$

Donc
$$\begin{aligned}
\langle \mu, \log|f'|\rangle &= \langle dd^c G_r, \log|f'|\rangle + \langle \mu_r, \log|f'|\rangle \\
&= \langle G_r, dd^c \log|f'|\rangle + \langle \mu_r, \log|f'|\rangle \\
&= \sum_{c \text{ critique}} G_r(c) + (d-1)\log r + \langle \mu_r, \log|f'|\rangle.
\end{aligned}$$

Dans la coordonnée w, μ_r est la mesure de Haar sur le cercle $\{|w| = r\}$ et $\log|f'|$ est approximativement $\log(d|w|^{d-1})$. La dernière somme ci-dessus converge donc vers $\sum G(c) + \log d$ quand r tend vers 0. Le résultat s'en découle. □

3.5 Problèmes d'équidistribution

Dans ce paragraphe, nous montrons l'équidistribution des préimages des points génériques et des points périodiques par rapport à la mesure d'équilibre ci-dessus. On a le lemme suivant.

Lemme 3.5.1. *Soit E un ensemble fini de $\mathbb{C}$ vérifiant $f^{-1}(E) \subset E$. Alors soit E est vide, soit E contient un seul point et coïncide avec l'ensemble critique de f. De plus, si E est non-vide, il existe une coordonnée z sur $\mathbb{C}$ telle que f soit égale à z^d et $E = \{0\}$.*

Démonstration. Il suffit de cpnsidérer le cas où E est non-vide. On a $f^{-n-1}(E) \subset E$. Donc pour n assez grand on a $f^{-n-1}(E) = f^{-n}(E)$. Ceci implique que $f^{-1}(E) = E = f(E)$. Quitte à remplacer f par une itérée, on peut supposer que les points de E sont tous fixes. On déduit que $f^{-1}(a) = a$ pour tout $a \in E$. Par conséquent, a est un point critique d'ordre $d - 1$ de f. Comme f admet exactement $d - 1$ points critiques comptés avec multiplicité, a est le seul point critique de f. On en déduit que E contient au plus un point. Il existe une coordonnée z telle que $E = \{0\}$. Dans cette coordonnée, f s'écrit λz^d. En effectuant un changement linéaire de coordonnée, on peut avoir $\lambda = 1$. □

Dans la suite, notons $\mathbf{E}$ l'ensemble vide si f n'a pas d'autre ensemble fini totalement invariant et $\mathbf{E}$ l'ensemble critique de f dans le cas contraire. On dit que $\mathbf{E}$ est *l'ensemble exceptionnel* de f. C'est le plus grand sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$ qui est totalement invariant. Il a au plus un point. On a le résultat suivant.

Théorème 3.5.2 (Brolin)**.** *Soit a un point non-exceptionnel de $\mathbb{C}$. Alors $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a)$ converge faiblement vers la mesure μ.*

On appelle *disque holomorphe* tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Si D est un domaine dans $\mathbb{C}$, on appelle *branche inverse d'ordre n* de D une application bi-holomorphe $g : D \to D'$ telle que $f^n \circ g = \mathrm{id}$ où D' est un domaine de $\mathbb{C}$. Le diamètre de D' s'appelle *la taille de la branche inverse*. Comme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un revêtement ramifié, pour chaque n, les images des branches inverses d'ordre n de D sont disjointes.

Soit PC_n l'ensemble des valeurs critiques de f^n. Ils vérifient la relation

$$\mathrm{PC}_n = \mathrm{PC}_{n-1} \cup f^n(\mathrm{C})$$

où C est l'ensemble critique de f.

Proposition 3.5.3. *Soit D un disque holomorphe tel que $D \cap \mathrm{PC}_{k+1} = \varnothing$ où k est un entier positif. Alors D admet au moins $d^n(1 - 2d^{-k})$ branches inverses pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. Soit δ_n le nombre de branches inverses d'ordre n de D. Pour $n \leq k+1$, come $D \cap \mathrm{PC}_n = \varnothing$, D admet le nombre maximal de branches inverses, i.e. $\delta_n = d^n$.

Considérons $n \geq k+1$. Soient $g_i : D \to D_i$, $i = 1, \ldots, \delta_n$, les branches inverses d'ordre n de D. Comme PC_1 contient moins de d points distincts, il y a au moins $\delta_n - d$ branches inverses $g_i : D \to D_i$ telles que $D_i \cap \mathrm{PC}_1 = \varnothing$. Pour un tel i, D_i admet le nombre maximal d de branches inverses d'ordre 1. On en déduit que D admet au moins $(\delta_n - d)d$ branches inverses d'ordre $n+1$, i.e. $\delta_{n+1} \geq (\delta_n - d)d$. Donc

$$d^{-n-1}\delta_{n+1} \geq d^{-n}\delta_n - d^{1-n}.$$

On obtient par récurrence

$$d^{-n}\delta_n \geq 1 - d^{-k} - d^{-k-1} - \cdots - d^{-n+2} \geq (1 - 2d^{-k}).$$

Ceci complète la preuve de la proposition. □

Proposition 3.5.4. *Soit D comme ci-dessus et soit $\Omega \Subset D$ un ouvert. Soit $\epsilon > 0$ une constante positive. Alors Ω admet au moins $d^n(1 - 3d^{-k})$ branches inverse de taille $\leq d^{-n(1-\epsilon)/2}$ pour n suffisamment grand.*

Démonstration. On considère seulement les n suffisamment grands. On peut aussi réduire légèrement D afin de supposer qu'il est borné dans $\mathbb{C}$. Fixons une constante $R > 0$ telle que $|f(z)| > |z|$ quand $|z| \geq R$. Comme n est grand, $D \subset \{|z| \leq R\}$ et toutes les branches inverses d'ordre n de D ont images dans $\{|z| \leq R\}$. En particulier, la réunion des images des banches inverses d'ordre n de D ont un aire borné.

On déduit de la proposition 3.5.3 que D admet au moins $d^n(1-3d^{-k})$ branches inverses $g_i : D \to D_i$ telles que $\mathrm{area}(D_i) \leq d^{-n(1-\epsilon/2)}$. Observons que $g_i : \Omega \to g_i(\Omega)$ est une branche inverse de Ω. Le lemme suivant montre que $\mathrm{diam} g_i(\Omega) \leq cd^{-n(1-\epsilon/2)/2}$ où $c > 0$ est une constante. Comme n est grand on a $cd^{-n(1-\epsilon/2)/2} \leq d^{-n(1-\epsilon)/2}$. Le résultat s'en déduit. □

Lemme 3.5.5. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit K un compact de D. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que* $\mathrm{diam}(h(K)) \leq c[\mathrm{area}(h(D))]^{1/2}$ *pour toute application holomorphe injective $h : D \to \mathbb{C}$.*

Démonstration. Comme le problème est local, on se ramène facilement au cas où D et K sont des disques concentriques. Le lemme est donc une simple conséquence de la formule de Cauchy. □

Lemme 3.5.6. *Soit a un point dans Ω_∞. Alors $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) \to \mu$.*

Démonstration. Soit u le potentiel de Newton de δ_a, i.e. $u = \log|z - a|$. On a $\delta_a = dd^c u$ et

$$d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) = d^{-n} u \circ f^n.$$

Soit $R > |a|$ tel que $|f(z)| \geq 2|z|$ quand $|z| \geq R$. Sur $\{|z| \geq R\}$, comme $u - \log|z|$ est bornée et que $d^{-n}\log|f^n(z)| \to G$, on a $d^{-n}u \circ f^n \to G$.

Pour $z \in \Omega_\infty$, on choisit k tel que $|f^k(z)| \geq R$. On a

$$d^{-n}u(f^n(z)) = d^{-n}u(f^{n-k}(f^k(z))) \to d^{-k}G(f^k(z)) = G(z).$$

Donc $d^{-n}u \circ f^n \to G$ sur Ω_∞. Comme u est bornée sur l'ensemble invariant $\mathbb{C} \setminus \Omega_\infty$, on voit facilement que $d^{-n}u \circ f^n \to 0$ sur cet ensemble. On constate que $d^{-n}u \circ f^n \to G$ sur $\mathbb{C}$. D'où le lemme. $\square$

Pour $a \in \mathbb{C}$ posons

$$m(a) := \sup_\nu \|\nu - \mu\|$$

où le suprémum est pris sur toutes les limites ν de la suite $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a)$. Nous avons $0 \leq m(a) \leq 2$ et $m(a) = 0$ si et seulement si $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) \to \mu$.

Proposition 3.5.7. *Si $a \notin \mathrm{PC}_{k+1}$, alors $m(a) \leq 6d^{-k}$. En particulier, $m(a) = 0$ si $a \notin \cup_{k\geq 0}\mathrm{PC}_k$.*

Démonstration. Soit b un point dans Ω_∞ tel que $\Omega \notin \mathrm{PC}_\infty$. On a $d^{-n}(f^n)^*(\delta_b) \to \mu$. Soit D un disque holomorphe contenant a, b tel que $D \cap \mathrm{PC}_{k+1} = \varnothing$. Soit $\Omega \Subset D$ un ouvert contenant a, b. La proposition 3.5.4 implique que Ω admet au moins $d^n(1 - 3d^{-k})$ branches inverses d'ordre n de taille $\leq d^{-n(1-\epsilon)/2}$. Pour une telle branche inverse $g_i : \Omega \to \Omega_i$, observons que Ω contient exactement un point de $f^{-n}(a)$ et un point de $f^{-n}(b)$ qui sont proches car la taille de Ω_i est petite.

On sépare $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a)$ et $d^{-n}(f^n)^*(\delta_b)$ en deux parties : la première supportée par la réunion des Ω_i et la deuxième supportée par le complémentaire

$$d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) = \nu_{a,n} + \nu'_{a,n} \quad \text{et} \quad d^{-n}(f^n)^*(\delta_b) = \nu_{b,n} + \nu'_{b,n}.$$

Comme le nombre des branches g_i est au moins $d^n(1-3d^{-k})$ on a $\|\nu_{a,n}\| = \|\nu_{b,n}\| \geq 1 - 3d^{-k}$. Comme la taille de Ω_i tend vers 0 quand $n \to \infty$, on a $\nu_{a,n} - \nu_{b,n} \to 0$. Par conséquent, toute limite de la suite $d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) - d^{-n}(f^n)^*(\delta_b)$ est de masse $\leq 6d^{-k}$. Finalement, comme $d^{-n}(f^n)^*(\delta_b) \to \mu$, on constate que $m(a) \leq 6d^{-k}$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 3.5.2. Comme chaque PC_n est fini, il y a un point $a \notin \mathbf{E}$ tel que

$$m := m(a) = \max_{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbf{E}} m(z).$$

On a

$$d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) = d^{-1} \sum_{b \in f^{-1}(a)} d^{1-n}(f^{n-1})^*(\delta_b),$$

donc

$$m = m(a) \leq d^{-1} \sum_{b \in f^{-1}(a)} m(b).$$

On déduit de la maximalité de $m(a)$ que $m(b) = m$ pour tout $b \in f^{-1}(a)$. Par récurrence, on a $m(b) = m$ pour $b \in f^{-n}(a)$ et pour tout n. D'après le lemme 3.5.1, $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(a)$ est infini car sinon il est contenu dans $\mathbf{E}$. Pour tout k, cet ensemble contient un point hors de PC_{k+1}. La proposition 3.5.7 implique que $m \leq 10d^{-k}$ pour tout k. On en déduit que $m = 0$ et ceci complète la preuve. □

Dans la suite, on montre que les proints périodiques répulsifs sont équidistribués sur l'ensemble de Julia par rapport à la mesure μ.

Théorème 3.5.8 (Fatou-Brolin)**.** *Soit P_n l'ensemble des points périodiques répulsifs de période n. Alors*

$$\mu_n := d^{-n} \sum_{w\in P_n} \delta_w \to \mu.$$

Démonstration. Observons d'abord que $\#P_n \leq d^n + 1$. Donc si ν est une limite de (μ_n) alors $\|\nu\| \leq 1$. Soit U un ouvert connexe tel que $\mu(U) > 0$. Il suffit de montrer que $\liminf \mu_n(U) \geq \mu(U)$.

Fixons une constante $\epsilon > 0$. Il suffit de prouver que $\mu_n(U) \geq \mu(U) - 3\epsilon$ pour n suffisament grand. Fixons $k > 0$ tel que $3d^{-k} < \epsilon$. Comme μ n'a pas de masse sur PC_{k+1}, on peut choisir les ouverts simplement connexes U_i tels que $U_3 \Subset U_2 \Subset U_1 \subset U \setminus \mathrm{PC}_{k+1}$ et $\mu(U_3) \geq \mu(U) - \epsilon$. La proposition 3.5.4 implique que U_2 admet au moins $d^n(1-\epsilon)$ branches inverses $g_i : U_2 \to D_i$ d'ordre n et de taille $\leq d^{-n/2}$.

Observons que si n_i est suffisament grand, on a $\mathrm{diam}(D_i) < \mathrm{dist}(U_3, bU_2)$ qui implique que $D_i \subset U_2$ si $D_i \cap U_3 \neq \varnothing$. Dans ce cas, comme conséquence du lemme de Swcharz, g_i admet un point fixe attractif unique dans D_i qui est répulsif pour $g_i^{-1} = f^n$. Notons $\mathscr{B}_n$ la famille des g_i satisfaisant la dernière propriété. Nous avons construit $\#\mathscr{B}_n$ points périodiques répulsifs d'ordre n dans U_2. Ces points sont distincts car ils sont associés aux différentes branches inverses. Il reste à montrer que $\#\mathscr{B}_n \geq d^n(\mu(U) - 3\epsilon)$ pour n grand.

Fixons un point $a \in U_3 \setminus \mathbf{E}$. Comme $\nu_{a,n} := d^{-n}(f^n)^*(\delta_a) \to \mu$, on a

$$\nu_{a,n}(U_3) \geq \mu(U_3) - \epsilon \geq \mu(U) - 2\epsilon$$

pour n grand. Donc le nombre des points dans $f^{-n}(a) \setminus U_3$ est majoré par $d^n(1 - \mu(U) + 2\epsilon)$. Ceci est le fait que chaque branche de $\mathscr{B}_n$ contient un point de $f^{-n}(a)$ implique que

$$\#\mathscr{B}_n \geq d^n(1-\epsilon) - d^n(1 - \mu(U) + 2\epsilon) = d^n(\mu(U) - 3\epsilon).$$

D'où le résultat. □

3.6 Entropie topologique et entropie métrique

Les notions d'entropie que nous allons introduire dans ce paragraphe sont des invariants importants en dynamique. Ils permettent de mesurer dans un certain sens la complexité du système dynamique. Considérons d'abord un contexte assez général.

Soit X un espace compact métrique. On appelle *recouvrement ouvert* de X toute famille $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'ouverts U_i de X dont la réunion est égale à X, i.e. $\cup_{i\in I} U_i = X$. Notons $N(\mathscr{U})$ le nombre minimal d'éléments de $\mathscr{U}$ qu'on a besoin pour recouvre X.

Un recouvrement $\mathscr{V} = (V_j)_{j\in J}$ est *plus fin* que $\mathscr{U}$ (ou *est un rafinement* de $\mathscr{U}$) si tout élement V_j de $\mathscr{V}$ est contenu dans un élément U_i de $\mathscr{U}$. Nous écrivons dans ce cas $\mathscr{U} \preceq \mathscr{V}$ et $\mathscr{V} \succeq \mathscr{U}$. On écrit aussi $\mathscr{U} \sim \mathscr{V}$ quand les deux relations $\mathscr{U} \preceq \mathscr{V}$ et $\mathscr{V} \preceq \mathscr{U}$ sont satisfaites. Il est clair que si $\mathscr{U} \preceq \mathscr{V}$ on a $N(\mathscr{U}) \leq N(\mathscr{V})$.

Pour tous recouvrements $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$, les ouverts $U_i \cap V_j$ forment un nouveau recouvrement noté par $\mathscr{U} \vee \mathscr{V}$. On a $\mathscr{U} \preceq \mathscr{U} \vee \mathscr{V}$ et $\mathscr{V} \preceq \mathscr{U} \vee \mathscr{V}$. En fait, tout recouvrement $\mathscr{W}$ tel que $\mathscr{U} \preceq \mathscr{W}$ et $\mathscr{V} \preceq \mathscr{W}$ est plus fin que $\mathscr{U} \vee \mathscr{V}$. On vérifie sans peine que $N(\mathscr{U} \vee \mathscr{V}) \leq N(\mathscr{U})N(\mathscr{V})$.

Soit $T : X \to X$ un système dynamique continu. On a le résultat suivant.

Proposition 3.6.1. *Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de X. Alors la suite*

$$u_n = N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big)$$

est sous-multiplicative, i.e. $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour $n, m \geq 1$. En particulier, $\frac{1}{n}\log u_n$ converge vers $\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\log u_n$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= N\Big(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big) \\ &= N\Big(\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big) \vee T^{-n}\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big)\Big) \\ &\leq N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big) N\Big(T^{-n}\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathscr{U})\Big)\Big) \\ &\leq u_n u_m. \end{aligned}$$

La proposition s'en découle. □

Définition 3.6.2. La limite de $\frac{1}{n}\log u_n$ est notée par $h(T, \mathscr{U})$ et appelée *entropie* de T par raport au recouvrement $\mathscr{U}$.

Voici quelques propriétés élémentaires de l'entropie.

Proposition 3.6.3. *On a*

1. *$h(T, \mathscr{U}) = h(T, \bigvee_{i=0}^{m} T^{-i}(\mathscr{U}))$ pour tout $m \geq 0$;*

2. *$h(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathscr{U})) = mh(T, \mathscr{U})$ pour tout $m \geq 1$;*

Démonstration. 1) Posons $\mathscr{V} = \bigvee_{i=0}^{m} T^{-i}(\mathscr{U})$. On a

$$h(T, \mathscr{U}) \leq h(T, \mathscr{V}).$$

Il faut montrer l'inégalité inverse. On a pour tout $n \geq 0$

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\mathscr{V}) \preceq \bigvee_{i=0}^{n+m} T^{-i}(\mathscr{U}).$$

Donc par définition de l'entropie

$$h(T, \mathscr{V}) \leq h(T, \mathscr{U}).$$

2) C'est une conséquence de la définition de l'entropie. □

Définition 3.6.4. On appelle *entropie topologique* de T le nombre non-négatif suivant

$$h(T) = \sup \big\{ h(T, \mathscr{U}), \quad \mathscr{U} \quad \text{recouvrement ouvert de } X \big\}.$$

Remarque 3.6.5. Notons que $h(T)$ peut être infinie. Soit $(\mathscr{U}^\alpha)$ une famille de recouvrements ouverts de X. Supposons qu'elle est génératrice, i.e. pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ il existe α tel que $\mathscr{U} \preceq \mathscr{U}^\alpha$. Alors on a

$$h(T) = \sup_{\alpha \in A} h(T, \mathscr{U}^\alpha).$$

Proposition 3.6.6. *On a*

1. *$h(T^n) = nh(T)$ pour $n \geq 0$. En particulier, $h(\mathrm{id}) = 0$;*
2. *Si $Y \subset X$ est un sous-ensemble invariant, alors $h(T_{|Y}) \leq h(T)$.*

Démonstration. 1) C'est une conséquence de la deuxième assertion de la proposition 3.6.3.

2) Si $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de Y, il existe des ouverts $\widehat{U}_i$ de X tels que $\widehat{U}_i \cap Y = U_i$. Considérons le recouvrement ouvert $\widehat{\mathscr{U}}$ de X formé par ces ouverts et l'ouvert $\widehat{U} = X \setminus Y$. Comme Y est invariant, on a $T^{-n}(\widehat{U}) \subset \widehat{U}$ pour $n \geq 0$. Donc

$$N\Big(\bigvee_{i=0}^{n} T_{|Y}^{-i}(\mathscr{U})\Big) \leq N\Big(\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\widehat{\mathscr{U}})\Big).$$

Le résultat s'en déduit. □

Nous allons maintenant donner une définition équivalente de l'entropie topologique due à Bowen et Dinaburg. Soit d une distance sur X qui induit la topologie considérée. Définissons la suite de distances d_n par

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Il n'est pas difficile de voir que ce sont des distances sur X. Notons $B_n(x, \epsilon)$ la boule de centre x et de rayon ϵ pour la distance d_n. On l'appele *boule de Bowen*. Même si X est une variété lisse, cette boule n'est pas toujours connexe.

Définition 3.6.7. Un sous-ensemble S de X est (n, ϵ)-*séparé* si $d_n(x, y) \geq \epsilon$ pour tous couple de points distincts x, y dans S. Un sous-ensemble R de X est (n, ϵ)-*dense* si $d_n(x, R) < \epsilon$ pour tout $x \in X$.

Notons $s(n, \epsilon)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n, ϵ)-séparé et $r(n, \epsilon)$ le cardinal minimal d'un ensemble (n, ϵ)-dense. Notons $\mathscr{U}^\epsilon$ la famille de toutes les boules $B(x, \epsilon)$ de rayon ϵ dans X pour la distance d. Notons aussi pour la simplicité

$$N(n, \epsilon) = N\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U}^\epsilon)\Big).$$

La proposition suivante donne des relations entre ces trois quantités.

Proposition 3.6.8. *Nous avons*

$$N(n, \epsilon) \leq r(n, \epsilon) \leq s(n, \epsilon) \leq N(n, \frac{\epsilon}{2}).$$

Démonstration. Considérons un ensemble (n, ϵ)-dense R dont le cardinal est maximal, i.e. égal à $r(n, \epsilon)$. Les (n, ϵ)-boules avec centres dans R forment un recouvrement ouvert. Comme toute (n, ϵ)-boule est un élément de

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U}^\epsilon)$$

on a

$$N(n, \epsilon) \leq r(n, \epsilon).$$

Considérons maintenant un ensemble (n, ϵ)-séparé S de cardinal maximal $s(n, \epsilon)$. On déduit de la maximalité de ce cardinal que la famille des (n, ϵ)-boules avec centres dans S est un recouvrement. En effet, sinon, on peut ajouter à S un point en déhors de ces boules afin d'avoir un ensemble (n, ϵ)-séparé plus grand. Par conséquent, on a $r(n, \epsilon) \leq s(n, \epsilon)$.

Finalement, comme S est (n, ϵ)-séparé, chaque élément de

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{U}^{\epsilon/2})$$

contient au plus un point de S. La dernière inégalité de la proposition s'en déduit. $\square$

L'entropie topologique peut donc calculée avec les formules suivantes.

Corollaire 3.6.9. *On a*

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N(n,\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s(n,\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r(n,\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s(n,\epsilon), \end{aligned}$$

où $\lim_{\epsilon\to 0}$ *peut être remplacé par* $\sup_{\epsilon>0}$.

Démonstration. Toutes les quantités considérée croissent quand ϵ décroit vers 0. Donc on peut remplacer $\lim_{\epsilon\to 0}$ par $\sup_{\epsilon>0}$.

Observons que la famille de recouvrements $(\mathscr{U}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est génératrice. La première égalité est donc une conséquence de la remarque 3.6.5. Les autres sont conséquences de la proposition 3.6.8. $\square$

Le dernier corollaire montre que $h(T)$ ne dépend pas du choix de la distance d quand la topologie de X est fixée. Ceci justifie la terminologie "entropie topologique".

Rappelons que l'ensemble $\mathscr{M}_T$ des mesures de probabilité invariantes est un convexe non-vide qui est compact pour la topologie faible sur les mesures. Nous introduisons la notion d'entropie pour ces mesures. Soit μ un élément de $\mathscr{M}_T$.

On appelle *partition (mesurable)* de X toute famille $\mathscr{P} = (P_i)_{i\in I}$ de boréliens telle que $X = \cup_{i\in I} P_i$ et $\mu(P_i \Delta P_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Considérons la fonction concave positive $\phi(t) := -t\log t$ sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et en 1. On définit *l'entropie* de la partition $\mathscr{P}$ par

$$H_\mu(\mathscr{P}) := \sup_{i\in I}\phi(\mu(P_i)) = \sum_{i\in I} -\mu(P_i)\log\mu(P_i).$$

Si $\mathscr{Q} = (Q_j)_{j\in J}$ une autre partition, on définit $\mathscr{P}\vee\mathscr{Q}$ comme partition constituée par les boréliens $P_i\cap Q_j$. On a la proposition suivante.

Proposition 3.6.10. *On a*

$$H_\mu(\mathscr{P}\vee\mathscr{Q}) \leq H(\mathscr{P}) + H(\mathscr{Q}).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathscr{P}\vee\mathscr{Q}) &= \sum_{i,j} -\mu(P_i\cap Q_j)\log\mu(P_i\cap Q_j)\\
&= \sum_{i,j} -\mu(P_i\cap Q_j)\log\mu(Q_j) + \sum_{i,j} -\mu(P_i\cap Q_j)\log\frac{\mu(P_i\cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\\
&= H_\mu(\mathscr{Q}) + \sum_{i,j}\mu(Q_j)\phi\Big(\frac{\mu(P_i\cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\Big).
\end{aligned}$$

Comme ϕ est concave, la dernière somme est plus petite que $H_\mu(\mathscr{P})$ car on a pour chaque i

$$\sum_j \mu(Q_j)\phi\Big(\frac{\mu(P_i\cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\Big) \le \phi\Big(\sum_j \mu(Q_j)\frac{\mu(P_i\cap Q_j)}{\mu(Q_j)}\Big) = \phi(\mu(P_i)).$$

D'où la proposition. □

Proposition 3.6.11. *La suite*

$$\frac{1}{n}H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big)$$

est convergente.

Démonstration. Observons que $H_\mu(\mathscr{Q}) = H_\mu(T^{-n}(\mathscr{Q}))$ pour tout n car μ est invariante. Posons

$$u_n := H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big).$$

On a

$$\begin{aligned}
u_{n+m} &= H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}(\mathscr{P})\\
&= H_\mu\Big(\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big)\vee T^{-n}\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big)\Big)\\
&\le H_\mu\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big)\Big) + H_\mu\Big(T^{-n}\Big(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathscr{P})\Big)\\
&= u_n + u_m.
\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est sous-additive. Le lemme s'en déduit. □

La limite dans la proposition précédente est notée par $h_\mu(T,\mathscr{P})$. C'est *l'entropie* du système (T,μ) par rapport à la partition $\mathscr{P}$.

Définition 3.6.12. On appelle *entropie de μ* pour le système dynamique $T : X \to X$ la quantité suivante

$$h_\mu(T) := \sup\{h_\mu(T, \mathscr{P}), \quad \mathscr{P} \text{ une partition de } X\}.$$

Le résultat suivant s'appelle *principe variationnel.* Il est dû à Goodwyn et Goodman.

Théorème 3.6.13. *Soit $T : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact X. Alors*

$$h(T) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}_T} h_\mu(T).$$

Définition 3.6.14. Une mesure μ de $\mathscr{M}_T$ est appelée *mesure d'entropie maximale* si elle satisfait $h_\mu(T) = h(T)$.

On a le résultat suivant qui est une conséquence des théorèmes de Gromov, Yomdin et Lyubich.

Théorème 3.6.15. *Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$. Soient J, K son ensembles de Julia et de Julia rempli respectivement. Alors l'entropie topologique de $f_{|K}$ (resp. $f_{|J}$) est égale à $\log d$. De plus, la mesure d'équilibre μ de f est l'unique mesure d'entropie maximale sur J et sur K.*

Nous ne donnons pas ici la preuve de l'unicité. Le reste du théorème est une conséquence de deux propositions suivantes et du principe variationnel.

Proposition 3.6.16. *L'entropie de μ est plus grande ou égale à $\log d$.*

Démonstration. La mesure μ étant à potentiel continu, elle n'a pas de masse sur les ensembles finis, en particulier, sur les valeurs critiques de f. Choisissons un domaine $D \subset \mathbb{C}$ simplement connexe ne contenant pas de points critiques tel que $\mu(D) = 1$. Pour construire un tel domaine, il suffit de prendre le complémentaire d'une famille finie de demi-droites réelles disjointes issues en valeurs critiques de f.

Ce domaine admet d branches inverses $g_i : D \to D_i$ où les disques holomorphes D_i sont disjoints. Posons $E := \mathbb{C} \setminus D$ et $E' := \cup_{n,m \in \mathbb{N}} f^{-m}(f^n(E))$. Considérons la partition $\xi := \{A_i\}$ avec $A_i := D_i \setminus E'$. Il est clair que E' est totalement invariant et $\mu(E') = 0$. Observons que $\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\xi)$ contient exactement d^n éléments et chacun d'eux est de μ mesure $1/d^n$ car μ est totalement invariante. On déduit de la définition de l'entropie métrique que $h_f(\mu) \geq h_f(\mu, \xi) = \log d$. La proposition s'en déduit. $\square$

Proposition 3.6.17. *L'entropie topologique de $f_{|K}$ est au plus égale à $\log d$.*

Fixons une constant $R > 0$ assez grande telle que

$$\{|f(x)| \leq R\} \subset \{|x| \leq R-1\}.$$

En particulier, l'ensemble de Julia rempli K est contenu dans le disque $\{|x| \leq R-1\}$. Notons $\Gamma_n \subset \mathbb{C}^n$ le graphe de l'application $(f, f^2, \ldots, f^{n-1})$. On a

$$\Gamma_n = \{(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)) \in \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{C}\}.$$

Notons $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées standard de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 3.6.18. *On a*

$$h(f_{|K}) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{vol}(\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}).$$

Démonstration. Pour tout point $x \in \mathbb{C}$; notons $x^{(n)}$ le point $(x, \ldots, f^{n-1}(x))$ de Γ_n. Observons que deux points x, y sont (n, ϵ)-séparés si et seulement si $\mathrm{dist}(x^{(n)}, y^{(n)}) \geq \epsilon$. Ces propriétés sont donc équivalentes au fait que les boules de centres $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ et de rayon $\epsilon/2$ sont disjointes. Notons que si x, y sont dans K et si ϵ est assez petit, ces boules sont contenues dans $\{|z_1| \leq R\}$.

Un résultat classique de Lelong dit que toute sous-variété de dimension 1 d'une boule de rayon r passant par le centre de la boule est d'aire au moins πr^2. On déduit que le nombre maximal de points (n, ϵ)-séparés dans K est majoré par

$$\frac{4}{\pi\epsilon^2} \mathrm{vol}(\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}).$$

Le lemme est donc une conséquence de la définition de Bowen de l'entropie. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.6.17. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{vol}(\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}) \leq \mathrm{const}\, d^n.$$

L'aire de $\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}$ est égale à une constante multiplicative près à la somme des intégrales

$$\int_{\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}} i dz_j \wedge d\overline{z}_j.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\int_{\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}} i dz_j \wedge d\overline{z}_j \leq \mathrm{const}\, d^j.$$

Notons π_j la projection de $\mathbb{C}^n$ sur le j-ième facteur. Alors π_j définit un revêtement ramifié de degré d^j de $\Gamma_n \cap \{|z_j| < R\}$ sur un disque de rayon R. On a donc

$$\int_{\Gamma_n \cap \{|z_j| < R\}} i dz_j \wedge d\overline{z}_j = \pi R^2 d^j.$$

Il est facile de voir avec le choix de R que $\Gamma_n \cap \{|z_j| < R\}$ contient $\Gamma_n \cap \{|z_1| < R\}$. La proposition découle de la dernière identité. □

3.7 Dynamique des fractions rationnelles

Nous donnons dans ce paragraphe les propriétés dynamiques des fractions rationnelles. La plupart de ces propriétés sont obtenues comme dans le cas des polynômes.

Définition 3.7.1. Soit $\mathscr{F}$ une famille d'applications holomorphes sur un ouvert $D \subset \mathbb{P}^1$ à valeurs dans $\mathbb{P}^1$. On dit que $\mathscr{F}$ est *normale* si elle est localement équicontinue ou de manière équivalente, pour toute suite $(f_n) \subset \mathscr{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge localement uniformément vers une application holomorphe de D dans $\mathbb{P}^1$.

Considérons une fraction rationnelle $f(z) = P(z)/Q(z)$ où P, Q sont des polynômes sans racines communes. Notons $d = \max(\deg P, \deg Q)$. On suppose dans la suite que $d \geq 2$. Quand $d = 1$, f est un automorphisme de $\mathbb{P}^1$, le système dynamique associé est facile à étudier.

L'application holomorphe $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ définit un revêtement ramifié de degré d. Il y a $2(d-1)$ points critiques comptés avec multiplicité et $d+1$ points fixes compté avec multiplicité. Pour tout point $z \in \mathbb{P}^1$, la fibre $f^{-1}(z)$ contient d points comptés avec multiplicité. Notons aussi que $\deg f^n = d^n$.

Définition 3.7.2. *L'ensemble Fatou* est l'ouvert maximal F sur lequel la suite (f^n) est normale. *L'ensemble de Julia* J est le complémentaire de F dans $\mathbb{P}^1$.

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.7.3. *Les ensembles de Fatou et de Julia de f^n, $n \geq 1$, sont aussi F et J. Ces ensembles sont totalement invariants par f. L'ensemble de Julia est non-vide et parfait.*

Notons que Lattès a construit des exemples de fractions rationnelles dont l'ensemble da Fatou est vide. Une telle application est dite *chaotique*.

Le résultat suivant est dû à Fatou et Sullivan.

Théorème 3.7.4. *Toute composante de Fatou est prépériodique. De plus, toute composante de Fatou invariante est soit le bassin d'attraction d'un point fixe attractif, soit un domaine parabolique, i.e. contenant un pétale, soit un disque de Siegel et soit un anneau de Herman, i.e. un domaine bi-holomorphe à un anneau sur lequel la dynamique est conjuguée à une rotation.*

On peut montrer facilement qu'il existe un ensemble fini maximal $\mathbf{E}$ qui est totalement invariant. Il contient au plus 2 points. Le résultat suivant est une conséquence de travaux de Gromov, Lyubich et Yomdin.

Théorème 3.7.5. *Il existe une mesure de probabilité μ, à potentiel local continu, totalement invariante et avec* $\mathrm{supp}(\mu) = J$, *telle que les points périodiques répulsifs* *sont équidistribués par rapport à* μ*. De plus,* μ *est l'unique mesure d'entropie maximale* $\log d$*. Elle est mélangeante et pour tout* $a \notin \mathbf{E}$ *on a*

$$\frac{1}{d^n} \sum_{b \in f^{-n}(a)} \delta_b \to \mu.$$

Chapitre 4

Dynamique des endomorphismes d'un espace projectif

Ce polycopié n'est pas complet. On doit y ajouter aussi une liste des références et des commentaires historiques.