

# Introduction aux systèmes dynamiques<sup>1</sup>

Frédéric Le Roux<sup>2</sup>

18 novembre 2003

1. Notes de cours, ENS Paris, 2003-2004 ([www.math.u-psud.fr/~leroux/](http://www.math.u-psud.fr/~leroux/)).
2. [Frederic.le-roux@dma.ens.fr](mailto:Frederic.le-roux@dma.ens.fr)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1	Motivations . . . . .	7
1.1	Motivations physiques... . . . .	7
1.2	...et motivations mathématiques . . . . .	9
2	Définition très (trop) générale . . . . .	10
3	Premiers exemples (des comportements modèles) . . . . .	12
3.1	Homothéties (conjugaison) . . . . .	12
3.2	Translation de $\mathbb{R}$ (domaine fondamental) . . . . .	13
3.3	Rotations du cercle (orbites périodiques, minimalité) . . . . .	13
3.4	Les Anosov du tore (transitivité) . . . . .	13
4	Autres exemples intéressants . . . . .	15
4.1	Doublement de l'angle . . . . .	15
4.2	Dynamique symbolique . . . . .	15
5	Exemples de systèmes issus d'autres domaines . . . . .	15
5.1	Méthodes numériques itératives . . . . .	15
5.2	Dynamique des populations, écologie . . . . .	15
6	Un mot sur les systèmes dynamiques continus . . . . .	15
7	Ouvertures : théorie géométrique des groupes et feuilletages . . . . .	15
7.1	Le temps change de groupe... . . . .	16
7.2	Le temps disparaît... . . . .	16
8	Exercices supplémentaires . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Homéomorphismes du cercle</b>	<b>17</b>
1	Un peu d'Histoire : Poincaré et les champs de vecteurs du tore . . . . .	17
2	Généralités sur les homéomorphismes du cercle . . . . .	19
2.1	Notations . . . . .	19
2.2	Géométrie des applications continues du cercle . . . . .	19
2.3	Homéomorphismes du cercle . . . . .	20
3	La théorie topologique de Poincaré . . . . .	20
3.1	Définition du nombre de rotation . . . . .	20
3.2	Propriétés . . . . .	21
3.3	Nombre de rotation rationnel . . . . .	21
3.4	Nombre de rotation irrationnel . . . . .	22

3.5	Description de la dynamique dans le cas irrationnel non transitif . . . . .	23
4	La théorie différentiable de Denjoy . . . . .	24
4.1	Difféomorphismes de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	25
4.2	Le contre-exemples de Denjoy . . . . .	26
4.3	Le théorème de Denjoy . . . . .	26
5	Ouvertures . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Théorie ergodique I</b>	<b>31</b>
1	Introduction . . . . .	31
1.1	Statistique des orbites . . . . .	31
1.2	Le cadre . . . . .	35
1.3	La théorie ergodique . . . . .	36
1.4	Problématiques . . . . .	36
2	Le théorème de récurrence de Poincaré . . . . .	37
2.1	Version mesurable . . . . .	37
2.2	Version topologique . . . . .	38
3	Exemples de mesures invariantes I . . . . .	38
3.1	Pour les exemples-modèles de l'introduction . . . . .	38
3.2	Décalage des décimales I . . . . .	39
3.3	Difféomorphismes et flots de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
4	Existence de mesures invariantes . . . . .	40
4.1	Énoncé . . . . .	41
4.2	L'espace des mesures . . . . .	41
4.3	Preuve de l'existence de mesures invariantes . . . . .	44
4.4	Mesures ergodiques . . . . .	45
4.5	Unique ergodicité . . . . .	46
5	Les théorèmes ergodiques : convergence des moyennes temporelles des fonctions . . . . .	46
5.1	Énoncés . . . . .	46
5.2	Exemples, applications . . . . .	47
5.3	Transformation de Gauss . . . . .	47
5.4	Preuve . . . . .	47
6	Mesure et topologie . . . . .	47
7	Ouvertures . . . . .	47
8	Intro . . . . .	49
8.1	(*) Caractérisation de la transitivité . . . . .	49
8.2	(*) Transitivité des Anosov linéaires . . . . .	49
9	Homéos du cercle . . . . .	49
9.1	(*) Existence d'un relevé . . . . .	49
9.2	(*) Existence du nb de rotation . . . . .	49
9.3	Cas rationnel (o.p.) . . . . .	49
9.4	(*) Cas irrationnel (semi-conjugaison, cas minimal) . . . . .	49
9.5	(**) Théorème de Denjoy . . . . .	49

9.6	(*) Contre-exemple de Denjoy . . . . .	49
10	Théorie ergodique I . . . . .	49
10.1	(**) Mesure invariante en dynamique topologique . . .	49
10.2	(**) Mesure de Liouville pour les hamiltoniens . . . .	49
10.3	(***) Théorème de Birkhoff . . . . .	49
10.4	(*) . . . . .	49
10.5	(*) . . . . .	49
10.6	. . . . .	49
<b>A</b>	<b>Divers</b>	<b>51</b>
<b>B</b>	<b>Bibliographie commentée</b>	<b>53</b>
<b>C</b>	<b>Feuilles d'exercices</b>	<b>57</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1 Motivations

#### 1.1 Motivations physiques...

**Origine des équations différentielles** À la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, Newton révolutionne la physique en inventant d'une part le calcul différentiel, et d'autre part la loi de la dynamique qui relie l'accélération d'un point matériel aux forces qui s'exercent sur lui. Il donne également la forme de la force de gravitation (inversement proportionnelle au carré de la distance). Les lois de Newton sont alors appliquées à l'étude de nombreux systèmes mécaniques, et conduisent à des équations différentielles. L'exemple le plus frappant est celui de la mécanique céleste : la théorie de Newton implique les trois lois que Kepler avaient énoncées au début du XVII<sup>ème</sup> siècle sur la base d'observations, lois qui décrivent le mouvement des planètes autour du Soleil (la plus célèbre dit que les planètes suivent des trajectoires elliptiques).

**Difficulté de résolution** On s'aperçoit rapidement qu'il est illusoire d'espérer résoudre toutes les équations différentielles à partir des fonctions usuelles. Reprenons l'exemple de la mécanique céleste. Les lois de Kepler s'obtiennent en considérant le mouvement de *deux* corps dans l'espace. Or des différences apparaissent entre ces lois et l'observation du ciel, en particulier dans le mouvement de la Lune autour de la Terre (ce qui gêne les navigateurs qui veulent calculer leur position). Ces différences sont attribuées à l'influence des autres planètes qu'on a négligée en première approximation, par exemple à l'attraction du Soleil dans le cas de la Lune. Ceci conduit à écrire les équations du mouvement de *trois* corps, ce qui n'est pas plus compliqué, et à essayer de les résoudre, ce qui est une autre histoire ! De nombreux savants des XVIII<sup>ème</sup> et XIX<sup>ème</sup> siècles se frottent au problème ; malgré l'introduction des méthodes de perturbation, aucun ne parvient à répondre à la question la plus brûlante : le Système Solaire est-il *stable* ?...

**Le changement de point de vue de Poincaré** Deux siècles après Newton, Poincaré a pris acte de l'impossibilité de résoudre la plupart des équations différentielles issues de la mécanique, et proposé...

ii...d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples...*ii*

Une telle étude, dit-il, consiste d'abord en une...

ii...partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction (...)

Cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des trois corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites?...*ii*

Ce renversement de point de vue, de l'étude analytique vers l'étude géométrique des équations différentielles, marque la naissance des Systèmes Dynamiques en temps que branches des mathématiques.

**Complexité des systèmes physiques** Parmi les systèmes dont le comportement est complexe bien qu'ils soient régis par un petit nombre de paramètres, l'exemple physique le plus frappant (inconnu au XIXème siècle) est sans doute le pendule double. Il n'y a que 4 paramètres, et pourtant le comportement semble parfaitement imprévisible.

**Question 1.** *Peut-on expliquer mathématiquement le comportement apparemment aléatoire du pendule double ? Peut-on prouver la "sensibilité aux conditions initiales" ? Existe-t-il des conditions initiales à partir desquelles le petit pendule effectue  $n_1$  tours vers la droite, suivis de  $n_2$  tours vers la gauche, etc., où la suite  $(n_1, n_2, \dots)$  est imposée ?...*

Un autre exemple (théorique, celui-là) est donné par les billards. Il faut dire que les mathématiciens ont une façon bien à eux de jouer au billard : ils n'ont besoin que d'une seule boule, mais leur table est sur coussin d'air, et elle n'a pas de trou ; ils cherchent à décrire la trajectoire de leur boule sur un temps infiniment long. Si la table est circulaire, ceci ne pose pas de problème... que se passe-t-il pour des tables de forme différente ?

**Question 2.** *Si on change la forme de la table de billard, existe-t-il toujours des trajectoire périodiques ? Existe-t-il des trajectoires qui "vont partout" ? etc.*

On peut préciser la question : par exemple, on ne sait pas si tous les billards de forme triangulaire admettent une trajectoire périodique !<sup>1</sup>

---

1. On sait seulement répondre pour les triangles aigus : montrer que le triangle reliant les pieds des hauteurs est une trajectoire...



**La théorie mathématique des systèmes dynamiques** L'aspect le plus important de la démarche de Poincaré consiste à remplacer l'impossible étude analytique par une étude géométrique. Un autre glissement concerne les objets étudiés : les systèmes qui proviennent de problèmes physiques (comme les trois corps ou le pendule, et même les billards) sont souvent très difficiles à étudier mathématiquement. C'est pourquoi, à la suite de Poincaré, les mathématiciens se sont d'abord penchés sur des systèmes plus simples, plus naturels d'un point de vue mathématique. Ainsi, Poincaré "remplace" l'étude du problème des trois corps par l'étude des géodésiques sur une sphère bossue, en espérant y retrouver des problèmes de même nature mais de moindre difficulté.

Les systèmes "les plus simples parmi les systèmes compliqués", ont été introduits, en gros, dans la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Il s'agit par exemple des champs de vecteurs sur les surfaces et des homéomorphismes du cercle (premiers systèmes étudiés géométriquement par Poincaré), du "fer à cheval" de Smale (19??), des automorphismes du tore (introduits par Thom), de l'application de doublement de l'angle, du décalage sur l'ensemble de Cantor... Ces systèmes fournissent des modèles à partir desquels on peut, ensuite, tenter de comprendre les systèmes plus compliqués. Ce sont les premiers objets que l'on étudie dans un cours d'introduction aux systèmes dynamiques!<sup>2</sup>

## 1.2 ...et motivations mathématiques

Bien d'autres problèmes physiques conduisent à des systèmes dynamiques. C'est aussi le cas de certaines questions de dynamique des populations (depuis les lapins de Fibonacci jusqu'à la l'évolution de la population d'un pays), d'épidémiologie, d'économie *etc.*

De manière (peut-être) un peu plus surprenante, certaines questions purement mathématiques présentent des analogies avec les problèmes d'évolution des systèmes physiques. En voici quelques-unes (parmi tant d'autres).

**Question 3.** *On considère la suite des puissances successives de 2, dans laquelle on ne garde que le premier chiffre :*

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \dots$$

*Quelle est la proportion de 7 dans cette suite ?*

---

2. Certaines passerelles entre l'étude mathématique des systèmes dynamiques et la Physique ont été rétablies à partir des années 1970 : Ruelle et Takens proposent un modèle mathématique de la turbulence impliquant un "attracteur étrange" ; à partir d'un modèle météorologique, Lorenz découvre un champ de vecteurs en dimension 3 avec une dynamique compliquée ; Hénon propose un difféomorphisme du plan ayant le même type de propriétés. Tous ces objets ont d'abord été étudiés numériquement, et l'approche mathématique, même si elle est largement entamée, reste difficile.

Pour vous aider, voici le nombre de 1, de 2, de 3, *etc.* pour les 10 premières, 100 premières, 1000 premières et 10000 premières puissances :

$$[4, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0]$$

$$[31, 17, 13, 10, 7, 7, 6, 5, 5]$$

$$[329, 191, 137, 106, 85, 75, 62, 57, 49]$$

$$[3011, 1761, 1249, 970, 791, 670, 579, 512, 458].$$

Expliquer !!

**Question 4.** *Que peut-on dire des chiffres du développement binaire de presque tous les nombres réels ; ou des entiers de leur développement en fraction continue ?*

3

## 2 Définition très (trop) générale

Bien que l'étude d'exemples explicites y jouent un rôle très important, la théorie des systèmes dynamiques ne se limite pas à un catalogue de systèmes étudiés indépendamment ; on cherche aussi à établir des propriétés valables dans un cadre général.

**Définition** Pour définir un système dynamique, on doit spécifier :

- un espace de configurations du système, ou “espace des phases” ;
- une loi d'évolution, qui donne l'état futur du système en fonction de l'état présent.

Etant donnés un espace de configuration et une loi d'évolution, le dynamicien s'intéresse au comportement asymptotique du système : que se passe-t-il quand on attend un temps infini ?

**Temps continu ou discret** Avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que (sous les bonnes hypothèses) une équation différentielle possède une unique solution une fois qu'on s'est donné une condition initiale. Autrement dit, en intégrant l'équation, on obtient un *flot*, c'est-à-dire une famille de difféomorphismes  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  ; si  $x$  représente l'état du système au temps 0,  $\Phi^t(x)$  sera l'état du système au temps  $t$ . Dans le cas des équations *autonomes* (invariantes dans le temps), cette famille vérifie la loi d'addition  $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$ . On dit qu'on a obtenu un système dynamique à *temps continu*.

Dans ce cours, on considérera principalement les systèmes dynamiques à *temps discrets* : l'espace des configurations est un certain ensemble  $X$ , la

---

3. Autres questions possibles : y a-t-il des géodésiques fermées sur une sphère bossue (de dimension 2) ? Que se passe-t-il quand on applique la méthode de Newton de recherche des zéros d'une fonction en dehors du bassin d'attraction d'un zéro ?...

loi d'évolution est donnée par une application  $f$  de  $X$  dans lui-même : si  $x$  représente l'état du système à un instant donné,  $f(x)$  est l'état à l'instant "suivant". On s'intéresse alors aux *orbites* de  $f$ , c'est-à-dire aux suites

$$(x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots)$$

où  $x$  est un point de  $X$  (et  $f^n$  désigne la  $n$ ème *itération* de l'application  $f$ , par exemple  $f^2(x) = f(f(x))$ ). On supposera très souvent que  $f$  est inversible.

D'un point de vue algébrique, un système à temps continu est une action du groupe  $\mathbb{R}$ , alors qu'un système à temps discret (inversible) est une action du groupe  $\mathbb{Z}$ .

Il y a plusieurs passerelles entre systèmes à temps continus et systèmes à temps discret. La plus simple est la suivante : étant donné une famille de difféomorphismes  $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  comme ci-dessus, on pose  $f = \Phi^1$  ; la loi d'addition garantit que  $f^n = \Phi^n$ , on est ainsi ramené à étudier l'itération de  $f$ .<sup>4</sup> L'avantage des systèmes dynamiques discrets est qu'on y trouve essentiellement les mêmes idées que dans les systèmes à temps continus, en y évitant certaines des difficultés techniques.<sup>5</sup>

**Structures et branches des Systèmes Dynamiques** Aucune théorie mathématique ne peut être faite dans un cadre aussi général : pour pouvoir dire des choses intéressantes, il faut supposer que l'application  $f$  préserve une structure sur l'espace des phases  $X$ . Par exemple, on peut étudier un système dynamique topologique ( $f$  est une application continue sur un espace topologique  $X$ ,  $X$  est souvent supposé compact) ; ou différentiable (avec différentes régularités), ou mesurable, ou hamiltonien<sup>6</sup>, *etc.*. De plus, nous verrons que les propriétés dynamiques dépendent souvent de façon cruciale de la "forme" de l'espace  $X$  (en particulier, de sa dimension). Ainsi, le premier chapitre du cours s'occupe exclusivement du cas du cercle (ce qui ne veut pas dire que les idées qui y sont développées n'aient pas été récupérées dans d'autres cadres!).

**Exercice 1 (Le pendule).** Donner l'espace des phases du pendule simple, puis du pendule double.

**Exercice 2 (Le billard).** Donner l'espace des phases du billard : comment en faire un système dynamique à temps discret ?

---

4. En pratique, on ne fait *jamais* ceci, parce qu'il y a une perte d'information énorme ; on utilise plutôt une *section de Poincaré* (voir plus loin), qui permet de compenser le passage du temps continu au temps discret par une diminution de la dimension de l'espace des phases.

5. Autrement dit, l'étude des systèmes à temps discret est plus naturelle d'un point de vue mathématique.

6. Nous préciserons ces différents cadres au fur et à mesure du cours.

**Méditation.** *Le lecteur est invité à réfléchir à la formulation des questions arithmétiques de la section précédente en termes de systèmes dynamiques (réponses plus loin).*

### 3 Premiers exemples (des comportements modèles)

On en profite pour introduire quelques notions de dynamique topologique : conjugaison, point fixe, orbite périodique, minimalité, transitivité.

**Remarque** Tel le bourgeois-gentilhomme faisant de la prose sans le savoir, le lecteur a probablement déjà rencontré des exemples de systèmes dynamiques élémentaires. Dans les petites classes, on étudie des systèmes dynamiques en dimension 1, non inversibles, sous le nom de “suites définies par une relation de récurrence”. De même, l’itération des applications linéaires en dimension quelconque apparaît (en DEUG) comme “suites récurrentes linéaires d’ordre  $n$ ”. Enfin, les théorèmes de réduction des endomorphismes peuvent être vus comme des résultats de classification de systèmes dynamiques (à conjugaison linéaire près) ; et on utilise cette classification pour connaître le comportement asymptotique des orbites des endomorphismes, par exemple quand on étudie les suites récurrentes linéaires.

#### 3.1 Homothéties (conjugaison)

Dans le cadre général de dynamique topologique : définition d’une orbite, d’un *point fixe*.

Définition de la conjugaison (topologique).

Remarque fondamentale : une conjugaison envoie orbites sur orbites.

Homothéties de la droite ou du plan. Description des orbites.

Un physicien nous dirait : on peut aussi regarder ça en polaire :  $(r, \theta) \mapsto (kr, \theta)$ . “C’est la même application, vue dans des coordonnées différentes”. Comment formaliser ceci ?...<sup>7</sup> *Pour un dynamicien, deux systèmes dynamiques sont “les mêmes” si les applications correspondantes sont conjuguées : la conjugaison est l’isomorphisme des systèmes dynamiques.*

**Exercice 3 (Visualisation de la conjugaison).** Répondre sans papier ni crayon :

1. Qu’obtient-on en conjugant une translation horizontale du plan par une symétrie d’axe vertical ? Par une symétrie d’axe horizontal ? Par une autre translation ? Par une rotation ?
2. Qu’obtient-on en conjugant une rotation de la sphère par une autre rotation ?

---

7. On considérera que  $\theta$  vit dans le cercle  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice 4.** Qu'obtient-on en conjugant une homothétie du plan par l'exponentielle complexe?

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ (\theta, r) &\mapsto \exp(r) \exp(2i\pi\theta).\end{aligned}$$

(Remarquer que  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  se dessine comme un cylindre).

**Exercice 5.** Toutes les homothéties contractantes ont la même dynamique d'un point de vue topologique.

### 3.2 Translation de $\mathbb{R}$ (domaine fondamental)

Soit  $\tau$  la translation de  $\mathbb{R}$  donnée par  $\tau(x) = x + 1$ .

**Proposition 3.1.** *Soit  $h$  un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$ , (autrement dit une application continue, strictement croissante tendant vers  $-\infty$  en  $-\infty$  et vers  $+\infty$  en  $+\infty$ ). On suppose que  $h$  n'a aucun point fixe. Montrer que  $h$  est conjugué à la translation  $\tau$ .*

### 3.3 Rotations du cercle (orbites périodiques, minimalité)

Le cercle est  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ou bien le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Deux points de vue (conjugués) sur les rotations. Description des orbites : cas rationnel (dessin 1/5, 2/5) ; cas irrationnel.

**Exercice 6.** Décrire les rotations du tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

**Méditation.** *Comment classifier les rotations? cf. plus loin...*

Définition d'une orbite périodique ; d'un système dynamique transitif, minimal. Le commutant.

**Une excursion dans les systèmes à temps continu : les flots linéaires du tore  $\mathbb{T}^2$**  Flot sur  $\mathbb{R}^2$ , sur  $\mathbb{T}^2$ . Application de premier retour. Densité des orbites.<sup>8</sup>

### 3.4 Les Anosov du tore (transitivité)

On va décrire la dynamique de certaines applications du tore, appelées "Anosov linéaires", "application du chat d'Arnol'd"<sup>9</sup> ou encore "Automorphismes du tore" (d'après R. Thom).

**Dynamique plane** pour un élément de  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

Définition des automorphismes du tore. Les orbites périodiques sont denses.

8. Ceci nous aidera pour prouver la transitivité des Anosov linéaires du tore, cf. ci-dessous. Voir aussi l'introduction historique sur les nombres de rotation.

9. Le livre d'Arnol'd et Avez de théorie ergodique montre l'image d'un matou par une telle transformation.

Remarque : quand c'est inversible, pré-périodique implique périodique.

Définition d'une orbite positive, de *positivement topologiquement transitif* (en terme d'ouverts).

### Transitivité de l'application d'Arnol'd <sup>10</sup>

**Proposition 3.2.** *Soit  $X$  un espace topologique. On suppose que  $X$  est*

1. *métrisable complet ;*
2. *séparable<sup>11</sup> ;*
3. *sans point isolé<sup>12</sup>.*

*Soit  $f$  une application continue de  $X$  dans  $X$ . Alors  $f$  admet une orbite positive dense si et seulement si  $f$  est positivement topologiquement transitif.*

*Preuve — ... □*

En corollaire de la preuve, si  $f$  admet une orbite positive dense, alors presque tout point (au sens de Baire) est d'orbite positive dense ; et aussi d'orbite négative dense !

*Preuve de la transitivité de l'application d'Arnol'd — ... □*

### Bilan provisoire

1. On a introduit des définitions générales de dynamique topologique, permettant de décrire différents types d'orbites : point fixe, orbite périodique, transitivité, minimalité. Et aussi la conjugaison !
2. Les exemples “élémentaires” que nous venons d'étudier vont servir de modèles pour différents types de dynamiques : dynamiques *non récurrentes* (translation, homothétie) ; dynamiques *quasi-périodiques* (rotations du cercle) ; dynamiques *hyperboliques* (application d'Arnol'd).

*Fin de la partie exposée en cours.*

---

10. On utilise ici la densité des droites irrationnelles dans le tore.

11. Il existe une suite dense, ce qui équivaut (dans les espaces métriques) à l'existence d'une base dénombrable d'ouverts.

12. Aucun singleton n'est ouvert, autrement dit tout ouvert contient une infinité de points.

## 4 Autres exemples intéressants

### 4.1 Doublement de l'angle

13

### 4.2 Dynamique symbolique

14

## 5 Exemples de systèmes issus d'autres domaines

15

### 5.1 Méthodes numériques itératives

16

### 5.2 Dynamique des populations, écologie

## 6 Un mot sur les systèmes dynamiques continus

17

## 7 Ouvertures : théorie géométrique des groupes et feuilletages

18

---

13. ? Plus tard

14. ? Plus tard. Semi-conjugaison avec le doublement. Lien arithmétique.

Le décalage inversible : définition. Trouver les orbites périodiques, trouver une orbite dense.

Sous-décalages de type fini ? (chaines de Markov, exemples de modélisation...)

Pavages quasi-périodiques ?

15. ? SECTION A ETOFFER LE PLUS POSSIBLE !!

des maths : méthodes numériques

dynamique des pop : chaines de Markov, application logistique.

Météo.

physique : tout Newton....!! pendule double ?

Informatique : réseaux de neurones, algorithmes génétiques. Pbs d'impression de Tresser ? Le jeu de la vie !! Et Misiurewicz...

Logistique : cf le tetris de Thierry ?

16. ? La méthode de Newton. Calcul de valeurs propres.

17. ? Définitions. Application de Poincaré, suspension. (ex : billard, flots linéaires du tore, ...)

18. ou bien à la fin

**7.1 Le temps change de groupe...****7.2 Le temps disparaît...**

*cf* Poincaré Bendixson.

**8 Exercices supplémentaires**

*cf.* feuille d'exos à la fin.



## Chapitre 2

# Homéomorphismes du cercle

### 1 Un peu d'Histoire : Poincaré et les champs de vecteurs du tore

Dans son *mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, paru en quatre fois entre 1881 et 1886, Henri Poincaré inaugure l'étude qualitative des équations différentielles.<sup>1</sup> Le mémoire est principalement consacré aux surfaces. Dans le chapitre XV, il étudie les champs de vecteurs sur le tore, ce qui le conduit à utiliser ce qu'on appelle aujourd'hui une *section de Poincaré*, puis à définir le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle.

Entrons un peu plus dans les détails. Poincaré voit le tore comme une surface de révolution dans  $\mathbb{R}^3$ , paramétrée par les angles  $\phi$  et  $\omega$  (mais le fait que ce qui suit ne dépend que de la "géométrie de situation" (structure topologique) est explicite). Après quelques considérations générales, il se place dans le cas où  $\frac{d\phi}{dt}$  et  $\frac{d\omega}{dt}$  sont strictement positives ; si  $t \mapsto (\phi(t), \omega(t))$  est une courbe solution de l'équation différentielle, les coordonnées  $\phi$  et  $\omega$  sont donc des fonctions croissantes du temps  $t$ .

Dessins : dans les coordonnées "modernes", dans  $\mathbb{R}^3$ .

Poincaré considère alors le méridien  $\phi = 0$  : c'est un cercle qui est transverse au champ de vecteurs (Poincaré dit que c'est un "cycle sans contact"). Ce qui suit est extrait de l'article original :

ii Soit  $M(0)$  un point de ce méridien où se trouve le point mobile à l'origine des temps. Ce point aura pour coordonnées

$$(\phi = 0, \omega = \omega_0).$$

Si l'on fait croître le temps,  $\omega$  et  $\phi$  croîtront également, de sorte que  $\phi$  finira par devenir égal à  $2\pi$  ; le point mobile sera venu alors en un point  $M(1)$  qui sera situé sur le cycle sans contact<sup>2</sup>  $\phi = 0$  d'où nous

---

1. Voir la citation en introduction.

2. Le méridien.

sommes partis, qui sera le conséquent<sup>3</sup> du point  $M(0)$  et qui aura pour coordonnées

$$(\phi = 2\pi, \omega = \omega_1).$$

Les deux quantités  $\omega_0$  et  $\omega_1$  seront liées par une relation qui n'est autre que la loi de conséquence du Chapitre V. J'écrirai cette loi sous la double forme

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \quad \omega_0 = \theta(\omega_1).$$

Les hypothèses faites permettent d'énoncer au sujet de cette loi de conséquence les principes suivants :

**Premier principe.** — La fonction  $\psi$  est continue.

**Second principe.** — La fonction  $\psi$  croît constamment avec  $\omega_0$ , de telle sorte que

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} > 0,$$

et de plus, on a

$$\psi(\omega_0 + 2\pi) = \psi(\omega_0) + 2\pi.$$

**Troisième principe.** — La fonction  $\psi$  est holomorphe pour toutes les valeurs réelles de  $\omega_0$ .<sup>4</sup>

D'ailleurs, il est clair que la fonction  $\theta$  jouit des mêmes propriétés que la fonction  $\psi$ .<sup>5</sup>

Soient maintenant  $M(1), M(2), \dots, M(i)$  les conséquents successifs et  $M(-1), M(-2), \dots, M(-i)$  les antécédents successifs de  $M(0)$ . Leur coordonnées  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$  nous seront données par les équations

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \omega_2 = \psi\psi(\omega_0), \omega_3 = \psi\psi\psi(\omega_0), \dots,$$

$$\omega_{-1} = \theta(\omega_0), \omega_{-2} = \theta\theta(\omega_0), \omega_{-3} = \theta\theta\theta(\omega_0), \dots$$

Les points  $M$  forment un ensemble de points que j'appellerai  $P$ , d'après la notation adoptée par M. Cantor. J'appellerai  $P'$  l'ensemble dérivé de  $P$ , c'est-à-dire l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points appartenant à l'ensemble  $P$ . (...)

Je puis alors me poser les questions suivantes :

1. Quelles sont les propriétés de l'ensemble  $P$  des points  $M$  et de ses dérivés?
2. Dans quel ordre circulaire sont distribués les points  $M$  sur le cercle méridien  $\phi = 0$ ?

(...)  $\mathcal{L}\mathcal{L}$

---

3. C'est-à-dire le point d'intersection suivant.

4. Ceci vient d'hypothèses d'analyticité du champ de vecteurs.

5. Avec le vocabulaire actuel,  $\psi$  est donc un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$ .

La définition du nombre de rotation apparaît un peu plus loin :

ii Occupons-nous maintenant de déterminer l'ordre circulaire dans lequel sont disposés les points  $M(i)$ , en laissant de côté le cas où il y a un cycle limite<sup>6</sup> et où cet ordre se détermine aisément.

Soient  $\alpha_0$  la longueur de l'arc  $M(0)M(1)$ ,  $\alpha_1$  celle de l'arc  $M(1)M(2)$ ,  $\dots$ , et, en général,  $\alpha_i$  celle de l'arc  $M(i)M(i+1)$ . Je dis que le rapport

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{i+n}}{n}$$

tendra, quand on fera croître  $n$  indéfiniment, vers une limite finie, déterminée, indépendante de  $i$ , mais incommensurable avec  $2\pi r$ .<sup>7</sup> *l.l.*

La théorie topologique est non triviale, mais parfaitement comprise par Poincaré. La théorie lisse est plus complexe, elle est abordée par Denjoy en 1932. Plus tard, Arnol'd (1961), puis Herman (1979), Yoccoz, ... s'occuperont de la théorie analytique, où apparaissent les problèmes de *petits diviseurs*... Dans ce cours, nous exposons les théories de Poincaré et de Denjoy.

## 2 Généralités sur les homéomorphismes du cercle

### 2.1 Notations

Définition, notations : le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , le revêtement universel  $\pi$ , la topologie quotient (et sa métrique). C'est un groupe.

Un relevé (def).

### 2.2 Géométrie des applications continues du cercle

**Proposition 2.1.** *Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Alors il existe une application  $\tilde{f}$  qui relève  $f$ , c'est-à-dire telle que  $\pi\tilde{f} = f$ .*

**Corollaire 2.2.** *Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  une application continue. Il existe alors une application  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui relève  $f$ , c'est-à-dire telle que  $\pi\tilde{f} = f\pi$ .*

*De plus, les applications qui relèvent  $f$  sont exactement les application  $\tilde{f} + k$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Preuve du corollaire. Exemples : rotations,  $z \mapsto z^p$ .

*Preuve de la proposition* — On introduit les inverses de  $\pi|_{]0,1[}$  et  $\pi|_{]-1/2,1/2[}$  (homéos).

D'abord le cas trivial où l'image de  $f$  n'atteint pas 0 ou 1/2. Puis le cas compact (les composantes connexes de  $f^{-1}(\pi(]0,1[))$  et celles de

6. Une orbite périodique.

7.  $2\pi r$  est la longueur du méridien.

$f^{-1}(\pi(]-1/2, 1/2[))$  forment un recouvrement ouvert de  $I$ ). Puis le cas général (localement compact !).  $\square$

**Le degré** Intuition. Définition formelle. Propriétés : invariant (total) d'homotopie, morphisme de (semi-)groupes

### 2.3 Homéomorphismes du cercle

Notation  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ .

**Remarque 2.3.** Un homéomorphisme du cercle est de degré 1 ou  $-1$ .

*Preuve* — ...  $\square$  Notation  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$  (sous-groupe d'indice 2).

**Bilan** Dans la suite, on va considérer  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ . Ceci équivaut à se donner une application  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est (cf. Poincaré)

(Hypothèse 1) continue ;

(Hypothèse 2) strictement croissante, et telle que  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$ .

La relation  $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1$  équivaut à dire (**hypothèse 2'**) que  $\tilde{f} = \text{Id} + d_1$  avec  $d_1$  1-périodique (en particulier,  $d_1$  est bornée).

Notion d'ordre cyclique. Un homéo  $h$  est de degré 1 ssi il préserve l'ordre cyclique.

## 3 La théorie topologique de Poincaré

Pour toute cette section, on se donne un homéomorphisme du cercle  $f$  préservant l'orientation, et  $\tilde{f}$  un relevé de  $f$ .

### 3.1 Définition du nombre de rotation

Soit  $\tilde{x}$  un réel. On note  $d_n(\tilde{x})$  le déplacement de  $\tilde{x}$  quand on itère  $n$  fois :

$$d_n(\tilde{x}) = \tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x} = (\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}) + \cdots + (\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{f}^{n-1}(\tilde{x})).$$

Nous allons étudier la suite des déplacements moyens  $\frac{d_n(x)}{n}$  (dessin).

**Théorème 3.1 (Poincaré).** *La suite d'applications  $\frac{d_n}{n}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une constante.*

**Définition 3.2.** Cette constante est appelée *nombre de rotation*<sup>8</sup> de  $\tilde{f}$ , et notée  $\rho(\tilde{f})$ .

---

8. Certains auteurs préfèrent parler de *nombre de translation*...

**Lemme 3.3.** *Pour tous  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ , on a*

$$|d_1(\tilde{x}) - d_1(\tilde{y})| < 1.$$

*Preuve* —

- On peut supposer que  $\tilde{y} \in [\tilde{x}, \tilde{x} + 1[$  ;
- Alors c'est OK (dessin).  $\square$

En appliquant le lemme à  $f^n$ , on obtient :

**Corollaire 3.4.** *Pour tout  $n \geq 1$ , pour tous  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ , on a*

$$|d_n(\tilde{x}) - d_n(\tilde{y})| < 1.$$

Du coup si on trouve un  $\tilde{x}$  tel que la suite  $(\frac{d_n(\tilde{x})}{n})$  converge, on aura la convergence uniforme de  $(\frac{d_n}{n})$ .

*Preuve du théorème* — On va appliquer le critère de Cauchy ; on utilisera une division euclidienne de  $m = qn + r$  : itérer  $m$  fois  $\tilde{f}$ , c'est itérer  $q$  fois  $\tilde{f}^n$  (plus un chouia). Ceci permet de comparer  $d_m$  et  $d_n$ . ...  $\square$

### 3.2 Propriétés

- 1)  $\rho$  est un invariant de conjugaison.
  - 2)  $\rho(\tilde{f} + p) = \rho(\tilde{f}) + p$ . Du coup, on peut définir  $\rho(f)$  !
  - 3)  $\rho(f^q) = q\rho(\tilde{f})$ .
- Exemple :  $\rho(R_\alpha) = \alpha$  !

### 3.3 Nombre de rotation rationnel

Une fois qu'on a réussi à définir un invariant de conjugaison, on peut se poser un certain nombre de questions :

– Question 1 : est-ce un invariant total ? Dans notre contexte, deux homéomorphismes du cercle ayant le même nombre de rotation sont-ils nécessairement conjugués ?

– Question 2 : Quels liens y a-t-il entre la valeur de l'invariant et la dynamique de l'application, *i.e.* les propriétés asymptotiques des orbites ?

Concernant la deuxième question, voici un premier résultat.

**Proposition 3.5.** *Le nombre de rotation de  $f$  est rationnel si et seulement si  $f$  possède une orbite périodique. Plus précisément :*

*Soit  $p/q$  une fraction irréductible. Sous les hypothèses du théorème précédent,*

$$\rho(\tilde{f}) = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \exists \tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{f}^q(\tilde{x}) = \tilde{x} + p,$$

*(et le point  $\pi(\tilde{x})$  est alors périodique, de période exactement  $q$ ).*

*Preuve* — On se ramène facilement au cas  $p/q = 0/1$ . Il suffit alors de montrer que si  $\tilde{f}$  pousse strictement les points vers la gauche, le nb de rotation est strictement positif, ce qui est OK par compacité du cercle.  $\square$

On peut répondre aussi à la première question dans le cas rationnel : la classification des homéos croissants du cercle de nombre de rotation  $p/q$  fixé équivaut à celle des homéos croissants de l'intervalle  $[0,1]$  (via l'application de premier retour dans un intervalle périodique)...

### 3.4 Nombre de rotation irrationnel

Sous les mêmes hypothèses et notations, on suppose que  $\alpha = \rho(\tilde{f}) \in \mathbb{R}$  est irrationnel. D'après ce qui précède, on sait déjà que  $f$  n'a aucune orbite périodique. On note  $R_\alpha$  la rotation d'angle  $\alpha$  (dans le cercle), et on choisit le relevé  $\tilde{R}_\alpha$  qui a pour nombre de rotation  $\alpha$  (i.e. la translation  $\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + \alpha$  dans  $\mathbb{R}$ ).

#### Point de vue combinatoire

Nous allons montrer que les points des orbites de  $h$  sont cycliquement ordonnés sur le cercle comme ceux de la rotation : plus précisément, pour  $x$  et  $y$  fixés, la bijection

$$f^n(x) \mapsto R_\alpha^n(y)$$

préserve l'ordre cyclique. D'un point de vue combinatoire, ces deux applications coïncident.

**Proposition 3.6.** *Pour tous  $p_1, p_2, q_1, q_2$  dans  $\mathbb{Z}$ , pour tout  $\tilde{x}$  dans  $\mathbb{R}$ ,*

$$\tilde{f}^{q_1}(\tilde{x}) + p_1 < \tilde{f}^{q_2}(\tilde{x}) + p_2 \Leftrightarrow \tilde{R}_\alpha^{q_1}(\tilde{x}) + p_1 < \tilde{R}_\alpha^{q_2}(\tilde{x}) + p_2.$$

Remarquons que le membre de droite équivaut à  $\alpha q_1 + p_1 < \alpha q_2 + p_2$ . Dessin dans le cercle (...).

*Preuve* — ...  $\square$

#### Point de vue topologique

On va améliorer le résultat précédent.

Définition générale de la semi-conjugaison (facteur, extension) ; c'est le morphisme des systèmes dynamiques, ça envoie orbites sur orbites (problème de l'image réciproque des points fixes).

Définition d'une application continue, de degré 1, *croissante* (elle admet un relevé croissant).

Rappel de la définition de transitif.

**Théorème 3.7 (Poincaré).**

1.  $f$  est transitive si et seulement si  $f$  est conjuguée à la rotation  $R_\alpha$  ;
2. Sinon,  $f$  est semi-conjuguée à  $R_\alpha$  via une application  $g$  continue, de degré 1, croissante, (non injective).

*Preuve* — (\*).....  $\square$

Remarque: ici transitif équivaut à minimal (si une orbite est dense, toutes le sont).

### 3.5 Description de la dynamique dans le cas irrationnel non transitif

#### Définitions de dynamique topologique

L'ensemble  $\omega$ -limite de  $f$  (et  $\alpha$ -limite dans le cas inversible). C'est un fermé positivement invariant (totalement invariant si  $f$  est inversible, non vide si  $X$  est compact).

Définition d'un intervalle *errant*, d'un point errant.

(Un point dans un ensemble  $\omega$ -limite ne peut pas être errant.)

#### Description dynamique

On considère un homéo  $f$  croissant, de relevé  $\tilde{f}$ , de monbre de rotation irrationnel.

**Proposition 3.8.** *Si  $f$  n'est pas transitif, alors :*

1. l'ensemble  $\omega(x)$  est indépendant de  $x$  (on le note  $\omega(f)$ ) ;
2. il s'agit de l'unique ensemble fermé, non vide, totalement invariant, et minimal pour ces propriétés ;
3. c'est un ensemble de Cantor (fermé, sans point isolé, d'intérieur vide) ;
4. tout intervalle du complémentaire de  $\omega(f)$  est errant ; et réciproquement, tout intervalle errant est disjoint de  $\omega(f)$  ;
5. si  $g$  réalise une semi-conjugaison avec la rotation irrationnelle, alors  $\omega(f)$  est l'ensemble complémentaire des palliers de  $g$ ,

$$\omega(f) = \mathbb{S}^1 \setminus \bigcup \{ \text{Intérieur}(g^{-1}(y)), y \in \mathbb{S}^1 \}.$$

9

**Lemme 3.9.** *Pour tous entiers  $n, m$  distincts, et pour tout intervalle  $I$  du cercle d'extrémités  $f^n(x)$  et  $f^m(x)$ , toute demi-orbite positive rencontre  $I$  : pour tout  $y$ , il existe  $l \geq 0$  tel que  $f^l(y) \in I$ .*

---

9. Dvlpmt : les Cantor en dynamique...

*Preuve du lemme* — C'est un résultat sur l'ordre cyclique des itérés, donc, en utilisant la semi-conjugaison croissante, il suffit de le montrer pour la rotation (...). Il suffit alors de prouver que toute demi-orbite positive pour une rotation irrationnelle est dense dans le cercle (pour tout  $x$ , l'ensemble  $\omega(x)$  est un fermé totalement invariant non vide, donc par minimalité c'est le cercle entier).  $\square$

*Preuve de la proposition* —

1) Si  $z$  est un point  $\omega$ -limite de  $x$ , alors on peut trouver des intervalles  $I$  du type du lemme inclus dans un voisinage arbitrairement petit de  $z$ ; le lemme entraîne alors que toute demi-orbite positive rencontre  $I$ , donc a aussi  $z$  comme point d'accumulation.

2) Si  $E$  est un ensemble fermé, non vide, totalement invariant, alors tout point de  $E$  a son  $\omega$ -limite inclus dans  $E$ ; donc  $E$  contient  $\omega(f)$ .

3) L'ensemble  $\omega(f)$  est clairement fermé et invariant. Il est sans point isolé: en effet toute orbite incluse dans  $\omega(f)$  y est dense. Il est d'intérieur vide: en effet, sa frontière est un ensemble fermé totalement invariant, donc, par minimalité,  $\omega(f)$  est inclus dans sa frontière (sauf si elle est vide).

4) Soit  $I$  un intervalle ouvert qui est une composante connexe du complémentaire de  $\omega(f)$ . Comme  $\omega(f)$  est invariant, si un itéré de  $I$  rencontre  $I$ , alors il lui est égal; mais ceci est impossible car  $f$  n'a pas de point périodique.

Réciproquement, tout point de  $\omega(f)$  est récurrent (*i.e.* vérifie  $z \in \omega(z)$ ), donc non errant, donc inclus dans aucun intervalle errant.

5) Cet ensemble est clairement fermé, totalement invariant, non vide (dénombrabilité...). Donc il contient  $\omega(f)$ . D'après le point précédent, comme la rotation n'a pas d'intervalle errant,  $g$  doit écraser tout intervalle complémentaire de  $\omega(f)$  en un point, ce qui prouve que le complémentaire de  $\omega(f)$  est inclus dans le complémentaire de cet ensemble. Donc c'est bon.  $\square$

## 4 La théorie différentiable de Denjoy

Dans le texte cité en introduction de ce chapitre, Poincaré étudie le cas où le nombre de rotation est irrationnel et l'homéomorphisme n'est pas transitif, et donc n'est pas conjugué à une rotation.<sup>10</sup> À la fin du texte, il s'interroge sur l'existence de telles applications :

;;Il resterait à voir si cette troisième hypothèse, dont nous venons de développer quelques conséquences, peut se réaliser, ou, en d'autres

---

10. Avec les notations de l'article d'origine, l'ensemble  $P'$  (valeurs d'adhérence d'une orbite) est d'intérieur vide.



termes, si elle est compatible avec les trois principes que nous avons énoncés plus haut au sujet de la loi de conséquence

$$\omega_1 = \psi(\omega_0)$$

et avec la forme particulière des équations différentielles considérées.

Je puis affirmer qu'elle est compatible avec les deux premiers principes, en vertu desquels la fonction  $\psi$  est continue et croissante.<sup>11</sup>

Est-elle également compatible avec le troisième principe, en vertu duquel la fonction  $\psi$  est holomorphe? C'est ce qui resterait à examiner.

Il faudrait, ou bien trouver un exemple où la troisième hypothèse soit réalisée, ce que je n'ai pu faire jusqu'ici, ou bien en démontrer l'impossibilité dans tous les cas.

Je n'ai pu non plus arriver à ce résultat, et je crois, d'ailleurs, que l'hypothèse est effectivement réalisable (...) *ii*

En 1932, contrairement à ce que Poincaré supposait vraisemblable, A. Denjoy démontre qu'un difféomorphisme du cercle, suffisamment régulier, de nombre de rotation irrationnel, est toujours conjugué à une rotation. C'est ce théorème, et ses contre-exemples de classe  $C^1$ , que nous allons exposer maintenant.

#### 4.1 Difféomorphismes de $\mathbb{S}^1$

Qu'est-ce qu'un difféomorphisme du cercle? Si on voit le cercle comme le quotient de  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{Z}$ , il est muni naturellement d'une structure différentiable...<sup>12</sup> Comme dans  $\mathbb{R}$ , on a une notion de dérivée : si  $f$  est une application différentiable du cercle dans lui-même, on notera  $f'$  sa dérivée (qui va de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}$ ). Remarquons que cette notion n'est pas invariante par conjugaison (même par une conjugaison différentiable)! Par contre, la dérivée en un point fixe de  $f$  est un invariant de conjugaison différentiable...

En pratique, un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{S}^1$  est donné par un relevé  $F$ , qui est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$ , et on a

$$F'(\tilde{x}) = f'(\pi(\tilde{x}))$$

ce qui rend inutiles toutes les considérations ci-dessus...

---

11. Autrement dit, Poincaré était conscient de l'existence d'homéomorphismes du cercle, de nombre de rotation irrationnel, qui ne sont pas conjugués à une rotation. On les appelle *contre-exemples de Denjoy*, nous les exposons plus loin ; la difficulté consiste à réaliser ces exemples comme  $C^1$ -difféomorphismes.

12. De plus, l'espace tangent en chaque point s'identifie naturellement à  $\mathbb{R}$ . Du coup, si on se donne une application différentiable du cercle dans lui-même, sa différentielle en un point peut-être vue comme une application linéaire de  $\mathbb{R}$ , et on peut l'identifier à un nombre, d'où la notion de dérivée.

## 4.2 Le contre-exemples de Denjoy

13

Remarque : notation  $[yz]$  dans le cercle.

**Théorème 4.1 (Denjoy).** *Pour tout nombre irrationnel  $\alpha$ , il existe  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$  de nombre de rotation  $\alpha$ , qui n'est pas transitif. De plus,  $f$  peut être choisi  $C^1$ -difféomorphisme.*

*Preuve* —

1) On considère une suite de réels strictement positifs  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  vérifiant

1.  $\sum \lambda_n = 1$  ;
2.  $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

2) On trouve une suite d'intervalles  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans  $\mathbb{S}^1$ , deux à deux disjoints, la longueur de  $I_n$  étant  $\lambda_n$ , et disposés sur le cercle dans le même ordre cyclique que les points d'une orbite de la rotation  $R_\alpha$  (pour ça, on peut appliquer un argument diagonal, ou bien construire  $(I_n)$  "explicitement"). La réunion de ces intervalles est automatiquement de mesure de Lebesgue totale (et donc dense), grâce à la condition 1.

3) On se fixe un point  $y$ , et on définit  $g$  sur la réunion des  $I_n$  en envoyant (pour chaque  $n$ )  $I_n$  sur  $R_\alpha^n(y)$  (ce sera la semi-conjugaison). On définit  $f$  en envoyant  $I_n$  sur  $I_{n+1}$

4) Il est clair que  $f$  et  $g$  s'étendent continûment, de manière unique, au cercle entier. Et il est clair que  $I_0$  est un intervalle errant pour  $f$ , et que le nombre de rotation de  $f$  est  $\alpha$ .

5) Il reste à voir comment construire  $f$  comme  $C^1$ -difféomorphisme. En utilisant la condition 2, on a pu choisir  $f$  avec dérivée 1 aux bords de chaque intervalle  $I_n$ , et tel que le Sup de  $|f'|$  sur  $I_n$  tende vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Il faut voir que cette précision fait de  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme. C'est le point délicat ! On peut utiliser le fait que la réunion des  $I_n$  est de mesure totale pour évaluer

$$\frac{\text{Longueur}(f([yz]))}{\text{Longueur}([yz])}$$

quand  $z$  tend vers  $y$ ...  $\square$

## 4.3 Le théorème de Denjoy

**Théorème 4.2 (Denjoy).** *Soit  $f$  un  $C^1$ -difféomorphisme de degré 1 de  $\mathbb{S}^1$  dans lui-même. Si  $f'$  est à variation bornée, et si le nombre de rotation*

---

13. Voir aussi la rédaction sous forme de "texte à trous" dans le chapitre "feuilles d'exercices".

de  $f$  est irrationnel, alors  $f$  est transitif (et par conséquent topologiquement conjugué à la rotation d'après le théorème de Poincaré).

**Définition 4.3.** La variation d'une fonction  $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est

$$\text{Var}(\phi) := \sup \left( \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_k) - \phi(x_{k+1})| \right)$$

où les intervalles  $[x_k, x_{k+1}[$  forment un recouvrement du cercle ( $x_n = x_0$ ).

La fonction  $\phi$  est dite à variation bornée si  $\text{Var}(\phi) < \infty$ .

Remarques :

0) Exercice : construire une fonction continue qui n'est pas à variation bornée.

1) Toute fonction  $C^1$  est à variation bornée (par l'intégrale de  $|\phi'|$ ). Le théorème s'applique donc aux  $C^2$ -difféos !

2)

$$\text{Var}(\phi) < \infty \Leftrightarrow \text{Var}(\log(\phi)) < \sup \frac{1}{\phi} \times \text{Var}(\phi) < \infty.$$

Pour la preuve, on a besoin d'estimations de distorsion, et d'étudier un peu la combinatoire.

### Un lemme d'analyse

**Lemme 4.4 (distorsion bornée).** Soit  $f$  satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{S}^1$  tel que

$$I, f(I), \dots, f^{n-1}(I)$$

soient disjoints deux à deux. Alors pour tous  $x, y$  dans  $I$ ,

$$\left| \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \right| \leq \text{Var}(\log(|f'|)) (< \infty).$$

La quantité à gauche dans l'inégalité s'appelle la *distorsion* de  $f^n$ . Noter que la distorsion d'une fonction affine est nulle, par conséquent la distorsion mesure le "défaut d'affinité" : une application a une grande distorsion si elle a des pentes grandes et des pentes petites...

*Preuve du lemme* — On applique la déf de la variation de  $\log(f')$ , à partir du sous-recouvrement par les itérés de  $[xy] \subset I$ . Et on remarque que  $(f^n)'(x)$  est le produit des dérivées de  $f$  le long de l'orbite de  $x$ . ...  $\square$

**Deux lemmes combinatoires** \*) Pour la rotation.

Soit  $(y_n)$  une orbite positive pour la rotation  $R_\alpha$ . Il existe une infinité de “plus proche retours” (dessin). Si  $y_q$  est un plus proche retour, l’intervalle FERMÉ  $H_q$  (le plus petit des deux intervalles d’extrémités  $y_0$  et  $y_q$ ) est disjoint de ses  $q - 1$  premiers itérés. On en déduit :

**Lemme 4.5.** *Pour toute orbite positive  $(y_n)$ , il existe une infinité d’entiers positifs  $q$  et d’intervalle  $H_q$  tels que*

1.  $H_q$  a pour extrémités  $y_0$  et  $y_q$  ;
2. les intervalles fermés

$$H_q, R_\alpha(H_q), \dots, R_\alpha^{q-1}(H_q)$$

sont disjoints 2 à 2.

\*\*) Pour  $f$ .

**Lemme 4.6 (combinatoire).** *Soit  $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$  de nombre de rotation irrationnel, et non transitif. Soit  $J$  un intervalle errant pour  $f$  (cf. section précédente).*

*Alors il existe une infinité d’entiers positifs  $q$ , et des intervalles  $I_q$  tels que*

- $I_q$  contient  $J$  et  $f^{-q}(J)$  ;
- les intervalles fermés

$$I_q, R_\alpha(I_q), \dots, R_\alpha^{q-1}(I_q)$$

sont disjoints 2 à 2.

*Preuve du lemme combinatoire* — Utiliser la semi-conjugaison de Poincaré et appliquer le premier lemme pour  $g(y)$ , où  $y$  est dans  $J$ . On pose ensuite  $I_q := f^{-q}(g^{-1}(H_q))$  (il faut mettre le  $f^{-q}$  à cause du signe  $-$ ...).  $\square$

*Preuve du théorème* — Le deuxième lemme combinatoire fournit un intervalle errant  $J$ , et  $I_q$  pour  $q$  arbitrairement grand. On applique le lemme de distorsion à  $I_q$  : pour tous  $x, y$  dans  $I_q$ ,

$$\left| \log \frac{|(f^q)'(x)|}{|(f^q)'(y)|} \right| \leq C.$$

Comme  $J$  est errant, la longueur de  $f^q(J)$  tend vers 0 quand  $q$  tend vers  $+\infty$ . Or cette longueur est à peu près celle de  $J$  multipliée par la valeur de  $(f^q)'$  sur  $J$  : plus précisément, elle est minorée par  $\text{Longueur}(J) \inf((f^q)'|_J)$ . Ceci montre qu’il existe  $x_q$  dans  $J$  tel que  $(f^q)'(x_q)$  tend vers 0.

De même, on trouve  $y_q$  dans  $f^{-q}(J)$  tel que  $(f^q)'(x_q)$  tend vers  $+\infty$ . Comme les points  $x_q$  et  $y_q$  sont dans  $I_q$ , ceci contredit l’estimée de distorsion.  $\square$

## 5 Ouvertures

\* Différentiabilité du conjugué.

Description de l'ensemble des conjugués (...): du coup, on peut parler de la régularité du conjugué (c'est la même pour tous).

Le théorème de Denjoy assure l'existence d'une conjugaison *topologique* sous une hypothèse de *différentiabilité de classe  $C^2$*  (ou au moins  $C^{1+VB}$ ). Il est naturel de se demander pourquoi on a perdu en régularité: existe-t-il ou non une conjugaison qui soit un difféomorphisme?...

La réponse est non en général: en 1961, Vladimir Arnol'd montre qu'*il existe un difféomorphisme analytique du cercle, de nombre de rotation irrationnel, pour lequel il n'existe pas de conjugaison de classe  $C^1$  avec la rotation*: autrement dit, la conjugante du théorème de Denjoy est un homéomorphisme, pas un difféomorphisme.

Cependant, ce résultat ne marche que pour des nombres de rotations très particuliers (ce sont des *nombre de Liouville*, qui sont "très bien approchés par les rationnels"). En 1979, Michel Herman montre un résultat dans la direction contraire au précédent<sup>14</sup>: *il existe un ensemble  $A \subset ]0,1[$ , de mesure de Lebesgue 1, tel que tout  $C^\infty$ -difféomorphisme  $f$  dont le nombre de rotation est dans  $A$  est  $C^\infty$ -conjugué à une rotation*. Jean-Christophe Yoccoz en donnera plus tard une version pour les  $C^3$ -difféomorphismes... Les nombres appartenant à l'ensemble  $A$  sont dits *diophantiens*, ils sont "mal approchés par les rationnels".

En utilisant les méthode dites "d'Anosov-Katok", on peut obtenir (sans trop de difficulté) une version faible du théorème d'Arnol'd: on construit des difféomorphismes  $f$  de classe  $C^\infty$  pour lesquels la conjugante n'est pas différentiable. L'idée consiste à obtenir  $f$  comme limite de conjugués à des rotations rationnelles, en "tordant" de plus en plus les conjugaisons.<sup>15</sup>

---

14. Ce second résultat avait été conjecturé par Arnol'd, qui en avait donné une version locale.

15. On construit beaucoup de choses avec des méthodes de ce genre, par exemple des difféomorphismes minimaux sur la sphère de dimension 3. Voir le livre Hasselblatt-Katok.



## Chapitre 3

# Théorie ergodique I

## 1 Introduction

### 1.1 Statistique des orbites

Reprenons le problème évoqué en introduction sur la statistique de la suite des premiers chiffres des puissances de 2 ; il s'agissait plus précisément de savoir quelle est la proportion de 7 dans cette suite. On peut transformer le problème pour l'intégrer au cadre des systèmes dynamiques. En effet, le premier chiffre d'un nombre  $x$  vaut  $k$  si et seulement si  $\log_{10}(x)$  est dans l'intervalle  $[\log_{10}(k) + p, \log_{10}(k+1) + p[$  pour un certain entier  $p$ . Le problème revient donc à déterminer si le nombre  $n \log_{10}(2)$  est dans l'intervalle  $[\log_{10}(7), \log_{10}(8)[$  modulo 1, autrement dit si

$$R_\alpha^n(0) \in I_7 := [\log_{10}(7), \log_{10}(8)[,$$

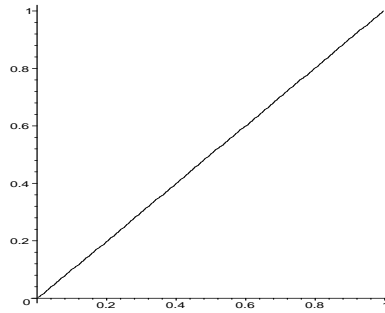
en posant  $\alpha := \log_{10}(2)$  et en notant  $R_\alpha$  la rotation d'angle  $\alpha$  sur le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , comme au chapitre précédent.

DESSIN

On aboutit à la reformulation suivante : *parmi les itérés positifs de 0 par la rotation d'angle  $\alpha$ , quelle proportion tombe dans l'intervalle  $I_7$  ?*

Comme la rotation  $R_\alpha$  est minimale, on sait que l'orbite positive de 0 va tomber une infinité de fois dans cet intervalle ; il s'agit donc de quantifier cette infinité en précisant la fréquence des retours. Du point de vue de la dynamique topologique, on a tout dit lorsqu'on a précisé le destin topologique de chaque point  $x$ , c'est-à-dire son ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(x)$ . Cette question de la fréquence des retours va donc nous amener à regarder la rotation sous un point de vue différent.

Faisons quelques expériences numériques. On trace un certain nombre (500) d'itérés de 0. Pour avoir une idée plus précise de leur répartition, on peut tracer la fonction  $x \mapsto$  proportion des itérés dans l'intervalle  $[0, x]$ . Il semble bien que la distribution de l'orbite de 0 dans le cercle soit "uniforme",

FIG. 3.1 – Les 500 premiers itérés de 0 pour la rotation d'angle  $\sqrt{2}$ 

régulière, et que la proportion d'itérés qui tombent dans un intervalle donné devrait être proportionnelle à la taille de l'intervalle. Nous allons devoir justifier ceci !

(La taille de l'intervalle  $I_7$  est  $\log_2 0(8/7) \simeq 0,05799\dots$  ; la proportion de 7 pour les 10000 premiers itérés est  $\frac{579}{10000}\dots$ )

Voici un autre exemple. L'application  $x \mapsto 2x^2 - 1$  définit un système dynamique (non inversible) sur l'intervalle  $[-1,1]$ . Prenons un point "au hasard", et dessinons ses 500 premiers itérés, puis la fonction de répartition.

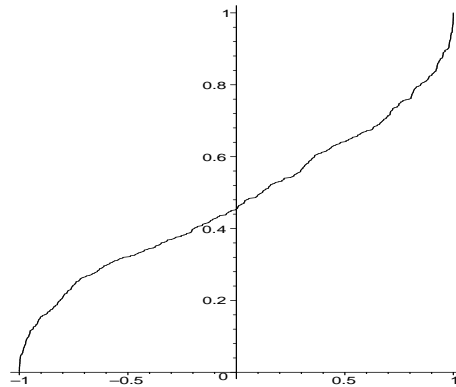


FIG. 3.2 – Expérience pour l'application quadratique

Là encore, l'expérience semble dire que l'orbite de  $x$  est dense ; contrairement au cas des rotations, les points ne sont pas distribués uniformément, les voisinages des extrémités de l'intervalle sont visités plus souvent. Signalons une autre différence : dans le cas des rotations, le comportement est le même pour toutes les orbites ; ça ne peut pas être le cas ici, puisque l'application possède des points fixes, des orbites périodiques... Cependant, on peut refaire l'expérience numérique en prenant d'autres points de départ (toujours



“au hasard” !).

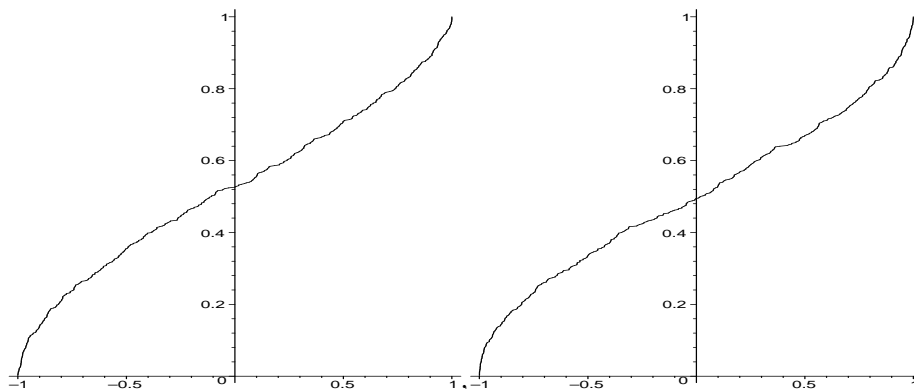


FIG. 3.3 – Avec d’autres conditions initiales “aléatoires”...

Comment décrire précisément ce phénomène, cette répartition statistique identique pour les orbites des points pris “au hasard” dans l’intervalle ?

### Autres expériences

On effectue les mêmes expériences pour...

– L’application “doublement de l’angle”  $x \mapsto 2x \bmod 1$  :

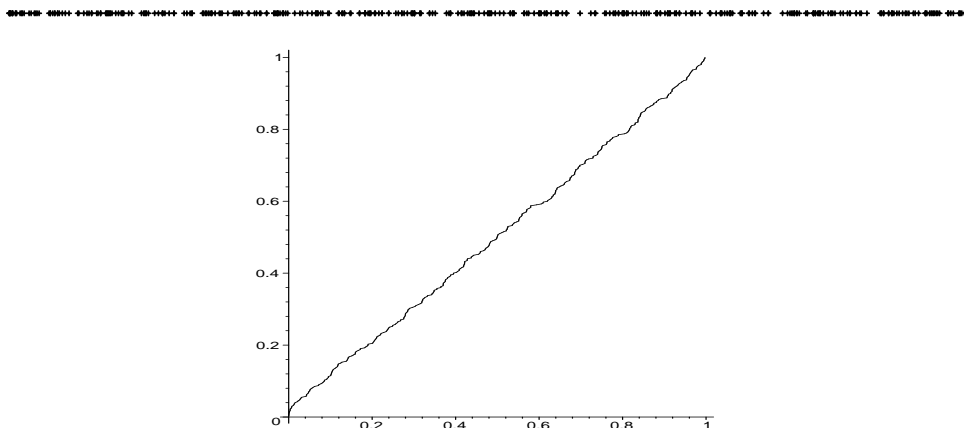


FIG. 3.4 – Répartition de 500 itérés d’un nombre “pris au hasard” sous l’action du doublement de l’angle

– Le “ $\theta$ -décalage”  $x \mapsto \theta x \bmod 1$  avec le nombre d’or  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ;  
 – l’application de Gauss  $x \mapsto 1/x \bmod 1$  (voir la partie sur les fractions continues pour la motivation).

Dans toutes ces expériences, l’orbite positive du point de départ semble dense, et l’ensemble  $\omega$ -limite est l’espace entier. Pourtant, d’un point de vue statistique, il ne se passe pas la même chose.

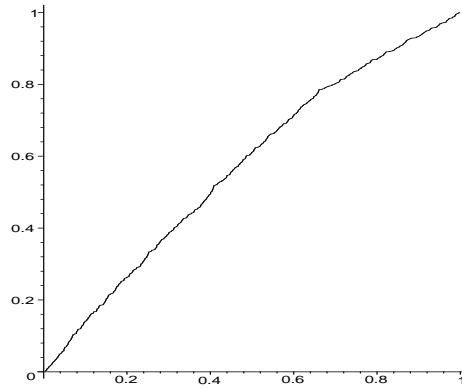


FIG. 3.5 – Répartition de 500 itérés d'un nombre "pris au hasard" sous l'action du  $\theta$ -décalage

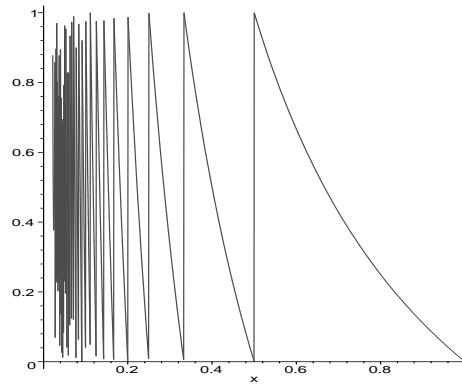


FIG. 3.6 – Le graphe de l'application de Gauss

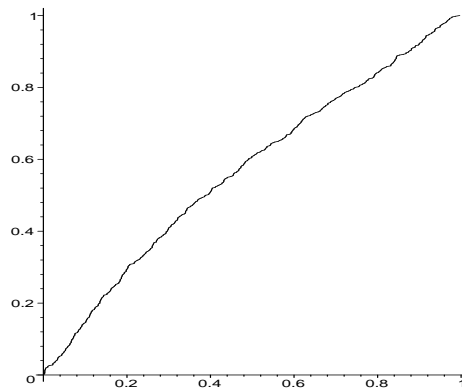


FIG. 3.7 – Répartition de 500 itérés d'un nombre "pris au hasard" sous l'action de l'application de Gauss

## 1.2 Le cadre

Le point de vue topologique ne suffit pas à expliquer les phénomènes qui apparaissent sur nos expériences numériques. C'est la théorie de la mesure qui va nous fournir le cadre approprié pour traiter ces questions.

Soit  $f$  une application définie sur un ensemble  $X$ , et fixons un point  $x$  de  $X$ . Pour "toute" partie  $E$  de  $X$ , pour tout temps  $n \geq 0$ , on peut regarder la proportion d'itérés  $f^k(x)$  qui tombent dans  $E$ ,

$$\mu_n(E) := \frac{1}{n+1} \# \{k, 0 \leq k \leq n, f^k(x) \in E\}.$$

Supposons que tout se passe comme dans les expériences numériques précédentes, autrement dit que cette suite converge ; quel est l'objet limite ? Pour chaque  $n$ , l'application  $\mu_n : E \mapsto \mu_n(E)$  est une mesure de probabilité, c'est même une moyenne de mesures de Dirac :

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} (\delta_x + \delta_{f(x)} + \cdots + \delta_{f^n(x)}).$$

L'application limite sera encore une mesure de probabilité,

$$\mu_\infty := \left( E \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(E) \right).$$

De plus, cette mesure sera *invariante par  $f$* . Pour préciser ce dernier terme, on appelle *mesure image* de  $\mu$  par  $f$  la mesure  $f * \mu$  définie par la formule

$$f * \mu(E) := \mu(f^{-1}(E)).$$

On dit que la mesure est invariante si  $f * \mu = \mu$ . L'invariance de la mesure limite  $\mu_\infty$  vient du fait que  $f * \delta_x = \delta_{f(x)}$ , d'où

$$f * \mu_n = \mu_n + \frac{1}{n+1} (\delta_{f^{n+1}(x)} - \delta_x).$$

**Sommes de Birkhoff** Il y a une autre manière intéressante d'écrire la mesure  $\mu_n$ , sous la forme de ce qu'on appelle la *somme de Birkhoff* de la fonction  $\chi_E$ , fonction caractéristique de l'ensemble  $E$  ; cette écriture montre  $\mu_n(E)$  sous l'aspect d'une moyenne de la fonction  $\chi_E$  le long de l'orbite de  $x$  :

$$\mu_n(E) = S_n(\chi_E, x) := \frac{1}{n+1} (\chi_E(x) + \chi_E(f(x)) + \cdots + \chi_E(f^n(x))).$$

Si l'ensemble  $X$  est muni d'une topologie, il est naturel de remplacer les fonctions caractéristiques des ensembles par des fonctions continues. Pour répondre aux questions de nature statistique, on va donc étudier la convergence des sommes de Birkhoff des fonctions continues. On dira par exemple

qu'une orbite  $(f^n(x))_{n \geq 0}$  est *équi-distribuée* pour une mesure de probabilité  $\mu$  si, pour toute fonction continue  $\phi$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , les sommes de Birkhoff de  $S_n(\phi, x)$  convergent vers l'intégrale de  $\phi$ :

$$\frac{1}{n+1} (\phi(x) + \phi(f(x)) + \cdots + \phi(f^n(x))) \longrightarrow \int \phi d\mu \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Autrement dit, la *moyenne temporelle* de la fonction le long de l'orbite coïncide avec sa *moyenne spatiale*.<sup>1</sup>

### 1.3 La théorie ergodique

Les considérations précédentes expliquent pourquoi il va être utile de se placer dans le cadre de la théorie ergodique. Celle-ci consiste à étudier les propriétés d'un *système dynamique mesuré*  $(X, \mathcal{A}, \mu, f)$  où :

- l'ensemble  $X$  est munie de la tribu  $\mathcal{A}$  et de la mesure de probabilité<sup>2</sup>  $\mu$  ;
- l'application  $f$  est mesurable, de  $X$  dans  $X$ , et préserve la mesure  $\mu$ .

**Exercice** Définir l'isomorphisme des systèmes dynamiques mesurés.

### 1.4 Problématiques

On va se poser deux grands types de questions :

1. Quelles propriétés dynamiques impose l'existence d'une mesure invariante? Quelles sont les orbites équi-distribuée pour cette mesure?
2. Étant donné un système dynamique (topologique, par exemple), possède-t-il des mesures invariantes?

La première question est interne à la théorie ergodique, la deuxième revient à déterminer son champ d'application.

On va d'abord démontrer le théorème de récurrence de Poincaré, qui apporte une première réponse à la question 1 : dans un système dynamique mesuré, presque tout point est récurrent.

Nous verrons ensuite un certain nombre de mesures invariantes “naturelles” sur des exemples explicites ou des classes d'exemples (rotations,

---

1. Si le système dynamique modélise un phénomène expérimental,  $X$  est un espace de très grande dimension (par exemple, dans le cas de l'étude d'un gaz, l'ensemble des positions et des vitesses de toutes les molécules!), et l'observateur n'a pas accès à tous les paramètres du système mais seulement à certaines grandeurs  $\phi$ , dites *observables* (dans l'exemple précédent, les grandeurs macroscopiques : Température, Pression, ...). Une expérience correspond à étudier une orbite  $(f^n(x_0))$  du système, c'est-à-dire à relever la suite temporelle  $\phi(f^n(x_0))$ ...

2. Rappelons qu'une tribu est une famille de parties de  $X$ , stable par passage au complémentaire, unions et intersections dénombrables. Une mesure est une application  $\sigma$ -additive définie sur la tribu, elle est de probabilité si la mesure de l'espace total est 1 (ce qui est crucial est que la mesure de  $X$  soit FINIE).

décalage des décimales, systèmes hamiltoniens (dont billards et pendules), application de Gauss pour les fractions continues, ...). Pour les systèmes démunis d'une mesure invariante naturelle, un résultat général assure l'existence de mesures invariantes pour les systèmes dynamiques topologiques sur les espaces compacts.

Le théorème central de la théorie ergodique est le théorème de Birkhoff, qui assure la convergence des sommes de Birkhoff de presque tout point. Il permet également de répondre à la question des orbites équi-distribuées : si le système dynamique mesure possède une propriété de minimalité appelée *ergodicité*, alors les orbites de presque tout point sont équi-distribuées.<sup>3</sup> Beaucoup de questions statistiques, dont celles évoquées en introduction, reviennent alors à montrer l'ergodicité d'un système dynamique mesuré.

On combinera souvent topologie et mesure : l'expression "*Soit  $f : X \mapsto X$  une application continue préservant une mesure  $\mu$* " sous-entendra que  $X$  est un espace topologique, et que la mesure  $\mu$  est définie sur la tribu des boréliens (rappelons qu'il s'agit de la plus petite tribu contenant les ouverts de  $X$ , et que toute fonction continue est mesurable pour cette tribu).

## 2 Le théorème de récurrence de Poincaré

### 2.1 Version mesurable

Soit  $(X, \mu, f)$  un système dynamique mesuré.

**Théorème 2.1 (version forte).** *Pour tout ensemble mesurable  $E$  de mesure strictement positive,  $\mu$ -presque tout point de  $E$  a une orbite positive qui revient une infinité de fois dans  $E$  : autrement dit,*

$$\mu(\{x \in E, \forall n_0 \exists n \geq n_0 \mid f^n(x) \in E\}) = \mu(E).$$

*Preuve* —

1) (version faible) Il existe un point  $x$  qui revient au moins une fois dans  $E$ .

En effet, considérons la suite  $E, f^{-1}(E), \dots$ . Ces ensembles ont tous même mesure (invariance), strictement positive. Puisque la mesure de  $X$  est finie, ils ne peuvent pas être tous disjoints. Donc il existe un point  $y$ , et deux entiers  $0 \leq n < m$  tels que

$$y \in f^{-n}(E) \cap f^{-m}(E).$$

Alors les points  $x := f^n(y)$  et  $f^{m-n}(x) = f^m(y)$  sont dans  $E$  : OK.

2) On écrit

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_\infty$$

---

3. Le système mesuré est *ergodique* si tout ensemble  $U$  invariant par  $f$  (i.e. tel que  $f^{-1}(U) = U$ ) est de mesure 0 ou 1.

où  $E_k$  contient les points de  $E$  qui reviennent exactement  $k$  fois dans  $E$ ,

$$E_k = \{x \in E, \#\{n > 0, f^n(x) \in E\} = k\}.$$

Soit  $k$  un entier positif. La remarque-clé est que si  $x$  est dans  $E_k$ , alors il ne revient jamais dans  $E_k$  (en fait, il revient la première fois dans  $E_{k-1}$ , puis dans  $E_{k-2}$ , etc.). On applique la version faible du théorème à  $E_k$ , ce qui nous dit que  $E_k$  est de mesure nulle.  $\square$

## 2.2 Version topologique

Soit  $f : X \mapsto X$  une application continue préservant une mesure  $\mu$ .

**Théorème 2.2.** *Si  $X$  est un espace séparable<sup>4</sup>, alors  $\mu$ -presque tout point de  $X$  est récurrent.*

*Preuve* — Soit  $(U_i)$  une base dénombrable d'ouverts. On définit l'ensemble  $U_i^0$  des mauvais points de  $U_i$  : ce sont ceux qui ne reviennent jamais dans  $U_i$ . L'ensemble  $X^0$  des mauvais points de  $X$  est défini comme la réunion des  $U_i^0$ . D'après la version mesurable du théorème de récurrence, chaque  $U_i^0$  est de mesure nulle, par conséquent  $X^0$  est aussi de mesure nulle.

Il reste à voir que tout point de  $X \setminus X^0$  est récurrent, ce qui est immédiat.  $\square$

Exercice (facile) : montrer que les théorèmes deviennent faux pour une mesure infinie.

Attention : presque tout point d'un ensemble  $A$  revient dans  $A$ , mais rien ne dit que presque tout point de  $A$  passe dans  $B$  si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles distincts : le théorème dit que les orbites sont récurrentes, il ne dit pas qu'elles vont partout. Cette remarque conduira à étudier la notion d'ergodicité : le système est dit *ergodique* si tout ensemble invariant (au sens où  $f^{-1}(A) = A$ ) est de mesure 0 ou 1. Donner des exemples de système non ergodique.

## 3 Exemples de mesures invariantes I

### 3.1 Pour les exemples-modèles de l'introduction

**Homothéties, translations** Exercice : la seule mesure de proba invariante par une homothétie est le Dirac au point fixe. La translation n'a pas de proba invariante.

Exercice : déterminer toutes les mesures de proba invariantes par un homéomorphisme croissant de l'intervalle.

---

4. Il existe une base dénombrable d'ouverts.

**Points fixes, orbites périodiques** Si  $x$  est un point fixe d'une application inversible  $f$ , alors la mesure de Dirac  $\delta_x$  est invariante par  $f$ . Plus généralement, la moyenne des mesures de Dirac sur les points d'une orbite périodique est une mesure invariante. De plus, l'orbite périodique est équi-distribuée pour cette mesure. De ce point de vue, la recherche de mesures invariantes et d'orbites équi-distribuées généralisent la recherche d'orbites périodiques pour  $f$ .

Que dit le théorème de récurrence de Poincaré pour une mesure invariante de ce type?...

**Rotations du cercle** Les rotations du cercle préservent la mesure de Lebesgue. Malheureusement, pour cet exemple, le théorème de récurrence ne nous dit rien qu'on ne sache déjà. Il faudra attendre des résultats plus puissants...

**Anosov linéaire du tore** Trouver des mesures de proba invariantes pour l'Anosov linéaire du tore (*cf.* l'introduction). En déduire que ...-presque tout point est récurrent.

### 3.2 Décalage des décimales I

Soit  $f$  le "doublement de l'angle" dans le cercle, autrement dit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto 2x. \end{aligned}$$

(On pourrait aussi définir  $f$  sur l'intervalle  $[0,1]$  par la multiplication par 2 modulo 1 ; du point de vue de la théorie ergodique, il s'agit de la même application.)

GRAPHE.

Le doublement de l'angle préserve la mesure de Lebesgue. En effet, l'image réciproque d'un intervalle est la réunion de deux intervalles disjoints, chacun de longueur deux fois plus petite que l'intervalle initial ; on conclut en se rappelant que la mesure de Lebesgue sur le cercle est l'unique mesure borélienne qui attribue à chaque intervalle une mesure égale à sa longueur.

Interprétation informelle de  $f$  comme décalage de l'écriture binaire d'un nombre. (Remarque : comment formaliser ? cf plus bas...)

Idem multiplication par 10 modulo 1. Application de Poincaré (I) : presque tout nombre qui commence par 7 contient une infinité de 7. Idem pour ceux qui commencent par 12345.

En déduire que presque tout nombre contient une infinité de blocs 12345 (exercice ; montrer que presque aucun nombre ne contient aucun bloc 12345).

Clairement, on devrait pouvoir faire mieux : en effet, on montrera que *pour presque tout nombre  $x$ , pour tout  $k$ , tout bloc de  $k$  chiffres apparaît avec*

une fréquence  $10^{-k}$  dans le développement décimal de  $x$ . Mais pour avoir ça, il faut attendre la (difficile) preuve du théorème de Birkhoff.

Remarque: il n'est pas évident de produire un seul nombre comme ça. En particulier, on ne sait pas pour  $\pi$ , ni pour  $\sqrt{2}$  (je crois).

**Exercice** — Montrer que le doublement de l'angle est semi-conjugué à l'application  $x \mapsto 2x^2 - 1$  sur l'intervalle  $[-1,1]$  (indication: regarder ce qui arrive à l'abscisse d'un point du cercle unité du plan). En déduire une mesure invariante pour cette application.

Remarque: on a donc trouvé des mesures de probabilité, invariantes respectivement par  $x \mapsto 2x^2 - 1$  ou  $x \mapsto 2x(\text{mod } 1)$ , qui correspondent aux répartitions d'itérés constatés expérimentalement. Le fait que ces mesures soient invariantes NE SUFFIT PAS à expliquer ces répartitions. Patience...

**Exercice** —  $f$  est (topologiquement) semi-conjuguée au décalage unilatère, et lui est mesurablement équivalente puisque l'ensemble des nombres qui ont deux écritures binaires distinctes est dénombrable, donc de mesure nulle.)

### 3.3 Difféomorphismes et flots de $\mathbb{R}^n$

*cf.* feuille d'exo, où on explique comment vérifier par le calcul qu'une mesure est préservée...

## 4 Existence de mesures invariantes

Le comportement dynamique le plus simple est donné par les points fixes et les orbites périodiques, et le dynamicien qui étudie un exemple commence par chercher des orbites de ce type. Mais il n'en existe pas toujours (penser par exemple aux rotations irrationnelles du cercle, ou du tore...). On a vu que d'un certain point de vue, les mesures invariantes généralisent les points fixes et les orbites périodiques; et cette fois-ci, on dispose d'un théorème d'existence très général.

### 4.1 Énoncé

5

**Théorème 4.1 (Krylov-Bogoliubov).** *Soit  $X$  un espace métrique compact et  $T : X \rightarrow X$  une application continue. Alors il existe au moins une mesure de probabilité invariante pour  $T$ .*

---

5. Dans toute cette section, la dynamique est notée " $T$ "; " $f$ " sera utilisé pour des fonctions continues.



- Exercice : nécessité des hypothèses (compacité, continuité).
- Bien sûr, si on sait déjà que le système a des points fixes ou des orbites périodiques, le théorème n'apporte rien... Par contre, il y a des exemples où le résultat n'était pas évident : penser aux contre-exemples de Denjoy.
- En corollaire de ce résultat et du théorème de récurrence de Poincaré (version topologique), *toute application continue sur un espace compact admet un point récurrent* ; ce résultat est dû à Birkhoff (on peut le montrer directement, en commençant par établir l'existence d'un fermé invariant minimal à l'aide du lemme de Zorn.)
- Idée de preuve : le point clé est que l'espace des mesures (pour la bonne topologie) est compact ; on en déduira que la suite des moyennes de Dirac a une valeur d'adhérence. On va en profiter pour regarder un peu à quoi ressemble cet espace abstrait, et ce qu'on peut y faire.

## 4.2 L'espace des mesures

On suppose que  $X$  est un espace métrique compact, et  $T$  une application continue de  $X$  dans  $X$ . On s'intéresse à l'espace des mesures et au sous-espace des mesures invariantes :

$\mathcal{M}(X) := \{\text{mesures de probabilité définies sur la tribu des boréliens de } X\}$

$\mathcal{M}_T(X) := \{\text{mesures dans } \mathcal{M}(X) \text{ invariantes par } T\}.$

Dessin : l'ensemble des fonctions réelles définies sur les boréliens de  $X$  est un espace vectoriel ; celles qui sont à valeurs positives (*i.e.* les mesures !) forment un cône convexe dans cet espace. Le sous-ensemble  $\mathcal{M}(X)$  des mesures de probabilité est convexe, c'est-à-dire que le barycentre  $t\mu + (1-t)\nu$  de deux mesures de probabilité  $\mu$  et  $\nu$  est encore une mesure de probabilité. Le sous-ensemble  $\mathcal{M}_T(X)$  des mesures de probabilité invariantes par  $T$  est encore convexe.

La topologie qui nous intéresse sur l'espace  $\mathcal{M}(X)$  est la *topologie faible*, qui consiste à tester la convergence sur les fonctions continues : autrement dit, une suite de mesures  $(\mu_n)$  tend vers  $\mu_\infty$  si pour toute fonction continue  $f$ , la suite réelle  $(\int f d\mu_n)$  tend vers  $\int f d\mu_\infty$ .<sup>6</sup>

Voici un exemple de convergence pour cette topologie : si  $X$  est l'intervalle, une suite de moyennes de Dirac en des points bien répartis converge vers la mesure de Lebesgue (c'est presque la définition de l'intégrale de Riemann !).

L'espace  $X$  se plonge dans  $\mathcal{M}(X)$  par l'application

$$x \longmapsto \delta_x.$$

L'application  $T_*$  agit sur l'espace  $\mathcal{M}(X)$ . En particulier, l'espace des mesures contient une copie de notre système dynamique ! (plus précisément, l'application  $x \mapsto \delta_x$  conjugue  $T$  et la restriction de  $T_*$  aux mesures de Dirac). *Vérifier que le*

---

6. Pour être totalement rigoureux, il faudrait définir les ouverts pour cette topologie.

plongement de  $X$  dans  $\mathcal{M}(X)$  est continu. Vérifier que l'application  $T_*$  est continue.

Notons  $C(X, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $X$ , muni de la norme de la convergence uniforme. En pratique, le lemme suivant permet de se limiter à tester la convergence sur une famille dense de fonctions continues :

**Lemme 4.2.**

1. L'espace  $C(X, \mathbb{R})$  est séparable, autrement dit il contient une famille dénombrable dense  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ;
2. Soit  $(\mu_n)$  une suite de mesures telles que pour chaque  $k$ , la suite  $(\int f_k d\mu_n)$  converge ; alors la suite  $(\int f d\mu_n)$  converge pour toute fonction continue  $f$ . En particulier, pour montrer que la suite  $(\mu_n)$  converge vers une mesure  $\mu$ , il suffit de tester cette convergence sur toutes les fonctions de la suite  $(f_k)$ .

*Preuve du lemme — Exercices : écrire les détails.*

Pour la séparabilité : choisir un recouvrement fini  $(U_i)$  par des ouverts de diamètre inférieur à  $1/n$ , et une partition de l'unité  $(f_i)$  pour ce recouvrement (utiliser les fonctions distance au complémentaire d'un ouvert). Approcher  $f$  par la fonction  $\sum f(x_i)f_i$  où  $x_i$  est un point de l'ouvert  $U_i$ . En remplaçant  $f(x_i)$  par un rationnel, et en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient ainsi une suite dense. (Remarque : on peut voir ce résultat comme une application du théorème de Stone-Weierstrass).

Pour le critère de convergence : étant donnée une fonction continue  $f$ , on peut l'approcher uniformément par une des fonctions  $f_k$  avec une erreur  $\epsilon$  ; alors l'intégrale de  $f_k$  contre n'importe laquelle des mesure  $\mu_n$  approche celle de  $f$  à  $\epsilon$  près. Si la suite  $(\int f_k d\mu_n)_{n \geq 0}$  converge, on en déduit que les limites supérieures et inférieures de la suite  $(\int f d\mu_n)_{n \geq 0}$  diffèrent d'au plus  $2\epsilon$ . Comme  $\epsilon$  est arbitrairement petit, les limites supérieures et inférieures coïncident, ce qui montre que la suite converge.  $\square$

Un intérêt majeur de la topologie faible est :

**Théorème 4.3.** *Soit  $X$  un espace métrique compact. Alors l'espace  $\mathcal{M}(X)$ , muni de la topologie faible, est métrisable et compact.*

Pour prouver ce résultat de compacité, on a besoin d'un outil non trivial : le théorème de Riesz, qui permet de plonger  $\mathcal{M}(X)$  dans le dual des fonctions continues sur  $X$ . Rappelons de quoi il s'agit. Toute mesure  $\mu$  définit une forme linéaire sur l'espace vectoriel  $C(X, \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  par la formule

$$f \longmapsto \int f d\mu ;$$

cette forme linéaire est *positive*, c'est-à-dire qu'elle prend des valeurs positives sur les fonctions positives. Le théorème de Riesz établit la réciproque :

**Théorème 4.4 (de représentation de Riesz).** *Pour toute forme linéaire positive  $\Phi$  sur  $C(X, \mathbb{R})$ , il existe une unique mesure  $\mu$  définie sur les boréliens de  $X$  telle que*

$$\Phi(f) = \int f d\mu$$

*pour toute fonction continue  $f$ .*

*Preuve du théorème de compacité* — La métrique est donnée par exemple par la formule

$$d(\mu, \nu) = \sum_k \min \left( \left| \int f_k d\mu - \int f_k d\nu \right|, \frac{1}{2^k} \right)$$

où  $(f_k)$  est une suite dense de fonctions-tests.

Passons à la preuve de la compacité. Soit  $(\mu_n)$  une suite de mesure, il s'agit d'en extraire une sous-suite convergente pour la topologie faible. On considère notre famille dénombrable dense  $(f_k)$  de fonctions-test. Quitte à remplacer  $f_k$  par  $\frac{f_k}{\|f_k\|_\infty}$ , on peut supposer que  $|f_k| \leq 1$  ; du coup  $|\int f_k d\mu_n| \leq 1$  pour tout  $n$ . Considérons la première fonction-test  $f_1$ . La suite

$$\int f_1 d\mu_n$$

vit dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , par conséquent on peut en extraire une sous-suite convergente. En procédant de la même manière pour chacune des fonctions-test, et en utilisant le classique procédé diagonal, on peut trouver une suite extraite  $(\mu_{n_i})$  qui donne une suite convergente quand on l'évalue sur toutes nos fonctions-test  $f_k$ .

D'après le lemme donnant un critère de convergence, la suite

$$\int f d\mu_{n_i}$$

converge alors pour toute fonction continue  $f$  ; on définit  $\Phi(f)$  comme étant sa limite.

On voit facilement que  $\Phi$  est une forme linéaire positive sur  $C(X, \mathbb{R})$ . D'après le théorème de Riesz, il existe alors une mesure  $\mu_\infty$  qui représente  $\Phi$ . On voit facilement que  $\mu_\infty$  est une mesure de probabilité (en la testant sur la fonction constante  $\mathbf{1}_X$ ). Et il est clair que cette mesure est une valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_n)$ , comme on voulait.  $\square$

Remarquons que cette démonstration marche dans un cadre plus général : pour tout espace de Banach séparable  $E$ , le dual  $E^*$  est un espace métrisable pour la topologie faible, et la boule unité (pour la norme) est compacte (pour la topologie faible). Ce résultat général est appelé théorème de Banach-Alaoglu.

### 4.3 Preuve de l'existence de mesures invariantes

Nous pouvons maintenant passer à la preuve de l'existence de mesures invariantes pour  $T$ . En fait, comme l'application  $T_*$  sur le compact convexe  $\mathcal{M}(X)$  est affine, le théorème de Markov-Kakutani affirme qu'elle a un point fixe. Mais la preuve qui suit a l'avantage de montrer comment obtenir des mesures invariantes par "moyennisation".

*Preuve du théorème de Krylov-Bogoliubov* — Pour démarrer, on se donne n'importe quelle mesure de probabilité sur  $X$ , par exemple une mesure de Dirac en un certain point,

$$\delta_{x_0}.$$

L'idée (déjà racontée en introduction) consiste à pousser cette mesure le long de l'orbite de  $x_0$  et à prendre les moyennes, ce qui fournit des mesures de plus en plus invariantes. Plus précisément, soit

$$\mu_N := \frac{1}{N+1} \left( \delta_{x_0} + \delta_{T(x_0)} + \cdots + \delta_{T^N(x_0)} \right).$$

Puisque l'espace  $\mathcal{M}(X)$  est compact, la suite  $(\mu_N)$  ainsi définie possède une valeur d'adhérence  $\mu_\infty$ . D'autre part, la différence

$$T_*(\mu_N) - \mu_N = \frac{1}{N+1} \left( \delta_{T^{N+1}(x_0)} - \delta_{x_0} \right),$$

évaluée sur une fonction "test" continue  $f$ , donne une valeur absolue majorée par

$$\frac{2}{N+1} \|f\|_\infty,$$

qui tend vers 0. En utilisant la continuité de l'application  $T_*$ , on en déduit que toute valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_N)$  est une mesure invariante par  $T$ .  $\square$

### 4.4 Mesures ergodiques

Nous terminons cette section en introduisant la notion d'ergodicité, en donnant son interprétation géométrique dans l'espace  $\mathcal{M}(X)$ , et en prouvant l'existence de mesures ergodiques.

**Définition 4.5.** Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. On dit que  $T$  est *ergodique* pour  $\mu$ , ou bien que  $\mu$  est ergodique pour  $T$ , si à mesure nulle près, il n'existe pas d'ensemble invariant autre que  $\emptyset$  et  $X$ :

$$\forall A \in \mathcal{A}, T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ ou } 1.$$

Contre-exemples : l'identité ; une rotation sur un disque.

**Remarque 4.6.** La condition suivante, *a priori* plus contraignante, est équivalente à l'ergodicité :

$$\forall A \in \mathcal{A}, T^{-1}(A) = A \mu\text{-p.p.} \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ ou } 1,$$

où l'expression " $A = B \mu\text{-p.p.}$ " signifie que la différence symétrique de  $A$  et  $B$  est de mesure nulle :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad \mu(A \Delta B) = 0.$$

En effet, si  $A$  est un ensemble presque partout invariant, alors il est presque partout égal à l'ensemble invariant

$$B := \bigcap_{n \geq 0} T^{-n} \bigcup_{k \geq 0} T^{-k}(A).$$

*Exercice : le vérifier.*

**Lemme 4.7 (Caractérisation fonctionnelle).** *Le système dynamique mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est ergodique si et seulement si les seules fonctions réelles mesurables invariantes par  $T$  sont les constantes :*

$$f \circ T = f \mu - \text{p.p.} \Rightarrow f = \text{constante} \mu - \text{p.p.}$$

Notons que le critère analogue sur les fonctions  $L^1$ , ou  $L^2$ , est encore équivalent à l'ergodicité.

*Preuve* — Le critère est clairement suffisant (appliquer aux fonctions caractéristiques). Dans l'autre sens, remarquons que si  $f$  est invariante, alors ses "lignes de niveau" le sont aussi (presque partout, au sens de la remarque précédente). L'ergodicité entraîne alors que pour tout découpage de  $\mathbb{R}$  en intervalles de longueur  $1/n$ , la fonction  $f$  prend ses valeurs dans un des intervalles pour  $\mu$ -presque tout point de  $X$ . On en déduit que  $f$  est constante presque partout.  $\square$

**Définition 4.8.** Soit  $C$  une partie convexe d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. un point  $c$  de  $C$  est *extrême* si on ne peut pas l'écrire comme barycentre non trivial de points de  $C$  :

$$c = tx(1-t)y, \text{ avec } x, y \in C \text{ et } t \in ]0, 1[ \Rightarrow x = y (= c).$$

**Lemme 4.9.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré ; alors la mesure  $\mu$  est ergodique si et seulement si elle est un point extrémal du convexe  $\mathcal{M}_T(X)$  des mesures invariantes.*

*Preuve* — La contraposée est facile...

Pour le sens direct, il faut se rappeler le théorème de Radon Nikodým, et utiliser le lemme. Une autre preuve utilise le théorème de Birkhoff, cf. plus loin.  $\square$

Nous nous plaçons à nouveau dans un espace métrique compact.

**Théorème 4.10.** *Soit  $X$  un espace métrique compact et  $T : X \rightarrow X$  une application continue. Alors le compact convexe  $\mathcal{M}_T(X)$  des mesures de probabilité invariantes a des points extrémaux. En particulier, il existe au moins une mesure invariante ergodique pour  $T$ . Mieux, toute mesure invariante peut être approchée arbitrairement près par une mesure qui s'écrit comme barycentre d'une famille finie de mesure ergodiques.*

*Preuve* — Il s'agit encore d'un résultat général d'analyse fonctionnelle, appelé *théorème de Krein-Milman*. cf. Milnor...  $\square$

## 4.5 Unique ergodicité

...

# 5 Les théorèmes ergodiques : convergence des moyennes temporelles des fonctions

## 5.1 Énoncés

**Théorème 5.1 (Birkhoff).** ...

Von Neumann en exo.

## 5.2 Exemples, applications

Preuves d'ergodicité (si unique ergodicité, le dire aussi, ou attendre plus bas). Applications. ...

## 5.3 Transformation de Gauss

Lettre de Gauss à Laplace (cf Mane)...

Exo : la mesure invariante (application des formules de la feuille d'exo).

Digression : fractions continues. cf Viana, plus interprétation dynamique (premiers retours d'une rotation du cercle ; exo ?). Possibilités : présenter comme une généralisation de l'algo d'Euclide de recherche de pgcd. A BOS-SER.

Application du théorème de récurrence (II) : pour  $\text{pt nb}$  dans  $]1/8, 1/7[$ , le chiffre 7 apparaît une infinité de fois dans le développement en fraction continue.

Là encore, pas satisfaisant, on sera plus précis...

#### 5.4 Preuve

cf Viana x2, Milnor, Weiss.

...

### 6 Mesure et topologie

cf livre de P Walters.

Support des mesures. Et bassin ! Mesures naturelles.

Lien dynamique top et propriété ergodiques.

Unique ergodicité et CVU... (exo).

### 7 Ouvertures

Cocycle (Herman). Ex de Katok (changements de temps).

Hypothèse ergodique et genericité des homéos ergodiques (Oxtoby-Ulam).

Lax (exo).

Halmos.





# Preuves

## 8 Intro

### 8.1 (\*) Caractérisation de la transitivité

### 8.2 (\*) Transitivité des Anosov linéaires

Densité des orbites périodiques.

## 9 Homéos du cercle

### 9.1 (\*) Existence d'un relevé

### 9.2 (\*) Existence du nb de rotation

### 9.3 Cas rationnel (o.p.)

### 9.4 (\*) Cas irrationnel (semi-conjugaison, cas minimal)

### 9.5 (\*\*) Théorème de Denjoy

### 9.6 (\*) Contre-exemple de Denjoy

## 10 Théorie ergodique I

### 10.1 (\*\*) Mesure invariante en dynamique topologique

### 10.2 (\*\*) Mesure de Liouville pour les hamiltoniens

### 10.3 (\*\*\*) Théorème de Birkhoff

### 10.4 (\*)

### 10.5 (\*)

### 10.6



# Annexe A

## Divers

### Répartition (théorique !) des 12 cours

1. Introduction (1) Motivations, définition générale. Notion de conjugaison, points fixes, orbites, transitivité, minimalité, introduites sur des exemples (homothéties et translations, rotations du cercle, flots linéaires du tore, automorphismes du tore).
2. Homéos du cercle (3) Intro, généralités (existence du relevé), théorie topologique de Poincaré (nb de rotation, orbites périodiques, semi-conjugaison), théorie différentiable de Denjoy (théorème et contre-exemple). Ouvertures.
3. Théorie ergodique I (2+) Intro Exemples (rotation, shift, doublement, Anosov, billard, fraction continues) Existence de mesures invariantes en dynamique topologique \* Existence de mesure invariante pour les systèmes hamiltoniens \* Théorème de récurrence de Poincaré \* Théorèmes ergodique (pve de Birkhoff \*\*\*, peut-etre pas de Von Neumann) Lien avec les notions de récurrence topologique. Applications. Ouvertures (Lax, Halmos).
4. Dynamique différentiable (3) Intro. Les programmes de Thom et Smale. Le fer à cheval de Smale (utilisation du shift) Linéarisation des points fixes \*\*\* Variétés stables? (théorème d'existence de fer à cheval) Difféomorphismes linéaires du tore (stabilité structurelle \*\*\*) Ouverture (notion de propriété générique)
5. Dynamique topologique II (1) Entropie, Applications? (présenter l'entropie en réponse à une question !)
6. Théorie ergodique II (1) : l'entropie Applications? (présenter l'entropie en réponse à une question !) Classification métrique des shifts? Principe variationnel



## Annexe B

# Bibliographie commentée

### Bases générales

- La BIBLE :

[HK] Hasselblatt, Boris ; Katok, Anatole. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, 1995.

- Un petit livre disponible sur le Web, beaucoup moins ambitieux, plus facile d'accès, avec une certaine originalité (applications à des problèmes arithmétiques, théorème de Poincaré-Birkhoff...) :

[PY] Pollicott, Mark ; Yuri, Michiko. *Dynamical systems and ergodic theory* London Mathematical Society Student Texts, 40. Cambridge University Press, 1998. **disponible sur** <http://www.ma.man.ac.uk/~mp/book.html>

- Les notes de cours de J. Milnor, l'art de raconter les idées sans buter sur les difficultés "techniques" :

<http://www.math.sunysb.edu/~jack/DYNOTES/>

- Un livre introductif, beaucoup plus élémentaire :

[Dev] Devaney, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, 2003.

- Des notes de mini-cours à l'X :

<http://math.polytechnique.fr/xups/vol96.html>

On peut regarder notamment les chapitres *Systèmes dynamiques discrets* (A. Fathi), *Systèmes dynamiques hyperboliques* (P. Foulon).

### Textes Spécialisés

- Si vous voulez tout savoir sur la très riche dynamique des applications non-inversibles de l'intervalle, dont on ne dira RIEN dans le cours...

[dMvS] de Melo, Welington ; van Strien, Sebastian. *One-dimensional dynamics*. Springer-Verlag, 1993.

- Un (vieux) livre d'introduction à la théorie ergodique très agréable, avec le style inimitable de Halmos : [Hal] Halmos, Paul R. *Lectures on ergodic theory*. Chelsea Publishing Co., 1960.

- Un livre plus récent sur le même sujet :

[Wal] Walters, Peter. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, 1982.

- Un cours d'introduction à la théorie ergodique par Marcelo Viana (en Portugais...) [w3.impa.br/~viana/out/recife.ps](http://w3.impa.br/~viana/out/recife.ps)

- On ne parlera pas de dynamique holomorphe dans le cours, mais c'est quand même très intéressant ! D'autant que le domaine est directement accessible avec les bases du cours d'analyse complexe de Licence. Et le livre de Milnor est (gratuit et) fabuleux...

*Dynamics in One Complex Variable* by J. Milnor, published by Vieweg 1999, 2nd edition 2000 <http://www.math.sunysb.edu/cgi-bin/preprint.pl?ims90-5>

## Billards

Deux textes introductifs :

- Gutkin, Eugene *Problems on Billiards*, disponible sur la page "Open problems on dynamical systems and ergodic theory", <http://www.math.iupui.edu/~mmisiure/open/>.

- Tabachnikov, Serge *Billiards*. Panoramas et Synthèses No. 1 (1995).

## Histoire

- Poincaré, oeuvres complètes. Tome I, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. On peut lire aussi la correspondance avec Mittag-Leffler.

- Barrow-Green, June *Poincaré and the three body problem*. History of Mathematics, 11. London Mathematical Society, 1997.

- Chenciner, Alain *De la Mécanique Céleste à la théorie des Systèmes Dynamiques, aller et retour*. Disponible sur

[http://www.bdl.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen\\_preprint.html](http://www.bdl.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen_preprint.html).

## Culture

Les systèmes dynamiques font partie des domaines des maths les plus vulgarisés. Classé du plus facile au plus technique.

- Un livre énervant, le point de vue d'un journaliste scientifique : *La théorie du chaos*, J. Gleick, Champs Flammarion.

- Les systèmes dynamiques raconté par un vulgarisateur hors-pair : *Dieu joue-t-il au dé ? Les mathématiques du chaos*, Ian Stewart, Champs Flammarion.

- Un autre très bon texte : *Le calcul, l'imprévu*, I. Ekeland, Points Sciences.
- Le point de vue original de D. Ruelle : *Hasard et chaos*, éd. Odile Jacob.
- Un recueil de textes de vulgarisation de spécialistes français, qui rentrent un peu plus dans les détails : (J.-C. Yoccoz, A. Douady, A. Chenciner, J. Laskar, ...) : *Chaos et déterminisme*, sous la direction de A. Dahan Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla, collection Points Sciences.
- Sur le pendule forcé : Hubbard, John H. *The forced damped pendulum: chaos, complication and control*. Amer. Math. Monthly 106 (1999), no. 8, 741–758.
- L'article *Systèmes dynamiques différentiables* de l'Encyclopedia Universalis, par A. Chenciner.





## Annexe C

# Feuilles d'exercices

### Feuille d'exos 1

**Exercice 1 (Le pendule).** Donner l'espace des phases du pendule simple, puis du pendule double.

**Exercice 2 (Le billard).** Donner l'espace des phases du billard circulaire, et l'application correspondante (modéliser par un système dynamique à temps discret).

**Exercice 3.** Qu'obtient-on en conjugant une homothétie du plan par l'exponentielle complexe? Quel nom donneriez-vous à cette application?

**Exercice 4.** Montrer que toutes les homothéties contractantes ont la même dynamique d'un point de vue topologique. Existe-t-il un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  qui conjugue  $x \mapsto 2x$  et  $x \mapsto 3x$ ?

**Exercice 5 (Visualisation de la conjugaison).** Répondre sans papier ni crayon :

1. Qu'obtient-on en conjugant une translation horizontale du plan par une symétrie d'axe vertical? Par une symétrie d'axe horizontal? Par une autre translation? Par une rotation?
2. Qu'obtient-on en conjugant une rotation de la sphère par une autre rotation?

**Exercice 6.** Décrire les orbites des rotations du tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , (*i.e.* des application  $x \mapsto x + \alpha$ ).

**Exercice 7.**

a) Compléter le théorème suivant.

**Théorème.** *Toute matrice réelle  $2 \times 2$  est linéairement conjuguée à... ou ... ou ...*

b) On dit qu'une application linéaire est *hyperbolique* si aucune de ses valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes) n'est de module 1. Classifier les applications linéaires hyperboliques à conjugaison *topologique* près. Et à conjugaison différentiable près?...

**Exercice 8.** Sur une calculatrice (ou un logiciel de calcul), taper :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = (1 - \sqrt{5})/2$ ,  $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ . Décrire le comportement expérimental de la suite  $(u_n)$ , comparer au comportement théorique. En faisant un dessin dans le plan  $(u_n, u_{n+1})$ , expliquer.

**Exercice 9.** La formule classique de trigonométrie

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

peut être vue comme une formule de conjugaison... Préciser : grâce à cette formule, trouver deux applications (*non inversibles*) conjuguées par le changement de variable  $x = \cos(\theta)$ .

**Exercice 10 (Deux systèmes physiques conjugués).** Montrer que le système mécanique consistant en deux billes de mêmes masses se déplaçant sans frottement sur un segment est équivalent au billard sur une table en forme de triangle rectangle isocèle. (Plus généralement, on montre que le système formé par trois billes sur un cercle conduit à un billard triangulaire, dont les angles dépendent des trois masses.)

**Exercice 11 (Un homéomorphisme transitif de la sphère).** On a vu dans le cours que l'application linéaire  $\phi$  de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

induit une application transitive du tore  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

1- Soit  $S$  l'espace obtenu en quotientant le tore par l'action de la symétrie  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ . Montrer que  $\phi$  induit également un homéomorphisme  $f$  de  $S$  dans  $S$ .

2- Montrer que  $f$  est transitif, que les points périodiques sont denses.

3- Identifier l'espace  $S$ . En déduire l'existence d'un homéomorphisme transitif du plan.

Commentaires : le premier exemple d'homéomorphisme transitif du plan est donné par Bésicovitch en 1937, avec une preuve assez compliquée. En 1941, un argument utilisant le théorème de Baire permet à Oxtoby et Ulam de prouver que toute variété admet un homéomorphisme transitif.<sup>1</sup> L'exemple explicite de l'exercice est plus récent.

Peut-on trouver un homéomorphisme *minimal* du plan ? Un résultat de Brouwer permet de montrer que non. Dans l'exemple de Bésicovitch, l'origine  $O$  est un point fixe ; il pensait avoir montré que toutes les autres orbites étaient denses : ceci aurait donné un homéomorphisme minimal de l'anneau ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$  ; il annonce en 1951 qu'il s'est trompé. P. Le Calvez et J.-C. Yoccoz ont montré en 1997 qu'il n'existe pas d'homéomorphisme minimal sur l'anneau ouvert (ni sur aucun espace obtenu à partir du plan en enlevant un nombre fini de points fixes).<sup>2</sup>

**Exercice 12 (Preliminaire à l'étude des homéomorphismes du cercle).**

---

1. Pour une preuve sur le carré  $[0,1]^2$ , voir le superbe livre :

Oxtoby, John C. *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces*. Graduate Texts in Mathematics, 2. Springer-Verlag 1980.

2. En dimension plus grande, même sur les variétés compactes, on ne sait pas toujours dire s'il existe ou non des difféomorphismes minimaux. Il en existe sur les tores de toutes dimensions (exercice...) ; il en existe aussi sur la sphère de dimension 3 (superbe construction de Fathi et Herman, par des méthodes dites "d'Anosov-Katok"...).

1- Soit  $h$  un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $h$  n'a pas de point fixe. Décrire l'orbite d'un point  $x$  quelconque. En déduire qu'il n'y a qu'un seul tel homéomorphisme à conjugaison près.

2- Décrire la dynamique des homéomorphismes (croissants) de l'intervalle  $[0,1]$ . Faire une classification.

## Feuille d'exos 2 : homéomorphismes du cercle

Dans les deux premiers exercices, on étudie comment le nombre de rotation “dépend des paramètres”, autrement dit comment  $\rho(f)$  varie en fonction de l'homéomorphisme  $f$ . On montre d'abord la continuité, ce qui n'est pas surprenant. Mais le résultat suivant est assez inattendu. Supposons qu'on perturbe un homéomorphisme en le composant par des rotations, c'est-à-dire que l'on regarde la famille  $(R_t \circ f)_{t \in [0,1]}$ . Sauf cas exceptionnels, l'application  $t \mapsto \rho(f_t)$  est alors un *escalier du diable* : c'est une fonction continue, telle qu'il existe une famille de sous-intervalles ouverts disjoints dans  $[0,1]$ , d'union dense, sur chacun desquels l'application prend des valeurs constantes distinctes. En particulier, même si  $f$  est une fonction analytique, cette application n'est pas du tout dérivable !

**Exercice 1.** Montrer que l'application

$$\tilde{f} \mapsto \rho(\tilde{f})$$

qui associe à tout relevé d'homéomorphisme du cercle son nombre de rotation, est continue (l'espace des homéomorphismes de  $\mathbb{R}$  est muni de la topologie de la convergence uniforme).

On pourra démontrer et utiliser le critère suivant :

$$\rho(\tilde{f}) < p/q \Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{f}^q(\tilde{x}) - p < 0.$$

On peut en déduire le même résultat pour  $f \mapsto \rho(f)$ , en montrant que si une suite  $(f_n)$  tend vers  $f$  dans l'espace des homéomorphismes croissants du cercle, il existe une suite de relevés  $(\tilde{f}_n)$  qui tend vers un relevé  $\tilde{f}$  de  $f$ .

**Exercice 2.** On définit, sur l'ensemble des relevés d'homéomorphismes croissants du cercle, la relation

$$\tilde{f} < \tilde{g} \Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{f}(\tilde{x}) < \tilde{g}(\tilde{x}).$$

- 1) Montrer que  $\rho$  est monotone : si  $\tilde{f} < \tilde{g}$ , alors  $\rho(\tilde{f}) \leq \rho(\tilde{g})$ .
- 2) (\*) Montrer que si  $\rho(\tilde{f})$  est irrationnel, alors  $\tilde{f} < \tilde{g}$  entraîne  $\rho(\tilde{f}) < \rho(\tilde{g})$ .
- 3) Soit maintenant  $f$  un homéomorphisme de nombre de rotation nul, mais qui n'est pas l'identité. Soit  $\tilde{f}$  le relevé de  $f$  qui a nombre de rotation 0. Montrer que pour tout relevé  $\tilde{g}$  suffisamment proche de  $\tilde{f}$  et tel que  $\tilde{f} < \tilde{g}$ , ou bien pour tout relevé  $\tilde{g}$  suffisamment proche de  $\tilde{f}$  et tel que  $\tilde{g} < \tilde{f}$ , le nombre de rotation de  $\tilde{g}$  est encore nul.
- 4) Étendre le résultat précédent aux nombres rationnels autres que 0.
- 5) Montrer le résultat suivant (la définition d'escalier du diable est donnée en introduction) :

**Proposition.** Soit  $(\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  une famille de relevés d'homéomorphismes du cercle croissants  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  variant continûment et de manière monotone.

*On suppose que la fonction  $t \mapsto \rho(\tilde{f}_t)$  n'est pas constante, et qu'aucun des homéomorphismes  $f_t$  n'est conjugué à une rotation rationnelle.*

*Alors la fonction  $t \mapsto \rho(\tilde{f}_t)$  est un escalier du diable.*

Si  $f$  est une application continue sur un espace  $X$ , le *commutant* de  $f$  est l'ensemble des homéomorphismes  $\phi$  de  $X$  tels que  $\phi \circ f = f \circ \phi$ . Remarquer que  $\phi$  réalise alors une “conjugaison entre  $f$  et  $f$ ”, notamment  $\phi$  envoie orbite de  $f$  sur orbite de  $f$ . Il faut penser au commutant comme à l'ensemble des symétries de la dynamique ; d'ailleurs, il s'agit d'un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de  $X$ .

Vérifier qu'il s'agit bien d'une notion dynamique : deux applications topologiquement conjuguées ont des commutants isomorphes (en tant que groupes topologiques, si on munit le groupe des homéomorphismes de l'espace compact  $X$  de la topologie de la convergence uniforme).

Dans les exercices suivants, on explorera un peu la structure de groupe de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ .

**Exercice 3.** On se propose d'étudier le commutant de quelques homéomorphismes en dimension 1. On cherchera, quand c'est possible, à décrire le commutant comme isomorphe à un groupe "naturel".

1) Décrire le commutant de la translation de  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{x} \mapsto \tilde{x} + 1$ . (Aide : la réponse est presque dans le cours!).

2) En déduire le commutant d'un homéomorphisme du cercle, préservant l'orientation, ayant un unique point fixe.

3) Décrire le commutant d'une rotation irrationnelle.

4) Soit  $f$  un "contre-exemple de Denjoy" (homéomorphisme croissant du cercle, de nombre de rotation irrationnel, non transitif). On suppose qu'il n'y a qu'une seule orbite d'intervalles errants : autrement dit il existe  $J$ , composante connexe du complémentaire de  $\omega(f)$ , tel que

$$\mathbb{S}^1 = \omega(f) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(J).$$

Soit  $\phi$  commutant avec  $f$  ; montrer que, en restriction à  $\omega(f)$ ,  $\phi$  coïncide avec une puissance de  $f$ . (\*) Décrire le commutant de  $f$ .

5) Décrire le commutant d'une rotation rationnelle.

6) (\*) Montrer que  $f$  (homéomorphisme préservant l'orientation) est conjugué à une rotation irrationnelle si et seulement si son commutant est isomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .

**Exercice 4.**

1) Le nombre de rotation est-il un morphisme de groupes (de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$  dans  $\mathbb{S}^1$ ) ?

2) Montrer qu'il s'agit d'un *quasimorphisme* sur le groupe des relevés d'homéomorphismes du cercle : autrement dit, la quantité

$$\rho(\tilde{f}\tilde{g}) - \rho(\tilde{f}) - \rho(\tilde{g}),$$

qui représente le défaut à être un morphisme, est universellement bornée (probablement par le nombre 2).

**Exercice 5.** On voudrait montrer qu'il n'existe pas d'action libre du groupe  $SL(3, \mathbb{Z})$  par homéomorphismes croissants sur le cercle (autrement dit, pour tout morphisme  $\Phi$  de  $SL(3, \mathbb{Z})$  vers  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ , il existe  $g \neq Id$  dans  $SL(3, \mathbb{Z})$  tel que  $\Phi(g)$  a un point fixe). On rappelle que  $SL(3, \mathbb{Z})$  est le groupe des matrices  $3 \times 3$ , à coefficients entiers, de déterminant 1. On considère le sous-groupe  $\mathcal{H}$  des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale (ce groupe est appelé *groupe d'Heisenberg*). Appelons *commutateur* de deux éléments  $g$  et  $h$  l'élément

$$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}.$$

On peut vérifier que  $\mathcal{H}$  est engendré par deux éléments  $g$  et  $h$ , dont le *commutateur*  $f$  commute avec  $g$  et  $h$  (on a  $fg = gf$  et  $fh = hf$ , autrement dit  $[f, g] = [f, h] = Id$ ).

0) Montrer que ces relations engendrent la relation  $f^n = [g^n, h]$  ( $= g^n h g^{-n} h^{-1}$ ).

Soient  $f, g, h$  trois éléments de  $\text{Homeo}^+(\mathbb{S}^1)$ , vérifiant  $f = [g, h]$ ,  $fg = gf$  et  $fh = hf$ . Soient  $\tilde{g}, \tilde{h}$  des relevés de  $g$  et  $h$ .

1) Vérifier que  $\tilde{f} := [\tilde{g}, \tilde{h}]$  est un relevé de  $f$ , et qu'il ne dépend pas du choix des relevés  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  de  $g$  et  $h$ .

2) Montrer que le déplacement de  $\tilde{f}$ ,

$$\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}$$

est majoré par 8 en valeur absolue (aide : on pourra choisir  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  ayant un petit déplacement...).

3) En déduire la même majoration pour le déplacement de  $\tilde{f}^n$ , puis montrer que  $\tilde{f}$  a un point fixe.

4) Conclure.



## Les contre-exemples de Denjoy

Nous allons construire des difféomorphismes du cercle, de nombre de rotation irrationnel, qui ne sont pas conjugués à des rotations.<sup>1</sup>

**Théorème.** *Pour tout nombre irrationnel  $\alpha$ , il existe  $f \in \text{Diffeo}^+(\mathbb{S}^1)$ , de nombre de rotation  $\alpha$ , qui n'est pas transitif (et qui n'est donc pas topologiquement conjugué à une rotation).*

On explique d'abord comment obtenir un homéomorphisme avec ces propriétés, et on expliquera à la fin comment en faire un difféomorphisme. La présentation suit le texte de J. Milnor ([www.math.sunysb.edu/~jack/DYNOTES/](http://www.math.sunysb.edu/~jack/DYNOTES/)).

On commence avec la rotation  $R_\alpha$ , et on choisit une orbite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$\dots \xrightarrow{R_\alpha} x_{-1} \xrightarrow{R_\alpha} x_0 \xrightarrow{R_\alpha} x_1 \xrightarrow{R_\alpha} \dots$$

L'idée consiste à épaissir cette orbite, en remplaçant chaque  $x_n$  par un intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$ , de longueur  $\lambda_n = b_n - a_n$ . Au final, ces intervalles seront disjoints deux à deux, et la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sera une orbite d'intervalles errants, ce qui empêchera  $f$  d'être conjuguée à la rotation. Comme le cercle est de longueur 1, on doit bien sûr avoir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \leq 1.$$

On fait le choix de se donner des nombres  $(\lambda_n)$  tels que cette somme soit *égale* à 1 ; ceci signifie que la réunion des intervalles  $I_n$  sera de mesure totale dans le cercle. Si l'on combine cette condition sur les longueurs avec le fait que les intervalles  $(I_n)$  sont disposés cycliquement sur le cercle comme les points de l'orbite  $(x_n)$ , on obtient une unique possibilité de définition pour ces intervalles. *Écrire une définition "explicite" (la réponse est donnée ci-dessous).*

On va définir les intervalles  $(I_n)$  *via* leurs relevés dans  $[0,1[$ . Pour chaque point  $x$  du cercle, notons  $\tilde{x}$  son (unique) relevé dans l'intervalle  $[0,1[$ . On définit alors un intervalle  $\tilde{I}(\tilde{x}) = [\tilde{a}(\tilde{x}), \tilde{b}(\tilde{x})]$  par

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{x}) &= \sum \{ \lambda_k, \quad \tilde{x}_k < \tilde{x} \} \\ \tilde{b}(\tilde{x}) &= \sum \{ \lambda_k, \quad \tilde{x}_k \leq \tilde{x} \}. \end{aligned}$$

Notons que  $\tilde{I}(\tilde{x}_n)$  est bien de longueur  $\lambda_n$ , alors que  $\tilde{I}(\tilde{x})$  est de longueur 0 si  $\tilde{x} \notin \{\tilde{x}_n\}$ .<sup>2</sup> *Vérifier que les intervalles de la famille  $\{\tilde{I}(\tilde{x}), \tilde{x} \in [0,1[ \}$  sont disjoints deux à deux, d'union égale à  $[0,1[$ .*

---

1. Ceci est un "texte à trous" ; autrement dit, on raconte les idées de la construction en laissant au lecteur le soin de vérifier un certain nombre de détails, *signalés par des phrases en italique*.

2. Une manière équivalente consiste à définir la mesure de probabilité qui attribue un poids  $\lambda_n$  à  $\tilde{x}_n$ ,  $\mu = \sum \lambda_n \delta_{\tilde{x}_n}$ , et à poser  $\tilde{a}(\tilde{x}) = \mu([0, \tilde{x})]$  et  $\tilde{b}(\tilde{x}) = \mu([0, \tilde{x}])$ .

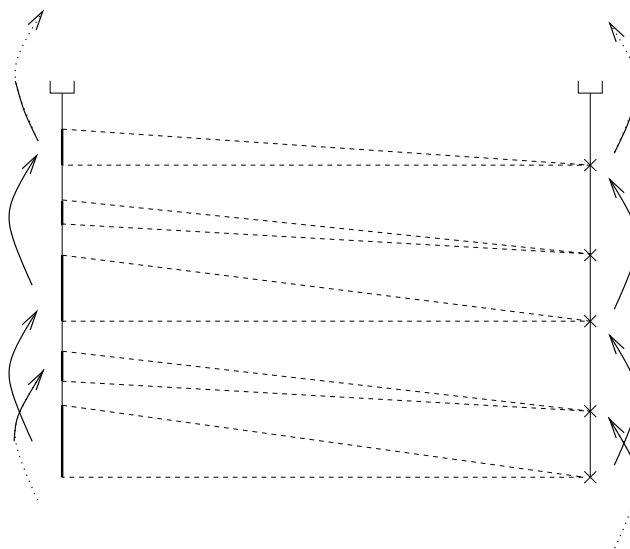


FIG. C.1 – Deux copies de l'intervalle  $[0,1[$ ; à droite, les premiers points de l'orbite  $(\tilde{x}_n)$ ; à gauche, les intervalles  $\tilde{I}_n$  correspondant.

**Construction de  $f$  homéomorphisme** Pour chaque point  $x$  du cercle, on pose maintenant  $I(x) = \pi(\tilde{I}(\tilde{x}))$ , où  $\pi$  est l'application de passage au quotient de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{S}^1$ .

- Si  $I(x)$  est un singleton, on pose  $f(I(x)) = I(R_\alpha(x))$ ;
- sinon, on définit  $f$  sur  $I(x)$  en choisissant n'importe quel homéomorphisme croissant entre  $I(x)$  et  $I(R_\alpha(x))$ .

Vérifier que  $f$  est un homéomorphisme du cercle, croissant, de nombre de rotation  $\alpha$ , qui n'est pas transitif. Identifier l'ensemble minimal  $\omega(f)$ . Quelle application réalise la semi-conjugaison entre  $f$  et  $R_\alpha$ ?

**Construction de  $f$  difféomorphisme** Pour obtenir un difféomorphisme, on impose de plus à la suite des longueurs  $(\lambda_n)$  de vérifier

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \longrightarrow 1 \text{ quand } |n| \longrightarrow +\infty.$$

*Question annexe : montrer qu'il existe une suite  $(\lambda_n)$  vérifiant les deux conditions imposées : somme égale à 1 et quotient de deux termes consécutifs tendant vers 1.*

On définit alors  $f$  comme avant, sauf qu'il faut être un peu plus précis : sur  $I(x_n)$ , on choisit un difféomorphisme entre  $I(x_n)$  et  $I(x_{n+1})$ , dont la dérivée vaut 1 aux deux extrémités de l'intervalle. De plus, on s'arrange pour que

$$\sup_{I(x_n)}(f' - 1) \longrightarrow 0 \text{ quand } |n| \longrightarrow +\infty.$$

*Montrer qu'il est possible d'obtenir ces conditions (on peut utiliser des fonctions du type  $\exp(ct(1-t))$  ).*

Il faut maintenant vérifier que  $f$ , construite ainsi, est un difféomorphisme. L'homéomorphisme  $f$  est clairement dérivable en tout point situé à l'intérieur d'un des intervalle  $I(x_n)$ , c'est-à-dire hors de l'ensemble minimal  $\omega(f)$ ; on va montrer qu'il est encore dérivable sur  $\omega(f)$ , et de dérivée 1. Soit  $z$  un point de  $\omega(f)$ ; on note  $\text{Leb}$  la mesure de Lebesgue sur le cercle (définie par exemple comme mesure image par l'application  $\pi$  de la mesure de Lebesgue sur  $[0,1]$ ). Nous allons voir que

$$\frac{\text{Leb}(f([z, z+t]))}{\text{Leb}([z, z+t])} \longrightarrow 1 \text{ quand } t \longrightarrow 0.$$

*Vérifier que ceci permet de conclure.*

Il reste à prouver cette convergence. Rappelons que la réunion des intervalles  $I(x_n)$  est de mesure de Lebesgue totale sur le cercle. Du coup, la longueur d'un intervalle  $J := [z_1, z_2]$  dont les extrémités sont dans  $\omega(f)$  est égale à la somme des longueurs des intervalles  $I(x_n)$  qu'il contient,

$$\text{Leb}(J) = \sum \{ \lambda_n, \quad I(x_n) \subset J \}.$$

*En utilisant cette remarque, évaluer la longueur de l'intervalle image  $f(J)$ ; montrer que quand  $z_2$  tend vers  $z_1$ , le rapport des longueurs  $\frac{\text{Leb}(f(J))}{\text{Leb}(J)}$  tend vers 1. Conclure.*

## Mesures invariantes pour les difféomorphismes et flots de $\mathbb{R}^n$

### Difféomorphismes

On considère un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , muni de la restriction de la mesure de Lebesgue, notée  $\text{Vol}_U$  (pas nécessairement finie, on s'en fiche ici).

La formule de changement de variable entraîne la remarque suivante.

**Remarque** Un  $C^1$ -difféomorphisme  $f : U \rightarrow U$  préserve la mesure  $\text{Vol}_U$  si et seulement si le jacobien de  $f$  est partout égal à 1.

On peut généraliser aux mesures absolument continues par rapport à Lebesgue. Soit  $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction mesurable; on note  $\rho \text{Vol}_U$  la mesure définie sur  $U$  par

$$\rho \text{Vol}_U(E) := \int_E \rho \, d\text{Vol}_U.$$

Montrer que  $f$  préserve la mesure  $\rho \text{Vol}_U$  si et seulement si on a

$$\rho = \det(Df) \times \rho \circ f.$$

Exemple : le billard (*cf.* exercice).

### Flots, formule de Liouville

On note  $(f^t)$  le flot solution d'une équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  où le champ  $F$ , défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , est supposé suffisamment régulier (par exemple  $C^\infty$ ). Rappelons que la divergence de  $F$  est la trace de sa matrice jacobienne. La formule de Liouville dit que

$$\det(Df^t(x)) = \int_0^t \text{div}(F(f^s(x))) ds.$$

On en déduit que la mesure de Lebesgue est invariante par le flux  $f^t$  si et seulement si la divergence de  $F$  est partout nulle. On peut généraliser aux mesures absolument continues...

### Application aux Hamiltoniens

En mécanique classique, de nombreux systèmes sans frottements peuvent être mis sous forme d'équation hamiltonienne (pendule simple ou double, système solaire, gaz idéal modélisé par des particules...)

Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  sur lequel les coordonnées sont notées  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Un *hamiltonien* est simplement une fonction (de classe  $C^\infty$ ) de  $O$  dans  $\mathbb{R}$ . Une telle fonction définit le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

Le flot hamiltonien est le flot obtenu en intégrant ce système (il faut des conditions sur  $H$  pour que le flot soit complet, c'est-à-dire défini pour tout temps; sinon, on a juste un flot "local":  $f^t(x)$  est défini pour  $t$  dans un certain intervalle autour de 0). *Vérifier que le flot d'un système dynamique hamiltonien préserve la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Application: si on croit au fait que le pendule (simple ou double) peut se mettre sous forme d'équation hamiltonienne, alors on obtient que presque tout point est récurrent. *En raisonnant au niveau du système physique, trouver explicitement des conditions initiales récurrentes et des conditions initiales non récurrentes pour le pendule simple.*

**Remarque** Ici le flot n'est pas défini sur  $\mathbb{R}^n$  mais sur l'espace cotangent au cercle  $\mathbb{S}^1$ , pour le pendule simple, ou au tore  $\mathbb{T}^2$ , pour le pendule double. Le bon cadre pour parler de systèmes hamiltoniens est celui des *variétés symplectiques* (une *forme symplectique* est une forme différentielle fermée de degré 2, non dégénérée). Pour en savoir plus, ouvrez un livre sur les systèmes dynamiques hamiltoniens (les livres d'Arnol'd, par exemple)!

## Généralisations

Soient  $U, V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : U \rightarrow V$  un difféomorphisme local surjectif (on peut supposer que, à mesure nulle près,  $U$  est réunion disjointe d'ouverts sur chacun desquels  $f$  est un difféomorphisme sur son image). Si on a

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{1}{|\det(Df)(x)|} = 1 \quad \text{pour tout } y \text{ dans } V,$$

*montrer que  $f$  envoie la mesure de Lebesgue  $\text{Vol}_U$  sur la mesure de Lebesgue  $\text{Vol}_V$ .*

On peut généraliser aux mesures absolument continues. Montrer que si on a une fonction  $\rho_U$  sur  $U$  et une fonction  $\rho_V$  sur  $V$  telles que

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho_U(x)}{|\det(Df)(x)|} = \rho_V(y) \quad \text{pour tout } y \text{ dans } V,$$

alors  $f$  envoie la mesure  $\rho_U \text{Vol}_U$  sur la mesure  $\rho_V \text{Vol}_V$ .

## Feuille d'exos 3 : théorie ergodique (I)

**Exercice 1.** Montrer que les théorèmes de récurrence deviennent faux pour une mesure infinie.

*Toutes les mesures sont supposées être des mesures de probabilité.*

### Exemples de mesures invariantes

**Exercice 2 (les exemples de l'introduction du cours).**

1. Montrer qu'une homothétie de  $\mathbb{R}^n$  admet une unique mesure invariante.
2. Trouver toutes les mesures invariantes pour une translation de  $\mathbb{R}^n$  ! En déduire toutes les mesures invariantes pour un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  qui n'a aucun point fixe.
3. Déterminer toutes les mesures invariantes pour un homéomorphisme croissant de l'intervalle (on pourra commencer par le cas avec seulement deux points fixes).
4. Décrire toutes les mesures invariantes par la rotation  $x \mapsto x + \frac{1}{2} \pmod{1}$ .
5. Trouver des mesures invariantes pour l'Anosov linéaire du tore (cf. l'introduction). En déduire que ...-presque tout point est récurrent. Y a-t-il des points qui ne sont pas récurrents ?

**Exercice 3.** Montrer que pour presque tout nombre  $x$  dans  $[0,1]$ , le développement décimal de  $x$  contient une infinité de fois le bloc "12345". Indication : commencer par montrer que presque aucun nombre ne contient aucune occurrence de ce bloc ; on peut aussi commencer par faire l'exercice en remplaçant le bloc "12345" par le bloc "7".

**Exercice 4.** Montrer que le doublement de l'angle est semi-conjugué à l'application  $x \mapsto 2x^2 - 1$  sur l'intervalle  $[-1,1]$  (indication : regarder ce qui arrive à l'abscisse d'un point du cercle unité du plan). En déduire une mesure invariante pour cette application. Comparer avec l'expérimentation numérique.

**Exercice 5 (premier exemple de codage).** Dans cet exercice, nous introduisons un exemple fondamental de système dynamique *symbolique*, le "Shift" ou "décalage unilatère". D'une part cet exemple modélise la réalisation d'une suite d'expériences aléatoires indépendantes. D'autre part, il intervient dans de nombreux cadres comme "codage" de la dynamique, à partir d'un outil géométrique

appelé *partition de Markov* : en gros, on découpe l'espace des phases en un certain nombre de morceaux, et on associe à un point de  $X$  son itinéraire, c'est-à-dire la suite des morceaux par lesquels il passe quand on itère la transformation. Si le système dynamique est "suffisamment aléatoire", et si le découpage est bien choisi, ce procédé de codage donne une semi-conjugaison avec un Shift. L'exemple le plus célèbre est donné par le "fer à cheval" de Smale, on en reparlera...

Soit  $X$  l'espace des suites de 0 et de 1 :

$$X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

On définit la transformation de décalage sur  $X$  par :

$$\sigma : (x_0, x_1, x_2, \dots) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

**Aspects topologiques** L'espace  $X$  est muni de la topologie produit obtenue à partir de la topologie discrète sur  $X$  : une base de voisinages d'un élément  $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 0}$  est donnée par les ensembles  $E_N(\mathbf{x})$  des suites qui coïncident avec la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  jusqu'à l'ordre  $N$  :

$$E_N(\mathbf{x}) := \{(y_n)_{n \geq 0} | y_0 = x_0, \dots, y_N = x_N\}.$$

- 1) Montrer que l'espace  $X$  est métrisable et compact. Montrer que  $\sigma$  est continue.
- 2) Montrer que  $\sigma$  est semi-conjugée au doublement de l'angle sur le cercle<sup>1</sup>. Quels sont les points du cercle qui ont plusieurs préimages par la semi-conjugaison, et combien en ont-ils ?
- 3) Décrire les orbites périodiques, montrer que l'ensemble des points périodiques est dense. Décrire les orbites *pré-périodiques*, c'est-à-dire les points qui ne sont pas périodiques mais dont un itéré est un point périodique.
- 4) Montrer que le Shift est transitif (*i.e.* trouver une orbite positive dense).

**Aspects ergodiques (I)** On peut munir l'ensemble  $\{0,1\}$  de la mesure équiprobable. On considère alors la mesure produit  $\mu$  sur  $X$  : celle-ci est l'unique mesure de probabilité, définie sur la tribu des boréliens, telle que pour tout  $\mathbf{x} \in X$  et tout entier positif  $N$ ,

$$\mu(E_N(\mathbf{x})) = \frac{1}{2^{N+1}}.$$

- 3) Montrer que la mesure  $\mu$  est invariante par  $\sigma$ .
- 4) Quelle est l'image de la mesure  $\mu$  par la semi-conjugaison obtenue en 2) ?<sup>2</sup>

---

1. Ceci est un exemple de codage ; faites le lien avec la description donnée plus haut, en termes "d'itinéraires relatifs à une partition" : de quelle partition s'agit-il ?...

2. On en déduit un isomorphisme entre les deux systèmes dynamiques mesurés...

**Généralisation** On peut reprendre l'exercice en remplaçant l'espace  $X$  par l'espace des suites sur  $\{0,1,\dots,n\}$ , et on peut aussi remplacer la mesure par une mesure non équiprobable (obtenue à partir de n'importe quelle mesure de probabilité sur  $\{0,1,\dots,n\}$ ).

**Le décalage bilatère** On peut aussi considérer l'espace des suites indexées par  $\mathbb{Z}$ ; on obtient alors une dynamique symbolique inversible.

**Exercice 6 (le billard).** Soit  $O$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  qui est bordé par une courbe de classe  $C^1$  par morceaux, et continue.

On définit le flot du billard de la façon suivante. L'espace des phases est l'ensemble  $X$  des couples  $(x,v)$  où  $x$  est un point de  $O$  et  $v$  un vecteur de  $T_x O$  (l'espace tangent en  $x$ , identifié au plan), ou bien  $x$  est un point de  $\partial O$  et  $v$  est un vecteur de  $T_x \mathbb{R}^2$  qui pointe vers l'intérieur de  $O$ . De manière informelle, le flot sur  $X$  consiste à se déplacer en ligne droite et à la vitesse  $v$  tant que  $x$  est dans  $O$ , et à rebondir selon les lois de Descarte (angle incident = angle réfléchi) quand on rencontre la frontière  $\partial O$ .

On va plutôt utiliser l'application de premier retour sur le bord du billard. Soit  $\Sigma$  le sous-ensemble de  $X$  formé des couples  $(x,v)$  où  $x \in \partial O$ . Pour tout  $(x,v) \in \Sigma$ , on définit  $T(x,v) := (x',v')$  où  $x'$  est le premier point d'intersection de  $\partial O$  avec la demi-droite issue de  $x$  dans la direction  $v$ , et  $v'$  le vecteur donné par les lois de Descartes (autrement dit, si  $\gamma$  est un paramétrage de  $\partial O$  tel que  $\gamma(s) = x$ , alors les angles orientés  $(v, \gamma'(s))$  et  $(\gamma'(s), v')$  sont égaux).

À l'aide d'un paramétrage  $\gamma$  à vitesse constante de  $\partial O$ , on identifie le point  $(x,v)$  de  $\Sigma$  au point  $(s,\theta)$  de  $\mathbb{S}^1 \times ]0,\pi[$  où  $x = \gamma(s)$  et  $\theta$  est l'angle (orienté) entre  $\gamma'(s)$  et  $v$ . Par conjugaison, on transporte l'application  $T$  de  $\Sigma$  en une application de  $\mathbb{S}^1 \times [0,\pi]$  encore notée  $T$  (Remarquer que  $\mathbb{S}^1 \times ]0,\pi[$  est (topologiquement) un anneau).

On suppose que la courbe  $\partial O$  est strictement convexe. On munit  $\mathbb{S}^1 \times ]0,\pi[$  de la mesure  $d\mu = \sin(\theta) ds d\theta$ . *Par des arguments géométriques, montrer que l'application  $T$  préserve la mesure  $d\mu$ .*

(Remarque : on pourra supposer que le bord de  $O$  est de classe  $C^1$ . Dans le cas contraire, l'application  $T$  n'est pas définie partout, mais seulement sur un ensemble  $\Sigma_0$  de mesure pleine dans  $\Sigma$ ; pour avoir un système dynamique bien défini, il faut se restreindre à l'ensemble invariant  $\cap_{n \geq 0} T^{-n}(\Sigma_0)$ , qui est encore de mesure pleine...)