ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE

Table des matières

1 Fonctions holomorphes et formules de Cauchy (Intégration complexe) 7

1.1 Théorème de Cauchy 8

1.1.1 Formule de Cauchy sur les ouverts convexes 11

1.1.2 Formule de Cauchy homotopique 13

1.1.3 Formule de la moyenne 16

1.2 Analyticité des fonctions holomorphes 19

1.2.1 Développement en série entière et prolongement analytique 19

1.2.2 Théorème de Liouville et clôture algébrique de **C** 20

1.2.3 Formule de Cauchy "homologique" 21

1.2.4 Principe des zéros isolés et théorème de l'argument 22

1.3 Fonctions holomorphes et **C**-dérivabilité 25

2 Fonctions holomorphes et représentation conforme (Géométrie du plan complexe) 27

2.1 Lemme de Schwarz et automorphismes analytiques du disque 29

2.1.1 Lemme de Schwarz 29

2.1.2 Automorphismes analytiques du disque 30

2.1.3 Une caractérisation des automorphismes conformes du disque 31

2.2 Théorème de représentation de Riemann 31

2.2.1 Notion de compacité pour les fonctions holomorphes 32

2.2.2 Théorème de représentation conforme 33

2.2.3 Simple connexité 37

3 Singularités isolées (Topologie des images de fonctions holomorphes) **39**

3.1 Développement de Laurent 39

3.1.1 Fonctions holomorphes sur une couronne 40

3.1.2 Singularités éliminables, pôles et singularités essentielles 42

3.1.3 Singularités à l'infini 43

3.2 Fonctions méromorphes et théorème des résidus 44

3.2.1 Théorème des résidus 45

3.2.2 Exemples de calculs d'intégrales 47

3.3 Singularités essentielles et théorème de Picard 50

3.3.1 Métrique de Poincaré et lemme de Schwarz 50

3.3.2 Théorème de Liouville et petit théorème de Picard 53

3.3.3 Grand théorème de Picard 55

4 Approximation rationnelle (Corps des fractions des fonctions holomorphes) **57**

4.1 Approximations polynomiale et rationnelle des fonctions holomorphes 57

4.1.1 Formule de Cauchy uniforme sur un compact 58

4.1.2 Approximation rationnelle 60

4.1.3 Approximation polynomiale 63

4.2 Localisation des zéros d'une fonction holomorphe 63

4.2.1 Produits infinis 64

4.2.2 Fonction holomorphe dont les zéros sont prescrits 66

4.2.3 Corps des fractions des fonctions holomorphes 69

4.3 Localisation des pôles d'une fonction méromorphe 69

4.3.1 Fonction méromorphe dont la partie singulière est prescrite 69

4.3.2 Un problème d'interpolation 71

5 Fonctions harmoniques et formule de Poisson (Analyse du problème de Dirichlet en dimension 2) **73**

5.1 Harmonicité et holomorphie 75

5.1.1 Régularité C^∞ des fonctions harmoniques 75

5.1.2 Analyticité des fonctions harmoniques 76

5.1.3 Formule de la moyenne 77

5.2 Formule de Poisson 78

5.2.1 Noyau et formule de Poisson 79

5.2.2 Inégalités de Cauchy 81

5.2.3 Inégalités de Harnack 82

5.3 Problème de Dirichlet 84

5.3.1 Intégrale de Poisson 84

5.3.2 Cas des domaines de Jordan 85

5.3.3 Harmonicité et propriété de la moyenne 87

6 Fonctions sous-harmoniques (Hypoellipticité du Laplacien) 89

6.1 Principe du maximum et propriété du majorant harmonique 91

6.1.1 Principe du maximum 91

6.1.2 Propriété du majorant harmonique 93

6.1.3 Moyennes circulaires 95

6.1.4 Caractérisation de la sous-harmonicité pour les fonctions de classe C^2 . 97

6.2 Fonctions sous-harmoniques et distributions 98

6.2.1 Approximation par convolution 98

6.2.2 Distributions sous-harmoniques 100

6.2.3 Potentiel logarithmique 104

6.2.4 Théorème de décomposition de Riesz et hypoellipticité du Laplacien . . 105

Chapitre 1

Fonctions holomorphes et formules de Cauchy (Intégration complexe)

L'analyse complexe a pour objet l'étude des fonctions holomorphes qui sont des fonctions complexes de variable complexe, avec une structure différentielle très particulière.

Définition : Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un domaine U du plan complexe et différentiable (au sens du calcul à plusieurs variables).
On note u et v les parties réelle et imaginaire de f, fonctions des deux variables réelles x et y où $z = x + iy$.
On dit que f est **holomorphe** si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
• f est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de U, i.e.

$$\forall z_0 \in U, \quad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe};$$

• la matrice jacobienne de l'application de $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ est une matrice de similitude directe en tout point $x_0 + iy_0 \in U$;
• f vérifie les relations de Cauchy-Riemann

$$\forall z_0 = x_0 + iy_0 \in U, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Preuve. f est $\mathbf{C}$ dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + o(|h|)$$

ou autrement dit

$$f((x_0 + h_1) + i(y_0 + h_2)) - f(x_0 + iy_0) = (\Re e(f'(z_0)) + i\,\Im m(f'(z_0))(h_1 + ih_2) + o(|h|),$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{pmatrix} u((x_0+h_1),(y_0+h_2))-u(x_0,y_0) \\ v((x_0+h_1),(y_0+h_2))-v(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re e(f'(z_0)) & -\Im m(f'(z_0)) \\ \Im m(f'(z_0)) & \Re e(f'(z_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(|h|).$$

Ceci montre que les trois propriétés sont équivalentes. ■

Notations : il est naturel d'introduire les opérateurs de dérivation

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Conformément à l'intuition, on a bien

$$\frac{\partial}{\partial z}z = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z}\bar{z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}z = 0.$$

En particulier, une fonction f est holomorphe si et seulement si elle vérifie $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f \equiv 0$.

Remarque. On verra dans la suite de ce cours qu'il suffit en fait, pour qu'une fonction soit holomorphe, qu'elle soit $\mathbf{C}$-dérivable (la continuité des dérivées est obtenue automatiquement).

Exemples : • Si $P \in \mathbf{C}[X]$, la fonction $z \mapsto P(z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ (**entière**), et sa dérivée complexe est $z \mapsto P'(z)$.

• Si $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, la fonction $z \mapsto P/Q(z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$ et sa dérivée complexe est $z \mapsto (P'Q - Q'P)/Q^2(z)$.

• Si $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n(z-z_0)^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors la fonction $z \mapsto \sum_n a_n(z-z_0)^n$ est holomorphe sur $B(z_0, R)$ et sa dérivée complexe est $z \mapsto \sum_{n\geq 1} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

Ce dernier résultat utilise les propriétés algébriques de la dérivation complexe (déjà utilisées dans les autres exemples), ainsi que le lemme d'Abel. On montre en fait que la fonction est $\mathbf{C}$-dérivable une infinité de fois. Cet exemple est important car il constitue le prototype de toutes les fonctions holomorphes (cf 1.2).

1.1 Théorème de Cauchy

A cause de leur structure différentielle assez "rigide" (équations de Cauchy-Riemann), les fonctions holomorphes bénéficient de propriétés géométriques particulières.

Les résultats que nous allons énoncer maintenant sont en effet à rapprocher des propriétés obtenues en géométrie différentielle à partir de la formule de Stokes, notamment du fait que la circulation d'un champ de potentiel est nulle.

Définitions : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
- un **chemin** de U est une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans U ;
- un **lacet** de U est un chemin $\gamma : [a, b] \to U$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to U$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to U$ sont C^1**-équivalents** s'il existe $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijection de classe C^1 ainsi que sa réciproque telle que $\gamma_1 = \gamma_2 o \phi$;
- deux chemins C^1-équivalents γ_1 et γ_2 sont dits **de même orientation** si la bijection ϕ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 o \phi$ est strictement croissante.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin.

Définition : Soient $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin C^1 par morceaux, f une fonction continue sur U. On appelle **intégrale de** f **sur** γ

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt,$$

où les t_i sont les points de non-dérivabilité de γ ($t_0 = a$ et $t_n = b$).

Propriétés
- Soient $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin C^1 par morceaux et f une fonction continue sur U. On a l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \sup_{\gamma([a,b])} |f| \times \text{ longueur}(\gamma).$$

- Soient γ_1 et γ_2 deux chemins C^1 par morceaux sur U, C^1-équivalents et de même orientation, et f une fonction continue sur U. La formule de changement de variable donne

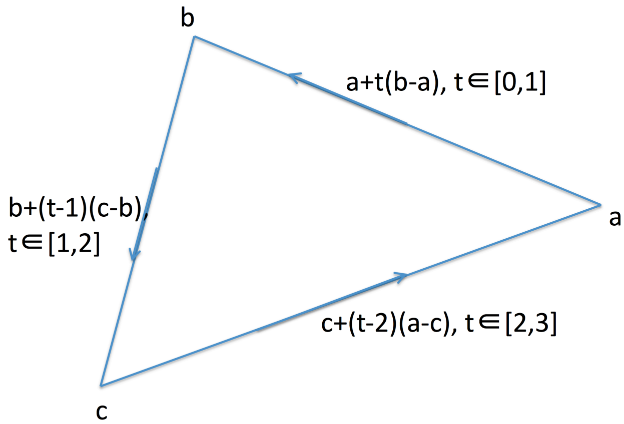
$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

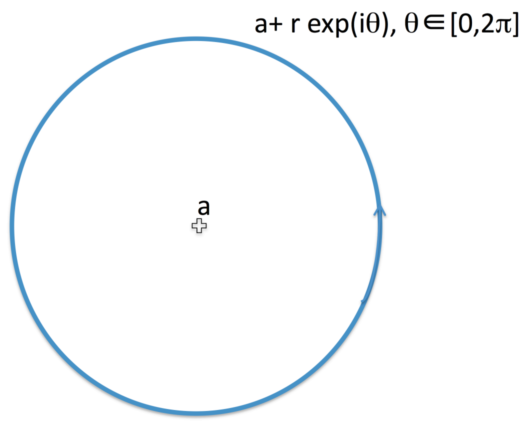
Exemple 1 : Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$. On désigne par T_{abc} un lacet dont l'image est le triangle abc (dans toute la suite, on désignera abusivement un lacet par son image s'il n'y a pas de confusion possible sur la classe d'équivalence et l'orientation).
On a alors

$$\int_{T_{abc}} dz = \int_0^1 (b-a)dt + \int_0^1 (c-b)dt + \int_0^1 (a-c)dt = 0;$$

et

$$\int_{T_{abc}} zdz = \int_0^1 (a+t(b-a))(b-a)dt + \int_0^1 (b+t(c-b))(c-b)dt + \int_0^1 (c+t(a-c))(a-c)dt = 0.$$





Exemple 2 : Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. On désigne par $\partial B^+(a,r)$ une paramétrisation injective du cercle $\partial B(a,r)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

• Si $|a| > r$,

$$\int_{\partial B^+(a,r)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{a+re^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{a} \sum_0^{\infty} \left(-\frac{re^{i\theta}}{a}\right)^n d\theta$$
$$= -i\sum_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{re^{i\theta}}{a}\right)^n d\theta = 0.$$

• Si $|a| < r$,

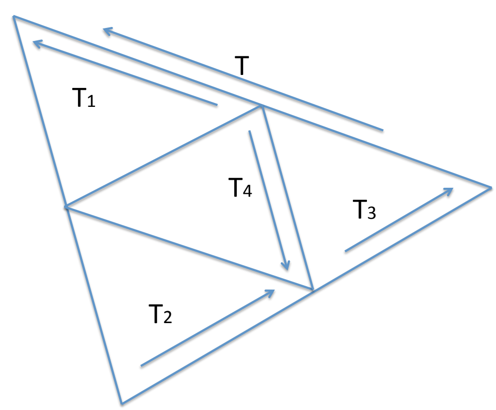
$$\int_{\partial B^+(a,r)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i}{1+\frac{a}{r}e^{-i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} i\sum_0^{\infty} \left(-\frac{ae^{-i\theta}}{r}\right)^n d\theta$$
$$= 2i\pi.$$

1.1.1 Formule de Cauchy sur les ouverts convexes

Théorème de Goursat. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et $T \subset U$ un triangle plein fermé.
Si f est holomorphe sur U (ou si f est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$), on a l'identité $\int_{\partial T} f = 0$.

Preuve. On commence par prouver le résultat dans le cas où $z_0 \notin T$.

• On construit pour cela une suite de triangles pleins fermés (T_k) par récurrence.
On pose tout d'abord $T_0 = T$.
Etant donné T_k, on considère les quatre triangles $T_k^{(1)}$, $T_k^{(2)}$, $T_k^{(3)}$ et $T_k^{(4)}$, semblables à T_k de rapports respectifs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, obtenus en prenant les milieux des segments qui forment T_k.



On vérifie alors aisément que

$$\int_{\partial T_k} f = \int_{\partial T_k^{(1)}} f + \int_{\partial T_k^{(2)}} f + \int_{\partial T_k^{(3)}} f + \int_{\partial T_k^{(4)}} f.$$

En particulier, il existe $i_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_k} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_k^{(i_k)}} f \right|$$

On pose alors $T_{k+1} = T_k^{(i_k)}$.

• Les T_n sont des compacts emboîtés de $\mathbf{C}$ dont le diamètre tend vers 0 ; Il existe donc z_1 tel que

$$\{z_0\} = \cap_n T_n.$$

On a alors, en utilisant les calculs du paragraphe précédent,

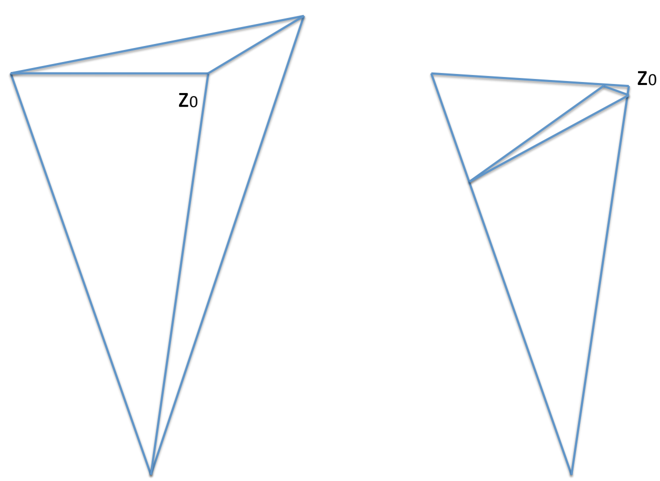
$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| &\leq 4^k \left|\int_{\partial T_k} f(z)dz\right| \\
&\leq 4^k \left|\int_{\partial T_k} (f(z) - f(z_1) - (z - z_1)f'(z_1))dz\right| \\
&\leq 4^k \text{diamètre}(T_k) \times \text{longueur}(\partial T_k) \times \sup_{z\in T_k} \left|\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1)\right| \\
&\leq \text{diamètre}(T) \times \text{longueur}(\partial T) \times \sup_{z\in T_k} \left|\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f'(z_1)\right|
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\int_{\partial T} f = 0.$$

• Si $z_0 \in T$,

– on partitionne T en trois triangles pour se ramener au cas où z_0 est un sommet ;



– dans ce dernier cas, on partitionne le triangle en quatre triangles, celui qui contient z_0 étant de mesure arbitrairement petite. Comme f est bornée, le résultat s'en déduit.

■

Corollaire. Soient U un ouvert convexe de $\mathbf{C}$, et γ un lacet de U, C^1 par morceaux. Si f est holomorphe sur U (ou continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$),

$$\int_\gamma f = 0.$$

Preuve. A l'aide du théorème de Goursat, on peut définir une primitive de f. On se donne pour cela un point $z_1 \in U$ quelconque, et on pose

$$\forall z \in U, \quad F(z) = \int_{[z_1,z]} f$$

qui est bien définie puisque $[z_1, z] \subset U$.

On vérifie alors que $F' = f$ puisque

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f - f(z) \right| \\ &\leq \sup_{z' \in B(z,|h|)} |f(z') - f(z)| \end{aligned}$$

tend vers 0 quand $h \to 0$.

On peut alors calculer l'intégrale de f le long de γ :

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \sum_{i=1}^{n-1} (F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i))) = 0,$$

car γ est un lacet. ■

1.1.2 Formule de Cauchy homotopique

L'extension de la formule de Cauchy dans le cadre des ouverts non convexes nécessite des hypothèses topologiques, que l'on peut formuler en termes de "déformation" des courbes.

Définition : Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et γ_0, γ_1 deux chemins sur U (que l'on suppose - sans perte de généralité - définis sur le même intervalle $[a, b]$).
On dit que γ_0 et γ_1 sont **homotopes** s'il existe $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ continue telle que $H(\cdot, 0) = \gamma_0$, $H(\cdot, 1) = \gamma_1$ et vérifiant l'une des conditions suivantes pour tout $s \in [0, 1]$
– $H(a, s) = H(b, s)$ (**homotopie de lacets**) ;
– $H(a, s) = \gamma_0(a)$ et $H(b, s) = \gamma_0(b)$ (**homotopie stricte de chemins**).

Théorème de Cauchy. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et γ_0,γ_1 deux chemins C^1 par morceaux, homotopes sur U.
Si f est holomorphe sur U (ou si f est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$),

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

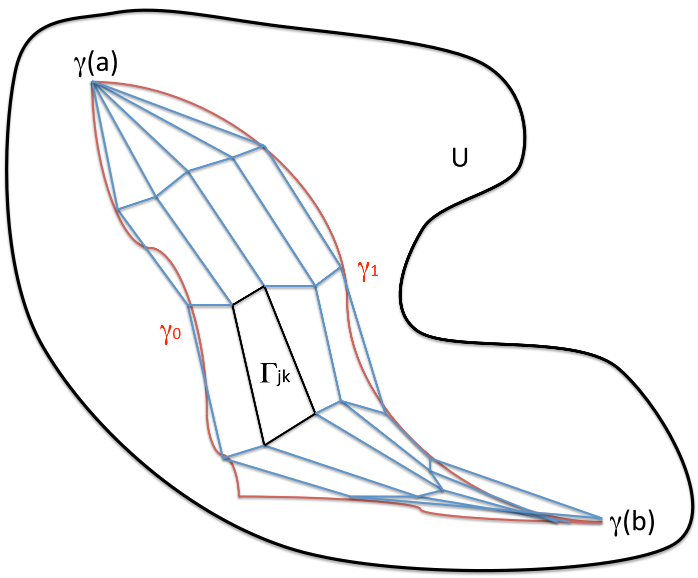
(En particulier, l'intégrale de f le long d'un lacet homotope à un point est nulle.)

Preuve. On commence par prouver le résultat dans le cas de l'homotopie stricte de chemins. Soient γ_0 et γ_1 deux chemins C^1 par morceaux de mêmes extrémités, et $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ continue telle que

$$H(\cdot,0) = \gamma_0 \text{ et } H(\cdot,1) = \gamma_1.$$

• On pose $s_j = j/n$ et $t_j = a + j(b-a)/n$ pour $j \in \{0,1,...,n\}$, et on définit l'interpolation affine H_n de la façon suivante : pour tout $(t,s) \in [t_k,t_{k+1}] \times [s_j,s_{j+1}]$,

$$H_n(t,s) = \frac{n^2}{b-a}\Big[(s_{j+1}-s)(t_{k+1}-t)H(t_k,s_j) + (s_{j+1}-s)(t-t_k)H(t_{k+1},s_j)$$
$$(s-s_j)(t_{k+1}-t)H(t_k,s_{j+1}) + (s-s_j)(t-t_k)H(t_{k+1},s_{j+1})\Big]$$



H_n est continue et approche uniformément H. En effet,

$$\begin{aligned}|H_n(t,s) - H(t,s)| &\leq \sup\big(|H(t_k,s_j) - H(t,s)|, |H(t_{k+1},s_j) - H(t,s)|,\\ &\qquad |H(t_k,s_{j+1}) - H(t,s)|, |H(t_{k+1},s_{j+1}) - H(t,s)|\big)\\ &\leq \sup_{|(t',s')-(t,s)| \leq \sqrt{1+(b-a)^2}/n} |H(t',s') - H(t,s)|\end{aligned}$$

Comme H est uniformément continue sur $[a,b] \times [0,1]$ (théorème de Heine), H_n converge uniformément vers H quand $n \to \infty$.

• En particulier, pour n assez grand,

$$\sup_{|(t',s')-(t,s)| \leq \sqrt{1+(b-a)^2}/n} |H(t',s') - H(t,s)| \leq \frac{1}{2} d(H([a,b] \times [0,1]), \partial U) = \eta\,.$$

Autrement dit les quadrilatères $\Gamma_{jk} = \big(H(t_k,s_j), H(t_{k+1},s_j), H(t_{k+1},s_{j+1}), H(t_k,s_{j+1})\big)$ sont inclus dans U.

En appliquant la formule de Cauchy sur un voisinage convexe de chaque quadrilatère, on obtient

$$\int_{\partial \Gamma_{jk}^+} f = 0\,.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial \Gamma_{jk}^+} f &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_{H_n(\cdot,s_j)} f - \int_{H_n(\cdot,s_{j+1})} f \right) \\ &= \int_{H_n(\cdot,0)} f - \int_{H_n(\cdot,1)} f = 0\,. \end{aligned}$$

• De la même façon, pour n assez grand, la boule de centre $\gamma_0(t_k)$ et de rayon η est contenue dans U, et contient le chemin γ^k réunion du segment $[H_n(t_{k+1},0), H_n(t_k,0)]$ et du chemin $\gamma_{0|[t_k,t_{k+1}]}$

D'après la formule de Cauchy dans les ouverts convexes, on a donc

$$\int_{\gamma_k} f = 0,$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma^k} f = \int_{\gamma_0} f - \int_{H_n(\cdot,0)} f = 0.$$

Le même argument montre que

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{H_n(\cdot,1)} f = 0.$$

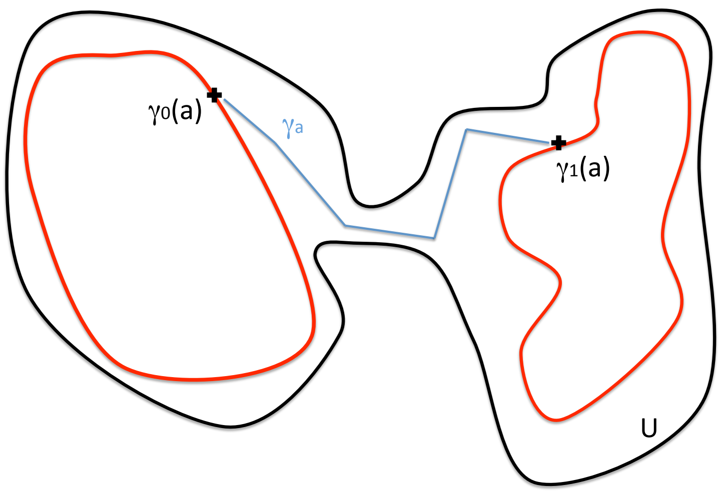
Finalement, on a

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_0} f\,.$$

• Considérons maintenant le cas de deux lacets homotopes γ_0 et γ_1. Soit $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ continue telle que

$$H(\cdot,0) = \gamma_0, \quad H(\cdot,1) = \gamma_1 \text{ et } \forall s \in [0,1], \quad H(a,s) = H(b,s).$$

L'application $s \mapsto H(a,s)$ est continue à valeurs dans U, donc on peut l'approcher uniformément par une fonction γ_a affine par morceaux dont l'image est incluse dans U et telle que $\gamma_a(0) = H(a,0)$ et $\gamma_a(1) = H(a,1)$. On peut donc construire un chemin C^1-équivalent et de même orientation que la réunion de γ_a, γ_1 et $\gamma_a(1-\cdot)$, qui est strictement homotope à γ_0.



D'après ce qui précède, on a donc

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_a} f + \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_a} f = \int_{\gamma_1} f\,,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

1.1.3 Formule de la moyenne

Le théorème de Cauchy indique qu'une fonction holomorphe sur un ouvert est fortement influencée par son comportement au bord.

La formule de la moyenne que nous allons énoncer maintenant montre en fait qu'on a une caractérisation complète.

Définition : Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ un lacet C^1 par morceaux, et $z_0 \notin \gamma([a,b])$.
L'**indice de γ par rapport à** z_0 est l'entier

$$\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \, .$$

Il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ dans $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.

Preuve. On doit vérifier que $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$ est bien un entier, et qu'il ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

• On pose

$$G(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds\right) ,$$

de sorte que G est une fonction non nulle de classe C^1sur $[a,b]$. De plus,

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, .$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma(t) - z_0}{G(t)}\right) = \frac{\gamma'(t)G(t) - (\gamma(t) - z_0)G'(t)}{G(t)^2} = 0 \, .$$

Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, on en déduit que $G(b) = G(a) = 1$, et par conséquent

$$\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = 2ik\pi \text{ pour } k \in \mathbf{Z} \, .$$

• La fonction $z \mapsto 1/(z - z_0)$ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. Le théorème de Cauchy implique alors que $\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ dans $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. ■

Exemples : Soient $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. Si on désigne par $\partial B^+(a,r)$ une paramétrisation injective du cercle $\partial B(a,r)$ parcouru dans le sens trigonométrique, on a montré que
• si $|a| > r$,

$$\mathrm{Ind}_0(\partial B^+(a,r)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(a,r)} \frac{dz}{z} = 0;$$

• si $|a| < r$,

$$\mathrm{Ind}_0(\partial B^+(a,r)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(a,r)} \frac{dz}{z} = 1.$$

Formule de la moyenne. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet C^1 par morceaux homotope à un point.
Si f est holomorphe sur U, pour tout $z_0 \in U \setminus \gamma([a,b])$,

$$f(z_0)\,\mathrm{Ind}_{z_0}(\gamma) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\frac{dz}{2i\pi}\,.$$

Preuve. Pour tout $z_0 \in U$, la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ si } z \neq z_0, \text{ et } g(z_0) = f'(z_0)\,,$$

est continue sur U et holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$.

D'après le théorème de Cauchy, comme γ est homotope à un point (et ne prend pas la valeur z_0),

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0,$$

ce qui conclut la preuve par définition de l'indice. ■

Principe du maximum. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.
Si f est holomorphe sur U et qu'il existe $z_0 \in U$ tel que

$$\forall z \in U, \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|\,,$$

alors f est constante sur U.

Preuve. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f(z_0) \geq 0$. Soit $S = \{z \in U \,/\, f(z) = f(z_0)\} \neq \emptyset$.

• S est fermée car f est continue.

• Soit $w \in S$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(w,r) \subset U$. D'après la formule de la moyenne, on a alors pour tout $r' < r$

$$\begin{aligned} f(z_0) = f(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w+r'e^{i\theta})d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(w+r'e^{i\theta})|d\theta \leq f(z_0)\,, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\forall r' < r, \quad \forall \theta \in [0,2\pi], \quad f(w+r'e^{i\theta}) = f(z_0),$$

ou autrement dit

$$B(w,r) \subset S\,.$$

• Comme U est connexe, on a alors $S = U$. ■

1.2 Analyticité des fonctions holomorphes

Une conséquence importante de la formule de la moyenne est l'analyticité des fonctions holomorphes.
En particulier, la **C**-dérivabilité (définie par les relations de Cauchy-Riemann) implique la dérivabilité à tout ordre.

1.2.1 Développement en série entière et prolongement analytique

Théorème de Weierstrass. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et f une fonction holomorphe sur U. Alors f est développable en série entière au voisinage de chaque point $z_0 \in U$, et le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à $d(z_0, \partial U)$.

Preuve. Soient $r < d(z_0, \partial U)$ et $w \in B(z_0, r)$. D'après la formule de la moyenne

$$\begin{aligned} f(w) &= \int_{\partial B^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w} \frac{dz}{2i\pi} \\ &= \int_{\partial B^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)(1-\frac{w-z_0}{z-z_0})} \frac{dz}{2i\pi} \\ &= \int_{\partial B^+(z_0,r)} \sum_{k=0}^{\infty} (w-z_0)^k \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2i\pi} \,. \end{aligned}$$

La convergence normale permet d'appliquer le théorème de Fubini

$$f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} (w-z_0)^k \int_{\partial B^+(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \frac{dz}{2i\pi} \,.$$

Sur $B(z_0, r)$, f est donc égale à une série entière (centrée en z_0) de rayon de convergence au moins égal à r, et ce pour tout $r < d(z_0, \partial U)$.
En particulier, toutes les dérivées de f sont holomorphes sur $B(z_0, d(z_0, \partial U))$. ■

Corollaire (prolongement analytique). Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, z_0 un point de U et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$, bornée au voisinage de z_0.
Alors il existe un prolongement analytique de f sur U, i.e. une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur U et telle que $f = \tilde{f}$ sur $U \setminus \{z_0\}$.

Preuve. On considère la fonction g définie sur $B(z_0, r) \subset U$ par

$$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) \text{ si } z \neq z_0, \text{ et } g(z_0) = 0.$$

Elle est différentiable sur $B(z_0, r)$ et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Elle est donc holomorphe et peut être développée en série entière sur $B(z_0, r)$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ avec } a_0 = a_1 = 0\,.$$

On définit alors une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $B(z_0, r)$ par

$$\tilde{f}(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(z-z_0)^n.$$

$\tilde{f}$ est holomorphe sur U, et on a $\tilde{f}(z) = g(z)/(z-z_0)^2 = f(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$. ∎

1.2.2 Théorème de Liouville et clôture algébrique de C

Théorème de Liouville. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ (entière).
Si f est bornée, alors f est constante.

Preuve. Soit $w \in \mathbf{C}$, et $R > 0$ quelconque. D'après le théorème de Weierstrass, on peut développer f en série entière au voisinage de w, et on a

$$f^{(k)}(w) = k! \int_{\partial B^+(w,R)} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} \frac{dz}{2i\pi}.$$

En particulier,

$$|f'(w)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R} \to 0 \text{ quand } R \to \infty.$$

On en déduit que $f' \equiv 0$, c'est-à-dire que f est constante. ∎

Une des applications les plus spectaculaires du théorème de Liouville est la preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

Corollaire (clôture algébrique de $\mathbf{C}$). Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 1.
Alors il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $P(z_0) = 0$.

Preuve. • Si P ne s'annule pas, $f = \frac{1}{P}$ est continuement différentiable et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann sur $\mathbf{C}$. La fonction f est donc holomorphe.
Comme un polynôme non constant vérifie $|P(z)| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$, f est bornée.
D'après le théorème de Liouville, f est constante et donc $\deg(P) = 0$. CONTRADICTION.

• Si P est de degré k, d'après ce qui précède, il existe z_1 tel que $P(z_1) = 0$. Le polynôme P est alors divisible par $(z - z_1)$:

$$P(z) = P_1(z)(z - z_1) \text{ avec } \deg(P_1) = k - 1\,.$$

En itérant ce procédé, on obtient finalement

$$P(z) = p_k \Pi_{j=1}^{k}(z - z_j)$$

ce qui montre que P est scindé. ∎

1.2.3 Formule de Cauchy "homologique"

Le théorème de Liouville permet d'établir une formule de Cauchy encore plus générale, avec des contours d'intégration non homotopes à un point. L'énoncé qui est donné ici (et qui sera utilisé dans la suite) n'est pas optimal puisqu'on se limite au cas des lacets : la notion de "cycles" qui est plus adaptée ne sera pas discutée dans ce cours par souci de simplicité.

Formule de Cauchy "homologique". Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et $(\gamma_j)_{1\leq j\leq N}$ des lacets C^1 par morceaux de U tels que

$$\forall z \in \mathbf{C}\setminus U, \quad \Sigma_{j=1}^N \operatorname{Ind}_z(\gamma_j) = 0$$

Si f est holomorphe sur U, pour tout $z_0 \in U \setminus \gamma([a,b])$,

$$f(z_0)\Sigma_{j=1}^N \operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma_j) = \Sigma_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-z_0}\frac{dz}{2i\pi}\,.$$

Preuve. On veut montrer que la fonction h définie par

$$h(w) = \frac{1}{2i\pi}\Sigma_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz\,.$$

est identiquement nulle sur U.

Par définition, h est holomorphe sur U. De plus, pour tout $w \in U$ tel que $\Sigma_{j=1}^N \operatorname{Ind}_w(\gamma_j) = 0$, on a

$$h(w) = \frac{1}{2i\pi}\Sigma_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-w}dz\,.$$

Comme $z \mapsto \Sigma_{j=1}^N \operatorname{Ind}_z(\gamma_j) \in \mathbf{Z}$ est une fonction continue sur $\mathbf{C}\setminus \cup_{j=1}^N \operatorname{Im}(\gamma_j)$, elle est constante sur toutes les composantes connexes de $\mathbf{C}\setminus \cup_{j=1}^N \operatorname{Im}(\gamma_j)$. En particulier, pour tout $w \in U$ tel que $d(w,\partial U) < d\left(\cup_{j=1}^N \operatorname{Im}(\gamma_j), \partial U\right)$,

$$\Sigma_{j=1}^N \operatorname{Ind}_z(\gamma_j) = 0 \text{ et } h(w) = \frac{1}{2i\pi}\Sigma_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-w}dz\,.$$

On prolonge alors h sur $\mathbf{C}\setminus U$ en posant

$$\forall w \in \mathbf{C}\setminus U, \quad h(w) = \frac{1}{2i\pi}\Sigma_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z-w}dz\,.$$

En particulier, h est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et tend vers 0 à l'infini.

Le théorème de Liouville montre alors que h est identiquement nulle. ■

Remarque. Pour toute fonction holomorphe sur un ouvert U et tout lacet C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to U$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus U, \quad \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0$$

on a

$$\int_\gamma f = 0$$

en appliquant la formule précédente à $(z - z_0)f(z)$ avec $z_0 \in U \setminus \gamma([a,b])$ quelconque.

1.2.4 Principe des zéros isolés et théorème de l'argument

Propriété (principe des zéros isolés). Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et f une fonction holomorphe sur U.
Si f est non identiquement nulle sur U, l'ensemble des zéros de f est discret.

Preuve. On commence par prouver que les zéros de f sont de multiplicité finie, on en déduit ensuite qu'ils sont isolés.

• On pose

$$Z = \{z \in U \,/\, \forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(z) = 0\}\,.$$

Z est fermé par continuité des dérivées $f^{(k)}$.

Z est ouvert car f est identiquement nulle au voisinage de tout point de Z (comme le montre par exemple le développement en série entière).

Par connexité de U, on a alors $Z = \emptyset$ (par hypothèse $Z \neq U$).

• Soit alors $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$. On note k le plus petit entier naturel tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. On obtient

$$f(z) = (z - z_0)^k \left(\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) + \sum_{j>0} b_j (z - z_0)^j \right).$$

Il existe donc un voisinage de z_0 tel que f ne s'annule qu'en z_0. ∎

Théorème de l'argument. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ un lacet C^1 par morceaux, partageant le plan en deux composantes connexes

$$\{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 1\} \text{ et } \{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0\}.$$

Si f est holomorphe sur un voisinage U de

$$K = \gamma([a,b]) \cup \{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 1\}$$

et ne s'annule pas sur $\gamma([a,b])$, alors le nombre de zéros de f (comptés avec leur multiplicité) dans K est donné par

$$k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} .$$

Preuve. D'après le théorème de convergence dominée, l'application $z \mapsto \mathrm{Ind}_z(\gamma)$ est une fonction continue de $\mathbf{C} \setminus \gamma([a,b])$ dans $\mathbf{Z}$. Elle est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C} \setminus \gamma([a,b])$. De plus,

$$\lim_{|z| \to \infty} \int_\gamma \frac{dz'}{z' - z} = 0,$$

de sorte que la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus \gamma([a,b])$ est incluse dans $\{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0\}$.

K est alors fermé et borné, donc compact.

• D'après le principe des zéros isolés, il y a un nombre fini de zéros de f dans K (l'ensemble des zéros n'ayant pas de point d'accumulation à l'intérieur de U).

De plus, chaque zéro est de multiplicité finie puisque

$$\forall z \in U, \quad \exists k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(z) \neq 0 .$$

On note alors $(z_j)_{1 \leq j \leq N}$ les zéros de f dans K, et (k_j) leurs multiplicités respectives.

• On définit pour tout $z \in U \setminus \cup_{j=1}^N \{z_j\}$

$$g(z) = f(z) \Pi_{j=1}^N (z - z_j)^{-k_j} \text{ et } g(z_j) = \frac{f^{(k_j)}(z_j)}{k_j!} \Pi_{l \neq j} (z_j - z_l)^{-k_l}$$

de sorte que g est holomorphe sur $U \setminus \cup_{j=1}^N \{z_j\}$.

En utilisant le développement en série entière de f au voisinage de z_j, on vérifie que g est bornée au voisinage de z_j et continue en z_j. D'après le principe de prolongement analytique, la fonction g est alors holomorphe sur U.

Par construction, on a de plus que g ne s'annule pas sur K. Les zéros de g étant isolés dans U, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in U \text{ tel que } g(z) = 0, \quad d(z, K) \geq \delta.$$

• La fonction g'/g est alors holomorphe sur un voisinage de K. Par définition de K, pour tout z dans le complémentaire de K, on a

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0.$$

D'après la formule de Cauchy "homologique", on a alors

$$\int_\gamma \frac{g'}{g} = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} - \sum_{j=1}^{N} \int_\gamma \frac{k_j}{z - z_j} \frac{dz}{2i\pi} = 0.$$

Par hypothèse, $\mathrm{Ind}_{z_j}(\gamma) = 1$. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^{N} k_j,$$

ce qui est la formule annoncée. ■

Corollaire (théorème de Rouché). Soient f et g deux fonctions holomorphes au voisinage du disque fermé $\bar{B}(z_0, r)$.
Si $|g| < |f|$ sur $\partial B(z_0, r)$, f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans $B(z_0, r)$.

Preuve. On commence par remarquer que si $|g| < |f|$ sur $\partial B(z_0, r)$, f et $f + g$ ne s'annulent pas sur le cercle. On a alors, puisque (g/f) est uniformément majoré sur $\partial B(z_0, r)$ par une constante strictement plus petite que 1,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B^+(z_0,r)} \left(\frac{f' + g'}{f + g} - \frac{f'}{f} \right) &= \int_{\partial B^+(z_0,r)} \frac{(g/f)'}{1 + (g/f)} \\
&= \int_{\partial B^+(z_0,r)} \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{g}{f} \right)^n \left(\frac{g}{f} \right)' \\
&= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1} \int_{\partial B^+(z_0,r)} \left(\left(\frac{g}{f} \right)^{n+1} \right)' = 0.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de l'argument, f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans $B(z_0, r)$. ■

1.3 Fonctions holomorphes et C-dérivabilité

Comme on l'a remarqué dans l'introduction, pour qu'une fonction soit holomorphe, il suffit en fait qu'elle soit **C**-dérivable : la continuité de la dérivée est obtenue automatiquement.

Théorème de Morera. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et f une fonction continue sur $\mathbf{C}$.
Alors f est holomorphe sur $\mathbf{C}$ si et seulement si

$$(*) \qquad \forall T \text{ triangle plein fermé inclus dans } U, \qquad \int_{\partial T} f = 0\,.$$

En particulier, si f est **C**-dérivable sur U, alors f est holomorphe.

Preuve. Le théorème de Goursat montre que si f est **C**-dérivable, on a bien la propriété $(*)$. (L'hypothèse de continuité de la dérivée n'est pas utilisée dans la preuve). Ceci montre que la condition $(*)$ est nécessaire pour que f soit holomorphe.

Montrons alors que la condition $(*)$ est suffisante. Comme le fait d'être holomorphe est une propriété locale, il suffit de la vérifier sur les boules $B(z_0, r) \subset U$.

Pour $z \in B(z_0, r)$, on pose $F(z) = \int_{[z_0,z]} f$ de sorte que

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \int_0^1 (f(z+th) - f(z))dt \right| \leq \sup_{|z'-z| \leq h} |f(z') - f(z)|$$

tend vers 0 quand h tend vers 0. On en déduit que F est une primitive de f sur $B(z_0, r)$, et en particulier que F est holomorphe sur $B(z_0, r)$.

Comme $f = F'$, f est aussi holomorphe sur $B(z_0, r)$ (théorème de Weierstrass). ■

Chapitre 2

Fonctions holomorphes et représentation conforme (Géométrie du plan complexe)

On a vu au chapitre précédent que les fonctions holomorphes peuvent être caractérisées par des propriétés géométriques (relations de Cauchy-Riemann). Une question naturelle consiste alors à caractériser les domaines du plan complexe sur lesquels l'analyse complexe est “équivalente”.

<u>**Définition**</u> : Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{C}$.
U et V sont dits **conformément équivalents** s'il existe une bijection holomorphe de l'un sur l'autre.

Preuve. On vérifie que le fait d'être conformément équivalent est bien une relation d'équivalence, i.e. que cette propriété est réflexive, symétrique et transitive.

• La réflexivité s'obtient immédiatement en utilisant l'identité comme bijection holomorphe de n'importe quel ouvert de $\mathbf{C}$ sur lui-même.

• S'il existe une bijection holomorphe σ de U sur V, on commence par montrer que σ' ne s'annule pas sur U.

Soient z_0 tel que $\sigma'(z_0) = 0$, et $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$. En posant $\gamma = \partial B^+(z_0, r)$, on a par le théorème de l'argument

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma'}{\sigma - \sigma(z_0)} \geq 2,$$

car z_0 est un zéro de multiplicité au moins 2 de la fonction holomorphe $\sigma - \sigma(z_0)$ (cf le développement en série entière au voisinage de z_0).

Pour λ suffisamment proche de $\sigma(z_0)$, la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma'}{\sigma - \lambda}$$

est bien définie, à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et dépend continûment de λ d'après le théorème de convergence dominée. Elle est donc constante localement :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sigma'}{\sigma-\lambda} \geq 2.$$

On en déduit que la fonction $\sigma-\lambda$ a au moins deux zéros dans $B(z_0,r)$ (distincts de z_0 si $\lambda \neq \sigma(z_0)$).

Pour λ suffisamment proche de $\sigma(z_0)$, ces deux zéros ne peuvent pas être confondus car les zéros de σ' sont isolés. Ceci implique que σ n'est pas injective. CONTRADICTION.

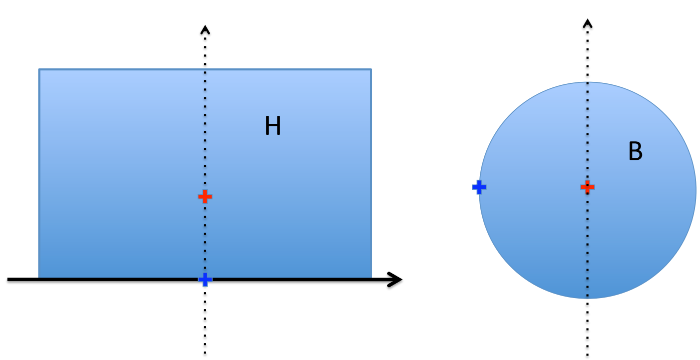
La bijection inverse σ^{-1} de V sur U est alors holomorphe. Sa dérivée est donnée par

$$(\sigma^{-1})'(w) = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(w))}.$$

• La transitivité est ensuite obtenue en utilisant les règles usuelles de dérivation pour la composée de deux fonctions. ■

Remarque : une condition nécessaire évidente pour que deux ouverts soient conformément équivalents est qu'ils soient topologiquement équivalents (puisqu'une bijection conforme est en particulier un homéomorphisme).
On verra dans ce chapitre qu'il s'agit dans certains cas d'une condition suffisante.

Exemple : l'application $\sigma \mapsto (z-i)/(z+i)$ est une bijection holomorphe du demi-plan $H = \{z \,/\, \Im m(z) > 0\}$ sur le disque unité $B = B(0,1)$.



2.1 Lemme de Schwarz et automorphismes analytiques du disque

Dans un premier temps, on commence par caractériser toutes les bijections holomorphes du disque unité $B = B(0,1)$ sur lui-même.

Plus précisément, on montre qu'elles peuvent toujours se décomposer en une rotation et une transformation de Moebius de la forme

$$z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \quad a \in B.$$

L'outil principal est le lemme de Schwarz, conséquence du principe du maximum.

2.1.1 Lemme de Schwarz

Une transformation conforme (fonction holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas) conserve localement les angles puisque sa matrice jacobienne est en tout point une matrice de similitude directe.

Si on a en plus " localement une conservation de la distance", une telle transformation du disque B sur lui-même est une isométrie.

Lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe de B ans B telle que $f(0) = 0$.
Alors, pour tout $z \in B$, $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
Si de plus il existe $z_0 \in B$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$,
f est une rotation, i.e. il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall z \in B, \quad f(z) = ze^{i\theta}.$$

Preuve. On considère la fonction g définie sur B par

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \text{ si } z \neq 0, \qquad \text{et } g(0) = f'(0).$$

D'après le principe de prolongement analytique, g est holomorphe sur B.

• Sur le disque fermé $\bar{B}(0, 1-\varepsilon)$, on a

$$|g| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

En effet, d'après le principe du maximum, g ne peut atteindre son maximum que sur le bord du disque $\partial B(0, 1-\varepsilon)$.

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que

$$\forall z \in B, \quad |g(z)| \leq 1,$$

ce qui prouve la première assertion.

• Si de plus il existe $z_0 \in B$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$,

$$\exists z \in B, \quad |g(z)| = 1.$$

D'après le principe du maximum, g est alors constante sur le disque B, ce qui donne la deuxième assertion. ■

2.1.2 Automorphismes analytiques du disque

Exemples : • Les rotations $\rho_\theta : z \mapsto ze^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$ sont clairement des automorphismes du disque unité B.

• Pour $a \in B$, on définit la transformation de Moebius

$$\phi_a : z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

La fonction ϕ_a est définie et holomorphe sur un voisinage de $\bar{B}$, $\phi_a(a) = 0$ et

$$\forall z \in \partial B, \quad \phi_a(z) = \frac{1}{z}\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \in \partial B.$$

D'après le principe du maximum, on a alors

$$\forall z \in \bar{B}, \quad |\phi_a(z)| \leq 1,$$

et comme ϕ_a n'est pas constante,

$$\forall z \in B, \quad |\phi_a(z)| < 1.$$

Pour montrer que ϕ_a est bijective, il suffit de remarquer que

$$\forall z \in B, \quad \phi_a(\phi_{-a}(z)) = \frac{\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right) - a}{1 - \bar{a}\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)} = \frac{z - a\bar{a}z}{1-\bar{a}a} = z.$$

Le fait remarquable est que ces deux types d'applications engendrent tous les automorphismes conformes du disque.

Théorème. Soit f un automorphisme conforme du disque $B = B(0,1)$.
Alors il existe $a \in B$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$f = \phi_a \circ \rho_\theta.$$

Preuve. On note $b = f(0)$ et on considère la fonction $g = \phi_b \circ f$.
D'après ce qui précède, g est alors un automorphisme conforme de B, et

$$g(0) = \phi_b(f(0)) = 0.$$

Le lemme de Schwarz implique alors que

$$|g'(0)| \leq 1 \text{ et } |(g^{-1})'(0)| = \frac{1}{|g'(g(0))|} \leq 1, \quad \text{autrement dit } |g'(0)| = 1.$$

On en déduit que g est une rotation $g = \rho_\theta$ avec $\theta \in \mathbf{R}$, et finalement $f = \phi_{-b} \circ \rho_\theta$.

On peut montrer de la même façon que f admet une décomposition $f = \rho_{\tilde{\theta}} \circ \phi_{\tilde{a}}$ avec $\tilde{a} \in B$ et $\tilde{\theta} \in \mathbf{R}$. ■

2.1.3 Une caractérisation des automorphismes conformes du disque

La généralisation suivante du lemme de Schwarz donne des conditions pour qu'une application conforme de B soit un automorphisme.

Propriété (lemme de Schwarz-Pick). Soient f une fonction holomorphe de B dans B, et z_1, z_2 deux éléments distincts de B. On note $w_1 = f(z_1)$ et $w_2 = f(z_2)$.
Alors

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\bar{w}_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| \text{ et } |f'(z_1)| \leq \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2}.$$

Si de plus l'une des égalités est réalisée, alors f est un automorphisme conforme de B.

Preuve. On définit $g = \phi_{w_1} \circ f \circ \phi_{-z_1}$ de sorte que g est une fonction holomorphe de B dans B, et

$$g(0) = \phi_{w_1}(f(\phi_{-z_1}(0))) = \phi_{w_1}(f(z_1)) = \phi_{w_1}(w_1) = 0.$$

D'après le lemme de Schwarz, on a alors

$$\forall z \in B, \quad |g(z)| \leq |z| \quad \text{et } |g'(0)| \leq 1.$$

En particulier, en choisissant $z = \phi_{-z_1}(z_2)$ dans la première inégalité, on a

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\bar{w}_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|,$$

et en utilisant les règles de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$|f'(z_1)| \leq \frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2}.$$

Les cas d'égalité sont traités comme dans le lemme de Schwarz. ■

2.2 Théorème de représentation de Riemann

Le résultat marquant de ce chapitre, dû à Riemann, est que, si un ouvert U est topologiquement équivalent au disque unité B, alors $U = \mathbf{C}$ ou U est conformément équivalent à B.

La preuve de ce résultat n'est pas constructive, elle repose sur un argument abstrait de compacité qui permet de "résoudre" un problème d'optimisation.

2.2.1 Notion de compacité pour les fonctions holomorphes

Théorème de Montel. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur U telle que

$$\forall K \subset U \text{ compact }, \exists M_K > 0, \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M_K.$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, muni de la topologie de la convergence compacte. Une telle famille est dite **normale**.

Preuve. Ce résultat est une conséquence directe du théorème d'Arzela-Ascoli, dont on rappelle ici l'énoncé :

Soient K un compact de $\mathbf{R}^N$ et $\mathcal{F}$ une famille équibornée et équicontinue de $C(K)$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C(K)$.

• Soit K un compact de U. Par hypothèse, la famille $\mathcal{F}$ est équibornée sur K :

$$\exists M_K > 0, \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M_K.$$

Montrons alors qu'elle est aussi équicontinue. On pose $\delta = d(K, \partial U) > 0$ et pour tout $r < \delta$

$$K_r = \{z \in U \,/\, d(z, K) \leq r\}.$$

Les coefficients du développement en série entière de f en un point $w \in K_{\delta/3}$ s'expriment en fonction des moyennes de f (formule de Cauchy) :

$$f'(w) = \int_{\partial B^+(w, \delta/3)} \frac{f(z)}{(z-w)^2} \frac{dz}{2i\pi}.$$

Si on note $M_{K,\delta}$ la borne uniforme sur la famille $\mathcal{F}$ sur $K_{2\delta/3}$, on a donc

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{w \in K_{\delta/3}} |f'(w)| \leq \frac{3}{\delta} M_{K,\delta}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tous $z_1, z_2 \in K$ tels que $|z_1 - z_2| \leq \delta/3$, on a $[z_1, z_2] \subset K_{\delta/3}$ et donc

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \sup_{w \in K_{\delta/3}} |f'(w)| \leq \frac{3}{\delta} M_{K,\delta}.$$

D'après le théorème d'Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}$ est donc relativement compacte dans $C(K)$.

• Par définition de la topologie de la convergence compacte, on a alors que $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C(U)$.

• Reste à prouver que l'ensemble des fonctions holomorphes sur U est fermé dans $C(U)$. Ceci résulte par exemple du théorème de Morera qui donne la caractérisation suivante des fonctions holomorphes :

$$\text{f est holomorphe sur } U \Leftrightarrow \forall T \subset U \text{ triangle plein fermé, } \int_{\partial T} f = 0.$$

On en déduit que tout point d'adhérence de $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence compacte est une fonction holomorphe sur U, ou autrement dit que $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur U. ■

Remarque. Le théorème de Montel implique que tout ensemble de fonctions holomorphes sur un ouvert U, qui est borné et fermé, est compact (pour la topologie de la convergence compacte).
Cette propriété est bien sûr partagée par les espaces vectoriels de dimension finie (quelle que soit la topologie). Elle est par contre toujours fausse pour les espaces vectoriels normés de dimension infinie (théorème de Riesz).
On en déduit en particulier qu'il n'y a pas de norme sur l'espace des fonctions holomorphes sur U, dont la topologie sous-jacente soit celle de la convergence compacte.

2.2.2 Théorème de représentation conforme

Théorème de Riemann. Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, i.e. un ouvert connexe tel que tout lacet est homotope à un point.
Si $U \neq \mathbf{C}$, alors U est conformément équivalent au disque unité $B = B(0,1)$.

La démonstration se fait en plusieurs étapes : on montre d'abord que l'on peut se ramener au cas d'un ouvert borné, puis que la question se réduit à un problème d'"optimisation", et on conclut en appliquant le théorème de Montel.

Lemme 1 (réduction au cas d'un domaine borné). Si $U \neq \emptyset$ est un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$ et $U \neq \mathbf{C}$, alors U est conformément équivalent à un ouvert borné (simplement connexe) de $\mathbf{C}$.

Preuve du lemme 1. Cette partie de la démonstration est constructive.

• Comme $U \neq \mathbf{C}$, il existe $w \in \mathbf{C} \setminus U$. La fonction holomorphe $z \mapsto z - w$ ne s'annule donc pas sur U, et $z \mapsto (z-w)^{-1}$ est aussi holomorphe sur U.
Comme U est simplement connexe, on peut alors définir le **logarithme** $z \mapsto \log(z-w)$ par intégration (il dépend uniquement de l'origine choisie).
On définit ensuite la **racine carrée** en posant

$$\psi(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(z-w)\right).$$

On vérifie en effet que ψ est holomorphe sur U et que $\psi^2(z) = z - w$, en particulier ψ est injective et on a

$$(*) \qquad \psi(z_1) = \pm\psi(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

• On va alors montrer que l'image de ψ n'est pas dense dans $\mathbf{C}$, en utilisant la **propriété de l'image ouverte**.
Soient $a_1 \in \psi(U)$, et z_1 tel que $a_1 = \psi(z_1)$.
D'après le théorème des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que $\psi - a_1$ ne s'annule pas sur $B(z_1, r) \setminus \{z_1\}$. On définit alors

$$g(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(z_1, r/2)} \frac{\psi'}{\psi - a}$$

de sorte que g est définie et continue sur un voisinage $B(a_1, \rho)$ de a_1.
D'après le théorème de l'argument, on a alors $g(a) = g(a_1) \geq 1$ sur $B(a_1, \rho)$. Autrement dit,

$$B(a_1, \rho) \subset \psi(U).$$

En utilisant la propriété $(*)$, on a de plus

$$\psi(U) \cap B(-a_1, \rho) = \emptyset.$$

En effet, si $\psi(z) \in B(-a_1, \rho)$, il existe z' tel que $\psi(z') = -\psi(z)$, d'où l'on déduit que $z = z'$ et $\psi^2(z) = z - w = 0$. CONTRADICTION car $w \notin U$.

• On pose alors

$$\varphi(z) = \frac{\rho}{\psi(z) + a_1}.$$

Comme $\psi + a_1$ ne s'annule pas, φ est définie et holomorphe sur U.

De plus, ψ est injective et

$$|\varphi(z)| \leq \frac{\rho}{|\psi(z) + a_1|} \leq 1.$$

$\tilde{U} = \varphi(U)$ est alors conformément équivalent à U, et inclus dans B. ■

Lemme 2 (une propriété d'extremum). Soient U un ouvert simplement connexe de B contenant 0, et

$$\chi = \{f \text{ holomorphe et injective de } U \text{ dans } B \,/\, f(0) = 0\}.$$

Alors, pour tout $g \in \chi$, on a l'équivalence :

$$g(U) = B \Leftrightarrow |g'(0)| = \max\{|f'(0)| \,/\, f \in \chi\}.$$

Preuve du lemme 2. Ce résultat est une variante du lemme de Schwarz, il permet de caractériser la surjectivité en terme de la dérivée en 0.

• Si $g \in \chi$ et $g(U) = B$, g est une bijection holomorphe de U sur B préservant 0. Son inverse g^{-1} est alors une fonction holomorphe de B dans U, injective et telle que $g^{-1}(0) = 0$.

Pour toute fonction $f \in \chi$, $h = fog^{-1}$ est alors une fonction holomorphe de B dans B, injective et telle que $h(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a alors

$$|h'(0)| = \frac{|f'(0)|}{|g'(0)|} \leq 1,$$

ce qui prouve que $|g'(0)| = \max\{|f'(0)| \,/\, f \in \chi\}$.

• Inversement, si $g \in \chi$ et $g(U) \neq B$, il existe $a \in B \setminus g(U)$. La transformation de Moebius ϕ_a définie par

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

est alors un automorphisme conforme de B qui ne s'annule pas sur l'ouvert simplement connexe $g(U)$. Sa restriction à $g(U)$ admet donc une **racine carrée** holomorphe

$$\psi_a(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\log\phi_a(z)\right)$$

injective, à valeurs dans B (cf la preuve du Lemme 1).

On pose alors $b = \psi_a(0)$ et $h = \phi_b \circ \psi_a$ de sorte que h est holomorphe et injective sur $g(U)$. Elle satisfait de plus $h(0) = 0$, et

$$h'(0) = \phi_b'(\psi_a(0))\psi_a'(0) = \frac{\phi_b'(b)\phi_a'(0)}{2b} = \frac{1 - |a|^2}{2b(1 - |b|^2)},$$

d'où

$$|h'(0)| = \frac{|a| + 1}{2\sqrt{|a|}} > 1.$$

La fonction $h \circ g$ est holomorphe, injective sur U et telle que $h \circ g(0) = 0$. Autrement dit, $hog \in \chi$. Et on a

$$|(h \circ g)'(0)| = |h'(0)||g'(0)| > |g'(0)|.$$

Cela prouve que $|g'(0)| < \max\{|f'(0)| \,/\, f \in \chi\}$. ∎

Preuve du théorème de Riemann. Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$, distinct de $\mathbf{C}$.

• D'après le Lemme 1, U est conformément équivalent à un ouvert $\tilde{U} \subset B$ non vide et simplement connexe. Quitte à effectuer une translation puis une homothétie, on peut de plus supposer que $\tilde{U}$ contient 0.

• On définit alors

$$\chi = \{f \text{ holomorphe et injective de } \tilde{U} \text{ dans } B \,/\, f(0) = 0\}.$$

χ est non vide car elle contient l'identité. On considère alors le sous-ensemble (non vide)

$$\mathcal{F} = \{f \in \chi \,/\, |f'(0)| \geq 1\}.$$

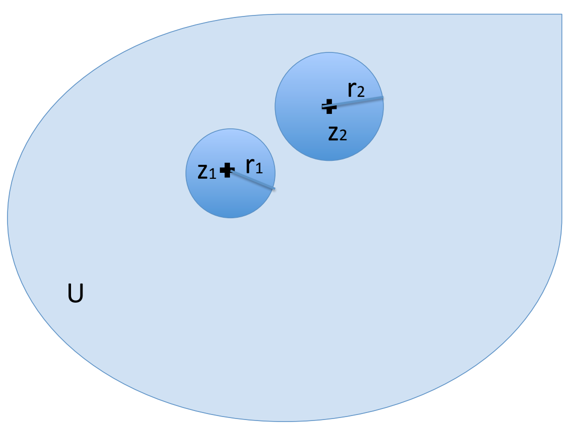
$\mathcal{F}$ est une partie bornée des fonctions holomorphes sur $\tilde{U}$. D'après le théorème de Montel, $\mathcal{F}$ est donc relativement compacte dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\tilde{U}$.

Montrons alors que $\mathcal{F}$ est fermée. Soit $f \in \bar{\mathcal{F}}$, il existe une suite (f_n) de $\mathcal{F}$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact.

- f est holomorphe comme limite localement uniforme de fonctions holomorphes (cf preuve du théorème de Montel).
- comme l'application

$$f \mapsto |f'(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B^+(0,1/2)} \frac{f(z)}{z^2} dz \right|$$

  est continue pour la topologie de la convergence compacte, on a aussi $|f'(0)| \geq 1$, en particulier f est non constante.
- son image est donc ouverte (propriété de l'image ouverte), et incluse dans B.
- on montre finalement que f est injective, en utilisant le **lemme de Hurwitz**, conséquence du théorème de l'argument.
  Soient $z_1 \neq z_2$ tels que $f(z_1) = f(z_2) = \lambda$. D'après le théorème des zéros isolés, il existe des boules $B(z_i, r_i)$ $(i = 1, 2)$ disjointes telles que $f - \lambda$ ne s'annule pas sur $B(z_i, r_i) \setminus \{z_i\}$.



On choisit $\gamma_i = \partial B^+(z_i, r_i/2)$ de sorte que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_i} \frac{f'}{f - \lambda} \geq 1.$$

Pour n assez grand, on a alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_i}\frac{f_n'}{f_n-\lambda}\geq 1,$$

ce qui implique que $f_n-\lambda$ s'annule au moins deux fois. CONTRADICTION.
On a finalement $f\in\mathcal{F}$, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est fermée pour la topologie de la convergence compacte.

• L'application $f\mapsto|f'(0)|$ est continue sur χ, elle atteint donc sa borne supérieure sur le compact $\mathcal{F}$; et par définition de $\mathcal{F}$, il s'agit en fait de sa borne supérieure sur χ.

D'après le Lemme 2, il existe donc $g\in\chi$ telle que $g(\tilde{U})=B$. Autrement dit $\tilde{U}$ est conformément équivalent à B. ■

2.2.3 Simple connexité

Dans la preuve du théorème de Riemann, la simple connexité de U est utilisée uniquement pour obtenir une détermination holomorphe du logarithme (et donc de la racine carrée). Cette propriété caractérise donc les ouverts simplement connexes.

Corollaire (caractérisation de la simple connexité). Soit $U\neq\emptyset$ un ouvert connexe, distinct de $\mathbf{C}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
- U est simplement connexe ;
- toute fonction holomorphe de U dans $\mathbf{C}^*$ admet un logarithme holomorphe ;
- toute fonction holomorphe de U dans $\mathbf{C}^*$ admet une racine carrée holomorphe ;
- U est conformément équivalent au disque unité B.

Chapitre 3

Singularités isolées (Topologie des images de fonctions holomorphes)

Dans les chapitres précédents, on a démontré un certain nombre de propriétés topologiques générales associées aux fonctions holomorphes. On a vu en particulier que les zéros d'une fonction holomorphe étaient isolés, et que son image était ouverte.

Dans le cas où le bord de l'ouvert de définition comporte un point isolé, on peut en fait être beaucoup plus précis et obtenir une caractérisation très fine de l'image d'un voisinage de ce point.

3.1 Développement de Laurent

Pour étudier le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée, on peut toujours se ramener au cas où l'ouvert de définition est un disque épointé, par exemple $B^* = B(0,1) \setminus \{0\}$.

Dans un premier temps, on va montrer que toute fonction holomorphe sur B^* peut s'écrire comme la somme d'une fonction holomorphe sur B et d'une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$.

3.1.1 Fonctions holomorphes sur une couronne

Définition : Etant donnés $a \in \mathbf{C}$, et $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, on désigne par $C(a, r_1, r_2)$ la couronne ouverte

$$C(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbf{C} \;/\; r_1 < |z-a| < r_2\}.$$

Soit f une fonction holomorphe sur $C(a, r_1, r_2)$.

• Pour $n \in \mathbf{Z}$, on définit le **n-ième coefficient de Laurent** de f en a par

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ pour } r \in]r_1, r_2[.$$

• La série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z-a)^n$ s'appelle la **série de Laurent de f au point** a.

Preuve. Si f est holomorphe sur $C(a, r_1, r_2)$ et si $r_1 < r < r' < r_2$, alors la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

est holomorphe au voisinage de la couronne $\bar{C}(a, r, r')$.

D'après le théorème de Cauchy, $\partial B^+(a, r)$ et $\partial B^+(a, r')$ étant homotopes dans $\bar{C}(a, r, r')$, on a l'égalité

$$\int_{\partial B^+(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \int_{\partial B^+(a,r')} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

ce qui montre que les coefficients de Laurent sont définis de façon intrinsèque. ■

Remarque. Si f est holomorphe dans tout le disque $B(a, r_2)$, alors les fonctions $z \mapsto f(z)(z-a)^{-(n+1)}$ pour $n < 0$ sont holomorphes dans ce disque. D'après le théorème de Cauchy, on a alors $c_n = 0$ pour $n < 0$.
La série de Laurent correspond donc au développement obtenu dans le théorème de Weierstrass.

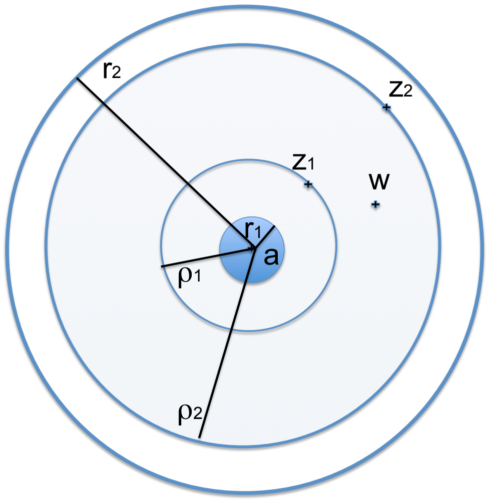
Théorème. Soient $a \in \mathbf{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$, et f une fonction holomorphe sur la couronne $C(a, r_1, r_2)$.
Si on note $\sum c_n (z-a)^n$ la série de Laurent de f au point a, alors
• la série $\sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n$ converge normalement sur les compacts de $B(a, r_2)$;
• la série $\sum_{n < 0} c_n (z-a)^n$ converge normalement sur les compacts de $\mathbf{C} \setminus \bar{B}(a, r_1)$;
• la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z-a)^n$ converge normalement sur les compacts de $C(a, r_1, r_2)$

$$\text{et } \forall z \in C(a, r_1, r_2), \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n (z-a)^n.$$

Preuve. On commence par fixer ρ_1 et ρ_2 tels que $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$.

• Soit $w \in C(a, \rho_1, \rho_2)$. D'après la propriété de prolongement analytique, la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$



qui est holomorphe sur $C(a, r_1, r_2) \setminus \{w\}$ et continue en w, est holomorphe sur $C(a, r_1, r_2)$.

Les lacets $\partial B^+(a, \rho_1)$ et $\partial B^+(a, \rho_2)$ étant homotopes dans $C(a, r_1, r_2)$, on a alors d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\partial B^+(a,\rho_1)} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \int_{\partial B^+(a,\rho_2)} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz.$$

Par théorème de convergence dominée, les fonctions

$$f_i : w \mapsto \int_{\partial B^+(a,\rho_i)} \frac{f(z)}{z - w} \frac{dz}{2i\pi}$$

sont holomorphes respectivement sur $\mathbf{C} \setminus \partial B(a, \rho_i)$, en particulier sur $C(a, \rho_1, \rho_2)$.

De plus,

$$\begin{aligned} f_2(w) - f_1(w) &= \int_{\partial B^+(a,\rho_2)} \frac{f(z)}{z - w} \frac{dz}{2i\pi} - \int_{\partial B^+(a,\rho_1)} \frac{f(z)}{z - w} \frac{dz}{2i\pi} \\ &= \int_{\partial B^+(a,\rho_2)} \frac{f(w)}{z - w} \frac{dz}{2i\pi} - \int_{\partial B^+(a,\rho_1)} \frac{f(w)}{z - w} \frac{dz}{2i\pi} \\ &= f(w)(\mathrm{Ind}_w(\partial B^+(a, \rho_2)) - \mathrm{Ind}_w(\partial B^+(a, \rho_2))) = f(w). \end{aligned}$$

• Si $|w - a| < \rho_2$, on peut écrire

$$\forall z_2 \in \partial B(a, \rho_2), \qquad \frac{1}{z_2 - w} = \frac{1}{z_2 - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w - a}{z_2 - a}\right)^n$$

et la série converge normalement sur $K_2 \times \partial B(a,\rho_2)$ pour tout compact $K_2 \subset B(a,\rho_2)$. On a alors

$$f_2(w) = \sum_0^\infty (w-a)^n \int_{\partial B^+(a,\rho_2)} \frac{f(z_2)}{(z_2-a)^{n+1}} \frac{dz_2}{2i\pi} = \sum_{n\geq 0} c_n (w-a)^n$$

où la série converge normalement sur tout compact $K_2 \subset B(a,\rho_2)$.

• De la même façon, si $|w-a| > \rho_1$, on peut écrire

$$\forall z_1 \in \partial B(a,\rho_1), \qquad \frac{1}{z_1 - w} = -\frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z_1 - a}{w-a}\right)^n$$

et la série converge normalement sur $K_1 \times \partial B(a,\rho_1)$ pour tout compact $K_1 \subset \mathbf{C} \setminus \bar{B}(a,\rho_1)$. On a alors

$$f_1(w) = -\sum_{n<0} (w-a)^n \int_{\partial B^+(a,\rho_1)} f(z_1)(z_1-a)^{-n-1} \frac{dz_1}{2i\pi} = -\sum_{n<0} c_n (w-a)^n$$

où la série converge normalement sur tout compact $K_1 \subset \mathbf{C} \setminus \bar{B}(a,\rho_1)$.

• Comme $\rho_1 > r_1$ et $\rho_2 < r_2$ sont arbitraires, cela termine la preuve. ■

Remarque. Réciproquement, si f est une fonction définie sur la couronne $C(a,r_1,r_2)$ telle que

$$\forall z \in C(a,r_1,r_2), \quad f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n (z-a)^n,$$

(où les séries $\sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$ et $\sum_{n<0} c_n (z-a)^n$ convergent partout sur $C(a,r_1,r_2)$), alors f est holomorphe et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n (z-a)^n$ est sa série de Laurent sur $C(a,r_1,r_2)$.

3.1.2 Singularités éliminables, pôles et singularités essentielles

D'après ce qui précède, si f est une fonction holomorphe sur le disque épointé B^*, f peut s'écrire comme la somme d'une fonction f_2 holomorphe sur B et d'une fonction $-f_1$ holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, déterminées par la série de Laurent de f en 0.

Il y a alors trois comportements possibles pour f au voisinage de 0.

(i) f est bornée au voisinage de 0 : d'après la propriété de prolongement analytique, f est alors holomorphe sur B et $f_1 \equiv 0$.

(ii) f est non bornée au voisinage de 0, mais il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $z \mapsto z^k f(z)$ est bornée au voisinage de 0 : on se ramène alors au cas précédent, et en comparant les séries de Laurent de f et de $z^k f$, on obtient

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{k} c_{-n} z^{-n}.$$

(iii) f ne vérifie ni la condition (i) ni la condition (ii) : f_1 est définie par une somme infinie.

Définitions : Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé B^*.
• f a une **singularité éliminable** en 0 si f est bornée au voisinage de 0.
• f a un **pôle de multiplicité** k en 0 si k est le plus petit entier tel que $z \mapsto z^k f(z)$ est bornée au voisinage de 0.
• f a une **singularité essentielle** en 0 si pour tout entier k, $z \mapsto z^k f(z)$ est non bornée au voisinage de 0.

Le troisième cas est bien entendu le plus complexe, comme le suggère par exemple le résultat suivant :

Théorème de Casorati-Weierstrass. Soit f une fonction holomorphe sur le disque épointé B^* avec une singularité essentielle en 0.
Alors, pour tout $s < 1$, l'image de $B(0,s) \setminus \{0\}$ par f est dense dans $\mathbf{C}$.

Preuve. Supposons qu'il existe $\beta \in \mathbf{C}$ et $r > 0$ tels que $B(\beta, r)$ n'intersecte pas l'image par f du disque épointé $B(0,s) \setminus \{0\}$. On définit alors

$$\forall z \in B(0,s) \setminus \{0\}, \quad h(z) = \frac{1}{f(z) - \beta},$$

de sorte que h est holomorphe sur $B(0,s) \setminus \{0\}$, et qu'elle est bornée au voisinage de 0

$$\forall z \in B(0,s) \setminus \{0\}, \quad |h(z)| \leq \frac{1}{r}\,.$$

h a donc une singularité éliminable en 0, et peut-être prolongée analytiquement.

– si $h(0) \neq 0$, alors f peut aussi être prolongée analytiquement

$$f(0) = \beta - \frac{1}{h(0)};$$

– si $h(0) = 0$, alors il existe $k > 0$ tel que 0 est un zéro d'ordre k de h (théorème des zéros isolés), et donc

$$z \mapsto z^k f(z) \text{ est bornée au voisinage de 0.}$$

On en déduit que 0 est une singularité éliminable ou un pôle. CONTRADICTION. ■

3.1.3 Singularités à l'infini

Dans la suite, on va chercher à affiner encore la description des fonctions holomorphes au voisinage des singularités isolées.

Il sera parfois utile de considérer le point à l'infini comme les autres points du plan complexe. L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ permet en effet d'échanger les voisinages de 0 et les voisinages de ∞. En particulier, on définit les notions de singularité éliminable, de pôle et de singularité essentielle à l'infini de la façon suivante :

Définitions : Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \bar{B}(0, R)$.

- f a une **singularité éliminable** à l'infini si $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a une singularité éliminable en 0.
- f a un **pôle de multiplicité** k à l'infini si $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a un pôle de multiplicité k en 0.
- f a une **singularité essentielle** à l'infini si $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a une singularité essentielle en 0.

Propriétés. Soit f une fonction entière (holomorphe sur $\mathbf{C}$).

- Si f a une singularité éliminable à l'infini, f est constante.
- Si f a un pôle à l'infini, f est polynomiale.

Preuve. Ces propriétés découlent directement du théorème de Liouville.

• Si $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a une singularité éliminable en 0, elle a une limite finie. Autrement dit, f a une limite quand $|z| \to \infty$: f est donc bornée sur $\mathbf{C}$, elle est constante.

• De la même façon, si $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ a un pôle de multiplicité k en 0, $z \mapsto z^k f(\frac{1}{z})$ peut être prolongée analytiquement en 0, elle est donc bornée au voisinage de 0. On pose alors

$$h(z) = \frac{f(z) - P_{k-1}(z)}{z^k}$$

où P_{k-1} est le polynôme de Taylor de degré $k - 1$ de f en 0.

La fonction h est alors holomorphe sur $\mathbf{C}$, et bornée. D'après le théorème de Liouville, h est constante, et f est polynomiale. ■

3.2 Fonctions méromorphes et théorème des résidus

On s'intéresse d'abord aux fonctions holomorphes dont les singularités sont des pôles. On introduit alors une classe plus grande de fonctions, dites méromorphes, qui sont définies à la fois aux points d'holomorphie et aux points singuliers correspondant à des pôles.

Définition : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
On appelle **fonction méromorphe** sur U toute fonction holomorphe sur $U \setminus S$, où S est un fermé discret de U, telle que les singularités de f aux points de S sont toutes des pôles.

Propriété. Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert de $\mathbf{C}$ connexe.
L'ensemble des fonctions méromorphes sur U a une structure de corps.

Preuve. La structure d'anneau est clairement héritée de l'ensemble des fonctions holomorphes. Le seul point est donc de vérifier que les éléments non nuls sont inversibles.

• Si U est connexe, et si f est méromorphe sur U et non identiquement nulle, alors
– il existe S fermé discret de U tel que les pôles de f sont les points de S (par définition) ;
– f est holomorphe sur $U \setminus S$ connexe, et a donc un ensemble S' fermé discret de zéros (théorème des zéros isolés).

• Montrons alors que S' n'a pas de point d'accumulation dans S. Soit $a \in S$ et une suite (z_n) d'éléments de S' convergeant vers S.

Par définition des pôles, il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que la fonction $g : z \mapsto (z-a)^k f(z)$ est bornée au voisinage de a. D'après le principe de prolongement analytique, g se prolonge en une fonction holomorphe sur $(U \setminus S) \cup \{a\}$. En choisissant k minimal, on a de plus $g(a) \neq 0$.

Comme a est un point d'accumulation de S', on a par ailleurs

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} (z_n - a)^k f(z_n) = 0.$$

CONTRADICTION. On conclut alors que S' n'a pas de point d'accumulation dans S, donc dans U.

• La fonction $1/f$ est alors holomorphe sur $U \setminus (S \cup S')$, et peut être prolongée analytiquement sur $U \setminus S$. Les points de S' sont tous des pôles de $1/f$. La fonction $1/f$ est donc méromorphe sur U et on a bien sûr

$$f\frac{1}{f} = 1.$$

f est donc inversible. ■

Remarque. On montrera dans la suite que l'ensemble des fonctions méromorphes sur U connexe peut en fait s'identifier au corps des fractions de l'anneau intègre des fonctions holomorphes sur U.

3.2.1 Théorème des résidus

On sait que, si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U, son intégrale sur tout lacet de U homotope à un point et C^1 par morceaux est nulle.

Le théorème des résidus que l'on va démontrer dans cette section donne une généralisation de ce résultat dans le cas des fonctions méromorphes.

Définition : Soit f une fonction holomorphe sur une couronne $C(a, r_1, r_2)$ centrée en $a \in \mathbf{C}$. Le **résidu** de f en a est le coefficient de $1/(z-a)$ dans le développement de Laurent de f au point a :

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(a,r)} f(z)dz\,.$$

Théorème des résidus. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $\gamma : I \to U$ un lacet C^1 par morceaux et homotope à un point.
Si f est méromorphe sur U sans pôle sur γ (i.e. $S \cap \gamma(I) = \emptyset$)

$$\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{a\in S} \mathrm{Ind}_a(\gamma)\,\mathrm{Res}(f,a)\,.$$

Preuve. Soit $H : I \times [0,1] \to U$ une homotopie telle que

$$H(.,0) = \gamma \text{ et } H(.,1) = z_0,$$

où z_0 est un point de U.

• Si $z \in U \setminus H(I \times [0,1])$, γ est homotope au point z_0 dans $U \setminus \{z\}$, donc

$$\mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0.$$

On en déduit que la somme

$$\sum_{a\in S} \mathrm{Ind}_a(\gamma)\,\mathrm{Res}(f,a) = \sum_{a\in S\cap H(I\times[0,1])} \mathrm{Ind}_a(\gamma)\,\mathrm{Res}(f,a)$$

ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes, car $S \cap H(I \times [0,1])$ est un fermé discret d'un compact donc un ensemble fini.

Pour $a \in S \cap H(I \times [0,1])$, on note k_a la multiplicité du pôle a, et $-f_{a,1}$ la partie singulière du développement de Laurent de f au point a

$$f_{a,1}(z) = -\sum_{-k_a\le n<0} c_{a,n}(z-a)^n\,.$$

• On définit alors

$$g(z) = f(z) + \sum_{a\in S\cap H(I\times[0,1])} f_{a,1}(z)$$

de sorte que g est holomorphe sur $U \setminus S$, et bornée sur les voisinages des points $a \in S \cap H(I \times [0,1])$.

Les singularités aux points $a \in S \cap H(I \times [0,1])$ sont donc éliminables, et g est holomorphe sur $U \setminus S'$, où S' est un fermé discret dont la distance à $H(I \times [0,1])$ est strictement positive.

• En appliquant la formule de Cauchy à g, on trouve

$$\int_\gamma f(z)dz + \sum_{a\in S\cap H(I\times[0,1])} \int_\gamma f_{a,1}(z)dz = 0.$$

Or,

$$\int_\gamma f_{a,1}(z)dz = -\sum_{n=1}^{k_a} c_{a,-n} \int_\gamma (z-a)^{-n}dz.$$

Pour $n \neq 1$, $z \mapsto (z-a)^{-n}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{a\}$, par exemple la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-n}(z-a)^{1-n}$, donc

$$\int_\gamma (z-a)^{-n} dz = 0.$$

Pour $n = 1$, par définition de l'indice,

$$\int_\gamma (z-a)^{-1} dz = 2i\pi \operatorname{Ind}_a(\gamma).$$

On en déduit que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap H(I \times [0,1])} c_{a,-1} \operatorname{Ind}_a(\gamma),$$

ce qui est la formule annoncée. ∎

Remarque. Le théorème des résidus est encore vrai si f est une fonction holomorphe dans $U \setminus S$ où S est un sous-ensemble de U sans point d'accumulation (quelle que soit la nature des singularités sur S).
La démonstration est essentiellement la même : comme les séries définissant les parties singulières $f_{a,1}$ ne sont plus finies, on doit utiliser la convergence normale sur les compacts de $\mathbf{C} \setminus \{a\}$.

3.2.2 Exemples de calculs d'intégrales

Intégration d'une fonction rationnelle sans pôle réel

Soit $f = P/Q$ une fonction rationnelle sans pôle réel, avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, de sorte que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

est absolument convergente.

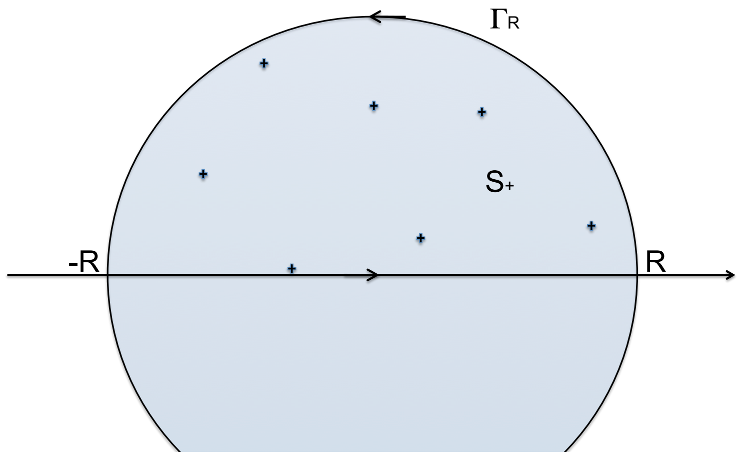
Pour $R > 0$, on se donne un paramétrage Γ_R du demi-cercle $\partial B(0,R) \cap \{z/\ \Im m(z) \geq 0\}$ parcouru dans le sens trigonométrique.

Si R est suffisamment grand, $B(0,R)$ contient tous les zéros de Q donc tous les pôles de la fonction f. Et $B(0,R) \cap \{z/\ \Im m(z) \geq 0\}$ contient tous les pôles de f de partie imaginaire positive.

En appliquant le théorème des résidus à la fonction f (méromorphe sur $\mathbf{C}$), on a

$$\int_{-R}^{R} f(t)dt + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in S^+} \operatorname{Res}(f,a)$$

car l'indice du lacet C^1 par morceaux ainsi construit par rapport à tout point de $B(0,R) \cap \{z/\ \Im m(z) > 0\}$ est égal à 1.



On a de plus par l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leq |\Gamma_R| \sup_{\Gamma_R} |f| \leq \pi R \frac{C}{R^2}$$

ce qui implique que $\int_{\Gamma_R} f(z)dz$ tend vers 0 quand $R \to \infty$.

On en déduit finalement

$$I = 2i\pi \sum_{S^+} \mathrm{Res}(f, a)\,.$$

Exemple : On se propose de calculer

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}$$

par des considérations évidentes de symétrie.
Les pôles de $z \mapsto (1+z^6)^{-1}$ sont les racines sixièmes de -1. En particulier,

$$S^+ = \{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}\}\,.$$

Le résidu de $1/Q$ en un pôle simple s'obtient simplement par dérivation

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{Q(z)} = \frac{1}{Q'(a)}\,.$$

On a alors

$$I = \frac{i\pi}{6}(e^{-i5\pi/6} + e^{-i5\pi/2} + e^{-i25\pi/6}) = \frac{i\pi}{6}(-2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i) = \frac{\pi}{3}\,.$$

Intégrales de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$ une fonction se prolongeant en une fonction holomorphe sur $U \setminus S$, où U est un voisinage de $\{z/ \Im m(z) \geq 0\}$ et S est une partie finie de U. On suppose de plus que

$$\lim_{|z| \to \infty, z \in U} f(z) = 0$$

et on se propose de calculer la transformée de Fourier inverse de f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{itx} dt\,.$$

Comme S est fini, pour R suffisamment grand, $S \subset B(0, R)$. On définit alors comme précédemment le chemin Γ_R qui paramètre le demi-cercle $\partial B(0, R) \cap \{z/ \Im m(z) \geq 0\}$ parcouru dans le sens trigonométrique.

D'après le théorème des résidus (étendu au cas des fonctions holomorphes avec singularités isolées quelconques), on a alors pour $x > 0$

$$\int_{-R}^{R} f(t) e^{itx} dt + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{izx} dz = 2i\pi \sum_{a \in S^+} \mathrm{Res}(f(z) e^{ixz}, a)\,.$$

On a de plus par l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{izx} dz \right| \leq \sup_{\Gamma_R} |f| \int_{\Gamma_R} e^{-x \Im m(z)} dz \quad \leq \sup_{\Gamma_R} |f| \int_0^\pi e^{-xR \sin\theta} R d\theta.$$

Or,

$$\int_0^\pi e^{-xR\sin\theta} R d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-xR\sin\theta} R d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-xR\frac{2}{\pi}\theta} R d\theta \leq \frac{\pi}{x}\,.$$

En utilisant le fait que f tend vers 0 à l'infini, on en déduit que $\int_{\Gamma_R} e^{izx} f(z) dz$ tend vers 0 quand $R \to \infty$.

On a alors pour tout $x > 0$

$$\hat{f}(x) = 2i\pi \sum_{a \in S^+} \mathrm{Res}(f(z) e^{ixz}, a)\,.$$

Exemple : On se propose d'étudier la fonction définie par

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \Re e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt \right) .$$

Comme I est paire et que $I(0) = \frac{\pi}{2}$, il suffit de calculer $I(x)$ pour $x > 0$.
D'après ce qui précède,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt = 2i\pi \operatorname{Res} \left(\frac{e^{izx}}{1+z^2}, i \right) .$$

Comme le pôle i est simple, on a

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{izx}}{1+z^2}, i \right) = \left(\frac{e^{izx}}{2z} \right)_{|z=i} = \frac{e^{-x}}{2i}$$

d'où l'on conclut que

$$I(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

3.3 Singularités essentielles et théorème de Picard

On considère pour finir le cas des singularités essentielles. On a déjà vu que l'image d'un voisinage quelconque d'une telle singularité est toujours dense dans $\mathbf{C}$. Le théorème de Picard précise en fait que cette image contient $\mathbf{C}$ privé au plus d'une valeur.

Il existe de nombreuses façons d'aborder cette question ; la démonstration originale du théorème de Picard repose sur la construction de fonctions elliptiques particulières, et sur des arguments délicats de prolongement analytique. Ici on adopte - comme au chapitre 2 - un point de vue beaucoup plus élémentaire, basé sur des considérations géométriques.

3.3.1 Métrique de Poincaré et lemme de Schwarz

Définitions : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
• On appelle **métrique sur** U toute application $\rho : U \to \mathbf{R}^+$ continue sur U et de classe C^2 sur $U_\rho = \{z \in U \,/\, \rho(z) \neq 0\}$.
• On définit la **courbure** de la métrique ρ par la formule

$$\kappa_\rho(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho^2(z)} , \quad \forall z \in U_\rho.$$

Notations : on rappelle que par définition

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

de sorte qu'une fonction f est holomorphe si elle vérifie $\partial_{\bar{z}} f = 0$.
De plus, on peut utiliser les règles usuelles de dérivation en considérant z et $\bar{z}$ comme des variables indépendantes.

Exemple : la métrique de Poincaré est la métrique ρ_0 strictement positive définie sur le disque unité B par

$$\forall z \in B, \quad \rho_0(z) = \frac{2}{1-|z|^2}.$$

En utilisant les identités $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $|z|^2 = z\bar{z}$, on obtient

$$-\Delta \log \rho_0(z) = \Delta \log(1-|z|^2) = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{-\bar{z}}{1-z\bar{z}} = -\frac{4}{(1-z\bar{z})^2},$$

d'où l'on déduit que

$$\forall z \in U_{\rho_0} = B, \quad \kappa_{\rho_0}(z) = -1\,.$$

Une propriété importante de la courbure est qu'elle est invariante par transformation holomorphe :

Définition : Soient U_1, U_2 deux ouverts de $\mathbf{C}$ et $f : U_1 \to U_2$ une fonction holomorphe.
Si ρ est une métrique sur U_2, son **image réciproque** par f est la métrique $f^*\rho$ définie par

$$\forall z \in U_1, \quad f^*\rho(z) = |f'(z)|\rho(f(z)).$$

Preuve. Sous les hypothèses précédentes, la fonction f est holomorphe donc de classe C^1 sur U_1. L'application $f^*\rho$ définie par $f^*\rho(z) = |f'(z)|\rho(f(z))$ est alors continue sur U_1.

Sur $U_{f^*\rho} = \{z \in U_1 \,/\, |(f'(z)|\rho(f(z)) > 0\}$, on a
– $f'(z) \neq 0$, de sorte que $z \mapsto |f'(z)|$ est de classe C^2 ;
– $\rho(f(z)) \neq 0$ ou autrement dit $f(z) \in U_\rho$, de sorte que $z \mapsto \rho(f(z))$ est de classe C^2.
Finalement, $f^*\rho$ est de classe C^2 sur $U_{f^*\rho}$, et $f^*\rho$ est bien une métrique. ■

Propriété. Soient U_1, U_2 deux ouverts de $\mathbf{C}$, ρ une métrique sur U_2 et $f : U_1 \to U_2$ une fonction holomorphe.
Si on note $f^*\rho$ l'image récriproque de ρ par f, on a

$$\forall z \in U_{f^*\rho}, \quad \kappa_{f^*\rho}(z) = \kappa_\rho(f(z)).$$

Preuve. Par définition, pour tout $z \in U_{f^*\rho}$,

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \frac{-\Delta \log \rho(f(z)) - \Delta \log |f'(z)|}{(|f'(z)|\rho(f(z)))^2}\,.$$

• Comme f' ne s'annule pas sur $U_{f^*\rho}$, pour tout $z \in U_{f^*\rho}$, on peut trouver un voisinage de z sur lequel f' a un logarithme holomorphe. On a alors

$$\begin{aligned}\Delta \log |f'(z)| &= \frac{1}{2}\Delta(\log f'(z) + \log \overline{f'(z)}) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log f'(z) + 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} \log \overline{f'(z)} = 0\end{aligned}$$

• Les règles usuelles de dérivation des fonctions composées donnent

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \rho(f(z)) = \frac{\partial \log \rho}{\partial z}(f(z))f'(z) + \frac{\partial \log \rho}{\partial \bar{z}}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \log \rho}{\partial z}(f(z))f'(z)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} \log \rho(f(z)) &= f'(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial \log \rho}{\partial z}(f(z))\right) \\ &= f'(z)\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial z \partial \bar{z}}(f(z))\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) + f'(z)\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial z \partial z}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \\ &= f'(z)\overline{f'(z)}\frac{\partial^2 \log \rho}{\partial z \partial \bar{z}}(f(z))\end{aligned}$$

On a finalement

$$\kappa_{f^*\rho}(z) = \frac{-|f'(z)|^2(\Delta \log \rho)(f(z))}{(|f'(z)|\rho(f(z)))^2} = \kappa_\rho(f(z)),$$

ce qui termine la preuve. ■

A l'aide de ces notions, on peut alors donner une formulation géométrique du lemme de Schwarz :

Lemme de Schwarz. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et μ une métrique strictement positive sur U telle que $\kappa_\mu \leq -1$ sur U.
Si f est une fonction holomorphe de B dans U, alors

$$f^*\mu \leq \rho_0,$$

où ρ_0 est la métrique de Poincaré.

Preuve. La démonstration consiste à comparer la métrique $f^*\mu$ avec des dilatations de la métrique de Poincaré.

• Pour $r \in]0,1[$, on définit la métrique ρ_r sur $B(0,r)$ par

$$\forall z \in B(0,r), \quad \rho_r(z) = \frac{2r}{r^2 - |z|^2},$$

i.e. comme l'image réciproque de la métrique de Poincaré par l'homothétie de rapport $1/r$.

D'après la propriété précédente, on a alors

$$\forall z \in B(0,r), \quad \kappa_{\rho_r}(z) = \kappa_{\rho_0}\left(\frac{z}{r}\right) = -1.$$

• On introduit alors la fonction v_r définie par

$$\forall z \in B(0,r), \quad v_r(z) = \frac{f^*\mu(z)}{\rho_r(z)}.$$

Il est facile de voir que v_r est strictement positive, de classe C^2, et tend vers 0 quand $|z| \to r$. Elle atteint donc son maximum en un point z_r du disque $B(0,r)$.

La fonction $\log v_r$ atteint aussi son maximum en z_r, on a donc

$$\Delta \log v_r(z_r) \leq 0.$$

Autrement dit

$$-\kappa_{f^*\mu}(z_r)(f^*\mu(z_r))^2 + \kappa_{\rho_r}(z_r)(\rho_r(z_r))^2 \leq 0.$$

En utilisant la borne sur la courbure de μ, on en déduit que

$$(f^*\mu(z_r))^2 - (\rho_r(z_r))^2 \leq 0.$$

On a donc

$$\forall z \in B(0,r), \quad v_r(z) \leq v_r(z_r) \leq 1.$$

• En passant à la limite $r \to 1$, on obtient que

$$\forall z \in B(0,1), \quad f^*\mu(z) \leq \rho_0(z),$$

qui est l'inégalité annoncée. ■

Remarque. La version usuelle du lemme de Schwarz s'obtient comme cas particulier de l'énoncé précédent (dû à Ahlfors), en choisissant $U = B$ et $\rho = \rho_0$.
On a alors

$$f^*\rho_0(0) = |f'(0)|\rho_0(f(0)) \leq \rho_0(0).$$

Si $f(0) = 0$, on en déduit que $|f'(0)| \leq 1$.

3.3.2 Théorème de Liouville et petit théorème de Picard

La courbure permet donc d'obtenir des critères d'existence ou non de fonctions holomorphes non constantes d'un ouvert U_1 dans un ouvert U_2. Le résultat le plus simple est une généralisation du théorème de Liouville.

Théorème de Liouville. Soit U_2 un ouvert de $\mathbf{C}$ muni d'une métrique ρ strictement positive telle que

$$\forall z \in U_2, \quad \kappa_\rho(z) \leq -A < 0.$$

Alors toute fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans U_2 est constante.
En particulier, toute fonction holomorphe bornée est constante.

Preuve. Quitte à considérer la métrique $\sqrt{A}\rho$, on peut supposer sans perte de généralité que

$$\forall z \in U_2, \quad \kappa_\rho(z) \leq -1.$$

• Si f est une fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans U_2, c'est en particulier une fonction holomorphe de $B(0,R)$ dans U. Les arguments utilisés dans la preuve du lemme de Schwarz montrent alors que

$$\forall z \in U_2, \quad f^*\rho(z) \leq \rho_R(z).$$

En faisant tendre R vers l'infini, on en déduit que $f^*\rho(z) = 0$ pour tout z fixé dans U_2. Comme $\rho > 0$ sur U_2, cela implique que $f' \equiv 0$ sur $\mathbf{C}$, ou autrement dit que f est constante sur $\mathbf{C}$.

• Toute fonction entière bornée a son image dans un disque $B(0,A)$, qu'on peut munir de la métrique ρ_A dont la courbure est strictement négative. D'après ce qui précède, elle est donc constante. ■

Le théorème de Picard donne un résultat beaucoup plus précis puisqu'il réfute l'existence de fonctions entières non constantes à valeurs dans un ouvert U_2 omettant plus d'un point de $\mathbf{C}$.

Théorème de Picard. Soit U_2 un ouvert de $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{C} \setminus U_2$ contient au moins deux points. Alors U_2 admet une métrique ρ telle que

$$\forall z \in U_2, \quad \kappa_\rho(z) \leq -A < 0.$$

En particulier, toute fonction entière à valeurs dans U_2 est constante.

Preuve. Quitte à appliquer une transformation affine à U_2, on peut toujours supposer que 0 et 1 sont deux points manquants.

• On définit alors

$$\rho(z) = \left(\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right)\left(\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right)$$

de sorte que ρ est bien une métrique sur $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$. Les exposants sont choisis pour que la courbure soit négative et au voisinage de 0 et 1, et au voisinage de ∞ : on a en effet

$$\begin{aligned}
\Delta \log\left(\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\right) &= \frac{1}{2}\Delta\log(1+|z|^{1/3}) - \frac{5}{12}\Delta\log|z|^2 \\
&= 2\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial}{\partial z}\log(1+(z\bar z)^{1/6}) - \frac{5}{3}\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{\partial}{\partial z}\log(z\bar z) \\
&= \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{1}{z}\frac{(z\bar z)^{1/6}}{1+(z\bar z)^{1/6}}\right) = \frac{1}{18}\frac{1}{z\bar z}\frac{(z\bar z)^{1/6}}{(1+(z\bar z)^{1/6})^2} \\
&= \frac{1}{18}\frac{1}{|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2}
\end{aligned}$$

Par définition de la courbure, on a alors

$$\kappa_\rho(z) = -\frac{1}{18}\left(\frac{|z|^{5/3}}{(1+|z-1|^{1/3})^3(1+|z|^{1/3})} + \frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}\right).$$

On a en particulier

$$\forall z\in \mathbf{C}\setminus\{0,1\},\quad \kappa_\rho(z)<0$$

et

$$\lim_{z\to 0}\kappa_\rho(z) = \lim_{z\to 1}\kappa_\rho(z) = -\frac{1}{36},\quad \lim_{z\to\infty}\kappa_\rho(z) = -\infty.$$

On en déduit qu'il existe une constante $A>0$ telle que

$$\forall z\in \mathbf{C}\setminus\{0,1\},\quad \kappa_\rho(z)\le -A\,.$$

• U_2 satisfait l'hypothèse du théorème de Liouville (existence d'une métrique strictement positive à courbure strictement négative). Toute fonction holomorphe de $\mathbf{C}$ dans U_2 est nécessairement constante. ■

3.3.3 Grand théorème de Picard

Les résultats précédents permettent de classifier les fonctions entières en fonction du type de singularité à l'infini.

(i) Si la singularité est éliminable, la fonction est constante. Son image est réduite à un point.
(ii) Si la singularité est un pôle, la fonction est polynomiale. Son image est $\mathbf{C}$ tout entier.
(iii) Si la singularité est essentielle, la fonction est transcendante. Son image est $\mathbf{C}$ privé d'au plus un point.

Il se trouve en fait que l'hypothèse importante dans le théorème de Picard n'est pas que la fonction est entière, mais qu'elle admet une singularité essentielle à l'infini.

On a en effet un résultat analogue pour toute fonction holomorphe admettant une singularité essentielle.

Théorème de Picard. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité épointé $B^* = B(0,1) \setminus \{0\}$, avec une singularité essentielle en 0.
Alors, pour tout $s \in]0,1[$, l'image de $B(0,s) \setminus \{0\}$ par f est $\mathbf{C}$ privé d'au plus un point.

Remarque. Ce résultat est une extension non triviale du "petit théorème de Picard" qui ne considère que le cas où la partie non singulière du développement de Laurent de f en 0 est identiquement nulle.

Nous ne détaillerons pas la preuve ici. Elle s'obtient par exemple à partir de la version géométrique du lemme de Schwarz énoncé au 3.3.1, en utilisant une généralisation du théorème de Montel (qui donne une condition suffisante sur les images d'une famille de fonctions holomorphes pour que cette famille soit normale).

Chapitre 4

Approximation rationnelle (Corps des fractions des fonctions holomorphes)

On a vu au chapitre précédent qu'une fonction holomorphe f sur un ouvert U peut avoir un comportement très complexe au voisinage d'une singularité isolée. On ne peut donc pas espérer obtenir une approximation polynomiale de f qui soit uniforme sur les compacts de U, sans hypothèse topologique sur U.

L'objet de ce chapitre est de déterminer une classe de fonctions (la plus petite possible) qui permettent d'approcher localement uniformément les fonctions holomorphes d'un ouvert U, en l'absence de telles hypothèses topologiques sur U.

4.1 Approximations polynomiale et rationnelle des fonctions holomorphes

On sait qu'une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\bar{B}(0,1)$ peut être approchée uniformément sur $\bar{B}(0,1)$ par des fonctions polynomiales, par exemple les sommes partielles de son développement en série entière au voisinage de 0.

En revanche, la fonction $z \mapsto 1/z$, qui est holomorphe au voisinage du cercle $\partial B(0,1)$, ne peut pas être approchée uniformément sur $\partial B(0,1)$ par des fonctions entières. Plus généralement, on a le résultat négatif suivant.

Propriété. Soient U un ouvert borné de $\mathbf{C}$, et $a \in U$.
La fonction $z \mapsto (z-a)^{-1}$ n'est pas uniformément approchable sur ∂U par des fonctions continues sur $\bar{U}$ et holomorphes sur U.

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$ et supposons qu'il existe une fonction f continue sur $\bar{U}$ et holomorphe sur U, telle que

$$\forall z \in \partial U, \quad \left| \frac{1}{z-a} - f(z) \right| < \varepsilon\,.$$

On a alors

$$\forall z \in \partial U, \quad |(z-a)f(z) - 1| < \varepsilon d(a, \partial U)\,,$$

et d'après le principe du maximum, cette inégalité est encore vraie sur U.
En particulier, en choisissant $z = a$, on obtient

$$1 < \varepsilon d(a, \partial U)$$

et ceci pour ε arbitrairement petit. CONTRADICTION. ■

On montre de la même façon que si K est un compact de $\mathbf{C}$ et si $\mathcal{O}$ est une composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus K$, alors aucune fonction rationnelle possédant un pôle dans $\mathcal{O}$ n'est uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales. Ainsi, les "trous" du compact K apparaissent comme une obstruction naturelle à l'approximation par des polynômes.

Le théorème de Runge montre qu'en "bouchant les trous", on élimine le problème. Plus précisément, en combinant fonctions polynomiales et fonctions rationnelles à pôles dans les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} \setminus K$, on peut approcher uniformément sur K toute fonction holomorphe au voisinage de K.

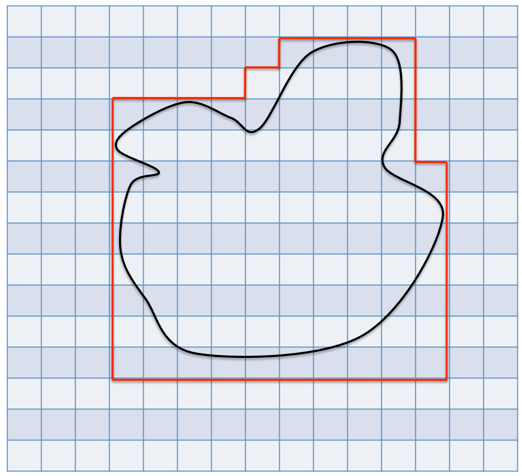
4.1.1 Formule de Cauchy uniforme sur un compact

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$ et K un compact de U.
Alors il existe des segments (orientés) $\gamma_1, ..., \gamma_n$ de $U \setminus K$ tels que, pour toute fonction holomorphe f sur U et pour tout $z \in K$,

$$f(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z')}{z'-z} dz'.$$

Preuve. Comme K est compact et que U est ouvert, $d(K, \partial U) > 0$.

• On construit alors une grille de lignes horizontales et verticales dans le plan complexe, telle que la distance entre deux lignes parallèles adjacentes est $\eta = \frac{1}{2} d(K, \partial U)$.



On note $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, ...\bar{Q}_m$ les carrés fermés de côté η formés par cette grille et qui intersectent K.
Par définition de η, on a alors $\bar{Q}_j \subset U$ pour tout $j = 1, ..., m$.

• Soit ∂Q_j^+ une paramétrisation du bord de $\bar{Q}_j$ parcouru dans le sens trigonométrique. Chaque ∂Q_j^+ est la réunion de quatre segments orientés.
Parmi ces segments, ceux qui intersectent K apparaissent deux fois mais avec des orientations différentes, de sorte que leurs contributions dans la somme

$$\frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial Q_j^+} \varphi$$

s'annulent, et ce quelle que soit la fonction φ continue sur $\cup_j \partial Q_j$.

On définit alors la famille de segments (γ_r) comme les côtés (orientés) des $\bar{Q}_j$ qui n'intersectent pas K.

• On considère alors une fonction f holomorphe sur U, et un point z situé à l'intérieur d'un des carrés Q_j. La fonction

$$z' \mapsto \frac{f(z')}{z' - z}$$

est méromorphe sur U, avec un pôle en z (qui n'appartient à aucun des bords ∂Q_j).

D'après le théorème de Ca uchy, on a alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q_j^+} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = f(z) \, \mathrm{Ind}_z(\partial Q_j^+).$$

Finalement, on a

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z')}{z'-z} dz' = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial Q_i^+} \frac{f(z')}{z'-z} dz' = f(z).$$

• Si z est un point de K situé sur l'un des bords ∂Q_j, on montre que la formule est encore vraie par continuité (en utilisant la minoration uniforme de la distance de $z \in K$ aux segments γ_r, et le théorème de convergence dominée). ■

4.1.2 Approximation rationnelle

Théorème de Runge. Soient K un compact de $\mathbf{C}$, et S une partie de $\mathbf{C}$ rencontrant chacune des composantes connexes bornées de $\mathbf{C} \setminus K$.
Alors toute fonction holomorphe au voisinage de K est uniformément approchable sur K par des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels sont dans S.

On va donner une preuve non constructive de ce résultat, basée sur le théorème de Hahn-Banach dont on rappelle ici l'énoncé

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbf{R}^+$ une semi-norme, i.e. une fonction vérifiant

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall (x,y) \in E^2, \quad p(\lambda x) = p(|\lambda x|) = |\lambda| p(x) \text{ et } p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Soit G un sous-espace vectoriel de E et φ une forme linéaire sur G telle que

$$\forall x \in G, \quad |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Alors il existe un forme linéaire $\tilde{\varphi} \in E'$ prolongeant g telle que

$$\forall x \in E, \quad |\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x).$$

On rappelle aussi que l'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures boréliennes complexes sur K s'identifie, via le théorème de Riesz, au dual de $C(K)$. La première étape consiste alors à caractériser le sous-espace de $\mathcal{M}(K)$ qui est orthogonal à l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K.

Lemme. Pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) μ est orthogonale à l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K

$$\forall f \text{ holomorphe au voisinage de K,} \quad \int_K f d\mu = 0;$$

(ii) la transformée de Cauchy de μ est identiquement nulle sur $\mathbf{C} \setminus K$

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus K, \quad \hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_K \frac{d\mu(z')}{z' - z} = 0.$$

Preuve du lemme. Si $z \in \mathbf{C} \setminus K$, la fonction

$$z' \mapsto \frac{1}{z' - z}$$

est holomorphe au voisinage de K. Il est donc clair que (i) implique (ii).

Inversement, fixons $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et supposons que $\hat{\mu}$ est identiquement nulle sur $\mathbf{C} \setminus K$.

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U de K. D'après le théorème du paragraphe précédent, il existe des segments (orientés) $\gamma_1, ..., \gamma_n$ de $U \setminus K$ tels que, pour tout $z \in K$,

$$f(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z')}{z' - z} dz'.$$

Le théorème de Fubini permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \int_K f d\mu &= \int_K \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z')}{z' - z} dz' d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{r=1}^{n} \int_{\gamma_r} f(z') \hat{\mu}(z') dz' = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que μ est orthogonale à f, et ce quelle que soit f holomorphe au voisinage de K.
On a ainsi démontré que (ii) implique (i). ■

Preuve du théorème de Runge. Soit S un ensemble rencontrant toutes les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} \setminus K$. On note $\mathcal{A}_K$ le sous-espace vectoriel de $C(K)$, constitué des fonctions rationnelles dont les pôles éventuels appartiennent à S.
On veut montrer que l'adhérence de $\mathcal{A}_K$ dans $C(K)$ contient l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K.

• D'après le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz, il suffit de prouver que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ orthogonale à $\mathcal{A}_K$ est également orthogonale à l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K.

En effet, supposons qu'il existe une fonction f holomorphe au voisinage de K qui ne soit pas dans l'adhérence de $\mathcal{A}_K$ pour la topologie de la convergence uniforme sur K, c'est-à-dire telle que

$$d(f, \mathcal{A}_K) = \inf_{g \in \mathcal{A}_K} \|f - g\| > 0.$$

En appliquant le théorème de Hahn-Banach avec $E = C(K)$, $G = \{\lambda f \,/\, \lambda \in \mathbf{R}\}$ et p la distance à $\mathcal{A}_K$, on obtient qu'il existe une forme linéaire sur E telle que

$$\varphi(f) = d(f, \mathcal{A}_K) \text{ et } \forall g \in C(K), \quad |\varphi(g)| \leq d(g, \mathcal{A}_K).$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ telle que

$$\int_K f d\mu = d(f, \mathcal{A}_K) > 0 \text{ et } \forall g \in \mathcal{A}_K, \quad \int_K g d\mu = 0,$$

ce qui contredit le fait que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ orthogonale à $\mathcal{A}_K$ est également orthogonale à l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de K.

• Soit $\mu \in \mathcal{M}(K)$ une mesure orthogonale à $\mathcal{A}_K$. On veut montrer qu'elle est orthogonale aux fonctions holomorphes au voisinage de K, ce qui est équivalent à cause du lemme au fait que sa transformée de Cauchy est identiquement nulle sur $\mathbf{C} \setminus K$. On va alors prouver cette identité composante connexe par composante connexe, en utilisant le caractère holomorphe de la fonction

$$z \in \mathbf{C} \setminus K \mapsto \hat{\mu}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_K \frac{d\mu(z')}{z' - z}$$

et la propriété de prolongement analytique.

– dans chaque composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus K$, il existe $a \in S$. Par définition, la fonction $z \mapsto (z-a)^{-(k+1)}$ appartient alors à $\mathcal{A}_K$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On a donc

$$\hat{\mu}^{(k)}(a) = -\frac{k!}{\pi} \int_K \frac{d\mu(z')}{(z' - a)^{k+1}} = 0.$$

D'après le principe des zéros isolés, $\hat{\mu}$ est donc identiquement nulle sur la composante connexe de $\mathbf{C} \setminus K$ qui contient a.

– on considère alors la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus K$. Soit $R > 0$ tel que $K \subset B(0, R)$. Si $z \in \mathbf{C} \setminus \bar{B}(0, R)$,

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_K \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{z^{n+1}} d\mu(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} \int_K w^n d\mu(w) = 0$$

car les polynômes appartiennent à $\mathcal{A}_K$ par définition.
$\hat{\mu}$ est donc identiquement nulle sur $\mathbf{C} \setminus \bar{B}(0, R)$, et par conséquent (principe des zéros isolés) sur la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus K$.

En appliquant le lemme, on en déduit que μ est orthogonale aux fonctions holomorphes au voisinage de K.

∎

4.1.3 Approximation polynomiale

Comme conséquence du théorème de Runge, on obtient une condition topologique sur le compact K pour que les fonctions holomorphes au voisinage de K puissent s'approcher uniformément sur K par des fonctions polynomiales.

Corollaire. Soit K un compact de $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{C} \setminus K$ est connexe.
Alors toute fonction holomorphe au voisinage de K est uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales.

Il existe en fait un résultat beaucoup plus fort (et optimal) :

Théorème de Mergelyan. Soit K un compact de $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{C} \setminus K$ est connexe.
Alors toute fonction continue sur K et holomorphe à l'intérieur de K est uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales.

La preuve, assez technique, repose sur le théorème de Tietze (prolongement continu de f au voisinage de K), sur un argument de régularisation par convolution et sur des propriétés des fonctions harmoniques.
Nous ne la détaillerons pas dans ce cours, elle se trouve par exemple en appendice dans le livre de Rudin.

4.2 Localisation des zéros d'une fonction holomorphe

Pour obtenir des approximations plus fines des fonctions holomorphes (et éventuellement un procédé constructif), on a donc besoin de connaître de façon précise la localisation des singularités. Dans le cas des fonctions méromorphes, cela signifie qu'on doit décrire l'ensemble des pôles, dont on sait seulement a priori qu'il n'a pas de point d'accumulation.
Ce problème, traité plus en détail dans la troisième partie du chapitre, est très similaire à la question de la localisation des zéros des fonctions holomorphes.

On va voir qu'en général, si une fonction holomorphe ne vérifie pas de condition supplémentaire, on ne peut rien dire de plus sur l'ensemble de ses zéros que le fait qu'il n'a pas de point d'accumulation, à cause du théorème de Weierstrass qui affirme que tout fermé discret S d'un ouvert U est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur U.
Si $S = \{a_n \,/\, n \in \mathbf{N}\}$, une façon naturelle de construire une telle fonction est de considérer la limite quand $n \to \infty$ des produits $f_1 ... f_n$, où chaque f_n est holomorphe avec un unique zéro en α_n. Le point est alors de vérifier que la limite est bien holomorphe sur U et n'a pas de zéro en dehors de S.

4.2.1 Produits infinis

Rappels. Soit (f_n) une suite de fonctions complexes définies sur un ensemble X, et telle que la série $\sum_{n\geq 0}(1-f_n)$ est normalement convergente sur X.
• Le produit $\Pi_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergent ;
• Si les f_n ne s'annulent pas sur X, $\Pi_{n\geq 0} f_n$ ne s'annule pas ;
• Si $\|f_n - 1\|_\infty < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{n\geq 0}\log f_n$ est normalement convergente, et

$$\Pi_{n\geq 0} f_n = \exp\left(\sum_{n\geq 0}\log f_n\right).$$

Preuve. Par hypothèse, f_n tend vers 1 uniformément sur X. Pour $c \in]0,1[$ fixé, il existe alors N tel que

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n - 1\|_\infty \leq c\,.$$

Sur $B(1,c)$, on a une détermination holomorphe du logarithme définie par

$$\log z = \int_{[1,z]} \frac{dz'}{z'}\,.$$

La fonction $\log f_n$ est donc bien définie, et on a par le théorème des accroissements finis

$$|\log f_n| \leq \frac{1}{1-c}|f_n - 1|$$

de sorte que la série $\sum_{n\geq N}\log f_n$ est normalement convergente sur X.

En posant

$$F_n = \Pi_{j=0}^n f_j = F_{N-1}\exp\left(\sum_{j=N}^n \log f_j\right),$$

on a donc que la suite $(F_n)_{n\geq N}$ est uniformément convergente sur X par continuité uniforme de l'exponentielle sur les parties bornées de $\mathbf{C}$.

En particulier,

$$\Pi_{j=0}^\infty f_j = F_{N-1}\exp\left(\sum_{j=N}^\infty \log f_j\right) \neq 0 \text{ sur } X$$

dès que F_{N-1} ne s'annule pas, i.e. dès que les fonctions f_j ne s'annulent pas.

Si de plus $\|f_n - 1\|_\infty < 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut prendre $N = 0$ dans les formules précédentes et on obtient

$$\Pi_{n\geq 0} f_n = \exp\left(\sum_{n\geq 0}\log f_n\right),$$

qui est l'identité annoncée. ∎

Propriétés. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U, telle que la série $\sum_{n\geq 0}(1-f_n)$ est normalement convergente sur tout compact de U.
• La fonction $F = \Pi_{n\geq 0} f_n$ est holomorphe sur U ;
• L'ensemble des zéros de F est la réunion des ensembles des zéros des f_n, et la multiplicité d'un zéro a de F est la somme des multiplicités de a comme zéro des f_n ;
• Si les f_n ne s'annulent pas sur U, F ne s'annule pas sur U et sa dérivée logarithmique satisfait

$$\frac{F'}{F} = \sum_{n\geq 0} \frac{f_n'}{f_n}.$$

Preuve. Les résultats généraux sur les produits infinis énoncés précédemment montrent que la fonction F est bien définie sur U, et que sur chaque compact $K \subset U$, l'ensemble des zéros de F est la réunion des ensembles des zéros des f_n.

• Le calcul de la multiplicité des zéros de F s'obtient par une version quantitative de l'argument précédent. Sur tout compact K de U, comme la suite (f_n) converge uniformément vers 1, il existe N_K tel que

$$\forall n \geq N_K, \quad \|f_n - 1\|_\infty \leq c\,,$$

où $c \in]0,1[$ est une constante fixée. En particulier, pour $n \geq N_K$, f_n n'a pas de zéro sur K.

On a alors

$$\forall z \in K, \quad \Pi_{n\geq N_K} f_n(z) = \exp\left(\sum_{n\geq N_K} \log f_n(z)\right) \neq 0\,.$$

Les zéros de F sur K sont donc les zéros de F_{N_K} avec même multiplicité. Pour un produit fini, la multiplicité des zéros s'ajoute. En notant $m_a(f)$ la multiplicité de $a \in K$ comme zéro de f, on a donc

$$m_a(F) = m_a(F_{N_K}) = \sum_{j=0}^{N_K-1} m_a(f_j) = \sum_{j\geq 0} m_a(f_j)\,.$$

• On a vu au chapitre 2 que l'ensemble des fonctions holomorphes est fermé dans $C(U)$ pour la topologie de la convergence compacte (ce qui est une conséquence simple par exemple du théorème de Morera). Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \Pi_{j=0}^n f_j$ est holomorphe, on en déduit alors que F est holomorphe sur U.

• Comme la suite F_n de fonctions holomorphes sur U converge unifomément sur tout compact de U vers la fonction holomorphe F, on a aussi la convergence uniforme sur tout compact de U de F_n' vers F'. En effet, en utilisant la formule de la moyenne pour la dérivée

$$\forall z \in K, \quad F_n'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+(z,\delta)} \frac{F_n(w)}{(z-w)^2} dw$$

où $\delta = \frac{1}{2} d(K, \partial U)$, et la convergence uniforme de F_n sur le compact $K_\delta = \{z \in U \,/\, d(z,K) \leq$

$\delta\}$, on a bien

$$\sup_{z\in K} |F_n'(z) - F'(z)| \le \frac{1}{\delta} \sup_{w\in K} |F_n(w) - F(w)| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Si les f_n ne s'annulent pas sur U, on sait que F ne s'annule pas non plus, et on a alors

$$\forall z \in U, \quad \frac{F'(z)}{F(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n'(z)}{F_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\le n} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)}.$$

On en déduit que la série $\sum_{j\le n}(f_j'/f_j)$ converge uniformément sur les compacts de U et qu'on a l'identité

$$\frac{F'}{F} = \sum_{j\ge 0} \frac{f_j'}{f_j}\,,$$

ce qui conclut la preuve. ■

4.2.2 Fonction holomorphe dont les zéros sont prescrits

Théorème de Weierstrass. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et S un fermé discret de U. Pour tout $a \in S$, on se donne un entier $m_a \ge 1$.
Alors il existe une fonction F holomorphe sur U ayant un zéro de multiplicité m_a en chaque point $a \in S$, et ne s'annulant pas en dehors de S.

Preuve. La fonction F est construite comme un produit infini à partir des “facteurs élémentaires” introduits par Weierstrass :

$$W_0(z) = 1 - z,$$
$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\right) \quad \text{pour } p \ge 1.$$

• Ces fonctions, qui ne s'annulent qu'en 1, ont la propriété d'être “proches de 1” si $|z| < 1$ et p est grand. On a en effet pour $p \ge 1$

$$\begin{aligned} W_p'(z) &= -\exp\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\right) + (1-z)\sum_{j=1}^{p} z^{j-1} \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\right) \\ &= -z^p \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\right) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $-W_p'$ a un zéro d'ordre p en 0, et un développement en puissances de z avec des coefficients tous positifs

$$-W_p'(z) = z^p \sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{z^j}{j}\right)^n = \sum_{n\ge p} a_n z^n\,.$$

On a alors

$$1 - W_p(z) = -\int_{[0,z]} W_p'(z')dz' = \sum_{n\geq p} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

avec $a_n \geq 0$, de sorte que

$$\frac{|1 - W_p(z)|}{|z|^{p+1}} \leq |1 - W_p(1)| = 1.$$

• On commence alors par prouver le théorème dans le cas où $U = \mathbf{C}$.

Si S est fini, on pose

$$F(z) = \Pi_{a\in S}(z-a)^{m_a}.$$

Si S est infini, comme il est discret, il est nécessairement dénombrable et son point d'accumulation est ∞. Soit alors (α_n) une suite d'éléments non nuls de S telle que chaque $a \in S \setminus \{0\}$ est répété exactement m_a fois :

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = +\infty.$$

En particulier, pour tout compact $K \subset \mathbf{C}$, il existe N_K tel que

$$\forall z \in K, \quad \forall n \geq N_K, \quad \left|\frac{z}{\alpha_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{n+1}$ converge donc normalement sur K.

On pose alors

$$F(z) = z^{m_0} \Pi_{n\geq 0} W_n\left(\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

L'estimation sur les fonctions W_n montre que

$$\left|1 - W_n\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{\alpha_n}\right|^{n+1},$$

de sorte que la série est normalement convergente sur tout compact. D'après le théorème sur les produits infinis, F est donc holomorphe, avec exactement un zéro de multiplicité m_a en chaque $a \in S$.

• Si $U \neq \mathbf{C}$ et S est un fermé discret de U, il existe $z_0 \in U \setminus S$ (qui n'est pas un point d'accumulation de S). Quitte à appliquer la transformation $z \mapsto (z - z_0)^{-1}$, on peut alors supposer que U contient un voisinage de ∞, et que ∞ n'est pas un point d'accumulation de S.

Comme précédemment, si S est fini, on pose

$$F(z) = \Pi_{a\in S}(z-a)^{m_a}.$$

Si S est infini (dénombrable), on note (α_n) une suite d'éléments non nuls de S telle que chaque $a \in S \setminus \{0\}$ est répété exactement m_a fois. Comme U contient un voisinage de ∞, ∂U est compact. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe alors $\beta_n \in \partial U$ tel que

$$|\alpha_n - \beta_n| = d(\alpha_n, \partial U).$$

Comme les seuls points d'accumulation de S appartiennent à ∂U (par hypothèse ∞ n'est pas un point d'accumulation de S),

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \beta_n| = 0.$$

En particulier, pour tout compact $K \subset U$, il existe N_K tel que

$$\forall z \in K, \quad \forall n \geq N_K, \quad \left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \leq \frac{|\alpha_n - \beta_n|}{d(K, \partial U)} \leq \frac{1}{2}.$$

On pose alors

$$F(z) = z^{m_0} \Pi_{n\geq 0} W_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right).$$

L'estimation sur les fonctions W_n montre que

$$\left|1 - W_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right|^{n+1},$$

de sorte que la série est normalement convergente sur tout compact de U. D'après le théorème sur les produits infinis, F est donc holomorphe, avec exactement un zéro de multiplicité m_a en chaque $a \in S$. De plus,

$$\lim_{|z|\to\infty} |F(z)| = 1$$

donc F a une singularité éliminable à l'infini (prolongement analytique par une fonction qui n'a pas de zéro supplémentaire). ■

Remarque. Si F est une fonction entière (holomorphe sur $\mathbf{C}$), dont les zéros non nuls (listés avec leur multiplicité) sont les z_n pour $n \in \mathbf{N}$, il existe un entier k et une fonction entière g tels que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad F(z) = z^k \Pi_{n\geq 0} W_n \left(\frac{z}{z_n}\right) \exp(g(z)).$$

En effet, la fonction méromorphe

$$G : z \mapsto \frac{f(z)}{z^k \Pi_{n\geq 0} W_n \left(\frac{z}{z_n}\right)}$$

n'a que des singularités éliminables, et se prolonge en une fonction entière.
Comme cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbf{C}$ et que $\mathbf{C}$ est simplement connexe, il existe une détermination holomorphe du logarithme de $g = \log G$.
Ce résultat est parfois appelé théorème de factorisation d'Hadamard.

4.2.3 Corps des fractions des fonctions holomorphes

Théorème. Si F est une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, il existe deux fonctions holomorphes f et g sur U telles que

$$F = \frac{f}{g}\,.$$

Par conséquent, si U est connexe, l'ensemble des fonctions méromorphes sur U s'identifie au corps des fractions de l'anneau intègre des fonctions holomorphes sur U.

Preuve. Soit S l'ensemble des pôles de F. On note m_a la multiplicité du pôle $a \in S$.

D'après le théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction g holomorphe sur U, ayant un zéro d'ordre m_a en tout point $a \in S$, et ne s'annulant pas en dehors de S.

La fonction Fg est alors holomorphe sur $U \setminus S$, et a une singularité éliminable en tout point de S, elle se prolonge donc en une fonction f holomorphe sur U. ■

4.3 Localisation des pôles d'une fonction méromorphe

Comme conséquence du théorème de Weierstrass, on obtient qu'étant donnés un ouvert U de $\mathbf{C}$ et un fermé discret S de U, il existe une fonction F méromorphe dans U, ayant un pôle de multiplicité quelconque donnée en chaque point de S, et n'ayant pas d'autre pôle dans U.

Le théorème de Mittag-Leffler montre qu'on peut en plus imposer la partie singulière de F en chaque point $a \in S$.

4.3.1 Fonction méromorphe dont la partie singulière est prescrite

Théorème de Mittag-Leffler. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et S un fermé discret de U. Pour tout $a \in S$, on se donne un entier $m_a \geq 1$ et une fonction rationnelle

$$P_a(z) = \sum_{1 \leq n \leq m_a} c_{a,n}(z-a)^{-n}.$$

Alors il existe une fonction F méromorphe sur U dont la partie singulière en tout point $a \in S$ est P_a, et n'ayant pas d'autre pôle sur U.

Preuve. La démonstration que nous proposons ici utilise une partition de U en sous-ensembles relativement compacts qui se concentrent au voisinage de ∂U et du point ∞, et un argument d'approximation rationnelle obtenu à partir du théorème de Runge.

• On commence par construire une suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de compacts emboîtés de U satisfaisant les propriétés suivantes :
– pour tout n, K_n est inclus dans l'intérieur de K_{n+1} ;
– pour tout compact K de U, il existe $n \in N$ tel que $K \subset K_n$;
– toute composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus K_n$ contient une composante connexe de $\mathbf{C} \setminus U$ (en d'autres termes, K_n n'a pas d'autre "trou" que ceux imposés par les "trous" de U).
Il suffit par exemple de choisir

$$K_n = \{z \in U \,/\, |z| \leq n \text{ et } d(z, \partial U) \geq \frac{1}{n}\}.$$

On vérifie alors facilement que K_n est inclus dans l'intérieur de K_{n+1}

$$\overset{\circ}{K}_{n+1} = \{z \in U \,/\, |z| < n+1 \text{ et } d(z, \partial U) > \frac{1}{n+1}\}\,.$$

Pour tout compact K de U, K est borné donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset \bar{B}(0, R)$. De plus, K est fermé et n'intersecte pas $\mathbf{C} \setminus \bar{U}$ donc $d(K, \partial U) > 0$. Pour n assez grand, on a donc

$$K \subset K_n.$$

Pour vérifier la dernière propriété, on remarque que

$$\mathbf{C} \setminus K_n = \cup_{a \notin U} B(a, \frac{1}{n}) \cup \{z \in \mathbf{C} \,/\, |z| > n\}.$$

Comme chaque disque $B(a, \frac{1}{n})$ avec $a \notin U$ est connexe et intersecte $\mathbf{C} \setminus U$, chaque composante connexe bornée V_n^j de $\mathbf{C} \setminus K_n$ intersecte une composante connexe V^j de $\mathbf{C} \setminus U$. Et, comme $\mathbf{C} \setminus U \subset \mathbf{C} \setminus K_n$, tous les points de V^j sont nécessairement dans la même composante connexe V_n^j de $\mathbf{C} \setminus K_n$. On a ainsi montré que V_n^j contient V_j.

• On définit alors pour tout $j \in \mathbf{N}^*$

$$S_j = S \cap (K_j \setminus K_{j-1})$$

avec la convention $K_0 = \emptyset$.

Comme $S_j \subset K_j$ et que S n'a pas de point d'accumulation dans U donc dans K_j, S_j est fini. On peut donc définir la fonction rationnelle

$$Q_j(z) = \sum_{a \in S_j} P_a(z).$$

Pour $j > 1$, comme les pôles de Q_j sont dans $K_j \setminus K_{j-1}$, Q_j est holomorphe sur un voisinage de K_{j-1}. D'après le théorème de Runge, il existe alors une fonction rationnelle R_j à pôles dans $\mathbf{C} \setminus U$ (qui intersecte toutes les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} \setminus K_{j-1}$) telle que

$$\forall z \in K_{j-1}, \quad |Q_j(z) - R_j(z)| \leq 2^{-j}.$$

• On pose finalement

$$\forall z \in U, \quad F(z) = Q_1(z) + \sum_{j=2}^{\infty}(Q_j(z) - R_j(z)).$$

Sur K_N, on a

$$F = Q_1 + \sum_{n=2}^{N}(Q_j - R_j) + \sum_{n=N+1}^{\infty}(Q_j - R_j).$$

La série $\sum_{n\geq N+1}(Q_j - R_j)$ converge uniformément vers une fonction qui est donc holomorphe à l'intérieur de K_N. Comme les pôles des R_j sont tous en dehors de U, $F-(Q_1+Q_2+...+Q_N)$ est aussi holomorphe à l'intérieur de K_N, ce qui signifie que F a la partie singulière prescrite à l'intérieur de K_N.

Comme N est arbitraire, on a la propriété voulue sur tout compact K de U, donc sur U. ■

4.3.2 Un problème d'interpolation

En combinant le théorème de Weierstrass et le théorème de Mittag-Leffler, on obtient une solution au problème d'interpolation suivant : étant donnés un ouvert U de $\mathbf{C}$ et un fermé discret S de U, trouver une fonction holomorphe sur U dont la valeur est prescrite en tous les points de S.
En fait, on peut même prescrire un nombre fini de dérivées en chaque point de S.

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et S un fermé discret de U. Pour tout $a \in S$, on se donne un entier $m_a \in \mathbf{N}$ et des nombres complexes $(w_{n,a})_{n\leq m_a}$.
Alors il existe une fonction F holomorphe sur U telle que

$$\forall a \in S, \quad \forall n \leq m_a, \quad F^{(n)}(a) = n!\, w_{a,n}.$$

Preuve. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction f holomorphe sur U qui admet un zéro de multiplicité $m_a + 1$ en chaque point $a \in S$, et qui ne s'annule pas en dehors de S.

• A chaque $a \in S$, on va alors associer une fonction rationnelle

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m_a+1} c_{a,j}(z-a)^{-j}$$

telle que le développement en série entière de $P_a f$ au voisinage de a s'écrive

$$P_a f(z) = \sum_{n=0}^{m_a} w_{a,n}(z-a)^n + O((z-a)^{m_a+1}).$$

On obtient pour cela des conditions nécessaires sur les coefficients $c_{a,j}$ (pour alléger les notations, on omet ici tous les indices a). En notant b_k les coefficients du développement en série entière de f au voisinage de a, on a

$$f(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k (z-a)^k$$

et

$$P_a f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \sum_{j=\inf(m+1-n,1)}^{m+1} c_j b_{n+j}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} w_0 &= b_{m+1} c_{m+1}, \\ w_1 &= b_{m+1} c_m + b_{m+2} c_{m+1}, \\ &\ldots\ldots. \\ w_m &= b_{m+1} c_1 + b_{m+2} c_2 + \ldots.. + b_{2m+1} c_{m+1}. \end{aligned}$$

Comme le système (diagonal) est de déterminant non nul ($b_{m+1} \neq 0$), il a une unique solution.

• Le théorème de Mittag-Leffler donne alors l'existence d'une fonction g méromorphe sur U, dont la partie singulière en tout $a \in S$ est P_a, et n'ayant pas d'autre pôle sur U.

En posant $F = fg$, on obtient une fonction holomorphe sur $U \setminus S$, avec une singularité éliminable en chaque $a \in S$. Par la propriété de prolongement analytique, F est donc holomorphe sur U.

De plus, par construction, $g - P_a$ est holomorphe au voisinage de a. Donc il existe $r_a > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \forall z \in B(a, r_a), \quad F(z) &= f(z)g(z) = f(z)P_a(z) + f(z)(g(z) - P_a(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{m_a} w_{a,n} (z-a)^n + O((z-a)^{m_a+1}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\forall n \leq m_a, \quad F^{(n)}(a) = n! w_{a,n}\,,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Chapitre 5

Fonctions harmoniques et formule de Poisson (Analyse du problème de Dirichlet en dimension 2)

L'analyse harmonique élémentaire a pour objet l'étude des fonctions harmoniques, qui sont des solutions de l'équation de Poisson $\Delta u = 0$.
Cette définition a un sens en dimension quelconque mais on se limitera au cas de la dimension 2. Cela permettra en particulier de déduire certains résultats sur les fonctions harmoniques des résultats correspondants déjà démontrés pour les fonctions holomorphes.

Définition : Soit u une fonction à valeurs complexes définie sur un ouvert U du plan complexe. On dit que u est **harmonique** si et seulement si u est de classe C^2 et vérifie

$$\Delta u = 0.$$

Exemples :
- Les fonctions holomorphes sont harmoniques :

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0.$$

- La fonction $z \mapsto \log|z|$ est harmonique sur $\mathbf{C}^*$: en effet, on a localement

$$\Delta \log|z| = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log z + \log \bar{z}) = 0.$$

Propriétés Soient U et V deux ouverts de $\mathbf{C}$.
- L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est stable par conjugaison, mais pas par produit (ce n'est pas une algèbre).
- Si $f : U \to V$ est holomorphe et u est harmonique sur V, alors uof est harmonique sur U (ce qui est faux en général si f est seulement harmonique).

Preuve. • Soit u une fonction harmonique sur U. Il est clair que $\bar{u}$ est de classe C^2 sur U, et que

$$\Delta \bar{u} = \overline{\Delta u} = 0,$$

d'où l'on déduit que $\bar{u}$ est harmonique.

Pour montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques sur U n'est pas stable par produit, on considère les fonctions harmoniques $z \in \mathbf{C} \mapsto z$ et $z \in \mathbf{C} \mapsto \bar{z}$. Leur produit $u : z \mapsto |z|^2$ vérifie

$$\Delta u = 4 \frac{\partial}{dz} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z\bar{z}) = 4 \frac{\partial}{\partial z} z = 4$$

et n'est donc pas harmonique.

• Soient $f : U \to V$ est holomorphe et u est harmonique sur V. La fonction uof est alors de classe C^2 sur U, et on a

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ f) &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u \circ f) \\
&= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial u}{\partial z}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(f(z)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z) \right) \\
&= 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}(f(z)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(f(z)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \right) f'(z) \\
&= (\Delta u \circ f(z) f'\bar{(}z) f'(z) = 0.
\end{aligned}$$

Si f est seulement harmonique, les dérivées croisées ne s'annulent pas en général. Ainsi la composée des fonctions harmoniques $z \in \mathbf{C}^* \mapsto \log|z|$ et de $z \in B(1,1) \mapsto \Re e(z) \in \mathbf{C}^*$ vérifie

$$\Delta \log |\Re e(z)| = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |x| = -\frac{1}{x^2} \neq 0,$$

et n'est donc pas harmonique. ■

La stabilité par conjugaison implique en particulier que la partie réelle d'une fonction holomorphe est toujours harmonique. Inversement, on va montrer que toute fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe, ce qui permettra d'obtenir simplement l'analyticité des fonctions harmoniques.

5.1 Harmonicité et holomorphie

5.1.1 Régularité C^∞ des fonctions harmoniques

Théorème. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
Si U est simplement connexe, toute fonction harmonique réelle sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à l'addition près d'une constante imaginaire pure.
De façon générale, toute fonction harmonique sur U est de classe C^∞ et ses dérivées partielles sont harmoniques.

Preuve. • Commençons par considérer le cas où U est simplement connexe. Si u est une fonction harmonique réelle sur U, la fonction $z \mapsto 2\frac{\partial u}{\partial z}$ est holomorphe sur U :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(2\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\Delta u = 0.$$

Comme U est simplement connexe, on peut alors trouver une primitive holomorphe f de $2\frac{\partial u}{\partial z}$

$$f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Cette primitive est définie de façon unique à une constante complexe près. On peut en particulier choisir la partie réelle de cette constante pour avoir

$$\Re e(f(z_0)) = u(z_0)$$

pour z_0 fixé dans U.

On montre alors que $u = \Re e(f)$. On a en effet

$$\frac{\partial\, \Re e(f)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial\, \Re e(f)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$$

car u est réelle. On en déduit que $\Re e(f) - u$ est constante, et finalement que $u = \Re e(f)$ à cause de la condition en z_0.

• Soit maintenant u une fonction harmonique sur un ouvert quelconque U. L'harmonicité étant une propriété locale, on peut toujours se ramener au cas où u est définie sur une boule (simplement connexe). En considérant séparément partie réelle et partie imaginaire, on peut de plus supposer que u est à valeurs réelles.

La régularité C^∞ de u découle alors immédiatement du résultat précédent. On a de plus, pour tout $k \in \mathbf{N}^2$

$$\Delta(\partial^k u) = \partial^k(\Delta u) = 0,$$

ce qui prouve que la dérivée partielle $\partial^k u$ est harmonique. ∎

5.1.2 Analyticité des fonctions harmoniques

Le théorème de Weierstrass pour les fonctions holomorphes montre qu'elles sont non seulement de classe C^∞, mais analytiques : elles admettent un développement en série entière au voisinage de tout point.
On a un résultat analogue pour les fonctions harmoniques, à condition de définir la bonne notion d'analyticité.

Définition : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
On dit qu'une fonction $u : U \to \mathbf{C}$ est **R-analytique** sur U si et seulement si pour tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, il existe un voisinage V de z_0 et une famille de nombre complexes $(c_{pq})_{p,q\in\mathbf{N}}$ tels que

$$\forall z = x + iy \in V, \quad u(x+iy) = \sum_{p,q} c_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q\,.$$

Théorème. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
Toute fonction harmonique u sur U est $\mathbf{R}$-analytique sur U.

Preuve. On veut montrer que u admet un développement en série entière au voisinage de tout point de U. Soient alors $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ quelconque, et $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset U$.

• Si u est harmonique, sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont, et le théorème précédent permet de trouver des fonctions holomorphes f et g sur $B(z_0, r)$ (simplement connexe) telles que

$$\Re e(u) = \Re e(f) \text{ et } \Im m(u) = \Re e(g)\,.$$

On a alors

$$u = \Re e(f) + i\,\Re e(g) = f + ig + (\bar f + i\bar g).$$

D'après le théorème de Weierstrass, on a donc

$$\forall z \in B(z_0, r), \quad u(z) = \sum_{n\ge 0} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n\ge 0} b_n(\bar z - \bar z_0)^n,$$

où les deux séries convergent normalement sur tout compact de $B(z_0, r)$.

• Le résultat s'obtient alors par des calculs algébriques simples

$$(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-x_0)^k (iy - iy_0)^{n-k} \text{ et } (\bar z - \bar z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-x_0)^k (iy_0 - iy)^{n-k}.$$

Si $|x - x_0| + |y - y_0| < r$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x-x_0| + |y-y_0|)^n + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|(|x-x_0| + |y-y_0|)^n < +\infty.$$

On peut alors utiliser le théorème de Fubini pour écrire

$$\begin{aligned}
u(x+iy) &= \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-x_0)^k (iy-iy_0)^{n-k} + \sum_{n\geq 0} b_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x-x_0)^k (iy_0-iy)^{n-k} \\
&= \sum_{p,q} a_{p+q} \frac{(p+q)!}{p!q!} (x-x_0)^p (iy-iy_0)^q + \sum_{p,q} b_{p+q} \frac{(p+q)!}{p!q!} (x-x_0)^p (iy_0-iy)^q \\
&= \sum_{p,q} c_{pq} (x-x_0)^k (y-y_0)^{n-k} \text{ avec } c_{pq} = \frac{(p+q)!}{p!q!} (a_{p+q} + (-1)^q b_{p+q})
\end{aligned}$$

avec convergence normale sur les compacts de $V = \{z = x+iy \,/\, |x-x_0| + |y-y_0| < r\}$. La fonction u est donc $\mathbf{R}$-analytique au voisinage de z_0. ∎

<u>**Corollaire**</u> (prolongement analytique). Soient U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et u une fonction harmonique sur U.
Si u et toutes ses dérivées partielles s'annulent en un point $z_0 \in U$, alors $u \equiv 0$.

Preuve. Soit $A = \{z \in U \,/\, \forall k \in \mathbf{N}^2, \quad \partial^k u(z) = 0\}$.

Par hypothèse, $z_0 \in A \neq \emptyset$.
A est fermé par continuité des dérivées partielles $\partial^k u$.
A est ouvert car u est identiquement nulle au voisinage de tout point de A (comme le montre par exemple le développement en série entière).

Par connexité, on a alors $A = U$, ce qui signifie que u est identiquement nulle. ∎

Remarque. Les zéros d'une fonction harmonique sont donc de multiplicité finie. Par contre, le principe des zéros isolés n'est pas vrai pour les fonctions harmoniques. On peut même montrer qu'une fonction harmonique réelle ne possède aucun zéro isolé.

5.1.3 Formule de la moyenne

En utilisant le lien entre harmonicité et holomorphie, on montre aussi que les fonctions harmoniques possèdent la propriété de la moyenne, et satisfont par conséquent le principe du maximum.

<u>**Formule de la moyenne.**</u> Soit u une fonction harmonique au voisinage du disque fermé $\bar{B}(z_0, r)$. Alors

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \,.$$

Preuve. En considérant séparément partie réelle et partie imaginaire, on se ramène au cas des fonctions harmoniques réelles.

Soit U un voisinage simplement connexe de $\bar{B}(z_0, r)$ tel que u est harmonique (réelle) sur U (on peut choisir par exemple un boule $B(z_0, r')$ avec $r' > r$). Il existe alors une fonction f holomorphe sur U telle que

$$u = \Re e(f).$$

Comme f possède la propriété de la moyenne (cas particulier de la formule de Cauchy), on a donc

$$\begin{aligned} u(z_0) = \Re e(f(z_0)) &= \Re e\left(\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Principe du maximum. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.
Si u est harmonique sur U et qu'il existe $z_0 \in U$ tel que

$$\forall z \in U, \quad |u(z)| \leq |u(z_0)|\,,$$

alors u est constante sur U.

Preuve. Quitte à multiplier u par une constante, on peut supposer que $u(z_0) \geq 0$. Soit $S = \{z \in U \,/\, u(z) = u(z_0)\} \neq \emptyset$.

• S est fermé car u est continue.

• Soit $w \in S$. Comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(w, r) \subset U$. D'après la formule de la moyenne, on a alors pour tout $r' < r$

$$\begin{aligned} u(z_0) = u(w) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(w+r'e^{i\theta})d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(w+r'e^{i\theta})|d\theta \leq u(z_0)\,, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\forall r' < r, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad u(w+r'e^{i\theta}) = u(z_0),$$

ou autrement dit

$$B(w, r) \subset S\,.$$

• Comme U est connexe, on a alors $S = U$. ■

5.2 Formule de Poisson

La formule de la moyenne est un cas très particulier de la formule de Cauchy : étant donnée une fonction harmonique u, elle ne permet d'exprimer $u(z_0)$ qu'en fonction d'intégrales sur des contours ayant des propriétés de symétrie très fortes (cercles) et qui dépendent eux-mêmes de z_0. En particulier, elle ne permet pas d'exprimer les dérivées $\partial^k u(z_0)$ en fonction d'intégrales de u sur des contours.

Le but de cette section est d'établir une formule intégrale plus générale, dite formule de Poisson, qui pallie à cette difficulté et joue le même rôle dans l'étude des fonctions harmoniques que la formule de Cauchy dans l'étude des fonctions holomorphes.

5.2.1 Noyau et formule de Poisson

Définition : Soit $D = B(z_0, r)$ un disque de $\mathbf{C}$.
Le **noyau de Poisson** de D est la fonction $P_D : D \times \partial D \to \mathbf{R}$ définie par

$$P_D(z, \zeta) = \frac{r^2 - |z - z_0|^2}{|\zeta - z|^2}.$$

S'il n'y a pas de confusion possible, pour $a \in D$, on notera P_a l'application $\zeta \in \partial D \mapsto P_D(a, \zeta)$.

Il existe des expressions équivalentes du noyau de Poisson, qui peuvent être utiles dans les applications, et qui permettent surtout d'avoir une intuition de la formule de Poisson comme variante de la formule de la moyenne obtenue par changement de variable.

Propriétés. Soient $B = B(0, 1)$ le disque unité, et pour tout $a \in B$, P_a l'application $\zeta \in \partial B \mapsto P_B(a, \zeta)$.
• Pour tout $a \in B$ et tout $\zeta \in \partial B$, $P_a(\zeta) = |\phi_a'(\zeta)|$ où ϕ_a est la transformation de Moebius associée à a.
• Pour tout $r < 1$ et tout $t \in \mathbf{R}$, $P_r(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int}$ où la série converge normalement sur tout compact.

Preuve. • Par définition,

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

d'où l'on déduit que

$$\phi_a'(z) = \frac{(1 - \bar{a}z) + \bar{a}(z - a)}{(1 - \bar{a}z)^2} = \frac{1 - |a|^2}{(\bar{z} - \bar{a})^2 z^2}$$

et

$$P_a(z) = |\phi_a'(z)|.$$

Le noyau de Poisson peut donc être interprété comme le jacobien du changement de variable homographique ϕ_a, qui envoie en particulier le point a sur le centre du disque.

• La série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int}$ converge normalement sur $[0, r_0] \times \mathbf{R}$ pour tout $r_0 < 1$, et

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} r^{|n|} e^{int} = \frac{re^{-it}}{1 - re^{-it}} + 1 + \frac{re^{it}}{1 - re^{it}}\,.$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} r^{|n|}e^{int} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \frac{1-r^2}{|r-e^{it}|^2} = P_r(e^{it}).$$

Cette forme du noyau de Poisson permet en particulier d'obtenir des développements en série des fonctions harmoniques. ■

Théorème de Poisson. Soit $D = B(z_0, r)$ un disque de $\mathbf{C}$.
Si $u : \bar{D} \to \mathbf{C}$ est continue sur $\bar{D}$ et harmonique sur D, alors pour tout $a \in D$

$$u(a) = \int_{\partial D} P_D(a,\zeta)u(\zeta)\frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi r},$$

où σ désigne la mesure de Lebesgue sur ∂D.

Preuve. Par translation et dilatation, on se ramène au cas du disque unité B.

• On commence par prouver la formule dans le cas où f est une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{B}$. Pour tout $a \in B$, la fonction

$$z \mapsto \frac{f(z)}{1-\bar{a}z}$$

est holomorphe au voisinage de $\bar{B}$. La formule de Cauchy donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{f(a)}{1-\bar{a}a} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B^+} \frac{f(z)}{1-\bar{a}z}\frac{dz}{z-a} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial B^+} \frac{f(z)}{|z-a|^2}\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B} \frac{f(z)}{|z-a|^2}d\sigma(z)
\end{aligned}$$

ce qui donne la formule de Poisson par multiplication par $1-|a|^2$.

• On obtient alors la formule de Poisson pour toute fonction harmonique réelle u au voisinage de $\bar{B}$ en utilisant l'identité

$$u = \Re e(f) \text{ avec } f \text{ holomorphe},$$

et en remarquant que le noyau de Poisson est une fonction réelle.

On étend ensuite la formule de Poisson aux fonctions harmoniques complexes au voisinage de $\bar{B}$ en considérant séparément partie réelle et partie imaginaire.

Enfin, dans le cas où u est seulement continue sur $\bar{B}$ et harmonique sur B, on l'approxime par les fonctions u_r ($r<1$) définies par $u_r(z) = u(rz)$. Ces fonctions sont harmoniques au voisinage de $\bar{B}$ et tendent uniformément vers u sur $\bar{B}$ (car u est uniformément continue sur $\bar{B}$). On obtient alors la formule de Poisson pour u en passant à la limite $r \to 1$. ■

Remarque. Sur le disque unité B, la formule de Poisson se réduit en fait à la formule de la moyenne par changement de variable homographique

$$u(a) = uo\phi_a(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} uo\phi_a(e^{i\theta})d\theta.$$

On a vu en effet que $uo\phi_a$ est harmonique sur B, et que le noyau de Poisson n'est rien d'autre que le jacobien du changement de variable.

5.2.2 Inégalités de Cauchy

La formule de Poisson permet d'obtenir des estimations sur les dérivées d'une fonction harmonique u à partir de bornes uniformes sur u.

Cela donne en particulier un critère simple de compacité pour les familles de fonctions harmoniques (analogue du théorème de Montel pour les fonctions holomorphes).

Inégalités de Cauchy. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et K un compact de U.
On note $\delta = d(K, \partial U)$ et $K_r = \{z \in \mathbf{C} \ / \ d(z, K) \leq r\}$.
Alors, pour tout $\delta' \in]0, \delta[$ et pour tout $k \in \mathbf{N}^2$, il existe $C > 0$ telle que, pour toute fonction harmonique u sur U

$$\sup_K |\partial^k u| \leq C \sup_{K_{\delta'}} |u|.$$

Preuve. Si $\bar{D} \subset U$ est un disque fermé quelconque de U, alors

$$(z, \zeta) \in D \times \partial D \mapsto P_D(z, \zeta)$$

est de classe C^∞. On en déduit que, si u est une fonction harmonique sur U, alors on peut dériver sous l'intégrale dans la formule de Poisson

$$\forall z \in D, \quad \partial^k u(z) = \int_{\partial D} \partial_1^k P_D(z, \zeta) u(\zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{|\partial D|}\,.$$

En choisissant par exemple $D = B(a, \delta')$, on obtient

$$|\partial^k u(a)| \leq \sup_{\zeta \in \partial D} |\partial_z^k P_D(a, \zeta)| \times \sup_{z \in K_{\delta'}} |u(z)|\,.$$

La constante intervenant dans l'inégalité de Cauchy ne dépend donc que de δ' et k. ■

Corollaire. Si (u_n) est une suite de fonctions harmoniques sur un ouvert U, uniformément bornée sur tout compact de U, alors (u_n) admet une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction harmonique.

Preuve. La démonstration suit exactement le même schéma que la preuve du théorème de Montel.

• Soit K un compact de U. On note $\delta = d(K, \partial U)$.
Par hypothèse, (u_n) est équibornée sur K.
D'après les inégalités de Cauchy, (u_n) est équicontinue sur K :

$$\forall z_1, z_2 \in K \text{ tels que } |z_1 - z_2| \leq \frac{\delta}{3}, \quad \frac{|u_n(z_1) - u_n(z_2)|}{|z_1 - z_2]} \leq \sup_{K_{\delta/3}} |\partial u_n| \leq C(K, \delta) \sup_{K_{2\delta/3}} |u_n|.$$

Le théorème d'Arzela-Ascoli montre alors que (u_n) est relativement compacte dans $C(K)$.

• Par définition de la topologie de la convergence compacte, on a alors que (u_n) est relativement compacte dans $C(U)$.

• Reste à prouver que l'ensemble des fonctions harmoniques sur U est fermé dans $C(U)$. On considère alors la limite v (pour la topologie de la convergence compacte) d'une suite de fonctions harmoniques (v_n) définies sur U. D'après les inégalités de Cauchy, la convergence de (v_n) sur les compacts entraîne la convergence uniforme de toutes les suites de dérivées partielles $(\partial^k v_n)$ sur les compacts. Par conséquent, v est de classe C^∞ et $(\partial^k v_n)$ tend vers $\partial^k v$ uniformément sur les compacts de U. En particulier, $\Delta v = \lim_{n\to\infty} \Delta v_n = 0$. Et on conclut que la fonction v est bien harmonique sur U. ■

5.2.3 Inégalités de Harnack

Dans le cas des fonctions harmoniques réelles, on peut aussi obtenir un résultat de compacité pour les suites monotones (théorème de Harnack).
Il repose sur les inégalités de Harnack pour les fonctions harmoniques positives.

Inégalités de Harnack. Soit u une fonction harmonique positive sur le disque $B(z_0, r)$. Alors, pour tout $r' < r$ et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\frac{r - r'}{r + r'} u(z_0) \leq u(z_0 + r'e^{it}) \leq \frac{r + r'}{r - r'} u(z_0)\,.$$

Preuve. On fixe u, r' et t, ainsi que $s \in]r', r[$.
En appliquant la formule de Poisson sur $\bar{B}(z_0, s)$, on a

$$u(z_0 + r'e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - (r')^2}{|se^{it} - r'e^{i\theta}|^2} u(z_0 + se^{i\theta}) d\theta\,.$$

Comme $s - r' \leq |se^{it} - r'e^{i\theta}| \leq s + r'$ et que u est positive, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - (r')^2}{(s + r')^2} u(z_0 + se^{i\theta}) d\theta \leq u(z_0 + r'e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - (r')^2}{(s - r')^2} u(z_0 + se^{i\theta}) d\theta\,.$$

La formule de la moyenne donne alors

$$\frac{s - r'}{s + r'} u(z_0) \leq u(z_0 + r'e^{it}) \leq \frac{s + r'}{s - r'} u(z_0)$$

et on conclut en faisant tendre s vers r. ■

Corollaire. Si (u_n) est une suite croissante de fonctions harmoniques réelles sur un ouvert connexe U, alors
- ou $u_n(z)$ tend vers $+\infty$ uniformément sur les compacts de U quand $n \to \infty$,
- ou (u_n) converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction harmonique.

Preuve. Pour tout $z \in U$, comme la suite $(u_n(z))$ est croissante, elle converge soit vers ∞, soit vers une limite finie. En utilisant un argument de connexité, on va d'abord montrer que le type de comportement ne dépend pas du point z. L'uniformité de la convergence (ou de la divergence) sur les compacts s'obtient ensuite par un argument abstrait de compacité.

• On définit
$$S = \{z \in U \,/\, u_n(z) \to \infty \text{ quand } n \to \infty\}.$$

Soit $a \in S$. On pose $r = d(a, \partial U)$. Des inégalités de Harnack, on déduit que pour $p \leq q$,
$$\forall z \in B(a, \frac{r}{2}), \quad \frac{1}{3}(u_q - u_p)(a) \leq (u_q - u_p)(z)$$
car $u_q - u_p$ est harmonique positive sur $B(a, r) \subset U$. On a donc $B(a, \frac{r}{2}) \subset S$, d'où l'on déduit que S est ouvert.

Soit maintenant $a \in U \setminus S$. On note encore $r = d(a, \partial U)$. Des inégalités de Harnack, on déduit que pour $p \leq q$,
$$\forall z \in B(a, \frac{r}{2}), \quad (u_q - u_p)(z) \leq 3(u_q - u_p)(a).$$
En particulier, $(u_n(z))$ est de Cauchy donc convergente pour tout $z \in B(a, \frac{r}{2})$. On a donc $B(a, \frac{r}{2}) \subset U \setminus S$, d'où l'on déduit que S est fermé.

Par connexité de U, on a alors $S = U$ auquel cas la suite $(u_n(z))$ diverge pour tout $z \in U$, ou bien $S = \emptyset$ auquel cas la suite $(u_n(z))$ converge vers une limite finie pour tout $z \in U$.

• Reste à prouver l'uniformité de la convergence ou de la divergence sur les compacts. L'étape précédente montre que, pour tout $a \in U$, on peut trouver un voisinage W_a de a tel que
$$\forall z \in W_a, \quad \frac{1}{3}(u_q - u_p)(a) \leq (u_q - u_p)(z) \leq 3(u_q - u_p)(a).$$
Si K est un compact de U, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts W_{a_1}, W_{a_2}, ..., W_{a_l}. On a alors, pour tout $z \in K$,
$$\frac{1}{3} \min_{1 \leq j \leq l}((u_q - u_p)(a_j)) \leq (u_q - u_p)(z) \leq 3 \max_{1 \leq j \leq l}((u_q - u_p)(a_j)).$$

Si $S = U$, la première inégalité montre que $u_n(z) \to \infty$ quand $n \to \infty$ uniformément sur K. Si $S = \emptyset$, la deuxième inégalité montre que (u_n) converge uniformément sur K, vers une fonction qui est harmonique d'après les résultats du paragraphe précédent. ■

5.3 Problème de Dirichlet

Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$ et si $\omega : \partial U \to \mathbf{C}$ est une fonction continue, le problème de Dirichlet pour ω et U consiste à trouver une fonction $u : \bar{U} \to \mathbf{C}$ continue sur $\bar{U}$ et harmonique sur U telle que $u_{|\partial U} = \omega$.

Le but de cette section est d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet dans des cas simples.

5.3.1 Intégrale de Poisson

On s'intéresse pour commencer au cas des disques. Par translation et dilatation, on se ramène toujours au disque unité $B = B(0,1)$.
On montre alors que le problème de Dirichlet admet une unique solution, donnée explicitement par l'intégrale de Poisson.

Définition : • L' **intégrale de Poisson** d'une fonction ω intégrable sur ∂B est la fonction harmonique $P\omega : B \to \mathbf{C}$ définie par

$$P\omega(z) = \int_{\partial B} \omega(\zeta) P_B(z,\zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi}$$

• L' **intégrale de Poisson** d'une mesure borélienne complexe μ sur ∂B est la fonction harmonique $P\mu : B \to \mathbf{C}$ définie par

$$P\mu(z) = \int_{\partial B} P_B(z,\zeta) d\mu(\zeta)$$

Preuve. Un calcul montre que

$$\Re e \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1}{2} \frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z}) + (\bar{\zeta} + \bar{z})(\zeta - z)}{|\zeta - z|^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta - z|^2} = P_B(z,\zeta).$$

Si μ est réelle, on peut donc écrire, pour tout $z \in B$,

$$P\mu(z) = \Re e \left(\int_{\partial B} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right),$$

ce qui prouve que $P\mu$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe, et est donc harmonique.

Dans le cas général, il suffit de considérer séparément partie réelle et partie imaginaire. ■

La formule de Poisson montre que, si u est une fonction harmonique sur B et continue sur $\bar{B}$, alors elle coïncide sur B avec l'intégrale de Poisson de sa restriction à ∂B.
Inversement, on peut montrer que, si ω est une fonction continue sur ∂B, on retrouve ω grâce à son intégrale de Poisson $P\omega$.

Propriété. Soient ω une fonction intégrable sur ∂B, et $P\omega$ son intégrale de Poisson.
Si ζ_0 est un point de continuité de ω, alors

$$\lim_{z\to\zeta_0} P\omega(z) = \omega(\zeta_0).$$

Preuve. On va montrer que le noyau de Poisson P_z converge au sens des mesures vers la masse de Dirac en ζ_0 quand z tend vers ζ_0. En fait, la propriété est même un peu plus forte puisque l'hypothèse de continuité n'est que ponctuelle.

• On commence par prouver que (P_z) satisfait les propriétés usuelles des suites régularisantes.

$$\begin{aligned}
&P_z \geq 0,\\
&\|P_z\|_{L^1} = \int_{\partial B} P_z(\zeta)\frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi} = 1 \qquad \text{(théorème de Poisson)}\ ,\\
&\forall\delta>0,\quad P_z(\zeta) \to_{z\to\zeta_0} 0 \text{ uniformément sur } \{\zeta\in\partial B\,/\,|\zeta-\zeta_0|\geq\delta\} \qquad \text{(formule explicite).}
\end{aligned}$$

• Soient alors $\zeta_0 \in \partial B$ un point de continuité de ω, et $\varepsilon > 0$.

$$P\omega(z) - \omega(\zeta_0) = \int_{\partial B} (\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0))P_z(\zeta)\frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi}\,.$$

Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $|\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)| < \varepsilon$ pour $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, d'où l'on déduit que

$$|P\omega(z) - \omega(\zeta_0)| \leq \varepsilon + (\|\omega\|_{L^1} + |\omega(\zeta_0)|) \sup_{|\zeta-\zeta_0|>\delta} P_z(\zeta) \leq 2\varepsilon$$

pour z suffisamment proche de ζ_0. ■

On en déduit que le problème de Dirichlet sur le disque B est bien posé.

Théorème. Si $\omega : \partial B \to \mathbf{C}$ est une fonction continue, alors le problème de Dirichlet pour ω et B admet une unique solution.

Preuve. Les résultats précédents montrent que la fonction u définie par

$$u(\zeta) = \omega(\zeta) \text{ si } \zeta \in \partial B,$$
$$u(z) = P\omega(z) \text{ si } z \in B.$$

est une solution du problème de Dirichlet.

L'unicité vient du principe du maximum. ■

5.3.2 Cas des domaines de Jordan

L'idée est ensuite d'étendre les résultats d'existence et d'unicité pour le problème de Dirichlet à des domaines plus généraux, en utilisant l'équivalence conforme.

Définitions : • Un lacet $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ est un **lacet de Jordan** si la restriction de γ à $[a,b[$ est injective.
• L'image d'un lacet de Jordan est une **courbe de Jordan fermée**.

On admettra le théorème de Jordan, qui est un résultat fondamental sur la topologie de $\mathbf{C} \setminus K$ où K est un compact de $\mathbf{C}$, et qui repose sur l'étude du groupe multiplicatif des fonctions continues sur K à valeurs dans $\mathbf{C}^*$, et de son quotient par le sous-groupe des fonctions admettant un logarithme continu.

Théorème de Jordan. Si Γ est une courbe de Jordan fermée dans $\mathbf{C}$, alors $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes de frontière commune Γ.

On peut alors définir l'intérieur d'une courbe de Jordan Γ, comme la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$.

Définition : On dit qu'un ouvert U de $\mathbf{C}$ est un **domaine de Jordan** si U est la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, où Γ est une courbe de Jordan fermée.

Propriété. Les domaines de Jordan sont conformément équivalents au disque unité B.

Preuve. Cette propriété repose sur les différentes caractérisations de la simple connexité qui ont été étudiées dans le cours d'analyse complexe.

Soit U un domaine de Jordan. Le théorème de Jordan affirme que

(P) $\quad U$ est connexe, et le complémentaire de U a une unique composante connexe,

cette dernière étant non bornée.
Pour tout compact $K \subset U$, la construction utilisée dans la preuve du théorème de Mittag-Leffler montre alors qu'il existe un compact $\tilde{K} \subset U$ tel que $K \subset \tilde{K}$ et $\mathbf{C} \setminus \tilde{K}$ a une unique composante connexe (non bornée).
D'après le théorème de Runge, toute fonction holomorphe sur U s'approche uniformément sur $\tilde{K}$ donc sur K par des fonctions polynomiales (P_n).
En particulier, pour tout lacet γ de K de classe C^1 par morceaux,

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma P_n = 0.$$

Comme cette propriété est valable pour tout compact $K \subset U$, on a finalement

$$\forall f \text{ holomorphe sur } U, \quad \forall \gamma \text{ lacet } C^1 \text{ par morceaux sur } U, \qquad \int_\gamma f = 0.$$

On peut alors construire une primitive holomorphe à toute fonction holomorphe f. En particulier, toute fonction holomorphe de U dans $\mathbf{C}^*$ admet un logarithme holomorphe, et donc aussi une racine carrée holomorphe.

En utilisant la caractérisation de la simple connexité obtenue au chapitre 2, on obtient finalement que $U \neq \mathbf{C}$ est simplement connexe donc conformément équivalent à B.

Sur la sphère de Riemann, la propriété (P) caractérise aussi la simple connexité. Dans $\mathbf{C}$, elle doit être un peu modifiée pour prendre en compte le point à l'infini si U n'est pas borné. ■

Le théorème suivant décrit le "comportement à la frontière" des biholomorphismes entre un domaine de Jordan et le disque unité.

Théorème de Carathéodory. Soit U un domaine de Jordan.
Tout biholomorphisme de U sur B se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{U}$ sur $\bar{B}$.

Nous ne détaillerons pas la preuve ici. On peut par exemple raisonner par l'absurde, et montrer que si le biholomorphisme f de U sur B ne se prolonge pas continûment à $\bar{U}$, on peut construire un sous-domaine A de U (portion de couronne autour d'un point de non continuité de f sur ∂U) tel que

$$\int_A |f'(z)|^2 dz d\bar{z} = |f(A)| = +\infty,$$

ce qui est absurde car U est borné.

On en déduit que le problème de Dirichlet sur un domaine de Jordan est bien posé.

Théorème. Soit U un domaine de Jordan.
Si $\omega : \partial U \to \mathbf{C}$ est une fonction continue, alors le problème de Dirichlet pour ω et U admet une unique solution.

Preuve. Soit f un biholomorphisme de U sur B. D'après le théorème de Carathéodory, f se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{U}$ sur $\bar{B}$, encore noté f.
La fonction $\omega \circ f^{-1}$ est continue sur ∂B. Il existe donc un unique v qui résout le problème de Dirichlet pour $\omega \circ f^{-1}$ et B.
On en déduit que $u = v \circ f$ résout le problème de Dirichlet pour ω et U (la fonction u est harmonique comme composée d'une fonction harmonique et d'une fonction holomorphe).
L'unicité s'obtient directement par le principe du maximum. ■

5.3.3 Harmonicité et propriété de la moyenne

L'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet sur les disques permet aussi de montrer que la propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques.
Ce résultat est à rapprocher du théorème de Morera établi au chapitre 1.

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et u une fonction continue sur U.
Alors u est harmonique si et seulement si elle vérifie localement la propriété de la moyenne

$$(*) \qquad \forall z_0 \in U, \exists r_0 > 0, \forall r < r_0, \quad u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \,.$$

Preuve. La formule de la moyenne montre que si u est harmonique, on a en particulier la propriété locale de la moyenne. Ceci montre que la condition $(*)$ est nécessaire pour que u soit harmonique.

Montrons alors que la condition $(*)$ est suffisante. Soit D un disque ouvert tel que $\bar{D} \subset U$.
On note $v : \bar{D} \to \mathbf{C}$ la solution du problème de Dirichlet pour $u_{|\partial D}$ et D.
La fonction $u - v$ est continue sur $\bar{D}$, et vérifie localement la propriété de la moyenne dans l'ouvert D. Elle satisfait donc au principe du maximum (l'argument de connexité utilisé dans la preuve du principe du maximum n'utilise que la propriété locale de la moyenne $(*)$).
Comme $u - v = 0$ sur ∂D, on a $u - v = 0$ sur D. Ainsi u est harmonique sur D. ∎

Chapitre 6

Fonctions sous-harmoniques (Hypoellipticité du Laplacien)

Les fonctions harmoniques, introduites au chapitre précédent, sont caractérisées par la propriété de la moyenne. Cette propriété est très similaire à la caractérisation des fonctions affines d'une variable réelle par les moyennes sur les extrémités d'intervalles.
Dans ce chapitre, on se propose de pousser plus loin l'analogie, et de comprendre comment généraliser en dimension 2 la notion de convexité pour les fonctions de variable réelle, en remplaçant les moyennes sur les extrémités d'intervalles par des moyennes sur des cercles.
On est ainsi amené à introduire la notion de fonction sous-harmonique.

Définition : Soit u une fonction à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ définie sur un ouvert U du plan complexe.
On dit que u est **sous-harmonique** si et seulement si
– u est semi-continue supérieurement

$$\forall c \in \mathbf{R}, \quad \{z \,/\, u(z) < c\} \text{ est un ouvert de } U;$$

– u vérifie la propriété locale de la sous-moyenne

$$\forall z_0 \in U, \exists r_0 > 0, \forall r < r_0, \quad u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Preuve. Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

est bien déterminée pour tout fonction u semi-continue supérieurement.

• Comme $\partial B(z_0, r)$ est compact et que u est semi-continue supérieurement, u est **majorée et atteint sa borne supérieure**. En effet, soit $M = \sup_{\partial B(z_0,r)} u$ et (M_n) une suite croissante convergeant vers M, la suite (K_n) définie par

$$K_n = \{z \in \partial B(z_0, r) \,/\, u(z) \geq M_n\}$$

est une suite décroissante de fermés non vides du compact $\partial B(z_0, r)$. On a donc $\cap_n K_n \neq \emptyset$, ce qui montre que $M < +\infty$ et qu'il existe $z \in \partial B(z_0, r)$ tel que $u(z) = M$.

• La partie positive u_+ de u est donc bornée, et intégrable sur tout compact

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_+(z_0 + re^{i\theta}) d\theta < +\infty\,.$$

Le seul obstacle éventuel à l'intégrabilité est le fait que la partie négative u_- de u ne soit pas intégrable, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_-(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = +\infty\,.$$

On convient donc de définir l'intégrale de u par la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_+(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_-(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

et de prendre $-\infty$ comme valeur de l'inégrale si u_- n'est pas intégrable. ■

Exemples : • Si h est une fonction convexe sur $\mathbf{R}$, la fonction u définie par $u(z) = h(\Re e(z))$ est sous-harmonique.
En effet, u est continue et vérifie globalement la propriété de la sous-moyenne.
• Si f est une fonction holomorphe sur U, alors $\log|f|$ est sous-harmonique.
En effet, elle est continue à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ donc semi-continue supérieurement.
Si $z_0 \in U$ est tel que $f(z_0) = 0$, alors $\log|f(z_0)| = -\infty$ et la formule de la sous-moyenne est valable pour tout $r > 0$.
Si $z_0 \in U$ est tel que $f(z_0) \neq 0$, la fonction $\log|f|$ est harmonique dans un voisinage de z_0 et satisfait donc la propriété locale de la (sous-)moyenne.

Propriétés Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
• Si u et v sont deux fonctions sous-harmoniques sur U et $\lambda \geq 0$, alors $\max(u, v)$ et $\lambda u + v$ sont sous-harmoniques.
• Si $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe croissante, et u est sous-harmonique sur U, alors $\varphi \circ u$ est sous-harmonique sur U.

Preuve. • Soient u et v deux fonctions sous-harmoniques sur U. On définit $w = \max(u, v)$, et $\tilde{w} = \lambda u + v$.

Pour tout $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\{z \in U \,/\, w(z) < c\} = \{z \in U \,/\, u(z) < c\} \cap \{z \in U \,/\, v(z) < c\}$$

est ouvert, d'où l'on déduit que w est semi-continue supérieurement.

De même, pour tout $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\{z \in U \,/\, \tilde{w}(z) < c\} = \cup_{\alpha+\beta<c}\big(\{z \in U \,/\, u(z) < \alpha/\lambda\} \cap \{z \in U \,/\, v(z) < \beta\}\big)$$

est ouvert, ce qui donne la semi-continuité supérieure de $\tilde{w}$.

Si $z_0 \in U$, on peut trouver r_0 tel que pour $r < r_0$, on ait à la fois

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta \text{ et } v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

On a alors

$$w(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z_0 + re^{i\theta})d\theta \text{ et } \tilde{w}(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{w}(z_0 + re^{i\theta})d\theta\,,$$

ce qui prouve que w et $\tilde{w}$ satisfont la propriété locale de la sous-moyenne. On conclut alors que w et $\tilde{w}$ sont sous-harmoniques.

• Si $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction convexe croissante, elle est en particulier continue. La fonction $\varphi o u$ est donc semi-continue supérieurement sur U.

Soient $z_0 \in U$ et r_0 tel que pour $r < r_0$,

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

En utilisant la croissance de φ puis l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\varphi \circ u(z_0) \leq \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi \circ u(z_0 + re^{i\theta})d\theta,$$

ce qui montre que $\varphi \circ u$ est sous-harmonique. ■

6.1 Principe du maximum et propriété du majorant harmonique

6.1.1 Principe du maximum

Principe du maximum. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.
Si u est sous-harmonique sur U et qu'il existe $z_0 \in U$ tel que

$$\forall z \in U, \quad u(z) \leq u(z_0)\,,$$

alors u est constante sur U.

Preuve. Soit $S = \{z \in U \,/\, u(z) \geq u(z_0)\} \neq \emptyset$.

• S est fermé car u est semi-continue supérieurement.

• Soit $w \in S$. D'après la propriété locale de la sous-moyenne, il existe r tel que, pour tout $r' < r$,

$$u(z_0) = u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + r'e^{i\theta}) d\theta \leq u(z_0)$$

ce qui implique que

$$u(w + r'e^{i\theta}) - u(z_0) = 0 \text{ pour presque tout } \theta \in [0, 2\pi].$$

Comme de plus, S est un fermé de U, l'ensemble

$$\{\theta \in [0, 2\pi] \,/\, u(w + r'e^{i\theta}) - u(z_0) = 0\}$$

est un fermé de $[0, 2\pi]$ de complémentaire négligeable, et doit par conséquent être égal à $[0, 2\pi]$.

Ainsi, on a $u(w + r'e^{i\theta}) = u(z_0)$ pour tout $r' < r$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, ou autrement dit $B(w, r) \subset S$. S est donc ouvert.

• Comme U est connexe, on a alors $S = U$. ■

Corollaire. Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$.
Si u est une fonction sous-harmonique sur U et semi-continue supérieurement sur $\bar{U}$, alors

$$\forall z \in U, \quad u(z) \leq \max_{\partial U} u\,.$$

Preuve. On commence par se ramener au cas où U est connexe en considérant séparément chaque composante connexe de U.

Comme $\bar{U}$ est compact et que u est semi-continue supérieurement sur $\bar{U}$, u est majorée et atteint sa borne supérieure.

D'après le principe du maximum, soit u n'atteint pas son maximum sur U auquel cas on a nécessairement

$$\forall z \in U, \quad u(z) < \max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u,$$

soit u est constante sur U.

Dans ce dernier cas, la semi-continuité supérieure de u donne

$$\forall \zeta \in \partial U, \quad u(\zeta) \geq \limsup_{z \to \zeta} u(z),$$

d'où l'on déduit qu'on a aussi

$$\forall z \in U, \quad u(z) \leq \max_{\partial U} u,$$

ce qui conclut la démonstration. ■

6.1.2 Propriété du majorant harmonique

Par définition, une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est convexe si et seulement si son graphe est toujours situé en dessous des cordes. Autrement dit, si $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbf{R}$ et si φ est une fonction affine telle que $h(a) \leq \varphi(a)$ et $h(b) \leq \varphi(b)$, alors $h(t) \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in]a,b[$. Le théorème suivant caractérise de manière analogue la sous-harmonicité en termes de majorants harmoniques.

Propriété (majorant harmonique). Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour une fonction $u : U \to [-\infty, +\infty[$ semi-continue supérieurement, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) u est sous-harmonique ;
(ii) pour tout ouvert V relativement compact dans U et pour toute fonction h à valeurs réelles, continue sur $\bar{V}$ et harmonique sur V telle que $u \leq h$ sur ∂V, on a $u \leq h$ dans V ;
(iii) pour tout disque fermé $\bar{D} \subset U$, si on note P_D le noyau de Poisson de D,

$$\forall z \in D, \quad u(z) \leq \int_{\partial D} P_D(z,\zeta) u(\zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{|\partial D|}.$$

Preuve. • L'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est immédiate. La propriété de sous-moyenne en z s'obtient en choisissant la famille particulière des disques centrés en z

$$u(z) \leq \int_{\partial B(z,r)} u(\zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{2\pi r}$$

pour $r < d(z, \partial U)$. En particulier, le voisinage de z sur lequel la propriété de la sous-moyenne est vraie ne dépend pas de u.

• Le fait que (i) implique (ii) découle directement du principe du maximum. En effet, pour toute fonction $h : \bar{V} \to \mathbf{R}$ continue sur $\bar{V}$ et harmonique dans V, $-h$ est en particulier semi-continue supérieurement sur $\bar{V}$ et sous-harmonique dans V. Si u est sous-harmonique dans U, alors $u - h$ est semi-continue supérieurement sur $\bar{V}$ et sous-harmonique dans V : on a donc d'après la corollaire du paragraphe précédent

$$\sup_V (u-h) \leq \max_{\partial V} (u-h)\,.$$

• La dernière implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est très simple à établir quand la fonction u est continue : il suffit en effet d'appliquer les résultats du chapitre précédent sur le problème de Dirichlet. La difficulté consiste ici à relaxer cette hypothèse de régularité.

Supposons donc que la propriété (ii) est vérifiée. Soit D un disque tel que $\bar{D} \subset U$. Comme $u_{|\partial D}$ est semi-continue supérieurement sur ∂D, on peut trouver une famille décroissante (ω_n) de fonctions continues sur ∂D convergeant simplement vers $u_{|\partial D}$ sur ∂D.

- si $u_{|\partial D} \equiv -\infty$, la suite (ω_n) définie par $\omega_n(\zeta) = -n$ pour tout $\zeta \in \partial D$ convient.

- sinon on pose $\omega_n(\zeta) = \sup\{u(z) - n|z-\zeta| \,/\, z \in \partial D\}$. Comme $u_{|\partial D}$ est bornée supérieurement et non égale à $-\infty$, les ω_n sont à valeurs réelles. De plus, il est clair que (ω_n) est décroissante et minorée par $u_{|\partial D}$.
Pour tout $\zeta \in \partial D$, la fonction $\zeta \mapsto u(z) - n|z-\zeta|$ est n-lipschitzienne. Par conséquent, la fonction ω_n, enveloppe supérieure d'une famille de fonctions n-lipschitziennes, est aussi n-lipschitzienne. En particulier, ω_n est continue.
Il reste à voir que (ω_n) converge simplement vers $u_{|\partial D}$. Comme (ω_n) est décroissante et minorée par $u_{|\partial D}$, il suffit de prouver que pour tout $\zeta \in \partial D$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel que

$$\begin{aligned} \omega_n(\zeta) &\leq u(\zeta) + \varepsilon \text{ si } u(\zeta) > -\infty, \\ \omega_n(\zeta) &\leq -\frac{1}{\varepsilon} \text{ si } u(\zeta) = -\infty. \end{aligned}$$

Comme u est semi-continue supérieurement, $\{z \in \partial D \,/\, u(z) < \max(u(\zeta) + \varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon})\}$ est ouvert, et contient donc une boule de centre ζ et de rayon $r > 0$. Si n est tel que $\max_{\partial D} u - nr < \max(u(\zeta) + \varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon})$, on vérifie alors facilement que

$$\begin{aligned} \forall z \in B(\zeta, r) \cap \partial D, \quad & u(z) - n|z-\zeta| \leq u(z) < \max(u(\zeta) + \varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon})\,, \\ \forall z \notin B(\zeta, r) \cap \partial D, \quad & u(z) - n|z-\zeta| \leq \max_{\partial D} u - nr < \max(u(\zeta) + \varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon})\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\omega_n(\zeta) \leq \max(u(\zeta) + \varepsilon, -\frac{1}{\varepsilon})$.
Cette propriété d'**approximation décroissante par des fonctions continues** est caractéristique des fonctions semi-continues supérieurement.

On note alors $h_n : \bar{D} \to \mathbf{R}$ la solution du problème de Dirichlet pour D et ω_n, qui est par construction continue sur $\bar{D}$ et harmonique sur D. Par hypothèse, on a alors

$$\sup_D (u - h_n) \leq \max_{\partial D} (u - \omega_n) \leq 0\,.$$

Autrement dit,

$$\forall z \in D, \quad u(z) \leq \int_{\partial D} P_D(z,\zeta)\omega_n(\zeta)\frac{d\sigma(\zeta)}{|\partial D|}.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient l'inégalité annoncée. ■

6.1.3 Moyennes circulaires

Théorème de Hadamard. Soit u une fonction sous-harmonique sur un disque $D = B(z_0, R)$. Pour $r \in [0, R[$, on pose

$$I_u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})d\theta \text{ et } M_u(r) = \sup\{u(z) \,/\, z \in \partial B(z_0, r)\}\,.$$

• on a $u(z_0) \leq I_u(r) \leq M_u(r)$,
et $u(z_0) = \lim_{r\to 0} I_u(r) = \lim_{r\to 0} M_u(r)$;
• I_u est une fonction croissante de $r \in [0, R[$;
• M_u est une fonction croissante de $r \in [0, R[$, et une fonction convexe de $\log r$. Autrement dit, si $0 < r_1 < r_2 < R$, alors

$$M_u(r_1^{1-\alpha} r_2^{\alpha}) \leq (1-\alpha)M_u(r_1) + \alpha M_u(r_2).$$

Preuve. • La première propriété est obtenue immédiatement comme conséquence de la propriété du majorant harmonique. La première inégalité vient de la propriété de la sous-moyenne, la seconde de l'inégalité triangulaire, et l'égalité des limites vient de la semi-continuité supérieure

$$u(z_0) \geq \limsup_{z\to z_0} u(z) = \limsup_{r\to 0} M_u(r)\,.$$

• Pour montrer que I_u est croissante, on commence par fixer r_1 et r_2 tels que $0 \leq r_1 < r_2 < R$. Comme $u_{|\partial B(z_0,r_2)}$ est semi-continue supérieurement, on peut trouver une famille décroissante (ω_n) de fonctions continues sur $\partial B(z_0, r_2)$ convergeant simplement vers $u_{|\partial B(z_0,r_2)}$ sur $\partial B(z_0, r_2)$.

En résolvant le problème de Dirichlet pour $B(z_0, r_2)$ et ω_n, on a alors une suite de fonctions $h_n : \bar{B}(z_0, r_2) \to \mathbf{R}$ continues sur $\bar{B}(z_0, r_2)$ et harmoniques sur $B(z_0, r_2)$, qui décroît simplement vers u sur $\partial B(z_0, r_2)$.

D'après la propriété du majorant harmonique, on a $u \leq h_n$ dans $B(z_0, r_2)$, et donc

$$I_u(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_1 e^{i\theta})d\theta \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

Comme h_n est continue sur $\bar{B}(z_0, r_2)$ et harmonique sur $B(z_0, r_2)$, la formule de la moyenne donne

$$h_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_1 e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_2 e^{i\theta})d\theta,$$

d'où l'on déduit que

$$I_u(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + r_2 e^{i\theta})d\theta \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\,.$$

Comme (h_n) décroît vers u sur $\partial B(z_0, r_2)$, le théorème de convergence monotone permet de conclure que

$$I_u(r_1) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + r_2 e^{i\theta})d\theta = I_u(r_2).$$

• Le fait que M_u soit une fonction croissante vient du principe du maximum. Pour montrer que c'est une fonction convexe de $\log r$, on va utiliser la caractérisation de la convexité par majoration affine. Soient $0 < r_1 < r_2 < R$ et $\varphi : t \mapsto at + b$ une fonction affine sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\varphi(\log r_1) \ge M_u(r_1) \text{ et } \varphi(\log r_2) \ge M_u(r_2).$$

On a alors

$$u(z) \le a \log|z - z_0| + b \text{ sur } \partial B(z_0, r_1) \cup \partial B(z_0, r_2).$$

Comme la fonction $z \mapsto \log|z|$ est harmonique sur $\mathbf{C}^*$, la propriété du majorant harmonique implique qu'on a

$$u(z) \le a \log|z - z_0| + b \text{ sur } C(z_0, r_1, r_2),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Comme conséquence de ce résultat, on obtient le résultat suivant d'unicité :

Corollaire (propriété d'unicité). Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et u et v deux fonctions sous-harmoniques sur U.
Si $u(z) = v(z)$ presque partout, alors $u \equiv v$ partout.

Preuve. Soient $z_0 \in U$ et $R > 0$ tel que $B(z_0, R) \subset U$. Les deux premières assertions du théorème précédent montrent que

$$I_u(r) \text{ décroît vers } u(z_0) \text{ quand } r \to 0.$$

Comme la partie positive de u est bornée, on a

$$\frac{2}{r^2}\int_0^r \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_+(z_0 + r' e^{i\theta})d\theta\right) r'dr' = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z_0,r)} u_+(z)dm(z).$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient une identité analogue pour la partie négative

$$\frac{2}{r^2}\int_0^r \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_-(z_0 + r' e^{i\theta})d\theta\right) r'dr' = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z_0,r)} u_-(z)dm(z),$$

d'où l'on déduit finalement que

$$\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z_0,r)} u(z)dm(z) = \frac{2}{r^2}\int_0^r I_u(r')r'dr'\,.$$

On a donc par convergence monotone

$$u(z_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z_0,r)} u(z)dm(z).$$

Or pour tout $r \in]0, R[$

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} u(z)dm(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(z_0,r)} v(z)dm(z),$$

d'où l'on déduit que $u(z_0) = v(z_0)$. ■

Une autre conséquence importante du théorème d'Hadamard est la généralisation suivante du théorème de Liouville :

Corollaire (théorème de Liouville). Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbf{C}$.
Si u est bornée supérieurement, alors u est constante.

Preuve. Les seules fonctions convexes bornées sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions constantes. Si u est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ et bornée supérieurement, la fonction convexe $t \mapsto M_u(e^t)$ est donc constante sur $\mathbf{R}$, autrement dit

$$\forall r \in]0, +\infty[, \quad M_u(r) = M.$$

Comme $M_u(r)$ tend vers $u(0)$ quand $r \to 0$, on en déduit que $u(0) = M$. Par translation, on obtient en fait $u(z) = M$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. ■

6.1.4 Caractérisation de la sous-harmonicité pour les fonctions de classe C^2

Le résultat suivant fournit une caractérisation de la sous-harmonicité pour les fonctions de classe C^2. Ce résultat est à rapprocher de l'inégalité $u'' \geq 0$ satisfaite par les fonctions u de variable réelle convexes et de classe C^2.

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et $u : U \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2.
Alors u est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$.

Preuve. Si $u \in C^2(U)$, pour tout $z_0 \in U$, on a

$$\begin{aligned} u(z_0 + re^{i\theta}) =& u(z_0) + r\left(\cos\theta \partial_x u(z_0) + \sin\theta \partial_y u(z_0)\right) \\ &+ \frac{1}{2} r^2 \left((\cos\theta)^2 \partial^2_{xx} u(z_0) + 2\cos\theta \sin\theta \partial^2_{xy} u(z_0) + (\sin\theta)^2 \partial^2_{yy} u(z_0)\right) + o(r^2) \end{aligned}$$

quand r tend vers 0. En moyennant en θ, on a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = u(z_0) + \frac{1}{4} r^2 \Delta u(z_0) + o(r^2).$$

• Si u est sous-harmonique, en utilisant la propriété locale de la sous-moyenne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \geq u(z_0) \text{ pour } r < r_0$$

et en passant à la limite $r \to 0$, on obtient $\Delta u(z_0) \geq 0$.

• La réciproque est un peu plus délicate à montrer. Elle utilise la propriété du majorant harmonique, et plus particulièrement le fait que la propriété de la sous-moyenne est vérifiée sur des boules qui ne dépendent que de l'ouvert U et pas de la fonction sous-harmonique u.

Soit u une fonction de classe C^2 sur U telle que $\Delta u \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère $u_\varepsilon : z \mapsto u(z) + \varepsilon(\Re e(z))^2$. On a alors

$$\Delta u_\varepsilon \geq 2\varepsilon.$$

En utilisant la formule de Taylor, on obtient que, pour tout $z \in U$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\varepsilon(z + re^{i\theta})d\theta - u_\varepsilon(z) \sim \frac{1}{4}r^2\Delta u_\varepsilon(z)$$

est positif pour r assez petit. Autrement dit, u_ε est sous-harmonique.

La propriété du majorant harmonique montre alors que la propriété de la sous-moyenne est vérifiée sur des boules indépendantes de ε. En passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient la propriété de la sous-moyenne pour u

$$\forall z \in U, \forall r < d(z, \partial U), \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta \geq u(z),$$

d'où l'on déduit que u est sous-harmonique. ■

Remarque. On verra dans la partie suivante que l'inégalité $\Delta u \geq 0$ caractérise en fait les fonctions sous-harmoniques, à condition de la considérer en un sens très faible (au sens des distributions).

6.2 Fonctions sous-harmoniques et distributions

Dans cette section, on va montrer que les fonctions sous-harmoniques non triviales (i.e. ne valant pas identiquement $-\infty$ sur une composante connexe de l'ouvert de définition) sont exactement les fonctions dont le Laplacien au sens des distributions est une mesure de Radon. On en déduira plusieurs résultats importants, notamment l'hypoellipticité de l'opérateur de Laplace et le théorème de décomposition de Riesz.

6.2.1 Approximation par convolution

On commence par prouver qu'il est toujours possible d'approcher une fonction sous-harmonique donnée par des fonctions sous-harmoniques très régulières.

Théorème. Toute fonction sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ est limite d'une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques de classe C^∞.

Preuve. Le résultat est évident si $u \equiv -\infty$: il suffit de poser $u_n(z) = -n$. Pour une fonction harmonique u non triviale, on commence par montrer que u est localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $\mathbf{C}$. On peut ensuite utiliser un argument standard de régularisation par convolution.

• Comme u est semi-continue supérieurement, elle est majorée sur tout compact : son intégrale est donc bien définie, à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$.
- Si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un voisinage compact V de z tel que $\int_V udm > -\infty$, on conclut par un argument de compacité que

$$\forall K \text{ compact de } \mathbf{C}, \quad \int_K udm > -\infty\,,$$

autrement dit u est localement intégrable.
- S'il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que, pour tout voisinage compact V de z_0, $\int_V udm = -\infty$, on montre que u est triviale. En effet, pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tout $R > 0$, la propriété de la moyenne montre qu'on a

$$u(z) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\bar{B}(z,R)} u(z)dm(z)\,.$$

En prenant R assez grand, $\bar{B}(z, R)$ est un voisinage compact de z_0 : on a alors $u(z) = -\infty$.
On en déduit que **toute fonction sous-harmonique non triviale est localement intégrable**.

• On construit alors une suite régularisante approchant la masse de Dirac. On considère pour cela une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbf{C}, \mathbf{R}^+)$ radiale, à support dans le disque unité fermé $\bar{B}$, et vérifiant $\int \rho dm = 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$\rho_n(z) = n^2 \rho\,(nz)\ .$$

Un résultat classique d'intégration montre que, pour tout compact K de $\mathbf{C}$

$$\rho_n * u \in C^\infty(\mathbf{C}),$$
$$\rho_n * u \to u \text{ dans } L^1(K).$$

Reste alors à montrer que les fonctions $u_n = \rho_n * u$ sont sous-harmoniques, et que la suite est décroissante.

On a par définition

$$u_n(z) = \int_{\bar{B}} u\left(z - \frac{h}{n}\right) \rho(h)dm(h),$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z + re^{i\theta})d\theta = \int_{\bar{B}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z + re^{i\theta} - \frac{h}{n}\right) d\theta \right) \rho(h)dm(h),$$

pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tout $r > 0$. Comme u est sous-harmonique, on a alors

$$u_n(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z + re^{i\theta})d\theta$$

ce qui prouve que u_n est aussi sous-harmonique.

Comme ρ est radiale, on a

$$u_n(z) = \int u\left(z - \frac{h}{n}\right)\rho(h)dm(h) = \int_0^1 s\rho(s)I_{u,z}\left(\frac{s}{n}\right)ds$$

où $I_{u,z}(r)$ est la moyenne circulaire définie par $I_{u,z}(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+re^{i\theta})d\theta$. Comme u est sous-harmonique, $I_{u,z}$ est une fonction croissante de r, qui converge vers $u(z)$ quand $r \to 0$. On en déduit que

$$u_n(z) \text{ décroît vers } u(z) \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Remarque. Le résultat d'intégrabilité locale pour une fonction sous-harmonique $u : U \to [-\infty, +\infty[$ est encore vrai sur un ouvert U quelconque, à condition de supposer que u n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de U. La preuve repose sur un argument de connexité et sur l'étude de l'ensemble

$$A = \left\{z \in U \,/\, \exists V \text{ voisinage compact de } z, \quad \int_V udm > -\infty\right\}.$$

Le résultat d'approximation par des fonctions sous-harmoniques régulières peut aussi s'étendre au cas d'un ouvert quelconque U. Dans ce cas, il faut néanmoins faire attention aux questions de supports convolutifs : u_n n'est définie que sur $U_n = \{z \in U \,/\, d(z, \partial U) > \frac{1}{n}\}$.

6.2.2 Distributions sous-harmoniques

Définitions : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.

• On appelle **distribution** sur U toute forme linéaire T sur $C_c^\infty(U)$ continue au sens suivant : pour tout compact K de U, il existe $n \in \mathbf{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ à support dans K}, \quad |<T, \varphi>| \leq C \sup_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

• On définit les **dérivées d'une distribution** T sur U par dualité : pour $\gamma \in \mathbf{N}^2$,

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad <\partial^\gamma T, \varphi> = (-1)^{|\gamma|} <T, \partial^\gamma \varphi>.$$

• La **distribution associée à une fonction localement intégrable** ψ est la forme linéaire

$$T_\psi : \varphi \in C_c^\infty(U) \mapsto \int_U \psi\varphi dm$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur U.

Propriétés. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.

• L'ensemble des distributions est stable par dérivation.

• La dérivation au sens des distributions coïncide avec la notion usuelle de dérivation sur $C^\infty(U)$.

Preuve. • La forme linéaire sur $C_c^\infty(U)$ définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad <\partial^\gamma T, \varphi>= (-1)^{|\alpha|} <T, \partial^\alpha \varphi>$$

vérifie l'hypothèse de continuité

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ à support dans K}, \quad |<\partial^\alpha T, \varphi>| &\leq C \sup_{|\alpha|\leq n} \|\partial^\alpha \partial^\gamma \varphi\|_\infty \\ &\leq C \sup_{|\beta|\leq n+|\gamma|} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty\end{aligned}$$

où C et n ne dépendent que de la distribution T et du compact K.

On en déduit que pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^2$, $\partial^\gamma T$ est une distribution.

• Si ψ est une fonction de classe C^n, pour tout $\gamma \in \mathbf{N}^2$ tel que $|\gamma| \leq n$, la distribution $T_{\partial^\gamma \psi}$ associée à $\partial^\gamma \psi$ est définie par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad <T_{\partial^\gamma \psi}, \varphi>= \int \partial^\gamma \psi(z) \varphi(z) dm(z).$$

En intégrant par parties, on obtient alors

$$<T_{\partial^\gamma \psi}, \varphi>= (-1)^{|\gamma|} \int \psi(z) \partial^\gamma \varphi(z) dm(z)$$

(tous les termes de bord sont nuls puisque φ est à support compact). Par définition, on a donc

$$<T_{\partial^\gamma \psi}, \varphi>=<\partial^\gamma T_\psi, \varphi>,$$

ce qui montre que la dérivation au sens des distributions coïncide avec la notion usuelle de dérivation. ■

Définitions : Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.

• Une **distribution positive** sur U est une distribution T qui vérifie

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ positive}, \quad <T, \varphi>\geq 0\,.$$

• Une **distribution sous-harmonique** sur U est une distribution T réelle telle que ΔT est une distribution positive.

Propriété. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$.
Une distribution T sur U est positive si et seulement si elle est associée à une mesure de Radon.

Preuve. • Une distribution T_μ associée à une mesure de Radon μ est clairement une distribution positive. On a en effet

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ positive}, \quad <T_\mu, \varphi>= \int \varphi(z) d\mu(z) \geq 0\,.$$

• Inversement, considérons une distribution positive T sur U. Soient K un compact de U, et χ une fonction $C_c^\infty(U)$ valant 1 au voisinage de K. Si $\varphi \in C_c^\infty(U)$ est réelle et a son support inclus dans K, alors $\|\varphi\|_\infty \chi - \varphi$ et $\|\varphi\|_\infty \chi + \varphi$ sont des fonctions $C_c^\infty(U)$ positives. Par hypothèse, on a alors

$$-\|\varphi\|_\infty < T, \chi > \leq < T, \varphi > \leq \|\varphi\|_\infty < T, \chi > \ .$$

Autrement dit, pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ à support dans K}, \quad | < T, \varphi > | \leq C_K \|\varphi\|_\infty.$$

On montre alors que T se prolonge en une forme linéaire positive $\tilde{T}$ sur $C_c(U)$. Soit $\varphi \in C_c(U)$, il existe une suite $\varphi_n \in C_c^\infty(U)$ uniformément supportée dans un compact K de U telle que $\varphi_n \to \varphi$ uniformément ((φ_n) est par exemple obtenue en utilisant une régularisation par convolution). La suite (φ_n) est en particulier uniformément de Cauchy et on a

$$| < T, \varphi_n > - < T, \varphi_m > | \leq C_K \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

On définit alors

$$< \tilde{T}, \varphi > = \lim_{n \to \infty} < T, \varphi_n >$$

On vérifie facilement que cette limite est indépendante de la suite d'approximation choisie, et a les propriétés de linéarité et de positivité attendues.

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc une mesure de Radon μ telle que

$$\forall \varphi \in C_c(U), \quad < \tilde{T}, \varphi > = \int \varphi(z) d\mu(z).$$

En particulier,

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad < T, \varphi > = \int \varphi(z) d\mu(z).$$

d'où l'on conclut que T est bien associée à une mesure de Radon. ■

Théorème. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et T une distribution réelle sur U.
Alors T est sous-harmonique si et seulement si elle est associée à une fonction sous-harmonique localement intégrable.

Preuve. • Supposons que la distribution T soit associée à une fonction sous-harmonique (non triviale) u, et fixons une fonction positive $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Soit V un ouvert relativement compact de U contenat le support de φ.
D'après le résultat d'approximation démontré au paragraphe précédent, on peut trouver une suite (u_n) de fonctions sous-harmoniques de classe C^2 sur V qui décroît vers $u_{|V}$.
D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a alors

$$< \Delta T, \varphi > = < T, \Delta \varphi > = \int u \Delta \varphi dm = \lim_{n \to \infty} \int u_n \Delta \varphi dm,$$

ce qui donne par intégration par parties

$$< \Delta T, \varphi >= \lim_{n\to\infty} \int \Delta u_n \varphi dm.$$

Comme $\Delta u_n \geq 0$ pour tout n, on a donc

$$< \Delta T, \varphi > \geq 0,$$

ce qui prouve que ΔT est une distribution positive.

• Inversement, supposons que T soit une distribution sous-harmonique, i.e. que ΔT soit associée à une mesure de Radon μ.

D'après la propriété d'unicité, il suffit de prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une fonction u_δ sous-harmonique dans $U_\delta = \{z \in U \,/\, d(z, \partial U) > \delta\}$ telle que la restriction de T à U_δ soit la distribution associée à u_δ : en effet, l'unicité permet alors de définir sans ambiguïté une fonction $u : U \to [-\infty, \infty[$ en posant $u(z) = u_\delta(z)$ si $z \in U_\delta$.
La fonction u est sous-harmonique car sous-harmonique au voisinage de chaque point, et T est la distribution associée à u car toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ a son support inclus dans un des U_δ.

Soit $\delta > 0$. Comme $\bar{U}_{\delta/3} \subset U$, on peut trouver une fonction $\chi \in C_c^\infty(U)$ valant 1 sur $U_{\delta/3}$. On définit alors la distribution $S = \chi T$ par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad < S, \varphi >=< T, \chi\varphi >$$

qui coïncide avec T et est en particulier sous-harmonique sur $U_{\delta/3}$.
On se donne ensuite une suite régularisante approchant la masse de Dirac. On considère pour cela une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbf{C}, \mathbf{R}^+)$ radiale, à support dans le disque unité fermé $\bar{B}$, et vérifiant $\int \rho dm = 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\rho_n(z) = n^2 \rho\,(nz)$, et on définit $S_n = S * \rho_n$ par

$$S_n(x) =< S, \rho_n(x - .) >$$

- Un résultat classique de théorie des distributions montre que

$$\rho_n * S \in C^\infty(\mathbf{C}),$$
$$\rho_n * S \to S \text{ au sens des distributions.}$$

En effet, on a

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(U), \quad < S_n, \varphi >=< S, \rho_n \tilde{*} \varphi >$$

où $\rho_n \tilde{*} \varphi(x) = \int \rho_n(x + y)\varphi(y) dm(y)$.
- Comme S est sous-harmonique dans $U_{\delta/3}$, on a pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ positive à support dans $U_{2\delta/3}$ et tout $n \geq \frac{3}{\delta}$,

$$\int \Delta S_n \varphi dm =< \Delta S_n, \varphi >=< \Delta S * \rho_n, \varphi >$$
$$=< \Delta S, \rho_n \tilde{*} \varphi > \geq 0$$

car $\rho_n \tilde{*} \varphi$ est positive, à support dans $U_{\delta/3}$. Cela entraîne que ΔS_n est positive dans $U_{2\delta/3}$, et donc que S_n est une fonction sous-harmonique sur $U_{2\delta/3}$.
- Les arguments utilisés dans la preuve du théorème de densité au paragraphe précédent montrent de plus que

$$S_n = \lim_{m\to\infty} S_n * \rho_m$$

sur U_δ. A m fixé, comme

$$S_n * \rho_m = S * \rho_n * \rho_m = S_m * \rho_n,$$

la suite $(S_n * \rho_m)_n$ décroît. En passant à la limite $m \to \infty$, on obtient que $(S_n)_n$ est décroissante sur U_δ.
- On pose finalement $u_\delta = \inf_{n\geq 3/\delta} S_n$. On vérifie alors que u_δ est sous-harmonique sur U_δ. D'autre part, en utilisant le théorème de convergence monotone, on montre que u_δ est localement intégrable sur U_δ et que S est bien la distribution associée à u_δ sur U_δ. Comme S et T coïncident sur U_δ, cela termine la démonstration. ■

6.2.3 Potentiel logarithmique

D'après ce qui précède, une fonction u localement intégrable sur un ouvert U est sous-harmonique si Δu est une mesure de Radon. Il est donc naturel de chercher à résoudre l'équation $\Delta u = \mu$ où μ est une mesure borélienne sur U.
On s'intéresse pour commencer à une solution particulière sur $\mathbf{C}$ de l'équation $\Delta u = \delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0, appelée solution fondamentale du Laplacien.

Propriété. La fonction localement intégrable $u : z \in \mathbf{C} \mapsto \log|z|$ vérifie $\Delta u = 2\pi\delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0.

Preuve. Par définition,

$$< \Delta \log|z|, \varphi > = < \log|z|, \Delta\varphi > = \int \log|z| \Delta\varphi(z) dm(z)$$

car $\log|z|$ est localement intégrable sur $\mathbf{C}$. On utilise alors la formulation du laplacien en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale.

$$\begin{aligned}\int \log|z|\Delta\varphi(z)dm(z) &= \lim_{R\to 0}\int_{|z|\geq R} \log|z|\Delta\varphi(z)dm(z)\\ &= \lim_{R\to 0}\int_R^\infty \int_0^{2\pi} \log r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) r dr d\theta\end{aligned}$$

Le second terme est de moyenne nulle en θ, et le premier est calculé par intégration par parties en r

$$\int_R^\infty \int_0^{2\pi} \log r \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) dr d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\left[r\log r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]_R^\infty - \int_R^\infty \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr\right)d\theta.$$

Comme φ est continue et à support compact, on a finalement

$$\lim_{R\to 0}\int_R^\infty \int_0^{2\pi} \log r \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) dr d\theta = 2\pi\varphi(0),$$

ce qui donne l'identité annoncée. ■

Cette solution permet en fait d'obtenir, par convolution, une solution particulière de l'équation $\Delta u = \mu$ pour toute mesure borélienne à support compact sur $\mathbf{C}$.

Définition : Si μ est une mesure borélienne sur $\mathbf{C}$ à support compact, le **potentiel logarithmique** de μ est la fonction U^μ localement intégrable définie presque partout par la formule

$$U^\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}} \log|z-\zeta|d\mu(\zeta).$$

Propriétés. Soit μ est une mesure borélienne sur $\mathbf{C}$ à support compact.
Alors $\Delta U^\mu = \mu$ au sens des distributions.

Preuve. Par définition, on a pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{C})$

$$< \Delta U^\mu, \varphi > = < U^\mu, \Delta\varphi > = \int \Delta\varphi(z)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}} \log|z-\zeta|d\mu(\zeta)\right)dm(z).$$

Comme $\log|z-\zeta|d\mu(\zeta)dm(z)$ est une mesure finie sur $\mathbf{C}\times K$ pour tout compact K, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} < \Delta U^\mu, \varphi > &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}}\left(\int \Delta\varphi(z)\log|z-\zeta|dm(z)\right)d\mu(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{C}} 2\pi\varphi(\zeta)d\mu(\zeta) = < \mu, \varphi >, \end{aligned}$$

ce qui donne l'identité $\Delta U^\mu = \mu$ au sens des distributions. ■

6.2.4 Théorème de décomposition de Riesz et hypoellipticité du Laplacien

Pour obtenir les solutions générales de l'équation $\Delta u = \mu$ où μ est une mesure borélienne, il reste alors à caractériser les distributions harmoniques (solutions de l'équation homogène).

Lemme de Weyl. Soient U un ouvert de $\mathbf{C}$, et T une distribution sur U.
Alors $\Delta T = 0$ si et seulement si T est associée à une fonction harmonique.

Preuve. On vérifie sans difficulté que toute distribution T peut s'écrire $T = T_1 + iT_2$ où T_1 et T_2 sont des distributions réelles. On peut donc se ramener au cas d'une distribution réelle.

Si $\Delta T = 0$, d'après le théorème du paragraphe précédent, on peut trouver deux fonctions u_- et u_+ sous-harmoniques sur U telles que T soit associée à u_+ et $-T$ soit associée à u_-. La fonction $u_- + u_+$ est alors sous-harmonique et nulle presque partout.

D'après la propriété d'unicité, elle est donc identiquement nulle. On obtient finalement que T est la distribution associée à $h = u_+ = -u_-$, qui est harmonique. ■

Théorème de Riesz. Soit u une fonction sous-harmonique non triviale sur le disque $B(z_0, R)$.
Pour tout ouvert V relativement compact dans U, on note μ_V la restriction de $\mu = \Delta u$ à V. On a alors

$$\forall z \in V, \quad u(z) = U^{\mu_V}(z) + h(z)$$

où la fonction h est harmonique dans V.

Preuve. Comme $\Delta U^{\mu_V} = \mu_V$ au sens des distributions, la distribution $\Delta(u - U^{\mu_V})$ est nulle sur V. D'après le lemme de Weyl, il existe donc une fonction h harmonique sur V telle que $u - U^{\mu_V} = h$ presque partout dans V.
Les deux fonctions u et $U^{\mu_V} + h$ qui coïncident presque partout dans V sont sous-harmoniques, ce qui implique, d'après la propriété d'unicité, que $u = U^{\mu_V} + h$ partout dans V. ■

Corollaire (formule de Jensen). Soit u une fonction sous-harmonique non triviale sur le disque $B(z_0, R)$.
Si on note $\mu = \Delta u$, on a pour tout $r < R$

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{B}(z_0,r)} \log \frac{|z - z_0|}{r} d\mu(z).$$

Preuve. Soient $r < R$ et ε tel que $r + \varepsilon < R$. On note ν la restriction de μ au disque $B(z_0, r + \varepsilon)$. D'après le théorème de décomposition de Riesz, la fonction $h = u - U^\nu$ est harmonique dans $B(z_0, r + \varepsilon)$. D'après la formule de la moyenne, on a donc

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

ou autrement dit

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta + U^\nu(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^\nu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^\nu(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{B(z_0, r+\varepsilon)} \left(\frac{1}{2\pi} \int \log |\zeta - z_0 - re^{i\theta}| d\theta \right) d\mu(\zeta).$$

Si $r < |\zeta - z_0|$, la fonction $z \mapsto \log |\zeta - z_0 - z|$ est harmonique sur $B(0, r)$ et continue sur $\bar{B}(0, r)$. D'après la formule de la moyenne, on a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int \log |\zeta - z_0 - re^{i\theta}| d\theta = \log |\zeta - z_0|.$$

Si $r > |\zeta - z_0|$, la fonction $z \mapsto \log |r - (\zeta - z_0)e^{-i\theta}|$ est harmonique sur $B(0, |\zeta - z_0|)$ et continue sur $\bar{B}(0, |\zeta - z_0|)$. D'après la formule de la moyenne, on a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int \log |\zeta - z_0 - re^{i\theta}| d\theta = \log r.$$

Le théorème de convergence dominée montre de plus qu'on a continuité de l'intégrale quand $r \to |\zeta - z_0|$ (la fonction $\theta \mapsto \log|\theta|$ étant intégrable au voisinage de 0).
Finalement, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^\nu(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{\log r}{2\pi}\int_{\bar{B}(z_0,r)} d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_{C(z_0,r,r+\varepsilon)} \log|\zeta - z_0| d\mu(\zeta).$$

Comme

$$U^\nu(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int \log|\zeta - z_0| d\nu(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{B(z_0,r+\varepsilon)} \log|\zeta - z_0| d\mu(\zeta),$$

on en déduit que

$$U^\nu(z_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^\nu(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{B(z_0,r)} \log|\zeta - z_0| d\mu(\zeta) - \frac{\log r}{2\pi}\int_{\bar{B}(z_0,r)} d\mu(\zeta),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Remarque. Ces résultats montrent en particulier que le Laplacien est **hypoelliptique**, c'est-à-dire que

$$\text{si } f \in C^\infty(U), \text{ toute solution } u \text{ de l'équation } \Delta u = f \text{ sur } U \text{ est } C^\infty(U).$$

En effet, le potentiel logarithmique U^f est de classe C^∞ (par un résultat classique de régularité pour la convolution), et les fonctions harmoniques sont de classe C^∞.

Index

équivalence conforme, 25

chemins
  C^1-équivalents, 7
  de même orientation, 7
clôture algébrique de **C**, 18
courbure, 48

détermination de la racine carrée, 31
détermination du logarithme, 31

famille normale, 30
fonction entière, 6
fonction holomorphe, 5
fonction méromorphe, 42
formule de Cauchy, 19
formule de la moyenne, 16

homotopie
  de lacets, 11
  stricte de chemins, 11

image réciproque d'une métrique, 49
indice d'un lacet, 15
intégrale sur un chemin, 7

lacet, 7
lemme de Hurwitz, 34
lemme de Schwarz, 27, 50

métrique, 48

pôle de multiplicité k, 41, 42
principe des zéros isolés, 20
principe du maximum, 16
prolongement analytique, 17
propriété de l'image ouverte, 32

résidu, 43

série de Laurent, 38
simple connexité, 31, 35
singularité éliminable, 41, 42
singularité essentielle, 41, 42

théorème de Casorati-Weierstrass, 41
théorème de Cauchy, 11
théorème de Goursat, 9
théorème de Hahn-Banach, 58
théorème de l'argument, 21
théorème de Liouville, 18, 52
théorème de Mergelyan, 61
théorème de Mittag-Leffler, 67
théorème de Montel, 30
théorème de Morera, 23
théorème de Picard, 52, 54
théorème de Riemann, 31
théorème de Riesz, 58
théorème de Rouché, 22
théorème de Runge, 58
théorème des résidus, 44
théorèmes de Weierstrass
  analyticité, 17
  localisation des zéros, 64