МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»

Часть 1

Методические указания

Волгоград
2017

УДК 519.21 (075)

Р е ц е н з е н т

доцент кафедры «Прикладная математика»
канд. пед. наук *И. А. Тарасова*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Лабораторный практикум по дисциплине «Теория вероятностей, математическая статистка и случайные процессы». Ч. 1 : метод. указания / сост.: М. И. Андреева, В. А. Кобышев, Е. А. Смирнов, О. К. Чесноков, Н. В. Чигиринская ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2017. – 28 с.

Даются задания по лабораторным работам и руководство к их выполнению. Могут использоваться студентами факультета электроники и вычислительной техники при подготовке к лабораторным работам по дисциплине и отчетам по ним.

У ч е б н о е и з д а н и е

С о с т а в и т е л и:
Марина Израилевна **Андреева**
Владимир Алексеевич **Кобышев**
Евгений Анатольевич **Смирнов**
Олег Константинович **Чесноков**
Наталья Вячеславовна **Чигиринская**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»**

Ч а с т ь 1

Методические указания

Темплан 2017 г. (учебно-методическая литература). Поз. № 2.
Подписано в печать 20.12.2017. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,63.
Тираж 10 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ.
400005, г. Волгоград, просп. В. И. Ленина, 28, корп. 7.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Цель работы: научиться распознавать ситуации, при рассмотрении которых применимы те или иные типы комбинаций (сочетания, размещения, перестановки с повторениями и без повторений) и вычислять количество комбинаций каждого типа по соответствующим формулам вручную и с помощью составленных программ; использовать классическое определение вероятности и элементы комбинаторики для нахождения вероятностей случайных событий.

Формулировка заданий

Задание 1. Элементы комбинаторики

1. Знать определения шести основных типов комбинаций, формулы для вычисления количества комбинаций различных типов $\left(C_n^m, A_n^m, P_n, \tilde{C}_n^m, \tilde{A}_n^m, \tilde{P}_n\right)$ и научиться их применять.

2. Составить программу для вычисления количества комбинаций для трех типов комбинаций: сочетаний без повторений (C_n^m), размещений с повторениями $\left(\tilde{A}_n^m\right)$ и третьему типу (по случайному выбору из оставшихся четырех).

Программа должна обеспечивать:

а) выбор пользователем нужного типа комбинаций;

б) вывод на экран формулы для вычисления числа комбинаций, соответствующей выбранной комбинации,

в) запрос на ввод параметров с указанием допустимых границ для каждого из них;

г) вывод на экран результатов вычислений или сообщение об ошибке.

При написании программы предусмотреть возможность использования целочисленной арифметики и соответствующих библиотек или реализацию собственных алгоритмов вычислений, обеспечивающих получение результата в виде целого числа (без округлений). Желательно структурировать программу таким образом, чтобы ее части было удобно использовать в дальнейшем.

Ссылка на используемые программные продукты (открытого доступа) должна содержаться в протоколе. Собственные алгоритмы вместе с комментариями к ним также должны быть внесены в протокол.

3. Протестировать правильность работы программы, используя примеры для самопроверки, и указать границы изменения параметров для корректной работы программы.

4. Придумать по две содержательные задачи с параметрами на использование рассматриваемых формул комбинаторики. Провести вычисления для каждой из задач при разных значениях параметров (для небольших значений письменно и с помощью программы, а для средних только с помощью программы). Внести формулировки задач, их решения и копии экранов в протокол.

Задание 2. Классическое определение вероятности

1. Рассмотреть типовые задачи на вычисление вероятностей случайных событий по классическому определению вероятности с использованием элементов комбинаторики.

2. Составить программу решения двух из рассмотренных типов параметризованных задач в соответствии с заданным вариантом.

Программа должна обеспечивать:

а) выбор пользователем нужной задачи и вывод текста задачи на экран;

б) вывод на экран формулы для вычисления $P(A)$ с использованием соответствующих обозначений для числа сочетаний, размещений или перестановок (например, $P(A) = C_l^s\, C_{k-l}^{r-s} / C_k^r$ или $P(A) = \frac{P_m}{\tilde{A}_n^m}$ и т.д.);

в) запрос на ввод параметров с указанием допустимых границ для каждого и обеспечение самого ввода;

г) вывод на экран искомой вероятности или сообщения об ошибке.

Структура программы задания 2 должна обеспечивать обращение к программе задания 1 или её частям.

3. Протестировать правильность работы программы, меняя параметры в допустимых границах.

4. Придумать или найти в литературе содержательные задачи с параметрами, решаемые с помощью составленных программ. Тексты задач с указанием формул, по которым они решаются и полученные результаты (копии экранов) следует внести в протокол.

Примеры типовых задач для задания 2

1. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных. Из партии выбирается для контроля r изделий. Найти вероятность того, что из них S изделий будут дефектными.

2. Имеется m операторов и n перенумерованных приборов, которые они могут обслуживать. Каждый оператор выбирает случайным образом и с одинаковой вероятностью любой прибор, но с условием, что ни один прибор не может обслуживаться больше, чем одним оператором. Найти вероятность того, что будут выбраны для обслуживания приборы с номерами 1, 2, …, m.

3. В отделение связи поступило m телеграмм, которые случайным образом распределяются по n каналам связи ($n > m$). Найти вероятность события A – на каждый канал придется не больше одной телеграммы.

4. В отделение связи поступило m телеграмм, которые случайным образом распределяются по n каналом связи. Каналы перенумерованы. Найти вероятность того, что на 1-ый канал попадет ровно k_1 телеграмм, на 2-ой канал – k_2 телеграмм, …, на n-ый канал – k_n телеграмм, причем $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

5. В ящике имеется k ТЭЗ, из них k_1 элементов 1-го типа, …, k_i элементов i-го типа, …, k_m элементов m-го типа; $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$. Из ящика выбирают наугад n ТЭЗ. Найти вероятность того, что среди них будет n_1 ТЭЗ 1-го типа, …, n_i ТЭЗ i-го типа, …, n_m ТЭЗ m-го типа.

Примеры для самопроверки

Перестановки

$$P_n = n!$$

1) $P_9 = 362880$
2) $P_{12} = 479001600$
3) $P_{15} = 1307674368000$
4) $P_{18} = 6402373705728000$
5) $P_{20} = 2432902008176640000$
6) $P_{36} = 371993326789901217467799448150835200000000$
7) $P_{47} = 258623241511168180642964355153611979969197632389120000000000$

Сочетания

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1) $C_{18}^{10} = 43758$
2) $C_{19}^{14} = 11628$
3) $C_{30}^{12} = 86493225$
4) $C_{30}^{15} = 155117520$
5) $C_{40}^{30} = 847660528$
6) $C_{40}^{20} = 1378465288\ 20$
7) $C_{67}^{33} = 1422652073\ 7620288370$
8) $C_{80}^{40} = 1075072087\ 3333617646\ 1620$

9) $C_{75}^{50} = 5258854714\ 1148893628$

Размещения

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

1) $A_{18}^{6} = 13366080$
2) $A_{20}^{4} = 116280$
3) $A_{19}^{5} = 1395360$
4) $A_{18}^{15} = 1067062284288000$
5) $A_{20}^{20} = 2432902008176640000$
6) $A_{28}^{26} = 152444172305856930250752000000$
7) $A_{50}^{10} = 37276043023296000$
8) $A_{35}^{28} = 2050227771108362089219573678080000000$

Сочетания с повторениями

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

1) $\tilde{C}_{10}^{5} = 2002$
2) $\tilde{C}_{10}^{15} = 1307504$
3) $\tilde{C}_{14}^{17} = 119759850$
4) $\tilde{C}_{19}^{32} = 18053528883775$
5) $\tilde{C}_{50}^{30} = 55446328342752834143 80$
6) $\tilde{C}_{10}^{78} = 512916800670$
7) $\tilde{C}_{15}^{60} = 456002537343216$

Размещения с повторениями

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

1) $\tilde{A}_{12}^{7} = 35831808$
2) $\tilde{A}_{7}^{12} = 13841287201$
3) $\tilde{A}_{8}^{10} = 1073741824$
4) $\tilde{A}_{11}^{15} = 4177248169415651$
5) $\tilde{A}_{12}^{15} = 15407021574586368$
6) $\tilde{A}_{23}^{11} = 952809757913927$
7) $\tilde{A}_{33}^{9} = 46411484401953$

Перестановки с повторениями

$$P_n(m_1, m_2, \ldots m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots m_k!}$$

1) P_{10} (2, 3, 5) = 2520
2) P_{12} (3, 4, 5) = 27720
3) P_{14} (2, 2, 1, 9) = 60060
4) P_{20} (10, 8, 2) = 8314020
5) P_{20} (6, 4, 3, 2, 5) = 97772875200
6) P_{25} (6, 4, 8, 2, 5) = 92762015346000
7) P_{40} (6, 8, 9, 12, 5) = 1347444249443795110608000

Вопросы к отчету

1. Основные схемы выбора и типы комбинаций. Правила сложения и умножения.

2. Сочетания. Определение, формула для вычисления числа сочетаний C_n^m. Содержательные задачи на применение сочетаний. Основные тождества для C_n^m: правило симметрии $C_n^m = C_n^{n-m}$ и правило Паскаля $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

3. Размещения. Определение, формула для вычисления числа размещений A_n^m с обоснованием. Ситуативные задачи, приводящие к размещениям.

4. Перестановки. Определения, формула для вычисления числа перестановок P_n с обоснованием. Содержательные задачи, решаемые с помощью перестановок.

5. Сочетания с повторениями. Определение, формула для вычисления числа сочетаний $\tilde{C}_n^m$. Ситуативные задачи, приводящие к сочетаниям с повторениями.

6. Размещения с повторениями. Определение, формула для вычисления числа размещений с повторениями $\tilde{A}_n^m$ с обоснованием. Содержательные задачи, решаемые с помощью этого типа комбинаций.

7. Перестановки с повторениями. Определение, формула для вычисления $\tilde{P}_n = P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, ее обоснование. Содержательные задачи, предполагающие использование этого типа комбинаций.

8. Случайные события. Невозможные и достоверные события. Совместные и несовместные события. Полная группа событий. Равные и противоположные события. Определения и примеры.

9. Равновозможные события. Схема случаев. Классическое определение вероятности, свойства вероятности, следующие из классического определения. Ограниченность возможностей применения классического определения вероятности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

***Цель работы*:** Научиться выражать сложные события через заданные промежуточные, используя операции над событиями, и находить вероятности сложных событий по теоремам сложения и умножения вероятностей, в том числе с использованием программ. Научиться использовать формулы полной вероятности и Байеса.

Формулировка заданий

Задание 1. Нахождение вероятности безотказной работы заданной схемы (или отказа схемы), используя алгебраические операции над событиями и теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Для заданной схемы составить и обосновать формулу, выражающую событие B – схема работает безотказно в течение времени T (или событие $\overline{B}$) через события A_i – i-ый элемент схемы работает безотказно в течение времени T и события $\overline{A_i}$.

2. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей составить и обосновать соотношение, выражающее вероятность события B (или $\overline{B}$) через вероятности событий A_i и $\overline{A_i}$.

3. Внести в протокол первоначальные соотношения, их преобразования (с обоснованием) и окончательные формулы из пунктов 1 и 2.

4. Составить программу для вычисления указанной вероятности. Программа должна обеспечивать:

а) вывод на экран текста задачи со схемой;

б) ввод с клавиатуры $P(A_i)$ или $P(\overline{A_i})$, контроль правильности ввода данных;

в) вывод на экран полученных формул для события B (или $\overline{B}$) и его вероятности;

г) вычисление вероятности события B (или $\overline{B}$) по полученной формуле и вывод на экран ответа.

5. Протестировать составленную программу, используя примеры для самопроверки.

6. Для двух наборов входных данных получить результаты (искомую вероятность события B или $\overline{B}$) и внести копии экранов в протокол.

Задание 2. Придумать схему, состоящую не менее, чем из пяти элементов и выполнить для нее пункты 1-6 задания 1.

Задание 3. Выбор подходящих промежуточных событий и использование операций над событиями и теорем сложения и умножения вероятностей для отыскания вероятностей заданных сложных событий.

1. Для заданной (в соответствии с вариантом) задачи составить и обосновать формулы, выражающие события, вероятность которых нужно найти через подходящие промежуточные события, используя основные операции над событиями.

2. Если это необходимо, записать формулы, выражающие вероятности промежуточных событий по классическому определению с использованием элементов комбинаторики (или по теоремам сложения и умножения вероятностей). Отразить это в протоколе.

3. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, составить и обосновать соотношения, выражающие искомые вероятности через вероятности промежуточных событий. Внести получение формул и их обоснование в протокол.

4. Составить программу для вычисления вероятностей сформулированных событий. Программа должна обеспечить:

а) вывод на экран текста задачи;

б) вывод на экран формул для вычисления вероятностей промежуточных событий;

в) ввод с клавиатуры параметров, позволяющих найти вероятности промежуточных событий по формулам;

г) вывод на экран вычисленных вероятностей промежуточных событий;

д) вывод на экран формул, выражающих события, вероятности которых нужно найти, через промежуточные события;

е) вывод на экран формул, выражающих искомые вероятности;

ж) вычисление и вывод на экран искомых вероятностей.

Замечание. Если условие задачи предполагает ввод вероятностей промежуточных событий с клавиатуры, то обеспечивается этот ввод, а реализация пунктов б), в) и г) исключается.

5. Протестировать программу для разных наборов входных данных. Результаты внести в протокол.

6. Придумать текст задачи с параметрами, решаемой с помощью той же программы, решить ее аналитически и с помощью программы. Оформить решение в протоколе. Внести в протокол копии экранов.

Задание 4. Формулы полной вероятности и Байеса.

1. Придумать по две содержательные задачи с параметрами, решаемые с помощью формул полной вероятности и Байеса.

2. Оформить решение этих задач в протоколе, выделив и обозначив полную группу попарно несовместных событий (гипотез) H_i, где $i = \overline{1, n}$. Указать, чему равны $P(H_i)$ и условные вероятности $P_{H_i}(A)$.

3. Написать программу, находящую вероятность события A по формуле полной вероятности и условные вероятности гипотез $P_A(H_i)$ по формуле Байеса. Программа должна обеспечивать:

а) ввод числа событий, образующих полную группу;

б) ввод вероятностей гипотез $P(H_i)$ и условных вероятностей $P_{H_i}(A)$, а также контроль правильности ввода данных $\left(\sum_{i=1}^{h} P(H_i) = 1\right)$;

в) выбор пользователем нужной формулы (полной вероятности или Байеса);

г) изображение нужной формулы на экране;

д) вычисления по выбранной формуле и вывод результатов вычисления на экран.

Замечание. При вычислениях по формуле Байеса следует предусмотреть возможность как вывода на экран всех найденных условных вероятностей $P_A(H_i)$, так и части этих вероятностей для выбираемых пользователем значений $i(i = k; i \in \{k_1; k_2, ..., k_m\})$.

4. Протестировать программу для разных значений n и режимов выбора i.

5. Результаты тестирования и рекомендации по использованию программы внести в протокол.

6. С помощью программы решить придуманные содержательные задачи для разных наборов значений данных. Копии экранов внести в протокол.

Примеры типовых задач для заданий 1 и 3

ВАРИАНТ 1

1. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке. События A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5 состоят в том, что одноименные элементы работают безотказно в течение времени T, $P(A_i) = p_i$. Найти вероятность события B – схема работает безотказно в течение времени T.

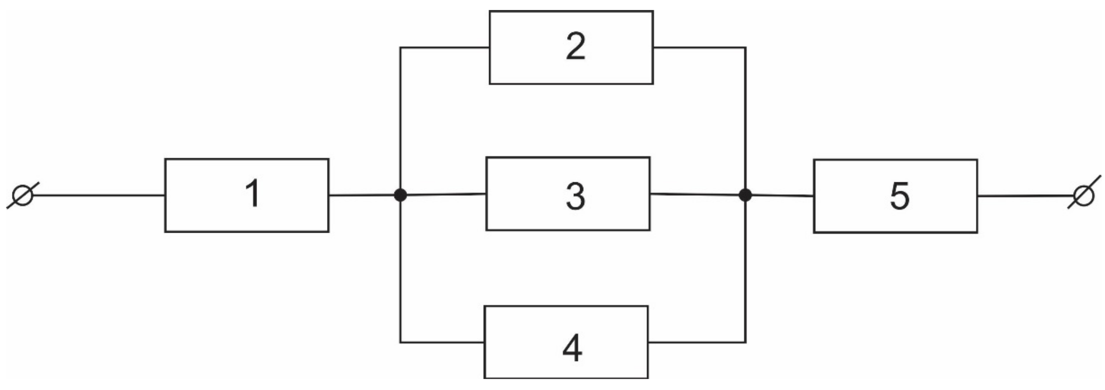

Рис. 1

3. Один студент выучил m_1 из n вопросов программы, а второй m_2. Каждому из них задают по три вопроса. Найти вероятность того, что на все три вопроса правильно ответят:

a) оба студента;
b) только первый студент;
c) только один студент;
d) хотя бы один из студентов.

ВАРИАНТ 2

1. Электрическая цепь из пяти элементов составлена по схеме, приведенной на рисунке. Найти вероятность разрыва цепи, предполагая, что отказы отдельных элементов независимы и равны $q_i\left(i=\overline{1.5}\right)$.

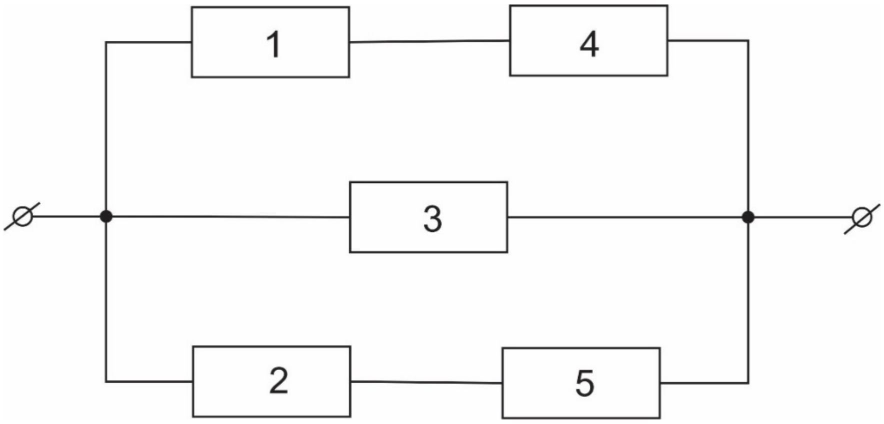

Рис. 2

2. Один студент выучил m_1 из n вопросов программы, а второй m_2. Каждому из них задают по три вопроса. Найти вероятность того, что не менее, чем на два вопроса правильно ответят:

a) оба студента;
b) только первый студент;
c) только один из них;
d) хотя бы один из студентов.

ВАРИАНТ 3

1. Найти вероятность отказа схемы, приведенной на рисунке, предполагая, что отказы отдельных элементов независимы и равны соответственно q_i.

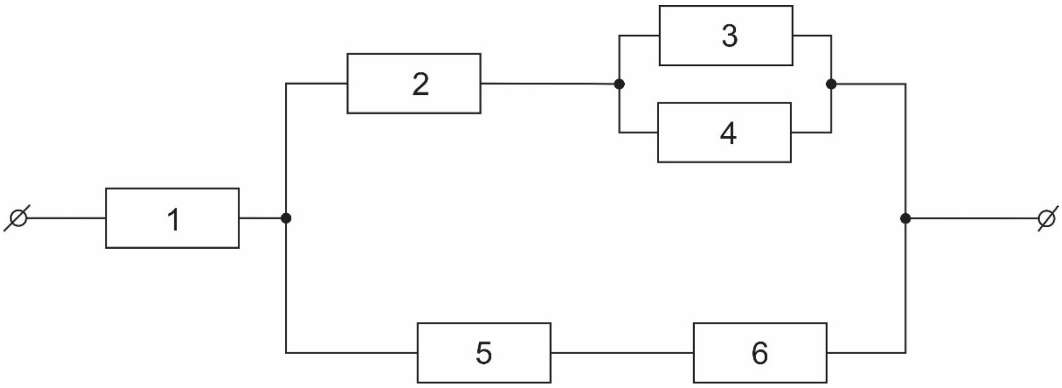

Рис. 3

3. Рабочий обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что за смену i-ый станок потребует наладки, равна p_i. Найти вероятность того, что за смену:

a) только один станок потребует наладки;
b) только третий станок потребует наладки;
c) только два станка потребуют наладки;
d) хотя бы один станок потребует наладки.

ВАРИАНТ 4

1. Найти вероятность безотказной работы схемы, приведенной на рисунке, считая, что отказы отдельных элементов независимы и вероятность отказа элемента с номером i равна q_i.

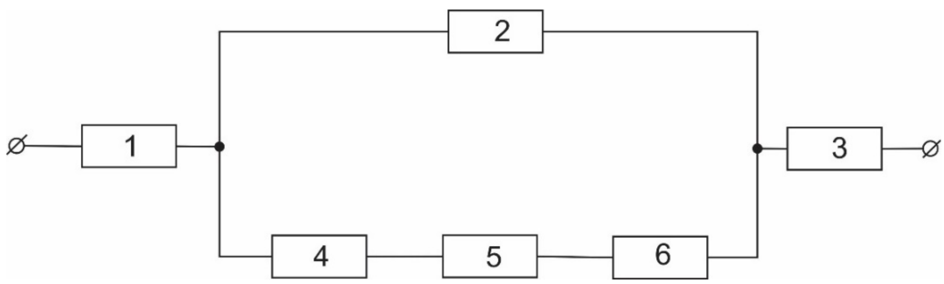

Рис. 4

3. Пять стрелков производят по одному выстрелу в цель. Вероятности попадания в цель i-ым стрелком соответственно равны p_i. Найти вероятность попадания в цель:

a) только i-го стрелка;
b) только одного стрелка;
c) только двух стрелков;
d) не менее четырех стрелков;

е) хотя бы одного стрелка.

Пример реализации пунктов 1 и 2 из заданий 1 и 2

Найти вероятность безотказной работы схемы, приведенной на рисунке, считая, что отказы отдельных элементов независимы и вероятность отказа элемента с номером i равна q_i.

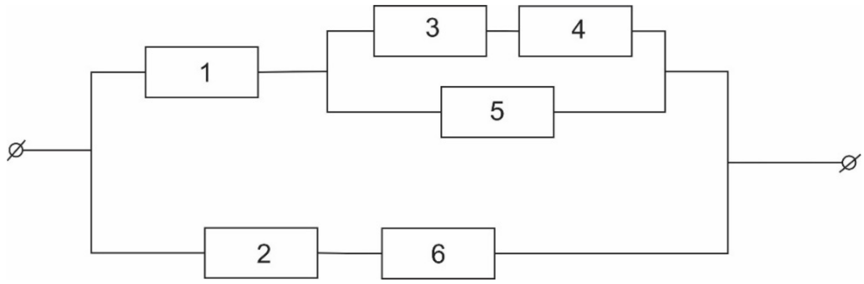

Рис. 5

Пусть A_i – отказ i-го элемента

$$P(A_i) = q_i\,;\; P(\overline{A_i}) = 1 - q_i = p_i$$

A – схема работает безотказно

$$A = \overline{A}_1 \cdot (\overline{A}_3 \overline{A}_4 + \overline{A}_5) + \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_6$$

Пусть

$$B = \overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 + \overline{A}_5 \tag{1}$$

$$P(B) = P(\overline{A}_3 \cdot \overline{A}_4 + \overline{A}_5) = P(\overline{A}_3\overline{A}_4) + P(\overline{A}_5) - P(\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5) = P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_5) -$$
$$- P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4)\cdot P(\overline{A}_5) = p_3 p_4 + p_5 - p_3 p_4 p_5 = p_3 p_4 (1 - p_5) + p_5$$

$$P(B) = p_3 p_4 q_5 + p_5 \tag{2}$$

Тогда

$$A = \overline{A}_1 \cdot B + \overline{A}_2 \overline{A}_6 \tag{3}$$

$$P(A) = P(\overline{A}_1 B) + P(\overline{A}_2 \overline{A}_6) - P(\overline{A}_1 B \overline{A}_2 \overline{A}_6) = P(\overline{A}_1)\cdot P(B) + P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_6) -$$
$$- P(\overline{A}_1)\cdot P(B)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_6) = P(\overline{A}_1)\cdot P(B)(1 - P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_6)) + P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_6) =$$
$$p_1 \cdot (p_3 p_4 q_5 + p_5)\cdot(1 - p_2 p_6) + p_2 p_6;$$

$$P(A) = p_1 \cdot (p_3 p_4 q_5 + p_5)(1 - p_2 p_6) + p_2 p_6 \tag{4}$$

Примеры для самопроверки

ВАРИАНТ 1. Задача 1

1) p_i : 0,6; 0; 0,7; 0; 0,8.

Ответ: $P(B)$ = 0,336.

2) p_i : 0,8; 0,6; 0; 0,7; 0,9.
   Ответ: $P(B) = 0{,}6336$.
3) p_i : 0,5; 0,4; 0,6; 0,8; 0,7.
   Ответ: 0,3332.
4) p_i : 0,6; 0,8; 0,7; 0,9; 0,6.
   Ответ: 0,35784.

ВАРИАНТ 2. Задача 1

1) q_i : 1; 0,2; 0,3; 0,1; 1.
Ответ: $P(B) = 0{,}3$.
2) q_i : 0,2; 0,4; 1; 0,1; 0,3.
Ответ: $P(B) = 0{,}1624$.
3) q_i : 0,1; 0,3; 0,2; 0,4; 0,2.
Ответ: $P(B) = 0{,}04048$.
4) q_i : 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,3.
Ответ: $P(B) = 0{,}01232$.

ВАРИАНТ 3. Задача 1

1) q_i : 0,2; 1; 0,3; 0,2; 0,4; 0,1.
Ответ: $P(B) = 0{,}568$.
2) q_i : 0,3; 0,1; 0,4; 1; 0,2; 0,2.
Ответ: $P(B) = 0{,}41592$.
3) q_i : 0,2; 0,3; 0,1; 0,3; 0,1; 0,2.
Ответ: $P(B) = 0{,}271904$.
4) q_i : 0,1; 0,2; 0,1; 0,2; 0,3; 0,1.
Ответ: $P(B) = 0{,}171928$.

ВАРИАНТ 4. Задача 1

1) q_i : 0; 0,3; 0,2; 0; 0,6; 1.
Ответ: $P(B) = 0{,}56$.
2) q_i : 0,3; 1; 0,4; 0,1; 0,2; 0,3.
Ответ: $P(B) = 0{,}21168$.
3) q_i : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,3; 0,2.
Ответ: $P(B) = 0{,}546336$.
4) q_i : 0,2; 0,3; 0,2; 0,3; 0,3; 0,1.
Ответ: $P(B) = 0{,}532672$.

Вопросы к отчету

1. Случайные события и операции над ними (сложение, умножение, вычитание). Алгебраические свойства сложения и умножения.

2. Противоположные события. Событие, противоположное сумме двух и более слагаемых.

3. Алгебра и сигма-алгебра событий.

4. Аксиоматическое определение вероятности. Следствия из аксиом вероятности (с выводом).

5. Вероятность суммы двух совместных событий (с выводом формулы). Способы отыскания вероятности суммы двух и более совместных событий.

6. Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Формулы для вычисления вероятностей произведения двух и более зависимых и независимых событий.

7. Формулы полной вероятности и Байеса (с выводом).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Цель работы: научиться применять формулу Бернулли и полиномиальную формулу для отыскания вероятностей событий, связанных с проведением конечных серий независимых испытаний; для большого числа испытаний правильно выбирать нужную приближенную формулу и вычислять по ней соответствующие вероятности с использованием таблиц и написанных программ.

Формулировка заданий

Задание 1. Применение формулы Бернулли и полиномиальной формулы.

1. Знать формулу Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$, m = 0, 1, 2 … n и полиномиальную формулу

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}, \text{ где } m_1 + m_2 + ... + m_k = n;$$

уметь производить вычисления по ним и применять их в соответствующих ситуациях. Уметь находить наивероятнейшее число наступлений события A в схеме Бернулли.

2. Написать программу, позволяющую вычислять вероятности событий $P_n(k = m)$, $P_n(k < m)$, $P_n(k \ge m)$ и $P_n(m_1 \le k \le m_2)$ с использованием формулы Бернулли.

Программа должна обеспечивать:

а) ввод необходимых параметров (p, n, m, m_1, m_2) и контроль правильности ввода;

б) выбор соответствующего события или событий из перечисленных;

в) вывод на экран расчетной формулы для выбранного события;

г) проведение вычислений и вывод на экран ответа.

Желательно, чтобы программа использовала подпрограмму вычисления C_n^m из первой лабораторной работы.

3. Протестировать работу программы и указать ограничения по вводимым параметрам для корректной работы программы.

4. Придумать по две содержательные задачи с параметрами для каждого из перечисленных типов событий (или для всех сразу). Для разных наборов значений параметров решить задачи с помощью программы и внести копии экранов в протокол.

5. Написать программу, позволяющую вычислять вероятности событий по полиномиальной формуле. Программа должна обеспечить:

а) ввод параметров (n, k, m_1, m_2,…, m_k, p_1, p_2, …, p_k) и контроль правильности ввода ($m_1 + m_2 + … + m_k = n$);

б) вывод на экран расчетной формулы;

в) проведение вычислений и вывод на экран ответа. Желательно использовать программу вычисления $P_n(m_1, m_2, …, m_k)$ из первой лабораторной работы.

6. Протестировать программу для разных наборов значений параметров, результаты вычислений внести в протокол;

7. Придумать две содержательные задачи с параметрами, приводящие к полиноминальной формуле. Решить их с помощью программы. Копии экранов внести в протокол.

Задание 2. Изучение предельных теорем в схеме Бернулли.

1. Знать формулу Пуассона и формулировки локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа. Уметь правильно выбирать нужную из них, исходя из условия задачи, значений параметров и имеющихся рекомендаций.

2. В соответствии с вариантом составить программу для приближенного вычисления вероятности события по одной из трех указанных формул.

2.1. Программа для использования формулы Пуассона $P_n(X = m) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, должна обеспечивать:

а) вывод на экран расчетной формулы;

б) рекомендации по диапазону допустимых значений вводимых параметров (m и λ) и их ввод;

в) вычисления по формуле и вывод на экран полученного результата.

3.1. Протестировать программу, используя тестовые примеры.

4.1. Придумать две параметризованные задачи на использование формулы Пуассона и провести вычисления для разных допустимых значений параметров с помощью программы. Результаты внести в протокол.

2.2. Программа для использования локальной теоремы Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}},\ x_0 = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

(где p – вероятность появления события при каждом испытании, $q = 1 - p$, n – общее число производимых испытаний) должна обеспечивать:

а) вывод на экран соответствующих формул;

б) рекомендации по диапазону допустимых значений вводимых параметров (n, m, p);

в) вычисление x_0, $\varphi(x_0)$ и $P_n(m)$ и вывод на экран полученных результатов;

г) вычисление $P_n(m)$ по формуле Бернулли с использованием программы для задачи 1 и сравнение полученных результатов.

3.2. Протестировать программу, используя тестовые примеры.

4.2. Придумать две содержательные параметризованные задачи на использование локальной теоремы Муавра-Лапласа и провести вычисления для разных допустимых значений параметров по этой теореме и формуле Бернулли с помощью программ. Сравнить результаты. Копии экранов внести в протокол.

2.3. Программа для использования интегральной теоремы Муавра-Лапласа $P_n(m_1 \le X \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (где p – вероятность появления события при каждом испытании, n общее число испытаний, m_1 и m_2 – границы числа появлений события в этой серии) должна обеспечить:

а) вывод на экран необходимых формул:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}};\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}};\ P_n(m_1 \le X \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

б) рекомендации по диапазону значений вводимых параметров (n, m_1, m_2, p) и их ввод,

в) вычисления по формулам x_1, x_2, $P_n(m_1 \le X \le m_2)$ (приближенное вычисление определенного интеграла рекомендуется производить по составной формуле Симпсона) и вывод на экран полученных значений;

г) вычисление $P_n\left(m_1 \le X \le m_2\right)$ с использованием программы для формулы Бернулли и сравнение полученных результатов.

3.3. Протестировать программу, используя тестовые примеры.

4.3. Придумать две содержательные параметризованные задачи на использование интегральной теоремы Муавра-Лапласа и провести вычисления для разных наборов допустимых значений параметров по этой теореме и по формуле Бернулли с помощью программ. Сравнить результаты. Копии экранов включить в протокол.

Примеры для самопроверки

Формула Бернулли

1. $p = 0{,}4$; $n = 10$
   а) $p_{10}(6) \approx 0{,}111476736$
   б) $p_{10}(k < 4) \approx 0{,}382280601$
   в) $p_{10}(k \ge 4) \approx 0{,}617719399$
   г) $p_{10}(5 \le k \le 7) = 0{,}251793856$
2. $p = 0{,}1$; $n = 4$
   а) $p_4(3) \approx 0{,}0036$
   б) $p_4(k < 3) \approx 0{,}9963$
   в) $p_4(k \ge 3) \approx 0{,}0037$
   г) $p_4(2 \le k \le 3) = 0{,}0522$

Полиномиальная формула

1. $n = 6$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}1$

$$p_6\left(1;2;2;1\right) = \frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}1 = 180 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}1 = 0{,}05184$$

2. $n = 5$; $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}2$

$$p_5\left(3;1;1\right) = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}0012$$

Формула Пуассона

1. $p = 0{,}001$; $n = 800$; $m = 1$

$p_{800}(1) \approx 0{,}359463171$

2. $p = 0{,}003$; $n = 1000$; $4 \le m \le 5$

   $p_{1000}(4 \le m \le 5) \approx 0{,}268850168$

3. $p = 0{,}001$; $n = 900$; $m = 4$

   $p_{900}(4) \approx 0{,}011114598$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

1. $n = 200$; $p = 0{,}7$; $q = 0{,}3$; $m = 160$

   $p_{200}(160) \approx 0{,}0005$

2. $n = 300$; $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$; $m = 25$

   $p_{300}(25) \approx 0{,}0484$

3. $n = 100$; $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$; $m = 65$

   $p_{100}(65) \approx 0{,}0484$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

1. $n = 400$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $m_1 = 70$; $m_2 = 100$

   $p_{400}(70;100) \approx 0{,}8882$

2. $n = 150$; $p = 0{,}75$; $q = 0{,}25$; $m_1 = 100$; $m_2 = 150$

   $p_{150}(100;150) \approx 0{,}9909$

Примеры использования предельных теорем

Пример 1

Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, поврежденных при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено:

а) 3 изделия;

б) по крайней мере 3 изделия.

Решение

а) Вероятность того, что изделие будет повреждено при транспортировке, равна $p = 0{,}0002$. Так как p – мала, $n = 10000$ – велико и $\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2 < 10$, следует применить формулу Пуассона

$$p_{10000}(3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0{,}1804\,.$$

б) Вероятность $p_{10000}(m \geq 3)$ можно вычислить, перейдя к противоположному событию.

$$p_{10000}(m \geq 3) = 1 - p_{10000}(m < 3) = 1 - \left(p_{10000}(0) + p_{10000}(1) + p_{10000}(2)\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!}\right) = 1 - (1 + 2 + 2)e^{-2} \approx 0{,}3233$$

Пример 2

В некотором регионе 60% населения поддерживают принятие решения о сезонном переходе на новое время. Найти вероятность того, что из 1000 случайно опрошенных жителей идею о переводе времени поддерживают:

а) 550 человек;

б) от 560 до 660 человек.

Решение

а) $p = 0{,}6$, $n = 1000$.

Применим локальную теорему Муавра-Лапласа и используем таблицу значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$x = \frac{550 - 0{,}6 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx -3{,}23$$

$$p_{1000}(550) \approx \frac{\varphi(-3{,}23)}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx \frac{0{,}0022}{\sqrt{240}} \approx 0{,}00014$$

$\varphi(-3{,}23) = \varphi(3{,}23)$ так как функция $\varphi(x)$ четная.

б) Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа, предварительно найдя

$$x_1 = \frac{560 - 1000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx -2{,}58 \text{ и } x_2 = \frac{660 - 1000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 3{,}87.$$

Используя таблицу значений функции Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, получаем

$$p_{1000}(550 \leq m \leq 660) \approx \Phi(3{,}87) - \Phi(-2{,}58) = \Phi(3{,}87) + \Phi(2{,}58) \approx 0{,}4999 + 0{,}4951 \approx$$

$$\approx 0{,}9950$$

$\Phi(-2{,}58) = -\Phi(2{,}58)$ так как функция $\Phi(x)$ нечетная.

Замечание. При $x > 5$ функцию $\Phi(x)$ принимают равной 0,5.

Вопросы к отчету

1. Повторные независимые испытания. Вывод формулы Бернулли. Примеры применения формулы Бернулли. Отыскание наивероятнейшего числа наступления события в схеме Бернулли.
2. Полиномиальная формула, условия ее применимости. Примеры задач, решаемых по полиномиальной формуле.
3. Формула Пуассона. Вывод формулы Пуассона. Рекомендации по корректному применению формулы Пуассона.
4. Формулировка локальной теоремы Муавра-Лапласа. Рекомендации по ее применению. Приближенное вычисление вероятностей событий с использованием этой теоремы и таблицы значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
5. Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа. Рекомендации по ее применению. Приближенное вычисление вероятностей событий с использованием таблицы значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Цель работы: научиться распознавать ситуации, при рассмотрении которых используется тот или иной тип одномерных дискретных распределений; по заданным параметрам распределений находить ряд распределения и его числовые характеристики, находить функцию распределения $F(x)$ и строить ее график, строить многоугольник распределения вручную и с помощью написанных программ.

Формулировка заданий

Задание 1. Изучение произвольного одномерного дискретного распределения с конечным множеством значений по его ряду распределения.

1. Знать определение дискретной случайной величины и основные способы ее задания. По заданному ряду распределения уметь находить функцию распределения $F(x)$ и строить ее график, а также строить многоугольник распределения.
2. Знать определения основных числовых характеристик дискретной случайной величины, их свойства и формулы для их вычисления.
3. Составить программу для изучения дискретной случайной величины по заданному ряду распределения. Программа должна обеспечить:

1) построение таблицы и ввод с клавиатуры возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей (с выводом на экран необходимых рекомендаций по осуществлению указанных действий);

2) проверку выполнения условия $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

3) нахождение функции распределения $F(x)$ и вывод на экран ее аналитического выражения;

4) построение на экране графика функции распределения и многоугольника распределения (с использованием графических редакторов, обеспечивающих изображение осей координат с масштабной сеткой, соответствующей рассматриваемому ряду распределения);

5) вывод на экран формул для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения;

6) вычисление и вывод на экран значений этих числовых характеристик и моды;

7) вывод на экран инструкции для пользователя.

4. Протестировать работу программы, используя задачу № 1 из семестровой работы № 2 и примеры из задачников.

5. Внести в протокол копии соответствующих экранов и указать используемое программное обеспечение.

Задание 2. Изучение одного из основных типов дискретных распределений (биномиального, Пуассона, геометрического, псевдогеометрического, гипергеометрического) в соответствии с номером варианта.

1. Знать типовые содержательные задачи, приводящие к изучаемому типу распределения и основные формулы, его определяющие.

2. Составить программу для изучения дискретной случайной величины заданного типа. Программа должна обеспечить:

1) ввод с клавиатуры параметров распределения и проверку правильности их ввода;

2) вывод на экран соответствующей формулы для вычисления значений $p_i = P(X = x_i)$;

3) вычисление значений p_i и вывод на экран ряда распределения;

4) проверку выполнения условия $\left|\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right| < \varepsilon$, где ε – заданная точность;

5) вывод на экран формул для вычисления числовых характеристик для заданного конкретного вида распределения;

6) вычисление числовых характеристик и вывод на экран их значений;

7) построение многоугольника распределения.

3. Протестировать правильность работы программы с помощью тестовых примеров.

4. Придумать две содержательные задачи с параметрами, приводящие к изучению случайной величины, имеющей рассматриваемый тип распределения.

5. Для нескольких наборов значений параметров решить эти задачи аналитически и с помощью программы и внести аналитическое решение и копии экранов в протокол.

Тестовые примеры

1. Биномиальное распределение

Задача 1. Всхожесть семян некоторого растения равна 90%. Посеяно 5 семян. Пусть случайная величина X – число проросших семян.

Построить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

По условию задачи $n = 5$, $p = 0{,}9$.

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = \frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^5 = 0{,}00001$$

$$P_5(1) = C_5^1 p q^4 = \frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^4 = 0{,}00045$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}00810$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}07290$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805$$

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^0 = 0{,}59049$$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	0,00045	0,00810	0,07290	0,328050	0,59049

$$\sum p_i = 1$$

$$M(X) = np = 5\cdot 0{,}9 = 4{,}5$$

$$D(X) = npq = 5\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1 = 0{,}45$$

Задача 2. Построить ряд распределения случайной величины X числа переключений передач при 4-х заездах автомобиля, если вероятность одного переключения $p = 0{,}4$. (Считать, что в одном заезде совершается одно переключение). Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

$$P_4(0)=C_4^0\cdot p^0\cdot q^4=\frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^4=1\cdot 1\cdot 0{,}1296=0{,}1296$$

$$P_4(1)=C_4^1\cdot p^1\cdot q^3=0{,}3456$$

$$P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=0{,}3456$$

$$P_4(3)=C_4^3\cdot p^3\cdot q^1=0{,}1536$$

$$P_4(4)=C_4^4\cdot p^4\cdot q^0=0{,}0256$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

$$\sum p_i=1$$

$$M(X)=np=4\cdot 0{,}4=1{,}6$$

$$D(X)=npq=4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}96$$

2. Гипергеометрическое распределение

Задача 1. В ящике содержится 15 деталей, из которых 10 стандартных и 5 нестандартных. Из ящика наугад извлекаются 4 детали. Случайная величина Х – число стандартных деталей среди четырех извлеченных. Построить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей окажется ровно k стандартных ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) вычисляется по формуле

$$p(X=k)=\frac{C_{10}^k\cdot C_5^{4-k}}{C_{15}^4}$$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,00366	0,07326	0,32967	0,43956	0,15385

$$\sum p_i=1$$

$$M(X)=0\cdot 0{,}00366+1\cdot 0{,}07326+2\cdot 0{,}32967+3\cdot 0{,}43956+4\cdot 0{,}15385=$$
$$=0{,}07326+0{,}65934+1{,}31868+0{,}61540=2{,}66668$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=7{,}80958-7{,}11118=0{,}69840$$

$$M\left(X^2\right)=0^2\cdot 0{,}00366+1^2\cdot 0{,}07326+2^2\cdot 0{,}32967+3^2\cdot 0{,}43956+4^2\cdot 0{,}15385=$$
$$=0{,}07326+1{,}31868+3{,}95604+2{,}46160=7{,}80958$$

$$[M(X)]^2=2{,}66668^2\approx 7{,}11118$$

Числовые характеристики можно найти также по формулам

$$M(X)=n\frac{M}{N}=4\cdot\frac{10}{15}\approx 2{,}6667$$

$$D(X)=n\frac{M}{N-1}\cdot\frac{(N-M)\cdot(N-n)}{N^2}=4\cdot\frac{10}{14}\cdot\frac{5\cdot 11}{15^2}\approx 0{,}69841,$$

где N – число всех объектов; M – число объектов, обладающих определенным признакам; n – число извлекаемых объектов.

Задача 2. Студент успел подготовить 7 вопросов из 10 включенных в программу компьютерного тестирования. На тестировании студенту предлагается 5 вопросов, случайным образом выбранных из 10. Пусть X – число вопросов, подготовленных студентом среди 5 предложенных.

Построить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

Вероятность того, что среди пяти предложенных вопросов скажется ровно k подготовленных студентов (k = 2, 3, 4, 5) вычисляется по формуле

$$P(X=k)=\frac{C_7^k\cdot C_3^{5-k}}{C_{10}^5}.$$

x_i	2	3	4	5
p_i	0,08333	0,416667	0,416667	0,08333

$$M(X)=n\cdot\frac{M}{N}=5\cdot\frac{7}{10}=3{,}5$$

$$D(X)=n\frac{M}{N-1}\cdot\frac{(N-M)\cdot(N-n)}{N^2}=5\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3\cdot 5}{100}\approx 0{,}5833$$

3. Распределение Пуассона

Задача 1. Случайная величина X распределена по закону Пуассона, причем λ = 0,2. Постройте часть ряда распределения случайной величины X для m = 0, 1, 2, 3, 4.

Решение

x_i	0	1	2	3	4	…
p_i	0,8187	0,1638	0,0164	0,0011	0,0001	…

Задача 2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона, причем $\lambda = 0{,}8$. Постройте часть ряда распределения случайной величины X для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Решение

x_i	0	1	2	3	4	5	6	…
p_i	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	…

Задача 3. Случайная величина X распределена по закону Пуассона, причем $\lambda = 3$. Постройте часть ряда распределения случайной величины X для $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Решение

x_i	0	1	2	3	4	5	6	…
p_i	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	…

Вероятность $p(X = m)$ вычисляется по формуле Пуассона:

$$p(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k\ldots$$

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

4. Псевдогеометрическое распределение

Задача 1. Вероятность попадания в цель из винтовки при одном выстреле для некоторого стрелка равна 0,2. Стрелок имеет 6 патронов. Стрельба ведется до первого попадания в цель. Пусть случайная величина X – число израсходованных патронов. Построить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,08192	0,32768

$$\sum p_i = 1$$

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}128 + 4 \cdot 0{,}1024 + 5 \cdot 0{,}08192 + 6 \cdot 0{,}32768 =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}32 + 0{,}384 + 0{,}4096 + 0{,}4096 + 1{,}96608 = 3{,}68928$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 17{,}47488 - 13{,}610786 = 3{,}864094$$

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}16 + 3^2 \cdot 0{,}128 + 4^2 \cdot 0{,}1024 + 5^2 \cdot 0{,}08192 + 6^2 \cdot 0{,}32768 =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}64 + 1{,}152 + 1{,}6384 + 2{,}048 + 11{,}79648 = 17{,}47488$$

Задача 2. Вероятность наступления события A в каждом из независимых опытов равна 0,6. Опыты проводятся до первого наступления события A, но не более пяти раз. Пусть X – число опытов до первого наступления события A, включая успешный опыт. Построить ряд распределения случайной величины X. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,6	0,24	0,096	0,0384	0,0256

$$\sum p_i = 1$$

$$M(X) == 0{,}6 + 0{,}48 + 0{,}288 + 0{,}1536 + 0{,}128 = 1{,}6496$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 3{,}6784 - 2{,}72118 = 0{,}95722$$

$$M(X^2) == 0{,}6 + 0{,}96 + 0{,}864 + 0{,}6144 + 0{,}64 = 3{,}6784$$

$$[M(X)]^2 = 2{,}7211801$$

Вопросы к отчету

1. Определение дискретной случайной величины и основные способы ее задания (ряд распределения, многоугольник распределения, функция распределения). Свойство ряда распределения. Примеры дискретных случайных величин.
2. Функция распределения случайной величины. Определение и свойства функции распределения. Формула для определения значений функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины, ее обоснование. Вид графика функции распределения дискретной случайной величины.
3. Сумма и произведение дискретных случайных величин.

4. Определение и свойства математического ожидания $M(X)$ случайной величины X. Формулы для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины. Вывод свойств математического ожидания для дискретной случайной величины. Мода дискретной случайной величины.

5. Дисперсия $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины X. Их свойства, вывод свойств. Формулы для вычисления дисперсии и среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины.

6. Биноминальное распределение дискретной случайной величины: возможные значения и формула для соответствующих им вероятностей. Вывод формул для числовых характеристик биномиального распределения. Содержательные примеры использования этого типа распределения.

7. Распределение Пуассона: возможные значения и формула для соответствующих им вероятностей. Формулы для числовых характеристик распределения Пуассона. Распределение Пуассона как предельное для распределения Бернулли. Содержательные примеры использования распределения Пуассона.

8. Геометрические распределения (два случая): возможные значения и формулы для соответствующих им вероятностей (в каждом из случаев). Интерпретация случайных величин, имеющих геометрическое распределение. Формулы для математического ожидания и дисперсии. Аналогичные распределения с ограничением возможного числа испытаний (псевдогеометрические).

9. Гипергеометрическое распределение: возможные значения и формулы для соответствующих им вероятностей. Типичные ситуации, связанные с гипергеометрическим распределением. Ограничения на параметры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2007.

2. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2011.

3. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2006.

4. *Вентцель, Е. С.* Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983.

5. Случайные величины и законы их распределения : учеб. пособие / М. И. Андреева, Р. Е. Горелик, О. К. Чесноков, Н. В. Чигиринская ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2010.

6. Теория вероятностей и математическая статистика : Материалы к самостоятельной работе : учеб. пособие / И. Э. Симонова, В. Д. Савельев, Л. С. Сагателова, А. Б. Симонов ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2013.

7. Теория вероятностей. Задания для самостоятельной работы студентов : учеб. пособие / Л. Н. Феофанова, А. Е. Годенко, Л. А. Исаева, В. И. Кудряшов ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2010.