

תרגיל בית 6 - אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. חשבו את המכפלות מטריצות הבאות:

א.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & -12 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -7 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ג.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

2. מצאו את כל המטריצות $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ שמתחלפות עם המטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. מצאו את המטריצות הבאות:

א.

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 19 \\ 8 & 6 & 13 \\ -13 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T$$

ב.

$$\begin{pmatrix} 9-2i & 1+i & 5i & 1 \\ 3i & -8+2i & 4+i & 2-i \end{pmatrix}^*$$

4. תהי $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. מצאו את כל המטריצות $A \in M_3(\mathbb{R})$ עבורן $AB = A$.

5. תהא $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית. יהי $B = (1, x+1, x^2-x+1)$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$, כך ש- $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

מצאו את התמונה ואת הגרעין של T .

6. יהי \mathbb{F} שדה, ויהי $a \in \mathbb{F}$. נגדיר

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{pmatrix}$$

כאשר $A, B \in M_{n+1}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי $AB = aBA$ תוך שימוש בהעתקות $T_a, D: \mathbb{F}_n[x] \rightarrow \mathbb{F}_n[x]$ הנתונות על ידי

$$T_a(p)(x) = p(ax), \quad D(p)(x) = p'(x)$$