אלגברה לינארית 2א ~ תרגיל בית 4

שחר פרץ

28 בנובמבר 2025

(1)

(א) נמצא בסיס א"נ למרחב:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x + y = z + w \right\}$$

נתחיל מלמצוא בסיס כלשהו, ונעשה עליו גרהם־שמידט. די קל לראות שהוקטורים הבאים בסיס:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שכן אלו 3 וקטורים בת"ל שנמצאים ב־S, ו־$\dim S = 3$ בהכרח משום שהגבלנו דרגת חופש אחת (באופן שקול, וקטור מסויים קיים ב־S אמ"מ הוא בקרנל של המטריצה שמתארת את המשוואה, וזו מטריצה עם משוואה אחת מעל $\mathbb{R}^4$ כלומר הקרנל מממד 3). נבצע גרם שמידט עליהם, ננרמל תוך כדי. נתחיל מ־$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = (2^{-0.5}, 0, 2^{-0.5}, 0)$. נמצא ש־:

$$\tilde{u}_2 = v_2 - v_1 \cdot \underbrace{\langle v_1,\ u_2 \rangle}_{2^{-0.5} \cdot 0 \cdot 2 = 0} \cdot u_1 = v_2$$

ננרמל:

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{||\tilde{u}_2||} = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

עתה נמצא את הוקטור האחרון:

$$\tilde{u}_3 = v_3 - \langle v_3,\ u_2 \rangle u_2 - \langle v_3,\ u_1 \rangle u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ננרמל:

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{||\tilde{u}_3||} = \frac{\tilde{u}_3}{\sqrt{0.5^2 + (-0.5)^2}} = \frac{\tilde{u}_3}{1} = \tilde{u}_3$$

סה"כ קיבלנו:

$$(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

בסיס אורתונורמלי.

(ב) נעזר בטענה מהתרגול כדי לחשב את ההטלה של $(1,0,2,0)$ על התמ"ו הנ"ל.

נסמן ב־A מטריצה שעמודותיה הבסיס האורתונורמלי שמצאנו לעיל. מטענה מהתרגול, AA^T היא ההיטל האורתוגונלי על $S = \operatorname{Col} A$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ואז נקבל:

$$p_S(v) = AA^T(v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}(v)$$

ובפרט עבור $v = (1,0,2,0)$ נקבל:

$$p_S(v) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

וסיימנו.

(2)

נוכיח טענה מהתרגול: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ונניח שקיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ כך ש־$Av_1 \dots Av_n$ אורתונורמלי. אז נראה ש־$\forall v \in \mathbb{R}^n: \ ||Av|| = ||v||$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $(v_1 \dots v_n)$ בסיס א"נ כך שגם $(Av_1 \dots Av_n)$ א"נ. יהי $v \in V$. מהיות $v_1 \dots v_n$ בסיס קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש־$v = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$ אז:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \implies ||v||^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \overbrace{(v_i, v_i)}^{1}$$

$$||Av||^2 = \left\langle A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right), \ A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A(v_i), \ \sum_{i=1}^n \alpha_i A(v_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \underbrace{(Av_i, Av_i)}_{1}$$

מטרנזטיביות והוצאת שורש נקבל $||Av|| = ||v||$ כדרוש. ∎

(3)

נמצא את כל המטריצות האורתוגונליות האלכסוניות ב־$M_n(\mathbb{R})$.

נבחין שבהינתן $A \in M_n(\mathbb{R})$ אלכסונית, מהצורה $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, שורות A מתקבלות ע"י $[A]_i = \lambda_i \cdots e_i$ (כאשר $[A]_i$ השורה ה־i ב־A). ידוע שבמטריצה אורתונורמלית תנאי הכרחי ומספיק הוא ש־$\forall i \neq j: [A]_i \cdot [A]_j = \delta ij$.

הטיפול ב־$i \neq j$ מתקיים בכל מטריצה אלכסונית, שכן $[A]_i \cdot [A]_j = \lambda_i e_i \cdot \lambda_j e_j = (\lambda_i \lambda_j)(e_i \cdot e_j) = 0 \cdot \lambda_i \lambda_j = 0$. בעבור $i = j$ נקבל:

$$1 = [A]_i \cdot [A]_i = (\lambda_i e_i) \cdot (\lambda_i e_i) = (\lambda_i)^2 (e_i \cdot e_i) = \lambda_i^2 \implies |\lambda_i| = 1 \implies \lambda_i = \pm 1$$

סה"כ תנאי הכרחי ומספיק לכך ש־A אלכסונית היא אורתונורמלית, הוא ש־$A = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ מקיימת $\lambda_i = \pm 1$. כלומר, A תהיה מהצורה:

$$A = \operatorname{diag}\left((-1)^{a_1}, (-1)^{a_2} \dots (-1)^{a_n}\right)$$

בעבור $a_1 \dots a_n \in \{0,1\}$ כלשהם.

(4)

תהי T העתקה אורתונורמלית. נראה ש־T הפיכה.

הוכחה. מהיות T אורתונורמלית, המייצגת שלה בבסיס סטנדרטי $\mathcal{E}$ (ומעל ממ"פ ככלי, אותונורמלי) היא גם מטריצה אותונורמלית $[T]_{\mathcal{E}}$ כלשהי. בתרגול ראינו שעבור מטריצה אותונורמלית A, מתקיים $A^TA = I$, ובפרט $[T]_{\mathcal{E}}^T[T]_{\mathcal{E}} = I$, כלומר $[T]_{\mathcal{E}}$ הפיכה, וממשפט בלינארית 1א גם T הפיכה, וסיימנו. ■

(5)

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תמ"ו ותהי $p_U \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההטלה האורתונורמלית על U. נניח ש־p_U אותונורמלית. נראה ש־$U = \mathbb{R}^n$.

הוכחה. ידוע $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ולכן נותר להראות $\mathbb{R}^n \subseteq U$. יהי $v \in \mathbb{R}^n$. נבחין ש־$||v|| = ||p_U(v)||$ כי p_U אורתונורמלית (תוצאה משאלה 2). מהגדרת היטל, בעבור $u =: p_U(v)$ קיים $w \in U^\perp$ כך ש־$v = u + w$. נבחין ש־:

$$||v|| = ||p_U(v)|| = ||v + w|| = ||v|| + ||w|| \implies ||w|| = 0 \implies w = 0$$

כלומר $v = u \in U$ כלומר $v \in U$ וסה"כ $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כנדרש. ■

(6)

תהי $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה אורתונורמלית ויהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש־$T(U) \subseteq U$. נסמן $V = \mathbb{R}^n$.

הערה: אין לי מושג אם הגדרנו את זה עדיין או לא, אבל לצורך שאלה זו העתקה T היא W־שמורה אמ"מ $T(W) \subseteq W$.

(א) נוכיח ש־$T|_U \colon U \to U$ הפיכה.

הוכחה. הוכחנו בשאלה 4 ש־$[T]_B$ הפיכה בעבור B בסיס סטנדרטי. מכאן ש־T הפיכה. עתה נוכיח שהצמצום השמור מעליה הפיך גם הוא. נתבונן ב־$u_1 \dots u_k$ בסיס של U (נבחין $k = \dim U$) ונרחיבו לבסיס $u_1 \dots u_k, v_{k+1} \dots v_n$ בסיס של V. בגלל ש־T הפיכה ידוע ש־$Tu_1 \dots Tv_n$ בסיס, ובגלל ש־$u_1 \dots u_k \in U$ בהכרח $Tu_1 \dots Tu_k \in U$. נניח בשלילה קיום v_i כך ש־$Tv_i \in U$, ואז נקבל ש־$Tu_1 \dots Tu_k, Tv_i$ בסיס של $T(U) \subseteq U$ כלומר $k + 1 \leq \dim T(U) \leq \dim U = k$ וזו סתירה. מכאן ש־$u_1 \dots u_k$ קבוצה בת"ל מקסימלית כלומר בסיס של $T(U)$.

עתה, יהי $u \in U$. u בהכרח נוצר ע"י קומבינציה לינארית של הבסיס $Tu_1 \dots Tu_k$ ולכן:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T|_U u_i = T|_U \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i}_{v} \Bigg)$$

משום ש־v קומבינציה לינארית של $u_1 \dots u_k$ אז $v \in U$. סה"כ מצאנו $v \in U$ כך ש־$T|_U u = v$ לכל $u \in U$, כלומר $T|_U$ הפיכה. ■

(ב) נוכיח ש־$T(U^\perp) = U^\perp$.

הוכחה. יהי $v \in T(U^\perp)$. נראה $v \in U^\perp$. יהי $u \in U$. ידוע קיום $\tilde{u} \in U^\perp$ כך ש־$T(\tilde{u}) = v$. ידוע ש־$T^{-1} \colon V \to V$ מוגדר היטב כי T הפיכה (נימוקים זהים לאילו שהיו בסעיף הקודם).

$$0 = \tilde{u} \cdot T^{-1}u = T\tilde{u} \cdot T(T^{-1}u) = v \cdot u$$

כלומר $\forall u \in U \colon v \cdot u = 0$ וסה"כ $v \in U^\perp$ וסיימנו. ■

(ג) נמצא $S \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית U־שמורה כך ש־$S(U^\perp) \not\subseteq U^\perp$.

הוכחה. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$S(v) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \quad S(\lambda e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר S היא $\operatorname{span} e_1$ שמורה. אך, נבחין ש־:

$$\operatorname{span}(e_1)^\perp = \operatorname{span}(e_2) \quad S(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + e_2 \notin \operatorname{span}(e_2)$$

כנדרש מאיתנו. (הערה $n = 2$ והשתמשתי ב־U במקום ב־V שכן $V := \mathbb{R}^n$ בתחילת השאלה) ■

(7)

תהי $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ אורתונורמלית. נוכיח ש־$I + \frac{1}{2}T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ הפיכה.

הוכחה. נסמן $S = I + \frac{1}{2}T$. יהי $v \in V$. נניח $Sv = 0$. גם ידוע ש־$||Tv|| = ||v||$. נקבל:

$$0 = ||Sv|| = \left|\left|Iv + \frac{1}{2}Tv\right|\right| = ||v|| + \frac{1}{2}\overbrace{||Tv||} = 1.5\,||v|| \implies ||v|| = 0 \implies v = 0$$

סה"כ $Sv = 0 \implies v = 0$ כלומר $\ker S = \{0\}$ והיא חח"ע. משום ש־$S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מ"וים שווי־ממד, אז S הפיכה, כלומר $I + \frac{1}{2}T$ הפיכה כדרוש. ■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד