מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 11 - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך הגשה:	ניתן בתאריך:
334558962	שחר פרץ	30.1.2024	24.1.2024

תרגיל בית 11 - מערכות נציגים, היחס המשרה וחלוקה

שאלה 1

סעיף (א) - הפרכה

נתון: $R_2 = \{\langle\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\rangle \in A^2 \mid ad = cb\}$ כיחס שקילות מעל $A = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z} \mid b > 0\}$.

צ.ל. הקבוצה $\mathcal{B} := \{\langle a,1\rangle \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\langle 1,b\rangle \mid b \in \mathbb{Z} \wedge b > 0\}$ היא אינה מערכת נציגים של R_2

הוכחה: נשלול קיום נציג. נניח בשלילה ש־$\mathcal{B}$ הינה מערכת נציגים, ולכן בפרט מתוך רפלקסיביות יחס השקילות מתקיים $\exists\langle a,b\rangle \in \mathcal{B}.\langle a,b\rangle R_2\langle 2,3\rangle$, ובהתאם נבחר $\langle a,b\rangle$ מתאימים. ע"פ הגדרת האיברים ב־$\mathcal{B}$, נפלג למקרים:

- אם $a \in \mathbb{Z} \wedge b = 1$: ידוע $ad = cb$, ולכן $3a = 2b$. נציב ונקבל $3a = 2 \cdot 1$, נעביר אגפים ונקבל $a = 0.\bar{6}$ וזו סתירה להנחה $a \in \mathbb{Z}$.
- אם $a = 1 \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b > 0$: ידוע $ad = bc$ ולכן $3a = 2b$, נציב ונקבל $3 \cdot 1 = 2b$, נעביר אגפים ונקבל $b = 1.5$ וזו סתירה להנחה $b \in \mathbb{Z}$.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: נגדיר R_3 כיחס שקילות מעל $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$R_3 = \left\{\langle f,g\rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \mid \exists\delta > 0.\forall x \in (-\delta,\delta).f(x) = g(x)\right\}$$

צ.ל.: $ac := \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1).f(x) = 0\}$ אינה מערכת נציגים של R_3

הוכחה: נפריך יחידות. לשם כך, נוכיח קיום $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f,g \in \mathcal{A}$ כך ש־$fR_3h \wedge gR_3h$ אך $f \neq g$. נבחרם באופן הבא:

$$\mathrm{f} = \mathrm{h} = \lambda x \in \mathbb{R}.0,\ \mathrm{g} = \lambda x \in \mathbb{R}.\begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ x & \text{else} \end{cases}$$

הטענה fR_3h מתקיימת ישירות מתוך רפלקסיביות יחס השקילות R_3. נוכיח gR_3h: יהי נבחר $\delta = -1$, ויהי $x \in (-\delta, \delta)$, נוכיח $f(x) = g(x)$. לפי כלל β משום ש־$-1 < x < 1$, אזי $g(x) = 0$. באופן דומה $f(x) = 0$. סה"כ $f(x) = 0 = g(x)$ כדרוש.

עתה, נוכיח $f, g \in \mathcal{A}$. באופן שקול, משום שידוע $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, יהי $-1 < x < 1$, נוכיח $f(x) = 0$. הטענה הזו נכונה ישירות מכלל β ופילוג למקרים בהתאם לטווח של x.

לסיום, נוכיח $f \neq g$, או באופן שקול לפי כלל η, נוכיח $\exists x \in \mathbb{R}.f(x) \neq g(x)$. נבחר $x = 2$, לפיכך מתוך כלל β ופירוק למקרים נראה $f(x) = 0 \neq x = g(x)$ וסה"כ $f(x) \neq g(x)$, כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

שאלה 2

סעיף (א)

נתון: נתון Res יחס שקילות מעל $\mathbb{R}$, המוגדר באופן הבא: $\forall a, b \in \mathbb{R}.aResb \iff b - a \in \mathbb{Z}$

צ.ל.: $[0, 1)$ קבוצת נציגים של Res

הוכחה:

- קיום: יהי $r \in \mathbb{R}$, נוכיח קיום $a \in [0, 1]$ כך ש־$rResa$. באופן שקול (שכן $a \in \mathbb{R}$), נמצא a שבעבורו $r - a \in \mathbb{Z}$. נתבונן ב־$a = r - \lfloor r \rfloor$. יש להוכיח כמה דברים: ראשית, נוכיח $r - a \in \mathbb{Z}$, ושנית, $a \in [0.1)$. לפנות כל, נציב ונקבל ש־$r - a = r - (r - \lfloor r \rfloor) = 0 + \lfloor r \rfloor = \lfloor r \rfloor \in \mathbb{Z}$. שנית, לפי הגדרה, ידוע $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$, נעביר אגפים ונקבל $-1 < \lfloor r \rfloor - r \leq 0$, נכפיל ב־$-1$ וסה"כ $0 \geq r + \lfloor r \rfloor > 1$, וסה"כ נציב ונקבל $0 \leq a < 1$ ולכן $r \in [0, 1)$ כדרוש.
- יחידות: יהיו $a, b \in [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$, ויהי $r \in \mathbb{R}$, נניח $aResr \land bResr$ ולכן $r - a \in \mathbb{Z} \land r - b \in \mathbb{Z}$, נוכיח $a = b$. נניח בשלילה $a \neq b$. נפלג למקרים: אם $r - a = r - b$, אז נעביר אגפים ונקבל $a = b$, וזו סתירה להנחת השלילה, לכן $r - a \neq r - b$. נחסר את $r - b$ משני האגפים, ונקבל $b - a \neq 0$. משום ש־$r - a, r - b \in \mathbb{Z}$ וכי חיסור שלמים שלם, אז $b - a \in \mathbb{Z}$. אם ידוע לא יתכן ש־a, b שניהם 1, כי אז $b = a$, ובה"כ $a \neq 1$, על בסיס הנתון $a < 1$, ועם עוד אלגברה נגיע לכך ש־$1 > b - a > 0$, ולכן $b - a \notin \mathbb{Z}$ (כי אין עוד מספרים שלמים בין 0 ל־1) והגענו לסתירה.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: יהי $E \subseteq \mathbb{N}$ קבועה, נגדיר $R_1 = \{\langle C, D \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid C \cap E = D \cap E\}$ כיחס שקילות מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

צ.ל.: $\mathcal{P}(E)$ קבוצת נציגים של R_1

הוכחה:

- קיום נציג: יהי $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח קיום $A \in \mathcal{P}(E)$ כך ש־AR_1N, ובאופן שקול $A \cap E = N \cap E$. נבחר $A = N \cap E$, וסה"כ צ.ל. $N \cap E \cap E = N \cap E$. בה"כ A, B קבוצות, נוכיח $A \cap B \cap B = A \cap B$:

$$\begin{aligned}
&A \cap B \cap B \\
\iff &\forall x. x \in A \wedge x \in A \wedge x \in B \\
\iff &\forall x. x \in A \wedge x \in B \iff x \in A \cap B
\end{aligned}$$

וסה"כ בפרט $N \cap E \cap E = N \cap E$ כדרוש.

- יחידות: יהי $A, B \in \mathcal{P}(E)$, ויהי $N \in \mathcal{P}(N)$, נניח $AR_1N \wedge BR_1N$, ונוכיח $A = B$. מתוך ההנחה $A \cap E = N \cap E \wedge B \cap E = N \cap E$, ולכן מטרנזיטיביות שוויון קבוצות $A \cap E = B \cap E$. משום ש־$A \in \mathcal{P}(E)$ אז $A \subseteq R$, ולכן $A = A \cap E \wedge B = B \cap E$ וסה"כ $A = B$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 3

נתון

נתון יחס השקילות מעל $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדר באופן הבא:

$$S = \left\{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \right\}$$

סעיף (א)

צ.ל. מחלקת השקילות של $\langle 2, 3 \rangle$, כלומר כל המספרים שמקיימים $x_1^2 + y_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, כלומר הקבוצה $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$, או במילים אחרות, כל השוקיים $|x_1|, |x_2|$ של משולש ישר זווית עבורם היתר היא באורך $\sqrt{13}$, או בניסוח אחר, לפי נוסחת מעגל, אלו כל הנקודות על מעגל שמרכזו $\langle 0, 0 \rangle$ ורדיוסו $\sqrt{13}$.

סעיף (ב)

צ.ל.: $A := \{\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\} \mid c \in \mathbb{R}\}$ היא החלוקה המושרית של $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המושרית מ־S

הוכחה: לפי הזהות $R_{A/S} = S$, צ.ל. ש־A קבוצת המנה של S, ובאופן שקול, נוכיח ש־$A = \mathbb{R}^2/S := \{[x]_R \mid x \in A\}$.
נוכיח באמצעות רצף מעביר זהות:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2/S \\
=&\{[x]_S \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} && (A/R \text{ definition}) \\
=&\{\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a, b \rangle S \langle x, y \rangle\} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2\} && ([x]_R \text{ definition}) \\
=&\{\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = x^2 + y^2\} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} && (S \text{ definition}) \\
=&\{\{\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = c\} \mid c \in \mathbb{R}\} && (\ell et\ c = x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

סעיף (ג)

צ.ל.: הקבוצה $\mathcal{F} = \{\langle a, r \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0 \wedge a = 0\}$ היא מערכת הנציגים ליחס השקילות S

הוכחה:

- קיום נציג: יהי $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2$, נוכיח קיום $\langle a,b\rangle \in \mathcal{F}$ כך ש־$\langle a,b\rangle S\langle x,y\rangle$, ובאופן שקול צ.ל. קיום $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$a^2+b^2=x^2+y^2$. תנאי הקיום $\langle a,b\rangle \in \mathcal{F}$ מתקיים אמ"מ $a=0, b\in\mathbb{R}, b>0$ מתוך עקרון ההפרדה. לכן, צ.ל. $0^2+b^2=x^2+y^2$. נבחר $b=\sqrt{x^2+y^2}$ (שגדול מ־0 כי $\sqrt{\ }$ היא פונקציה שטווחה $R_{\geq 0}$), ולכן סה"כ $0+b^2=x^2+y^2=x^2+y^2$ כדרוש.
- יחידות: יהי $\langle a_1,b_1\rangle, \langle a_2,b_2\rangle \in \mathcal{F}$, ובאופן שקול $a_1=a_2=0 \wedge b_1,b_2\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, ויהי $\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, נניח $\langle a_1,b_1\rangle S\langle x,y\rangle \wedge \langle a_2,b_2\rangle S\langle x,y\rangle$, ונוכיח $\langle a_1,b_1\rangle = \langle a_2,b_2\rangle$, שלפי התכונה המרכזית של זוג סדור שקול לכך ש־$a_1=a_2\wedge b_1=b_2$, כאשר התנאי הראשון כבר מתקיים. על בסיס ההנחה, $a_1^2+b_1^2=x^2+y^2+a_2^2+b_2^2$ ולכן נציב ונקבל סה"כ מתוך טרנזיטיביות שוויון $b_1^2=b_2^2$, ידוע $b_1,b_2>0$ ולכן נוכל להוציא שורש ולקבל $b_1=b_2$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 4

תהי קבוצה A, ויהיו Π_1,Π_2 שתי חלוקות של A. נניח $\Pi_1\subseteq\Pi_2$, ונוכיח $\Pi_1=\Pi_2$.

ראשית כל, נוכיח טענה פשוטה הדרושה להמשך ההוכחה: יהיו A,B קבוצות, נוכיח $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$. נוכיח זאת בעזרת מעברי שקילות:

$$\begin{aligned}
& x\in(A\cap B)\cup(A\setminus B) \\
\iff & (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\vee x\notin B) && (\cup,\cap,\setminus \text{ definitions}) \\
\iff & x\in A\vee(x\in B\wedge x\notin B) && (\text{De Morgan}) \\
\iff & x\in A\vee F \iff x\in A \qquad \mathscr{Q.E.F.}
\end{aligned}$$

עתה, ניגש להוכחה. נניח בשלילה שאין שוויון, ולכן על בסיס ההנחה נסיק $\Pi_2\not\subseteq\Pi_1$. ע"פ הגדרת הכלה, קיים $\pi\in\Pi_2$ כך ש־$\pi\notin\Pi_1$, ובאופן שקול, $\pi\in\Pi_2\setminus\Pi_1$. כחלק מהגדרת חלוקה, $\pi\neq\emptyset$, ולכן נוכל לבחור $a_1\in\pi$. ידוע $\Pi_2=(\Pi_2\cap\Pi_1)\cup(\Pi_1\setminus\Pi_2)$, ומשום ש־$\Pi_1\subseteq\Pi_2$ אז $\Pi_2\cap\Pi_1=\Pi_1$. סה"כ $\Pi_2=\Pi_1\cup(\Pi_1\setminus\Pi_2)$. ידוע $\biguplus\Pi_1=A=\biguplus\Pi_2$, ולכן מהגדרת $\bigcup$ נסיק $\forall a\in A.\exists\pi_1\in\Pi_1,\pi_2\in\Pi_2.a\in\pi_1\wedge a\in\pi_2$. ידוע $\Pi_2\subseteq\mathcal{P}(A)$, לפי הגדרה, ולכן $\pi\in\mathcal{P}(A)$ וסה"כ $a_1\in A$, כלומר קיים $\pi_1\in\Pi_1$ כך ש־$a_1\in\pi_1$. משום ש־$\Pi_1\subseteq\Pi_2$ אז $\pi_1\in\Pi_2$, ולכן כחלק מהגדרת חלוקה π_1,π קבוצות זרות, משמע $\pi_1\cap\pi=\emptyset$, ובאופן שקול $x\in\emptyset\longleftrightarrow x\in\pi\wedge x\in\pi_1$, אך לכך ש־$a_1\in\pi\wedge a_1\in\pi_1$, ולכן $a_1\in\emptyset$ המהווה סתירה לפי הגדרת $\emptyset$.

שאלה 5

סעיף (א)

תת־סעיף (i)

נתון: תהי $A\neq\emptyset$ קבוצה, Π חלוקה של A

צ.ל.: R_Π הוא יחס שקילות על A

הוכחה:

- רפלקסיביות: יהי $a \in A$, נוכיח $\langle a,a\rangle \in R_\Pi$, כלומר שקיים $\pi \in \Pi$ כך ש־$\langle a,a\rangle \in \pi \times \pi$, ובאופן שקול צ.ל. $a \in \pi$. ידוע שלכל $a \in A$ קיים $a \in \tilde{\pi} \in \Pi$, נבחר $\pi = \tilde{\pi}$, וסה"כ $a \in \pi$ כדרוש.

- סימטריות: יהי $a,b \in A$, נניח $aR_\Pi b$, ונוכיח $bR_\Pi a$, ובאופן שקול, נוכיח קיום $\pi_b \in \Pi$ כך ש־$\langle b,a\rangle \in \pi_b \times \pi_b$. מתוך ההנחה, קיים $\pi_a \in \Pi$ כך ש־$\langle a,b\rangle \in \pi_a \times \pi_a$, כלומר $a \in \pi_a \wedge b \in \pi_a$. נבחר $\pi_b = \pi_a$, ונניח בשלילה $\langle b,a\rangle \notin \pi_a^2$, ובאופן שקול $a \notin \pi_a \vee b \notin \pi_a$, וסה"כ זו סתירה, כלומר $\langle b,a\rangle \in \pi_b^2$ כדרוש.

- טרנזיטיביות: יהי $a,b,c \in A$, נניח $aR_\Pi b \wedge bR_\Pi c$, ונוכיח $aR_\Pi c$. מתוך ההנחה קיימים $\pi_1,\pi_2 \in \Pi$ כך ש־ $\langle a,b\rangle \in \pi_1 \times \pi_1 \wedge \langle b,c\rangle \in \pi_2 \times \pi_2$, ובאופן שקול $a \in \pi_1 \wedge b \in \pi_1 \wedge b \in \pi_2 \wedge c \in \pi_2$. משום ש־ $b \in \pi_1 \wedge b \in \pi_2$ נגרר $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, לפיכך $\pi_1 = \pi_2$ (כחלק מההגדרה של חלוקה). סה"כ $a \in \pi_2 \wedge c \in \pi_2$, אזי $\langle a,c\rangle \in \pi_2 \times \pi_2$ ולכן קיים $\pi_2 = \pi \in \Pi$ כך ש־$\langle a,c\rangle \in \pi \times \pi$, השקול לכך ש־$\langle a,c\rangle \in R_\Pi$ מהגדרת $\bigcup$, וסה"כ $aR_\Pi c$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

תת־סעיף (ii)

צ.ל.: $A/(R_\Pi) = \Pi$

הערה: קבוצת המנה של החלוקה המושרית מוגדרת היטב כי בסעיף הקודם הוכח כי החלוקה המושרית היא יחס שקילות.

הוכחה: ראשית כל, נוכיח טענת עזר. יהי $x \in A$, ותהי קבוצה $x \in X \in \Pi$. נוכיח $X = [x]_{R_\Pi}$.

- יהי $y \in X$, נוכיח $y \in [x]_{R_\Pi}$. באופן שקול, נרצה להוכיח ש־$yR_\Pi x$. משום ש־$X \in \Pi$, אז $X \times X \subseteq R_\Pi$ (כי הוא חלק מהאיחוד המוכלל). משום שידוע $X \wedge x \in X$ $y \in$, אזי $\langle x,y\rangle \in X \times X$ ולפי הגדרה $\langle x,y\rangle \in R_\Pi$ כלומר $xR_\Pi y$ כדרוש.

- יהי $y \in [x]_{R_\Pi}$, נוכיח $y \in X$. לפי הגדרת מחלקת השקילות, $\langle x,y\rangle \in R_\Pi$. מתוך הגדרת איחוד מוכלל והגדרת היחס המושרה, נמצא שקיימת קבוצה $Y \in \Pi$ המקיימת $\langle x,y\rangle \in Y \times Y$, ובאופן שקול $x,y \in Y$. נניח בשלילה $X \neq Y$, ידוע $x \in Y \wedge x \in X$ כלומר $x \in Y \cap X \neq \emptyset$ וזו סתירה להיותן בחלוקה Π. סה"כ מהצבה $y \in X$ כדרוש.

עתה, נפנה להוכיח את אשר צ.ל.: $A/(R_\Pi) = \Pi$. נוכיח זאת באמצעות הכלה דו־כיוונית.

- יהי $[x]_{R_\Pi} \in A/(R_\Pi)$ (קיומו של $x \in A$ מתאים נובע מהגדרתה של קבוצת המנה). נוכיח $[x]_{R_\Pi} \in \Pi$. תהי קבוצה $X \in \Pi$ המקיימת $x \in X$ (קבוצה כזו קיימת כי אם נניח בשלילה שהיא אינה קיימת, נקבל שקילות לכך ש־$x \notin \bigcup \Pi$, ולכן $A \subsetneq \bigcup \Pi$ וזו סתירה). לפי טענת העזר, $X = [x]_{R_\Pi}$, ומשום ש־$X \in \Pi$ סה"כ $[x]_{R_\Pi} \in \Pi$ כדרוש.

- יהי $X \in \Pi$, נוכיח $X \in A/(R_\Pi)$. באופן שקול, צ.ל. $\exists \tilde{x} \in A.[\tilde{x}]_{R_\Pi} = X$. מתוך ההנחה X בחלוקה Π, נסיק $X \neq \emptyset$. לכן, קיים לפחות איבר יחיד ב־X, נסמנו $x \in X$, ומהגדרת החלוקה גם $x \in A$. נבחר את $\tilde{x}$ להיות x, ונוכיח $[x]_{R_\Pi} = X$, אשר מהווה פסוק אמת לפי טענת העזר, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: תהי A קבוצה, ויהי S יחס שקילות מעליה

צ.ל.: $R_{A/S} = S$

הוכחה: נסתמך על סעיף 5(א)(i) על מנת להסיק ש־$R_{A/S}$ יחס שקילות. מכאן ואילך, נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.

- יהי $\langle x,y\rangle \in A$, נניח $\langle x,y\rangle \in R_{A/S}$, ולפי הגדרת מכפלה קרטזית $x,y\in A$. נוכיח $\langle x,y\rangle \in S$. לפי ההנחה, קיימת $X\in A/S$ כך ש־$\langle x,y\rangle \in X\times X$ כלומר $x\in X\wedge y\in X$. מתוך העובדה של $X\in A/S$ נסיק קיום $z\in A$ כך ש־$X=[z]_S$. סה"כ מהגדרת מחלקת השקילות נסיק $xSz\wedge ySz$, מסימטריות וטרנזיטיביות יחס השקילות S סה"כ xSy כלומר $\langle x,y\rangle \in S$ כדרוש.
- יהי $\langle x,y\rangle \in S$, נוכיח $\langle x,y\rangle \in R_{A/S}$. ידוע $x\in[y]_S$, וידוע $X:=[y]_S\in A/S$, ולכן סה"כ $X\times X\subseteq R_{A/S}$ (לפי הגדרה). נרצה משום ש־$x\in X\wedge y\in X$, באופן שקול $\langle x,y\rangle\in X\times X$, ולכן מהגדרת הכלה $\langle x,y\rangle \in R_{A/S}$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 6

סעיף (א)

נתון: תהי X קבוצה, יהיו S,T חלוקות של X, $U=\{A\cap B\colon A\in S\wedge B\in T\}\setminus\{\emptyset\}$

צ.ל.: U חלוקה של X

הוכחה: נוכיח את שלושת התנאים ההכרחיים ומספקים לכך ש־U חלוקה:

- $\emptyset\notin U$: נכון ישירות מהגדרת U והגדרת $\setminus$ ש־$\forall x\in U. x\neq\emptyset$, ובאופן שקול $\emptyset\notin U$.
- $\forall x,y\in U. x\neq y \implies x\cap y=\emptyset$: נניח $x\neq y$, ונוכיח $x\cap y=\emptyset$. לפי הנתון $x,y\in U$ נסיק מעקרון ההחלפה קיום $A_x,A_y\in S\wedge B_x,B_y\in T$ כך ש־$x=A_x\cap B_x\wedge y=A_y\cap B_y$. נניח בשלילה ש־$A:=A_x=A_y\wedge B:=B_x=B_y$, לפיכך נציב ונקבל מטרנזיטיביות $x=y=A\cap B$ וזו סתירה. מדה־מורגן, בה"כ $A_x\neq A_y$ (שכן ההגבלות על A_x,A_y ו־B_x,B_y זהות), ומהיות S חלוקה, נסיק $A_x\cap A_y=\emptyset$. כדי להוכיח $x\cap y=\emptyset$, נשתמש בהכלה דו כיוונית: $\emptyset\subseteq x\cap y$ מתקיים באופן ריק, ועל כן יהי $a\in x\cap y$, כלומר $a\in x\wedge a\in y$, ונראה סתירה (שקול לכך ש־$x\in\emptyset$). נציב ונקבל $a\in A_x\cap B_x\wedge a\in A_y\cap B_y$, ובפרט $a\in A_x\wedge a\in A_y$, ולכן $a\in A_x\cap A_y$ וסה"כ $A_x\cap A_y\neq\emptyset$ וזו סתירה.
- $\biguplus_{x\in U} x = X$: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:
  - $\biguplus_{x\in U} x\subseteq X$: יהי $a\in\biguplus U$, כלומר קיים $x\in U$ כך ש־$a\in x$, ונוכיח $a\in X$. לפי הנתון $x\in U$, נסיק שקיימות קבוצות $A\in S, B\in T$ כך ש־$x=A\cap B$. משום ש־$a\in x$, אז $a\in A\cap B$ ולכן $a\in A$, ומשום ש־$a\in S$ וגם S חלוקה על X אז $S\in\mathcal{P}(X)$ ולכן $S\subseteq X$ ונגרר $a\in X$ כדרוש.
  - $X\subseteq\biguplus_{x\in U} x$: יהי $a\in X$, נוכיח $a\in\biguplus_{x\in U} x$, כלומר את קיום $x\in U$ כך ש־$a\in x$. באופן שקול, נרצה להוכיח קיום קבוצות $A\in S, B\in T$ בחלוקה, כך ש־$a\in x=A\cap B$. ההגבלות על A ו־B שקולות לכך ש־$S,T\in\mathcal{P}(X)$ ששקול ל־$A,B\in X$, וגם $A,B\neq\emptyset$ (זאת כי לא נתון מידע על קבוצות נוספות ב־S,T). נבחר $a\in A,B$, וידוע שקיימות קבוצות כאלו ב־S,T מתוך העובדה ש־$\bigcup S,T=X$, ולכן לכל $x\in X$ מתקיים קיום $x\in A,B\in S,T$ בהתאמה, בפרט עבור $a=x$. סה"כ $a\in A\cap B$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: יהיו R_S, R_t, R_U יחסי שקילות המושרים מהחלוקות S, T, U

צ.ל.: $R_S \cap R_T = R_U$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית

- יהי $x \in R_U$, נוכיח $x \in R_S \wedge x \in R_T$, או בניסוח שקול, נוכיח קיום $s \in S, t \in T$ כך ש־$x \in s^2 \wedge x \in t^2$. מתוך ההנחה, קיים $u \in U$ כך ש־$x \in u^2$. משום ש־$u \in U$, אזי קיימות $A \in S, B \in T$ לא ריקות כך ש־$u = A \cap B$. סה"כ $x \in A \wedge x \in B$. נבחר $s = A, t = B$, המקיימים את ההגבלות המתאימות, ולכן, כי $u \subseteq A$, $u^2 \subseteq A^2$, וכנ"ל על B, אז $x \in s^2 \wedge x \in t^2$ כדרוש.
- יהי $x \in R_S \cap R_T$, כלומר $x \in R_S \wedge x \in R_T$, נוכיח $x \in R_U$. באופן שקול, נניח שקיימות $s \in S, t \in T$ כך ש־$x \in s^2 \wedge x \in t^2$, ונוכיח קיום $u \in U$ כך ש־$x \in u^2$. נבחר $u = s \cap t$ נסמן $x = \langle a, b \rangle$, כלומר $a \in u \wedge b \in u$. משום ש־$u \in U$, יש לוודא שקיימות $A \in S, B \in T$ כך ש־$u = A \cap B$. נשים לב שטענה זו מתקיימת כי $s \in S \wedge t \in T$. סה"כ $u \in U$. עתה, נוכיח $x \in u^2$. משום ש־$x \in s^2 \wedge x \in t^2$, אזי $a \in s, t \wedge b \in s, t$ וסה"כ $a, b \in s \cap t = u$ ולכן $\langle a, b \rangle \in u^2$, כלומר $x \in u^2$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 7

הגדרה

יהיו S, T חלוקות של A. נגדיר S עידון של T אמ"מ $\forall X \in S. \exists Y \in T. X \subseteq Y$

סעיף (א)

טענה: $\Pi_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ ו־$\Pi_2 = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ חלוקות של $\{1,2,3,4\}$, ו־Π_1 עידון של Π_2.

סעיף (ב)

נתון: תהי קבוצה A, ויהיו R_1, R_2 יחסי שקילות מעל A

צ.ל.: A/R_1 עידון של A/R_2 אמ"מ $R_1 \subseteq R_2$

הוכחה: נוכיח את כל אחת מהגרירות בנפרד.

- נניח A/R_1 עידון של A/R_2, כלומר לכל $X \in A/R_1$ מתקיים קיום $Y \in A/R_2$ כך ש־$X \subseteq Y$. נוכיח $R_1 \subseteq R_2$. ידוע שקבוצת המנה היא חלוקה, ולכן עידון מוגדר. יהי $\langle a, b \rangle \in R_1$ נבחר בה"כ $r = a$. נתבונן ב־$[r]_{R_1}$, המוגדר לכל $r \in A$. נסיק, $[r]_{R_1} \in A/R_1$, לפי הגדרת קבוצת המנה בעקרון ההחלפה. מתוך ההנחה, קיים $Y \in A/R_2$ כך ש־$[r]_{R_1} \subseteq Y$. ע"פ הגדרת קבוצת המנה A/R_2, סה"כ קיים איזשהו $x \in A$ כך ש־$Y = [x]_{R_2}$, כלומר $[r]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$. ידוע aR_1b, כלומר $a, b \in [r]_{R_1}$, ולכן מהגדרת הכלה $a, b \in [x]_{R_2}$, כלומר $bR_2x \wedge aR_2x$, וסה"כ מסימטריות וטרנזיטיביות נקבל aR_2b כלומר $\langle a, b \rangle \in R_2$ כדרוש.

- נניח $R_1 \subseteq R_2$, ונוכיח A/R_1 עידון של A/R_2. יהי $X \in A/R_1$, נוכיח קיום $Y \in A/R_2$ כך ש־$X \subseteq Y$. ע"פ הגדרת קבוצת המנה, קיים $x \in A$ כך ש־$X = [x]_{R_1}$. נבחר את Y להיות $Y = [x]_{R_2}$, ומשום ש־$x \in A$ אז $Y \in A/R_2$ (כלומר Y מקיים את כל ההגבלות הדרושות, וזו בחירה חוקית). צ.ל. $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$; יהי $a \in [x]_{R_1}$, נוכיח $a \in [x]_{R_2}$. ידוע $\langle a, x \rangle \in R_1$, ע"פ הגדרת הקבוצה $[x]_{R_1}$ באמצעות עקרון ההפרדה. מתוך ההנחה $R_1 \subseteq R_2$, סה"כ $\langle a, x \rangle \in R_2$, ולכן ע"פ הגדרה $a \in [x]_{R_2}$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

שאלה 8 (רשות)

נבחר: נבחר את $\Pi = A \cup \{\mathbb{N} \setminus \bigcup A\}, A := \{\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \mid p \in P\}$ כאשר P קבוצת הטבעיים הראשוניים, ונטען את R_Π להיות יחס שקילות בעל אינסוף מחלקות שקילות אינסופיות.

צ.ל.: R_Π מוגדר היטב (כלומר Π חלוקה), R_Π בעל אינסוף מחלקות שקילות אינסופיות.

הוכחה: אין לי זמן להוכיח את זה, וזה רגיל רשות כך או אחרת.