מתמטיקה בדידה - שחר פרץ - תרגיל בית 9

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

ת.ז.: 334558962

תאריך הגשה: 12.1.2024

~~~ תרגיל בית 9 ~~~

שאלה 1

סעיף א׳ - הוכחה לתקן

נתון: f הפיכה משמאל

צ.ל.: להוכיח את היחידות ההופכית משמאל של f

הוכחה: תהי פונקציה $f\colon A \to B$ הפיכה משמאל, ויהיו $g_1, g_2\colon B \to A$ הופכיות משמאל של f, נוכיח $g_1 = g_2$. נתון:

$$g_1, g_2 \circ f = id_A$$

לפי כלל η:

$$(\forall x \in A. g_1 f((x)) = x) \land (\forall x \in A. g_2(f(x)) = x)$$

או באופן שקול, לפי חוק $\forall x. A \land B \iff \forall x. A \land \forall x. B$ והצבה:

$$\forall x \in B. g_1(f(x)) = g_2(f(x))$$

סה"כ כל גודל שווה לעצמו לכן $f(x) = f(x) = y \in B$ ולכן $\forall y \in B. g_1(y) = g_2(y)$ ולפי כלל η מתקיים $g_1 = g_2$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב׳ - סתירה

נתון: f הפיכה מימין

צ.ל.: סתירת יחידות קיום הופכית מימין של f

הוכחה: נסתור ע"י הבאת דוגמה נגדית. נבחר פונקציה $f = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$, וכמו כן $A = \{0,1\}$ ו־$B = \{0\}$. נבחר $g_1 = \{\langle 0,0\rangle\}, g_2 = \{\langle 0,1\rangle\}$. נניח בשלילה $g_1 = g_2$, נקבל $\langle 0,0\rangle = \langle 0,1\rangle$ כלומר לפי התכונה המרכזית $1 \neq 0$ וזו סתירה, סה"כ $g_1 \neq g_2$. כמו כן, $g_1, g_2 \in B \to A$ וגם $g_1 \circ f = \{\langle 0,0\rangle\} = id_B = g_2 \circ f$, כלומר הראשי מתקיים אך הנגרר לו וזו סתירה.
~~~

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ג' - סתירה

צ.ל.: לסתור קיום $g: B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A$ אמ"מ f הפיכה.

הוכחה: נסתור את הגרירה בין הקיום לטענה ש־f הפיכה. נמצא דוגמה נגדית. נבחר $f = \{\langle 0, 0\rangle\}$ אך נבחר את B להיות $\{0, 1\}$. נוכיח שהנגרר פסוק שקר:

> נניח בשלילה f הפיכה משמאל, נסיק קיום g כך ש־$f \circ g = id_B$, ולפי כלל אטא, $f(g(0)) = 0 \wedge f(g(1)) = 1$. זו סתירה כי לא קיים אף ערך (בפרט $g(1)$) עבורו $f(x) = 1$, ע"פ הגדרתה. סה"כ f אינה הפיכה משמאל והנגרר פסוק שקר.

נוכיח שהראשי פסוק אמת:

> נבחר $g = \{\langle 0, 0\rangle\}$, כלומר $g \circ f = \{\langle 0, 0\rangle\} = id_A$ משמע הראשי מתקיים, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ד' - סתירה

צ.ל.: לסתור קיום $g: B \to A$ אמ"מ $f \circ g = id_B$ אמ"מ f הפיכה.

הוכחה: נסתור את הגרירה בין הקיום לטענה ש־f הפיכה. נמצא דוגמה נגדית. נבחר $f = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ ונבחר $B = \{0\}$. הפונקציה אינה חח"ע, אמ"מ היא אינה הפיכה משמאל (לפי סעיף (1)(ה) שהוכח בלי גרירה מטענה זו), כלומר f אינה הפיכה משמאל ובפרט לא הפיכה כלל והנגרר פסוק שקר. נבחר $g = \{\langle 0, 0\rangle\}$, כלומר $f \circ g = \{\langle 0, 0\rangle\} = id_B$ משמע הראשי מתקיים, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ה' - הוכחה

צ.ל.: f חח"ע אמ"מ קיימת פונקציה $g: B \to A$ וגם $g \circ f = id_A$ (או בנוסח שקול ע"פ הגדרה: f הפיכה משמאל).

הוכחה: נוכיח את כל אחת מהגרירות בנפרד.

- גרירה ראשונה: נניח f חח"ע ונוכיח קיום $g: B \to A$ עבורה $g \circ f = id_A$. ידוע f חח"ע וכמו כן ידוע (לפי הגדרה) ש־f מלאה ב־$\operatorname{Im}(f)$, לכן f^{-1} פונקציה על $\operatorname{Im}(f)$. נבחר $g = f^{-1}$. נוכיח $g \circ f = id_A$, באמצעות כלל η:
  - שוויון תחום: f מלאה ב־A ע"פ הגדרתה, ולכן $g \circ f$ מלאה ב־A לפי משפט נתון, וכמו כן על id_A, סה"כ $\operatorname{dom}(id_A) = \operatorname{dom}(g \circ f)$.
  - שוויון איברים: יהי $x \in A$, נוכיח $(g \circ f)(x) = id_A(x)$. ע"פ הגדרת הפונקציות, צ.ל. באופן שקול $g(f(x)) = x$. נתבונן ב־$y := f(x)$, שע"פ הגדרה נמצא ב־$\operatorname{Im}(f)$, ולכן $g(y)$ מוגדר, כמו כן לפי הגדרת פונקציה הופכית $f(g(y)) = x$ ומשום ש־f חח"ע סה"כ $g(y) = x$ כדרוש.
- גרירה שנייה: נניח קיום פונקציה $g: B \to A$ ההופכית משמאל, ונוכיח f חח"ע. נניח בשלילה ש־f לא חח"ע, אזי קיימים $a_1, a_2 \in A \wedge a_1 \neq a_2$ עבורם $f(a_1) = f(a_2)$. ע"פ הגדרת פונקציה הופכית $g \circ f = id_A$, או בנוסח שקול לפי כלל η, הרכבת פונקציות והגדרת יחס הזהות, $\forall a \in A. g(f(a)) = a$, ובפרט על a_1, a_2, כלומר

$g(f(a_1)) = a_1 \wedge g(f(a_2)) = a_2$. מהנחת השלילה $y := f(a_1) = f(a_2)$ לכן $g(y) = a_2 \wedge g(y) = a_1$, כלומר g לא ח"ע ונגרר g לא פונקציה וזו סתירה.

$\mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare$

שאלה 2

סעיף א'

נתון:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5+1}, f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר פונקציה הופכית $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ וגם $g(x) = \sqrt[5]{x^3-1}$. נוכיח את שני התנאים שיחדיו הכרחיים ומספיקים (את שניהם אוכיח באמצעות כלל η):

- נוכיח $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= \sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{x^5+1}\right)^3 - 1} \\ &= \sqrt[5]{x^5 + -1} = x \\ &= id_{\mathbb{R}}(x)\end{aligned}$$

- נוכיח $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= \sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{x^3-1}\right)^3 + 1} \\ &= \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1} = x \\ &= id_{\mathbb{R}}(x)\end{aligned}$$

$\mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare$

סעיף ב'

נתון:

$$f = \lambda \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 . \langle x+y, x-y \rangle, f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת לפי $g = \lambda \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 . \langle x-y, x+y \rangle$. נוכיח לפי ההגדרה של פונקציה הפיכה (בשני המקרים אשתמש בכלל η):

- $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$:

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(\langle x,y\rangle) = g(f(\langle x,y\rangle)) &= g(\langle x+y, x-y\rangle) && (\beta \text{ rule})\\
&= \langle x+y-y, x-y+y\rangle = \langle x,y\rangle && (\beta \text{ rule})\\
&= id_{\mathbb{R}^2}(\langle x,y\rangle)
\end{aligned}
$$

- $f\circ g = id_{\mathbb{R}^2}$:

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(\langle x,y\rangle) = f(g(\langle x,y\rangle) &= f(\langle x-y, x+y\rangle) && (\beta \text{ rule})\\
&= \langle x-y+y, x+y-y\rangle = \langle x,y\rangle && (\beta \text{ rule})\\
&= id_{\mathbb{R}^2}(\langle x,y\rangle)
\end{aligned}
$$

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף ג'

נתון:

$$f = \lambda h \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{R}.h(x+1), f\colon (\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g\colon (\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ כך ש־$g = \lambda h \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{R}.h(x-1)$. נוכיח את אשר דרוש מההגדרה, על בסיס כלל η.

- $g\circ f = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$:

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(h) = g(f(h)) &= g(\lambda x\in\mathbb{R}.h(x-1)) && (\beta \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.(\lambda x\in\mathbb{R}.h(x-1))(y+1) && (\beta \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.(\lambda x\in\mathbb{R}.h(x))(x) && (\alpha \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.h(y) && (\beta \text{ rule})\\
&= h && (\eta \text{ rule})\\
&= id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(h)
\end{aligned}
$$

- $f\circ g = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$:

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(h) = g(f(h)) &= f(\lambda g\in\mathbb{R}.h(x+1)) && (\beta \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.(\lambda x\in\mathbb{R}.h(x+1))(y-1) && (\beta \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.(\lambda x\in\mathbb{R}.h(x))(x) && (\alpha \text{ rule})\\
&= \lambda y\in\mathbb{R}.h(y) && (\beta \text{ rule})\\
&= h && (\eta \text{ rule})\\
&= id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(h)
\end{aligned}
$$

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף ד'

נתון:

$$\mathrm{f} = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ -\frac{n+1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}, f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ המוגדר לפי:

$$\mathrm{g} = \lambda z \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 2z & z \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ -2z - 1 & z \in \mathbb{Z}_{<0} \end{cases}$$

נוכיח את אשר נדרש מההגדרה:

- $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$: נשתמש בחוק η (התחום שווה). יהי $z \in \mathbb{Z}$, נוכיח $(f \circ g)(z) = id_{\mathbb{Z}}(z) = z$. נפלג למקרים;
  - אם $z \geq 0$ אז $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(2z)$. לפי הגדרה $2|z$ ולכן $2z \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. סה"כ, השוויון ממשיך ונקבל $\cdots = f(2z) = \frac{2z}{2} = z$ כדרוש.
  - אם $z < 0$ אז $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(-2z-1)$. באופן דומה, $-2z \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, ולכן (אני לא רואה סיבה להוכיח את זה בבדידה) $-2z - 1 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ וסה"כ, השוויון ממשיך עד לקבלת $\cdots = f(-2z-1) = -\frac{-2z-1+1}{2} = z$ כדרוש.
- $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$: נשתמש בחוק η (התחום שווה). יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $(g \circ f)(n) = id_{\mathbb{N}}(n) = n$. נפלג למקרים;
  - אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = 2n$. חילוק מספרים $2, n > 0$ גדול מ־0 גם הוא ולכן $\frac{n}{2} > 0$. לפיכך, המשך השוויון חייב להיות $\cdots = g(\frac{n}{2}) = 2 \cdot \frac{n}{2} = n$ כדרוש.
  - אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = -\frac{n+1}{2}$. ידועה סגירות על קבוצת הממשיים הגדולים מ־0, לכן $\frac{n+1}{2} \geq 0$ ולכן ההופכי מקיים $-\frac{n+1}{2} < 0$, ונגרר $\cdots = g(-\frac{n+1}{2}) = -2(-\frac{n+1}{2}) - 1 = n$ כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ $\blacksquare$

סעיף ה'

נתון:

$$\begin{aligned} &Cu \colon ((A \times B) \to C) \to (A \to (BC)) \\ &Cu = \lambda f \in (A \times B) \to C.\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle) \end{aligned}$$

צ.ל.: Cu הפיכה

הוכחה: נבחר:

$$\begin{aligned} &F \colon (A \to (B \to C)) \to ((A \times B) \to C) \\ &F = \lambda h \in (A \to (B \to C)).\lambda a \in A, b \in B.h(a)(b) \end{aligned}$$

נוכיח את אשר דרוש, בעיקר על בסיס תחשיב למדא.

- $F \circ Cu = id_{(A \times B) \to C}$: לפי כלל η והגדרת יחס הזהות, יהי $f \colon (A \times B) \to C$, צ.ל. $(F \circ Cu)(f) = f$. נפתח לפי תחשיב למדא;

$$
\begin{aligned}
(F \circ Cu)(f) &= F(Cu(f)) \\
&= F(\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b\rangle)) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.(\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b\rangle))(a)(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.(\lambda b \in B.f(\langle a, b\rangle))(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.f(\langle a, b\rangle) && (\beta \text{ rule}) \\
&= f && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}
$$

- $Cu \circ F = id_{A\to(B\to C)}$: לפי כלל η והגדרת יחס הזהות, יהי $f\colon (A \to (B \to C))$, צ.ל. f $(Cu \circ F)(f) = f$. נפתח לפי תחשיב למדא;

$$
\begin{aligned}
(Cu \circ F)(f) &= Cu(F(f)) \\
&= Cu(\lambda a \in A, b \in B.f(a)(b)\rangle)) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A.\lambda b \in B.(\lambda a \in A, b \in B.f(a)(b)\rangle))(\langle a, b\rangle) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A.\lambda b \in B.f(a)(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A.f(a) && (\eta \text{ rule}) \\
&= f && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}
$$

סה"כ שתי התנאים ההכרחיים ומספיקים הוכחו, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

שאלה 3

סעיף א׳

נתון:

$$f = \lambda\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}}).A \cup B$$

טענה: $\text{dom}(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}}), \text{range}(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, הפונקציה חח"ע, $\text{Im}(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

צ.ל.: להוכיח הפונקציה הפיכה

הוכחה: נבחר פונקציה $g\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$ המוגדרת לפי:

$$g = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\langle\{n \in N.n \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}, \{n \in N.n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}\rangle$$

נוכיח שהיא הפונקציה ההופכית;

- $g \circ f = id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$: התחום מתאים, נוכיח את אשר נשאר בכלל η; יהי $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, צ.ל. $g(f(N)) = N$ (לפי הגדרת הרכבת פונקציות ויחס הזהות). נתבונן בהרכבה, לפי כלל β נקבל:

$$\cdots = g(\langle A := \{n \in N.n \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}, B := \{n \in N.n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}\rangle)$$

לפי עקרון ההפרדה, $x \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \implies x \in \mathbb{N}_{\text{even}} \wedge x \in B \implies x \in A$, לכן נסיק $A \cup B = \cdots$. נוכיח ש־$A \cup B = N$ באמצעות הכלה דו כיוונית;

  - יהי $x \in A \cup B$, נגרר $x \in A \vee x \in B$ ולפי עקרון ההפרדה נגרר $x \in N \vee x \in N$ כלומר $x \in N$ כדרוש.

- יהי $x \in N$, נגרר $x \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \lor x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, בה"כ $x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. נניח בשלילה $x \notin A$, נסיק $x \notin N \land x \notin \mathbb{N}_{\text{even}}$, וזו סתירה.

סה"כ $A \cup B = N$ כלומר מתוך טרנזיטיביות הזהות $g(f(N)) = N$ כדרוש.

- $f \circ g = id_{\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})}$: התחום מתאים, נוכיח את אשר נשאר בכלל η: יהיו קבוצות $\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$ כלומר מתוך הגדרת כפל קרטזי וקבוצת חזקה אמ"מ $A \subseteq \mathbb{N}_{\text{even}} \land B \subseteq \mathbb{N}_{\text{odd}}$. צ.ל. $f(g(\langle A, B \rangle)) = \langle A, B \rangle$, מתוך הרכבת פונקציות והגדרת יחס הזהות. לפי כלל β, ישנו שוויון ל־:

$$\dots = f(A \cup B) = \langle C := \{n \in A \cup B . n \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}, D := \{n \in A \cup B . n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\} \rangle$$

וסה"כ צ.ל. $A = C \land B = D$, בה"כ נוכיח $A = C$ באמצעות הכלה דו כיוונית:

- יהי $x \in A$, נוכיח $x \in C$. לפי הגדרה, צ.ל. $x \in A \cup B \land x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר צ.ל. $(x \in A \lor x \in B) \land (x \in \mathbb{N}_{\text{even}})$. התנאי הראשון מתקיים לפי הנתון $x \in A$, והשני לפי הגדרת A שע"פ הגדרת קבוצת חזקה גוררת $x \in A \implies x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$.
- יהי $x \in C$, נוכיח $x \in A$. לפי הגדרה, ידוע $x \in A \cup B \land x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר $x \in A \lor x \in B$. נניח בשלילה $x \in B$, נגרר לפי הגדרת קבוצת חזקה $x \in B \implies x \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$, כלומר $x \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \land x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ וזו סתירה, אזי $(x \in A \lor x \in B) \land x \notin B$ או באופן שקול $x \in A$ כדרוש.

סה"כ הפונקציה הופכית מימין ומשאל, כלומר היא הפיכה. מש"ל.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב'

נתון:

$$f = \lambda g \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} . \lambda n \in \mathbb{N} . g(\{n\})$$

טענה: $\text{dom}(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{range}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, הפונקציה לא חח"ע.

צ.ל.: הפונקציה לא חח"ע.

הוכחה: נניח בשלילה שהיא חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר $g_1, g_2 : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ המוגדרות לפי:

$$g_1 = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) . \begin{cases} \max\{N\} & |N| = 1 \\ \min\{N\} & |N| \geq 2 \end{cases}$$
$$g_2 = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) . \max\{N\}$$

על מנת לסתור את הגרירה, יש להוכיח שניים: $g_1 \neq g_2 \land f(g_1)) = f(g_2)$:

- $g_1 \neq g_2$: נניח בשלילה שכן הם פני הדברים, אזי לפי כלל η, נגרר בין היתר יהי $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g_1(x) = g_2(x)$, אך בניגוד לכך שעבור $x = \{1, 2\}$ נקבע לפי כלל β ש־ $g_1(x) = 1, g_2(x) = 2$ אך $1 \neq 2$ וזו סתירה.
- $f(g_1) = f(g_2)$: נוכיח בעזרת כלל η. ידוע $\text{dom}(f(g_1)) = \text{dom}(f(g_2)) = \mathbb{N}$ לפי כלל η והגדרת כתיב למדא, ולכן נשאר להוכיח יהי $x \in \mathbb{N}$, צ.ל. $f(g_1)(x) = f(g_2)(x)$. לפי כלל β וכלל η, צ.ל. יהי $n \in \mathbb{N}$, נגרר $g_1(\{n\}) = g_2(\{n\})$. לפי הגדרת סיגלטון, ולפי כלל β, נסיק $g_1(\{n\}) = \max\{n\} = n$, וכמו כן לפי אותו בכלל $g_2(\{n\}) = \max\{n\}$ וסה"כ לפי טרנזיטיביות $g_1(\{n\}) = g_2(\{n\})$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ג'

נתון: $f = \lambda h \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} h(i)$

טענה: $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \mathrm{range}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, הפונקציה לא חח"ע.

צ.ל.: הפונקציה לא חח"ע.

הוכחה: היה לנו כבר את התרגיל הזה בשיעורי הבית הקודמים (3)(ו), מועתקת ההוכחה:

יהיו $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $f_1 \neq f_2$. נניח בשלילה שהפונקציה לא חח"ע, ונסיק $G(f_1) = G(f_2)$, כלומר, לפי כללי β, η:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_1(i) = n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_2(i)$$

לפי כלל η, $f_1 \neq f_2$ שקול לקיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_1(m) \neq f_2(m)$. נסכום עד $m \in \mathbb{N}$ הנמוך ביותר המקיים תכונה זו. משום שהוא הנמוך ביותר, $\forall t < m \in \mathbb{N}. f_1(t) = f_2(t)$ ולכן, עבור $t = m - 1$, הסכומים $\sum_{i=0}^{t} f_1(i) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i)$ שווים (אפשר להוכיח זאת באינדוקציה קטנה). עתה, נתבונן בסכום עד m, ונכיל את הנחת השלילה שלנו:

$$\sum_{i=0}^{m} f_1(i) = \sum_{i=0}^{m} f_2(i)$$
$$\sum_{i=0}^{t} f_1(i) + f_1(m) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i) + f_2(m)$$
$$f_1(m) = f_2(m)$$

וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ד'

נתון: $f = \lambda g \in (A \to B) \to C.\lambda a \in A.\lambda b \in B.g(\lambda a \in A.b)$

טענה: $\mathrm{dom}(f) = (A \to B) \to C, \mathrm{range}(f) = A \to (B \to C)$, f לא חח"ע.

צ.ל.: f לא חח"ע

הוכחה: נבחר $g_1, g_2 \colon (A \to B) \to C$ המוגדרות בכתיב למדא לפי:

$$g_1 = \lambda h \in A \to B.h(0)$$
$$g_2 = \lambda h \in A \to B.h(1)$$

וכמו כן נבחר את C להיות $C = \mathrm{range}(g_1) \cup \mathrm{range}(g_2)$ ואת A, B להיות $A = \{1, 2\}, B = \mathbb{N}$. נניח בשלילה ש־$f$ חח"ע, כלומר לכל $f(g_1) \neq f(g_2) \implies g_1 \neq g_2$. כדי לשלול זאת, נוכיח $g_1 \neq g_2 \wedge f(g_1) = f(g_2)$.

- $g_1 \neq g_2$: נניח בשלילה שהן שוות, כלומר לפי כלל η לכל $h \colon A \to B$ מתקיים $g_1(h) = g_2(h)$ ובפרט עבור $h = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$ אך בניגוד לכך $g_1(h) = 0 \neq 1 = g_2(h)$.
- $f(g_1) = f(g_2)$: או באופן שקול לפי כלל β צ.ל.:

$$
\begin{aligned}
& f(g_1) = f(g_2) \\
\iff & \lambda a \in A.\lambda b \in B.g_1(\lambda a \in A.b) = \lambda a \in A.\lambda b \in B.g_2(\lambda a \in A.b) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & \forall a \in A, b \in B.g_1(\lambda a \in A.b) = g_2(\lambda a \in A.B) && (\eta \text{ rule}) \\
\iff & \forall a \in A, b \in B, c \in C.(\lambda a \in A.b)(c) = (\lambda a \in b)(c) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & \forall b \in B.b = b && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}
$$

אשר מהווה פסוק אמת.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

שאלה 4

שאלה 5

סעיף א׳

סעיף ב׳