

אלגברה לינארית 1א

מטלה 5: פרישה ואי תלות

28 באפריל 2023

1. בסעיפים הבאים בדקו האם $v \in \text{span}(S) \subseteq \mathbb{R}^4$, ומצאו מקדמים לצירוף לינארי של איברי S השווה ל- v במידה וכן:

(א)

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב)

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ג) נתבונן במרחב הפונקציות מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} . אז $\text{span}\{\sin(x), \cos(x)\}$ הוא תת מרחב. הוכיחו שלכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\sin(x+a) \in \text{span}\{\sin(x), \cos(x)\}$$

(רמז: העזרו בנוסחאות משיעורי טריגונומטריה בתיכון)

2. קבעו האם הקבוצה הנתונה S פורשת את \mathbb{R}^3 :

(א)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

(ב)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

3. נזכר בעובדה ש- \mathbb{R} מהווה מרחב וקטורי מעל \mathbb{Q} . נניח ש- $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ מספרים ראשוניים כלשהם. הוכיחו שהקבוצה $\{\ln(p_1), \dots, \ln(p_k)\} \subseteq \mathbb{R}$ היא בת"ל מעל \mathbb{Q} .

(רמז: הוכיחו שאם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של הוקטורים ששווה ל-0 אז קיים מספר שלם שיש לו יותר מפירוק יחיד למכפלה של מספרים ראשוניים, בסתירה למשפט היסודי של האריתמטיקה)

4. יהי $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} . הוכיחו כי לכל קבוצה סופית $S \subseteq V$ מתקיים כי $\text{Span}(S) \subsetneq V$.

5. בדקו האם הקבוצות הבאות בלתי תלויות מעל השדות המתאימים:

$$\text{מעל } \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{א})$$

$$\text{מעל } \mathbb{Z}_5 \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{ב})$$

$$\text{מעל } \mathbb{Z}_3 \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{ג})$$

6. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} , נניח כי $\{u, v, w\} \subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה בגודל 3. קבעו האם הקבוצות הבאות תלויות או בלתי תלויות:

$$\{u + v + w, 3u - w, u - v\} \quad (\text{א})$$

$$\{u + v, v + w, u + w\} \quad (\text{ב})$$

$$\{2u + v + 2w, v - 2w, 2u + 3v - 2w\} \quad (\text{ג})$$

7. קבעו האם הקבוצות הבאות תלויות או בלתי תלויות ב- $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$:

$$\{\cos(x), \sin(x), e^x, x\} \quad (\text{א})$$

$$\{\cos^2(x), 1 + \sin^2(x), 1 + x + x^2, x + x^2\} \quad (\text{ב})$$

$$\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\} \quad (\text{ג})$$

$$\{x^2 + x - 1, x^2 + x - 2, \dots, x^2 + x - k\} \quad (\text{ד}) \text{ כאשר } k \in \mathbb{N}$$