

חשבון דיפרנציאלי ואנטגרלי 1א - תרגיל בית 3

שאלות להגשה:

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול (כלומר ללא שימוש במשפטים) כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + \cos(n)} - n = 0 \quad (\text{ג})$$

$$\text{? } a = 0 \text{ ? } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0 \text{ ? } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad (\text{ד})$$

2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבועה חסומה מלעיל שאינה ריקה. הוכיחו כי קיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- A לכל n $a_n \in A$ כאשר נתון $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$. מה קורה אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$.

3. הראו כי לכל מספר ממשי קיימת סדרה של רצינאים המתכנסת אליו, וסדרה של אי-רצינאים המתכנסת אליו.

4. נניח כי $a \rightarrow b$, $b_n \rightarrow b$, $a_n \rightarrow a$ גבולות סופיים או אינסופיים, כמפורט בכל סעיף. אז מתקיים:

(א) אם $a = \pm\infty$ ו- b סופי או $b = \pm\infty$ אז $a_n + b_n \rightarrow \pm\infty$ בהתאם.

(ב) אם $a = \pm\infty$ ו- $b > 0$ או $b = \pm\infty$ אז $a_n b_n \rightarrow \pm\infty$, בהתאם.

(ג) אם $a = \pm\infty$ ו- $b < 0$ או $b = \pm\infty$ אז $a_n b_n \rightarrow 0$, בהתאם.

(ד) אם $a = \pm\infty$ אז $b = -\infty$. אם $a = \infty$ אז $b = +\infty$. אם $a = b = \pm\infty$ אז $a_n b_n \rightarrow +\infty$.

הוכיחו מקרה אחד מכל סעיף.

5. תהי a_n סדרה של מספרים אי שליליים $0 \leq a_n \leq \sqrt{a}$. הוכיחו כי $a \geq \sqrt{a}$.

6. חשבו בעזרת משפט הסנדוויץ' (או בכל דרך אחרת) את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \sin(1) + 2 \cdot \sin(2) + \cdots + n \cdot \sin(n)}{n^3} \quad (\text{ב})$$

$$.a > b > 0 \text{ ? } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n - b^n} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right) \quad (\text{ד})$$

7. יהיו $\alpha \in \mathbb{R}$ ויהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות של מספרים שלמים, קרי, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \in \mathbb{Z}$ ו- $b_n \in \mathbb{Z}$ הראו כי אם $a_n \alpha + b_n \rightarrow 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n \alpha + b_n| > 0$ אז α אי-רציוני.

8. יהיו $0 \leq \beta \leq s$. הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת ומצאו את גבולה:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} \right)^{\beta} s^{n-k}$$

9. בתרגיל זה נוכיח הכללה של משפט צ'יארו לממציעים משוקללים. תהי x_n סדרת ממשיים המותכנסת ל- x .
תהי $\lambda_n > 0$ סדרה ("סדרת המשקלים") כך ש:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

הוכחו:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

האם הטענה מחזיקה גם עבור λ שאינו מקיימות את התנאי על λ ?
10. הוכחו או הפריכו שסדרה חיובית השואפת לו היא מונוטונית החל ממוקם מסוים.

שאלות לתרגול נוספת (לא להגשה)

1. (א) תהי $a_n = (-1)^n$. מצאו סדרה b_n כך שהסדרה $a_n + b_n$ מותכנסת. האם יתכן ש- b_n מותכנסת? נמקו.
(ב) נניח כי a_n ו- b_n מותכנסות לאותו הגבול $L \in \mathbb{R}$. הראו כי $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots)$ מותכנסת ל- L .

2. (א) נניח כי $\infty \rightarrow a_n$ ו- $\infty \rightarrow b_n$. מצאו דוגמאות עבורן הסדרה $a_n + b_n$ מותכנסת לגבול ממשי, מותבדרת לאינסוף או לפחות אינסוף, או לא מותכנסת במובן הרחב.
(ב) נניח $0 \rightarrow a_n$ ובנוסף $0 < a_n < n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכחו כי עבור $c > 0$ מתקיים $\infty \rightarrow \frac{c}{a_n}$.

3. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) \quad (\text{ד})$$

4. הוכיחו את משפט הסנדוויץ' לגבול אינסופי: אם $a_n \leq b_n$ סדרות כך שהחלה ממוקם מסוים $b_n \rightarrow \infty$ אז גם $a_n \rightarrow \infty$.

5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרה הבאה אינה מותכנסת:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3k \\ 1 & n = 3k + 1 \\ 2 & n = 3k + 2 \end{cases}$$

6. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 - 2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 \sin(n!)}}{n+1} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} \quad (\text{ג})$$

7. יהיו $a_1, \dots, a_k \geq 0$ מספרים ממשיים כלשהם. הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max \{a_1, \dots, a_k\}$$

8. נגידר סידרה באופן הבא:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

הוכחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

רמז: הראו כי

$$\dots a_n = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right)$$