זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

תזכורת: הגדרנו זוג סדור $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

מכפלה קרטזית: $A\times B = \{\langle a,b\rangle \mid a\in A \wedge b\in B\}$.

הכללות

הגדרה: n-יה סדורה, עבור $n\geq 2$ טבעי, מוגדרת באופן רקורסיבי:
$\langle a_1,a_2\rangle$ מוגדר כמו קודם ($\langle a_1,a_2\rangle = \{\{a_1\},\{a_1,a_2\}\}$).
ועבור $n>2$: $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle := \langle a_1,\langle a_2,\ldots,a_n\rangle\rangle$.
לדוגמה: $\langle a,b,c\rangle = \langle a,\langle b,c\rangle\rangle$.

טענה: (התכונה המרכזית של n-יה סדורה)
$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,\ldots,b_n\rangle \iff a_1=b_1 \wedge a_2=b_2 \wedge \ldots \wedge a_n=b_n$$
(ניתן להוכיח זאת באינדוקציה).

הגדרה: אם $A_1,\ldots,A_n$ קבוצות, אזי מכפלתן הקרטזית $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ היא קבוצת כל ה-n-יות הסדורות $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ כך שלכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $a_i\in A_i$.

טענה: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = A_1\times(A_2\times(\ldots\times A_n))$

הערה: בעקרון, $A\times(B\times C) \neq (A\times B)\times C$ ($\langle a,\langle b,c\rangle\rangle$, $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$), אבל לרוב נדבר בפשטות על $A\times B\times C$.

סימון: אם $A=A_1=A_2=\ldots=A_n$, כותבים בפשטות A^n במקום $A_1\times\ldots\times A_n$.

הערות: * עם כוון, מקובל לכתוב קבוצה של n-יות סדורות באופן הבא:
$\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in A_1\times\ldots\times A_n \mid \varphi\}$

* עם כוון, לכל $1\leq i\leq n$ מוגדרת פונקצית היטל (הטלה) על הרכיב ה-i:
$\pi_i(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle) = a_i$.

יחסים (בינאריים) Relations

<u>הגדרה:</u> <u>יחס</u> R מקבוצה A לקבוצה B הוא תת-קבוצה של $A\times B$.
כלומר $R\subseteq A\times B$.
(נאמר ש-R יחס מעל A אם הוא תת קבוצה של $A\times A$.)

<u>דוגמאות:</u> * $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ הוא יחס מהקבוצה $\{1\}$ לקבוצה $\{2,3\}$,
כי $R\subseteq\{1\}\times\{2,3\}$. אבל, אפשר גם להגיד שהוא יחס מ-$\mathbb{N}$
ל-$\mathbb{Z}$, כי $R\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.

* יחס הזהות מעל הטבעיים: $id_{\mathbb{N}}=\{\langle n,n\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$, מסומן לפעמים
גם כתור $Id_{\mathbb{N}}$, $I_{\mathbb{N}}$, $i_{\mathbb{N}}$.

* יחס $<$ מעל $\mathbb{N}$: $<=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid \exists k\in\mathbb{N}_+ .\ m=n+k\}$.
* יחס $\leq$ מעל $\mathbb{N}$: $\leq=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid \exists k\in\mathbb{N}.\ m=n+k\}$.
מתקיים $\leq=<\cup\, id_{\mathbb{N}}$.

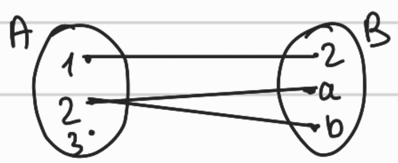
* באופן כללי, לכל קבוצה A מוגדר יחס הזהות מעל A: $id_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$.

* $R=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 \mid x-y\in\mathbb{Q}\}$. לדוגמה: $\langle\sqrt{2},\sqrt{2}\rangle\in R$, $\langle\sqrt{2},0\rangle\notin R$.

* $S=\{\langle X,Y\rangle\in P(\mathbb{N})\times P(\mathbb{Z}) \mid X\subseteq Y\}$ יחס מ-$P(\mathbb{N})$ ל-$P(\mathbb{Z})$.
לדוגמה, $\langle\{1\},\{1,-1\}\rangle\in S$, $\langle\{1\},\{1\}\rangle\in S$, $\langle\mathbb{N},\mathbb{Z}\rangle\in S$.

<u>הערה:</u> קבוצת כל היחסים מ-A ל-B היא $P(A\times B)$.

<u>הערה:</u> נוח לדמיין יחס כתור אוסף של קווים שמחברים בין קבוצות.
לדוגמה, $R=\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle\}$,



סימון: אם $\langle a,b\rangle \in R$, נהוג לסמן aRb.
לדוגמה, מתקיים $\langle 1,2\rangle \in \leq$, ומסמנים $1\leq 2$.

הגדרה: תהיינה יחס R, מגדירים:
domain
1. התחום של R: $dom(R)=\{a\in A \mid \exists b\in B.\ \langle a,b\rangle \in R\}$.
Image
2. התמונה של R: $Im(R)=\{b\in B \mid \exists a\in A.\ \langle a,b\rangle \in R\}$

דוגמה: היחס $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$, מתקיים $Im(R)=\{2,3\}$, $dom(R)=\{1\}$.
וכן אוספים נוספים.

שאלה: האם $dom(R)\times Im(R)=R$?
תשובה: לא, דוגמה נגדית: $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ יחס מ-$A=\{1,2\}$ ל-$B=\{1,2,3\}$. מתקיים $\langle 2,2\rangle \in dom(R)\times Im(R)$, אבל $\langle 2,2\rangle \notin R$.
נשים לב, שההכלה $\subseteq$ תמיד מתקיימת.

הגדרה: יהי יחס R מ-A ל-B. היחס ההופכי ל-R הוא:
$R^{-1}=\{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in R\}$

דוגמה: היחס ההופכי ליחס $\leq$ מעל $\mathbb{R}$ הוא $\geq$ מעל $\mathbb{R}$.

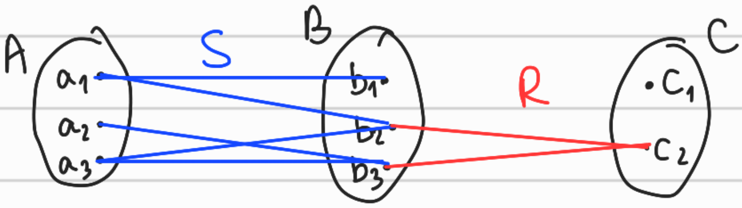
טענה: לכל יחס R מתקיים:
1. $(R^{-1})^{-1}=R$.
2. $dom(R^{-1})=Im(R)$

הגדרה: (הרכבת יחסים) יהיו $S\subseteq A\times B$, $R\subseteq B\times C$, מגדירים את ההרכבה $R\circ S$ ("R מורכב על S") בתור היחס מ-A ל-C הבא:
$R\circ S=\{\langle a,c\rangle \in A\times C \mid \exists b\in B.\ \langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in R\}$

<u>דוגמה:</u>

$S=\{\langle a_1,b_1\rangle, \langle a_1,b_2\rangle, \langle a_2,b_3\rangle, \langle a_3,b_2\rangle, \langle a_3,b_3\rangle\}$

$R=\{\langle b_2,c_2\rangle, \langle b_3,c_2\rangle\}$



$R\circ S=\{\langle a_1,c_2\rangle, \langle a_2,c_2\rangle, \langle a_3,c_2\rangle\}$

<u>טענה:</u> יהיו R,S יחסים מעל קבוצה A. אז $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

<u>הוכחה:</u> יהיו $a,c\in A$. נוכיח שוויון קבוצות בעזרת מעברי אמ"מ:

הגדרת יחס הופכי

$\langle a,c\rangle\in(R\circ S)^{-1} \iff \langle c,a\rangle\in R\circ S$

הגדרת הרכבה

$\iff \exists b\in A.\ \langle c,b\rangle\in S \wedge \langle b,a\rangle\in R$

הגדרת יחס הופכי

$\iff \exists b\in A.\ \langle b,c\rangle\in S^{-1} \wedge \langle a,b\rangle\in R^{-1}$

הגדרת הרכבה

$\iff \langle a,c\rangle\in S^{-1}\circ R^{-1}$

סה"כ הקבוצות שווה.