עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

שחר פרץ

25 באוקטובר 2024

Combinatorics

(1)

(א) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים, אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: ראשית כל, נתבונן ב־$52!$ הסידורים האפשריים של החפיסה כולה. עתה נתבונן בקבוצת המשלים – כמות האפשרויות לחפיסות בהן ישנם 4 אסים רצופים. נתייחס לרצף כמו קלף גדול יחודי בפני עצמו, ולכן, מכיוון שארבעת האסים יחשבו כאחד, יהיו $49!$ אפשרויות לסדר חלק זה. לסדר הפנימי של האסים עצמם יהיה $4!$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $48! \cdot 58$ אפשרויות בקבוצת המשלים. סה"כ:

$$\mathscr{A}nswer = \mathbf{52 - 49!\,4!}$$

(ב) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש בהן כל 4 קלפים מאותו הסוג (13 סוגים שונים) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: נגדיר $a_i =$ כמות האפשרויות לסידור בו i רצפים של 4 תווים. מובן כי $0 \le i \le \frac{52}{4} = 13$ (לא ייתכנו רצפים בסדר גודל הארוך יותר מהחפיסה כולה).

כדי למצוא את a_i, נבחר את הרצף הראשון מבין 13 האפשרויות. ואת השני מבין 12 האפשרויות שנותרו, ונמשיך הלאה. באופן דומה לסעיף הקודם, לכל אחד מהסדרות האלו נתייחס קקלף "גדול" יחודי אחד, לכל אחת מ־i הסדרות סדר פנימי של $4!$, וסה"כ סדר כולל של $(52 - 4i + i)!$ אפשרויות ($-4i$ על הקלפים שנוציא החוצה, ו־$+i$ ל"קלף גדול" כמוהו לסדרה עצמה). סה"כ:

$$a_i = i(52-3i)!\,4!$$

בכלליות:

ומעקרון ההכלה וההדחה, אם $A_i =$ קבוצת כל הרצפים באורך 4 מסוג נתון, ומשום שאין הגבלה על הכלליות בבחירת קלף מסויים, $\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$ זהה בערכו לכל $I \in [n]$ כך ש־$|I|$ קבוע בגודל k, ובפרט שווה ל־a_k (המקרה הסמטרי של העקרון), ובשילוב עם עקרון המשלים (על קבוצת על הקומבינציות שגודלה $52!$), נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}nswer &= 52! - \sum_{\emptyset \ne I \in [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k \\
&= \mathbf{52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} k\,(52-3k)!\,4!}
\end{aligned}$$

(2)

יהי סריג דו ממדי, ונגדיר מסלול חוקי אמ"מ בכל צעד מ־$\langle x, y\rangle$ ננוע אך ורק לנקודה $\langle x+1, y+r\rangle$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

(א) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$?

תשובה: יהי מסלול $a := \{a_i\}_{i=0}^{n}$ מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$ כאשר $\forall i \in [n].\exists x,y \in \mathbb{N}.a_i = \langle x,y\rangle$. נניח שהמסלול חוקי; אזי:

$$\forall i \in [n-1].\pi_1(a_i) - \pi_1(a_{i+1}) = 1 \land \exists r \in \mathbb{N}.\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) = r$$

ולכן נוכל להגדיר מיפוי:

$$\forall i \in [n-1].a_k \mapsto \pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) =: r_i \in \mathbb{N}$$

חח"ע ועל לקבוצת המסלולים החוקיים. תמונת המיפוי תהיה $\mathbb{N}^{n-1}$. מהגדרת המסלול, $a_n = \langle n,k \rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} r_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \\ &= \pi_2(a_1) \cancel{-\pi_2(a_2) + \pi_2(a_2)} \cancel{-\pi_2(a_3) + \pi_2(a_3)} - \cdots \cancel{+\pi_2(a_i) - \pi_2(a_i)} + \cdots + \pi_2(a_n) \\ &= \pi_2(a_1) + \pi_2(a_n) = 0 + k = k\end{aligned}$$

בכך, התייחסנו לכל ההגבלות – חוקיות המסלול באורך n (מובעת בהיותה חח"ע ועל לקבוצה המאפשרת זאת), והיותו נגמר ב־$\pi_2(a_n) = k$ (הכרחי ומספיק להיות סכום $\sum r_i = k$). נקבע את גודל הסדרות התמונה המקיימות זאת. ידוע שכמות האפשרויות לסכום מספרים יהיה $S(n-1,k)$, ולכן סה"כ זהו פתרון הבעיה. נסכם:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k, n-1)}$$

(ב) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0 \rangle \to \langle n,k \rangle$, כך שאף צעד בהם אינו מסתיים בנקודה $\langle n,k \rangle$?

תשובה: באופן דומה לסעיף הקודם, כמות הצעדים מ־$\langle 0,0 \rangle$ ל־$\langle 2n,2k \rangle$ תהיה $S(2k,2n-1)$. נחפש את קבוצת המשלים. בהינתן מסלול שעובר בין הראשית ל־$\langle 2n,2k \rangle$ הוא יכלל בקבוצת המשלים אמ"מ הוא עבור ב־$\langle n,k \rangle$, כלומר הוא למעשה מסלול $\langle 0,0 \rangle \to \langle n,k \rangle$ ואז עוד מסלול $\langle n,k \rangle \to \langle 2n,2k \rangle$. המסלול האחרון שקול לבעיה הראשונה בעבור טרנספורמציה איזומטרית של $\langle x,y \rangle \mapsto \langle x-n, y-k \rangle$ שלמעשה תבהיר כי פתרון שתי הבעיות הוא $S(k,n-1)$, וכאשר נחבר אותם יחדיו, מכלל הכפל, גודל קבוצת המשלים הוא סה"כ $S(k,n-1)^2$. אזי:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(2k, 2n-1) - S(k,n-1)^2}$$

(ג) **שאלה:** כמה מסלולים קיימים מ־$\langle 0,0 \rangle \to \langle n,k \rangle$ כך שכל צעד $\langle x_1,y_1 \rangle \to \langle x_2,y_2 \rangle$ מקיים $y_1 + 2 \le y_2$?

תשובה: נבחין שקילות לאחד הנתונים:

$$y_1 + 2 \le y_2 \iff \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \le -2 \iff \underbrace{\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i)}_{=r_i} \ge 2$$

ואכן ננסה למצוא את כמות הסדרות $\{r_i\}_{i=1}^{n-1}$ כך ש־$r_i \ge 2$, כך ש־$\sum r_i = k$, לפי השקילות שהוכחה בסעיף (א). לבעיה זו קיימת בעיה שקולה ידועה, היא חלוקת k כדורים ל־$n-1$ תאים, כשבכל תא לפחות 2 כדורים. אזי, ניאלץ להתחיל מלשים שני כדורים בכל תא, וסה"כ נבזבז $2n-2$ כדורים. את $k-2n-2$ הכדורים נותרים נחלק בין התאים. סה"כ, קיבלנו:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k-2n-2, n-1)}$$

. . . . (3) . . . .

יהיו n כדורים ממוספרים. יש לסדרם ב־n תאים ממוספרים, כאשר בכל תא יימצא בדיוק כדור אחד. לכל $1 \le i \le n-1$ עסור להכניס את הכדור ה־i לתא ה־i, בעוד אין מגבלה על הכדור ה־i. כמות האפשרויות לסידורים כאלו תהיה $F(n)$.

(א) **שאלה:** הביעו את $F(n)$ בעזרת D_m.

תשובה: נפלג למקרים.

- אם הכדור ה־i נמצא בתא ה־i, אז יש עוד $n-1$ תאים נותרים בהם אי־אפשר שכדור יהיה בתא המתאים לו מבחינת מספר. כלומר, יהיו D_{n-1} אפשרויות.
- אם הכדור ה־i לא נמצא בתא ה־i, אז כל n הכדורים לא נמצאים בתא המתאים להם, כלומר יש D_n אפשרויות.

סה"כ מכלל החיבור:

$$\mathscr{A}nswer = D_n + D_{n-1}$$

(ב)

. . . . (4) . . . .

(א) הוכיחו באופן קומבינטורי:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$$

אין לי מושג...

(ב) מצאו ביטוי ללא סכימה לאגף שמאל של המשוואה:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

סיפור: מתוך $n-1$ איברים, קבוצה של לפחות שני איברים, ומתוכה נבחר שניים שונים ונסמנם בכחול ובירוק. כמה אפשרויות יש לכך?

אגף ימין: נבחר כדור כחול (n אופציות) ולאחריו ירוק ($n-1$ אופציות). עתה, בעבור $n-2$ האיברים הנותרים, נשייך להם את המספר 1 אם נרצה להכניסם לקבוצה ו־0 אם לאו - לכך, יהיו $|\{0,1\}|^{n-2}$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $n(n-1)2^{n-2}$ אפשרויות.

אג ף שמאל: נניח שגודל הקבוצה הוא $2 \le k \le n$ (בהכרח גודל הקבוצה גדול מ־2 כי קיים מה כדור כחול וירוק) – לבחירה מתוך קבוצה $\binom{n}{k}$ אופציות. לכן, מתוך n האיברים שיש לנו, נבחר k איברים לשים בקבוצה. מאילו, נבחר אחד כחול (k אפשרויות) ואחד ירוק ($k-1$ אפשרויות) וסה"כ מכלל הכפל $\binom{n}{k}k(k-1)$ בעבור k נתון, ומכלל החיבור $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ אופציות.

(5)

Graph Theory

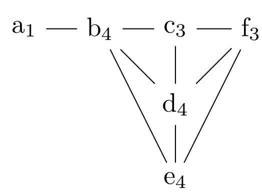
(1)

נוכיח או נפריך קיום גרף מתאים:

(א) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,5$. **נפריך קיום.** נניח בשלילה שקיים גרף כזה, אזי קיים גרף בעל 5 צמתים מדרגה זוגית ($1,3\times 3,5$) בסתירה למשפט לפיו קיים מספר זוגי (ובפרט אינו 5) של צמתים בעלי דרגה אי זוגית.

(ב) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,5,5$. **נפריך קיום.** נניח בשלילה קיום גרף כזה. אזי, קיים שני קודודים מדרגה 5, היא פחותה ב־1 מכמות הצמתים בגרף כולו – ומשום זה לא יכול להכיל קשת בינו צומת לבין עצמה, הם יפנו לכל שאר הצמתים. אזי, הצומת v שקיים מהנתונים ודרגתו 1 יופנה משתי הצמתים הללו (שדרגתן 5), וסה"כ $2 \le d(v) = 1$ וזו סתירה.

(ג) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,4$. **נוכיח קיום.**



(2)

(א) צ.ל. בכל עץ עם $n \ge 2$ צמתים יש לפחות שני עלים.

הוכחה. נניח בשלילה קיום עץ בעל $n \ge 2$ צמתים, שיש לו פחות משני עלים. אזי, ל־$n-1$ מהצמתים בו הם אינם עלים, ולכן דרגתם היא $d(v) \ge 2$. נסמן ב־$\tilde{v}$ את הקודקוד היחיד שלא ידוע שמקיים זאת, בעבורו $d(\tilde{v}) \ge 1$ (עם $d(\tilde{v}) = 0$ אז הגרף אינו קשיר וזו סתירה). ממשפט על סכום הדרגות וכמות הצמתים ביחס לכמות קשתות בגרף, נקבל:

$$2(|V|-1) = 2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = d(\tilde{v}) + \sum_{v\in V\setminus\{\tilde{v}\}} d(v) \ge 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

$$|V| - 1 \ge \frac{2n-1}{2} \implies n = |V| \ge n + 0.5 \implies 0 \ge 0.5 \xleftarrow{\times 0.5}$$

וזו סתירה.

יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. נוכיח שלכל גרף $H = \langle [n], E_h\rangle$, שאיזומורפי ל־$G$ מתקיים $G = H$ אמ"מ $V = \varnothing$.

הוכחה. content... ■

■

(3)

יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. נניח $\forall v \in V. d(v) \ge k > 1$. צ.ל. קיים מעגל פשוט באורך לפחות $k+1$.

הוכחה. נניח בשלילה שהמעגל הפשוט המקסימלי U הוא באורך $m \le k$. נראה באינדוקציה על j המסלול הארוך ביותר הכולל צומת יחיד במעגל, ש־j לא חסום.

- בסיס: נניח $j=0$ כלומר המעגל מכיל את כל הצמתים בגרף, אזי נתון מעגל באורך $m\leq k$, וידוע שלכל אחד מ־m הקודקודים דרגה k, וכבר במעגל מחוברים לשני קודקודים נוספים ומשום שהגרף פשוט לא תתיכן קשת בין צומת לעצמה, כלומר מבין m הצמתים במעגל ל־$m-3$ ייתכן החיבור, בעוד נותר לחבר ל־$k-2$ צמתים נוספים. נבחין בסתירה כי $k-2\geq m-2>m-3$, כלומר אין מספיק צמתים לחבר אליהם. כן בעבור כל קודקוד, כלומר יש צורך ב־k צמתים נוספים, ואכן כל קודקוד מתחבר לקודקוד שמחוץ למעגל כלומר $j>0$.
- צעד: נניח באינדוקציה על נכונות הטענה על $j-1$ ונוכיחה בעבור j. נתבונן בקצה המסלול באורך j אותו נסמן ב־J, בו ימצא קודקוד v. ידוע $d(v)\geq k$. אם ישלח איזושהי צומת אל המעגל, נסיק כי $U\cup\{v\}$ מעגל פשוט באורך $m+1$, סתירה לכך ש־U הוא המינימלי. אם ישלח קשת אל אחד מהקודקודים הידועים המסלול שאינו J, בה"כ $\tilde{J}$, אז $U\cup J\cup\{v\}$ מעגל פשוט באורך גדול מ־m בסתירה לכך ש־m אורך המעגל המינימלי. מכיוון שלא שלח קשת לקודקוד ב־U או לאחד מהמסלולים $\tilde{J}$ שיצאו מ־U, ניוותר עם שני מקרים: הראשון, בו שלח קשת לקודקוד שאיננו קשור למדובר עד כה, אז המסלול J יתארך ויהיה ל־$j+1$ ובכך אכן j לא חסום וסיימנו, וסה"כ הוא בהכרח ישלח צומת לקודקוד ב־J. לכן, $J\geq d(v)\geq k$, וגם קודקודי J מהווים מעגל (הרי הם כולם מקושרים במסלול, ועתה יש צומת המחברת בין הראשון לאחרון במסלול היא v) אבל המעגל הזה באורך $|J|\geq k+1$ על אף שאורך המעגל המקסימלי הוא $m\leq k$. מצאנו בכל מקרים סתירה, כדרוש.

סה"כ, בעבור כל ערך j, יתקיים שבהכרח נצטרך ערך j גדול יותר (לכן j לא חסום). ניתן דעתנו על כך שהטענה זו מהווה סתירה, כי אם j גדול לא חסום ובפרט גדול ככל רצוננו ומשום ש־$|V|$ לא חסום ויש כמות אין־סופית של קודקודים. בכך ההנחה בשלילה הוכחה כשגויה, ותמה ההוכחה. ■

(4)

יהי $G=\langle[n],E_G\rangle$ גרף. נוכיח שלכל $H=\langle[n],E_H\rangle$ שאיזומורפי ל־G מתקיים $G=H$, אם ורק אם: משהו סגנון לחבר מעגלים

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

(5)

הוכחה. לאורך כל ההוכחה, אלא אם ייצוין אחרת, $v,n,a,b\geq 1$. יהיו $G_1=\langle V,E_1\rangle,G_2=\langle V,E_2\rangle$ גרפים;

$$V=[100],\ E_1=\{\{a,b\}\in\mathcal{P}_2(V)\colon |a-b|=10\vee|a-b|=90\},\ E_2=\{\{a,b\}\in\mathcal{P}_2(V)\colon |a-b|=11\vee|a-b|=89\}$$

נוכיח ש־G_1 אינו איזומורפי ל־G_2.

למה 1. נוכיח את השוויון הבא:

$$\exists m\neq n.\ m+n=100\wedge E=\{\{a,b\}\in\mathcal{P}_2(V)\colon |a-b|=n\vee|a-b|=m\}\Longrightarrow E\overset{!}{=}\{i\in[n]\colon\{i,i+m\}\}\cup\{i\in[m]\colon\{i,i+n\}\}=:\tilde{E}$$

כאשר $\tilde{E}$ תקרא "ההגדרה המפושטת [של למה 1 בעבור E]". נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

$\subseteq$: יהי $\{a,b\}\in E$, בה"כ $|a-b|=n$, ובה"כ $a\geq b$ כלומר $a-b=n$. אזי $a=b+n$. ידוע $a\in[100]$, נרצה להראות $a\in[m]$. נניח בשלילה $a\in[100]\setminus[m]$, כלומר $a>m=100-n$. נקבל $b+n>100+n$. נעביר אגפים ונקבל $b>100$ וזו סתירה. אזי $a\in[m]\wedge\{b,\underbrace{b+n}_{a}\}\in E$ ומעקרון ההפרדה $\{b,a\}\in E$ כדרוש.

$\supseteq$: יהי $\{a,b\}\in\tilde{E}$, ובה"כ $a\geq b$ ובה"כ $\{a,b\}\in\{i\in[n]\colon\{i,i+m\}\}$ כלומר קיים $i\in[n]$ כך ש־$\{a,b\}=\{i,i+m\}$ ומההנחות $a=i+m,b=i$. צ.ל. $\{a,b\}\in E$. ידוע: $b\leq a=i+m\leq n+m=100$ כלומר $a,b\in[100]$ ולכן $\{a,b\}\in\mathcal{P}_2(V)$. גם נדע $|a-b|=a-b=i+m-i=m$. סה"כ מעקרון ההפרדה $\{a,b\}\in E$ כדרוש.

נסמן ב־V_n^1 וב־V_n^2 את קבוצת כל הקודקודים מדרגה n בגרף G_1 ו־G_2 בהתאמה.

למה 2. $|V_2^1|=|V_2^2|$. הוכחה. נבחין כי הקבוצות E_1,E_2 הן מהצורה בעבורה הוכחנו את הטענה לעיל, כלומר מצאנו הגדרה שקולה, מפושטת, לקבוצות הללו. נניח בשלילה קיום איזומורפיזם $f\colon V^V$ בין G_1 ל־G_2. על בסיס טענה שהוכחנו בכיתה, $\forall v\in V.d_{G_1}(v)=d_{G_2}(f(v))$. נניח בשלילה $|V_n^1|\neq|V_n^2|$, ובה"כ $|V_n^1|>|V_n^2|$, אזי מעקרון שובך היונים קיימת $v\in V_n^1$ כך ש־$f(v)\notin V_n^2$, כלומר $d_{G_2}(f(v))\neq d_{G_1}(v)$ וזו סתירה לטענה שהוזכרה קודם לכן. בפרט, נדע $|V_2^1|=|V_2^2|$ כדרוש.

למה 3.

$$V_2^E=[\min\{n,m\}]\ \big(\Longrightarrow\ |V_2^E|=\min\{n,m\}\big)$$

הוכחה. בה"כ $n\leq m$ (כלומר $\min\{n,m\}=n$). נוכיח הכלה דו כיוונית. מצד אחד, אם $v\in V_2^E$, אז מההגדרה השקולה המפושטת מצאנו $\{v,v+n\},\{v,v+m\}\in E$. ידוע $v+m\in V$ כלומר $v+m\leq 100$ ונציב ונקבל $v+100-n\leq 100$ וסה"כ $v\leq n$ אזי $v\in[n]$ כדרוש. מצד שני, אם $v\in[n]$ אז $v\in[m]$ ולכן מההגדרה המפושטת $\underbrace{\{v,v+n\}}_{e_2},\underbrace{\{v,v+m\}}_{e_1}\in E$, ומשום ש־$m\neq n$ אז $v+m\neq v+n$ ולכן $e_1\neq e_2$ אלו שני צמתים שונים, וסה"כ $d(v)=2$ (לא ייתכן יותר כי אין עוד מקרים בהגדרה בעבורם תתכן יצירת קשת נוספת) כלומר $v\in V_e^E$.

סה"כ, מלמה 3, $|V_2^1|=10,|V_2^2|=11$ כלומר $|V_2^1|\neq|V_2^2|$ וזו סתירה ללמה 2. הנחת השלילה נסתרה, וההוכחה תמה. ■

.... (6) ....

.... (7) ....

.... (8) ....

.... (9) ....

.... (10) ....