תרגיל בית 7 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. תהא A מטריצה ריבועית כך ש־$(A+2I)^2=0$. הוכיחו כי $A+\lambda I$ הפיכה אם ורק אם $\lambda \neq 2$.

2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. הוכיחו שקיים $p \in \mathbb{F}_{n^2-1}[x]$ כך ש־$A^{-1}=p(A)$ (כאשר הכוונה ב־$p(A)$ היא שאם $p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ אז $p(A)=\sum_{i=0}^{m} a_i A^i$).
   הערה בלינארית 2 נוכיח שלמעשה קיימת $p \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ המקיימת $p(A)=A^{-1}$.

3. תהי A מטריצה כך שקיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$A^m=0$. הוכיחו ש־$I+A$ וגם $I-A$ הפיכות.

4. יהיו $A,B,C \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש־$AB$ הפיכה ו־BC לא הפיכה. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $AC+BC$ לא הפיכה
   ב. $A+B$ הפיכה

5. יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$A=I+AB$.
   א. הוכיחו כי A הפיכה
   ב. הוכיחו כי A,B מתחלפות
   ג. הוכיחו כי אם B מטריצה סימטרית אז גם A מטריצה סימטרית
   ד. הוכיחו כי $B^3=0$ אם ורק אם $A=I+B+B^2$

6. כתבו את כל המטריצות האלמנטריות ב־$M_2(\mathbb{Z}_3)$.

7.
   א. מצאו מטריצה הפיכה P עבורה

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   ב. מצאו מטריצה הפיכה Q עבורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q$$