חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א -- תרגיל בית 4

שאלות להגשה:

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0}$, עבור $k\in\mathbb{N}$ ומספרים כלשהם $a_0,\dots,a_k\geq 0$.

(ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+\cdots+\frac{(k+n)!}{n!}\right)$, עבור $k\in\mathbb{N}$.

2. עבור $0<b_1<a_1$ נגדיר סדרות (a_n) ו־(b_n) באופן הבא:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$$

הוכיחו כי שתי הסדרות מתכנסות לאותו הגבול וחשבו אותו

3. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) תהי (a_n) סדרה. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=L$ אז גם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

(ב) תהי(x_n) סדרה ותהי (y_n) סדרה עולה ממש השואפת ל־∞. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=L$ אז גם $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=L$.

4. תהי סדרה a_n כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\neq 0$ ונניח כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. הראו כי $\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{1/a_n}=e$.
רמז: הוכיחו ראשית עבור המקרה ש־ $a_n>0$ החל ממקום מסוים.

5. קבעו האם $\{\sin(n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת?

6. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נניח כי $a_{n+1}-a_n\longrightarrow 0$. הוכחנה כי

$$\mathcal{P}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=\left[\liminf_{n\to\infty}a_n,\limsup_{n\to\infty}a_n\right]$$

7. מצאו סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת כי $a_{n+1}-a_n\longrightarrow 0$ וגם $\mathcal{P}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=[0,1]$.

8. תהי a_n סדרה חיובית כך ש:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}1.$$

מה ניתן לאמר על ההתנהגות הגבולית שלה? מצאו דוגמת נגד או הוכיחו שלא יכול להתקיים:

(א) $a_n\xrightarrow{n\to\infty}0$

(ב) $a_n\xrightarrow{n\to\infty}1$

(ג) $a_n\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

(ד) a_n לא מתכנסת במובן הרחב.

9. נגדיר $a_n=\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$. הראו כי $\mathcal{P}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right)=[0,1]$.
הדרכה: הראו כי כל $x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ הוא גבול חלקי והיעזרו בצפיפות הרציונליים כדי להסיק ל־$[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.

10. הוכיחו את משפט בולצאנו ויירשטראס ישירות תוך שימוש בעקרון הרווחים המקוננים של קנטור, וללא שימוש באקסיומת השלמות (או בתוצאות שהוכחנו ממנה)

11. הראו כי הטענות הבאות שקולות ב $\mathbb{R}$.

(א) אקסיומת השלמות.

(ב) עקרון הרווחים המקוננים של קנטור.

(ג) כל סדרת קושי מתכנסת.

12. מצאו סדרה a_n בעלת יותר מ2 גבולות חלקיים המקיימת:

$$a_n \cdot a_{n+1} \to 1$$

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. הוכיחו כי כל סדרה מונוטונית מתכנסת (למספר סופי או במובן הרחב).

2. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$ עבור $q\in\mathbb{Q}$ (ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2}{(2n+1)(2n-1)}\right)^{1-n^2}$ (ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-4}$

3. תהי (x_n) סדרה כך ש־$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=c$, כאשר c גבול סופי או $\pm\infty$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=c$.

4. נגדיר סדרה (x_n) ע"י

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_{n+1}=\frac{3}{4-x_n}.$$

הוכיחו כי (x_n) מתכנסת וחשבו את גבולה.

5. נגדיר סידרה באופן הבא:

$$a_0=0,\ \ a_1=1,\ \ a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

רמז: הראו כי $a_n=\frac{2}{3}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$.

6. עבור a_1,b_1 חיוביים נגדיר שתי סדרות באופן הבא:

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ \ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

7. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{kn}{n}}$, עבור $k\in\mathbb{N}$.

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

8. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולן.

(א) $a_1=\sqrt{6},\ \ a_{n+1}=\sqrt{6a_n}$.

(ב) $a_1=\frac{3}{2},\ \ a_{n+1}=\sqrt{3a_n-2}$.

(ג) $a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}$.

9. **נגדיר** $a_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. **הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.**
רמז: **היעזרו באי־שוויון** $\sin x \leq x$ **המתקיים לכל** $x \geq 0$ **(ניתן להשתמש באי־שוויון ללא הוכחה. נוכיח אותו בהמשך הקורס).**

10. **חשבו את הגבול** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ **עבור** $p \in \mathbb{N}$.

11. **הוכיחו כי לסדרה הבאה אין גבול:** $a_{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$ $a_1 > 0$.