מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 2

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

מוגש עבור: נטלי שלום

תאריך הגשה: יום רביעי, 22.11.2023

1. מציאת מידע על קבוצות נתונות

(א) כמות האיברים בכל אחת מהקבוצות:

A. 3 B. 3 C. 3 D. מבוטל E. 3

(ב) נכון (T) או לא נכון (F):

1. T 2. F 3. F 4. T 5. F

(ג) תתי הקבוצות של E:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &= \mathcal{P}(\{1,\{1,2,3\},3\}) \\ &= \{\varnothing,\{1\},\{\{1,2,3\}\},\{3\},\{1,3\},\{1,\{1,2,3\}\},\{3,\{1,2,3\}\},\{1,\{1,2,3\},3\}\}\end{aligned}$$

2. הוכחת טענות בסיסיות

סעיף א׳

- צ.ל.:

$$\begin{aligned}A &:= \{2,-1\} \\ B &:= \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > x\right\} \\ A &\subseteq B\end{aligned}$$

- כלומר, לפי הגדרת הכלה ולפי עיקרון ההפרדה (בהתאמה):

$$\begin{aligned}& \forall x \in A. x \in B \\ \iff & \forall x \in B. \left(x^2 > x\right) \land (x > \mathbb{Z})\end{aligned}$$

- ומשום שנתונים האיברים ב־A, נוכל להציב ולהוכיח כי:

$$2^2 > 2 \land (-1)^2 > -1 \land 2,-1 \in \mathbb{Z}$$

- זהו פסוק אמת, ולכן הטענה הוכחה.

סעיף ב׳

- צ.ל.:

$$A := \{n^2 + n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_{\text{even}}$$

- ראשית כל, נוכיח כי $\forall n \in \mathbb{N}.n^2 + n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$:
  - נפרק לשני מקרים: הראשון עבור n זוגי והשני עבור n אי־זוגי:
    - במקרה ש־n זוגי, אז $n^2 + n = n \cdot n + n$ ומכיוון שכפל מספרים זוגיים הוא מספר זוגי וחיבור זוגיים הוא זוגי אז הטענה נכונה.
    - במקרה ש־n אי־זוגי, אז n^2 אי־זוגי (כפל אי־זוגיים הוא אי זוגי) אך $n^2 + n$ זוגי (חיבור אי זוגיים הוא זוגי). לכן, הטענה נכונה גם במקרה הזה.
  - לפי הגדרת $\mathbb{N}_{\text{even}}$ כקבוצה הכוללת בתוכה את כל האיברים הטבעיים הזוגיים, הטענה נכונה.
- נשתמש בלוגיקה כדי לנסח את הטענה שהוכחנו באופן שונה:

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}.n^2 + n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \implies &\neg(\exists n \in \mathbb{N}.n^2 + n \notin \mathbb{N}_{\text{even}}) \end{aligned}$$

או במילים: "לא קיים מספר טבעי n, שעבורו $n^2 + n$ לא זוגי". נכנה משפט זה משפט (1).

- לפי עיקרון ההחלפה:

$$\forall x.(x \in A \iff \exists n \in \mathbb{N}.n^2 + n = x)$$

- לפי הגדרת ההכלה:

$$\forall x \in A.x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$$

- נניח בשלילה שטענה זו שגויה:
  - לפיכך, $\exists x \in A.x \notin \mathbb{N}_{\text{even}}$.
  - לפי הטענה שנובעת מעיקרון ההחלפה נובע כי:

$$\begin{aligned} &\forall x.(\exists n \in \mathbb{N}.n^2 + n = x) \to (x \notin \mathbb{N}_{\text{even}}) \\ &\implies \exists n \in \mathbb{N}.n^2 + n \notin \mathbb{N}_{\text{even}} \end{aligned}$$

  - שסותר את משפט (1), לכן הנחת השלילה שגויה.
- משום שהנחת השלילה שגויה אז הטענה נכונה, לפי הגדרת טענת השלילה כהיפוך לטענה שאנחנו צריכים להוכיח.
- **מש"ל ■**

סעיף ג׳

i. צ.ל. + שקילות לפי הכלה דו כיוונית:

$$
\begin{aligned}
&A := \{|x| \colon x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty) \\
\iff &(A \subseteq [0, \infty)) \land ([0, \infty) \subseteq A) \\
\iff &(\forall n \in A . n \in [0, \infty)) \land (\forall n \in [0, \infty) . n \in A)
\end{aligned}
$$

ii. כמו כן ניתן להגדיר את הטווח בין 0 ל־∞ כך, לפי הגדרת טווח ולפי הגדרת עיקרון ההפרדה:

$$n \in [0, \infty) \iff n \in \{n \in \mathbb{R} \mid n \leq 0\} \iff n \in \mathbb{R} \land n \geq 0$$

iii. וניתן להגדיר כך את A, לפי עקרון ההחלפה:

$$n \in A \iff \exists x \in \mathbb{R} . n = |x|$$

iv. נציב את (ii) ואת (iii) ב־(i):

$$
\begin{aligned}
&\forall n . ((\exists x \in \mathbb{R} . n = |x|) \to (n \in \mathbb{R} \land n \geq 0)) \\
&\land ((n \in \mathbb{R} \land n \geq 0) \ \to (\exists x \in \mathbb{R} . n = |x|))
\end{aligned}
$$

v. נוכיח בחלוקה למקרים כי הערך המוחלט של כל מספר גדול מ־0 (הדבר הראשון שצריך להוכיח):

- אם המספר גדול מ־0, אז הטענה מתקיימת באופן טריוואלי.
- אם המספר קטן מ־0, אז לפי הגדרת הערך המוחלט הערך המוחלט של המספר גדול מ־0, ולכן הטענה נכונה באופן טריוואלי.

vi. נוכיח כי מספר ממשי גדול מ־0 הוא הערך המוחלט של ממשי כלשהו.

- במילים אחרות, יהי $x \in \mathbb{R}$. אם x גדול מ־0, אז $x = |x|$. משום שידוע שהוא גדול מ־0, לפי הגדרת הערך המוחלט, x שווה לערך המוחלט של עצמו.

i. טענות (v) ו־(vi) מוכיחות את (v) אשר שקול לטענה שצ.ל., לכן – **מש"ל** ■

3. הפשטת והוכחת טענות

סעיף א׳

- נטען:

$$A := \{x \in \mathbb{Z} \colon \exists y \in \mathbb{Z} . (x = y + 1)\} = \mathbb{Z}$$

- נפשט, לפי הגדרת הכלה ועיקרון ההפרדה:

$$
\begin{aligned}
&P_1 := (\forall z \in \mathbb{Z} . (z \in \mathbb{Z} \land (\exists y . z = y + 1))) \\
&P_2 := (\forall z \in \mathbb{Z} . (\exists y \in \mathbb{Z} z = y + 1) \to z \in \mathbb{Z}) \\
&P_1 \land P_2
\end{aligned}
$$

- P_2 נכון באופן טריוואלי. נותר להוכיח את P_1:
  - נפשט:

$$Q_1 := \forall z \in \mathbb{Z}. z \in \mathbb{Z}$$
$$Q_2 := \forall z \in \mathbb{Z}. (\exists y. z = y + 1)$$
$$Q_1 \wedge Q_2$$

- Q_2 טאוטולוגיה. נותר להוכיח את Q_1. הוכחה ל־Q_1: יהי z. עבור z קיים $y = z - 1$. לפיכך, $z = y + 1$ כלומר $\tilde{y} = z + 1$. לכן, Q_1 הוכח.

- לכן, P_1 הוכח ומסיבה זו הטענה כולה הוכחה.

סעיף ב׳

- נטען:

$$
\begin{aligned}
& A := \left\{ x \in \mathbb{Q} \colon \frac{x}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q} \right\} = \emptyset && (1) \\
\iff & \forall x \in A. x \in \emptyset && (2) \\
\iff & \forall x \in \mathbb{Q}. \rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}. x \in \emptyset && (3)
\end{aligned}
$$

- המעבר בין (1) ל־(2) נכון לפי הכלה דו כיוונית + הגדרת הכלה, והמעבר בין (2) ל־(3) נכון לפי עקרון ההפרדה.
- נניח בשלילה ש־$\exists x \in \mathbb{Q}. \frac{x}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$:
  - נניח שקיים פתרון ל־$\frac{x}{\sqrt{2}}$ (אני לא עומד להוכיח את זה) ונסמן אותו ב־y. מתוך הנחת השלילה, $y \in \mathbb{Q}$.
  - נסכם: $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ נכפיל את המשוואה ב־$\frac{y}{\sqrt{2}}$, כלומר $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$. נניח ש־$\sqrt{2}$ הוא אי־רציונלי (אני לא עומד להוכיח גם את זה) וזה עומד בסתירה לכך שהוא מהווה תוצאת חילוק של שני רציולים. כלומר, טענת השלילה נשללה.
- השלילה לטענת השלילה היא $\forall q \in \mathbb{Q}. \frac{x}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, כלומר לא קיים אף x המקיים את הכמת שבטענה שצ.ל. ולכן הטענה נכונה באופן ריק.
- הוכחנו את שני החלקים של ההכלה הדו כיוונית, אשר שקולה לטענה שצ.ל., לכן הטענה הוכחה.
- **מש"ל** ■

סעיף ג׳

- נטען:

$$A := \left\{ x \in \mathbb{N} \colon x^2 - 5x = 14 \right\} = \{7\}$$

- מתוך עקרון ההפרדה:

$$x \in A \iff x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x = 14$$

- נמצא מספרים שמקיימים זאת. לפי הגדרת משוואה ריבועית, ישנם שני ערכי x אפשריים המקיימים $x^2 - 5x = 14$ (הם 7, -5) אך רק אחד מהם הוא טבעי, כלומר האיבר היחיד המתאים להגדרת הקבוצה הוא 7 . לפי זאת, הטענה הוכחה.

4. ניתוח קבוצה

לצורך הנוחות, להלן הגדרה של B:

$$B = \big\{\{x \in A \colon a \mid x\} \colon a \in \mathbb{N}_+\big\}$$

(א) האיברים ב־B, מפורשות:

$$B = \big\{\{2, 4, \ldots, 100\}, \{3, 6, \ldots, 99\}, \{4, 8, \ldots, 100\}, \ldots \{100\}, \emptyset\big\}$$

ישנם 101 איברים בקבוצה.

נוכל לדעת כי $A \in B$ כי זה אומר לפי עקרון ההחלפה $\exists n \in \mathbb{N}_+ . \{x \in A \colon a \mid x\} = A$. נציב $n = 1$, ונמצא שהוא מקיים את $\{x \in A \colon 1 \mid x\}$, ומכיוון ש־$1 \mid x$ הוא טואוטולוגיה (כל מספר טבעי מתחלק ב־1) קיבלנו שזה פסוק אמת. $A = A$

(ב) יש 50 סינגלטונים (מ־51 עד 100 כולל) ב־B, כי עבור כל a בטווח הזה הוא מחלק רק מספר 1 בין 1 ל־100 (שהוא המספר עצמו).

5. כתיבה פורמלית של קבוצות

(א) קבוצת הטבעיים המתחלקים ללא שארית ב־14 וב־6:

$$\big\{x \in \mathbb{N} \colon 6 \mid x \wedge 14 \mid x\big\}$$

(ב) קבוצה המתקבלת מהחלפה של של כל מספר שלם בקבוצת הממשיים שקטנים ממנו:

$$\big\{\{x \in \mathbb{N} \colon x < a\} \colon a \in \mathbb{N}\big\}$$

(ג) קבוצה המתקבלת מהחלפה של כל מספר ממשי בריבועו:

$$\big\{x^2 \colon x \in \mathbb{R}\big\}$$

(ד) קבוצת הממשיים שאינם רציונלים:

$$\big\{x \in \mathbb{R} \colon x \notin \mathbb{Q}\big\}$$

(ה) הקבוצה המתקבלת מהחלפה של כל מספר טבעי בקבוצת המחלקים אותו:

$$\big\{\{x \in \mathbb{N} \colon x \mid a\} \colon a \in \mathbb{N}\big\}$$

(ו) הקבוצה המתקבלת מהחלפת ממשי בחזקה השלישית שלו:

$$\big\{x^3 \colon x \in \mathbb{R}\big\}$$

6. קביעת נכונות טענות

(א) לא נכון – לפי הגדרת קבוצת חזקה, $\{4, 7\} \in \{1, 4, 7\} \implies \{4, 7\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 4, 7\})$, אשר אינו מתקיים.

(ב) נכון - לפי הגדרת עקרון ההפרדה, $7 \in \mathbb{R} \wedge 7^3 - 5 \cdot 7^2 - 10 \cdot 7 - 28 = 0$, אשר שניהם פסוקי אמת (לפי הצבה + הגדרת קבוצת הממשיים).

(ג) נכון - לפי עקרון ההחלפה, $\exists x \in \mathbb{R}.x^3 - 5x^2 - 10x - 20 = 8$. נציב $x = 7$, כך שהביטוי פסוק אמת והטענה הוכחה ($\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}.\tilde{x}^3 - 5\tilde{x}^2 - 10\tilde{x} - 20 = 8$).

(ד) לא נכון - נגדיר $A := \{6, 17, 19\}$. לכן, לפי עקרון ההפרדה, הטענה הבאה נכונה בעבור A: $(A \in \mathcal{P}(N)) \wedge \left(\forall a, b \in A.a > b \to \left(\exists k \in \mathbb{N}_{>1}.\frac{a-b}{k} \in \mathbb{N}_{>1}\right)\right)$. נבדוק ידנית: בעבור $17 > 6$ הטענה לא מתקיימת כי $17 - 6$ ראשוני, והן 1 (כמחלק) והן $\frac{11}{11}$ (לאחר חילוק) לא מתאימים להגדרה כטבעיים גדולים מ־1.

(ה) נכון - לפי הגדרת קבוצת חזקה, $\emptyset \subseteq \emptyset \iff \emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$, אשר פסוק אמת כי $\emptyset = \emptyset$.

(ו) נכון - נגדיר $A := \mathcal{P}(A)$. כל קבוצה שווה לעצמה, לכן $A \subseteq A$, לכן לפי הגדרת קבוצת חזקה $A \in \mathcal{P}(A)$ (נציב ונמצא את הטענה שצ.ל.).

(ז) לא נכון - ניקח דוגמא $A = \{1\}$; לכן, $P(A) = \left\{\emptyset, \left\{\{1\}\right\}\right\}$. לפיכך $\{1\} \subseteq \left\{\emptyset, \left\{\{1\}\right\}\right\}$ אשר פסוק שקר.

(ח) נכון - במילים אחרות, עבור כל קבוצה A כל האיברים בה נמצאים בקבוצת החזקה שלה. מנגד, לפי הגדרת קבוצת חזקה, היא תכיל אך ורק קבוצות שמקוננות בתוך כל אחת מהקבוצות + קבוצה ריקה, לכן לא נוכל להרכיב ממנה את A אלא אם היא קבוצה ריקה בעצמה.

7. הוכחה כי הכלת קבוצות אמ"מ הכלת קבוצות חזקה

- צ.ל. + פישוט:

$$
\begin{aligned}
&(1) && \left(\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B\right) \\
\iff\ &(2) && \Big(\left(\forall x \in \mathcal{P}(A).x \in \mathcal{P}(B)\right) \iff \left(\forall y \in A.y \in B\right)\Big) \\
\iff\ &(3) && \Big(\left(\forall x \subseteq A.x \subseteq B\right) \iff \left(\forall y \in A.y \in B\right)\Big) \\
\iff\ &(4) && \Big(\left(\forall (\forall t \in x.t \in A).\forall t \in x.t \in B\right) \iff \left(\forall y \in A.y \in B\right)\Big) \\
\iff\ &(5) && \Big(\left(\forall t \in A.t \in B\right) \iff \left(\forall y \in A.y \in B\right)\Big)
\end{aligned}
$$

- המעבר בין (1) ל־(2) והמעבר בין (3) ל־(4) נכונים לפי הגדרת הכלה, בעוד המעבר בין (2) ל־(3) נכון לפי הגדרת קבוצת חזקה והמעבר בין (4) ל־(5) כי בשני המקרים מתואר מה נכון עבור x $\forall t \in x$ כך שאפשר להוריד את הכמת. קיבלנו טענה שקולה (5) - **מש"ל** ■

8. הוכחות על הרציונלים לפי הגדרת הקבוצה

הכנה:

- נתון + עקרון ההפרדה:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Z}.\exists n \in N_+.x = \frac{m}{n}\right\} \implies x \in \mathbb{Q} \longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \exists m \in \mathbb{Z}.n \in \mathbb{N}_+.x = \frac{m}{n}$$

- למטרות ההוכחה, נכנה טענה זו "הגדרת הרציונלים".

חלק ראשון - חיבור רציונלים

- צ.ל.:

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}. q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$$

- יהי q_1, q_2 מספרים רציונלים. נוכיח ש־$q_1 + q_2$ גם רציונלי. לפי הגדרת הרציונלים, המספרים האלו יכולים להיות מבוטאים ע"י שברים $q_1 = \frac{m_1}{n_1}, q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, כאשר $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ו־$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ לכן:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_2}{n_1 n_2}$$

- ניתן לדעת כי $a := m_1 n_2 + m_2 n_2$ שלם כי הוא מורכב ממספרים שלמים, כלומר $a \in \mathbb{Z}$.
- ניתן לדעת ש־$b := n_1 n_2 \in \mathbb{N}_+$ כי הוא מורכב ממכפלה של טבעיים, אשר היא טבעית, לכן $b \in \mathbb{N}_+$.
- נסכם – ניתן לדעת כי $\exists a \in \mathbb{Z}. \exists b \in \mathbb{N}_+. q_1 + q_2 = \frac{a}{b}$, שעונה על הגדרת הרציונלים ולכן הטענה הוכחה.

חלק שני - חיסור רציונלים

- צ.ל.:

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}. q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}$$

- ידוע ש־$-q_2$ רציונלי כי מתוך האקסיומות לכל רציונלי קיים הופכי רציונלי. הגענו ל־$q_1 + (-q_2)$, שנכון כי הוכחנו כי חיבור רציונלים רציונלי.

חלק שלישי - כפל רציונלים

- צ.ל.:

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}. q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q}$$

- כלומר:

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}. \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

- כפל שלמים הוא שלם, לכן $m_1 m_2 \in \mathbb{Z}$. כמו כן כפל טבעיים טבעי לכן $n_1 n_2 \in \mathbb{N}$. לכן כפל רציונלים עונה להגדרת הרציונלים.

חלק רביעי - חילוק רציונלים

- צ.ל.:

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}. \frac{q_1}{q_2} = q_1 \cdot {q_2}^{-1} \in \mathbb{Q}$$

- כלומר צריך להוכיח ש־$q_2{}^{-1} \in \mathbb{Q}$, כי כבר הוכחנו שכפל רציונלים רציונלי. לפי הגדרת הרציונלים, זה אומר ש־$\forall t \in \mathbb{Z}.\forall m \in \mathbb{N}.\frac{m}{t} \in \mathbb{Q}$. נפלג למקרים: במקרה ש־$t > 1$ זה טאוטולגיה לפי הגדרת הרציונלים, בעוד אם $t < 1$ ניתן להכפיל את השבר ב־-1 כך ש־$t > 1$ ואז זו עדיין טאוטולוגיה. לכן חילוק רציונלים גם הוא רציונלי.

משל"ל ■

סעיף ב׳

- צ.ל. + פישוט:

$$\forall r.\{q + r \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} \longleftrightarrow r \in \mathbb{Q} \tag{1}$$

$$\iff \forall r.\{q + r \mid q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q} \land \mathbb{Q} \subseteq \{q + r \mid q \in \mathbb{Q}\} \longleftrightarrow r \in \mathbb{Q} \tag{2}$$

$$\iff \forall r.\Big(\big(\forall(\exists q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}\big) \land \big(\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x\big) \longleftrightarrow r \in \mathbb{Q}\Big) \tag{3}$$

$$\iff \forall r.\Big(\big(\forall(\exists q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}\big) \land \big(\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x\big) \to r \in \mathbb{Q}\Big)$$
$$\land \Big(r \in \mathbb{Q} \to \big(\forall(\exists q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}\big) \land \big(\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x\big)\Big) \tag{4}$$

- המעבר בין (1) ל־(2) נכון לפי הכלה דו כיוונית, ובין (2) ל־(3) לפי הגדרת הכלה, הגדרת עקרון ההחלפה והמעבר בין (3) ל־(4) לפי גרירה דו כיוונית.
- נוכיח את הגרירה הראשונה: נניח $r \in \mathbb{Q}$, ונוכיח:

$$\big(\forall(\exists q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}\big) \land \big(\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x\big)$$

  - נוכיח את התנאי הראשון:
    - צ.ל. $\exists(q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}$
    - מכיוון ש־x נתון הוא חיבור של רציונלים, לכן הוא בעצמו רציונלי.
  - נוכיח את התנאי השני:
    - צ.ל. $\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x$.
    - יהי $x \in \mathbb{Q}$. ידוע שקיים $r \in \mathbb{Q}$. נתבונן בשיוויון $r + q = x$, נחסיר את r ונקבל $q = x - r$, ומכיוון ש־x ו־r ומכאן ש־q קיים.
- נוכיח את הגרירה הראשונה:$q \in \mathbb{Q}$ נניח:$r \in \mathbb{Q}$

$$\big(\forall(\exists q \in \mathbb{Q}.q + r = x).x \in \mathbb{Q}\big) \land \big(\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x\big)$$

  - (אני מניח את כל הדבר הזה רק כי אני צריך אבל אני אשתמש רק בחצי הימני)
  - ונוכיח $r \in \mathbb{Q}$;

- ידוע ש־$\forall x \in \mathbb{Q}.\exists q \in \mathbb{Q}.r + q = x$. נחסר את המשוואה בפנים ב־q, ומכאן נקבל ש־$r = q - x$. מכיוון שידוע $x \in \mathbb{Q}$ וגם ומשום שחיסור רציונלים הוא רציונלי (כמו שהוכחתי בסעיף הקודם), אזי

- **מש"ל** ■

9. הוכחה נוספת

- צ.ל. (לפי עקרון ההפרדה, הגדרת הכלה והגדרת קטע):

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.a < b < c < d \to \exists \varepsilon > 0.[b - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq (a, b)$$
$$\iff \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.a < b < c < d \to \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0.[b - \varepsilon_1, c + \varepsilon_2] \subseteq (a, b) \wedge \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

- (אלא אם מצוין אחרת, כל טענה קשורה ע"י $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.a < b < c < d \to \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2.\varphi(a, b, c, d, \varepsilon)$)
- נציב $b - a = \varepsilon_1, d - c = \varepsilon_2$ (ידוע שהם קיימים כי קיימים a, b, c, d כחלק מהנתונים). נציב $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. נוכיח $[b - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq (a, b)$, או במילים אחרות (הגדרת הכלה), $\forall x \in [b - \varepsilon, c + \varepsilon] \implies x \in (a, d)$;
- יהי $x \in [b - \varepsilon, c + \varepsilon]$ משמע $b - \varepsilon \leq x \leq c + \varepsilon$ ("הנחה 1"). צ.ל. $a < x < d$ ("טענה 1").
- נתבונן ב־$b - \varepsilon_1 \leq x \leq c + \varepsilon_2$ ("הנחה 2"). נציב לפי הגדרתם; $b - b + a \leq x \leq c + d - c$ כלומר $a \leq x \leq d$ ("טענה 3").
- לפי הגדרת מרחק (הגדול ביותר פחות הקטן ביותר), ולפי הגדרת a, b, c, d, נוכל לדעת ש־$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ ("טענה 2").
- לפי טענה 2, נוכל להחליף את $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ בהנחה 2 ב־ε (כי האי שיוויון קטן/גדל בצורה מתאימה) ולכן הנחה 2 שקולה להנחה 1. מכאן נובע כי טענה 1 (שצ.ל.) נגררת מהנחה 1 (שנתונה). **מש"ל** ■

סוף ■