מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 7

ניתן בתאריך 27.12.2023. להגשה עד יום רביעי 3.1.2024.

1. נתונה הפונקציה הבאה:

$$H = \lambda f \in \mathbb{Z} \to \{0,1\} .\lambda n \in \mathbb{N}_{+}.f(n) + f(-n)$$

(א) כתבו את התחום וטווח אפשרי של H.

(ב) האם H חח"ע? הוכיחו את קביעתכם.

(ג) האם H היא על בהתייחס לטווח שכתבתם? הוכיחו את קביעתכם. אם התשובה היא לא, מצאו את $Im(H)$ והוכיחו תשובתכם.

2. תהיינה A,B,C קבוצות לא ריקות, $f \in A \to B$, $g \in B \to C$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $g \circ f$ חח"ע אז g חח"ע.

(ב) אם $g \circ f$ חח"ע ו־f על אז g חח"ע.

(ג) אם $g \circ f$ על (ביחס ל־C) אז g על.

(ד) אם $g \circ f$ על (ביחס ל־C) אז f על.

(ה) אם $g \circ f$ על (ביחס ל־C) ובנוסף g חח"ע אז f על.

3. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, בדקו האם הפונקציה חח"ע והאם היא על (בהתייחס לטווח הנתון).

(א) $f = \lambda n \in \mathbb{N}.n^2 - 6n + 8$, כאשר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

(ב) $f = \lambda \langle A,B \rangle \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) .A \cap B$, כאשר $f : P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})$

(ג) $f = \lambda \langle g,h \rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 .g \circ h$, כאשר $f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

(ד) $f = \lambda n \in \mathbb{N}.\, \lambda x \in \mathbb{R}.\, n$, כאשר $f : \mathbb{N} \to (\mathbb{R} \to \mathbb{N})$

(ה) $f = \lambda g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.\, g(0)$, כאשר $f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

(ו) $f = \lambda g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.\, g(r)$, כאשר $f : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4. נתונה הפונקציה:

$$F = \lambda g \in \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) .\, \lambda x \in \mathbb{N}.\, g(x)(x)$$

(א) מצאו תחום וטווח אפשרי לפונקציה F.

(ב) חשבו את ההצבה הבאה:

$$F(\lambda n \in \mathbb{N}.\, \lambda m \in \mathbb{N}.\, n+1)(0)$$

(ג) הוכיחו/הפריכו: F חח"ע.

5. תהיינה A, B קבוצות כלשהן.

(א) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על פונקציה $f \in A \to B$ כדי שיתקיים

$$\forall X \subseteq A.\, f^{-1}[f[X]] = X$$

והוכיחו את תשובתכם.

(ב) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על פונקציה $f \in A \to B$ כדי שיתקיים

$$\forall Y \subseteq B.\, f\left[f^{-1}[Y]\right] = Y$$

והוכיחו את תשובתכם.

6. תהיינה A, B קבוצות ותהי $f \in A \to B$. נגדיר שתי פונקציות:

$$f_{\to} \in \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B),\ f_{\to} = \lambda U \in \mathcal{P}(A).f[U]$$
$$f_{\leftarrow} \in \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A),\ f_{\leftarrow} = \lambda V \in \mathcal{P}(B).f^{-1}[V]$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f חח"ע אז $f_{\to}$ חח"ע.

(ב) אם f על B אז $f_{\to}$ על $\mathcal{P}(B)$.

(ג) אם f חח"ע אז $f_{\leftarrow}$ חח"ע.

(ד) אם f על B אז $f_{\leftarrow}$ חח"ע.

(ה) אם f חח"ע אז $f_{\leftarrow}$ על $\mathcal{P}(A)$.

7. **תזכורת מתרגיל בית 6:** בהינתן פונקציה $f : A \to B$ ו־$X \subseteq A$, <u>הצמצום של f ל־X</u> הוא פונקציה $f|_X : X \to B$ המקיימת $\forall x \in X.\, f|_X(x) = f(x)$.

תהיינה A, B, C קבוצות לא ריקות. נגדיר פונקציה H באופן הבא:

$$H : ((B \cup C) \to A) \to ((B \to A) \times (C \to A))$$
$$H = \lambda h \in (B \cup C) \to A.\, \langle h|_B, h|_C \rangle$$

(א) הוכיחו/הפריכו: H חח"ע.

(ב) מצאו תנאי מספיק והכרחי לכך ש־H היא על $(B \to A) \times (C \to A)$.