תרגיל בית 5 - אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם קיימת העתקה לינארית T המקיימת את התנאים הנתונים. אם קיימת, קבעו האם היא יחידה. אם היא יחידה מצאו אותה, את הגרעין והתמונה שלה, וקבעו אם היא חח"ע / על / איזומורפיזם:

~~א)~~ מעל השדה $\mathbb{Z}_3$, העתקה $T\colon \left(\mathbb{Z}_3\right)^3 \to M_2\left(\mathbb{Z}_3\right)$ המקיימת

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

~~ב)~~ מעל השדה $\mathbb{Z}_5$, העתקה $T\colon \left(\mathbb{Z}_5\right)^3 \to M_2\left(\mathbb{Z}_5\right)$ המקיימת

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

ג) מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}_2\left[x\right] \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\left(1+2x+x^2\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, T\left(1+x+x^2\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, T\left(1+x^2\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

~~ד)~~ מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$\operatorname{Im}\left(T\right) = \ker\left(T\right) = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

~~ה)~~ מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת

$$\operatorname{Im}\left(T\right) = \ker\left(T\right) = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

2. בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונים מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$, וקטור $v \in V$ ובסיס B של V. מצאו את $\left[v\right]_B$ בכל סעיף:

א)

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}, V = M_2\left(\mathbb{R}\right), v = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 3\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

ב)

$$\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5, V=\left(\mathbb{Z}_5\right)^5, v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, B=\left(\begin{pmatrix}1\\4\\0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

ג)

$$\mathbb{F}=\mathbb{R}, V=\mathbb{R}_4\left[x\right], v=2+4x-5x^3+x^4, B=\left(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x+x^2+x^3+x^4\right)$$

3. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה העתקה לינארית T ובסיסים B,C. חשבו את $\left[T\right]_C^B$ בכל סעיף:

א) $T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הנתונה על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\x-y\end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right), C=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ב) $T\colon\mathbb{R}_2\left[x\right]\to M_2\left(\mathbb{R}\right)$ הנתונה על ידי

$$T\left(ax^2+bx+c\right)=\begin{pmatrix}a+b & b+c\\c-a & a-b\end{pmatrix}$$

$$B=\left(1,1+x,1+x^2\right), C=\left(\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

ג) $T\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ הנתונה על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4\\x_1+3x_2+2x_3+4x_4\\2x_1+x_3-x_4\end{pmatrix}$$

כאשר B,C הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^3$ בהתאמה.

4. חשבו את המכפלות הבאות:

א.

$$\begin{pmatrix}1&0\\-2&-1\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix}6 & 7 & 9 & -12 & 3\\ 4 & 7 & 1 & -3 & 9\\ 1 & -7 & -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

5. יהי $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5$ ותהי $T\colon \mathbb{F}_2\left[t\right]\to\mathbb{F}^2$ המוגדרת על ידי $T\left(p\left(t\right)\right)=\begin{pmatrix}p\left(1\right)\\ p\left(2\right)\end{pmatrix}$. נגדיר

$$B=\left(1,t+1,t^2+t+1\right),C=\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

להיות בסיסים של $\mathbb{F}_2\left[t\right],\mathbb{F}^2$ בהתאמה. בתרגול ראינו ש־$\left[T\right]_C^B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

א) הוכיחו שלכל $p\in\mathbb{F}_2\left[t\right]$ מתקיים $\left[T\left(p\right)\right]_C=\left[T\right]_C^B\cdot\left[p\right]_B$ (ללא שימוש במשפט שאומר שזה מתקיים, כלומר חשבו את שני הצדדים של המשוואה ובדקו שהשיוויון אכן מתקיים).

ב) מצאו את הגרעין ואת התמונה של T באמצעות המטריצה המייצגת

6. יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T\colon V\to W$ העתקה לינארית. יהי C בסיס כלשהו של W.

א) הוכיחו שקיים בסיס B של V כך ש־$\dim\left(\ker\left(T\right)\right)$ העמודות הראשונות של $\left[T\right]_C^B$ הן עמודות אפסים

ב) נניח ש־T אינה העתקת האפס. הוכיחו שקיים בסיס B' של V כך שב־$\left[T\right]_C^{B'}$ אין עמודות אפסים בכלל