בדידה 1 ~ נטלי שלום ~ חזרה על מבחן הבית

שחר פרץ

3 ליולי 2024

Q1 .... (1)

a. **שאלה:** נניח שהשערת הרצף נכונה. (כלומר, $2^{\aleph_0}$ היא העוצמה הקטנה בויותר שגדולה מ־$\aleph_0$). הוכיחו/הפריכו: קיימת חלוקה Π של $\mathbb{R}$ כך ש־$|\Pi| < 2^{\aleph_0} \land \forall X \in \Pi . |X| < 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. נפריך. לפי השערת הרצף, מתקיים $|\Pi| \le \aleph_0$, ולכל $X \in \Pi$ מתקיים $|X| \le \aleph_0$. אז:

$$|\mathbb{R}| = \left|\bigcup_{X\in\Pi} X\right| \le \aleph_0$$

לפי איחוד לכל היותר בן מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לפחות בן מנייה. ■

b. **שאלה:** הוכיחו קיום חלוקה Π של $\mathbb{R}$ המקיימת $|\Pi| = 2^{\aleph_0}$, ולכל $X \in \Pi, |X| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. ידוע $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$. לכן קיים זיווג $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר לכל $r \in \mathbb{R}$, $A_r = f[\{r\}\times\mathbb{R}]$. החלוקה $\Pi = \{A_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ מקיימת את הדרוש. צ.ל. Π חלוקה, $|\Pi| = א, \forall X \in \Pi . |X| = א$. נוכיח ש־$\Pi$ חלוקה.

- **$\varnothing \neq \Pi$:** לכל $r \in \mathbb{R}$, נראה $A_r \neq \emptyset$. מתקיים, $\langle r, 0\rangle \in \{r\}\times\mathbb{R}$. f פונקציה ובפרט יחס מלא, ולכן קיים $f(\langle r, 0\rangle) \in A_r$. $f[\{r\}\times\mathbb{R}] = A_r$ לכן A_r אינו ריק.
- **$\bigcup \Pi = \mathbb{R}$:** ניעזר בהכלה דו־כיוונית.
  - $\subseteq$ לכל $r \in \mathbb{R}$, $A_r = f[\{r\}\times\mathbb{R}]$ ולכן גם $\bigcup_{r\in\mathbb{R}} A_r \subseteq \mathbb{R}$.
  - $\supseteq$ יהי $x \in \mathbb{R}$. צ.ל. קיום $r \in \mathbb{R}$ כך ש־$x \in A_r$. מכיוון ש־F על, אז קיים $\langle a, ba \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ כך ש־$f(\langle a, b\rangle) = x$. ניקח $r := a$, אז $x = f(\langle a, b\rangle) \in f[\{r\}\times\mathbb{R}] = A_r$.
- **זרות בזוגות:** יהיו $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ שונים, נרצה להוכיח $A_{r_1} \neq A_{r_2}$. אז ניקח ש־

$$x \in A_{r_1} = f[\{r_1\}\times\mathbb{R}] \implies \exists b_1 \in \mathbb{R} . x = f(\langle r_1, b_1\rangle)$$

באופן דומה, מכיוון ש־$x \in A_{r_2}$ אז נובע שקיים $b_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־$x = f(\langle r_2, b_2\rangle)$. כלומר, $f(\langle r_1, b_1\rangle) = f(\langle r_1, b_1\rangle)$. מכיוון ש־$f$ זיווג, נקבל $\langle r_1, b_1\rangle = \langle r_2, b_r\rangle$ ובפרט $r_1 = r_2$ וסתירה לז שהם שונים.

עד כה, Π חלוקה. נוכיח את הטענות שנותרו.

- **$|\Pi| = א$:** הוכחנו שלכל $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ שונים, A_{r_1}, A_{r_2} זרות ולא ריקות ובפרט נובע $A_{r_1} \neq A_{r_2}$ ולכן $\lambda r \in \mathbb{R}.A_r$ זיווג, ולכן $|\Pi| = א$.
- **לכל $r \in \mathbb{R}, |A_r| = א$:** לכל $r \in \mathbb{R}$, הפונקציה $\lambda x \in \mathbb{R}.f(\langle r, x\rangle)$ היא זיווג בין $\mathbb{R}$ ל־A_r (כי f חח"ע ועל. במבחן לפרט עוד) ולכן $|A_r| = א$.

■

c. שאלה ברמה קצת יותר גבוהה ממבחן. **שאלה:** נגדיר יחס שקילות מעל $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$S = \{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2 \colon\ |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}| \le \aleph_0\}$$

מצאו את $|\underbrace{(\mathbb{R}\to\mathbb{R})/S}_{B}|$

רמז: סעיף ב'.

הוכחה. נוכיח שהעוצמה היא $2^{א}$.

- $\le$ לכל מערכת נציגים של S, הפונקציה $\lambda a \in A.[a]_S$ היא זיווג. לכן, אם נקבע a כזו, נקבל $|(\mathbb{R}\to\mathbb{R})/S| = |A| \le |\mathbb{R}\to\mathbb{R}| = 2^{א} = 2^{א\cdot\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{א} = א^{א}$.
- $\ge$ נמצא פונקציה חח"ע $B \to (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$:

$$H = \lambda g \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}.[f_g]_S$$

כמה הערות: (ה"מטרה": להגדיר את f_g באופן כזה שלכל $g_1, g_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שונות, יתקיים $|\{x \in \mathbb{R} \mid f_{g_1}(x) \neq f_{g_2}(x)\}| = \aleph$).
נסמן $t \in X_t = [t]_{R_\Pi}$ כאשר Π החלוקה מסעיף (ב), ו־R_Π הוא היחס המושרה של החלוקה (תזכורת: בהינתן Π חלוקה של A, יחס השיקלות המושרה מ־Π הוא $R_\Pi := \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid\mid \exists X \in \Pi . x, y \in X\} = \bigcup_{C \in \Pi}(C \times C)$).

מסעיף ב', ידוע שקיימת חלוקה Π של $\mathbb{R}$ כך ש־..., ומכיוון ש־$|\Pi| = \aleph$, קיים $\varphi \colon \Pi \to \mathbb{R}$ זיווג. נבחר:

$$f_g := \lambda t \in \mathbb{R} . g(\varphi([t]_{R_\Pi}))$$

נוכיח כמה טענות שנדרשות מאיתנו:

– ***H* חח"ע:** נניח $g_2 \neq g_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ צ.ל. $|\{x \in \mathbb{R} \mid f_{g_1}(x) \neq f_{g_2}(x)\}| = \aleph$. אז קיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־$g_1(r) \neq g_2(r)$. אז קיים $X \in \Pi$ כך ש־$\varphi(x) = r$ מכיוון ש־φ על. אז לכל $t \in X$ מתקיים $f_{g_1}(t) = g(\varphi([t]_{R_\Pi})) = g_1(\varphi(X)) = g_1(r)$ ובאופן דומה $f_{g_2}(t) = g_2(r) \neq g_1(r)$ ולכן $|\{x \in \mathbb{R} \mid f_{g_1}(x) \neq f_{g_2}(x)\}| \leq |X| = \aleph$.

■

Q4 . . . . (2)

נגדיר $X = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} . f(n^2) = f(n)\}$. הוכיחו ע"י לכסון ש־$|X| \neq \aleph_0$.

הוכחה. נניח בשלילה שיש זיווג $F \colon \mathbb{P} \to X$. כאשר $\mathbb{P}$ קבוצת הראשוניים, ומתקיים $|\mathbb{P}| = \aleph_0$.

$$g = \lambda n \in \mathbb{N} . \begin{cases} F(p)(n) + 1 & \exists p \in \mathbb{P} . \exists k \in \mathbb{N}_+ . p^k = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

צ.ל.: $g \in X$, $\forall p \in \mathbb{P} . g \neq F(p)$. נוכיח.

- יהי $n \in \mathbb{N}$. נוכיח $g(n^2) = g(n)$. נפלג למקרים.
  1. אם $\exists p \in \mathbb{P} . \exists k \in \mathbb{N}_+ . n = p^k$ אז:

$$g(n^2) = F(p)(n^2) + 1 = F(p)(n) + 1 = g(n)$$

  כי $F(p) \in X,\ n = p^k, n^2 = p^{2k}$.

  2. אחרת: גם n, n^2 דא מקיימים את התנאי, ולכן $g(n^2) = 0 = g(n)$

- לא הוכחנו בכיתה.

■