ליניארית 8

שחר פרץ

16 בינואר 2025

. . . . (1) . . . .

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. נתבונן ב־:

$$C=\begin{pmatrix}A&A\\A&B\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

צ.ל. $\operatorname{rank}C\le 2\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

הוכחה. ידוע קיום $\tilde A,\tilde B$. ממשפט, לכל מטריצה P קיימת צורה מדורגת קאנונית, נסמנה $\tilde P$, וממשפט ידוע $\operatorname{rank}\tilde P=\operatorname{rank}P$. נסמן ב־$\operatorname{Col}P$ את מרחב העמודות של P וב־$\operatorname{Row}P$ את מרחב שורותיה. אם P ריבועית, אז ממשפט $\operatorname{Row}P=\operatorname{Col}P=\operatorname{rank}P$.

למה 1. תהי $P=\binom{X}{Y}$ מטריצה, כאשר X,Y ריבועיות. אז $\bar P=\binom{\tilde X}{\tilde Y}$ מקיים

$$\dim\operatorname{Row}P=\dim\operatorname{Row}\bar P=\dim\operatorname{Row}\tilde P\le\operatorname{rank}X+\operatorname{rank}Y$$

נתבונן ב־$\tilde P$. אז כמות שורות שאינן אפסים ב־$\tilde P$ היא $\operatorname{rank}\tilde X+\operatorname{rank}\tilde Y=\operatorname{rank}X+\operatorname{rank}Y$ משום שבצורה מדורגת של מטריצה הדרגה כי כמות השורות שאינן אפסים, ממשפט. מכיוון שבדירוג X,Y בנפרד, למעשה דירגנו את שורותיהם בלבד, ושורותיהם שורות P, ומשום שדירוג הוא הכפלה בהרכבת פעולות אלמנטריות בלבד ממשפט, אז $\bar P$ הכפלה בהרכבת שרשור הפעולות האלמנטריות על X,Y (חוקי כי כל אחד בשורות אחרות ולכן הפעולות זרות, והסדר לא משנה), כלומר $\bar P\sim P$. ממשפט, $\operatorname{Row}\bar P=\operatorname{Row}P$, וכמות הוקטורים (שאינם אפסים, שהם ת"ל בינם לבין עצמם) חסם עליון לגודל מ"ו, כלומר $\dim\operatorname{Row}\bar P\le\operatorname{rank}X+\operatorname{rank}Y$. מטרנזיטיביות נקבל את הדרוש.

נתבונן ב־$D=(A,B)$. ניכר כי $D^T=\binom{A^T}{B^T}$. כמו כן ידוע $\operatorname{Col}A=\operatorname{Row}A=\operatorname{Col}A^T=\operatorname{rank}A$ ובאופן זהה בעבור B, ולכן $\operatorname{rank}A^T=\operatorname{rank}A$ וכן על B. מטענות שהוצגו $\operatorname{rank}\tilde A^T=\operatorname{rank}A$ וכנ"ל בעבור B. נתבונן ב־$\bar D=\binom{\tilde A^T}{\tilde B^T}$. מלמה 1 ומטרנזיטיביות, $\dim\operatorname{Row}\bar D\ge\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

נתבונן ב־$E=(A,A)$. ניכר כי $E^T=\binom{A^T}{A^T}$. אז באופן דומה לנעשה על D, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A^T$. מלמה 1 נקבל $\dim\operatorname{Row}E^T=\dim\operatorname{Row}\bar E$, כאשר $\bar E=\binom{\tilde A^T}{\tilde A^T}$. בגלל ש־$\tilde A^T=\tilde A^T$ אז $\tilde A^T\sim\tilde A^T$ ולכן שורותיהם תלויות ליניארית, וסה"כ $\dim\operatorname{Row}E^T=\dim\tilde E^T=\operatorname{rank}A$.

סה"כ קיבלנו $\dim\operatorname{Col}A\ge\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\wedge\dim\operatorname{Col}E=\operatorname{rank}A$. נסמן $C_1=(A,A),C_2=(A,B)$. אז $C=\binom{C_1}{C_2}$.

בגלל ש־$A=A^T$:

$$\dim\operatorname{Row}A=\dim\operatorname{Row}\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}=\dim\operatorname{Col}A^T=\dim\operatorname{Col}\begin{pmatrix}E^T&D^T\end{pmatrix}=\dim\operatorname{Col}A=\dim\operatorname{Col}\begin{pmatrix}E&D\end{pmatrix}$$

בגלל שהוקטורים ב־$\operatorname{Col}E$ ו־$\operatorname{Col}D$ יחדיו פורשים את מ"ו $\operatorname{Col}\begin{pmatrix}E&D\end{pmatrix}$, ולכן כל אחד מהם תמ"ו של המרחב, ו־$\operatorname{Col}D+\operatorname{Col}E=\operatorname{Col}\begin{pmatrix}D&E\end{pmatrix}$. לכן ממשפט:

$$\dim\operatorname{Col}\begin{pmatrix}E&D\end{pmatrix}\le\dim\operatorname{Col}E+\dim\operatorname{Col}D\le\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}A=2\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\quad\top$$

■

המשך בעמוד הבא

(2)

נגדיר:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

א) נחשב את דרגת המטריצה $A=v_1v_1^T+v_2+v_2^T+v_3v_3^T$. ראשית כל, נוכיח שהוקטורים בת"לים. נעשה זאת ע"י דירוג בשורות.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

מדורג עם 3 איברים פותחים ולכן פורש מרחב ממימד 3, וישנם 3 וקטורים שפרשו את המרחב ולכן הם בסיס ובפרט בת"ל.

אזי, מסעיף ב', שהוכח באופן בלתי תלוי מסעיף א', נקבל ש־$\operatorname{rank} A=3$.

ב) תהי $(v_1\dots v_k)$ בת"ל. נמצא את דרגת $v_1v_1^T+\cdots+v_kv_k^T$.

הוכחה. **למה 1.** לכל וקטור v, ולכל שורה R ב־vv^T, יתקיים $\exists a\in\mathbb{F}\colon R=av$. יהי v וקטור מאורך n, ו־$A=vv^T$. אז:

$$(A)_{ij}=(vv^T)_{ij}=\sum_{j=1}^{n=1}v_{ij}v_{ji}=v_i\cdot v_j\implies(a_{ij})_{j=0}^n=(v_i\cdot v_j)_{j=0}^n=v_i\cdot(v_j)_0^n=v_iv$$

סה"כ בעבור כל שורה ב־A יתקיים קיום $a\in v_i$ כך ש־$\mathrm{Col}=av$, כדרוש.

תהי $(v_1\dots v_k)\in\mathbb{R}^k$ סדרה בת"ל. נסמן $A_k:=v_kv_k^T$. נתבונן במטריצה $\Sigma:=\sum_{i=1}^k A_k$. נסמן ב־B_i את השורה ה־i במטריצה הכללית B.

$$\exists(a_i)_{i=1}^k\colon(\Sigma)_i=\sum_{i=1}^k(A_k)_i=\sum_{i=1}^k a_iv_k$$

כאשר טענה הקיום נובעת מלמה 1 (באינדוקציה). מצאנו קומבינציה ליניארית של (v_i), היא (a_i) לכל שורות Σ. הקומבינציה הליניארית הזו יחידה משום ש־(v_i) בת"ל, ואם אינה הייתה יחידה, היו בפריסה של (v_i) שני וקטורים עם ייצוג זהה, אך (v_i) בת"ל ופורש את המרחב שהוא עצמו פורש ולכן בסיס, וייצוג איברים מתוך בסיס איזו', ובפרט חח"ע – סתירה.

בגלל שהוקטורים במרחב השורות של Σ ניתנים לייצוג כקומבינציה ליניארית של שורות Σ מהגדרת span, ואלו מוגדרות באופן יחיד מ־(v_i), אז הם ניתנים לייצוג באופן יחיד ע"י וקטורים ב־(v_i). סה"כ, (v_i) בסיס לפי הגדרה למרחב השורות של Σ, שממדו זהה למימד $\operatorname{rank}\Sigma$ לפי הגדרה. בגלל ש־$\Sigma=v_1v_1^T+\cdots+v_kv_k^T$ וגם $|(v_i)|=k$, אז דרגת המטריצה $v_1v_1^T+\cdots+v_kv_k^T$ היא k, כדרוש. ■

(3)

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$\operatorname{rank}A=r$.

א) צ.ל. קיום $B_1\dots B_r\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$A=\sum B_i\wedge\forall 1\le i\le r\colon\ \operatorname{rank}B_i=1$.

הוכחה. תהי $A\in M_{m\times n}$ מטריצה, ונסמן $\operatorname{rank}A=r$. נסמן את קבוצת וקטורי העמודה ב־A ב־$\operatorname{Col}A$. אז מרחב העמודות $\operatorname{span}\operatorname{Col}A$ נפרש ע"י $\operatorname{Col}A$. משום ש־$\dim\operatorname{span}\operatorname{Col}A=\operatorname{rank}A=r$, ובגלל של־$A$ יש n עמודות (כלומר $|\operatorname{Col}A|=n$) אז ממשפט ישנו בסיס בגודל r. ממשפט לכל $n\ge i>r$, i. אם לא קיימים r וקטורים בת"ל ב־$\operatorname{Col}A$ אז נפרש מרחב מגודל קטן ממש מ־r על ידי הבסיס, ושאר הוקטורים ת"ל ולא משנים ממד, כלומר ישנם r וקטורים ב־$\operatorname{Col}A$ בסיס של $\operatorname{span}\operatorname{Col}A$, נסמנם B. נסמן גם $\overline{B}=\operatorname{Col}\setminus B$.

משום ש־$|\operatorname{Col}A|=r$ אז קיימת פונ' חח"ע ועל $R_i\colon[r]\to\operatorname{Col}A$ מהגדרת עוצמה. עבור ההופכית לה $f(x)$ נסמן $v_i=f(v)\in[r]$. בה"כ הסדר R_i זהה לסדר השורות המטריצה, משמאל לימין. אז, לכל $v\in\overline{B}$, אז $v\in\operatorname{Col}A$ ולכן ניתן לביטוי כקומבינציה ליניארית עם קבועים שנסמן $(\lambda_j^{v_i})$ (עבור j כך ש־$R_j\in B$). זאת כי:

$$\begin{aligned}\exists(\tilde\lambda_i)_{i=0}^{r+1}\colon 0&=\tilde\lambda_1B_1+\cdots+\tilde\lambda_rB_r+\lambda_{r+1}v && \Big)\,-\tilde\lambda_{r+1}v\\ -\lambda_{r+1}v&=\exists(\tilde\lambda_i)_{i=0}^{r+1}\colon\tilde\lambda_1B_1+\cdots+\tilde\lambda_rB_r && \Big)\cdot\tfrac{-1}{\tilde\lambda_{r+1}}\\ v&=-\frac{\tilde\lambda_1}{\tilde\lambda_{r+1}}B_1-\cdots-\frac{\tilde\lambda_r}{\tilde\lambda_{r+1}}B_1\\ &:=\lambda_1B_1+\cdots+\lambda_rB_r\end{aligned}$$

קיים זיווג בין $[r]$ לבין $\{i \in [n] \colon R_i \in B\}$ כי יש r וקטורים ב־B, נסמנו $f(i)$. בעבור M מט', נסמן ב־M_i את הטור ה־i ב־M. נבחין שתחת ההגדרה הזו $R_i = A_i$. נתבונן בקבוצת המטריצות הבאה:

$$(P_i)_j = \begin{cases} R_{f(i)} & f(i) = j \\ \lambda^j_{f(i)} R_{f(i)} & R_j \in \overline{B} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח ש־$\sum P_i = A \wedge \forall i \in [r] \colon \operatorname{rank} P = 1$.

- **דרגה.** נוכיח ש־$\operatorname{rank} P_i = 1$. ידוע ש־$\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{span} \operatorname{Col} P_i$ (הדרגה היא ממד מרחב העמודות). נבחין ש־$\operatorname{Col} B$ הוא פרישה של וקטורים שהם אחד מההבאים:
  - וקטור ה־0, שת"ל ב־$R_{f(i)}$.
  - הוקטור $R_{f(i)}$, שתלוי ליניארית בעצמו.
  - וקטור כלשהו $\lambda R_{f(i)}$, שבעבור הקבוע $-\frac{1}{\lambda}$ סכומו עם $R_{f(i)}$ יהיה 0 כלומר הוא ת"ל ב־$R_{f(i)}$.

  סה"כ כל הוקטורים שפורשים את המ"ו ת"ל בוקטור שאינו 0 (ובפרט גודל המרחב אינו 0), ולכן גודל המרחב לכל היותר 1, וסה"כ גודל המ"ו $\operatorname{Col} B$ הוא 1, כלומר $\operatorname{rank} P = 1$ כדרוש.
- **סכום.** נוכיח ש־$\Sigma := \sum P_i = A$. נוכיח שוויון עמודות. נפלג למקרים בעבור העמודה jה ב־A.
  - נניח $j \in \{i \in [n] \colon R_i \in B\} = \operatorname{Im} f$. אז עבור כל מטריצה P_i, אם $f(i) = j$, אז מהיות f זיווג, i האינדקס של P הוא גם קיים וגם היחיד שיקיים תכונה זו. כמו כן, $j \notin B$ ולכן בשאר המטריצות עמודה זו תהיה 0. סה"כ קיבלנו $0 + \cdots + R_{f(i)} + \cdots + 0 = R_j = A_j$, כדרוש.
  - אחרת, $j \notin \operatorname{Im} f$. לכן בהכרח $R_j \in \overline{B}$ מהגדרת תמונת f. אז:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \lambda^j_{f(i)} R_{f(i)} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{r} \lambda^j_{f(i)} R_{f(i)} \overset{(2)}{=} A_j$$

  כדרוש. הערות:
  1. נכון מהיות f על + שינוי סדר סכימה.
  2. נכון מהגדרת (λ_i), ע"פ זהות זו בדיוק.

  סה"כ הוכחנו שאכן לסכום שוויון ל־A, וה־rank של כל מטריצה בסכום הוא 1.

משהוכח לעיל ובגלל ש־$|(P_i)_{i=0}^{r}| = r$, הוכחנו את הדרוש, ו־(P_i) הסדרה המבוקשת. ■

ב) צ.ל. אי קיום $B_1 \ldots B_{r-1} \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$A = \sum B_i \wedge \forall 1 \leq i \leq r-1 \colon \operatorname{rank} B_i = 1$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נסמן $\operatorname{rank} A = r$. נניח בשלילה קיום $B_1 \cdots B_{r-1} \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, נסמן $B := (B_i)_{i=0}^{r-1}$, כך ש־$\sum_{i=1}^{r-1} B_i = A$. נסמן ב־$\operatorname{Row} P$ את קבוצת וקטורי השורה של המטריצה P.

בגלל ש־$\forall B_i \in B \colon \operatorname{rank} B_i = 1 = \dim \operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$, ומשום שקיימת שורה R ב־B_i כך ש־$R \neq 0$ כי אחרת $\operatorname{Row} B = \operatorname{Row} 0 = 0$ ו־$\operatorname{rank} B_i = 0$ סתירה, אז R ב־$\operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$ ואינו 0 כלומר $\operatorname{span}\{R\}$ ממימד 1 גם כן, ותמ"ו ב־$\operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$ כי $R \in B_i$, ממשפט תמ"ו של מ"ו זהה ממד הוא שווה מרחב, כלומר $\operatorname{span}\{R\} = \operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$. משום שהממד הוא 1 אז $\{R\}$ בסיס ל־$\operatorname{Row} B_i$. נסמן ב־R_i^j את הוקטור ה־j ב־R_i. אז משום ש־R פורש את Row אז קיים λ כך ש־$\lambda R = R_i^j$. נסמן אותו להיות λ_i^j. נסמן את ה־R המתאים לכל מטריצה B_i ב־R_i.

נסמן ב־A_i את השורה ה־i ב־A. סה"כ:

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^{r-1} B_j \right)_i = \sum_{j=1}^{r-1} R_j^i = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j^i R_j$$

לכל $v \in \operatorname{span} \operatorname{Row} A$ יתקיים קיום $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ כך ש־$v = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$. אז:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j^i R_i \right) = \sum_{j=1}^{r-1} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_j^i \right)}_{:=\beta_i} R_i \right] = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i R_i$$

סה"כ, v ניתן לביטוי ע"י קומבינציה ליניארית עם מקדמים (β_i) של $(R_i)_{i=1}^{r-1}$. סה"כ חסם עליון לבסיס בסיס שהוא $r-1$ כי מצאנו פורש בגודל $r-1$ ל־$\operatorname{span} \operatorname{Row} A$, לכן $\dim \operatorname{span} \operatorname{Row} A \leq r-1$. בגלל ש־$\operatorname{rank} A = r$ אז $\dim \operatorname{span} \operatorname{Row} A = r$ ומטרנזיטיביות $r \leq r-1$. נחסיר r משני האגפים ונכפיל ב־(-1), נקבל $1 \geq 0$, סתירה.

הגענו לסתירה, והנחת השלילה הופרכה. הוכחנו כי אכן לא קיימים $(B_i)_{i=1}^{r-1}$ המקיימים את התנאים לעיל. ■

$$(4)$$

נתבונן בשלושת הוקטורים הבאים:

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix},\ \det(u,v,w)=\det\begin{pmatrix}u_1&v_1&w_1\\u_2&v_2&w_2\\u_3&v_3&w_3\end{pmatrix}$$

נביר את $\det(u+v,v,w)$ ואת $\det(u+v,v+w,w+u)$ באמצעות $\det(u,v,w)$.

למה 1. ליניאריות חיבור עמודות.

$$\det(u+x,v,w)=\det\underbrace{\begin{pmatrix}|&|&|\\u+x&v&w\\|&|&|\end{pmatrix}}_{:=A}=\det A=\det A^T=\begin{vmatrix}—&w&—\\—&v&—\\—&u+x&—\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}—&w&—\\—&v&—\\—&u&—\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}—&w&—\\—&v&—\\—&x&—\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}|&|&|\\w&v&u\\|&|&|\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}|&|&|\\w&v&x\\|&|&|\end{vmatrix}=\det(u,v,w)+\det(x,v,w)$$

ניעזר בלמה זו תחת הסימון [1]. הערות:

(1) מתקיים ממולטיליניאריות.

(2) מתקיים מהפעלת transpose, כי דיטרמיננטה משמרת transpose.

למה 3. חילוף עמודות הופך כיוון דיטרמיננטה. תהי A מטריצה בה עמודות u,v, נסמן ב-A' את המטריצה לאחר החלפת השורות בהן נמצאים וקטורי השורה u,v .

$$\det A:=\det(\dots,u,\dots v,\dots)=\det A=\det A^T\overset{(1)}{=}-\det A'^T=-\det A'$$

הערות: (1) נכון בעבור החלפה של שתי השורות בהן u^T,v^T וקטורי העמודה, וכי החלפת שורות מטריצה הופכת את כיוון הדיטרמיננטה שלה.
ניעזר בלמה זו תחת הסימון [3].

למה 2. הדיטרמיננטה של מטריצה עם עמודות זהות היא 0. בעבור החלפת השורות הזהות:

$$\det A\overset{[3]}{=}-\det A\implies 2\det A=0\implies \det A=0$$

הערה: כחלק מהוכחת למה 2 ניעזרנו בלמה 3, אך בלמה 3 לא ניעזרנו בלמה 2, ולכן ההוכחה אינה מעגלית.
ניעזר בלמה זו תחת הסימון [2].

.1

$$\det(u+v,v,w)\overset{[1]}{=}\det(u,v,w)+\det(v,v,w)\overset{[2]}{=}\boldsymbol{\det(u,v,w)}$$

.2

$$\begin{aligned}\det(u+v,v+w,w+u)&\overset{[1]}{=}\det(u,v+w,w+u)+\det(v,v+w,w+u)\\&\overset{[1]}{=}\det(u,v,w+u)+\det(u,w,w+u)+\det(v,v,w+u)+\det(v,w,w+u)\\&\overset{[1]}{=}\det(u,v,w)+\det(u,w,w)+\det(v,v,w)+\det(v,w,w)\\&+\det(u,v,u)+\det(u,w,u)+\det(v,v,u)+\det(v,w,u)\\&\overset{[2]}{=}\det(u,v,w)+\cancel{\det(u,w,w)}+\cancel{\det(v,v,w)}+\cancel{\det(v,w,w)}\\&+\cancel{\det(u,v,u)}+\cancel{\det(u,w,u)}+\cancel{\det(v,v,u)}+\det(v,w,u)\\&=\det(u,v,w)+\det(u,w,v)\\&\overset{[3]}{=}\det(u,v,w)-\det(u,v,w)=\mathbf{0}\end{aligned}$$