

**אלגברה לינארית 2א**  
שחר פרץ ~ 2025B

סיכום זה לאלגברה לינארית 2א, נעשה במסגרת תוכנית אודיסאה, עם בן בסקין כמרצה. עקב מבצע "עם כלביא" בוטלו חלק מההרצאות, שהושלמו באמצעות סיכומים חיצוניים, והקלטות של הקורס (בפרט, הפרקים על המשפט הספקטרלי מסתמכים על הרצאות של ענת). כל המרצים הסתמכו על סיכום אחר של סטונדטים אחרים, אך הם גם הוסיפו הערות בע"פ לגבי אינטואיציה, הוכחות נוספות, והרחבות קלות של החומר (לדוגמה בהקשר של תורת החוגים, הוכחות המשפט הספקטרלי, או ציקליות) שבסיכום זה אני שואף להעביר. פרט לכך הוספתי ציטוטים מן ההרצאה שמצאתי משעשעים.

כנגד שלושה נושאים דיברה אלגברה לינארית 2א –

1. **אופרטורים ליניאריים** שיובילו אותנו לצורת ג'ורדן.

2. **תבניות בי-ליניאריות**, אובייקט מתמטי נוסף שניתן לייצג ע"י מטריצה.

3. **מרחבי מכפלה פנימית**, מרחבים בהם מוגדרת מעין תבנית סקווי בי-לינארית שמאפשרת תיאור "גודל", ובהם יש ערך לפירוק מטריצות לכפל של מספר מטריצות שונות.

נוסף על שלושת הנושאים ה"רגילים" של הקורס, מופיעה בסוף הרחבה של בן בסקין לגבי מרחבים דואלים. אני ממליץ בחום גם למי שלמד את הנושא בלינארית 1א לקרוא את הפרק עם מרחבים דואלים, משום שהוא קצר, ומראה קשרים חזקים (ומרתקים!) בין החומר הנלמד באלגברה לינארית 2א (כמו מרחבי מכפלה פנימית והעתקות צמודות) למרחבים דואלים.

באופן אישי, אני מוצא את הקורס די מעניין, ובמיוחד את הפרק האחרון בנוגע לפירוקים של מטריצות/העתקות.

אם מצאתם בסיכום טעויות (החל בתקלדות, כלה בשגיהוט חטיב, ובטח טעויות מתמטיות) אשמח אם תפנו אלי בטלפון או במייל (perets.shahar@gmail.com). הגרסה האחרונה של הסיכום תמיד זמינה **בקישור הבא**.

מקווה שתהנו מהסיכום ותמצאו אותו מועיל;

שחר פרץ, 19.7.2025

**אזהרה!** נכון למצב הנוכחי, הסיכום הזה עדיין בעבודה לצריך לעבור הגהה. אתם מוזמנים להשתמש בו, אך אין לראות בו כרגע את הגרס הסופית.

## כמה הערות טכניות

- בפקולטה למתמטיקה בת"א מקובל להשתמש ב- $(v, w)$  בשביל מכפלה פנימית. בסיכום הזה אשתמש ב- $\langle v | w \rangle$ , גם כן סימון מקובל (במיוחד בפיזיקה), שאני חושב שנראה מגניב הרבה יותר.
- אני לא אחראי בשום צורה על דברים לא נכונים שכתבתי בטעות. פעמים רבות מרצים מדלגים עם שלבים ואני משלים מההבנה שלי, ולמרות שעברתי על הסיכום ואני משתדל שיהיה מדויק ככל האפשר, ייתכן שישנן טעויות.
- היו משפטים שהוכחנו בתרגילי הבית, או שהוכחתם טרואיאלית. פתרונות לתרגילי הבית זמינים ב-github שלי, למי שמעוניין.

# תוכן העניינים

<b>5</b>	<b>1 לכסון</b>
5	1.1 מבוא לפרק
5	1.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים לאופרטורים לינארים
6	1.3 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים למטריות
7	1.4 פולינום אופייני
8	1.5 על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי
9	1.5.1 פיבונאצ'י בשדה סופי
9	1.6 שילוש
<b>11</b>	<b>2 משפט קיילי המילטון</b>
11	2.1 על ההבדל בין פולינום לפולינום
11	2.2 מבוא למשפט קיילי-המילטון
11	2.3 משפט קיילי-המילטון
<b>13</b>	<b>3 תורת החוגים</b>
13	3.1 מבוא והגדרות בסיסיות
13	3.2 ראשוניות ואי-פריקות
16	3.3 הרחבת שדות
<b>18</b>	<b>4 פירוק פרימרי</b>
18	4.1 מרחבים $T$ -שמורים וציקליים
18	4.2 הפולינום המינימלי
20	4.3 ניסוח והוכחה של משפט הפירוק הפרימרי
<b>23</b>	<b>5 צורת ג'ורדן</b>
23	5.1 מציאת שורשי פולינום אופייני ממעלה חמישית ואילך
23	5.2 צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי נילפוטנטי
23	5.2.1 $f^{\text{red}}$ ונילפוטנטיות
24	5.2.2 ציקליות
25	5.2.3 ניסוח צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי
26	5.3 צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי
28	5.4 דיבורים ואינטואיציה לסוף הנושא
<b>29</b>	<b>6 תבניות בי-לינאריות</b>
29	6.1 הגדרות בסיסיות בעבור תבניות בי-לינאריות כלליות
31	6.2 חפיפה וסימטריות
31	6.3 תבנית ריבועית
32	6.4 הסינגטורה ומשפט ההתאמה של סילבסטר
<b>34</b>	<b>7 מרחבי מכפלה פנימית</b>
34	7.1 הגדרה כללית
34	7.1.1 מעל $\mathbb{R}$
34	7.1.2 מעל $\mathbb{C}$
35	7.2 הקשרים גיאומטריים של מכפלה פנימית
36	7.3 אורתוגונליות
38	7.4 צמידות
<b>40</b>	<b>8 פירוקים</b>
40	8.1 המשפט הספקטרי להעתקות
40	8.1.1 ניסוח להעתקות צמודות לעצמן
40	8.1.2 מבוא למשפט הספקטרי בעבור העתקה כללית
42	8.2 הוכחת המשפט הספקטרי בעבור העתקה כללית
42	8.3 צורה קאנונית למטריות נורמליות מעל הממשיים
44	8.4 מטריות אוניטריות
45	8.5 סיכום קצר של החומר עד עכשיו
46	8.5.1 צורה קאנונית למטריצה אוניטרית
48	8.5.2 המשפט הספקטלי בניסוח מטריציוני
48	8.6 פירוק פולארי
48	8.6.1 מבוא, וקישור לתבניות בי-לינאריות
50	8.7 ניסוח הפירוק הפולארי
50	8.7.1 פירוק פולארי בעבור העתקות
51	8.7.2 פירוק פולארי בעבור מטריות

51	.....	8.8	פירוק SVD
<b>52</b>			<b>9 מרחבים דואלים</b>
52	.....	9.1	הגדרות בסיסיות
52	.....	9.2	הומורפיות למרחבי מכפלה פנימית
52	.....	9.2.1	העתקה צמודה (דואלית)
54	.....	9.2.2	המאפס הדואלי ומרחב אורתוגונלי

בתיאבון

# Diagonalization . . . . . (1)

נאמר שישנה פעולה כשהי שנרצה להפעיל. נרצה לקרות מה יקרה לפעולה לאחר שנפעיל אותה מספר פעמים. כפל מטריצות היא פעולה מסדר גודל של  $O(n^3)$ . אך, ישנן מטריצות שקל מאוד להעלות בריבוע.

## 1.1 מבוא לפרק

**הגדרה 1.** נאמר ש- $A$  מטריצה אלכסונית, אם:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

**הגדרה 2.**  $T$ -ו ההעתקה אלכסונית:

$$T_A^m(A) = A^m(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

למה זה מועיל? נזכר בסדרת פיבונצ'י. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(בהנחת איברי בסיס  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ).

מה חבל שלא כף להכפיל את המטריצה הזו בעצמה המון פעמים. מה נוכל לעשות? ננסה למצוא בסיס שבו  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B = (v_1, v_2)$  ו- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \Lambda P$ . [המשמעות של  $\Lambda$  היא מטריצה לכסינה כלשהי] אז נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (P^{-1} \Lambda P)^n = P^{-1} \Lambda^n P$$

(די קל להראות את השוויון האחרון באינדוקציה). במקרה כזה יהיה נורא נחמד כי אין בעיה להעלות לכסינה בחזקה. הדבר הנחמד הבא שנוכל ליצור הוא צורה ג'ורדנית - מטריצת בלוקים אלכסונית, ככה שנעלה בחזקה את הבלוקים במקום את כל המטריצה. נעשה זאת בהמשך הקורס.

**הגדרה 3.** אופרטור ליניארי (א"ל) הוא ה"ל/טל ממרחב וקטורי  $V$  לעצמו.

## 1.2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים לאופרטורים לינארים

**הגדרה 4.** יהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל. אז  $v \in V$  נקרא וקטור עצמי של  $T$  (ו"ע) אם קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  כך ש- $Tv = \lambda v$ .

**הגדרה 5.**  $\lambda$  מההגדרה הקודמת נקרא ערך עצמי (ע"ע) של  $T$ , המתאים לו"ע  $v$ .

**שאלה.** יהי  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . נניח ש- $V = (v_1 \dots v_n)$  בסיס של ו"ע של  $T$  [תיאורטית יכול להתקיים באופן ריק כי עדיין לא הראינו שקיים בסיס כזה] אז קיימת  $P \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכה כך ש- $A$  המקיימת  $Tv = Av$  לפי הבסיס הסטנדרטי, אז  $[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$  כאשר  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  ע"ע המתאימים לו"ע  $v_1 \dots v_n$ .

"ראיתם את המרחב הומוג'ני?". כדאי לדעת כי  $\text{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . מה המשמעות של איזומורפי ( $\cong$ )? בהינתן  $A, B$  מבנים אלגבריים כלשהם, נסמן  $A \cong B$  אם קיימת  $\varphi: A \rightarrow B$  העתקה ח"ע ועל שמשמרת את המבנה (כאשר המבנה שלנו מורכב מפעולות חיבור וכפל, העתקה כזו תהיה ליניארית).

**דוגמה.** אם  $V, U$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , הם נקראים איזומורפים אם קיימת  $\varphi: V \rightarrow U$  ח"ע ועל המקיימת

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \forall v_1, v_2 \in V: \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

כלומר "המרנו" שני מבנים אלגבריים, אבל לא באמת עשינו שום דבר - כל מבנה עדיין שומר על התכונות שלו. הערה: בסוף הסיכום מופיעה הרחבה על תופעות מעין אלו.

**הגדרה 6.** יהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל, נניח  $\lambda \in \mathbb{F}$  ע"ע, אז המרחב העצמי (מ"ע) של  $\lambda$  הוא:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

**משפט 1.**  $V_\lambda$  תמ"ו של  $V$ . ראה תרגול.

**הגדרה 7.** יהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל, ויהי  $\lambda \in \mathbb{F}$  ע"ע של  $T$ . נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda$  (ביחס ל- $T$ ) הוא  $\dim V_\lambda$ .

**דוגמה.** יהי  $V$  מ"ו מממד  $n$ ,  $T: V \rightarrow V$  א"ל. נניח קיום  $v \in V$  המקיים  $T^n v = v$  ונניח  $\{v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v\}$  בסיס של  $V$ . ננסה להבין מהם הע"ע.

יהי  $u \in V$  ו"ע כך ש- $Tu = \lambda u$ . נראה כי  $T^n u = u$ . ידוע קיום  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$  כך ש- $u = \sum \alpha_i T^i(v)$ . אז:

$$\lambda^n u = T^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underbrace{T^{n+i}(v)}_{=T^i(T^n v)=T^i v} = u$$

נבחין שהוקטורים העצמיים הם שורשי היחידה. מי הם שורשי היחידה - זה תלוי שדה.

**מסקנה 1.** ערכים עצמיים תלויים בשדה. ערכים עצמיים של מטריצה מעל  $\mathbb{R}$  יכולים להיות שונים בעבור אותה המטריצה מעל  $\mathbb{C}$ . דוגמה יותר פשוטה לכך היא העתקת הסיבוב ב- $\mathbb{R}^2$ , שאין לה ו"עים מעל  $\mathbb{R}$  אך יש כאלו מעל  $\mathbb{C}$ .

**משפט 2.** תהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל, ונניח  $A \subseteq V$  קבוצה של ו"ע של  $T$  עם ע"ע שונים, אז  $A$  בת"ל. הוכחה בתרגול.

**הגדרה 8.** יהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל. נאמר ש- $T$  ניתן לכסון/לכסין אם קיים ל- $V$  בסיס של ו"ע של  $T$ .

**מסקנה 2.** אם  $\dim V = n$  ול- $T$  יש  $n$  ע"ע שונים אז  $T$  לכסין.

**הערה 1.** שימו לב - ייתכן מצב בו קיימים פחות מ- $n$  ע"ע שונים אך  $T$  עדיין לכסין. דוגמה:  $id, 0$ .

**מסקנה 3.** תהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל. נניח שלכל  $\lambda$  ע"א, ישנה  $B_\lambda \subseteq V_\lambda$  בת"ל. אז  $B = \bigcup_\lambda B_\lambda$  בת"ל.

הוכחה. [הערה: ההוכחה הזו עובדת בעבור ההכללה לממדים שאינם נוצרים סופית]. ניקח צ"ל כלשהו שווה ל-0:

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i &= 0 \\ &= \sum_\lambda \sum_{\lambda_i} \alpha_i v_{\lambda_i} \\ &\implies \sum_{\lambda_j} \alpha_i v_{\lambda_j} =: u_j \in V_{\lambda_j} \\ &\implies \sum_j u_j = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו צירוף ליניארי לא טריויאלי של איברים במ"ע שונים (=עם ע"א שונים). אם אחד מהם אינו 0, קיבלנו סתירה למשפט. סה"כ קיבלנו שלכל  $j$  מתקיים  $\sum \alpha_{ji} v_{ji} = 0$ . בגלל ש- $v_{ji} \in B_j$  אז בת"ל ולכן כל הסקלרים 0. ■

**מסקנה 4.** יהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל כך ש- $\dim V = n$ . אז:

$$\sum_\lambda \dim V_\lambda \leq n$$

שוויון אמ"מ  $T$  לכסין.

הוכחה. לכל  $\lambda$  יהא  $B_\lambda$  בסיס. אז  $B = \sum_\lambda B_\lambda$  בת"ל. אז  $n \geq |B| = \sum_\lambda \dim V_\lambda$ .

אם  $T$  לכסין אז קיים בסיס של ו"ע כך שאכל אחד מהם מבין  $V_\lambda$  ושוויון.

מצד שני, אם יש שוויון אז  $B$  קבוצה בת"ל של  $n$  ו"ע ולכן בסיס ולכן  $T$  לכסין. ■

### 1.3 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים למטריצות

**הגדרה 9.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . נאמר ש- $v \in \mathbb{F}^n$  הוא ו"ע של  $A$  עם ע"ע  $\lambda$  אם  $Av = \lambda v$ .

**משפט 3.** תהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל ויהי  $B$  בסיס סדור, ו- $V$  נוצר סופי (לעיתים יקרא: סוף-ממדי). נניח  $A = [T]_B$ . אז  $v \neq 0$  וקטור עצמי של  $T$  עם ערך עצמי  $\lambda$  אמ"מ  $[v]_B$  וקטור עצמי של  $A$  עם ע"ע  $\lambda$ .

הוכחה. גרירה דו-כיוונית. נניח  $V$  ו"ע של  $T$ . אז  $A[v]_B = [Tv]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B$ . מהכיוון השני "לכו הפוך". ■

**הגדרה 10.** מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  תקרא לכסינה/נתנת ללכסון אם היא דומה למטריצה  $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$  אלכסונית, כלומר קיימת  $P \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכה שעבורה  $\Lambda = P^{-1}AP$ .

**משפט 4.** יהיו  $A, P \in M_n(\mathbb{F})$ . נניח  $P$  הפיכה. אז אם  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  אמ"מ עמודות  $P$  הן ו"ע של  $A$  עם ע"ע  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  בהתאמה.

הוכחה. נסמן  $P = (P_1 \dots P_n)$  עמודותיה. אז:

$$AP = (AP_1 \dots AP_n) = (\lambda_1 P_1 \dots \lambda_n P_n) = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_\Lambda$$

ולכן:

$$P^{-1}AP = P^{-1}PA$$

ההוכחה מהכיוון השני היא לקרוא את זה מהצד השני.

"אני מקווה שראיתם שכפל מטריצה באלכסונית מתחלף" (הוא לא בהכרח). "אני אמרתי שטות".  $\sim$  בן

#### 1.4 פולינום אופייני

**תרגיל.** תהי  $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ . מצאו ו"ע וע"ע של  $A$  ולכסנו אם אפשר.

**פתרון.** מחפשים  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ו-  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש-:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

סה"כ  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ו"ע עם ו"ע  $\lambda$  אמ"מ  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\lambda I - A)$ , אמ"מ  $\lambda I - A$  לא הפיכה, אמ"מ  $\det(\lambda I - A) = 0$  AKA "הפולינום האופייני"). במקרה הזה:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -8 \\ -6 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \implies \det(\lambda I - A) = (\lambda + 7)(\lambda - 7) = \lambda^2 - 1$$

לכן הע"ע הם  $\pm 1$ . נמצא את הו"ע. עבור  $\lambda = 1$ , מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

יש לנו חופש בחירה (ופתרון יחיד עד לכדי כפל בסקלר). במקרה הזה, נבחר  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

עבור  $\lambda = -1$ , יתקיים:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ראינו שהמלכסנת היא העמודות של הו"ע. אז:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

וסה"כ  $P^{-1}AP = I$ . מכאן צריך למצוא את  $P^{-1}$ .

**משפט 5.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אז  $\lambda \in \mathbb{F}$  ע"ע של  $A$  אמ"מ  $|\lambda I - A| = 0$ .

**הגדרה 11.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . הפולינום האופייני של  $A$  מוגדר להיות:

$$f_A(x) = |xI - A|$$

**משפט 6.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . אז  $f_A(x)$  הוא פולינום מתוקן [=מקדם מוביל הוא 1] ממעלה  $n$ , המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$  והמקדם החופשי הוא  $(-1)^n |A|$ .

**הגדרה 12.** בעבור  $A \in M_n(\mathbb{F})$  הפולינום האופייני של  $A$  הוא  $f_A(x) = \det(Ix - A)$ .

ראינו ש- $v$  ו"ע של  $A$  עם ערך עצמי  $\lambda$  אמ"מ  $v \in \ker(\lambda I - A)$ , וכן  $\lambda$  ע"ע אמ"מ  $\dim \ker \lambda - A > 0$ .

**משפט 7.**  $f_A(x)$  פולינום מתוקן (מקדם מוביל 1) מדרגה  $n$ , המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$ , המקדם החופשי הוא  $(-1)^n \det A$ .

הוכחה.

- **תקינות הפולינום.** מבין  $n!$  המחזורים, ישנו אחד יחיד שדרגתו היא  $n$ . הסיבה היא שמדטרמיננטה לפי תמורות, התמורה היחידה שתיצור איבר מסדר  $x^n$  היא תמורת הזהות שתעבור על האלכסון. באינדוקציה על  $n$ , ונקבל:

$$f_A(x) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn}) = x^n + \cdots$$

באופן דומה אפשר להוכיח באינדוקציה באמצעות פיתוח לפי שורות:

$$f_A(x) = (x - a_{11})|A_1| + \underbrace{a_{21}|A_2| - a_{31}|A_3| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_n|}_{\text{מהא. דרגה קטנה מ-} n}$$

סה"כ גם כאן הראינו שהדרגה מתקבלת מהפולינום  $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$ , כלומר הפולינום האופייני מתוקן.

- **המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$ .** מקדמי  $x^{n-1}$  מגיעים גם הם רק מ- $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$  (הפולינום למעלה) שהם  $-\text{tr } A = \sum_{i=1}^n -a_{ii}$  המקדם החופשי.
- **המקדם החופשי.** מתקבל מהצבת 0.  $f_A(0) = \det(I \cdot 0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ .

■

## דוגמאות.

(א) אם  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  אז  $f_A(x) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$  (נטו מהמשפט הקודם).

(ב) אם  $A = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$  אז  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$

(ג) אם  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  אז גם כאן  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  אך כדאי לשים לב שמשולשית עליונה לא בהכרח דומה לאלכסונית עם אותם הקבועים.

(ד) אם  $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$  כאשר  $B, C$  בלוקים ריבועיים אז  $f_A(x) = f_B(x) \cdot f_C(x)$

**הגדרה 13.** בהינתן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל נגדיר את הפולינום האופייני שלה (פ"א) באופן הבא: נבחר בסיס  $B$  למ"ו  $V$ , ונתבונן ב- $[T]_B$  ונגדיר את  $f_T(x) := f_A(x)$

"אתה פותר עכשיו שאלה משיעורי הבית" "אל תדאג הבודק כבר שלח פתרון" "מה?!"

**משפט 8.** הפ"א של ט"ל מוגדר היטב. למטריצות דומות אותו פ"א. הוכחה. בשיעורי הבית. ויש סיכוי שגם בדף הסיכום.

**דוגמה.** נתבונן בהעתקה  $\mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ ,  $T(f) = f'$  נבחר בסיס  $B = (1, x, \dots, x^n)$ . אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

אז:

$$f_T(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots \\ & x & -2 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} = x^{n+1}$$

**משפט 9.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל, אז  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אמ"מ  $f_T(\lambda) = 0$

הוכחה. יהא  $B \subseteq V$  בסיס של  $V$ . אז  $A = [T]_B$  ואז  $f_T(\lambda) = 0$  אמ"מ  $f_A(\lambda) = 0$  ע"ע של  $A$ .

■

**הגדרה 14.** יהי  $\lambda \in \mathbb{F}$  ע"ע של  $T$  (או  $A$ ). הריבוי האלגברי של  $\lambda$  הוא החזקה המקסימלית  $d$  כך ש- $(x - \lambda)^d \mid f_T(x)$  (חלוקת פולינומים). **דוגמה.** בעבור  $T$  היא הגזירה, ממקודם:  $f_T(x) = x^{n+1}$  ע"ע יחיד הוא 0. הריבוי האלגברי של 0 הוא  $n + 1$ . הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1.

**סימון 1.** נניח ש- $\lambda$  ע"ע של  $T$  (או  $A$ ) אז  $d_\lambda$  הריבוי האלגברי של  $\lambda$  ו- $r_\lambda$  הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda$ .

## 1.5 על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי

**הערה 2.** בדוגמה שבטענה ראינו שמתקיים  $\sum d_i = \sum n_i = n$  כאשר  $n$  דרגת הפולינום. זה לא תמיד המצב.

דוגמה למצב בו זה לא קורה:  $x^2(x^2 + 1) \in \mathbb{R}[x]$ . סכום הריבויים האלגבריים הוא 2, אבל דרגת הפולינום היא 4. זה נכון מעל שדות סגורים אלגברית.

**משפט 10.** תהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אזי לכל ע"ע  $\lambda$  מתקיים  $r_\lambda \leq d_\lambda$ .



הוכחה. יהי  $\lambda$  ע"ע. אז  $V_\lambda = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$ . יהי  $B_\lambda \subseteq V_\lambda$  בסיס עבור  $V_\lambda$ . נשלים אותו לבסיס  $B$  של  $V$ .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & * \\ & \lambda & & \\ 0 & & \ddots & \\ * & & & C \end{pmatrix}$$

ואז:

$$f_T(x) = (x - \lambda)^{r_\lambda} C(x) \implies r_\lambda \leq d_\lambda$$

■

**משפט 11.** תהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל עם פ"א  $f_T(x)$ . אז  $T$  לכסינה אמ"מ שתי הטענות הבאות מתקיימות:

$$1. \text{ בעבור } k \text{ הע"ע שונים, } f_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}$$

$$2. \text{ לכל } \lambda \text{ ע"ע של } T \text{ מתקיים } r_\lambda = d_\lambda$$

(הבהרה: 1 לא גורר את 2. צריך את שניהם).

הוכחה.

$\Leftarrow$   $T$  לכסינה ראינו ש-1 מתקיים. במקרה שלכסינה ראינו ש- $n = \sum r_{\lambda_i} \leq \sum d_{\lambda_i} = n$  ולכן אם לאחד מבין הערכים העצמיים מתקיים  $r_\lambda \neq d_\lambda$  אז מתקיים  $r_k < d_k$  ונקבל סתירה לשוויונות לעיל.

$\Rightarrow$

$$1 \implies \sum d_{\lambda_i} = n$$

$$2 \implies \sum r_{\lambda_i} = \sum d_{\lambda_i} = n$$

■

וסה"כ  $\sum r_{\lambda_i} = n$  אמ"מ  $T$  לכסינה.

### 1.5.1 פיבונאצ'י בשדה סופי

סדרת פיבונאצ'י:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח שאנו מסתכלים מעל  $\mathbb{F}_p$  כלשהו. אז הסדרה חייבת להיות מחזורית. **שאלה:** מתי מתקיים ש- $A^m = I$  (בעבור  $m$  מינימלי)? במילים אחרות, מתי מתחילים מחזור.

היות שמספר הזוגות השונים עבור  $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$  הוא  $p^2$ , אז  $m \leq p^2$ . עבור  $p = 7$ :  $-0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1$

כלומר עבור  $p = 7$  יש מחזור באורך  $m = 16$ . (הערה: תירוטית עם המידע הנוכחי ייתכן ויהפוך למחזורי ולא יחזור להתחלה)

**טענה.** אם  $p$  ראשוני אז  $p \equiv 1 \pmod{5}$  אז אורך המחזור חסום מלעיל ע"י  $p - 1$ .

הוכחה. תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לקבלת מחזור באורך  $k$  הוא  $A^k = I$ . אז:

$$f_A(x) = x^2 - x - 1$$

יש דבר שנקרא "הדדיות ריבועית" (חומר קריאה רשות במודל) שמבטיחה שורש לפולינום להלן עבור  $p$  כנ"ל. אכן יש לנו שני ע"ע שונים (אם קיים רק אחד אז סתירה מהיות הדיסקרימיננטה  $5 = 0$  אך  $5 \not\equiv 0 \pmod{p}$ ). לכן קיימת  $P$  הפיכה כך ש-:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

■

כך ש- $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ . משפט פרמה הקטן אומר ש- $\lambda_1^{p-1} = \lambda_2^{p-1} = 1$  ואז  $A^{p-1} = I$ .

### 1.6 שילוש

**הגדרה 15.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל ניתנת לשילוש אם קיים בסיס  $B$  ל- $V$  כך ש- $[T]_B$  משולשית.

**הערה 3.** אם  $T$  ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים (האם איברי האלכסון של הגרסה המשולשית). יהיה מעניין לשאול אם הכיוון השני מתקיים.

**משפט 12.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נניח ש- $f_T(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  (ניתנת לפירוק לגורמים ליניאריים) אז  $T$  ניתנת לשילוש.

הוכחה. בסיס.  $n = 1$  היא כבר משולשית וסיימנו.

צעד. נניח שהטענה נכונה בעבור  $n$  טבעי כלשהו, ונראה נכונות עבור  $n + 1$ . אז  $f_T$  מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן יש לו שורש. יהי  $\lambda$  ע"ע של  $T$ . בסיס  $B$  של  $V$  מקיים ש- $[T]_B^{-1}$  משולשית עליונה (נסמן  $B = (w_1 \dots w_{n+1})$ ) אז  $\iff T(w_i) \in \text{span}(w_1 \dots w_i)$ . נגדיר את  $w_1$  להיות ו"ע של  $\lambda$ . נשלימו לבסיס  $B^1$ .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & * & & \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \dots & C & \dots \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix}$$

אז ניתן לומר כי:

$$f_T(x) = (x - \lambda)f_C(x)$$

נסמן  $w = \text{span}(w_2 \dots w_{n+1})$ . קיימת העתקה ליניארית  $S: W \rightarrow W$  כך ש- $f_S(x) = f_C(x)$ . לפי ה"א קיים בסיס ל- $W$  הוא  $B''$  שעבורו  $S$  משולשית עליונה. נטען ש- $B = B'' \cup \{w_1\}$  ייתן את הדרוש.

$$\forall w \in B'': (T - S)(w) = Tw - Sw = aw_1 + S(w) - S(w) = aw_1$$

(כלומר, השורה העליונה של  $[T]_B$  "תרמה" את  $aw_1$  בלבד) לכן:

$$(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$$

זה גורר שלכל  $w \in W$  מליניאריות מתקיים ש- $(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$ . סה"כ לכל  $w \in B'' \cup \{w_1\}$  מתקיים  $T(w_i) \in \text{span}(w_1 \dots)$ . ■

בהוכחה הזו, בנינו בסיס כך ש-:

$$[T(w) - S(w)]_B = ae_1$$

**הגדרה 16.** מטריצה ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.

**משפט 13.** מטריצה  $A$  ניתנת לשילוש, אם"מ הפ"א האופייני שלה מתפצל לגורמים לינאריים.

## המשך בעמוד הבא

## Cayley–Hamilton Theorem.....(2)

### 2.1 על ההבדל בין פולינום לפולינום

נבחין ש- $\mathbb{F}[x]$  הוא מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ . וכן  $\mathbb{F}[x]$  הוא חוג חילופי עם יחידה. בחוג כפל לא חייב להיות קומטטיבי (נאמר, חוג המטריצות הריבועיות). אומנם קיימת יחידה (פולינום קבוע ב-1) אך אין הופכיים לשום דבר חוץ מלפונ' הקבועות. שזה מאוד חבל כי זה כמעט

לכן, נגדיר את  $\mathbb{F}(x)$  - אוסף הפונקציות הרציונליות:

$$\mathbb{F}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid g(x) \neq 0 \right\}$$

זהו שדה. אם נתבונן במטריצות דומות, יש הבדל בין להגיד  $f_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ , אך אפשר לטעון  $f_A(x) = |B|$  כש- $B \in M_n(\mathbb{F}(x))$ . למה? כי  $xI - A \in M_n(\mathbb{F}(x))$  (זה קצת מנוון כי איברי המטריצה הם או פולינומים קבועיים או ממעלה 1). משום שדטרמיננטה שולחת איבר לשדה, אז  $|B| \in \mathbb{F}(x)$ . כך למעשה נגיע לכך שפולינומים אופייניים שווים כשני איברים בתוך השדה, ולא רק באיך שהם מתנהגים ביחס לקבועיים.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2), \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = x, \quad f, g \in \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2 \implies f = g$$

אך:

$$f(A) = A^3 = 0, \quad g(A) = A \neq 0$$

זה לא רצוי. נבחין בשני שוויונות שונים - שוויון פונקציות, בהם  $f = g$  מעל  $\mathbb{F}_2$ , ושוויון בשדה - בו  $f - g \neq 0$  (כי  $-x^2$  לא פולינום האפס, ואף מעל  $\mathbb{F}_2$ ) ולכן ב- $\mathbb{F}_2(x)$  מתקיים  $f \neq g$ .

### 2.2 מבוא למשפט קיילי-המילטון

**הגדרה 17.** יהי  $f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ ,  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  נ"ס (נוצר סופית) וכן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נגדיר:

$$f(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i, \quad T^0 = id, \quad T^n = T \circ T^{n-1}$$

כנ"ל עם מטריצות (ראה תרגול)

**טענה.** אם  $A = [T]_B$  ו- $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  אז  $f(A) = [f(T)]_B$ . הוכחה נובעת מהתכונות  $[\alpha T]_B = \alpha [T]_B$ ,  $[T+S]_B = [T]_B + [S]_B$ ,  $[TS]_B = [T]_B [S]_B$ .

**טענה.** אם  $f, g \in \mathbb{F}[x]$  ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל, אז  $(f \cdot g)(T) = f(T) \cdot g(T)$ . באופן דומה  $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$ .

לכן קל לראות ש- $f(T) = 0 \iff f(A) = 0$ .

**מסקנה 5.** אם  $A, C$  דומות אז  $f(A) = 0 \iff f(C) = 0$ .

### 2.3 משפט קיילי-המילטון

**משפט קיילי-המילטון.** לכל  $T: V \rightarrow V$  ט"ל (נוצר סופית) ולכל  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מתקיים:

$$f_T(T) = 0, \quad f_A(A) = 0$$

**דוגמה.** (מנוונת) נתבונן ב- $D: \mathbb{F}_n[x] \rightarrow \mathbb{F}_n[x]$  אופרטור הגזירה. ראינו  $f_D(x) = x^{n+1}$  (הפולינום האופייני). אז נקבל:

$$f_D(D)(p) = p^{(n+1)} = 0 \implies f_D(D) = 0$$

**משפט 14. (קיילי המילטון)** תהי  $T: V \rightarrow B$  ט"ל ( $V$  נ"ס) או  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ו- $f_A(x) = f_T(x)$  הפ"א, אז  $f_T(T) = 0$ ,  $f_A(A) = 0$ .

**משפט 15.** אם  $A$  מייצגת של העתקה  $T$  ו- $f \in \mathbb{F}[x]$  אז  $f(A) = 0 \iff f(T) = 0$ .

(באופן כללי, עבור כל פולינום).

הוכחה. נוכיח את המשפט בשלושה שלבים -

• נניח  $T$  ניתנת לשילוש. אזי, קיים בסיס  $B = (v_1 \dots v_n)$  כך ש- $[T]_B$  משולשית (עליונה). זאת מתקיים אמ"מ  $\forall i \in [n]: Tv_i \in \text{span}(v_1 \dots v_i)$ . נפנה להוכיח את משפט קיילי-המילטון למקרה זה.

תת-הוכחה.

- בסיס: בעבור  $n = 1$ , אז קיים  $\lambda \in \mathbb{F}$  כך ש- $f_T(T) = T - \lambda I = 0$  (העתקה לינארית חד ממדית היא כפל בסקלר). בפרט  $\forall v \in V: (T - \lambda)v = 0$ .

- צעד: נניח ש- $B = (v_1 \dots v_n, v_{n+1})$  שעבורו  $[T]_B$  משולשית. נגדיר תמ"ו  $W = \text{span}(v_1 \dots v_n)$  כך ש- $\dim W \leq \dim V$ , ועבורו נכון  $\forall w \in W: Tw \in W$  (ניתן להראות שזה נכון עבור וקטורי הבסיס, ונכון לכל  $w \in W$  מלינאריות). נגדיר  $T|_W: W \rightarrow W$  את הצמצום של  $T$  ל- $W$ . ידוע ש- $T|_W$  ניתנת לשילוש ולכן מקיימת את תנאי האינדוקציה. לכן,  $\forall w \in W: f_{T|_W}(T)(w) = 0$ . אזי  $f_{T|_W}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  וסה"כ  $f_T(x) = (x - \lambda_{n+1})f_{T|_W}(x)$  וקיבלנו  $\forall w \in W: f_T(T)(w) = 0$ .  
מספיק להראות ש- $\forall v \in V: (T - \lambda_{n+1})v \in W$ . למה? כי:

$$f_T(T)(v) = \left( \prod_{i=1}^n (T - \lambda_i) \right) (T - \lambda_{n+1})(v)$$

מלינאריות, מספיק להראות ש- $(T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) \in W$ , שכן זה מתקיים על כל בסיס אחר. אך זה ברור - עבור  $[T]_B$  העמודה האחרונה היא:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} \implies (T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$$

■  
• נוכיח בעבור מטריצה משולשית/ניתנת לשילוש.

תת-הוכחה. אם  $A$  משולשית, אז  $f_A(x) = f_{T_A}(x)$  כאשר  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  המוגדרת ע"י  $T_A(v) = Av$ , ואז  $T_A$  ניתנת לשילוש וסיימנו.

■  
• אם  $A$  ניתנת לשילוש, אז היא דומה למשולשית, והן בעלות אותו הפולינום האופייני. אז חזרה לתחילת ההוכחה.

■  
תת-הוכחה. נניח  $A = [T]_B$  עבור בסיס  $B$ , וידוע  $f_T(x) = f_A(x)$ . ידוע ש- $A$  ניתנת לשילוש אמ"מ  $f_A(x)$  מתפצל. טענה מהעתידי הלא רחוק: לכל שדה  $\mathbb{F}$  קיים שדה  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$  סגור אלגברית (כל פולינום מעל שדה סגור אלגברית מפתצל). על כן, ניתן לחשוב על  $A \in M_n(\mathbb{F})$  כמו  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . הפולינום האופייני מעל  $K$  הוא אותו הפולינום האופייני מעל  $\mathbb{F}$ . לכן הוא מתפצל (מעל  $\mathbb{K}$ ), ולכן הוא דומה למשולשית, ומהמקרה הראשון  $f_A(A) = 0$ . זאת כי  $f_A(A)$  לא תלוי בשדה עליו אנו עובדים, וסה"כ הוכחנו בעבור מטריצה כללית, ולכן לכל ט"ל.

■  
■  
**הערה על שדות סגורים אלגברית.** (לא נאמר בקורס) העובדה שלכל שדה יש שדה סגור אלגברית - טענה שתלויה באקסיומת הבחירה. הסגור האלגברי הוא יחיד.

## המשך בעמוד הבא

### 3.1 מבוא והגדרות בסיסיות

מה זה אובייקט אלגברי? דוגמאות: תמורות, חבורות, שדות, מרחבים וקטורים, ועוד. הרעיון – "Data עם אקסיומות".

**הגדרה 18.** חוג עם יחידה הוא קבוצה עם שתי פעולות, כפל וחיבור, ניטרלים לפעולות (0, 1) כך שמתקיימות כל אקסיומות השדה למעט (אולי) קיום איבר הופכי, וקומטטיביות הכפל.

אנחנו נתעניין ספציפית בחוגים קומטטיביים, כלומר, בהם הכפל כן קומטטיביים. המטריצות הריבועיות מעל אותו הגודל, לדוגמה, הוא חוג שאיננו קומטטיבי. החוג ה"בסיסי ביותר" – חוג השלמים (אין הופכי). ישנם חוגים בלי יחידה (לדוגמה הזוגיים בלי יחידה), לא נדבר עליהם.

**הגדרה 19.** תחום שלמות הוא חוג קומטטיבי עם יחידה ללא מחלקי 0.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

**הגדרה 20.** חוק ייקרא ללא מחלקי 0 אם:

דוגמאות לחוגים עם מחלקי 0:

$$\bullet M_2(\mathbb{R}): \text{הוכחה } a \cdot b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \cdot b = 0$$

$$\bullet \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \text{ הוכחה } 2 \cdot 3 = 0$$

**משפט 16.** בתחום שלמות יש את כלל הצמצום בכפל: אם  $ab = ac \wedge a \neq 0$  אז  $b = c$ .

הוכחה.

$$ab \cdot ac = 0 \implies a(b \cdot c) = 0 \implies a = 0 \vee b - c = 0$$

בגלל ש- $a \neq 0$ , אז  $b - c = 0$ . נוסף את  $c$  הנגדי של  $-c$  ונקבל  $b = c$ .

דוגמאות לתחום שלמות:

• שדות

• השלמים

• חוג הפולינומים

**משפט 17.** לכל  $f, g \in \mathbb{F}[x]$ , אם  $g \neq 0$  אז קיימים ויחידים פולינומים  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $f = qg + r \wedge \deg r < \deg g$ .

**הגדרה 21.** נאמר שפולינום  $q$  מחלק את  $f$  אם  $r = 0$  ומסמנים  $q \mid f$ .

**הגדרה 22.** חוג אוקלידי הוא חוג שמעליו אפשר לבצע פירוק פולינום כזה.

דוגמה לחוג שאינו אוקלידי:  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  הוא  $\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**משפט 18.** חוג אוקלידי  $\iff$  פריקות יחידה (דומה למשפט היסודי של האריתמטיקה).

לדוגמה בחוג לעיל  $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$  על אף ש-2, 3 אי-פריקים וכן  $(1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$  אי פריקים.

**מסקנה 6.**

$$\bullet f(a) = 0 \iff (x - a) \mid f \text{ (משפט בזו)}$$

• אם  $\deg f = n > -\infty$ , לכל היותר  $n$  שורשים כולל ריבוי.

• נניח ש- $f, g \in \mathbb{F}[x]$  ו- $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ , כאשר  $K$  שדה. אם  $g \mid f$  מעל  $K$  אז  $g \mid f$  מעל  $\mathbb{F}$ .

הוכחה.

$$\implies \text{נניח } f \mid (x - a) \text{ אז קיים פולינום } g \text{ כך } f = (x - a)g \text{ אז } f(a) = (a - a)g(a) = 0$$

$$\iff \text{נניח } f(a) = 0 \text{ אז קיימים } q, r \in \mathbb{F}[x] \text{ כך ש-} f = q(x - a) + r \text{ ועל כן } 0 = f(a) = q(a)(a - a) + r(a) = r(a) \text{ ולכן } r(a) = 0$$

משום ש- $r$  פולינום קבוע (דרגתו קטנה מ-1, כי חילקנו ב- $(x - a)$  מדרגה 1), אז  $r(x) = 0$ .

2. אינדוקציה

3. נוכיח ב"contrapositive": אנו יודעים ש- $\neg Q \rightarrow \neg P \iff P \rightarrow Q$ . נניח ש- $f \nmid g$  מעל  $\mathbb{F}$ . קיימים  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $f = qg + r$ ,  $r \neq 0$ .

הפירוק הזה הוא גם ב- $\mathbb{K}[x]$ . מיחידות  $r$  נקבל ש- $f \nmid g$  כל מעל  $K$ .

### 3.2 ראשוניות ואי-פריקות

**הגדרה 23.** יהי  $R$  תחום שלמות,  $a, b \in R$ . נאמר ש- $a \mid b$  אם קיים  $c \in R$  כך ש- $ac = b$ .

**הגדרה 24.**  $u \in R$  נקרא הפיך אם קיים  $\alpha \in R$  כך ש- $\alpha u = 1$ .

**משפט 19.** יהי  $R$  תחום שלמות,  $u \in R$  הפיך. יהי  $a \in R$ . אז  $u \mid a$ .

הוכחה. 1.  $u \mid a$ , יחס החלוקה טרנזיטיבי ולכן  $u \mid a$ .

2. סימון. קבוצת ההפיכים מוסמנת ב- $R^\times$ .

## דוגמאות.

1. אם  $R = \mathbb{F}$ , אז  $\mathbb{F}^x = \mathbb{F} \setminus \{0\}$

2. אם  $R = \mathbb{Z}$ , אז  $\mathbb{Z}^2 = \{\pm 1\}$

3. אם  $R = \mathbb{F}[x]$ , אז  $R^x = \mathbb{F}^x$  (ההתייחסות לסקלרים  $\mathbb{F}$  היא כאל פונקציות קבועות)

**הגדרה 25.**  $a, b \in R$ , נקראים חברים אם קיים  $u \in R^x$  הפיך כך ש- $a = ub$ , ומסמנים  $a \sim b$

**משפט 20.** יחס החברות הוא יחס שקילות.

הוכחה.

א.  $a \sim a$  כי  $1 \in R^x$

ב. אם  $a \sim b$  אז קיים  $u \in R^x$  כך ש- $a = ub$ . קיים ל- $u$  הופכי  $\alpha$  אז  $\alpha a + \alpha ub = b$  ולכן  $b \sim a$ .

ג. נניח  $a \sim b \wedge b \sim c$ , כי מכפלת ההופכיים הפיכה  $a \sim c$  וסיימנו.

■

"אני אני חבר של עומר, ועומר חבר של משהו בכיתה שאני לא מכיר, אני לא חבר של מי שאני לא מכיר." המרצה: "למה לא? תהיה חבר שלו".

**משפט 21.** הופכי הוא יחיד

(אותה ההוכחה כמו בשדות. לא בהכרח בתחום שלמות, מעל כל חוג)

הוכחה. יהי  $a \in R^x$  ו- $u, u'$  הופכיים שלו, אז:

$$u = u \cdot 1 = u \cdot a \cdot u' = 1 \cdot u' = u'$$

■

**משפט 22.** אם  $a \mid b$  וכס  $a \mid b$  אז  $a \mid b$  (בתחום שלמות).

הוכחה.

$$a \mid b \implies \exists c \in R: ac = b$$

$$b \mid a \implies \exists d \in R: bd = a$$

לכן:

$$ac = b \implies acd = a \implies a(cd - 1) = 0 \implies a = 0 \vee cd = 1$$

■

אם  $a = 0$  אז  $b = 0$  (ממש לפי הגדרה) ו- $\sim$  שקילות (רפליקסיביות). אחרת,  $cd = 1$  ולכן  $c$  הפיך, סה"כ  $a \mid b$ .

"אני חושב שבעברית קראו להם ידידים, לא רצו להתחייב לחברות ממש".

**הגדרה 26.** איבר  $p \in R$  נקרא אי-פריק אם מתקיים  $a \in R^x \vee b \in R^x$  כך ש- $p = ab$ .

**הגדרה 27.** איבר  $p \in R$  יקרא ראשוני אם  $p \mid a \vee p \mid b \implies p \mid (a \cdot b)$ .

הערה: איברים הפיכים לא נחשבים אי-פריקים או ראשוניים. הסיבה להגדרה: בשביל נכונות המשפט היסודי של האריתמטיקה (יחידות הפירוק לראשוניים).

**משפט 23.** בתחום שלמות כל ראשוני הוא אי פריק.

הערה: שקילות לאו דווקא.

הוכחה. יהי  $p \in R$  ראשוני. יהיו  $a, b \in R$  כך ש- $p = ab$ . בה"כ  $p \mid a$ . אז קיים  $c$  כך ש- $pc = a$  ולכן  $pcb = p$ . סה"כ  $p \neq 0$  ולכן  $cb = 1$  (ראה לעיל) ו- $b$  הפיך.

■

**הגדרה 28.**  $R$  תחום פריקות יחידה אם  $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{j=1}^m q_j$  עבור ראשוניים  $p_i, q_j$ , אז  $m = n$ , ועד לכדי סידור מחדש, לכל  $i \in [n]$   $p_i \sim q_i$

**משפט 24.** נניח שבתחום שלמות  $R$ , כל אי-פריק הוא גם ראשוני. אז  $R$  תחום פריקות יחידה.

ההוכחה: זהה לחלוטין לזו של המשפט היסודי.

הוכחה. באינדוקציה על  $n + m$ . בסיס:  $n + m = 2$  ולכן  $n = m = 1$  (כי מעפלה ריקה לא רלוונטית מאוד) אז  $p = q$ . נעבור לצעד. נניח שהטענה נכונה לכל  $n + m < k$ . נניח ש- $n + m = k$  אז  $p_1 \mid \prod_{j=1}^m q_j$ . בה"כ  $p_1 \mid q_1$ . אי-פריק ולא הפיך. לכן  $p_1 \sim q_1$ . אז עד כדי כפל בהופכי נקבל ש- $\prod_{i=2}^n p_i = \prod_{j=2}^m q_j$ . הערה: ראשוני כפול הפיך נשאר ראשוני. מכאן הקענו לדרוש וסיימנו (הערה שלי: כאילו תכפילו בחברים ותקבלו את מה שצריך).

■

**הגדרה 29.** יהי  $R$  תחום שלמות. תת־קבוצה  $I \subseteq R$  נקראת אידיאל אם:

$$A. \forall a, b \in I: a + b \in I \quad - \text{סגירות לחיבור.}$$

$$B. \forall a \in I \forall b \in R: ab \in I \quad - \text{תכונת הבליעה. [בפרט } 0 \in I \text{]}$$

**דוגמאות:**

1. 0 תמיד אידיאל, כך החוג תמדי אידיאל.

2. הזוגיים ב- $\mathbb{Z}$ .

3. לכל  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n\mathbb{Z}$  אידיאל ( $n$  כפול השלמים). הזוגיים מקרה פרטי.

$$4. \langle f \rangle \subseteq \mathbb{F}[x] \text{ המוגדר לפי } \langle f \rangle := \{g \in \mathbb{F}[x] \mid f|g\}$$

5. הכללה של הקודמים: עבור  $a \in R$  נסמן  $\langle a \rangle := \{a \cdot b \mid b \in R\}$

$$6. I = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(0) = 0\} \text{ (לעיתים מסומן } aR = \langle a \rangle \text{)}$$

7. נוכל להכליל את 4 עוד: ("הכללה של הכללה היא הכללה. זה סגור להכללה. זה קורה הרבה במתמטיקה")

$$I = aR + bR = \{ar + bs \mid r, s \in R\}$$

וניתן להכליל עוד באינדוקציה.

**הגדרה 30.** אידיאל  $I$  נקרא ראשי אם הוא מהצורה  $aR$  עבור  $a \in R$  כלשהו.

**הגדרה 31.** תחום שלמות נקרא ראשי אם כל אידיאל שלו ראשי.

**הערה 4.** אנחנו סימנו אידיאל ב- $aR$  ובקורס מסמנים  $Ra$ , באופן כללי אפשר לדבר על אידיאל שמאלי ואידיאל ימני. תזכורת:  $I \subseteq R$  היא אידיאל אם היא סגורה לחיבור ומקיימת את תכונת הבליעה. בתחום ראשי כל אידיאל הוא אידיאל ראשי.

**משפט 25.** ב- $R \neq \{0\}$  תחום ראשי אז כל אי פריק הוא ראשוני.

(תנאי מספיק אך לא הכרחי)

הוכחה. יהי  $o$  אי פריק ("א"פ). יהיו  $a, b \in R$  כך  $ab \sim p$ . תיקון [משבוע שעבר]: במקום  $I = Ra + Rb$ , נשתמש ב- $I = Ra + Rp$ . בכלל ש- $R$  תחום ראשי, קיים  $c \in R$  כך  $c \sim p$ ,  $I = Rc$  ו- $a, p \in I$  כלומר  $c \mid a \wedge c \mid p$ . א"פ ולכן  $c \sim p$  או  $c$  הפיך.

• הפיך  $c$   $\iff c \in I \iff R = R \cdot 1 \in I \subseteq R \iff I = R$ . קיימים  $r, s \in R$  כך  $ra + sp = 1$ . נכפיל ב- $b$  ונקבל

$$rab + spb = b$$

• אם  $c \sim p$ , אז  $c \mid a \wedge c \mid p$  ולכן  $p \mid a$ .

■

**מסקנה 7.** אם  $R$  תחום שלמות ראשי אזי יש פריקות יחידה למכפלה של אי פריקים עד כדי חבורות.

**משפט 26.** יהיו  $a, b \in R$  אז  $a, b$  ייקראו זרים אם  $\forall c \in R: c \mid a \wedge c \mid b \implies c \in R^\times$

**הגדרה 32.** יהי  $g \in R$  כך ש-:

$$1. g \mid a \wedge g \mid b$$

$$2. \forall \ell \in R: \ell \mid a \wedge \ell \mid b$$

$$3. \ell \mid g$$

אז  $g$  כנ"ל הוא הגורם המשותף המקסימלי של  $a, b$ , הוא  $\gcd(a, b)$

**משפט 27.** יהי  $R$  תחום שלמות ויהיו  $a, b \in R$ . נניח שקיימים  $r, s \in R$  כך ש- $g = ra + sb$  אשר מחלק את  $a, b$ . אז:

$$1. \gcd(a, b) = g$$

2. ה- $\gcd$  מוגדר ביחידות עד לכדי חבורות.

3. בתחום ראשי, לכל  $a, b$  קיים  $g$  כנ"ל.

(הערה: רק 3 באמת דורש תחום ראשי)

הוכחה.

$$1. \text{ יהי } \ell \mid a, b \text{ אז } \ell \mid ra, sb \implies \ell \mid g$$

$$2. \text{ מ-1 (בערך) אם } g, g' \text{ מקיימים את היותם } \gcd \text{ אז } g \mid g' \text{ ולכן } g' \sim g$$

$$3. \text{ נסמן } I = Ra + Rb. \text{ אז } I = Rg \text{ וקיימים } r, s \in R \text{ כך ש-} ra + sb = g \text{ ולכן } a, b \in I \text{ אז } g \mid a, b \text{ וסיימנו מ-1.}$$

■

**מסקנה 8.** בתחום ראשי, אם  $a, b$  זרים אז  $\exists r, s \in R: ra + sb = 1$  (אלגוריתם אוקלידס המורחב).

**משפט 28.**  $\mathbb{F}[x]$  תחום ראשי.

הוכחה. יהי  $I \subseteq \mathbb{F}[x]$  אידיאל. אם  $I = \{0\}$ , הוא ראשי. אחרת,  $I \neq \{0\}$  ואז: יהי  $0 \neq p \in I$  פולינום מדרגה מינימלית, ויהי  $f \in I$ . אז קיימים  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $f = qp + r$ . ידוע  $\deg r < \deg p$ . בגלל ש- $f \in I$  ו- $qp \in I$  אז  $r \in I$ . אם  $r = 0$ , קיבלנו שתירה מינימלית הדרגה של  $p$ .

■

הוכחה זהה עובדת בשביל להראות ש- $\mathbb{Z}$  תחום ראשי, אך עם דרגה במקום ערך מוחלט.

**הגדרה 33.** תחום שלמות נקרא אוקלידי אם קיימת  $N: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  כך ש- $a = ub + r$  כאשר  $r = 0$  או  $N(b) > N(r)$

ברגע שיש לנו את ההגדרה של תחום אוקלידי,  $N$  הפונקציה שתשתמש אותנו בשביל להראות את ההוכחה שכל תחום אוקלידי הוא תחום ראשי (בדומה לערך מוחלט או  $\deg$  בהוכחות קודמות). ההפך אינו בהכרח נכון.

**הגדרה 34.** נורמה היא פונקציה  $N: R \rightarrow \mathbb{Z}$  כך שהיא סאב-אדטיבית  $N(a+b) \leq N(a) + N(b)$ , כיפולית ו- $N(1) = 1$ .  
**דוגמה** (חוג השלמות של גאוס).

$$R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

הנורמה:

$$N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, N(a + bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$$

בדומה להוכחה לפיה הערך המוחלט של מורכב הוא כפלי, ניתן להראות ש- $N$  כפולית. מי הם ההפיכים ב- $\mathbb{Z}[i]$ ? מי שמקיים  $\alpha\beta = 1$ , כלומר:

$$N(\alpha)N(\beta) = 1 = N(1), \alpha = a + bi, a^2 + b^2 = 1 \implies a + bi = \pm 1, \pm i$$

**משפט 29.** יהי  $p \in \mathbb{Z}$  ראשוני. התנאים הבאים שקולים:

- $p$  פריק ב- $\mathbb{Z}[i]$
  - $p = m^2 + n^2$  עבור  $n, m \in \mathbb{Z}$
  - $p = 2$  או  $p \equiv 1 \pmod{4}$
  - קיימים  $r, s \in R$  כך ש- $ra + sb = 1$
- שימו לב ש- $\mathbb{Z}$  בתוך  $\mathbb{Z}[i]$  לא סגורים לבליעה.

**הגדרה 35.**  $I \subseteq R$  אידיאל נקרא ראשוני אם  $\forall a, b \in R: (a \cdot b) \in I \implies (a) \in I \vee (b) \in I$ .

**הגדרה 36.** אידיאל  $I \subseteq R$  נקרא אי-פריק אם  $\forall a, b \in R$  אם  $I = (a \cdot b)$  אז  $I = (a)$  או  $I = (b)$ .  
ראינו, שבתחום ראשי אי-פריק=ראשוני. ניתן להראות באופן שקול כי:

**משפט 30.**  $R$  תחום ראשי, אז  $I$  ראשוני אם  $I$  אי-פריק.

**הגדרה 37.** יהי  $R$  תחום שלמות [אפשר להתעסק גם עם אידיאל ימני ושמאלי] ונניח ש- $R/I$  אידיאל. אז  $R/I := \{a + I \mid a \in R\}$  הוא חוג (בהגדרת  $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$  חיבור מנות), כאשר הפעולות:

$$\begin{aligned} (a + I) + (b + I) &= (a + b) + I \\ (a + I)(b + I) &= ab + I \end{aligned}$$

צריך להוכיח שזה לא תלוי בנציגים (הנציגים  $a, b$ ) והכל אבל בן לא עומד לעשות את זה. נשאר כתרגיל בעבור הקורא.

### 3.3 הרחבת שדות

**משפט 31.** בתחום ראשי  $R$ , אם  $I$  אידיאל אי-פריק, אז  $R/I$  שדה.

**דוגמאות.**

- $\mathbb{Z}/\langle p \rangle$  שדה.
- $\mathbb{R}[x]$  תחום ראשי, ידוע  $x^2 + 1$  אי-פריק. לכן  $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}$ . הרעיון: נוכל להסתכל על  $p$  פולינום המבוטא כמו:

$$p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b = ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle$$

ואם נכפיל שני יצורים כאלו:

$$((ax + b) + I) + (cx + d + I) = acx^2 + (ad + bc)x + bd + I$$

אך ידוע ש- $x^2 + 1 = 0$  (כי זה האידיאל שלנו) עד לכדי נציג, כלומר מתקיים שוויון ל- $bd - ac + (ad + bc)x + I$  זהו כפל מרוכבים. אפשר גם להראות קיום הופכי וכו'.

הוכחה. יהי  $a + I \in R/I$ ,  $a \neq 0$ . אם  $a \neq 0$ , אז  $R/I$  מתקיים  $a \nmid p$  או  $p \nmid a$  (אם הוא היה מחלק את  $a$  אז  $a = 0$ ) ולכן  $p, a$  זרים (כי האידיאל אי-פריק וכו'). אז קיימים  $r, s \in R$  כך ש- $ar + ps = 1$ . סה"כ:

$$ar + ps + I = 1 + I \implies ar + I = 1 + I \quad \top$$

לכן  $r + I$  הופכי של  $a + I$  וסיימנו. ■

(למעשה זה אממ - הכיוון השני תרגיל בעבור הקורא).



**הגדרה 38.** יהי  $R$  תחום שלמות, ו- $a_1 \dots a_n \in R$  ו- $\ell = \text{lcm}(a_1 \dots a_n)$  אמצע:

1.  $\forall i \in [n]: a_i \mid \ell$

2.  $\forall b \in R: \forall i \in [n]: a_i \mid b \longrightarrow \ell \mid b$

**דוגמה.**  $R = \mathbb{Z}$ ,  $\text{lcm}(2, 6, 5) = 30$ .

**המשך בעמוד הבא**

# Primary Decomposition.....(4)

## 4.1 מרחבים $T$ -שמורים וציקליים

**הגדרה 39.** נניח  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אז  $U \subseteq V$  תמ"ו נקרא  $T$ -אינווריאנטי/שמור/ה אם לכל  $u \in U$  מתקיים  $T(u) \in U$ .

**דוגמאות.**  $\{0\}, V$  הם  $T$ -אינווריאנטים. גם המ"ע (המרחבים העצמיים) הם  $T$ -אינוו.

**סימון 3.** שימו לב: אם  $U \subseteq V$  תמ"ו אינווריאנטי, אז  $T|_U: U \rightarrow U$  ט"ל.

**הערה 5.** נניח ש- $u_1 \dots u_k$  בסיס ל- $U$  כנ"ל, ו- $W \subseteq V$  תמ"ו כך ש- $U \oplus W = V$ , ונגיד ש- $w_{k+1} \dots w_n$  בסיס ל- $W$ , אז  $B = (u_1 \dots u_k, w_{k+1} \dots w_n)$  מקיים:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U] & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(כאשר  $B \in M_k$  ו- $[T|_U] \in M_k$ ).

**הגדרה 40.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ ,  $T: V \rightarrow V$  ט"ל ו- $v \in V$  וקטור. אז תת-המרחב הציקלי הנוצר מ- $T$  ע"י  $T$  הוא

$$\mathcal{Z}(T, v) := \text{span}\{T^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

### משפט 32.

•  $\mathcal{Z}(T, v)$  תמ"ו של  $V$  - טרואיאלי.

•  $\mathcal{Z}(T, v)$  תמ"ו  $T$ -אינ' - טרואיאלי גם.

עתה נציג משהו נחמד. אם  $V$  נוצר סופית, גם  $\mathcal{Z}(T, v)$  נ"ס. נגיד שיהיה  $k \in \mathbb{N}_0$  מינימלי, כך ש- $\mathcal{Z}(T, v) = \text{span}\{v, Tv, \dots, T^{k-1}v\}$ . אז  $T^k v \in \mathcal{Z}(T, v)$ . לכן קיימים  $a_0 \dots a_{k-1}$  כך ש- $a_0 v + a_1 T v + \dots + a_{k-1} T^{k-1} v = 0$ . ניתן לקחת כבסיס את  $v, Tv, \dots, T^{k-1}v$  של  $\mathcal{Z}(T, v)$  אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כאשר השורה האחרונה כזו:

$$T(T^{n-1}v) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k v$$

**הגדרה 41.**  $A_f = [T]_B$  היא המטריצה המצורפת לפולינום  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ .

## 4.2 הפולינום המינימלי

רשימת פולינומים חמודים:

• הפולינום האופייני  $f_A = f_T = \det(Ix - A)$

• בהינתן מטריצה, המטריצה המצורפת  $A_f$

**משפט 33.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , נביט בקבוצה  $I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] : p(A) = 0\}$ , אז  $I_A$  אידיאל, קיים ויחיד ב- $I_A$  פולינום מתוקן בעל דרגה מינימלית.

**הגדרה 42.**  $I_A$  לעיל יקרא הפולינום המינימלי.

הוכחה. נבחין כי  $0 \in I_A$ . סגירות לחיבור - ברור. תכונת הבליעה - גם ברור. סה"כ אידיאל.  $\mathbb{F}[x]$  תחום שלמות ולכן נוצר ע"י פולינום יחיד  $I_A = (p)$ . אם  $I_A = (p) = (p')$  אז  $p \sim p'$ . אם נקבע אותו להיות מתוקן אז הוא יחיד. לפולינום הנ"ל נקרא הפולינום המינימלי של  $A$  הוא  $m_A$ . באותו האופן, עבור  $T: V \rightarrow V$  ט"ל ניתן להגדיר את  $m_T$ . ■

**סימון 4.**  $m_A$  יהיה הפולינום המינימלי של המטריצה  $A$ .

**הערה 6.** אם  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ו- $p \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $p(A) = 0$ , אז  $p \in I_A$  ומתקיים  $m_A \mid p$ .

**הערה 7.** אנו יודעים ש- $f_A \mid m_A$  ממשפט קיילי המילטון.

**דוגמאות.** עבור  $A = I_n$  אז  $f_A = (x-1)^n$  ו- $m_A = (x-1)$ . לא בהכרח  $m_A = f_A$ , אל לפעמים כן - לדוגמה בעבור  $D: \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$  אופרטור הגזירה מתקיים  $f_D = x^{n+1}$  וכן  $m_D = x^{n+1}$  כי יש פולינומים שנדרש לכזור  $n$  פעמים ע"מ לקבל 0, לדוגמה  $x^n$ .

**משפט 34.** תהא  $A = A_f$  המטריצה המצורפת ל- $A$ . אז  $f_A = m_A$ .

**משפט 35.** אם  $A$  מייצגת את  $T: V \rightarrow V$  אז  $m_A = m_T$ .

הוכחה. נבחר בסיס ל- $V, B$ . יהי  $p \in \mathbb{F}[x]$ . אז  $p([T]_B) = p([T]_B)$ . שני האגפים מתאפסים ביחד, ולכן  $I_A = I_T$ .

**הערה 8.** נניח ש- $A$  לכסינה והע"ע השונים הם  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  (כלומר  $f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$ ) אז  $m_a = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$

הוכחה. בה"כ  $A$  אלכסונית,  $A = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$  עם חזרות. נבחין ש- $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i I) = 0$  (הסברים בהמשך).  $A$  מייצגת העתקה  $T: V \rightarrow V$  ול- $V$  יש בסיס של ו"ע  $B = (v_1 \dots v_n)$ . אז  $(\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I))(v_j) = 0$  כי  $v_j$  מתאים ל- $\lambda_i$  כלשהו וכך זה מתאפס.

ידוע  $m_a \mid \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$ . אם נוריד את אחד המכופלים אז ה"ע שירד לא יתאפס/לא יפאס הז הוקטור העצמי המצאים.

למעשה,  $d$  הנ"ל הוא המינימלי שעבורו ניתן לבטא את  $A^d$  כצ"ל של חזקות נמוכות יותר.

**הערה 9.** אם  $A \in M_n(\mathbb{F}), \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$  אז ניתן לחשוב על  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ו- $m_A$  לא משתנה ללא תלות בשדה.

**משפט 36.** אם  $g, h \in \mathbb{F}[x]$  ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל אז  $g(T), h(T)$  מתחלפות.

הוכחה.

$$(g(T) \circ h(T))(v) = (g \cdot h)(T)(v) = (h \cdot g)(T)(v) = (h(T) \circ g(T))(v)$$

**למה 1.** (למת המחלק של פולינום מינימלי). יהי  $m_T$  הפולינום המינימלי של ט"ל  $T: V \rightarrow V$ . אם  $f(x) \mid m_T(x)$  וגם  $\deg f > 0$  אז  $f(T)$  אינו הפיך.

הוכחה. בכלל ש- $m_T \mid f$  אז קיים  $g \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $f = m_T \cdot g$ . נניח בשלילה ש- $f(T)$  הפיכה. אז:

$$f(T) \circ g(T) = \underbrace{m_T(T)}_0 \implies \underbrace{f(T)^{-1} \circ (0)}_0 = g(T)$$

ידוע:

$$\deg m_T = \underbrace{\deg f}_{>0} + \deg g \implies \deg g < \deg m_T$$

בה"כ  $g$  מתוקן וקיבלנו סתירה למינימליות של  $m_T$ , אלא אם כן  $g(x)$  פולינום ה-0 אבל אז  $m_T = 0$  בסתירה להגדרתו של פולינום מינימלי.

הוכחה זהה עבור מחלק של  $m_A$ , עבור  $A$  מטריצה.

**משפט 37.** אם  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אז בהינתן  $p(T) = 0$  מתקיים  $p(\lambda) = 0$ .

הוכחה. קיים  $v \neq 0$  ו"ע כלומר  $Tv = \lambda v$ , ולכן:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad 0 = 0v = p(T)(v) = \left( \sum_{i=0}^n a_i T^i \right)(v) = \sum_{i=0}^n a_i T^i(v) = \left( \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \right) v = p(\lambda)v$$

מהיות  $v \neq 0$  נקבל  $p(\lambda) = 0$  כדרוש.

"זה טבעוני, זה טבעוני וזה ממשש טבעוני". "מה זה אומר שזה לא טבעוני? יש בזה קצת ביצה".

**משפט 38.**  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אמ"מ  $m_T(\lambda) = 0$ .

הוכחה. כיוון אחד הוא מקרה פרטי של המשפט הקודם. מהכיוון השני, ידוע  $m_T(\lambda) = 0$ . לפי משפט בזו  $m_T(x) \mid (x - \lambda)$ . ידוע  $f_T \mid m_T$  וסה"כ  $f_T \mid (x - \lambda)$  וסה"כ  $\lambda$  ע"ע של  $T$ .

**משפט 39.**  $m_A(x) \mid f_A(x) \mid (m_A(x))^n$

הוכחה. נותר להוכיח  $f_A(x) \mid (m_A(x))^n$  (השאר ממשפטים קודמים). ידוע שפולינום מינימלי/אופייני נשארים זהים מעל כל שדה שמכיל את  $\mathbb{F}$ . לכן, ניתן להניח שהוא מתפרק לגורמים לינאריים. ראינו שאם  $f, g \in \mathbb{F}[x], \mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ , אז  $f \mid g$  מעל  $\mathbb{K}$  אז  $f \mid g$  מעל  $\mathbb{F}$ . אז:

$$\left( \sum n_i = n \right) \quad f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}, \quad m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \quad (1 \leq m_i \leq n_i) \quad (m_a(x))^n = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n \cdot m_i}$$

בגלל ש- $n \leq m_i \cdot n \implies 1 \leq m_i$  אז מצאנו  $f_A \mid m_A^n$ .

הוכחה זהה עבור  $T: V \rightarrow V$  עם  $\dim V = n$ .

**מסקנה (שימושית!).** נניח ש- $f_A \mid g$ . נניח ש- $g$  אי פריק. אז  $m_A \mid g$ .

$$g \mid f_A \mid (m_A)^n$$

■

ידוע  $g$  אי פריק, ולכן ראשוני (כי  $\mathbb{F}[x]$  תחום ראשי) ולכן  $g \mid m_A$ .

**משפט 40.** נניח  $A$ -ש בלוקים עם בלוקים על האלכסון,  $A = \text{diag}(A_1 \dots A_k)$  כך ש- $\sum n_i = n$ ,  $\forall i \in [k]: A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ , אז מתקיים  $m_A = \text{lcm}(m_{A_1} \dots m_{A_k})$ .

במקרה שלנו, ה- $\text{lcm}$  הנ"ל הוא הפולינום בעל הדרגה המינימלית שמתחלק בכל ה- $m_{A_i}(x)$ . באופן כללי,  $\text{lcm}(a_1 \dots a_n)$  מתקבל כיוצר של אידיאל החיתוך בתחום הראשי. כלומר:

$$I = (\ell) = \bigcap_{i=1}^n Ra_i$$

(הבהרת הסימון:  $\langle a \rangle = (a) = Ra$ ).

הוכחה (למשפט לעיל). לכל  $g \in \mathbb{F}[x]$  מתקיים:

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}$$

■

מתקיים  $g(A) = 0$  אם  $g(A_i) = 0$   $\forall i \in [k]$ . לכן  $g \mid m_{A_i}$   $\forall i \in [k]$ . מהגדרת ה- $\text{lcm}$  סיימנו.

**משפט 41.** נניח ש- $T, S: V \rightarrow V$  ט"ל מתחלפות. אז:

1.  $\text{Im } S, \ker S$  הם  $T$ -אינווריאנטים (ולהפך).

2. אם  $S \subseteq W$  תמ"ו הוא  $T$ -אינו' אז גם  $S(W)$  הוא  $T$ -אינ'.

3. אם  $W_1, W_2 \subseteq V$  הם  $T$ -אינ' אז גם  $W_1 \cap W_2$ ,  $W_1 + W_2$  הם  $T$ -אינ'.

4. אם  $f \in \mathbb{F}[x]$  ו- $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -אינ', אז  $W$  גם  $f(T)$ -אינ'.

הוכחה.

1. יהא  $v \in \text{Im } S$ , אז קיים  $u \in V$  כך ש- $v = S(u)$ :

$$Tv = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = (S \circ T)(u) = S(T(u)) \in \text{Im } S$$

ועבור  $v \in \ker S$ :

$$S(T(v)) = \dots = T(S(v)) = T(0) = 0 \implies T(v) \in \ker S$$

2. יהי  $v \in S(W)$ . קיים  $w \in W$  כך ש- $v = S(w)$ :

$$T(v) = T(S(w)) = S(T(w)) \in S(W)$$

כי  $T(w) \in W$ .

3. ראינו בתרגול הקודם

4. יהי  $w \in W$ .

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad f(T)w = \left( \sum_{i=0}^n a_i T^i \right) (w) = \sum_{i=0}^n a_i T^i(w)$$

באינדוקציה  $T^i(w) \in W$  תמ"ו ולכן סגור וצ"ל וסיימנו. [בסיכום כתוב הוכחה: קל]

■

(הערה: 3, 4 לא תלויים בהיות הטרנספורמציות מתחלפות)

### 4.3 ניסוח והוכחה של משפט הפירוק הפרימרי

**משפט 42.** ("מאוד חשוב") יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ . נניח  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נניח  $f(T) = 0$ . נניח ש- $f = g \cdot h$  עבור  $\text{gcd}(g, h) = 1$ . אז:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$$

ואם  $f = M_T$ , אז  $g, h$  הם הפולינומים המינימליים לצמצום  $T$  על תת-המרחבים לעיל בהתאמה.

הבהרת הכוונה ב"פולינום המינימלי לצמצום  $T$  על תתי המרחבים": בהינתן  $T = U \oplus W$ ,  $T_u = T|_U : U \rightarrow U$ , ובאופן דומה  $T_w$ , אז  $m_T = m_{T_U} \cdot m_{T_W}$ .

הוכחה. ידוע  $h = g \cdot h$  ולכן  $\exists a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$  כך ש- $a(x)g(x) + b(x)h(x) = 1$  כך ש-:

$$\underbrace{(a(T) \circ g(T))(v)}_{\in \ker h(T)} + \underbrace{(b(T) \circ h(T))(v)}_{\in \ker g(T)} = V$$

ולכן  $V = \ker h(T) + \ker g(T)$ . וכן הראינו שזהו סכום ישר. עתה, נסמן:

$$\begin{aligned} W_2 &= \ker h(T) & W_1 &= \ker g(T) \\ T_2 &= T|_{W_2} & T_1 &= T|_{W_1} \end{aligned}$$

וכן  $B_1$  בסיס ל- $W_1$ ,  $B_2$  ל- $W_2$ . לכן  $B = B_1 \uplus B_2$  בסיס ל- $V$ . משום שהראינו ש- $W_1, W_2$  הם  $T$ -אינו' בשיעור קודם:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

מהמשפט שראינו,  $m_T = \text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})$ . ברור ש- $g \mid m_{T_1}$  וגם  $h \mid m_{T_2}$ . אז:

$$\deg m_{T_1} = \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} = \deg(m_{T_1} \cdot m_{T_2}) \geq \deg(\text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})) = \deg m_T$$

ולכן כל ה"אשים לעיל הדוקים ושוויון בכל מקום.

$$\deg m_{T_1} \leq \deg g \wedge \deg m_{T_2} \leq \deg h$$

אם אחד מהשוויונות לא הדוקים, אז:

$$\deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} < \deg g + \deg h$$

וסתירה למה שהראינו. לכן:

$$m_{T_1} \mid g \wedge \deg m_{T_1} = \deg g \implies m_{T_1} \sim g$$

■

אבל שניהם מתוקנים ולכן שווים. כנ"ל עבור  $h$   $m_{T_2} = h$ .

**דוגמה.** נסמן  $f(T) = 0, f(x) = x^2(x-1)^3$ . החלק הראשון של המשפט אומר  $V = \ker T^2 \oplus \ker(T-I)^3$ . החלק השני אומר שאם  $f = m_T$  אז  $x^2$  הוא הפולינום המינימלי של  $T|_{\ker T^2}$  וכן  $(x-1)^3$  המינימלי של  $T|_{\ker(T-I)^3}$ .

**משפט 43** (משפט הפירוק הפרימרי). יהיו  $T: V \rightarrow V$ ,  $m_T$  הפולינום המינימלי של  $T$ , ונניח ש-:

$$m_T = g_1 \cdots g_s \quad \forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

ובנוסף  $g_i$  הוא הפולינום המינימלי של  $T|_{\ker g_i(T)}$ . זה פשוט אינדוקציה על המשפט הקודם.

המרצה גם מוכיח את זה על הלוח אבל לא מתחשק לי לכתוב את זה. טוב, אני אכתוב את זה. "יש לו שם מפוצץ אז הוא כנראה חשוב"

הוכחה. באינדוקציה על  $s$

בסיס: עבור  $s = 2$  המשפט שהוכחנו.

צעד: נסמן:

$$h(x) = g_s(x), \quad g(x) = \prod_{i=1}^{s-1} g_i(x)$$

ואז:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \implies \gcd(h, g_i) = 1$$

מהמשפט שקיבלנו:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T) \xrightarrow{\text{אינדוקציה}} \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

והמשך דומה עבור  $g_i$   $m_{T|_{\ker g_i}} = g_i$

$$\ker h(T) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T|_{\ker h(T)}) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

**הערה 10.** (מקרה פרטי חשוב) נניח כי  $m_T$  מפרק לגורמים לינאריים שונים זה מזה. כלומר:

$$m_T = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)$$

ו- $\lambda_i \neq \lambda_j$  לכל  $i \neq j$ , אז  $T$  לכסינה.

הוכחה. לפי המשפט:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(T - \lambda_i I)$$

$V$  סכום ישר של מ"ע  $\lambda_1 \dots \lambda_s$  הם כולם ע"ע שונים, אז יש ל- $V$  בסיס של ו"א ולכן  $T$  לכסינה.

**סיכום.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל, ו-:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \wedge m_T(x) = \prod_{i=1}^s g_i$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(g_i(T)) \wedge \forall i: m_{T|_{\ker g_i(T)}} = g_i$$

**המשך בעמוד הבא**

## 5.1 מציאת שורשי פולינום אופייני ממעלה חמישית ואילך

נבחין בבעיה:  $A = M_5(\mathbb{Z})$ , קבעו אם היא לכסינה מעל  $\mathbb{C}$ .

- נחשב את  $f_A(x)$
  - נמצא שורשים, אלו הם הע"ע
  - לכל ע"ע נחשב את  $v_\lambda$
  - אם סכום הממדים מסעיף ג' הוא 5, אז היא לכסינה
  - $T$  לכסינה אם"מ קיים בסיס ו,ע אם"מ ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי
- אבל (המתמטיקאי, לא מילת הניגוד ולא מילה נרדפת לניגוד) הוכיח שאין פתרונות לפולינומים ממעלה חמישית ויותר, וגלואה מצא דוגמאות לפולינומים שאי אפשר לבצע עליהם נוסחאת שורשים ופיתח את התורה של הרחבת שדות לשם כך.
- היוונים העתיקים ביססו את הגיאומטריה שלהם באמצעות דברים שאפשר לבדוק עם שדה ומחוגה. באמצעות כלים של גלואה אפשר לראות מה אפשר לעשות עם האמצעים האלו, ולהוכיח שלוש בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור – האם אפשר לרבע את המעגל (האם אפשר לבנות באמצעות שדה ומחוגה ריבוע ששטחו שווה לשטח המעגל), או במילים אחרות, האם אפשר למצוא את  $\sqrt{\pi}$  – אי אפשר כי זה לא מספר אלגברי. שאלות אחרות הן, בהינתן קובייה, האם אני יכול למצוא קובייה בנפח כפול? באותה המידה אי אפשר למצוא את  $\sqrt[3]{2}$ . שאלה אחרת הייתה האם אפשר לחלק זווית ל-3 חלקים שווים.
- גלואה הראה שכדי לעשות את זה צריך למצוא שורשים שלישיים של כל מני דברים, שבאמצעות סרגל ומחוגה אי אפשר לעשות זאת. בעיות שהיו פתוחות לעולם המתמטי במשך אלפי שנים נפתרו בעזרת אותן התורות.
- אבל, בהתאם לשמו, מת משחפת בגיל 26. גלואה מת בגיל 21 מדור־קרב.
- מסקנה 9.** לא ללכת לדור־קרב.

הוכחה. ההוכחה מתקדמת ועוסקת בתורת גלואה.

**הגדרה 43.** בהינתן  $f(x) = \prod_k (x - \lambda_k)^{r_k} \quad \forall i \neq j: \lambda_i \neq \lambda_j$  אז  $f^{\text{red}} := \prod_k (x - \lambda_k)$  טענה:

$$f^{\text{red}} = \frac{f}{\gcd(f, f')}$$

הוכחה. נשאר כתרגיל בעבור הקורא. (נתנו לנו את זה בשיעורי הבית)

## 5.2 צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי נילפוטנטי

### 5.2.1 $f^{\text{red}}$ ונילפוטנטיות

**משפט 44.** לכסינה אם"מ  $f_A^{\text{red}}(A) = 0$

**למה 2.**  $f_A^{\text{red}} \mid m_A$  ושוויון אם"מ  $A$  לכסינה.

הוכחת הלמה. יהיו  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  הע"ע של  $A$  (אפשר בה"כ להרחיב שדה כדי שהם יהיו קיימים). אז אם  $f_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{s_i}$  ומתקיים  $m_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{r_i}$  וידוע  $1 \leq r_i \leq s_i$  ולכן  $f_A^{\text{red}} \mid m_A$

עתה נוכיח את החלק השני של הלמה (השוויון). אם  $A$  לכסינה, אז יש בסיס של ו"עים ועם  $\lambda$  הוא ע"ע של ו"ע בבסיס  $B$  אז  $Av_\lambda - \lambda v_\lambda = 0$  ולכן  $f_A^{\text{red}}(A) = 0$  וסה"כ  $f_A \mid m_A$

אם  $f_A^{\text{red}} = m_A$  אז  $m_A$  מכפלה של גורמים לינארית זרים, וראינו גרירה ללכסינות.

הוכחת המשפט מהלמה.  $A$  לכסינה אם"מ  $f_A^{\text{red}}$ ,  $m_A = f_A^{\text{red}}$  ואנחנו יודעים כי  $m_A(A) = 0$  ולכן  $A$  לכסינה אם"מ  $f_A^{\text{red}}$ .

**משפט 45.** נניח  $T: V \rightarrow V$  לכסינה, וקיים  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -שמור. אז  $T|_W$  לכסינה.

הוכחה. נסמן  $S = T|_W$ . אנחנו יודעים  $m_T(T) = 0$  ולכן  $m_T(S) = 0$ . ידוע  $m_T = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)$  ולכן  $m_S \mid m_T$  מתפרק לגורמים לינאריים זרים, סה"כ  $S$  לכסינה.

**מטרה:** בהינתן  $T: V \rightarrow V$  נרצה לפרק את  $V$  לסכומים ישרים של מרחבים  $T$ -אינווריאנטים.

**הגדרה 44.** יהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נאמר ש- $V$  פריק ל- $T$  אם קיימים  $U, W \subseteq V$  תמ"זים כך ש:

$$V = U \oplus W \quad \wedge \quad \dim U, \dim W > 0 \quad \wedge \quad U, W \text{ are } T\text{-invariant}$$

מעטה ואילך, נניח ש- $f_T(x)$  מתפצל מעל  $f$  לגורמים לינאריים (כלומר, נרחיב לשדה סגור אלגברית).

**הערה 11.** (נובע ממשפט הפירוק הפרימרי) אם  $S \geq 2$ , ידוע- $\ker g_i(T)$  ו- $V = \bigoplus_{i=1}^S \ker g_i(T)$  ולכן  $V$  פריק ביחס ל- $T$ . בהינתן ההנחה כי  $f_T$  מתפצל לחלוטין, ונניח  $V$  אי-פריק ביחס ל- $T$ , אז  $m_T(x) = (x - \lambda)^r$

**הגדרה 45.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל.  $T$  נקראת נילפוטנטית אם קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $T^n = 0$ . באופן דומה  $A$  מטריצה נילפוטנטית אם  $\exists n \in \mathbb{N}: A^n = 0$ .

**הגדרה 46.** עבור  $n$  המינימלי שעבורו  $T^n = 0/A^n = 0$ , אז  $n$  הנ"ל נקרא דרגת הנילפוטנטיות של  $T/A$ , ומסמנים  $n(T)/n(A)$ .  
 "ניל" בא מלשון null. הרעיון: דבר מה שמתבטל.

**דוגמה.** בסיטואציה ש- $m_T(x) = (x - \lambda)^r$  נסיק ש-:

$$((T - \lambda I)^r = 0 \wedge S := T - \lambda I) \implies n(S) = r$$

הערה: כל פירוק של  $V$  ל- $T$  נותן פירוק שלו ל- $T - \lambda I$  ולהיפך.

הוכחה. ההערה נכונה כי אם  $V = U \oplus W$  כאשר  $U, W$  הם  $T$ -שמוורים, לא טרואיאלים, אז הם גם  $T - \lambda I$ -שמוורים. זאת כי אם  $U$  הוא  $T$  שמור אז:

$$\forall u \in U: T(u) \in U \implies (T - \lambda)(u) = \underset{\in U}{T(u)} - \underset{\in U}{\lambda u} \in U$$

■

המשך ההערה. כדי להבין איך נראים תת-מרחבים אי-פריקים, עשינו רדוקציה לט"ל ניל [רדוקציה=מספיק לי להבין את המקרה הזה בשביל להבין את המקרה הכללי].

## 5.2.2 ציקליות

**משפט 46.**  $T: V \rightarrow V$  ניל אז לכל  $v \in V$   $0 \neq v$  הקבוצה  $v, Tv, \dots, T^k v \neq 0$  היא בת"ל.

הוכחה. יהיו  $\alpha_0 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$  כך ש- $\sum_{i=0}^k \alpha_i T^i(v) = 0$ . נניח בשלילה שהצירוף אינו טרואיאלי. אז קיים  $j$  מינימלי שעבורו  $\alpha_j \neq 0$ .  
 נניח  $n$  המקסימלי שלא מאפס. אז:

$$T^{n-j} \left( \sum \alpha_i T^i(v) \right) = T^{n-j} \left( \sum_{i=j}^k \alpha_i T^i(v) \right) = \alpha_j T^{n-1}(v) + 0 = 0$$

■

אבל  $\alpha_j, T^{n-1} \neq 0$  וזו סתירה.

**הגדרה 47.** קבוצה מהצורה  $\{v, Tv \dots T^k v\}$  כאשר  $T^{k+1}v = 0$  והוא המינימלי, נקראת שרשרת.

**הגדרה 48.** תמ"ו שקיים לו בסיס שהוא שרשרת, נקרא ציקלי.

(ראה לינארית 2 סיוכום 8)

**אנטי-דוגמה:** ישנם מ"וים שאינם  $T$ -ציקליים. למשל:

$$V = \left\{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P(x) + h(y) \mid n \leq p, h \right\}$$

ו- $T$  אופרטור הגזירה הפורמלית. כדי ש- $V$  יהיה ציקלי, צריך למצוא בסיס ציקלי שממדו הוא דרגת הנילפוטנטיות. נבחין ש- $n(T) = n+1$ , וידוע ש- $\dim V = 2n+1$ , ולכן שרשרת מקסימלית באורך  $n+1$  ולכן לא יכול להיות בסיס שרשרת. לכן  $V$  אינו  $T$ -ציקלי.

**הערה 12.** יהי  $T: V \rightarrow V$  ניל  $n(T) \leq n$  וישנו שוויון אמ"מ  $V$  ציקלי.

**הערה 13.** אם  $T: V \rightarrow V$  ניל ו- $V$  ציקלי אז  $V$  אי-פריק ל- $T$ .

הוכחה. נניח בשלילה שישנו פירוק לא טרואיאלי של  $V$  ל- $T$ . אז  $V = U \oplus W$  לא טרואיאלים. נסמן  $\dim U = k, \dim W = \ell$  וידוע  $\dim U = k, \dim W = \ell$ . בה"כ  $k \geq \ell$ . נסמן  $B_v = (v, Tv \dots T^{n-1}v)$  קיימים (ויחידים)  $u \in U, w \in W$  כך ש- $v = u + w$ . אז:

$$T^k v = T^k u + T^k w$$

אך משום ש- $T$  ניל אז  $T|_U, T|_W$  ניל גם כן. ידוע  $n(T|_U), n(T|_W) \leq k$  ולכן בפרט  $T^k(u) = T^k(w) = 0$  ולכן  $T^k v = 0$  אבל  $k < n \wedge T^k(v) \in B_v$ .

■

**משפט 47.** תהי  $T: V \rightarrow V$  ניל ונניח  $U$  תמ"ו של  $V$  הוא  $T$ -אינל וציקלי, אז עבור  $S = T|_U$ :

$$1. \dim U \leq n(T)$$

$$2. \dim T(U) = \dim U - 1 \text{ ציקלי } \text{Im}(T|_U) = T(U)$$

הוכחה.

$$1. \dim U = n(T|_U) \text{ וגם } n(T) \geq n(T|_U)$$

$$2. T(u) = T(\text{span}(v, \dots, T^k v)) = \text{span}(Tv \dots T(T^k v)) = \text{span}(Tv \dots T^{k+1}v) = \text{span}(Tv \dots T^k v) \text{ ולכן } \dim T(U) = \dim U - 1$$



**הגדרה 4.9.**  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי ייקרא ציקלי מקסימלי אם  $\dim U = n(T)$ .

**משפט 4.8.** לכל  $V$  מ"ו,  $T: V \rightarrow V$  קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.

הוכחה. קיים  $v \in V$  כך ש- $T^{n(T)-1}v \neq 0$ . אז  $v, Tv, \dots, T^{n(T)-1}v$  ומטעה מקודם בת"ל ולכן  $\text{span}(v \dots T^{n(T)-1}v)$  תמ"ו ציקלי מקסימלי.

**משפט 4.9.** נניח  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי מקסימלי. אז:

1. אם  $T(U) \subseteq T(V)$  הוא גם ציקלי מקסימלי. (הערה: הורדת הממד באחד מועילה מאוד באינדוקציה)

2.  $U \cap T(V) = T(U)$ .

הוכחה.

1.  $U -$  ציקלי. לכן  $\dim T(U) = \dim U - 1$ . טענה:

$$\dim T(U) = n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1$$

וסיימו.

2. ידוע  $T(U) \subseteq U$  כי  $U$  ציקלי ולכן שמור, וכן  $U \subseteq V$  והסקנו  $T(U) \subseteq T(V)$ , לכן  $T(U) \subseteq U \cap T(V)$ .

עתה נוכיח שוויון באמצעות שיקולי ממד. אם לא היה שוויון אז:

$$T(U) \subsetneq U \cap T(V) \subseteq U \implies \dim T(U) < \dim(U \cap T(V)) \leq \dim(T(U)) + 1 \implies U \cap T(V) = U$$

זו סתירה כי:

$$U \cap T(V) \subseteq T(V) \implies n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1 \implies n(T) = \dim U \leq n(T) - 1$$

### 5.2.3 ניסוח צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי

**משפט 5.0** (המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי). נניח  $T: V \rightarrow V$  ט"ל לינ' ניל' (ניל"י),  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי מקסימלי אז קיים  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -אינ' כך ש- $V = U \oplus W$ .

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על  $n = n(T)$ .

בסיס: אם  $n(T) = 1$  אז  $T = 0$  "יש מה להוכיח בכלל" אז כל  $W \subseteq V$  הוא  $T$ -אינ'. והיות שכל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס, אז  $U = \text{span}(v)$  אז  $W = \text{span}(v_2 \dots v_m)$  כאשר  $B_V = (v := v_1 \dots v_m)$ .

צעד: "צעד, מעבר, אותו דבר, תקראו לזה איך שבא לכם" נניח שאנו יודעים את נכונות הטענה עבור  $n = n(T) - 1$ . נוכיח עבור  $n = n(T)$ . נצמצם את  $T$  ל- $T|_{T(V)}$ . ידוע  $T(U) \subseteq T(V)$  ציקלי מקסימלי. לכן, לפי ה.א. קיים  $W_1$  הוא  $T$ -אינ' כך ש- $T(V) = T(U) \oplus W_1$ .

נגדיר  $W_2 = \{v \in V \mid Tv \in W_1\}$ . אז

**למה 3.** ("למה א'")

-  $U + W_2 = V$  (לאו דווקא סכום ישר)

-  $U \cap W_1 = \{0\}$

**למה 4.** ("למה ב'") בהינתן  $W_1 \subseteq W_2$  ו- $U \subseteq V$  תמ"ו כך ש- $U + W_2 = V$  וגם  $U \cap W_1 = \{0\}$  אז קיים  $W' \subseteq V$  כך ש- $U \oplus W' = V$  וגם  $W_1 \subseteq W' \subseteq W_2$ .

נניח שהוכחנו את הלמות. יהי  $w \in W_1$  אז  $T(w) \in W_1$  ולכן  $w \in W_2$  ולכן  $W_1 \subseteq W_2$ . אז מצאנו  $W'$  תמ"ו של  $V$  כך ש- $W_1 \subseteq W' \subseteq W_2$ . יהי  $w \in W'$  בפרט  $w \in W_2$  ולכן  $T(w) \in W_1$ .

ולכן מש"ל משפט.

ציור של למה 2: אני לא יודע לעבוד עם tikz מספיק טוב, ואני בטוח ש-ChatGPT יוכל לעשות tikz עבורי, אבל אני גם רוצה להיות מרוכז בהרצאה. אז בבקשה פשוט תעשו דיאגרמת ואן למה ב'. גם המרצה לא הוכיח, זה משחקים על הרחבות בסיס וממדים בצורה כזו שאתם מכירים מלינארית 1א. הוכחת הלמה נשארה כתרגיל בעבור הקורא.

נוכיח את למה א'.

הוכחה. יהי  $v \in V$  נביט ב- $T(v)$ . קיימים  $u \in U, w_1 \in W_1$  כך ש-:

$$Tv = Tu + w_1 \implies Tv - Tu = w_1 \implies T(v - u) = w_1 \in W_1$$

ידוע  $v = v - u + u$ . לכן  $v - u \in W_2 \implies T(v - u) \in W_1$ .

אזי משהו  $V = U + W_2$  ו- $W_1 \subseteq T(V)$  ולכן:

$$U \cap W_1 = U \cap (T(V) \cap W_1)$$

ידוע ש-:

$$U \cap W_1 = (U \cap T(V)) \cap W_1 \implies U \cap T(V) = T(U) \implies T(V) = T(U) \oplus W_1 \implies U \cap W_1 = T(U) \cap W_1 = \{0\}$$

■

**מסקנה 10.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל ניל' אז  $V$  אי-פריק ל- $T$  אמ"מ  $V$  ציקלי.

הוכחה.

$\implies$  הוכחנו בשיעור הקודם

$\Leftarrow$  נניח  $V$  אי-פריק. אז קיים  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי מקסימלי. לפי המשפט קיים  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -איני' כך ש- $T = U \oplus W$ . ידוע  $U, W$  תמ"וים איני'. אם  $U = \{0\}$  אז  $V = 0$  ובפרט ציקלי. אחרת, מאי-פריקות  $V$  ל- $T$ , נסיק ש- $W = \{0\}$  ולכן  $V = U$  ציקלי.

■

**משפט 51** (משפט ג'ורדן למקרה של  $T$  ניל'). תהי  $T: V \rightarrow V$  ניל' אז קיים פירוק של  $V$  לסכום ישר של  $V = \bigoplus U_i$  כאשר  $U_i$  הם  $T$ -ציקליים.

הוכחה. נמצא ב- $V$  ציקלי מקסימלי. אז קיים  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -שמור כך ש- $V = U_1 \oplus W$ . ידוע  $T|_W: W \rightarrow W$  ניל', וכעת באינדוקציה שלמה על  $\dim V$ .

■

גרסה שקולה למשפט ג'ורדן:

**משפט 52.** עבור  $T: V \rightarrow V$  ניל', קיים בסיס  $B$  של  $V$  שהוא איחור של שרשראות. בסיס כזה נקרא בסיס מג'ורדן ופירושו של דבר היא ש-:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \square & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \square \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים הם בלוקי ג'ורדן אלמנטרי. בלוק ג'ורדן מהצורה הבאה יקרא אלמנטרי ויסומן:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(יש ספרים בהם זה ה-transpose של זה).

**משפט 53.** עבור  $T: V \rightarrow V$  ניל', אז בכל הפירוקים של  $V = \bigoplus U_i$  ציקליים (אי-פריקים) אז מספר תתי-המרחב מממד נתון הוא זהה עבור כל פירוק.

במילים אחרות: כל מטריצה מייצגת של ט"ל ניל' דומה למטריצת ג'ורדן יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

השקילות בין המשפט לבין ה"במילים אחרות" נובע מזה שגודל בלוק פחות 1 הוא הממד של התמ"ו שנפרש ע"י הוקטורים בעמודו תהללו.

**למה 5.** נניח  $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$  כאשר  $U_i$  הוא  $T$ -איני' (לא נניח אפילו ניל'), אז:

$$T(V) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) \quad \text{א.}$$

$$\ker T = \bigoplus_{i=1}^k \ker T(U_i) \quad \text{ב.}$$

הוכחה: נותר כתרגיל בעבור הקורא.

### 5.3 צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי

במקרה הכללי:

**הגדרה 50.** בלוק ג'ורדן אלנטרי עם ערך  $\lambda$  הוא בלוק מהצורה:

$$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I_n = J_n(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

למה זה הגיוני? כי הסיבה שעשינו מתכתחילה רדוקציה ל- $T$  ניל היא כי  $T - \lambda I$  היא  $T$ -אינוו' ניל, ועתה רק נותר להוסיף את ה- $\lambda I$  חזרה לקבלת המקרה הכללי.

הוכחה. באינדוקציה על  $n = n(T)$ .

- עבור  $n = 1$ , העתקת ה- $V$  מתפרק לסכום ישר של מרחבים מממד 1.
- צעד, נניח נכונות עבור  $n \in \mathbb{N}$ . נניח ש- $n(T) = n + 1$ . נסמן פירוק:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^{\ell} W_i$$

נסדר את  $(u_i)_{i=1}^k$  לפי גודל מימד, ונניח שרשימת הגדלים היא:

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{\times s} < a_1 \leq \dots \leq a_p \implies s + p = k$$

רשימת הממדים מגודל 1 ועוד כל השאר. נעשה כנ"ל עבור  $(w_i)_{i=1}^{\ell}$  ונקבל:

$$\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{\times t} < b_1 \leq \dots \leq b_r \implies t + r = \ell$$

ידוע:

$$T(v) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} T(W_i), \quad n(T|_{T(v)}) = n, \quad p = r, \quad \forall i: a_i - 1 = b_i - 1 \implies a_i = b_i$$

(הפירוק ל- $s$  ו- $t$  דרוש כדי שהפירוק לעיל לא יכלול אפסים כאשר מחילים את  $T$ ) (ידוע  $a_i - 1 = b_i - 1$  כי אינדקס הנילפוטנטיות קטן ב-1 בהחלת  $T$ )

משפט הממדים השני אומר ש-:

$$a_i = \dim U_i = \dim \ker T|_{U_i} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T|_{U_i}}_{a_i - 1} \implies \dim \ker T|_{U_i} = 1$$

מהטענה השנייה בלמה:

$$\begin{aligned} \ker T = \bigoplus_{i=1}^k \ker T|_{U_i} &\implies \dim \ker T = \sum_{i=1}^k \dim \ker T|_{U_i} = k \\ &\implies k = \ell \implies s = t \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \dim \ker T|_{W_i} = \ell \end{aligned}$$

■

"נראה לי שמי שסיכם את ההרצאה קצת חירטט את הסטודנטים ומי שסיכם את ההרצאה לא הבין את החרטוט" - בן על הסיכום של הסטודנטים. (אני מקווה שאני עושה עבודה יותר טובה).

**צורת ג'ורדן לט"ל כללית:** נניח ש- $f_T(x)$  מתפצל לחלוטין. כלומר

$$f_T(x) = \prod_j (x - \lambda_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^k f_{|n_i}(x)$$

כאשר  $U_i$  האי-פריקים ביחס ל- $T$ , ו- $T$  שמורים. היות שהם אי פריקים  $f_{T|_{U_i}} = (x - \lambda)^n$ . נגדיר  $S = T - \lambda I$ . אז  $T - \lambda I$  אינו אממ הוא  $S$ -אינו. אז  $S|_{u_i}$  היא ניל. לכן ל- $u_i$  יש בסיס שרשראות  $B$  שעבורו  $[S|_{U_i}]_B$  מורכבת מבלוקי ג'ורדן ניל כלומר:

$$[S|_{U_i}]_B = \begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square \end{pmatrix}$$

כאשר כל  $\square \in M_n(\mathbb{F})$  מהצורה  $J_n(0)$ . אז:

$$[T|_{U_i}]_B = \text{diag}\{\square \dots \square\}$$

כאשר כל בלוק מהצורה  $J_n(\lambda)$ .

(המרצה לא כתב את זה אז אני מוסיף משהו משלי): ומכאן צורת ג'ורדן של המטריצה הזו זה פשוט בלוקים של הצמצומים בבסיס  $B$  על גבי עוד מטריצת בלוקים.

**משפט 54.** צורת ג'ורדן היא יחידה עבור סדר הבלוקים.

אסטרטגיית הוכחה: ניקח צורת ג'ורדן עבור  $T: V \rightarrow V$  ונראה שהיא נקבעת מ- $T, V$  בלבד.

הוכחה. תהא צורת ג'ורדן עבור  $T$  תהא צורת ג'ורדן עבור  $T$ . קיים בסיס  $B$  שעבורו:

$$[T]_B = \text{diag}\{\square_{\lambda_1} \dots \square_{\lambda_k}\}$$

כאשר  $\square_{\lambda_i}$  זו דרך מוזרה לכתוב  $J_k(\lambda)$ . אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i = \bigoplus \bar{v}_\lambda, \quad \bar{v}_\lambda = \bigoplus_{i=s}^\ell U_i$$

כאשר  $\bar{v}_\lambda$  הוא סכום של אי-פריקים שעבורם  $T - \lambda I$  ניל. תזכורת:

$$\tilde{v}_\lambda := \bar{v}_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}: (T - \lambda I)^n v = 0\}$$

מה ניתן להגיד על הממדים של ה- $u_i$  שמרכיבים את  $\tilde{v}_\lambda$ ? הממדים שלהם נקבעים ביחידות, עד כדי סדר, כי היות ש- $u_i$  הם ה- $T$ -איני' הם גם  $(T - \lambda I)$ -איני', ולכן  $[S|_{\tilde{v}_\lambda}]_{B_\lambda}$  היא כ'ורדן ניל' ואז:

$$[T|_{\tilde{v}_\lambda}]_{B_\lambda} = [S|_{\tilde{v}_\lambda}]_{B_\lambda}$$

■

הגיון: המרחבים  $v_\lambda$  נקבעים ביחידות ללא תלות בפירוק שבחרנו.

הגיון אחר: כל בלוק מורכבת מהעתקות שבהן  $T - \lambda I$  ניל' (פירוק פרימרי).

**הערה 14.** בהוכחה בסיכום צריך להראות שה- $\text{span}$  של הבלוקים הוא באמת  $\tilde{v}_\lambda$ .

הערה שלי ביחס ללמה צריך את ההוכחה הזאת: כי באיזשהו מקום אם נבחר בסיסים שונים לפירוק אז יכול להיות שדברים מתחבשים.

## 5.4 דיבורים ואינטואיציה לסוף הנושא

הסיפור של מה שעשינו עד עכשיו: אנחנו חוקרים אופרטורים לינאריים, בצורה שתהיה נוחה להעלות את האופרטור בחזקה. הגענו למסקנה שהכי נוח כשזה לכסין. כשזה קורה, אנחנו יודעים איך לפרק. ראינו כמה אפיונים לזה – גיאומטרי, אלגברי וכו'. ניסינו לעשות מטריצה עם בלוקים על האלכסון במקום, לשם כך, נסתכל על המרחבים שרלוונטיים לבלוקים האלו בלבד. הבנו שבמקום לחקור את ה- $T$ -איני', נחקור את ה- $S$ -איני' (הניל' כמו שהגדרתי למעלה). הבנו שהם מורכבים מבלוקי ג'ורדן ניל' אלמנטריים, עד לכדי סדר, ואז הרחבנו לצורה הכללית. עברנו דרך חוגים רק כדי להגיד שחוג הפולינום הוא תחום ראשי, ע"מ שנוכל להגדיר פולינום מינימלי המחלק כל פולינום אחר. לא באמת היה צריך חוגים. סתם המרצה רצה לרצוח אותנו. כל הדיבורים על פולינום מינימלי בזכות משפט קיילי-המילטון.

בסיכום אחר שיעלה למודל, [הזהרת הרבה דברים שהמרצה אמר בעפ ולא באמת הבנתי] מתחילים מלפרק את המרחב למרחבים  $T$ -ציקליים שלכולם יש פולינום אופייני משל עצמם. הראינו שאם נציב את האופרטור בפולינום האופייני של המטריצה המצורפת זה יתאפס (מה? איפה עשיתי את זה?). ומכאן הפולינום המינימלי של אופרטור הצמצום על המרחב הציקלי מחלק את הפולינום האופייני של ההעתקה שלו.

עכשיו הוא אומר להראות דרך אחרת לפתח צורת ג'ורדן: בגלל ש- $\mathcal{Z}(T, V) \subseteq V$  תמ", ונוכל לקחת  $\mathcal{Z}(T, V) \oplus W = V$  (נסמן  $\mathcal{Z}(T, V) = U$ ) אז  $f_T(x) = f_{T|_U} \cdot f_{T|_W}$  (סוף סוף משפט טרואיאלי) והמטריצה המצורפת האקראית ההיא ש- $f_{T|_U}$  הפולינום המינימלי גם מאפס את  $T|_U$  והוא שווה ל- $\prod f_{T|_{U_i}}$  כלשהם. מהכיוון הזה אפשר להראות גם את קיילי המילטון, בלי לעבור דרך פיצול מקרים למשולשית/לא משולשית ומשום מה הרחבת שדות באמצע שאיכשהו גם את זה הוכחנו.

## המשך בעמוד הבא

## 6.1 הגדרות בסיסיות בעבור תבניות בילינאריות כלליות

**הגדרה 51.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ . פונקציונל לינארי  $\varphi$  מעל  $V$  הוא  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ .

**הערה 15.** ראה הרחבה על פונקציונלים לינארים ומרחבים דואלים בסוף הסיכום.

**הגדרה 52.** יהיו  $V, W$  מ"וים מעל  $\mathbb{F}$ . תבנית בילינארית על  $V \times W$  הינה העתקה  $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  כך ש- $\forall v_0 \in V \forall w_0 \in W$  כן שהעתקות  $(v, w_0) \mapsto f(v, w_0)$ ,  $(v_0, w) \mapsto f(v_0, w)$  הן פונקציונליים לינאריים.

אינטואיטיבית, ההעתקה לינארית בכל אחת מהקורדינאטות בנפרד (בדומה לדוגמה לדטרמיננטה, שהיא העתקה מולטי-לינארית ולינארית בכל אחת מהשורות בנפרד)

**משפט 55.** באופן שקול: יהיו  $\forall v \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ :

$$\begin{aligned}\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1 + v_2, w) &= f(v_1, w) + f(v_2, w) \\ \forall w_1, w_2 \in W: f(v, w_1 + w_2) &= f(v, w_1) + f(v, w_2) \\ f(\alpha v, w) &= \alpha f(v, w) = f(v, \alpha w)\end{aligned}$$

בסופו של דבר נתמקד בסוג מסויים של העתקות בילינאריות, הן מכפלות פנימיות.

בשביל העתקות  $n$ -לינאריות צריך טנזור  $n$  ממדי. זה לא נעים ויודעים מעט מאוד על האובייקטים הללו. בפרט, בעבור העתקה בילינארית נראה שנוכל לייצג אותה באמצעות מטריצות. בלי טנזור ובלגנים - שזה נחמד, וזו הסיבה שאנו מתעסקים ספציפית עם העתקות בילינאריות.

### דוגמאות.

1. תבנית ה-0:  $\forall v, w: f(v, w) = 0$
2. נגדיר  $V = W = \mathbb{R}^2$ , אז  $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2xu + 5xv - 12yu$
3. (חשוב) על  $\mathbb{F}^n$ :

**הגדרה 53.** לכל שדה  $\mathbb{F}$  מוגדרת התבנית הבילינארית הסטנדרטית היא:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

4. יהיו  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}, \psi: W \rightarrow \mathbb{F}$  פונקציונליים לינאריים  $f(v, w) = \varphi(v) \cdot \psi(w)$
5. הכללה של 4: יהיו  $\varphi_1 \dots \varphi_k: V \rightarrow \mathbb{F}$  פונקציונליים לינאריים וכן  $\psi_1 \dots \psi_k: W \rightarrow \mathbb{F}$  פונקציונליים לינאריים. אז ההעתקה הבאה בילינארית:  $f(v, w) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(v) \psi_i(w)$

הרעיון: ברגע שנקבע וקטור ספציפי נקבל לינאריות של הוקטור השני.

במקרה ש- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  לעיל, התבנית הבילינארית הסטנדרטית "משרה" את הגיאומטריה האוקלידית. כלומר  $f(v, u) = 0 \iff v \perp u$ .

**הערה 16.** בעתיד נראה שכל תבנית בילינארית נראית כמו מקרה 5.

**משפט 56.** נסמן את מרחב התבניות הבילינאריות על  $V \times W$  בתור  $B(V, W)$ . זהו מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ .

אני ממש לא עומד להגדיר את החיבור והכפל בסקלר של המשפט הקודם כי זה טריויאלי והמרצה כותב את זה בעיקר בשביל להטריל אותנו.

### דוגמה חשובה אחרת.

**משפט 57.** נסמן ש- $\dim V = n, \dim W = m$  ותהי  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ . יהי  $\mathcal{A}$  בסיס ל- $B$ ,  $\mathcal{B}$  בסיס ל- $W$

$$f(u, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A [w]_{\mathcal{B}}$$

העתקה בילינארית.

הוכחה. נקבע  $v$  כלשהו:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A = B \in M_{1 \times m}, \quad g(w) = f(v, w), \quad g(w_1 + w_2) = B[w_1 + w_2]_{\mathcal{B}} = B[w_1]_{\mathcal{B}} + B[w_2]_{\mathcal{B}}$$

כנ"ל עבור כפל בסקלר. נקבע  $w$ , אז  $C = A[w]_{\mathcal{B}} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ :

$$h(v) = f(v, w) \quad h(v) = [v]_{\mathcal{A}}^T \cdot C, \quad h(v_1 + v_2) = [v_1 + v_2]_{\mathcal{A}}^T \cdot C = ([v_1]_{\mathcal{A}}^T + [v_2]_{\mathcal{A}}^T) C = h(v_1) + h(v_2)$$

■

("זה  $\mathcal{A}$ , אתם תסתדרו" - המרצה ברגע שיש לו שני  $A$ -ים על הלוח)

**הגדרה 54.** בהינתן תבנית בילינארית  $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  וניחא ש- $\mathcal{A}$  בסיס ל- $V$ ,  $\mathcal{B}$  בסיס ל- $W$ . נגדיר את המטריצה המייצגת את  $f$  ביחס לבסיסים  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  ע"י  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  כאשר  $A_{ij} = f(v_i, w_j)$  (נסמן  $\mathcal{A} = (v_i)_{i=1}^n, \mathcal{B} = (w_i)_{i=1}^m$ )

**משפט 58.**  $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$

הוכחה. קיימים ויחידים  $\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{F}$  כך ש- $w = \sum b_i w_i, v = \sum \alpha_i v_i$ . כלומר:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T = (\alpha_1 \dots \alpha_n), [w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

ומכאן פשוט נזרוק אלגברה:

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i, w) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f\left(v, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m \beta_j f(v_i, w_j)\right) \\ &= \sum_{i,j \in [n] \times [m]} \alpha_i f(v_i, w_j) \beta_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{im}\right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

נאמץ לסיכום הזה את הסימון  $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  עבור המטריצה המייצגת של  $f$  בי-לינארית.

**משפט 59.** עם אותם הסימונים כמו קודם:

$$\psi: B(v, w) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{F}), f \mapsto [f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$$

אז  $\psi$  איזו'.

הוכחה. נסמן את  $A = [f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  ואת  $B = [g]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ . אז:

• לינאריות.

$$(\mathcal{P}(f+g))_{ij} = (f+g)(v_i, w_j) = f(v_i, w_j) + g(v_i, w_j) = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (\psi(f))_{ij} + (\psi(g))_{ij} \implies \psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$$

באופן דומה בעבור כפל בסקלר:

$$(\psi(\alpha f))_{ij} = \alpha f(v_i, w_j) = \alpha (\psi(f))_{ij} \implies \psi(\alpha f) = \alpha \psi(f)$$

• **חח"ע.** תהי  $f \in \ker \psi$ , אז:  $\forall i, j \in [n] \times [m]: f(v_i, w_j) = 0 \implies \forall v \in V, w \in W: f(v, w) = 0$  ולכן  $\psi(f) = 0 \in M_{n \times m}$  (עם אותם הסימונים כמו קודם)

• **על.** תהי  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ . נגדיר  $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$  ואכן  $f(v, w) = e_i^T A e_j = (A)_{ij}$  ולכן  $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$ .

■

**משפט 60.** יהיו  $V, W$  מ"וים מעל  $\mathbb{F}$  נניח  $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subseteq V$  וכן  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq W$  בסיסים של  $W$ . תהי  $f \in B(V, W)$ . תהי המייצגת של  $f$  לפי  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  היא  $A$  ותהי  $A'$  המייצגת בבסיסים  $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ . תהי  $P$  מטריצת המעבר מ- $\mathcal{A}$  ל- $\mathcal{A}'$  ו- $Q$  מטריצת המעבר מ- $\mathcal{B}$  ל- $\mathcal{B}'$ . אז  $A' = P^T A Q$ .

הוכחה. ידוע:

$$P[v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{A}'}, Q[w]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'}$$

מצד אחד:

$$f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}} = (P[v]_{\mathcal{A}'})^T A Q [w]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{A}'}^T P^T A Q [w]_{\mathcal{B}'} \implies A' = P^T A Q$$

■

כדרוש.

**הגדרה 55.** עבור  $f \in B(V, W)$  נגדיר את  $\text{rank } f = \text{rank } A$  כאשר  $A$  מייצגת אותה ביחס לבסיסים כלשהם.

הוכחה. כפל בהפיכה לא משנה את דרגת המטריצה (ו-transpose של מטריצה הוא הפיך), דהיינו מטריצות שינוי הבסיס לא משנות את דרגת המטריצה. ■

**מסקנה 11.** תהא  $f \in B(V, W)$  ונניח  $\text{rank } f = r$ . אז קיימים בסיסים  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  של  $W, V$  בהתאמה כך ש- $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . הרעיון הוא לדרג את כל כיוון, שורות באמצעות transpose ועמודות באמצעות המטריצה השנייה. אפשר גם לקבע בסיס, ולדרג שורות ועמודות עד שיוצאים אפסים (הוכחה לא נראתה בכיתה).  
 "חצי השעה הזו גרמה לי לשנוא מלבנים בצורה יוקדת" - מעתה ואילך נתעסק במקרה בו  $V = W$ . נשתמש בבסיס יחיד.

## 6.2 חפיפה וסימטריות

**הגדרה 56.** יהיו  $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$ , נאמר שהן חופפות אם קיימת הפיכה  $P \in M_n(\mathbb{F})$  כך ש- $A' = P^T A P$ .

**משפט 62.** מטריצות חופפות אמ"מ הן מייצגות את אותה התבנית הבילינארית.

**משפט 63.** אם  $A, A'$  חופפות, אז:

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T \quad 1.$$

$$\exists 0 \neq c \in \mathbb{F}: \det A' = c^2 \det A \quad 2.$$

הוכחה. הגדרנו  $\text{rank } f$  כאשר  $f$  בילינ' להיות הדרגה של המייצגת את התבנית, וראינו שהיא לא תלויה בבסיס. בכך למעשה כבר הוכחנו את 1. עבור 2, מתקיים  $A' = P^T A P$  ו- $P$  הפיכה (ולמעשה מטריצת מעבר בסיס) ולכן אם נסמן  $c = |P| = |P^T|$  מתקיים:

$$|A'| = |P^T A P| = |P^T| \cdot |A| \cdot |P| = |P|^2 |A| = c^2 |A|$$

■

(הערה: יש שדות שמעליהם 2 לא מעניינת במיוחד).

$$\forall v, w \in V: f(v, w) = f(w, v)$$

**הגדרה 57.** תבנית  $f$  מעל  $V$  נקראת סימטרית אם:

$$\forall v, w \in V: f(v, w) = -f(w, v)$$

**הגדרה 58.** תבנית  $f$  מעל  $V$  נקראת אנטי-סימטרית אם:

נבחין שאם  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , ניתן להגדיר את:

$$\varphi(v, w) = \frac{f(v, w) + f(w, v)}{2}, \quad \psi(v, w) = \frac{f(v, w) - f(w, v)}{2}$$

מתקיים ש- $\varphi$  סימ' ו- $\psi$  א-סימ' וכן  $f = \varphi + \psi$ .

**משפט 64.** תהי  $f$  תבנית בילינ' על  $V$ , ו- $B = (v_i)_{i=1}^n$  בסיס ל- $B$ . נניח  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  המייצגת את  $f$  ביחס ל- $B$ . אז סימ'/אסימ' אממ  $A$  סימ'/אסימ'.

הוכחה.  $\implies$  אם  $f$  סימ'/אסימ', אז:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{Sym}}{=} f(v_j, v_i) = a_{ji} \\ a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{ASym}}{=} -f(v_j, v_i) = -a_{ji} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$  אם  $A$  סימ' אז:

$$f(v, w) = [u]_B^T A [w]_B \stackrel{(1)}{=} ([u]_B^T A [w]_B)^T = [w]_B^T A^T ([u]_B^T)^T = [w]_B^T A [u]_B = f(w, v)$$

כאשר (1) מתקיים כי transpose למטריצה מגודל  $1 \times 1$  מחזיר אותו הדבר. וכן במקרה האנטי-סימטרי:

$$f(u, w) = [w]_B^T (-A) [u]_B = -[w]_B^T A [u]_B = -(w, u)$$

■

## 6.3 תבנית ריבועית

**הגדרה 59.** תהא  $f$  תבנית על  $V$ . התבנית הריבועית:

$$Q_f: V \rightarrow \mathbb{F}, \quad Q_f(v) = f(v, v)$$

היא לא העתקה לינארית. היא תבנית ריבועית. **דוגמאות:**

•

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy + yx = 2xy$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv - uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy - yx = 0$$

• התבנית הסטנדרטית:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xu + yv \implies Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$

**סימון 5.** עבור תבנית בילינארית  $f$  על  $V$ , נגדיר את  $\hat{f}(u, v) = f(v, u)$

אם  $f$  סימטרית נבחין  $Q_f = Q_{\hat{f}}$

**משפט 65.** תהי  $f$  תבנית בילי' סימ' על  $V$ , ונניח  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , אז:

$$f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2}$$

• אם  $f$  אינה תבנית ה-0 אז קיים  $v \in V$  כך  $Q_f(v) \neq 0$ .

הוכחה.

$$\begin{aligned} Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w) &= f(v+w, v+w) - f(v, v) - f(w, w) \\ &= f(v, v) + f(v, w) \\ &\quad - f(w, v) + f(w, w) \\ &\quad - f(v, v) - f(w, w) \\ &\stackrel{\text{Sym}}{=} 2f(v, w) \end{aligned}$$

עבור 1, עתה נוכיח את 2: נניח  $\forall v \in V: Q_f(v) = 0$

$$\forall v, w \in V: f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} = 0$$

למה שונה ממציין 2 חשוב:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + yu \implies Q_f = 0 \wedge f \neq 0$$

**הערה 17.** אין ממש טעם להגדיר תבנית ריבועית על תבנית בילינארית שאיננה סימטרית. הסיבה? כל מטריצה יכולה להיות מפורקת לחלק סימטרי וחלק אנטי-סימטרי, החלק האנטי-סימטרי יתאפס (אלכסון אפס) ורק החלק הסימטרי ישאר בכל מקרה. זה לא שאי-אפשר, זה פשוט לא מעניין במיוחד.

**משפט 66.** נניח  $\text{char } F \neq 2$ , ו- $f$  סימטרית על  $V$ . אז קיים בסיס ל- $V$  הוא  $B = (v_i)_{i=1}^n$  כך  $[f]_B$  אלכסונית.

הזכורת:  $[f]_B$  סימון המוגדר בסיכום זה בלבד. בקורס מדברים על המטריצה המייצגת של בילינארית במילים.

הוכחה. באינדוקציה על  $n$ . בסיס  $n = 1$  ברור. אם  $f$  תבנית ה-0, אז כל בסיס שנבחר מתאים. אחרת, קיים  $v \in V$  כך  $Q_f(v) \neq 0$ . נגדיר  $U = \{u \in V \mid f(u, v) = 0\}$ . תמ'ו כי גרעין של ה"ל (כי קיבענו את  $v$ ). מה התמונה של ההעתקה?  $f(v, v) = Q_f(v) \neq 0$ . לכן תמונת ההעתקה היא כל  $\mathbb{F}$ , וממדה 1. ידוע  $U$  תמ'ו מממד  $n - 1$ . אז  $f|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{F}$  לכסינה ולכן קיים בסיס  $B_U$  כך  $[f|_U]$  אלכסונית. נגדיר את  $B = \{v\} \cup B_U$  נבחין שהיא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots \\ 0 & [f|_U]_B & - \\ \vdots & | & \end{pmatrix}$$

## 6.4 הסינגטורה ומשפט ההתאמה של סילבסטר

**משפט 67.** לכל תבנית סימ' קיימת מטריצה מייצגת מהצורה  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  כאשר  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  (או סגור אלגברית כלשהו)

הוכחה. נסמן את  $\dim f = r$ . עד כדי שינוי סדר איברי הבסיס, המטריצה המייצגת אלכסונית היא:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \text{diag}(c_1 \dots c_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



כאשר  $c_1 \dots c_r \neq 0$ , ביחס לבסיס  $B = (v_1 \dots v_r, \dots v_n)$ . באופן כללי לכל  $i \in \mathbb{R}$  נוכל להגדיר את  $v'_i = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$  כך ש- $f(v'_i, v'_i) = 1$  כי  $f(v_i, v_i) = c_i$  ומליניאריות בכל אחת מהקורדינאטות. ולכן  $B' = (v'_1 \dots v'_r, v_{r+1} \dots v_n)$  בסיס המקיים את הדרוש. באותו האופן, אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (ולא  $\mathbb{C}$ ) אז קיים בסיס שהמטריצה המייצגת לפיו היא:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בלוקים, כך ש- $p + q = r$ . כאן נגדיר:

$$f(v, v) = c < 0, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{|c|}}, \quad f(v', v') = \frac{c}{|c|} = -1$$

■

בשיעורי הבית נראה ש-: נניח ש- $f$  אנטי-סימטרית לא מנוונת (לא תבנית ה-0), אז תמיד ישנה מטריצה מייצגת מהצורה (תחפשו "מטריצה סימפלקטית" בגוגל, זה קצת סיוט לעשות את זה בלאטך). הרעיון הוא אם:

$$\hat{I}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & & -\hat{I}_n \\ & \ddots & \\ \hat{I}_n & & 0 \end{pmatrix}$$

אז  $J$  סימפלקטית.

**הגדרה 60.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{R}$  ו- $f$  תבנית בילינ' מעל  $V$ . נאמר ש- $f$  חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם  $\forall 0 \neq v \in V$  מתקיים ש- $0 < f(v, v) > 0 / f(v, v) \leq 0 / f(v, v) < 0 / f(v, v) \geq 0$ .

**משפט 68.** תהא  $A$  מטריצה מייצגת של תבנית בי-ליניארית סימ', עם ערכים  $0, -1, 1$  בלבד על האלכסון, מקיימת:

- $f$  חיובית אמ"מ ישנם רק 1-ים.
- $f$  אי-שלילית אמ"מ ישנם רק 1-ים ואפסים.
- $f$  שלילית אמ"מ ישנם רק 1-ים.
- $f$  חיובית אמ"מ ישנם רק 1-ים ואפסים.

הוכחה.

⇐ ברור

- לכל  $v \in V, v \neq 0$  קיימים ויחידים  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$  כך ש- $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  ומתקיים  $f(v, v) = \alpha_i^2 f(v_i, v_i)$  ולפי המקרה זה יסתדר יפה.

■

**משפט 69. משפט ההתאמה של סילבסטר.**  $p, q$  הנ"ל נקבעים ביחידות.

(תחזרו כמה משפטים למעלה למקרה בו  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ )

ההוכחה של קרני. נכתבה ונמחקה מהלוח. שימו לב שה- $\text{tr}$  לא נשמר בשינוי בסיס של תבניות בילינאריות, זה לא העתקות. ההוכחה שגויה.

■

הוכחה. נסמן  $B = (v_1 \dots v_p, u_1 \dots u_q, w_1 \dots w_k)$  וכן  $B' = (v'_1 \dots v'_t, u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$  כי  $t + s = p + q$ . בה"כ  $t \leq p$ , נניח בשלילה ש- $t < p$ . נסמן  $U = \text{span}(v_1 \dots v_p)$ . ידוע  $f$  חיובית על  $U$ , וכן  $\dim U = p$ . נתבונן ב- $W = \text{span}(u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$ . אזי גם  $f$  חיובית על  $W$ , ו- $\dim W = s + k$ . בגלל ש- $U \cap W = \{0\}$  (כי אם לא, אז עבור  $v \in U \cap W, v \neq 0$  נקבל  $f(v, v) > 0$  כי  $v \in U$  וכן  $f(v, v) \leq 0$  כי  $v \in W$  וסתירה). ידוע ש- $U \oplus W \subseteq V$  וכן  $\dim U + \dim W \leq \dim V$  וכן  $t + s + k = \dim V > p + s + k$ , סתירה. לכן  $p, q$  נקבעים ביחידות.

■

**סימון 6.** ה- $(p, q)$  לעיל נקראים הסינגטורה של  $f$ .

(תזהרו, הסינגטורה תתקוף אותנו אח"כ)

## המשך בעמוד הבא

## 7.1 הגדרה כללית

### 7.1.1 מעל $\mathbb{R}$

מענה ועד סוף הקורס, מתקיים  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

כל עוד נאמר " $\mathbb{F}$ ", זה נכון בעבור שני המקרים. אחרת, נפצל.

**הגדרה 61.** יהי  $V$  מ"ו, מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  היא תבנית ביליני סימטרית חיובית מעל  $V$ , ומסומנת  $\langle v, u \rangle = f(v, u)$  (ויש ספרים שמסמנים  $\langle v | u \rangle$ , בדומה לסימון של קוונטים), ונסמן  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .  
גלגל שהיא לינארית סימטרית, נקבל  $\forall v \in V: \langle v, v \rangle \geq 0$  ו- $\langle v, v \rangle = 0$  אם ורק אם  $v = 0$ .  
**דוגמה.** (המכפלה הפנימית הסטנדרטית על  $\mathbb{R}^n$  AKA כפל סקלרי):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**הגדרה 62.** אם  $V$  מ"ו וקיימת  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  מכפלה פנימית אז  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  נקרא ערוך מכפלה פנימית, ממ"פ.

**משפט 70.**  $V = M_n(\mathbb{R})$ , אז  $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^T)$  אז  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ.

**דוגמה מגניבה.** בהינתן  $V = C[0, 1]$ , מ"ו הפונקציות הממשיות הרציפות על  $[0, 1]$ , ו- $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ .

**משפט 71.** (שהפליצו מחד"א) אם  $f \geq 0$  אינטרבילית (זה נשמע כמו מפלצת) על קטע  $[a, b]$  וגם ישנה נקודה חיובית  $c \in [a, b]$  שעבורה  $\int_a^b f(x) dx > 0$  אז  $f$  רציפה ב- $c$ .

### 7.1.2 מעל $\mathbb{C}$

ישנה בעיה עם חיוביות: אם  $v \in V$  כך ש- $\langle v | v \rangle \geq 0$  אך  $\langle iv | iv \rangle = -1 \langle v | v \rangle < 0$  סתירה. לכן, במקום זאת, נשתמש בהגדרה הבאה:

**הגדרה 63.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{C}$ . מכפלה פנימית  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  מקיימת:

• ליניאריות ברכיב הראשון: אם נקבע  $v$ , אז  $u \mapsto \langle v | u \rangle$  לינארית.

• ססקווי-ליניאריות ברכיב השני:

כאשר  $\bar{\alpha}$  הצמוד המרוכב של  $\alpha$ .

• הרמטיות:

$$\forall 0 \neq v \in V: \langle v | v \rangle > 0 \wedge \langle 0 | 0 \rangle = 0$$

למעשה - נבחין שאין צורך בממש ססקווי-ליניאריות ברכיב השני וכן לא בתנאי  $\langle 0 | 0 \rangle = 0$ , וההגדרה שקולה בעבור חיבוריות ברכיב השני בלבד, זאת כי:

$$\langle u | \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v | u \rangle} = \overline{\alpha \langle v | u \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\langle v | u \rangle} = \bar{\alpha} \langle v | u \rangle$$

ומכאן נגרר ססקווי-ליניאריות, וכן  $\langle 0 | 0 \rangle = 0$  נובע ישירות מליניאריות ברכיב השני.

(אופס! בן הגדיר את זה לליניאריות ברכיב השני, כלומר הפוך, כי ככה עושים את זה בפתוחה. תיקנתי בסיכום אבל יכול להיות שיש משהו הפוך כי פספסתי. זה אמור להיות ליניארי ברכיב השני).

**הגדרה 64.**  $\bar{B}^T = B^*$

**הגדרה 65.** יהי ממ"פ  $V$  מעל  $\mathbb{F}$ . לכל  $v \in V$  מגדירים את הנורמה של  $v$  להיות  $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$

מאקסיומת החיוביות:

$$\|v\| \geq 0 \wedge (\|v\| = 0 \iff v = 0)$$

וכן:

$$\|t \cdot v\| = \langle tv | tv \rangle = t\bar{t} \langle v | v \rangle = |t| \|v\| \implies \|t \cdot v\| = |t| \cdot \|v\|$$

## 7.2 הקשרים גיאומטריים של מכפלה פנימית

**הגדרה 66.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , ו- $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  אז  $(V, \|\cdot\|)$  יקרא מרחב נורמי.

**משפט 72.** ("נוסחאת הפולריזציה") בהינתן  $(V, \|\cdot\|)$  מרחב נורמי; גרסה מעל  $\mathbb{R}$ :

$$\forall v, u \in V: \langle v | u \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$$

גרסה מעל  $\mathbb{C}$ :

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2)$$

הוכחה (ל- $\mathbb{C}$ ).

$$\begin{aligned} \langle u + v | u + v \rangle &= \|u\|^2 + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle v | u \rangle) \\ \langle v - u | v - u \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\Re(\langle v | u \rangle) \\ \langle u + iv | u + iv \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u | iv \rangle + \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i\langle u | v \rangle + i\overline{\langle u | v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i(2\Im(\langle u | v \rangle)) \\ \|u - iv\| &= \|u\| + \|v\| - \langle u | iv \rangle - \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\| + \|v\| - 2\Im(\langle v | u \rangle) \end{aligned}$$

וסה"כ אם נציב בנוסחה, אחרי שחישבנו את כל אבירה, הכל יצטמצם ו- $\langle u | v \rangle$  אכן שווה לדרוש.

מנוסחאת הפולריזציה, נוכל לשחזר באמצעות נורמה את המכפלה הפנימית.

**הגדרה 67.** בהינתן  $(v, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ, לכל  $v \in V$  נאמר ש- $u$  מאונך ל- $v$  ונסמן  $u \perp v$  אם  $\langle u | v \rangle = 0$ .

**הערה 18.** אם  $u \perp v$  אז  $v \perp u$ . (כי צמוד של 0 הוא 0).

**משפט 73.** (משפט פיתגורס) (מאוד מועיל) יהי  $V$  ממ"פ כך ש- $v \in V$  אז  $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$

הוכחה. משום שהם מאונכים מתקיים  $\langle v | u \rangle = 0$ . נפתח אלגברה:

$$\|v + u\|^2 = \langle v + u | v + u \rangle = \|v\|^2 + \cancel{\langle v | u \rangle} + \cancel{\langle u | v \rangle} + \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \quad \top$$

**הערה 19.** בעבור  $v = \mathbb{R}^n$  מ"פ סטנדרטית אז  $\|v\|$  מזדהה עם מושג הגודל של וקטור בגיאומטריה רגילה.

**הערה 20.** בתוך  $\mathbb{R}^n$  הוקטורים הסטנדרטיים מאונכים אחד לשני (במכפלה הפנימית הסטנדרטית) ולכן  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$  כאשר  $\delta_{ij}$  הדלתא של קרונקר. באינדוקציה על משפט פיתגורס נקבל ש-:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i \implies \|v\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

שזה בדיוק מושג הגודל בגיאומטריה אוקלידית.

**הערה 21.** מעל  $\mathbb{R}$  מקבלים אמ"מ למשפט פיתגורס, מעל  $\mathbb{C}$  לאו דווקא. מאונכים - בעברית. בלעז, אורתוגונליס. ואכן וקטורים יקראו אורתוגונליים אם הם מאונכים אחד לשני.

זה מטוס? זה ציפור? לא, זה מתמטיקה B!

**משפט 74.** (אי שוויון קושי-שוורץ)

$$\forall v, u \in V: |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

שוויון אמ"מ  $u, v$  ת"ל.

**הערה 22.** זה בפרט נכון בגיאומטריה סטנדרטית ממשפט הקוסינוסים.

הוכחה. אם  $v$  או  $u$  הם 0, אז מתקבל שוויון. טענת עזר: קיים איזשהו  $\alpha \in \mathbb{F}$  כך ש- $v - \alpha v \perp v$ . נסמן  $v_u = \alpha v$  כאשר נמצא אותו. הוכחת טענת העזר. נחפש כזה:

$$\langle u - \alpha v | v \rangle = 0 \iff \langle v | u \rangle - \alpha \|v\|^2 = 0 \iff \alpha = \frac{\langle v | u \rangle}{\|v\|^2}$$

כדרוש. (מותר לחלק בנורמה כי הם לא 0). ניעזר בפיתגורס:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u - \alpha v \perp v \\ u - \alpha v \perp v \end{cases} &\implies \|u\|^2 = \|(u - \alpha v + \alpha v)\|^2 = \underbrace{\|u - \alpha v\|^2}_{\geq 0} + |\alpha|^2 \|v\|^2 \geq |\alpha| \cdot \|v\|^2 = \frac{|\langle v | u \rangle|^2}{(\|v\|^2)^2} = \|v\|^2 = \frac{|\langle u | v \rangle|^2}{\|v\|^2} \\ &\implies |\langle v | u \rangle|^2 \leq \|v\| \cdot \|u\| \end{aligned}$$

■ בפרט  $\|u - \alpha v\|^2 = 0$  אמ"מ הם תלויים לינארית ומכאן הכיוון השני של המשפט.

**דוגמאות.** ממכפלה פנימית סטנדרטית:

1.

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

2. נניח  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות אז:

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \cdot \int_0^1 g^2(t) dt$$

כאשר  $f^2 = f \cdot f$  (לא הרכבה).

3. אי-שוויון המשולש:

$$\forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ושוויון אמ"מ אחד מהם הוא 0 או אם הם כפולה חיובית אחד של השני (לא שקול לתלויים לינארית - יכולה להיות כפולה שלילית).

הוכחה. (לאי שוויון המשולש). תזכורת עבור  $\mathbb{C}$  פתקיים  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle u | v \rangle) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u | v \rangle|$$

ושוויון אמ"מ  $u$  הוא אפס או כפולה חיובית של  $v$ . מקושי-שוורץ:

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

■

## 7.3 אורתוגונליות

**הגדרה 68.** יהי  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ. יהיו  $S, T \subseteq V$ . נכתוב:

- א.  $u \in V: u \perp S \iff (\forall v \in S: u \perp v)$
- ב.  $S \perp T \iff \forall v \in S \forall u \in T: v \perp u$
- ג.  $S^\perp := \{v \in V \mid v \perp S\}$

**למה 6.** תהי  $S \subseteq V$  אז:

- א.  $v \perp \text{span}(S)$  אמ"מ  $v \perp S$
- ב.  $S^\perp \subseteq V$  תמ"ו
- ג. אם  $T \subseteq S^\perp$  אז  $T^\perp \subseteq S$

הוכחה (לג').

$$\forall v \perp T: c \perp S \implies v \in S^\perp$$

■

**הערה 23.** שוויון בג' מתקיים אמ"מ  $\text{span } S = \text{span } T$ .

**הגדרה 69.** משפחה של וקטורים  $A \subseteq V$  נקראת אורתוגונלית אם  $\forall u \neq v \in V: u \perp v$

**הערה 24.** אם  $A$  משפחה אורתוגונלית וגם  $0 \notin A$  אז ניתן לייצור ממנה משפחה של וקטורים אורתוגונלים שהם גם וקטורי יחידה, ע"י נרמול.

**הגדרה 70.** משפחה של וקטורים  $A \subseteq V$ , אם היא אורתוגונלית ובנוסף כל הוקטורים הם וקטורי יחידה.

**הגדרה 71.** יהי  $U \subseteq V$  תמ"ו. יהא  $v \in V$ . אז ההטלה האורתוגונלית של  $v$  על  $U$  היא  $p_U(v)$  הוא וקטור המקיים:

$$p_U(v) \in U$$

$$v - p_U(v) \in U^\perp$$

•  
•

**משפט 75.** בסימונים לעיל,  $\forall u \in U: \|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\|$  ושוויון אמ"מ  $u = p_U(v)$ .

הוכחה. יהי  $u \in U$ . ידוע  $p_U(v) \in U$ . אזי  $u - p_U(v) \in U$ . כמו כן ידוע  $u \perp v - p_U(v)$ . אזי בפרט  $\langle u - p_U(v) | p_U(v) - v \rangle$ . נתבונן ב-:

$$\|u - v\|^2 = \|(u - p_U(v)) + (p_U(v) - v)\|^2 \stackrel{\text{פית'}}{=} \|u - p_U(v)\|^2 + \|v - p_U(v)\|^2$$

וסה"כ  $\|v - p_U(v)\|^2 \geq \|v - u\|^2$ . ושוויון אמ"מ  $\|u - p_U(v)\| = 0$  אמ"מ  $u = p_U(v)$ .

**משפט 76.** ההטלה הניצבת (אם קיימת), היא יחידה.

הוכחה. יהיו  $p_U(v)$  וכן  $p'_U(v)$  הטלות של  $v$  על  $U$ . מהטענה:

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - p'_U(v)\|$$

אבל בהחלפת תפקידים מקבלים את אי-השוויון ההפוך. לכן יש שוויון נורמות. מהמשפט לעיל  $p_U(v) = p'_U(v)$ .

**משפט 77.** תהי  $A \subseteq V$  משפחה אורתוגונלית ללא 0. אז היא בת"ל.

הוכחה. יהיו  $v_1 \dots v_n \in A$  וכן  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$ , כך ש- $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ . יהי  $i \in [n]$ . אז:

$$0 = \langle 0 | v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{\|v_j\|^2}_{\neq 0} \implies \alpha_j = 0$$

כאשר השוויון האחרון מהיות הקבוצה אורתוגונלית.

**משפט 78.** נניח  $u \in V$  תמ"ו. נניח  $U$  נ"ס וכן  $B = (e_1 \dots e_n)$  בסיס אורתונורמלי של  $U$  (כלשהם, לא בהכרח סטנדרטיים כי גם לא בהכרח  $\mathbb{F}^n$ ). אז

$$\forall v \in V: p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle e_i$$

הוכחה. צל.  $p_U(v) \in U$  וגם  $\langle v - p_U(v) | u \rangle = 0$   $\forall u \in U$ : אך לגבי התנאי האחרון די להוכיח  $\langle v_i p_U(v) | e_j \rangle = 0$   $\forall j \in [n]$ : החלק הראשון ברור, נותר להוכיח:

$$\langle v - p_U(v) | e_j \rangle = \langle v | e_j \rangle - \langle p_U(v) | e_j \rangle =: *$$

ידוע:

$$\langle p_U(v) | e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle e_i \middle| e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle \cdot \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle \delta_{ij} = \langle v | e_j \rangle$$

נחזור לשוויון לעיל:

$$* = \langle v | e_j \rangle - \langle v | e_j \rangle = 0$$

כדרוש.

(בכך הוכחנו את קיום  $p_U(v)$  לכל מ"ו נ"ס, אם נשלב את זה עם המשפט הבא)

**משפט 79.** (אלגוריתם גרהם-שמידט) תהי  $(b_1 \dots b_k)$  קבוצה סדורה בת"ל של וקטורים בממ"ס  $V$ . אז בכל משפחה א"נ  $(u_1 \dots u_k)$  כך  $\text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$ .

**מסקנות מהמשפט.** לכל ממ"ס נ"ס קיים בסיס א"נ (=אורתונורמלי). יתרה מזאת, בהינתן בסיס  $B = (b_1 \dots b_n)$  ניתן להופכו לבסיס א"נ  $(u_1 \dots u_n)$  המקיים  $\forall k \in [n]: \text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$ .

הוכחה. בנייה באינדוקציה. נגדיר עבור  $k = 1$  את  $u_1 = b'_1$ . מתקיים  $\text{span } u_1 = \text{span } b_1$  וכן  $\{u_1\}$  קבוצה א"נ. נניח שבנינו את  $k$  האיברים הראשונים, נבנה את האיבר ה- $k+1$  (כלומר את  $u_{k+1}$ ). במילים אחרות, הנחנו  $u_1 \dots u_k$  אורתונורמלית וגם  $\text{span}(u_1 \dots u_k) = \text{span}(b_1 \dots b_k) = U$ .

מהסעיף הקודם  $p_U(b_{k+1})$  קיים, וגם  $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \neq 0$  נגדיר  $u_{k+1} = (b_{k+1} - p_U(b_{k+1}))$ . בצורה מפורשת:

$$u_{k+1} = \frac{b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i}{\left\| b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i \right\|}$$

מהגדרת  $p_U(b_{k+1})$ , מתקיים  $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \in U^\perp$  ולכן גם  $u_{k+1} \in U^\perp$  ולכן  $(u_1 \dots u_{k+1})$  משפחה א"נ.

$$b_1 \dots b_k = \overbrace{\text{span}(u_1 \dots u_{k+1})}^{\text{בת"ל}}$$

נשאר להוכיח ש- $b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . זה מספיק משום שאז נקבל  $\text{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . אבל הם שווים ממד ולכן שווים. סה"כ:

$$b_{k+1} = \|b_{k+1} - p_U(b_{k+1})\| \cdot u_{k+1} + \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i \implies b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$$

■

מש"ל.

**משפט 80.** יהי  $V$  מ"ו  $U \subseteq V$ . נניח שלכל  $v \in V$  מוגדר  $p_U(v)$  (בפרט כל מ"ו נ"ס). אז  $p_U: V \rightarrow V$  המוגדרת לפי  $v \mapsto p_U(v)$  העתקה ליניארית.

הוכחה. יהיו  $v, v' \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ . ידוע  $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^\perp$  וזוהי:

$$(v - p_U(v)) + \alpha(v' - p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - (p_U(v) + \alpha p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v') \in U^\perp$$

מה מקיים היטל וקטור? ראשית ההיטל ב- $U$ , ושנית  $v$  פחות ההיטל מאונך. הוכחנו שבהינתן היטל, הוא יחיד. והראינו ש- $(v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v')$  מקיים את זה, ולכן אם יש וקטור אחד אז הוא יחיד, וסה"כ שווים וליניארית. ■

## 7.4 צמידות

**הגדרה 72.**  $V$  ממ"פ ו- $T: V \rightarrow V$  ט.ל. אז נקראת סימטרית ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ) או הרמטית ( $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) אם  $\langle Tu | v \rangle = \langle u, Tv \rangle$   $\forall u, v \in V$ . באופן כללי, העתקה כזו נקראת צמידה לעצמה.

**דוגמה.** עבור  $V = \mathbb{R}^n$  ו- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  מ"פ סטנדרטית, עבור  $A \in M_n(\mathbb{R})$  מתקיים  $T_A: V \rightarrow V$  ט"ל. נקרא מתי היא מודה לעצמה -  $\langle v | u \rangle = v^T u$

$$\langle T_A v | u \rangle = (Av)^T u = v^T A^T u = \langle v | A^T u \rangle$$

ז"א אם  $A = A^T$  אז  $T_A$  סימטרית, כלומר  $A$  מטריצה סימטרית. גם הכיוון השני נכון: אם  $T: V \rightarrow V$  סימטרית אז ע"י בחירת בסיס נקבל  $[T]_B^B$  גם היא סימטרית.

**משפט 81.** העתקה סימטרית אמ"מ היא דומה למטריצה סימטרית.

**משפט 82.** יהיו  $T, S: V \rightarrow V$  צמידות לעצמן. אז:

1.  $\alpha T, T + S$  צמידות לעצמן.

2. המכפלה  $S \circ T$  צמידה לעצמה אמ"מ  $ST = TS$ .

3. אם  $p$  פולינום מעל  $\mathbb{F}$  אז  $p(T)$  צמידה לעצמה.

קל לראות ש- $3 \implies 1 + 2$ . 1 נובע ישירות מהגדרה. נוכיח את 2.

הוכחה ל-2. נניח  $S \circ T$  צמידה לעצמה. בהנחות המשפט ידוע  $S, T$  צמידות לעצמן. נקבל:

$$\langle (S \circ T)v | u \rangle = \langle v | STu \rangle = \langle Sv | Tu \rangle = \langle TSv | u \rangle \implies \langle (ST - TS)v | u \rangle = 0 \quad \forall v, u$$

נסיק:

$$\implies \forall v \langle (ST - TS)v | (ST - TS)v \rangle = 0 \implies (ST - TS)v = 0 \implies STv = TSv \implies \top$$

מהכיוון השני:

$$\langle STv | u \rangle = \langle S(Tv) | u \rangle = \langle v | TSu \rangle = \langle v | STu \rangle$$

■

**הגדרה 73.**  $T: V \rightarrow V$  נקרא חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם:

$$\langle Tv | v \rangle > 0$$

• חיובית:

• שלילית: וכו'

**משפט 83.** אם  $T$  חיובית, אז היא הפיכה (כנ"ל לשלילית)

הוכחה. נניח ש- $T$  לא הפיכה, נקרא שהיא לא חיובית. קיים  $v \in V, v \neq 0$  אז  $v \in \ker T$ , אז  $\langle 0 | v \rangle = 0$   $\langle Tv | v \rangle = 0$  בסתירה לכך ש- $T$  חיובית. ■

**משפט 84.** נניח ש- $S$  צמודה לעצמה, אז  $S^2$  צמודה לעצמה ואי-שלילית.

הוכחה. ממשפט קודם  $S^2$  צמודה לעצמה. נוכיח אי-שלילית:

$$\forall 0 \neq v \in V: \langle S^2 v | v \rangle = \langle Sv | Sv \rangle = \|Sv\|^2 \geq 0$$

■

**הגדרה 74.** פולינום  $p \in \mathbb{R}[x]$  יקרא חיובי אם  $\forall x \in \mathbb{R} p(x) > 0$ .

**מסקנה.** נניח  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  חיובי, ו- $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה, אז  $p(T)$  חיובית גם-כן, וצמודה לעצמה.

**למה 7.** אם  $p \in \mathbb{R}[x]$  חיובי, אז קיימים  $g_1 \dots g_k \in \mathbb{R}[x]$  וכן  $0 < c \in \mathbb{R}$  כך ש- $p(x) = \sum_{i=1}^k g_i^2(x) + c$  רעיון להוכחת הלמה: מעל  $\mathbb{C}$  זה מתפרק, ונוכל לכתוב  $p(x) = a_n \prod_{j=1}^s (x - i\alpha_j)(x + i\alpha_j)$  (מערך  $\mathbb{R}$  כל פולינום מתפרק לגורמים ריבועיים, ואם כל שורשי מרוכבים, כל גורמי ריבועיים). הרעיון הוא להוכיח את הטענה ש- $g^2 h \bar{h} = g_1^2 + g_2^2$ .

הוכחה (של המשפט, לא של הלמה). יהי  $v \in V, v \neq 0$ . אז:

$$\langle p(T)v | v \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^k g_i^2(T)v \mid v \right\rangle}_{\sum_{i=1}^k \langle g_i^2(T)v | v \rangle \geq 0} + \underbrace{c \|v\|^2}_{>0} \geq 0$$

■

**מסקנה.** אם  $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה ו- $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  פולינום חיובי, אז  $p(T)$  הפיכה.

■

הוכחה. "תסתכלו על צד ימין של הלוח"  $\sim$  המרצה

**משפט 85.** נניח ש- $T: V \rightarrow V$  סימטרית (צמודה מעצה מעל  $\mathbb{R}$ /המייצגת סימטרית) ויהי  $m_T(x)$  הפולינום המינימלי של  $T$ . אז  $m_T$  מתפרק לגורמים לינאריים. בנוסף, הם שונים זה מזה.

**מסקנה.**  $T$  סימטרית לכסינה.

הוכחה. נניח בשלילה קיום  $p \mid m_T, \deg p \geq 2$  אי-פריק. בה"כ נניח ש- $p$  חיובי (אין לו שורש ב- $\mathbb{R}$ , לכן נמצא כולו מעל/מתחת לציר  $x$ ). אז אפשר לכתוב את  $m_T$  כ- $m_T = p \cdot g$  כלשהו. ידוע כי  $p(T) \neq 0$  כי  $m_T$  מינימלי מדרגה גבוהה יותר. אז:

$$0 = m_T(T) = \underbrace{p(T)}_{\neq 0} \cdot g(T) \implies g(T) = 0$$

בסתירה למינימליות של  $m_T$ . סה"כ  $m_T$  אכן מתפרק לגורמים לינאריים. עתה יש להראות שהגורמים הלינאריים שלו זרים. נניח ש- $T$  סימטרית. ניעזר בלמה המופיע מיד אחרי ההוכחה הזו. נניח בשלילה שהם לא כולם שונים, אז  $m_T(x) = (x - \lambda)^2 g(x)$  ואז:

$$0 = m_T(T)v = (T - \lambda I)^2 g(T)v \implies \omega = g(T)v, (T - \lambda I)^2 \omega = 0$$

■

לכן בפרט  $(T - \lambda I)\omega = 0$  מהסעיף הקודם. סה"כ  $\forall v \in V: (T - \lambda I)g(T)v = 0$  וסתירה למינימליות.

**למה 8.** נניח  $T$  סממטרית ו- $\lambda \in \mathbb{R}$ , אם  $(T - \lambda I)^2 = 0$  אז  $T - \lambda I = 0$ .

הוכחה. ידוע:

$$\forall v: 0 = \langle (T - \lambda I)^2 v | v \rangle = \langle (T - \lambda I)v | (T - \lambda I)v \rangle = \|(T - \lambda I)v\|^2 \implies (T - \lambda I)v = 0$$

■

**משפט 86.** אם  $V$  ממ"פ ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה, אז הע"ע של  $T$  ממשיים.

הוכחה. יהי  $v \in V, v \neq 0$  ו"ע של  $T$  שמתאים לע"ע  $\lambda$ . נחשב:

$$\lambda v \|v\|^2 = \langle \lambda v | v \rangle = \langle Tv | v \rangle = \langle v | Tv \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

■

ידוע  $v \neq 0$  ולכן  $\|v\| \neq 0$  ונסיק  $\lambda v = \bar{\lambda} v$  ולכן  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**משפט 87.** אם  $V$  ממ"פ ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה, אז כל זוג  $0 \neq u, v \in V$  ע"ע שונים, המתאימים לערכים  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , מאונכים זה לזה.

הוכחה. למעשה, מהטענה הקודמת  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . כאן  $Tu = \alpha u, Tv = \beta v$  כאשר  $\alpha = \beta$ . נחשב:

$$\alpha \langle u | v \rangle = \langle \alpha u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle = \langle u | \beta v \rangle = \bar{\beta} \langle u | v \rangle = \beta \langle u | v \rangle$$

■

בגלל ש- $\beta \in \mathbb{R}$  מתקיים  $\beta = \bar{\beta}$ . ולכן  $(\alpha - \beta) \langle u | v \rangle = 0$  מהעברת אגף וסה"כ  $\langle u | v \rangle = 0$  ואכן  $u \perp v$ .

## המשך בעמוד הבא

## 8.1 המשפט הספקטרי להעתקות

## 8.1.1 ניסוח להעתקות צמודות לעצמן

**משפט 88.** (המשפט הספקטרי להעתקה לינארית צמודה לעצמה) יהי  $V$  ממ"פ מממד סופי, ותהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה. אז קיים ל- $V$  בסיס אורתוגונלי (או אורתונורמלי) שמורכב מו"ע של  $T$

הוכחה. יהי  $m_T(x)$  הפולינום המינימלי של  $T$ . נציג  $m_T(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{d_i}$  כאשר  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  הע"ע השונים של  $T$ . מהטענה הקודמת  $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ . [הערה: התמשנו במשפט היסודי של האלגברה מעל המרוכבים, והסקנו פירוק מעל  $\mathbb{R}$ ]. בכדי להראות ש- $T$  לכסינה, עלינו להוכיח ש- $d_i = 1$   $\forall 1 \leq i \leq m$ . נניח בשלילה שזה לא מתקיים, אזי  $m_T(x) = (x - \lambda)^2 \cdot p(x)$  כאשר  $\lambda$  ע"ע כלשהו. כעת, לכל  $v \in V$  מתקיים מהיות  $T$  צמודה לעצמה (כלומר גם  $p(T)$  צמוד לעצמו):

$$0 = \underbrace{m_T(T)(v)}_{=0} \implies 0 = \langle m_T(T)(v) | p(T)(v) \rangle = \langle (T - \lambda I)(p(T)v) | p(T)v \rangle = \langle (T - \lambda I)(p(T)v) | (T - \lambda I)(p(T)v) \rangle = \|(T - \lambda I)(p(T)v)\|^2 = 0$$

ולכן  $\forall v \in V: (T - \lambda I)(p(T)v) = 0$  ולכן  $((x - \lambda)p(x))(T) = 0$  בסתירה למינימליות של  $m_T(x)$ . נאמר, מכפלת גורמים לינארים שונים, ולכן  $T$  לכסינה, ונוכל לפרק את  $V$  באמצעות:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m \ker(T - \lambda_i I)$$

והמרחבים העצמיים הללו אורתוגונליים זה לזה, מהטענה השנייה שהוכחנו. נבנה בסיס  $B_i \subseteq \ker(T - \lambda_i I)$  וסה"כ  $\bigcup_{i=1}^m B_i$  בסיס אורתוגונלי של  $T$ . ■

**משפט 89.** יהי  $V$  נ"ס מעל  $\mathbb{R}$  ותהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אז  $T$  צמודה לעצמה אם"מ קיים לה בסיס אורתוגונלי מלכסן.

הוכחה. מכיוון אחד, הוכחנו באמצעות המשפט הספקטרי להעתקות לינאריות צמודות לעצמן. מהכיוון השני, נניח שקיים ל- $V$  בסיס אורתוגונלי מלכסן של ו"ע של  $T$ . נרמל לבסיס אורתונורמלי  $B = (b_i)_{i=1}^n$  של ו"ע של  $T$ , המתאימים ל- $\lambda_1 \dots \lambda_n$ . עבור  $v, u \in V$  נציג:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$$

ונחשב:

$$\langle Tu | v \rangle = \left\langle T \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \right) \middle| \sum_{i=1}^m \beta_i b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle T b_i | b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_i \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \lambda_i$$

מהצד השני:

$$\langle u | Tv \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \middle| T \left( \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i | T b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_j \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \lambda_i$$

מטרנזיביות שוויון, הראינו ש- $\langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle$  ולכן  $T$  צמודה לעצמה. השוויון לדלתא של כקוניקר נכונה מאורתוגונליות איברי הבסיס, והבי-לינאריות כי אנחנו מעל הממשיים. המשפט לא נכון מעל המרוכבים. ■

הוכחה שהמשפט לא נכון מעל המרוכבים: ההעתקה  $T(x) = ix$  היא העתקה סקלרית לינארית, לכן כל וקטור הוא ו"ע וכל בסיס מלכסן, בסיס אורתונורמלי כלשהו יהיה בסיס מלכסן על אף שההעתקה לא צמודה לעצמה, אלא אנטי-הרמיטית.

מכאן ואילך המרצה מוכיחה את המשפט הספקטרי ללא המשפט היסודי של האלגברה. לשם כך, צריך להראות שהפולינום המינימלי מתפצל למכפלה של גורמים לינאריים מעל המרוכבים.

**משפט 90.** אם  $p(x)$  פולינום אי-שליילי, אז נוכל להציגו כ- $p(x) = \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 + c$ , כאשר  $c \geq 0$ , וכמו כן  $c > 0$  אם"מ  $p(x)$  פולינום חיובי.

## 8.1.2 מבוא למשפט הספקטרי בעבור העתקה כללית

המטרה: להבין לאילו העתקות בדיוק מתקיים המשפט הספקטרי. מעל הממשיים, הבנו שאילו העתקות צמודות לעצמן. אז מה קורה מעל המרוכבים?

**הערה 25.** בחלק הבא יש שימוש קל במרחבים דואלים. בעבור סטונדטים שבעבורם מרחבים דואלים לא נכלל כחלק מלינארית 1א, אני ממליץ לקרוא את החלק הראשון של מרחבים דואלים בסוף הסיכום.

**משפט 91.** (משפט ריס). יהי  $V$  ממ"פ סופי ויהי  $\varphi \in V^*$ . אז קיים יחיד וקטור  $u \in V$  שמקיים  $\varphi(v) = \langle v | u \rangle$   $\forall v \in V$ .



הוכחה. **קיום.** יהי  $B = (b_i)_{i=1}^n$  בסיס אורתונורמלי של  $V$  (הוכחנו קיום בהרצאות קודמות). נסמן  $u = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i$ . בכדי להראות  $\varphi(v) = \langle v | u \rangle$   $\forall v \in V$ : מספיק להראות תכונה זו לאברי הבסיס  $B$ , כלומר נראה ש- $\langle b_j | u \rangle = \varphi(b_j)$   $\forall 1 \leq j \leq n$ . ואכן:

$$\langle b_j | u \rangle = \left\langle b_j \left| \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} \langle b_j | b_i \rangle = b_j \quad \top$$

**יחידות:** אם קיים וקטור נוסף שעבורו  $\varphi(v) = \langle v | w \rangle$   $\forall v \in V$ : אז בפרט עבור  $v = u - w$  נקבל:

$$\varphi(v) = \langle v | w \rangle = \langle v | u \rangle \implies \langle v | u - w \rangle = 0 \implies 0 = \langle u - w | u - w \rangle = \|v - w\|^2 = 0 \implies v - w = 0 \implies v = w$$

סה"כ הוכחנו קיום ויחידות. ■

**משפט 92.** יהי  $V$  ממ"פ מנ"ס ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית. אז קיימת ויחידה  $T^*: V \rightarrow V$  ומקיימת  $\langle Tu | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle$   $\forall u, v \in V$ .  
**הגדרה 75.** ההעתקה  $T^*$  לעיל נקראת ההעתקה הצמודה ל- $T$ .

הוכחה. לכל  $v \in V$ , נתבונן בפונקציונל הלינארי  $\varphi_v \in V^*$  המוגדר ע"י  $\varphi_v(u) = \langle Tu | v \rangle$ .  $\forall u \in V$ : ממשפט ריס קיים ויחיד  $T^*v \in V$  שעבורו  $\langle Tu | v \rangle = \varphi_v(u) = \langle u | T^*v \rangle$ .  $\forall u \in V$ : כלומר, ההעתקה  $T^*: V \rightarrow V$  קיימת ויחידה, ונותר להראות שהיא לינארית. עבור  $v, w \in V$  ועבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  מתקיים:

$$\forall u \in V: \langle u | T^*(\alpha v + \beta w) \rangle = \langle Tu | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle Tu | v \rangle + \beta \langle Tu | w \rangle = \alpha \langle u | T^*v \rangle + \beta \langle u | T^*w \rangle = \langle u | \alpha T^*v + \beta T^*w \rangle$$

מסך נסיק ש- $T^*(\alpha v + \beta w) = \alpha T^*v + \beta T^*w$  מנימוקים דומים. ■

**דוגמאות.** מעל  $\mathbb{C}^n$ , עם המ"פ הסטנדרטי, נגדיר ט"ל  $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  עבור  $A \in M_n(\mathbb{C})$  מוגדרת ע"י  $T_A(x) = Ax$ . אז:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n: \langle T_A(x) | y \rangle = \langle Ax | y \rangle = \overline{(Ax)^T} \cdot y = \overline{x^T} \cdot \overline{A^T} y = \overline{x^T} T_{\overline{A^T}}(y) = \langle x | T_{\overline{A^T}} y \rangle$$

כלומר,  $(T_A)^* = T_{\overline{A^T}}$  כאשר  $A^* = \overline{A^T}$ , וקראנו לה המטריצה הצמודה.

נבחין שהעתקה נקראת צמודה לעצמה אמ"מ  $T^* = T$ .

עוד נבחין שעבור העתקה הסיבוב  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  בזווית  $\theta$ , מתקיים ש- $T^*$  היא הסיבוב ב- $-\theta$ , וכן היא גם ההופכית לה. כלומר  $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$ . זו תכונה מאוד מועילה וגם נמצא לה שם במועד מאוחר יותר.

**משפט 93.** (תכונות ההעתקה הצמודה) יהי  $V$  ממ"פ ותהיינה  $T, S: V \rightarrow V$  זוג העתקות לינאריות. נבחין ש-:

$$(T^*)^* = T \quad (\text{א})$$

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* \quad (\text{ב})$$

$$(T + S)^* = T^* + S^* \quad (\text{ג})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}: (\lambda T)^* = \bar{\lambda} (T^*) \quad (\text{ד})$$

"זה אחד וחצי לינאריות"

הוכחה.

$$\forall u, v \in V: \langle T^*u | v \rangle = \overline{\langle v | T^*u \rangle} = \overline{\langle Tv | u \rangle} = \langle u | Tv \rangle \implies (T^*)^* = T \quad (\text{א})$$

$$\langle (T \circ S)u | v \rangle = \langle Su | T^*v \rangle = \langle u | S^*T^*v \rangle \implies (TS)^* = T^*S^* \quad (\text{ב})$$

$$\langle (T + S)u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle + \langle Su | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle + \langle u | S^*v \rangle = \langle u | T^*v + S^*v \rangle \quad (\text{ג})$$

(ד) כנ"ל

**משפט 94.** יהי  $V$  ממ"פ נ"ס ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית. אם  $B = (b_i)_{i=1}^n$  בסיס אורתוגונלי לו"ע של  $T$ , אז  $\forall 1 \leq i \leq n$  ו"ע של ההעתקה הצמודה.

כלומר: אם מתקיים המשפט הספקטרלי, אז הבסיס שמלכסן אורתוגונלית את  $T$  מלכסן אורתוגונלית את הצמודה.

הוכחה. יהי  $i \in [n]$  ונסמן בעבורו את  $\lambda_i$  הע"ע המתאים לו"ע  $b_i$ . עבור  $i \neq j \in [n]$  נחשב את  $\langle b_i | T^*b_j \rangle$ :

$$\langle b_i | T^*b_j \rangle = \overline{\langle Tb_i | b_j \rangle} = \overline{\langle \lambda_i b_i | b_j \rangle} = \lambda_i \langle b_i | b_j \rangle = 0$$

לכן  $T^*b_j \in (\text{span}\{b_i\}_{i=1}^n)^\perp \stackrel{!}{=} \text{span}\{b_j\}$  משיקולי ממדים, הפריסה מממד  $n - 1$  ולכן המשלים האורתוגונלי שלו מממד 1 ולכן השוויון. סה"כ  $T^*b_j \in \text{span}\{b_j\}$  ולכן ו"ע של  $T^*$  כדרוש. ■

**מסקנה.** אם  $V$  ממ"פ נ"ס ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל עם בסיס מלכסן אורתוגונלי, אז  $T, T^*$  מתחלפות כלומר  $TT^* = T^*T$ .

הוכחה. לפי הטענה הקודמת כל  $b_i$  הוא ו"ע משותף ל- $T^*$  ול- $T$ , ולכן:

$$TT^*(b_i) = T(T^*(b_i)) = \beta_i T^*(b_i) = \beta_i \delta_i b_i = \alpha_i \beta_i b_i = \alpha_i T^*(b_i) = T^*T(b_i)$$

העתקה מוגדרת לפי מה שהיא עושה לבסיס ולכן  $TT^* = T^*T$ .

**הגדרה 76.** העתקה כזו המקיימת  $AA^* = A^*A$  נקראת נורמלית (או "נורמאלית" בעברית של שנות ה-60).

עתה, ננסה להראות שכל העתקה נורמלית מקיימת את התנאי של המשפט הספקטרי (כלומר ניתן ללכסנה אורתוגונלית)

## 8.2 הוכחת המשפט הספקטרי בעבור העתקה כללית

**משפט 95.** (המשפט הספקטרי) יהי  $V$  ממ"פ נוצר סופית מעל  $\mathbb{C}$ , ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית. אז קיים בסיס אורתוגונלי של ו"ע של  $T$  אמ"מ  $T$  נורמלית.

**למה 9.** יהי  $V$  ממ"פ ותהי  $S_1, S_2: V \rightarrow V$  זוג ט"ל צמודות ולעמן ומתחלפות (כלומר  $S_1 S_2 = S_2 S_1$ ). אז קיים בסיס אורתוגונלי של  $V$  שמורכב מו"עים משופים ל- $S_1$  ול- $S_2$ .

הוכחה. ידוע ש- $S_1$  צמודה לעצמה, לכן לפי המשפט הספקטרי להעתקות צמודות לעצמן (לא מעגלי כי הוכח בנפרד בהרצאה הקודמת), קיים לה לכסון אורתוגונלי ובפרט  $S_1$  לכסינה. נציג את  $V$  כ- $V = \bigoplus_{i=1}^m \ker(S_1 - \lambda_i I)$ , כאשר  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  הע"עים השונים של  $S_1$ . לכל  $1 \leq i \leq m$  מתקיים ש- $V_{\lambda_i}$  (המרחב העצמי) הוא  $S_1$ -אינווריאנטי שהרי אם  $v \in V_{\lambda_i}$  ונחשב:

$$S_1(S_2 v) = S_2(S_1 v) = S_2(\lambda_i v) = \lambda_i S_2 v \implies S_2 v \in V_{\lambda_i}$$

כאשר  $S_2|_{V_{\lambda_i}}: V_{\lambda_i} \rightarrow V_{\lambda_i}$  צמודה לעצמה, ולכן המשפט הספקטרי לצמודות לעצמן אומר שבתוך  $V_{\lambda_i}$  ישנו בסיס אורתוגונלי של ו"עים  $S_2$ -מ. האיחוד של כל הבסיסים הללו מכל מ"ע של  $S_1$  יהיה בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל- $S_1$  ול- $S_2$ .

הוכחת המשפט הספקטרי.

$\implies$  לפי המסקנה הקודמת, אם ישנו לכסון אורתוגונלי  $T$  בהכרח נורמלית.

$\Leftarrow$  נגדיר  $S_1 = \frac{T+T^*}{2}$ ,  $S_2 = \frac{T-T^*}{2i}$ . הן וודאי צמודות לעצמן מהלינאריות וכל השטויות ממקודם, והן גם מתחלפות אם תטרחו להכפיל אותן. מהטענה קיים ל- $V$  בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל- $S_1, S_2$  ונסמנו  $\{b_i\}_{i=1}^n$  וגם  $S_1 b_i = \alpha_i b_i$ ,  $S_2 b_i = \beta_i b_i$  אפשר גם לטעון ש- $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  אבל זה לא מועיל לנו. נשים לב ש- $T = S_1 + iS_2$ , כלומר  $T(b_i) = S_1(b_i) + iS_2(b_i) = \alpha_i b_i + i\beta_i b_i = (\alpha + i\beta_i)b_i$  וזהו בסיס אורתוגונלי של ו"עים של  $T$ .

למעשה, הבנו מהפירוק של  $S_1, S_2$  ש- $S_1$  נותנת את החלק הממשי של הע"ע ו- $S_2$  את החלק המדומה.

"אגב - לא השתמשתי במשפט היסודי של האלגברה"

## 8.3 צורה קאנונית למטריצות נורמליות מעל הממשיים

תזכורת:  $A \in M_n(\mathbb{C})$  נקראית סימטרית אממ  $A = A^T$  והרמיטית אם  $A = A^*$ , ונורמלית אממ  $AA^* = A^*A$ .

**משפט 96.** תהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל, ו- $V$  ממ"פ מעל  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , והי  $B$  בסיס א"נ של  $V$ . אזי אם  $A = [T]_B$ :

$$[T^*]_B = A = ([T]_B)^*$$

הוכחה. נזכר ש-:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [Te_1]_B & \cdots & [Te_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נסמן  $B = \{e_i\}_{i=1}^n$  בסיס. נבחין ש-:

$$Te_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \quad a_{ij} = \langle Te_j | e_i \rangle$$

נסמן ב- $C$  את המטריצה המייצגת  $[T^*]_B$ :

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle$$

ונחשב:

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle = \langle e_j | Te_i \rangle = \overline{\langle Te_i | e_j \rangle} = a_{ij}$$

**מסקנה:** אם  $A$  נורמלית אז  $T_A$  נורמלית מעל  $\mathbb{F}^n$  אם הסטנדרטית. בפרט מתקיים עליה המשפט הספקטרלי. גם אם  $A$  ממשית, הע"ע עלולים להמצא מעל  $\mathbb{C}$  (אלא אם היא צמודה לעצמה, ואז הם מעל  $\mathbb{R}$ ).

משהו על אינטרפולציות:

**משפט 97.** יהיו  $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$ . נניח  $\forall i, j \in [n]: i \neq j \implies x_i \neq x_j$  אז  $\exists! p \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]: \forall i \in [n]: p(x_i) = y_i$  (באופן שקול: נניח  $p$  מתוקן)

(הערה מהידע הכללי שלי: זהו פולינום לגראנג' והוא בונה אינטרפולציה די נחמדה).

הוכחה. ידוע שהפולינום מהצורה  $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})(a_0 \dots a_{n-1})^T$ . למעשה, נקבל את מטריצת ונדרמונד:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

וידוע שהדטרמיננטה של ונדרמונד היא  $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$  וזה איכשהו אמור לגמור את ההוכחה.

אם  $x_i = y_i$  בפולינום לעיל, אז  $\forall a \in \mathbb{C}: f(\bar{a}) = \overline{f(a)} \implies f \in \mathbb{R}[x]$  הוכחה: נניח בשלילה, אז  $\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: f(\alpha) = 0$  אז  $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = 0$  אז  $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = 0 \neq 0$  וזו סתירה. ■

**משפט 98.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  נורמלית, אז קיים פולינום  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  כך ש- $A^* = f(A)$ .

הערה: באופן כללי לא נכון שאם  $A, B$  מתחלפות אז  $\exists f(x) \in \mathbb{F}[x]: f(A) = B$ .

הוכחה. עבור  $A$  נורמלית מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן ולכן קיימת  $P$  הפיכה כך ש- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ . לכן  $P^{-1}A^*P = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$ . נשתמש במשפט לפיו יש פולינום  $f \in \mathbb{R}[x]$  כך ש- $f(x_i) = \bar{x}_i$  ובפרט בעבור  $x_i = \lambda_i$  קיים פולינום עבורו  $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$  אזי

$$f(\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \text{diag}(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)) = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P = P^{-1}A^*P \implies f(A) = A^*$$

עוד נבחין ש- $\deg f = n - 1$ .

נסה להבין מי הן  $A \in M_2(\mathbb{R})$  שהן נורמליות. מעל  $\mathbb{C}$  הן פשוט לכסינות. נבחין ש-:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^* = f(A) \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] = \alpha A + \beta I, A = \alpha A^T + \beta I = \alpha(\alpha A + \beta I) + \beta I$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a + \beta(\alpha + 1) & \alpha^2 b \\ \alpha^2 c & \alpha^2 d + \beta(\alpha + 1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (b \wedge c \neq 0) & \alpha = 1 \implies A = A + 2\beta I \implies \beta = 0, A = A^T \\ (b \wedge c \neq 0) & \alpha = -1 \implies A^T = -A + \beta I \implies A + A^T = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \implies b = -c, A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ (b \vee c = 0) & \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

המקרה השני - זה פשוט סיבובים, אבל בניפוח (כי הדטרמיננטה היא  $a^2 - b^2$ ).

בכל מקרה, מסקנה מהמשפט הקודם.

**משפט 99.** אם  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, אז  $\exists f \in \mathbb{R}[x]: f(T) = T^*$ .

הוכחה. נבחר בסיס א"נ  $A = [T]_B, A^* = [T^*]_B, \leftarrow A = [T]_B, \leftarrow A^* = [T^*]_B$ . כבר הוכחנו שאם  $T$  נורמלית אז  $A$  נורמלית ולכן מהמשפט הקודם קיים  $f$  מתאים כך ש- $T^* = f(T)$ . ■

אם  $T: V \rightarrow V$  ט"ל,  $U, W \subseteq V$  תמ"וים  $T$ -איוונריאנטי כך ש- $U \oplus W = B$ . אם  $B$  בסיס של  $V$ , כאשר קישא של הבסיס הוא הבסיס של  $U$  אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & \\ & [T|_W]_B \end{pmatrix}$$

בפרט בעבור ניצבים  $U \subseteq V \implies V = U \oplus U^\perp$ . ניעזר בכך כדי להוכיח את המשפט הבא:

**משפט 100.** אם  $U \subseteq V$  תמ"ו אינו' ביחס ל- $T$  אז  $U^\perp$  הוא  $T^*$ -אינו'.

הוכחה. יהי  $w \in U^\perp$ . רוצים להראות  $T^*w \in U^\perp$ . יהי  $u \in U$ :

$$\langle T^*w | u \rangle = \langle w | Tu \rangle = \langle w | u' \rangle, \quad u' \in U \implies \langle w | u' \rangle = 0 \quad \top$$

■

**משפט 101.** בעבור  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, אם היא  $U$ -אינו' אז גם  $T^*$  היא  $U$ -אינו'.

■

הוכחה. נבחין ש- $T^* = f(T)$  כלשהו, וכן  $U$  היא  $T$ -אינו' ולכן  $U$  היא  $f(T)$ -אינו' וכאן די גמרנו את ההוכחה.

מסימטריות  $U^\perp$  הוא  $T^*$ , מהמשפט גם  $(T^*)^*$  אינו' ולכן  $T$ -אינו'.

**משפט 102.** יהי  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  מ"ו וכן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אז קיים  $U \subseteq V$  שהוא  $T$ -אינו' וממדו לכל היותר  $T$ .

הערה: מעל  $\mathbb{C}$  "זה מטופש" כי הפולינום מתפרק (ואז המרחב העצמי יקיים את זה).

הוכחה. נפרק ל- $m_T(x)$  מינימלי ו- $g(x)$  גורם אי-פריק כך ש- $m_T(x) = g(x)h(x)$ . לכל  $g$  אי פריק ב- $\mathbb{R}$  הוא לינארי הוא ממעלה 2, מהמשפט היסודי של האגלברה ומהעובדה ש- $m_T(\bar{x}) = 0 \implies m_T(x) = 0$ .

- אם  $g$  לינארי אז יש ע"ע ממשי של  $T$  מה שנותא  $U$  (שנפרש ע"י הו"ע) ממד 1.
- אם  $\deg g = 2$  כמובן שניתן להניח  $g$  מתוקן. ז"א  $g(x) = x^2 + ax + b$  אז  $g(T)$  אינו הפיך (מלמת החלוקה לפולינום מינימלי) כלומר  $\exists v \in \ker g(T) \neq 0$ . לכן:

$$(T^2 + aT + bI)v = 0 \implies T^2v = -aTv - bv$$

ולכן  $U = \text{span}(v, Tv)$  עם ממד לכל היותר 2 וגם נשמר תחת  $T$ .

■

הערה: בעבור נורמלית הטענה נכונה ללא תלות במשפט היסודי של האגלברה.

לכן, בעבור נורמליות, מהמשפט הספקטרלי ומטענות קודמות, עבור  $T: V \rightarrow V$  ממשית קיים בסיס א"נ  $\mathcal{B}$  של  $V$  שבעבורו המטריצה

המייצגת של  $T$  היא מטריצת בלוקים  $2 \times 2$  מצורה של  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ :

$$[T]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}, \lambda_1 \dots \lambda_m \right)$$

כאשר כמובן  $2k + m = n$ .

#### 8.4 מטריצות אוניטריות

**הגדרה 77.** יהי  $V$  מ"מ"פ. אז  $T: V \rightarrow V$  תקרא אוניטרית (אם  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) או אורתוגוונלית (אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ) אם  $T^*T = I$  או במילים אחרות  $T^* = T^{-1}$ .

ברור שט"ל כזו היא נורמלית. **דוגמה.** עבור  $T_\theta$  הסיבוב ב- $\theta$  מעלות, במישור  $\mathbb{R}^2$ , אז  $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = T_\theta^{-1}$ . **דוגמה.** עבור  $T$  שיקוף מתקיים  $T^2 = I$  וכן  $T^* = T$  וסה"כ  $T^* = T = T^{-1}$ .

**משפט 103.** התנאים הבאים על  $T: V \rightarrow V$  שקולים:

- $T^* = T^{-1}$
- $\forall v, u: \langle Tv | Tu \rangle = \langle v | u \rangle$
- $T$  מעבירה כל בסיס א"נ של  $V$  לבסיס א"נ של  $V$
- $T$  מעבירה בסיס א"נ אחד של  $V$  לבסיס א"נ של  $V$  (כלומר, מספיק להראות שקיים בסיס יחידה שעובר לבסיס אחר).
- $\forall v \in V: \|Tv\| = \|v\|$

כלומר: היא משמרת זווית (העתקה פנימית) וגודל. במילים אחרות, היא משמרת העתקה פנימית.

הוכחה. נפרק לרצף גרירות

$$T^* = T^{-1} \implies \langle Tv | Tu \rangle = \langle v | T^*Tu \rangle = \langle v | u \rangle \quad 1 \rightarrow 2$$

$2 \rightarrow 3$  נאמר ש- $(v_1 \dots v_n)$  א"נ. צ"ל.  $(Tv_i)_{i=1}^n$  א"נ. לשם כך נצטרך להוכיח את שני התנאים - החלק של האורתו והחלק של הנורמלי. בשביל שניהם מספיק להוכיח ש:  $\langle Tv_i | Tv_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$

$3 \rightarrow 4$  טריוויאלי

$4 \rightarrow 5$  יהי  $(v_1 \dots v_n)$  בסיס א"נ כך ש- $(Tv_1 \dots Tv_n)$  א"נ. אז:

$$v = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \implies \|v\|^2 = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2$$

$$\|Tv\|^2 = \left\langle T \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right) \middle| T \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i) \middle| \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i) \right\rangle = \sum |\alpha_i|^2$$

1 → 5 מניחים  $\forall v \in V: \|Tv\| = \|v\|$ . ידועות השקילויות הבאות:

$$T^* = T^{-1} \iff T^*T = I \iff T^*T - I = 0$$

בעבר ראינו את הטענה הבאה: נניח ש- $S$  צמודה לעצמה וכן ש- $\langle Sv | v \rangle = 0$ , אז  $S = 0$ . במקרה הזה:

$$S := T^*T - I \implies S^* = (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = S \implies S^* = S$$

והיא אכן צמודה לעצמה. עוד נבחין ש-:

$$\langle Sv | v \rangle = \langle (T^*T - I)v | v \rangle = \langle T^*Tv | v \rangle - \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle - \langle v | v \rangle = \|Tv\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

השוויון האחרון נכון מההנחה היחידה שלנו ש- $\|Tv\| = \|v\|$ . סה"כ  $TT^* - I = 0$ . סה"כ הוכחנו  $TT^* - I = 0$  שזה שקול ל- $T^* = T^{-1}$  מהשקילויות לעיל כדרוש.

■

**משפט 104.** תהי  $T: V \rightarrow V$  אוניטורית, ו- $\lambda$  ע"ע של  $T$ . אז  $|\lambda| = 1$

הוכחה. יהי  $v$  ו"ע של הע"ע  $\lambda$ . אז:

$$|\lambda|^2 \langle v | v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle = \langle v | v \rangle$$

■

**הגדרה 78.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . אז  $A$  תיקרא אוניטורית/אורתוגונלית אם  $A^* = A^{-1}$ .

**משפט 105.** אוניטורית אמ"מ  $AA^T = I$ .

**משפט 106.** אורתוגונלית אמ"מ  $AA^T = I$ .

**הערה 26.** אוניטורית בה מלשון unit - היא שומרת על הגודל, על וקטורי היחידה (ה-unit vectors).

**משפט 107.** יהי  $B$  בסיס א"נ של  $V$  ו- $T: V \rightarrow V$  אז  $T$  אוניטורית/אורתוגונלית אמ"מ  $A = [T]_B$  אוניטורית/אורתוגונלית.

הוכחה.

$$AA^* = [T]_B [T^*]_B = [TT^*]_B, I = AA^* \iff [TT^*]_B = I \iff TT^* = I$$

■

**הערה 27.** איזומטריה היא העתקה שמשמרת גדלים, ואיזומטריה אורתוגונלית היא פשוט אוניטורית. משום מה זה שם שמדברים עליו בע"פ אבל לא הגדירו מסודר.

## 8.5 סיכום קצר של החומר עד עכשיו

יהי  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ מעל  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . אז:

**הגדרה 79.** עבור  $T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה (סימטרית מעל  $\mathbb{R}$ , הרמטית מעל  $\mathbb{C}$ ) מוגדר

$$\forall v, u \in V: \langle Tv | u \rangle = \langle u | Tv \rangle$$

וזה שקול לכך ש- $T^* = T$ .

**הגדרה 80.**  $T$  נקראת נורמלית אמ"מ  $T^*T = TT^*$

מטריצה צמודה לעצמה בהכרח נורמלית אך לא להפך.

יש לנו שני ניסוחים למשפט הספקטרלי:

**משפט 108.** (המשפט הספקטרלי מעל  $\mathbb{R}$ )  $T$  סימטרית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

**משפט 109.** (המשפט הספקטרלי מעל  $\mathbb{C}$ )  $T$  נורמלית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

**משפט 110.** אם  $T^* = T$  אז כל הע"ע של  $T$  ממשיים.

וכן שבעבור ייצוג של נורמלית מעל  $\mathbb{R}$ , קיים סיס א"נ  $B$  כך ש- $[T]_B^{-1}$  מטריצה מהצורה:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \square_m & \\ & & & \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k) \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים מהצורה:

$$\square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

התחלנו לדבר על העתקות אוניטריות (מעל  $\mathbb{C}$ ) או אורתוגונליות (מעל  $\mathbb{R}$ ). תקרא כך כאשר  $TT^* = I$ . הבחנו ש- $A \in M_n(\mathbb{F})$  נקראת כנ"ל אמ"מ  $A^{-1} = A^* = \overline{A^T}$ , מעל  $\mathbb{C}$ , ו- $A^{-1} = A^T$ , מעל  $\mathbb{R}$ . באופן כללי זה שקול לאיזומטריה ליניארית (כלומר שם כללי לאורתוגונליות/אוניטריות יהיה איזומטריות).

הערה: איזומטריה, גם מחוץ לליניארית, היא פונקציה שמשרת גודל.

נמשיך עם התזכורות.  $T$  איזומטריה אמ"מ מתקיים אחד מבין הבאים:

$$T^* = T^{-1} \quad 1. \text{ (ההגדרה)}$$

$$TT^* = T^*T = I \quad 2.$$

$$\forall u, v \in V: \langle Tu | Tv \rangle = \langle u | v \rangle \quad 3.$$

$$T \text{ מעבירה כל בסיס א"נ לבסיס א"נ} \quad 4.$$

$$T \text{ מעבירה בסיס א"נ כלשהו לבסיס א"נ} \text{ [מקרה פרטי של 4 בצורה טריוויאלית, אך גם שקולי!]} \quad 5.$$

$$\forall v \in V: \|Tv\| = \|v\| \quad 6.$$

אפשר להסתכל על מתכונה 4 על איזומטריות כעל הומומורפיזם של ממ"פים.

"היה לי מרצה בפתוחה שכתב דבר לא מדויק בסיכום, ואז הוריד נקודות לסטודנטים שהסתמכו על זה. הוא אמר שזה מתמטיקה, אתם אחראים להבין מה נכון או לא – גם אם כתבתי שטויות".

**סימון 7.** א"נ = אוניטרית בהקשר של מטריות (בהקשר של מרחבים – אורתונורמלי)

**משפט 111.** התאים הבאים שקולים על  $A \in M_n(\mathbb{F})$ .

$$1. \text{ } A \text{ א"נ}$$

$$2. \text{ שורות } A \text{ מהוות בסיס א"נ של } \mathbb{F}^n \text{ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)}$$

$$3. \text{ עמודות } A \text{ מהוות בסיס א"נ של } \mathbb{F}^n.$$

$$4. \text{ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)}$$

$$5. \text{ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)}$$

הערה שלא קשורה למשפט: נאמר ש- $[T]_B^* = [T]_B^*$  אמ"מ  $B$  בסיס א"נ.

הערה נוספת: זה בערך אמ"מ כי יש כמה מקרי קצה כמו מטריצת האפס.

הוכחה.

$$1 \leftrightarrow 2 \text{ נוכיח את הגרירה הראשונה}$$

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1^T & \dots & \bar{v}_n^T \\ | & & | \end{pmatrix} = AA^* = I \iff A \text{ א"נ} \implies v_i \bar{v}_j^T = \delta_{ij}$$

הטענה האחרונה שקולה לכך ש- $v_1 \dots v_n$  בסיס א"נ (ביחס למ"פ הסטנדרטית של  $\mathbb{F}^n$ )

$$1 \leftrightarrow 3 \text{ מספיק להוכיח } A \text{ א"נ אמ"מ } A^T \text{ א"נ. מסימטריה } ((A^T)^T = A) \text{ למעשה מספיק להוכיח } A \text{ א"נ גורר } A^T \text{ א"נ. נוכיח:}$$

$$A^*A = I \implies A^T \bar{A} = I \implies (A^T)^* = \bar{A} \implies A^T(A^T)^* = I$$

$$1 \leftrightarrow 4 \text{ נתבונן ב- } T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n \text{ כאשר } \mathcal{E} \text{ הבסיס הסטנדרטי. אז } [T_A]_{\mathcal{E}} = A \text{ אז } T_A \text{ א"נ אמ"מ } A =: [T_A]_{\mathcal{E}}. \text{ אז:}$$

$$\langle Au | Av \rangle = \langle T_A u | T_A v \rangle = \langle u | v \rangle$$

$$1 \leftrightarrow 5 \text{ אותה הדרך כמו קודם.}$$

■

### 8.5.1 צורה קאנונית למטריצה אוניטרית

**שאלה.** מהן המטריות  $A \in M_2(\mathbb{R})$  האורתוגונליות?

התשובה. בהינתן  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  מהיות העמודות והשורות מהוות בסיס א"נ:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \implies a = \cos \theta, b = \sin \theta$$

עוד נבחין ש- $ac + bd = 0$  כי:

$$AA^T = I \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = I$$

סה"כ מכך ש- $a^c + c^2 = 1$  ו- $b^2 + d^2 = 1$  נקבל שתי צורות אפשריות:

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \vee A_2 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

נבחין ש- $A_2$  הוא סיבוב ב- $\theta$ , ו- $A_1$  שיקוף ניצב ביחס ל- $\frac{\theta}{2}$ . זה לא מפתיע שכן  $\det A_1 = -1$ ,  $\det A_2 = 1$ .

"דרך נוספת לראות את זה":

$$a = \cos \theta \implies b = \sin \theta, c = \sin \varphi \implies d = \cos \varphi$$

אז (עד לכדי סיבוב)

$$\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi \implies \sin(\theta + \varphi) = 0 \implies \theta + \varphi = 0 \vee \theta + \varphi = \pi$$

במקרה הראשון ש- $\varphi = \theta$  קיבלנו סיבוב, ובמקרה השני נקבל ש- $\varphi = \pi - \theta$  ואז  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$  כדרוש.

ננסה להבין יותר טוב למה הן מסובבות בצורה הזו.  $A_2$  מטריצה מוכרת אך  $A_1$  פחות. נתבונן בפולינום האופייני שלה:

$$f_{A_1}(x) = \begin{vmatrix} x - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & x + \cos \theta \end{vmatrix} = x^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (x+1)(x-1)$$

אזי הע"ע  $-1, +1$  (שימו לב ש- $A_2$  לא לכסינה מעל  $\mathbb{R}$ ).

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\theta - \frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad \left( \frac{\theta}{2} \mapsto \frac{\theta}{2} + \pi \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[אני ממש חלש בטריגו ואני מקווה שאני לא מסכם דברים לא נכונים. תבדקו אותי פעמיים כאן בחלק הזה. גם המרצה עשה את ההחלפה המוזרה של  $\theta/2 \rightarrow \theta/2 + \pi/2$ ].

"אם הייתם רוצים תקופות מבחנים נורמליות הייתם צריכים להיוולד בזמן אחר".

"זומה, אתם חושבים שאחרי שהפקולטה דחתה בשבוע היא תיאמה את זה עם הפקולטות האחרות? הם דיברו איתם כמה ימים אח"כ"

**מסקנה.** (הצורה הנורמלית של ט"ל אורתוגונלית) תהי  $T: V \rightarrow V$  אורתוגונלית. אז קיים בסיס א"נ של  $V$ , שביחס אליו המטריצה המייצגת את  $T$  היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} A_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{\theta_n} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

(אוניטרית לא מעיינת כי היא לכסינה)

**הגיון:**

אורתוגונלית, לכן נורמלית, לכן נראית בצורה של בלוקים  $2 \times 2$  של ע"ע. הע"ע מגודל 1 כי היא אורתוגונלית, והם חייבים להיות ממשיים על מעגל היחידה הממשי. המטריצה  $A_\theta$  חייבת להיות אורתוגונלית מגודל  $2 \times 2$  כי כל תמ"ו שם הוא  $T$ -אינו', כלומר אפשר לחלק את  $T$  לבלוקים מתאימים ובפרט  $T$  המצומצמת גם אורתוגונלית, ולכן  $A_\theta$  סה"כ אורתוגונלית. כאשר  $A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  ו- $b \neq 0$  נשארו עם המטריצות הללו.

הוכחה. ידוע עבור נורמלית:

$$A = \begin{pmatrix} \square_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \square_m & & \\ & & & \lambda_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$\square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

ובמקרה הזה משום שהיא אורתוגונלית על  $\mathbb{R}$  אז  $\lambda_i = \pm 1$  כי  $|\lambda_i| = 1$ . נתבונן במטריצה  $\square_i$  כלשהי, אז  $\square_i$  הנפרש ע"י  $U$ :  $u_k, u_{k+1} =:$  מקיים:

$$[T]_{[U]B_U} = \square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \quad [Tu_k]_{U_B} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad [Tu_{k+1}] = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

ומשום שהצמצום של אורתוגונלית על מ"ו  $T$ -אינו' היא עדיין אורתוגונלית, והיא בהכרח מהצורה של מטריצת הסיבוב לעיל. המטריצה של שיקוף וסיבוב ב- $\frac{\theta}{2}$  לכסינה ולכן להפוך לע"ע  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  (עד לכדי סדר איברי בסיס) שהם בהכרח מגודל  $\pm 1$  בכל מקרה, ויבלעו בשאר הע"ע, ובכך סיימנו. ■

אבל האם הייצוג יחיד? ננסה להבין את יחידות הייצוג עבור נורמלית כללית, ומשם לגזור על אורתוגונלית.

**משפט 112.** כל שתי מטריצות בצורה לעיל שמייצגות את אותה  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, שוות עד כדי סדר הבלוקים על האלכסון.

יש כאן מה להוכיח רק בעבור  $\mathbb{R}$ , שכן מעל  $\mathbb{C}$  לכסין.

הוכחה. ידוע שבעבור  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  ע"ע:

$$f_T(x) = \left( \prod (x - \lambda_i) \right) \left( \prod (x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2) \right)$$

כאשר המכפלה הראשונה באה מהע"עים והשניה מהריבועים  $\square_i$ . נבחין שלכל תמ"ו  $a_i$  נקבע ביחידות, ולכן  $b_i$  נקבל ביחידות עד כדי סימן (נסיק זאת מהפולינום האופייני). ברור שהע"עים נקבעים ביחידות עוד מההרצאות הראשונות. ■

אז מאיפה בה שינוי הכיוון של  $b$ , בעבור מטריצות אורתוגונליות? כלומר, מדוע  $A_{\theta_i}$  שקולה ל- $A_{-\theta_i}$  (תפתחו את האלגברה/טריגו, זה מה שזה אומר)? זאת כי הן דומות באמצעות ההעתקה שהופכת את הצירים, מה ששקול להחליף את עמודות  $A_{\theta_i}$ .

## 8.5.2 המשפט הספקטלי בניסוח מטריציוני

**משפט 113.** (המשפט הספקטלי "בשפה קצת מטריציונית") תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה סימטרית (מעל  $\mathbb{R}$ )/נורמלית (מעל  $\mathbb{C}$ ). אז קיימת מטריצה  $P$  אורתוגונלית/אוניטרית (בהתאם לשדה ממנו יצאנו), ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-  $A = P^{-1}DP$

כלומר - מטריצת מעבר הבסיס של המשפט הספקטלי, שמעביר אותנו לפירוק הספקטלי, היא איזומטרית. למעשה חיזקנו את המשפט הספקטלי - המעבר לבסיס המלכסן, מסתבר להיות מיוצג ע"י מטריצות איזומטריות.

המרצה מדגיש שלא השתמשנו במשפט הזה בכלל על בסיסים ועל וקטורים - אפשר לתאר עולם הדיון של המטריצות, משום שהוא עולם דיון הומורפי להעתקות ולמרחבים וקטורים, בלי לדבר בכלל על העתקות ומרחבים וקטורים. המשפט מתאר באופן טהור מטריצות בלבד.

**למה 10.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה ריבועית, וכן  $\{e_1 \dots e_n\}$  בסיס א"נ של  $V$ . נניח ש- $A$  היא מטריצת המעבר מבסיס  $\{e_1 \dots e_n\} \rightarrow \{v_1 \dots v_n\}$ . אז  $A$  איזומטרית אמ"מ  $\{v_1 \dots v_n\}$  בסיס אורתונורמלי.

הוכחת המשפט. תהי  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  באופן הרגיל. אז  $A = [T_A]_{\mathcal{E}}$  כאשר  $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$  הבסיס הסטנדרטי. ידוע של- $T_A$  יש בסיס אורתונורמלי מלכסן, כלומר קיים בסיס א"נ  $B$  כך ש- $[T_A]_B = D$  כאשר  $D$  אלכסונית כלשהי. נבחין ש- $[Id]_B^B = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ ,  $[T_A]_B = [Id]_B^{\mathcal{E}} [T_A]_{\mathcal{E}} [Id]_{\mathcal{E}}^B$ , נסמן  $P = [Id]_B^{\mathcal{E}}$  ונבחין ש- $[T_A]_B = PAP^{-1}$  ומהלמה  $P$  מטריצת מעבר מבסיס א"נ לבסיס א"נ ולכן איזומטרית. נכפיל בהופכיות ונקבל  $A = P^{-1}DP$ . ■

באמצעות כלים של אנליזה פונקציונלית אפשר להגדיר נורמה גם על פונקציות, ואיכשהו להגדיר את העובדה שההעתקה שמעבירה בסיס (בעולם הדיון של ההעתקות) היא אוניטרית/אורתוגונלית.

"אני יודע איך מגדירים נורמה של טרנספומציה. יופי של שאלות - לא לעכשיו"

"יאללה הפסקה? לא!"

## 8.6 פירוק פולארי

### 8.6.1 מבוא, וקישור לתבניות בילינאריות

הערה: במקרה של  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  נקבל ש-

$$A = P^{-1}DP \implies PP^T = I \implies P^{-1} = P^T \implies A = P^T DP$$

מה שמחזיר אותנו לתבניות בילינאריות. נוכל לקשר את זה לסינגטורה. זאת כי  $A$  לא רק דומה, אלא גם חופפת ל- $D$ . גם מעל  $\mathbb{C}$  נקבל דברים דומים, אך לא במדויק, שכן מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$  היא ססקווי-בילינארית ולא בילינארית רגילה.

**משפט 114.** עבור  $A \in M_n(\mathbb{C})$  נורמלית, אז

$$A^* = A \bullet \quad (\text{צמודה לעצמה}) \text{ אמ"מ כל הע"עים שלה ממשיים.}$$



•  $A^* = A^{-1}$  אמ"מ כל הע"ע שלה מנורמה 1.

את הכיוון  $\Leftarrow$  כבר הוכחנו. נותר להוכיח את הכיוון השני.

• נניח שכל הערכים העצמיים ממשיים, ו- $A$  נורמלית. נוכל להשתמש במשפט הספקטרי עליו: לכן קיימת מטריצה אוניטרית  $P$  ואלכסונית  $\Lambda$  כך ש- $A = P^{-1}\Lambda P$ . ידוע  $A \in M_n(\mathbb{R})$  כי אלו הע"ע מההנחה. נבחין ש-:

$$A^* = P^* \Lambda^* (P^{-1})^* = P^{-1} \Lambda P = A$$

כי  $PP^* = I$  ו- $\Lambda$  אוניטרית (אז ה-transpose לא עושה שום דבר) מעל  $\mathbb{R}$  (אז ההצמדה לא עושה שום דבר).

• נניח  $A$  נורמלית וכל הע"ע מנורמה 1. נוכיח  $A$  אוניטרית. בעבור הפירוק הספקטרי לעיל  $A = P^{-1}\Lambda P$  נקבל כאן ש- $\Lambda$  אוניטרית, ומהמשפט הספקטרי  $P$  אוניטרית גם כן.  $A$  מכפלה של 3 אוניטריות ולכן אוניטרית.

(הסיבה שמכפלה של אוניטריות היא אוניטרית: בעבור  $A, B$  א"נ מתקיים

$$\forall v \in V: \langle ABv | ABv \rangle = \langle Bv | Bv \rangle = \langle v | v \rangle$$

משמרת מכפלה פנימית, וזה שקול להיותה אוניטרית ממשפט לעיל)

**תזכורת:** אם  $V$  ממ"פ מעל  $\mathbb{F}$ , אז  $T: V \rightarrow V$  תקרא חיובית או אישילית (וכו') אם  $T = T^*$  וגם  $\langle Tv | Tv \rangle \geq 0$   $\forall v \neq 0$ . **משפט 115.** נניח ש- $A = A^* \in M_n(\mathbb{F})$ , אז התנאים הבאים שקולים (קיצור מוכר: (TFAE, the following are equivalent):

1.  $T_A$  חיובית/אי שלילית על  $\mathbb{F}^n$ .

2. לכל  $T: V \rightarrow V$  ובסיס א"נ  $B$  כך ש- $A = [T]_B$ ,  $T$  חיובית/אי שלילית.

3. קיימים  $T: V \rightarrow V$  חיובית/אי שלילית ו- $B$  בסיס, כך ש- $A = [T]_B$ .

4. הע"ע של  $A$  (יודעים ממשיים כי צמודה לעצמה) חיוביים/אי שליליים.

הוכחה. מספיק לטעון זאת כדי להוכיח את השקילויות של 1, 2, 3:

$$\langle Tv | v \rangle_V = \langle [Tv]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n} = \langle A[v]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n}$$

בשביל  $1 \rightarrow 2$ , ידוע שהאגף הימני גדול מ-0 מההנחה שהיא חיובית/אי שלילית על  $\mathbb{F}^n$ , ומכאן הראנו שהמיוצגת בכל בסיס חיובית כדרוש. בשביל  $1 \rightarrow 3$ , נפעיל טיעונים דומים מהאגף השמאלי במקום. הגרירה  $2 \rightarrow 3$  ברורה. סה"כ הראינו את  $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$ .

עתה נוכיח שקילות בין 1 ל-4.

$1 \rightarrow 4$  יהי  $\lambda \in \mathbb{R}$  ע"ע של  $A$  (נוכל להניח ממשי כי  $A$  צמודה לעצמה)

$$\langle Av | v \rangle = \lambda \|v\|^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

$4 \rightarrow 1$  יהי  $B = (v_1 \dots v_n)$  בסיס א"נ של ו"ע, ויהי  $v = \sum \alpha_i v_i$ . נקבל:

$$\langle T_A v | v \rangle = \langle Av | v \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0$$

■

**תזכורת:** מעל  $\mathbb{R}$ , הוכחנו שלכל תבנית סימטרית, יש ייצוג יחיד באמצעות מטריצה אלכסונית עם  $-1, 1, 0$  על האלכסון.

**סימן 8.** הסיגנטורה של  $f$  תסומן ע"י  $\sigma_-(f), \sigma_0(f), \sigma_+(f)$  כמספר האפסים, האחדים וה-1 ב- $f$ .

**המשך תזכורת:** כל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה לעיל.

**משפט 116.** נניח ש- $A$  מייצגת את התבנית הסימטרית  $f$  (עולם הדיון מעל  $\mathbb{R}$ ). אז, אם הסיגנטורה  $\sigma_+ = \#(\lambda | \lambda > 0)$  עבור  $\lambda$  ע"ע עם חזרות. באופן דומה  $\sigma_- = \#(\lambda | \lambda < 0)$  וכו'.

הוכחה. משום ש- $A$  מייצגת סימטרית אז  $A$  סימטרית. לפי המשפט הספקטרי קיימת  $P$  אורתוגונלית ו- $\Lambda$  אלכסונית כך ש- $A = P^{-1}\Lambda P = P^T \Lambda P$ . דומה לאלכסונית וחופפת אליה. בעזרת נרמול היא חופפת למטריצה מהצורה  $\text{diag}(1 \dots 1, -1 \dots -1, 0 \dots 0)$  כאשר הסימן נקבע לפני הנרמול.

**תרגיל.** חשבו: (כולל פתרון)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

מכאן נסיק שאכן המטריצות להלן דומות עד לכדי שינוי בסיס, וזו הסיבה שלא איכפת לנו מהסימן של  $b$  כמו שראינו בהרצאה 22.

**משפט 117.** תהי  $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה ואי שלילית  $\langle Tv | v \rangle \geq 0$ , אז קיימת ויחידה  $R: V \rightarrow V$  אי-שלילית צמודה לעצמה כך ש- $R^2 = T$ .

הוכחה. **קיום.** מהמשפט הספקטרי קיים בסיס א"נ של ו"ע להעתקה אי-שלילית כל הע"ע הם אי-שליליים.

$$[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad [R]_B^B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$$

(ראינו זאת בתרגול). עוד נבחין ש- $R$  צמודה לעצמה כי ע"ע ממשיים.

**יחידות.** נבחין שכל ו"ע של  $T$  הוא ו"ע של  $R$ : יהי  $i \in [n]$ ,  $B = (e_1 \dots e_n)^{-1}$  בסיס מלכסן, ואז עבור  $R$  צמודה לעצמה כלשהי מתקיים: אז ו"ע של  $R$  עם ע"ע  $\sqrt{\lambda}$  הוא ו"ע של  $T$  עם ע"ע  $\lambda$  כי:

$$\lambda v = R^2 v = T v \implies R v = \sqrt{\lambda} v$$

הגריה נכונה מאי-שליליות  $R$  שהמשפט מניח עליה יחידות. כלומר הערכים העצמיים של  $R$  כלשהי (לא בהכרח זו שברחנו בהוכחת הקיום) נקבעים ביחידות מע"ע של  $T$ . בסיס של ו"ע של  $T$  הוא בסיס ו"ע של  $R$ , סה"כ ראינו איך  $R$  פועלת על בסיס ו"ע כלשהו של  $T$  מה שקובע ביחידות את  $R$ .

**סימון 9.** את ה- $R$  לעיל נסמן  $R := \sqrt{T}$ .

## 8.7 ניסוח הפירוק הפולארי

### 8.7.1 פירוק פולארי בעבור העתקות

**משפט 118.** (פירוק הפולארי) תהי  $T: V \rightarrow V$  הפיכה, אז קיימות  $R \rightarrow V \rightarrow V$  חיובית וצמודה לעצמה ו- $U: V \rightarrow V$  אוניטרית כך  $T = RU$ .

הערה: לא הנחנו  $T$  צמודה לעצמה. הפירוק נכון להעתקה הפיכה כללית.

הוכחה. נגדיר  $S = TT^*$ . נבחין ש- $S$  צמודה לעצמה וחיובית:

$$\forall V \ni v \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\|^2 > 0$$

האי-שוויון האחרון נכון כי  $\ker T = \{0\}$ , ממשפט קודם  $\ker T^* = \ker T = \{0\}$  ו- $v \neq 0$ . יצא שזה חיובי ולכן בפרט ממשי, כלומר היא צמודה לעצמה וחיובית.

קיימת ויחידה  $R: V \rightarrow V$  צמודה וחיובית כך ש- $S = R^2$ . כל ערכיה העצמיים של  $R = \sqrt{S}$  אינם 0, ולכן היא הפיכה (ראינו בהוכחה של קיומה שהיא לכסינה יחדיו עם  $S$ ).

נגדיר  $U = R^{-1}T$ . נותר להראות ש- $U$  אוניטרית.

$$U^*U = (R^{-1}T)^*(R^{-1}T) = T^* \underbrace{(R^{-1})^*}_{R^{-1}} R^{-1}T = T^*(R^{-1})^2T = T^*S^{-1}T = T^*(TT^*)^{-1}T = I$$

כדרוש. הטענה  $(R^{-1})^* = R^{-1}$  נכונה משום ש- $R$  צמודה לעצמה.

הערה לגבי יחידות. אם  $T$  אינה הפיכה, מקבלי ש- $R$  יחידה אבל  $U$  אינה. בשביל לא הפיכות נצטרך להצטמצם לבסיס של התמונה ועליו לפרק כמתואר לעיל. במקרה של הפיכות אז  $T = RU = R\tilde{U}$  ואז נקבל  $R$  הפיכה כלומר  $U = \tilde{U}$  וגם  $U$  הפיכה.

עתה נראה ש- $R$  נקבעת ביחידות (בניגוד ליחידות  $U$  - יחידות  $R$  נכונה גם בעבור פירוק פולארי של העתקה שאיננה הפיכה):

הוכחה.

$$TT^* = RU(RU)^* = RUU^*R^* = R^2$$

כלומר  $R$  היא בכל פירוק שורש, והראינו קודם את יחידות השורש.

**הערה 28.** קיים גם פירוק כנ"ל מהצורה  $T = UR$ .

הוכחה. באותו האופן שפירקנו את  $T$ , נוכל לפרק את  $T^* = \tilde{R}\tilde{U}$  פירוק פולארי. נפעיל \* על שני האגפים ונקבל:

$$T^* = \tilde{R}\tilde{U} \implies T = (T^*)^* = \tilde{U}^*\tilde{R}^* = \tilde{U}^{-1}\tilde{R}$$

נסמן  $\tilde{U}^{-1} =: U$ ,  $\tilde{R} =: R$  וסה"כ  $T = UR$  כדרוש.

**למה 11.** עבור  $T: V \rightarrow V$  אז ל- $TT^*$ ,  $T^*T$  נגדיר  $S = TT^*$ . נבחין ש- $S$  צמודה לעצמה וחיובית:

$$\forall V \ni v \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\|^2 > 0$$

יש אותם הערכים העצמיים.

הוכחה. ניעזר בפירוק הפולארי:

$$TT^* = RUU^*R^*$$

$$= R^2$$

$$TT^* = U^{-1}R^2U$$

סה"כ  $TT^*, T^*T$  הן העתקות דומות ולכן יש להן את אותם הערכים העצמיים.

**הערה 29.** אז איך זה קשור לפולארי?  $R$  האי-שלילית היא "הגודל", בעוד  $U$  האוניטרית לא משנה גודל - היא ה"זווית".

## 8.7.2 פירוק פולארי בעבור מטריצות

**משפט 119.** (פירוק פולארי עבור מטריצות) תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכה, אז קיימות  $U, R \in M_n(\mathbb{F})$  כאשר  $U$  א"נ  $R$  חיובית צמודה לעצמה כך ש- $A = UR$ .

הוכחה. נסתכל על  $A^*A$ . היא חיובית וצמודה לעצמה (בדומה לעיל). אז  $A^*A = P^{-1}DP$ , כאשר  $D$  אלגסונית חיובית. כאשר  $R = P^{-1}\sqrt{D}P$ ,  $R^2 = AA^*$ . היא קיימת ויחידה מאותה הוכחה בדיוק להעתקות. ■

## 8.8 פירוק SVD

**הערה 30.** SVD הינו קיצור של Singular Value Decomposition.

**משפט 120.** (פירוק לערכים סינגולריים למטריצה - SVD) לכל מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  קיימות מטריצות אוניטריות  $U, V$  ומטריצה אלכסונית עם ערכים אי-שליליים כך ש- $A = UDV$ .

הוכחה. ידוע שניתן לכתוב  $A = \tilde{U}R$  פירוק פולארי. משום ש- $R$  צמודה לעצמה, ניתן לפרקה ספקטרלית ל- $V$  אוניטרית ו- $D$  אלכסונית אי-שלילית (כי  $R$  אי-שלילית) כך ש- $R = V^{-1}DV$ . סה"כ:

$$A = \underbrace{\tilde{U}V^{-1}}_{=:U} DV = UDV \quad \top$$

כי  $\tilde{U}V^{-1}$  מכפלה של אוניטריות ולכן  $U$  אוניטרית כנדרש. ■

### הערה 31.

$$AA^* = (UDV)V^*D^*U^* = UD^2U^{-1}$$

$$A^*A = V^{-1}D^2V$$

**הגדרה 81.** הערכים העצמיים האי-שליליים של  $A^*A$  נקראים הערכים הסינגולריים והם נקבעים ביחידות ע"י  $A$ . הערכים הסינגולריים הם גם הע"ע של  $R^2$  הפירוק בפולארי וכן הע"ע של  $D^2$  בפירוק SVD.

**הערה 32.** פירוק SVD יחיד למטריצה הפיכה.

**הערה 33.** במסדרת הקורס הזה, ראינו פירוק SVD של מטריצה ריבועית בלבד. חלק מהחזקה של פירוק SVD נובע מקיומו למטריצות שאינן בהכרח ריבועיות, דהיינו, לכל מטריצה סופית. יש לו מגוון רחב של שימושים במדעי המחשב.

## סוף הקורס ~ 2025B

הסיכום לא נגמר – יש הרחבה על דואלים בעמוד הבא  
קופל ב-L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ונוצר באמצעות תוכנה חופשית כלכל

## Dual Spaces ..... (9)

### 9.1 הגדרות בסיסיות

**הגדרה 82.** בהינתן  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , נגדיר  $V^* = \text{hom}(V, \mathbb{F})$ .

**הבה.** אם  $\dim V = n$  אז  $\dim V^* = n$ . לכן  $V \cong V^*$ . לא נכון במקרה הסוף ממדי.

**למה 12.** יהי  $B = (v_i)_{i=1}^n$  בסיס ל- $V$ . אז  $\forall i \in [n]: \exists \psi_i \in V^*: \forall j \in [n]: \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$

**משפט 121.** יהי  $V$  נ"ס ו- $B = (v_i)_{i=1}^n$  אז קיים ויחיד בסיס  $B^* = (\psi_i)_{i=1}^n$  המקיים  $\forall i, j \in [n]: \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$ .

הוכחה. נבחין שהבדרנו העתקה לינארית  $\varphi: B \rightarrow V^*$  והיא מגדירה ביחידות  $\psi$  לינארית  $\psi: V \rightarrow V^*$  המקיימת את הנרש. ברור שהבנייה של  $\varphi_i$  קיימת ויחידה כי היא מוגדר לפי מה קורה לבסיס. נותר להוכיח שזה אכן בסיס. יהיו  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$  כך ש- $\sum \alpha_i \psi_i = 0$ . (האפס הזה הוא פונקציונל האפס). יהי  $j \in [n]$ . אז  $\sum \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$  ו- $0(v_j) = 0 = (\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i)(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$ .  
■

נבחין שאפשר להגדיר:

**הגדרה 83.**  $V^{**} = \text{hom}(V^*, \mathbb{F})$

ואכן  $\dim V < \infty$  אז:

$$V \cong V^* \cong V^{**}$$

במקרה הזה, בניגוד לאיז'ו הקודם, יש איז'ו "טבעי" (קאנוני), כלומר לא תלוי באף בסיס.

**משפט 122.** קיים איזומורפיזם קאנוני בין  $V$  ל- $V^{**}$ .

הוכחה. נגדיר את האיז'ו הבא:

$$\psi: V \rightarrow V^{**} \quad \psi(v) =: \bar{v} \quad \forall \psi \in V^*: \bar{v}(\psi) = \psi(v)$$

נוכיח שהוא איז'ו:

• **ט"ל:** יהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ,  $v, u \in V$  אז:

$$\psi(\alpha v + \beta u) = \overline{\alpha v + \beta u} \stackrel{!}{=} \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}$$

נוכיח זאת:

$$\overline{\alpha v + \beta u}(\varphi) = \varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(u) = \alpha v(\varphi) + \beta u(\varphi) = (\alpha \bar{v} + \beta \bar{u})(\varphi) = (\alpha \psi(v) + \beta \psi(u))(\varphi)$$

• **חח"ע:** יהי  $v \in \ker \psi$ . רוצים להראות  $v = 0$ .

$$\forall \varphi \in V^*: \bar{v}(\varphi) = 0 \implies \forall \varphi \in V^*: \varphi(v) = 0$$

אם  $v$  אינו וקטור האפס, נשלימו לבסיס  $V = (v_i)_{i=1}^n$  ואם  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  בסיס הדואלי אז  $\varphi_1(v) = 1$  אבל אז  $0 = \bar{v}(\varphi_1) = 1$  וסתירה.

• **על:** משוויון ממדים  $\dim V^{**} = \dim V$ .

■

כלומר, הפונקציונלים בדואלי השני הם למעשה פונקציונלים שלוקחים איזשהו פונקציונל בדואלי הראשון ומציבים בו וקטור קבוע.

### 9.2 הומומורפיות למרחבי מכפלה פנימית

#### 9.2.1 העתקה צמודה (דואלית)

**סימון 10.** לכל  $v \in V$  ו- $\varphi \in V^*$  נסמן  $\varphi(v) = (\varphi, v)$

**הערה 34.** סימון זה הגיוני משום שהכנסת וקטור לפונקציונל דואלי הומומורפי (ברמת תורת הקטגוריות) למכפלה פנימית.

**משפט 123.** יהיו  $V, W$  מ"וים נוצרים סופית מעל  $\mathbb{F}$ ,  $T: V \rightarrow W$ . אז קיימת ויחידה  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  כך ש- $(T^*(\psi), v) = (\psi, T(v))$ .

אם לצייר דיאגרמה:

$$V \xrightarrow{T} W \cong W^* \xrightarrow{T^*} V^* \cong V$$

(תנסו לצייר את זה בריבוע, ש- $V, W$  למעלה ו- $V^*, W^*$  למטה, כדי להבין ויזואלית למה זה הופך את החצים)

ברמה המטא-מתמטית, בתורת הקטגוריות, יש דבר שנקרא פנקטור - דרך לזהות בין אובייקטים שונים במתמטיקה. מה שהוא עושה, לדוגמה, זה להעביר את  $\text{hom}(V, W)$  - מרחבים וקטרים סוף ממדיים - למרחב המטריצות. הדבר הזה נקרא פנקטור קו-וריאנטי. במקרה לעיל, זהו פנקטור קונטרא-ווריאנטי - שימוש ב- $T^*$  הופך את החצים. (הרחבה של המרצה)

אז אפשר להגדיר פנקטור אבל במקום זה נעשה את זה בשפה שאנחנו מכירים - לינארית 1. בהינתן  $\psi \in W^*$ , נרצה למצוא  $T^*(\psi) \in V^*$  נגדיר:

$$T^*(\psi) = \psi \circ T$$

ברור מדוע  $T^*: W^* \rightarrow V^*$ . בעצם, זהו איזומורפיזם ("בשפת הפנקטורים") קאנוני. עוד קודם לכן ידענו (בגלל ממדים) שהם איזומורפיזם, אך לא מצאנו את האיזומורפיזם ולא ראינו שהוא קאנוני.

$$\tau: \text{hom}(V, W) \rightarrow \text{hom}(W^*, V^*) \quad \tau(T) = T^*$$

היא איזומורפיזם.

(הערה: תודה למרצה שנענה לבקשתי ולא השתמש ב- $\varphi$  אחרי שעשיתי  $\{\varphi\}$  /renewcommand/phi{\varphi})

הוכחת לינאריות. יהיו  $T, S \in \text{hom}(V, W)$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$ . אז:

$$\tau(\alpha T + S) = (T + \alpha S)^*$$

יהי  $\psi \in W^*$ , אז:

$$(T + \alpha S)^*(\psi) = \psi \circ (T + \alpha S)$$

יש למעלה פונקציונל ב- $V^*$ . ננסה להבין מה הוא עושה על  $V$ . יהי  $v \in V$ :

$$[\psi(T + \alpha S)](v) = \psi((T + \alpha S)v) = \psi(Tv) + \alpha\psi(Sv) = (\psi \circ T + \alpha\psi \circ S)(v) = ((T^* + \alpha S^*) \circ \psi)(v) = (\tau(T) + \alpha\tau(S))(\psi)(v)$$

סה"כ קיבלנו לינאריות:

$$\tau(T + \alpha S) = \tau(T) + \alpha\tau(S)$$

■

נוכל להוכיח זאת יותר בפשטות עם הנוטציה של "המכפלה הפנימית" שהגדרנו לעיל,  $(\varphi, v)$ . עתה נוכיח ש- $\tau$  לא רק לינארית, אלא מוגדרת היטב.

הוכחה.

● **חח"ע:** תהי  $T \in \ker \tau$ , אז  $T^* = 0_{\text{hom}(W^*, V^*)}$ . נרצה להראות ש- $T$  העתקה האפס. נניח בשלילה ש- $T \neq 0$ . אז קיים  $v' \in V$  כך ש- $T(v') \neq 0$ . נשלימו לבסיס -  $(T(v) = w_1, w_2 \dots w_n)$  בסיס ל- $W$ . יהי  $(\psi_1 \dots \psi_n)$  הבסיס הדואלי. אז:

$$\tau(T)(\psi_1) = T^*(\psi_1) = \psi_1$$

אז:

$$0 = \tau(T)(\psi_1)(v') = T^*(\psi_1)(v') = \psi_1 \circ T(v') = \psi_1(w_1) = 1$$

סתירה. לכן  $\ker \tau = \{0\}$  ולכן  $\tau$  חח"ע.

● **על:** גם כאן משוויון ממדים

■

**שאלה ממבחן שבן עשה.** ("את השאלה הזו לא פתרתי בזמן המבחן, ואני די מתבייש כי אפשר לפתור אותה באמצעות כלים הרבה יותר פשוטים" "חה חה" "לא חח"ע זה חד-חד ערכי") יהיו  $V, W$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ו- $(w_1 \dots w_n)$  בסיס של  $W$ . תהי  $T: V \rightarrow V$ . הוכיחו שקיימים  $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V^*$  כך שלכל  $v \in V$  מתקיים:

$$T(v) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(v) w_i$$

**שימו לב:** בניגוד למה שבן עשה במבחן,  $V$  לא בהכרח נוצר סופית.

הוכחת ראש בקיר. לכל  $v \in V$  קיימים ויחידים  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  כך ש- $T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ . נגדיר  $\varphi_i(v) = \alpha_i$ .  $\forall i \in [n]$ : זה לינארי. ■

הוכחה "פתוחכמת". "אני אהבתי את ההוכחה שלי": נתבונן בבסיס הדואלי  $B^* = (\psi_1 \dots \psi_n)$  שמקיים את הדלתא של קרונקר והכל. נגדיר  $\varphi_i = T^*(\psi_i)$ . יהי  $v \in V$ . קיימים ויחידים  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  כך ש- $T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ . אז:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(v) w_i = \sum_{i=1}^n T^*(\psi_i)(v) w_i$$

צ.ל.  $\alpha_i = T^*(\psi_i)(v)$ . אך נבחין שהגדרנו:

$$T^*(\psi_i)(v) = \psi_i(T(v)) = \psi_i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j\right) = \alpha_j$$

■

"הפכת למרצה במתמטיקה כדי להתנקם באחותך?" "כן."

**הגדרה 84.** יהי  $V$  מ"ו נוצר סופית. יהי  $S \subseteq V$  קבוצה. נגדיר  $S^0 \subseteq V^*$   $:= \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in S: \varphi(v) = 0\}$ .  
**דוגמאות.**  $\{0\}^0 = V^*$ ,  $V^0 = \{0\}$

**משפט 124.**

1.  $S^0$  תמ"ו של  $V^*$ .

2.  $(\text{span } S)^0 = S^0$

3.  $S \subseteq S' \implies S'^0 \subseteq S^0$

**משפט 125.** יהי  $V$  נ"ס,  $U \subseteq V$  תמ"ו. אז  $\dim U + \dim U^0 = n$

באופן דומה אפשר להמשיך ולעשות:

$$\dim U^0 + \dim U^{**} = n$$

וכן:

$$U \cong U^{**}$$

איזומורפיזם קאנוני. זאת כי:

$$\forall \varphi \in U^0 \forall u \in U: \varphi(u) = 0$$

ומי אלו הוקטורים שיאפסו את  $\varphi$  שמאפס את  $u$ ? הוקטורים ב- $U$  עד לכדי האיזומורפיזם הקאנוני מ- $U$  ל- $U^{**}$ .  
 נבחין ש-:

$$[T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T$$

כאשר  $\mathcal{A}$  בסיס ל- $V$ ,  $\mathcal{A}^*$  ל- $V^*$ ,  $\mathcal{B}$  ל- $W$ ,  $\mathcal{B}^*$  ל- $W^*$ .

"כוס אמא של קושי" – בן על זה שקושי גילה את המשפט לפניו.

שחר פרץ, 2025

קופל ל- $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  וויר באמצעות תוכנה חופשית בלבד