לינארית 2א

שחר פרץ

19 במאי 2025

תזכורת: המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי

ציקלי מקסימלי: תהי $T\colon V\to V$ ניל, ו־$U\subseteq V$ ציקלי מקסימלי אז קיים W תמ"ו של V תמ"ו T־אינ' כך ש־$T=U\oplus W$.

מסקנה 1. $T\colon V\to V$ ט"ל ניל' אז V אי־פריק ל־T אמ"מ V ציקלי.

הוכחה. $\Longrightarrow$ הוכחנו בשיעור הקודם

$\Longleftarrow$ נניח V אי־פריק. אז קיים $U\subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. לפי המשפט קיים $W\subseteq V$ תמ"ו T־אינ' כך ש־$T=U\oplus W$. ידוע U,W תמ"ויים אינ'. אם $U=\{0\}$ אז $V=0$ ובפרט ציקלי. אחרת, מאי־פריקות V ל־T, נסיק ש־$W=\{0\}$ ולכן $V=U$ ציקלי. ■

משפט 1. (משפט ג'ורדן למקרה של T ניל') תהי $T\colon V\to V$ ניל' אז קיים פירוק של V לסכום ישר של $V=\bigoplus U_i$ כאשר U_i הם T־ציקליים.

הוכחה. נמצא ב־V ציקלי מקסימילי. אז קיים $W\subseteq V$ תמ"ו T־שמור כך ש־$V=U_1\oplus W$. ידוע $T_{|W}\colon W\to W$ ניל', וכעת באינדוקציה שלמה על $\dim V$. ■

גרסה שקולה למשפט ג'ורדן:

משפט 2. עבור $T\colon V\to V$ ניל', קיים בסיס B של V שהוא איחור של שרשראות.

בסיס כזה נקרא בסיס מג'רדן ופירושו של דבר היא ש־:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\square & 0 & \dots & 0\\ 0 & \square & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \square\end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים הם בלוקי ג'ורדן אלמנטרי. בלוק ג'ורדן מהצורה הבאה יקרא אלמנטרי ויסומן:

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(יש ספרים בהם זה ה־transpose של זה).

משפט 3. עבור $T\colon V\to V$ ניל', אז בכל הפירוקים של $V=\bigoplus U_i$ עבור U_i ציקליים (אי־פריקים) אז מספר תתי־המרחב מממיד נתון הוא זהה עבור כל פירוק.

במילים אחרות: כל מטריצה מייצגת של ט"ל ניל' דומה למטריצת ג'ורדן יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

השקילות בין המשפט לבין ה"במילים אחרות" נובע מזה שגודל בלוק פחות 1 הוא הממד של התמ"ו שנפרש ע"י הוקטורים בעמודו תהללו.

למה 1. נניח $V=\bigoplus_{i=1}^k U_i$ כאשר U_i הוא T־אינ' (לא נניח אפילו ניל'), אז:

א. $$T(V)=\bigoplus_{i=1}^k T(U_i)$$

ב. $$\ker T=\bigoplus_{i=1}^k \ker T(U_i)$$

הוכחה: בש.ב.

במקרה הכללי,

הגדרה 1. בלוק ג'ורדן אלנטרי עם ערך λ הוא בלוק מהצורה:

$$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I_n = J_n(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

למה זה הגיוני? כי הסיבה שעשינו מתכתחילה רדוקציה ל־T ניל' היא כי $T - \lambda I$ היא T־אינוו' וניל', ועתה רק נותר להוסיף את ה־λI חזרה לקבלת המקרה הכללי.

הוכחה. באינדוקציה על $n = n(T)$.

- עבור $n = 1$, העתקת ה0. V מתפרק לסכום ישר של מרחבים מממד 1.
- צעד, נניח נכונות עבור $n \in \mathbb{N}$. נניח ש־$n(T) = n + 1$. נסמן פירוק:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i = \bigoplus_{i=1}^{\ell} W_i$$

נסדר את $(u_i)_{i=1}^{k}$ לפי גודל מימד, ונניח שרשימת הגדלים היא:

$$(\underbrace{1, 1, \dots 1}_{\times s} < a_1 \leq \cdots \leq a_p) \implies s + p = k$$

רשימת הממדים מגודל 1 ועוד כל השאר. נעשה כנ"ל עבור $(w_i)_{i=1}^{\ell}$ ונקבל:

$$(\underbrace{1, 1, \dots 1}_{\times t} < b_1 \leq \cdots \leq b_r) \implies t + r = \ell$$

ידוע:

$$T(v) = \bigoplus_{i=1}^{k} T(U_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} T(W_i), \quad n\left(T_{|_{T(v)}}\right) = n, \quad p = r, \quad \forall i\colon a_i - 1 = b_i - 1 \implies a_i = b_i$$

(הפירוק ל־s ו־t דרוש כדי שהפירוק לעיל לא יכלול אפסים כאשר מחילים את T) (ידוע $a_i - 1 = b_i - 1$ כי אינדקס הנילפוטנטיות קטן ב־1 בהחלת T)

משפט הממדים השני אומר ש־:

$$a_i = \dim U_i = \dim\ker T_{|_{U_i}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T_{|_{U_i}}}_{a_i - 1} \implies \dim\ker T_{|_{U_i}} = 1$$

מהטענה השנייה בלמה:

$$\begin{aligned} \ker T = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker T_{|_{U_i}} \implies \dim\ker T &= \sum_{i=1}^{k} \dim\ker T_{|_{U_i}} = k \\ &= \sum_{i=1}^{k} \dim\ker T_{W_i} = \ell \end{aligned} \implies k = \ell \implies s = t$$

■

"נראה לי שמי שסיכם את ההרצאה קצת חירטט את הסטודנטים ומי שסיכם את ההרצאה לא הבין את החרטוט" – בן על הסיכום של הסטודנטים.

....