תרגיל בית 4 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. יהי $V=[0,1]\to\mathbb{R}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$. יהי U תת־מרחב של V שיש בו רק פונקציות מונוטוניות (שימו לב שלא כל הפונקציות המונוטוניות שייכות ל־U). הוכיחו שהמימד של U הוא לכל היותר 2.
הערה: בשאלה הזאת, הכוונה בפונקציות מונוטוניות היא פונקציות מונוטוניות חלש. כלומר פונקציה היא מונוטונית עולה אם לכל $x\leq y$ מתקיים $f(x)\leq f(y)$ ופונקציה היא מונוטונית יורדת אם לכל $x\leq y$ מתקיים $f(x)\geq f(y)$.
<u>רמז:</u> יהיו $f_1,f_2,f_3\in U$. הראו שקיים צירוף לינארי לא טריוויאלי $g=af_1+bf_2+cf_3$ כך ש־$g(0)=g(1)=0$.

2. מצאו בסיס של מרחב הפתרונות U של מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases}x_1+4x_2+x_3-x_4+5x_5=0\\ x_1+4x_2+2x_3+8x_5=0\\ x_3+x_4+3x_5=0\end{cases}$$

ב־$\mathbb{R}^5$. לאחר מכן השלימו אותו לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

3. מצאו בסיס למרחב $\{p\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=0\}$ ומצאו את המימד שלו.

4. נתונים שני תתי־מרחבים של $\mathbb{R}^4$:

$$U=\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\},\ V=\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס ומימד ל־$U,V,U\cap V,U+V$. האם $U+V$ הוא סכום ישר?

5. הוכיחו/הפריכו: אם S מרחב וקטורי נוצר סופית ו־U,V,W הם תתי־מרחבים של S אז

$$\dim(U+V+W)=\dim(U)+\dim(V)+\dim(W)-\dim(U\cap V)-\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W)$$

6. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהיו U,W,W' תתי־מרחבים של V כך ש־$V=U\oplus W$ וגם $V=U\oplus W'$. הוכיחו כי

$$\dim(W\cap W')\geq\dim(V)-2\dim(U)$$

7. נגדיר העתקה $T\colon M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}_2[x]$ על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=(2c+2d)x^2+(2c+2d)x+(a+b)$$

הוכיחו כי T היא העקתה לינארית, ומצאו את התמונה ואת הגרעין שלה.

8. תהי $T\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $T\left(x+y\right)=T\left(x\right)+T\left(y\right)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי T העתקה לינארית כשמסתכלים על $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$.

<u>הדרכה</u>: למעשה צריך להוכיח שלכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $T\left(qx\right)=qT\left(x\right)$. הוכיחו בשלבים: קודם עבור $q\in\mathbb{N}$, אחר כך עבור $q\in\mathbb{Z}$, ואז עבור $q=\frac{1}{m}$ עבור $m\in\mathbb{N}^{+}$, ולבסוף הוכיחו את זה עבור $q=\frac{n}{m}$ עבור $n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}^{+}$.