עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

שחר פרץ

9 בנובמבר 2024

Combinatorics

(1)

(א) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים, אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: ראשית כל, נתבונן ב־$52!$ הסידורים האפשריים של החפיסה כולה. עתה נתבונן בקבוצת המשלים – כמות האפשרויות לחפיסות בהן ישנם 4 אסים רצופים. נתייחס לרצף כמו קלף גדול יחודי בפני עצמו, ולכן, מכיוון שארבעת האסים יחשבו כאחד, יהיו $49!$ אפשרויות לסדר חלק זה. לסדר הפנימי של האסים עצמם יהיה $4!$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $58 \cdot 48!$ אפשרויות בקבוצת המשלים. סה"כ:

$$\mathscr{A}nswer = \mathbf{52! - 49!\,4!}$$

(ב) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש בהן כל 4 קלפים מאותו הסוג (13 סוגים שונים) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: נגדיר $a_i =$ כמות האפשרויות לסידור בו i רצפים של 4 תווים. מובן כי $0 \le i \le \frac{52}{4} = 13$ (לא ייתכנו רצפים בסדר גודל הארוך יותר מהחפיסה כולה).

כדי למצוא את a_i, נבחר את הרצף הראשון מבין 13 האפשרויות. ואת השני מבין 12 האפשרויות שנותרו, ונמשיך הלאה. באופן דומה לסעיף הקודם, לכל אחד מהסדרות האלו נתייחס קקלף "גדול" יחודי אחד, לכל אחת מ־i הסדרות סדר פנימי של $4!$, וסה"כ סדר כולל של $(52-4i+i)!$ אפשרויות ($-4i$ על הקלפים שנוציא החוצה, ו־$+i$ ל"קלף גדול" כמוהו לסדרה עצמה). סה"כ:

$$a_i = (52-3i)!\,4!^i$$

בכלליות:

ומעקרון ההכלה וההדחה, אם $A_i =$ קבוצת כל הרצפים באורך 4 מסוג נתון, ומשום שאין הגבלה על הכלליות בבחירת קלף מסויים, $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ זהה בערכו לכל $I \in [n]$ כך ש־$|I|$ קבוע בגודל k, ובפרט שווה ל־a_k (המקרה הסמטרי של העקרון), ובשילוב עם עקרון המשלים (על קבוצת על הקומבינציות שגודלה $52!$), נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}nswer &= 52! - \sum_{\varnothing \ne I \in [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k \\
&= \boldsymbol{52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (52-3k)!\,4!^k}
\end{aligned}$$

(2)

יהי סריג דו ממדי, ונגדיר מסלול חוקי אמ"מ בכל צעד מ־$\langle x,y\rangle$ ננוע אך ורק לנקודה $\langle x+1, y+r\rangle$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

(א) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$?

תשובה: יהי מסלול $a := \{a_i\}_{i=0}^n$ מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$ כאשר $\forall i \in [n].\exists x,y \in \mathbb{N}.a_i = \langle x,y\rangle$. נניח שהמסלול חוקי; אזי:

$$\forall i \in [n-1].\pi_1(a_i) - \pi_1(a_{i+1}) = 1 \land \exists r \in \mathbb{N}.\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) = r$$

ולכן נוכל להגדיר מיפוי:

$$\forall i \in [n-1].a_k \mapsto \pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) =: r_i \in \mathbb{N}$$

חח"ע ועל לקבוצת המסלולים החוקיים. תמונת המיפוי תהיה $\mathbb{N}^{n-1}$. מהגדרת המסלול, $a_n = \langle n, k\rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} r_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \\ &= \pi_2(a_1)\cancel{-\pi_2(a_2) + \pi_2(a_2)}\cancel{-\pi_2(a_3) + \pi_2(a_3)} - \cdots \cancel{+\pi_2(a_i) - \pi_2(a_i)} + \cdots + \pi_2(a_n) \\ &= \pi_2(a_1) + \pi_2(a_n) = 0 + k = k\end{aligned}$$

בכך, התייחסנו לכל ההגבלות – חוקיות המסלול באורך n (מובעת בהיותה חח"ע ועל לקבוצה המאפשרת זאת), והיותו נגמר ב־$\pi_2(a_n) =$ k (הכרחי ומספיק להיות סכום $\sum r_i = k$). נקבע את גודל הסדרות התמונה המקיימות זאת. ידוע שכמות האפשרויות לסכום מספרים יהיה $S(n-1,k)$, ולכן סה"כ זהו פתרון הבעיה. נסכם:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k, n-1)}$$

(ב) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$, כך שאף צעד בהם אינו מסתיים בנקודה $\langle n,k\rangle$?

תשובה: באופן דומה לסעיף הקודם, כמות הצעדים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle 2n,2k\rangle$ תהיה $S(2k,2n-1)$. נחפש את קבוצת המשלים. בהינתן מסלול שעובר בין הראשית ל־$\langle 2n,2k\rangle$ הוא יכלל בקבוצת המשלים אמ"מ הוא עבור ב־$\langle n,k\rangle$, כלומר הוא למעשה מסלול $\langle 0,0\rangle \to$ $\langle n,k\rangle$ ואז עוד מסלול $\langle n,k\rangle \to \langle 2n,2k\rangle$. המסלול האחרון שקול לבעיה הראשונה בעבור טרנספורמציה איזומטרית של $\langle x,y\rangle \mapsto$ $\langle x-n, y-k\rangle$ שלמעשה תבהיר כי פתרון שתי הבעיות הוא $S(k,n-1)$, וכאשר נחבר אותם יחדיו, מכלל הכפל, גודל קבוצת המשלים הוא סה"כ $S(k,n-1)^2$. אזי:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(2k, 2n-1) - S(k, n-1)^2}$$

(ג) **שאלה:** כמה מסלולים קיימים מ־$\langle n,k\rangle \to \langle 0,0\rangle$ כך שכל צעד $\langle x_2,y_2\rangle \to \langle x_1,y_1\rangle$ מקיים $y_1 + 2 \le y_2$?

תשובה: נבחין שקילות לאחד הנתונים:

$$y_1 + 2 \le y_2 \iff \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \le -2 \iff \underbrace{\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i)}_{=r_i} \ge 2$$

ואכן ננסה למצוא את כמות הסדרות $\{r_i\}_{i=1}^{n-1}$ כך ש־$r_i \ge 2$, כך ש־$\sum r_i = k$, לפי השקילות שהוכחה בסעיף (א). לבעיה זו קיימת בעיה שקולה ידועה, היא חלוקת k כדורים ל־$n-1$ תאים, כשבכל תא לפחות 2 כדורים. אזי, ניאלץ להתחיל מלשים שני כדורים בכל תא, וסה"כ נבזבז $2n-2$ כדורים. את $k-2n-2$ הכדורים נותרים נחלק בין התאים. סה"כ, קיבלנו:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k - 2n - 2, n-1)}$$

. . . . (3) . . . .

יהיו n כדורים ממוספרים. יש לסדרם ב־n תאים ממוספרים, כאשר בכל תא יימצא בדיוק כדור אחד. לכל $1 \le i \le n-1$ עסור להכניס את הכדור ה־i לתא ה־i, בעוד אין מגבלה על הכדור ה־i. כמות האפשרויות לסידורים כאלו תהיה $F(n)$.

(א) **שאלה:** הביעו את $F(n)$ בעזרת D_m.

תשובה: נפלג למקרים.

- אם הכדור ה־i נמצא בתא ה־i, אז יש עוד $n-1$ תאים נותרים בהם אי־אפשר שכדור יהיה בתא המתאים לו מבחינת מספר. כלומר, יהיו D_{n-1} אפשרויות.
- אם הכדור ה־i לא נמצא בתא ה־i, אז כל n הכדורים לא נמצאים בתא המתאים להם, כלומר יש D_n אפשרויות.

סה"כ מכלל החיבור:

$$\mathscr{A}nswer = D_n + D_{n-1}$$

(ב) **שאלה:** מצאו נוסחת נסיגה ל־$F(n)$ ללא שימוש ב־$D(n)$ או בסימן סכום.

תשובה: נוכיח $D(n) = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. נתבונן בסדרה בעלת n איברים. נבחר את האיבר הראשון בה, נסמנו a_1. יהיו $n-1$ אפשרויות לבחור מספר שהיא תפנה אליו (כמות האפשרויות, פחות היא עצמה), נסמנו a_j. אם a_j מפנה אליה, אז סה"כ ידועות לנו שתי הפניות ויהיו D_{n-2} אפשרויות – כמות האפשרויות לסדר את כל השאר. אם לא, אז נתבונן בכמות האפשרויות לסדר את $n-1$ האיברים כולל a_j, שהיא D_{n-1}, אך על כל סידור נגדיר הרכבה ב־$1 \to j$, כי כבר ידוע ש־j מופנה ע"י 1. סה"כ שני הביטויים קשורים בבחירת j, כלומר נקבל $(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ כדרוש.

סה"כ נציב בנוסחה מסעיף (א) ונקבל נוסחת נסיגה שלא תלויה בשום דבר פרט לעצמה. כתנאי התחלה, $F(0) = 1$.

(4)

(א) הוכיחו באופן קומבינטורי:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\underbrace{\binom{n+r-i-1}{r}}_{S(n-i,r)}=\underbrace{\binom{r-1}{n-1}}_{S(r-n+2,n-1)}$$

סיפור: יש לחלק n כדורים ל־r תאים כך שאין אף תא ריק.

אגף ימין: נתבונן ב־r הכדורים, ונחלק ל־n התאים n מהם. נקבל באופן ישיר את הדרוש.

אגף שמאל: נבחין שזו עקרון ההכלה וההפרדה עם סימן שלילי בהתחלה, ועם חיבור של איבר בעבורו $i=0$. ניקח את $i=0$ כקבוצה הכוללת – כמות האפשרויות לסדר n כדורים ל־r תאים (הבינום יהיה 1, ובפרט לכך נקבל $S(n,r)$). בעבור המשלים, נבחר i כדורים להוציא החוצה (יהיו $\binom{n}{i}$ אפשרויות), ונכפול בכמות הדרכים לסדר את מה שנשאר (היא $S(n-i,r)$). נאחד את הכל, ונחסר את המשלים. סה"כ קיבלנו את הדרוש.

(ב) מצאו ביטוי ללא סכימה לאגף שמאל של המשוואה:

$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

סיפור: מתוך $n-1$ איברים, קבוצה של לפחות שני איברים, ומתוכה נבחר שניים שונים ונסמנם בכחול ובירוק. כמה אפשרויות יש לכך?

אגף ימין: נבחר כדור כחול (n אופציות) ולאחריו ירוק ($n-1$ אופציות). עתה, בעבור $n-2$ האיברים הנותרים, נשייך להם את המספר 1 אם נרצה להכניסם לקבוצה ו־0 אם לאו – לכך, יהיו $|\{0,1\}|^{n-2}$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $n(n-1)2^{n-2}$ אפשרויות.

אגף שמאל: נניח שגודל הקבוצה הוא $2\leq k\leq n$ (בהכרח גודל הקבוצה גדול מ־2 כי קיים מה כדור כחול וירוק) – לבחירה מתוך קבוצה $\binom{n}{k}$ אופציות. לכן, מתוך n האיברים שיש לנו, נבחר k איברים לשים בקבוצה. מאילו, נבחר אחד כחול (k אפשרויות) ואחד ירוק ($k-1$ אפשרויות) וסה"כ מכלל הכפל $\binom{n}{k}k(k-1)$ בעבור k נתון, ומכלל החיבור $\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$ אופציות.

(5)

צ.ל.:

$$\forall(a_i)_{i=1}^{2n},(b_i)_{i=1}^{2n}.(\forall i\in[2n].1\leq a_i\leq n)\implies(\exists I\neq J\subseteq[2n].\sum_{i\in I}a_i=\sum_{j\in J}b_j)$$

הוכחה. יהיו a_i,b_i סדרות כמתוארות להלן. אזי:

$$|I|\leq\sum_{i\in I}1\leq\sum_{i\in I}a_i\leq\sum_{i\in I}n=|I|n$$

ובאופן דומה על b_i. נסמן $|I|=k$, ונדע $I\subseteq[2n]$ כלומר $0\leq I\leq 2n$. לכן, כמות האפשרויות ל-$|I|$ תהיה $2n^k$. וסך האפשרויות בעבור כל k, יהיה:

$$S_1:=\sum_{k=1}^{2n}2n^k=\frac{2n^1-2n^{2n+1}}{1-2n}=\frac{2n(2n^{2n}-1)}{2n-1}=(2n-1)(2n^{2n}-1)-\frac{2n^{2n}-1}{2n-1}$$

בעוד כמות האפשרויות לאידקסים, בעבור כל k:

$$S_2:=\sum_{k=1}^{2n}k(n-1)=(n-1)\frac{2n(2n+1)}{2}=(2n+1)\frac{2n(n-1)}{2}$$

כאשר היחס ביניהם:

$$\frac{S_1}{S_2}=2\frac{\frac{2n(2n^{2n}-1)}{2n-1}}{2n(n-1)(2n-1)}=2\frac{(2n^{2n}-1)}{(2n-1)^2(n-1)}\geq 2$$

ולכן מעקרון שובך היונים המורחב, קיימים שתי אפשרויות שונות לאינדקסים, בעבור אותו הסכום, כלומר בהכרח קיימים I,J מתאימים. ∎

Graph Theory

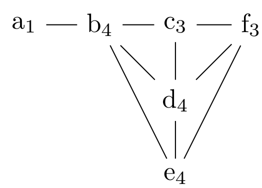
(1)

נוכיח או נפריך קיום גרף מתאים:

(א) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,5$. **נפריך קיום.** נניח בשלילה שקיים גרף כזה, אזי קיים גרף בעל 5 צמתים מדרגה זוגית ($1,3\times 3,5$) בסתירה למשפט לפיו קיים מספר זוגי (ובפרט אינו 5) של צמתים בעלי דרגה אי זוגית.

(ב) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,5,5$. **נפריך קיום.** נניח בשלילה קיום גרף כזה. אזי, קיים שני קודודים מדרגה 5, היא פחותה ב־1 מכמות הצמתים בגרף כולו – ומשום זה לא יכול להכיל קשת בינו צומת לבין עצמה, הם יפנו לכל שאר הצמתים. אזי, הצומת v שקיים מהנתונים ודרגתו 1 יופנה משתי הצמתים הללו (שדרגתן 5), וסה"כ $1 = d(v) \geq 2$ וזו סתירה.

(ג) 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,4$. **נוכיח קיום.**



(2)

(א) צ.ל. בכל עץ עם $n \geq 2$ צמתים יש לפחות שני עלים.

הוכחה. נניח בשלילה קיום עץ בעל $n \geq 2$ צמתים, שיש לו פחות משני עלים. אזי, ל־$n-1$ מהצמתים בו הם אינם עלים, ולכן דרגתם היא $d(v) \geq 2$. נסמן ב־$\tilde{v}$ את הקודקוד היחיד שלא ידוע שמקיים זאת, בעבורו $d(\tilde{v}) \geq 1$ (עם $d(\tilde{v}) = 0$ אז הגרף אינו קשיר וזו סתירה). ממשפט על סכום הדרגות וכמות הצמתים ביחס לכמות קשתות בגרף, נקבל:

$$2(|V|-1) = 2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = d(\tilde{v}) + \sum_{v\in V\setminus\{\tilde{v}\}} d(v) \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1$$

$$|V| - 1 \geq \frac{2n-1}{2} \implies n = |V| \geq n + 0.5 \implies 0 \geq 0.5 \xleftarrow[\times 0.5]{}$$

וזו סתירה.

יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. נוכיח שלכל גרף $H = \langle [n], E_h\rangle$, שאיזומורפי ל־$G$ מתקיים $G = H$ אמ"מ $V = \varnothing$.

הוכחה. content... ■

■

(3)

יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. נניח $\forall v \in V. d(v) \geq k > 1$. צ.ל. קיום מעגל פשוט באורך לפחות $k+1$.

הוכחה. נניח בשלילה שהמעגל הפשוט המקסימלי U הוא באורך $m \leq k$. נראה באינדוקציה על j המסלול הארוך ביותר הכולל צומת יחיד במעגל, ש־j לא חסום.

- בסיס: נניח $j = 0$ כלומר המעגל מכיל את כל הצמתים בגרף, אזי נתון מעגל באורך $m \leq k$, וידוע שלכל אחד מ־m הקודקודים דרגה k, וכבר במעגל מחוברים לשני קודקודים נוספים ומשום שהגרף פשוט לא תתיכן קשת בין צומת לעצמה, כלומר מבין m הצמתים במעגל ל־$m-3$ ייתכן החיבור, בעוד נותר לחבר ל־$k-2$ צמתים נוספים. נבחין בסתירה כי $k-2 \geq m-2 > m-3$, כלומר אין מספיק צמתים לחבר אליהם. כן בעבור כל קודקוד, כלומר יש צורך ב־k צמתים נוספים, ואכן כל קודקוד מתחבר לקודקוד שמחוץ למעגל כלומר $j > 0$.
- צעד: נניח באינדוקציה על נכונות הטענה על $j-1$ ונוכיחה בעבור j. נתבונן בקצה המסלול באורך j אותו נסמן ב־J, בו ימצא קודקוד v. ידוע $d(v) \geq k$. אם ישלח איזושהי צומת אל המעגל, נסיק כי $U \cup \{v\}$ מעגל פשוט באורך $m+1$, סתירה לכך ש־U הוא המינימלי. אם ישלח קשת אל אחד מהקודקודים הידועים המסלול שאינו J, בה"כ $\tilde{J}$, אז $U \cup J \cup \{v\}$ מעגל פשוט באורך גדול מ־m בסתירה לכך ש־m אורך המעגל המינימלי. מכיוון שלא שלח קשת לקודקוד ב־U או לאחד מהמסלולים $\tilde{J}$ שיצאו מ־U, ניוותר עם שני מקרים: הראשון, בו שלח קשת לקודקוד שאיננו קשור למדובר עד כה, אז המסלול J יתארך ויהיה ל־$j+1$ ובכך אכן j לא חסום וסיימנו, וסה"כ הוא בהכרח ישלח צומת לקודקוד ב־J. לכן, $J \geq d(v) \geq k$, וגם קודקודי J מהווים מעגל (הרי הם כולם מקושרים במסלול, ועתה יש צומת המחברת בין הראשון לאחרון במסלול היא v) אבל המעגל הזה באורך $|J| \geq k+1$ על אף שאורך המעגל המקסימלי הוא $m \leq k$. מצאנו בכל מקרים סתירה, כדרוש.

סה"כ, בעבור כל ערך j, יתקיים שבהכרח נצטרך ערך j גדול יותר (לכן j לא חסום). ניתן דעתנו על כך שהטענה זו מהווה סתירה, כי אם j גדול לא חסום ובפרט גדול ככל רצוננו ומשום ש־$|V| \leq j$, אז $|V|$ לא חסום ויש כמות אין־סופית של קודקודים. בכך ההנחה בשלילה הוכחה כשגויה, ותמה ההוכחה. ■

. . . . (4) . . . .

יהי $G = \langle [n], E_G \rangle$ גרף. נוכיח שלכל $H = \langle [n], E_H \rangle$ שאיזומורפי ל־G מתקיים $G = H$, אם ורק אם $G = C_n \vee E_G = \varnothing$.

$\Longrightarrow$ יהי G גרף על $[n]$, ויהי H גרף איזומורפי, בעבור $f\colon [n] \to [n]$ איזומורפיזם. נפלג למקרים.

1. אם $G = C_n$, אז:

$$E_H = \{\{f(v_1), f(v_2)\colon \{v_1, v_2\} \in \underbrace{E_G}_{\mathcal{P}_2([n])}\}\} = \{\{v_1, v_2\}\colon \underbrace{\{f(v)\colon v \in [n]\}}_{\mathrm{Im}(f)=[n]}\} = \mathcal{P}_2[n] = E_G$$

וסה"כ מהמשפט היסודי של זוגות סדורים $G = H$ כדרוש.

2. אם $E_G = \emptyset$ אז:

$$E_H = \{\{f(v_1), f(v_2)\colon \{v_1, v_2\} \in \underbrace{E_G}_{\varnothing}\}\} = \emptyset = E_G$$

ובאפן דומה $G = H$ כדרוש.

$\Longleftarrow$ נניח בשלילה $G \neq C_n \wedge E_G \neq \varnothing$. נוכיח קיום H כך ש־$G \neq H$, בעבורו קיימת איזומורפיזם $f\colon [n] \to [n]$ כך ש־$G \sim H$. מהנחת השלילה, $E_G \neq \mathcal{P}_2([n])$ ולכן קיימים $w, v \in [n]$ כך ש־$\{w, v\} \notin E_G$. אם אין קשתות, סתירה לנתון. אם $d(v) = d(w) = 0$, אז קיים $q \in [n]$ כך ש־$d(q) > 0$, ואם לא, אז קיים q שכן של בה"כ v. בעבור הגרף שיווצר מהאיזומורפיזם הבא:

$$h\colon [n] \to [n],\ \ w \mapsto q, q \mapsto w, x \in [n] \setminus \{w, q\} \mapsto x$$

הוא H, יתקיים H איזומורפי ל־G ונניח בשלילה $G = H$, אך ב־H או ש־w בעל $d(v) > 0$ וזו סתירה לכך ש־$d(v) = 0$, או שיש צומת בין w ל־v כלומר $\{w, v\} \in E_h$ וזו סתירה ש־$\{w, v\} \in E_H = E_G \not\ni \{w, v\}$. סה"כ סתירה בכל המקרים

הוכחנו את הגרירה הדו־כיוונית, ובכך ההוכחה הושלמה.

. . . . (5) . . . .

הוכחה. לאורך כל ההוכחה, אלא אם ייצוין אחרת, $v, n, a, b \geq 1$. יהיו $G_1 = \langle V, E_1 \rangle, G_2 = \langle V, E_2 \rangle$ גרפים;

$$V = [100],\ \ E_1 = \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V)\colon |a - b| = 10 \vee |a - b| = 90\},\ \ E_2 = \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V)\colon |a - b| = 11 \vee |a - b| = 89\}$$

נוכיח ש־G_1 אינו איזומורפי ל־G_2.

למה 1. השוויון להלן:

$$\exists m \neq n.\, m{+}n = 100 \wedge E = \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V)\colon |a{-}b| = n \vee |a{-}b| = m\} \Longrightarrow E \overset{!}{=} \{i \in [n]\colon \{i, i{+}m\}\} \cup \{i \in [m]\colon \{i, i{+}n\}\} =: \tilde{E}$$

כאשר $\tilde{E}$ תקרא "ההגדרה המפושטת [של למה 1 בעבור E]". נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

$\subseteq$: יהי $\{a, b\} \in E$, בה"כ $|a - b| = n$, ובה"כ $a \geq b$ כלומר $a - b = n$. אזי $a = b + n$. ידוע $a \in [100]$, נרצה להראות $a \in [m]$. נניח בשלילה $a \in [100] \setminus [m]$, כלומר $a > m = 100 - n$. נקבל $b + n > 100 + n$. נעביר אגפים ונקבל $b > 100$ וזו סתירה. אזי $E \ni \{b, \underbrace{b + n}_{a}\} \wedge a \in [m]$ ומעקרון ההפרדה $\{b, a\} \in E$ כדרוש.

$\supseteq$: יהי $\{a, b\} \in \tilde{E}$, ובה"כ $a \geq b$ ובה"כ $\{a, b\} \in \{i \in [n]\colon \{i, i + m\}\}$ כלומר קיים $i \in [n]$ כך ש־$\{a, b\} = \{i, i + m\}$ ומההנחות $a = i + m, b = i$. צ.ל. $\{a, b\} \in E$. ידוע: $b \leq a = i + m \leq n + m = 100$ כלומר $a, b \in [100]$ ולכן $\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V)$. גם נדע $|a - b| = a - b = i + m - i = m$. סה"כ מעקרון ההפרדה $\{a, b\} \in E$ כדרוש.

נסמן ב־V_n^1 וב־V_n^2 את קבוצת כל הקודקודים מדרגה n בגרף G_1 ו־G_2 בהתאמה.

למה 2. $|V_2^1| = |V_2^2|$. הוכחה.

נבחין כי הקבוצות E_1, E_2 הן מהצורה בעבורה הוכחנו את הטענה לעיל, כלומר מצאנו הגדרה שקולה, מפושטת, לקבוצות הללו. נניח בשלילה קיום איזומורפיזם $f\colon V^V$ בין G_1 ל־G_2. על בסיס טענה שהוכחנו בכיתה, $\forall v \in V. d_{G_1}(v) = d_{G_2}(f(v))$. נניח בשלילה $|V_n^1| \neq |V_n^2|$, ובה"כ $|V_n^1| > |V_n^2|$, אזי מעקרון שובך היונים קיימת $v \in V_n^1$ כך ש־$f(v) \notin V_n^2$, כלומר $d_{G_2}(f(v)) \neq d_{G_1}(v)$ וזו סתירה לטענה שהוזכרה קודם לכן. בפרט, נדע $|V_2^1| = |V_2^2|$ כדרוש.

למה 3.

$$V_2^E=[\min\{n,m\}]\ \left(\implies |V_2^E|=\min\{n,m\}\right)$$

הוכחה. בה"כ $n\le m$ (כלומר $\min\{n,m\}=n$). נוכיח הכלה דו כיוונית. מצד אחד, אם $v\in V_2^E$, אז מההגדרה השקולה המפושטת מצאנו $\{v,v+n\},\{v,v+m\}\in E$. ידוע $v+m\in V$ כלומר $v+m\le 100$ ונציב ונקבל $v+100-n\le 100$ וסה"כ $v\le n$ אזי $v\in[n]$ כדרוש. מצד שני, אם $v\in[n]$ אז $v\in[m]$ ולכן מההגדרה המפושטת $\underbrace{\{v,v+m\}}_{e_1},\underbrace{\{v,v+n\}}_{e_2}\in E$, ומשום ש־$m\neq n$ אז $v+m\neq v+n$ ולכן $e_1\neq e_2$ אלו שני צמתים שונים, וסה"כ $d(v)=2$ (לא ייתכן יותר כי אין עוד מקרים בהגדרה בעבורם תתכן יצירת קשת נוספת) כלומר $v\in V_e^E$.

סה"כ, מלמה 3, $|V_2^1|=10,|V_2^2|=11$ כלומר $|V_2^1|\neq|V_2^2|$ וזו סתירה ללמה 2. הנחת השלילה נסתרה, וההוכחה תמה. ■

. . . . (6) . . . .

צ.ל. יהי $G=\langle V,E\rangle$, G הוא עץ אמ"מ יש מסלול פשוט יחיד בין כל שני צמתים ב־G.

הוכחה. נסמן ב־$\tilde{P}$ את הטענה "בין כל שני צמתים יש מסלול פשוט יחיד", וב־P את הטענה "בין שני כל צמתים יש מסלול פשוט". נסמן ב־C את הטענה "G גרף חסר מעגלים"' ב־W "G הוא גרף קשיר", וב־T "G הוא עץ".

בהרצאה, הוכחה הטענה $P\sim W$. נוכיח את הטענה $\tilde{P}\sim C$, ולאחר מכן ניעזר במספר מעברים לוגיים כדי להראות ש־$\tilde{P}\sim T$.

- $\Longrightarrow$ נניח כי בין כל שני צמתים ב־G יש מסלול פשוט יחיד, ונוכיח ש־G חסר מעגלים. נניח בשלילה קיום מעגל ב־G, הוא $\langle v_i\rangle_{i=0}^n$ כאשר $v_0=v_n$. נסיק, שבין v_0 לבין v_1 יתקיימו המסלולים $\langle v_0,v_1\rangle$ אך גם $\langle v_1,v_2,\ldots,v_n,v_1\rangle$ יהיה מסלול ביניהם. המסלולים הללו שונים מאחר ש־$v_2\notin\langle v_0,v_1\rangle$ (ו־v_2 קיים בהכרח כי לא ייתכן מעגל באורך 2 בלבד, ו־$\langle v_i\rangle_{i=0}^n$ נתון להיות מעגל). בכך הראנו סתירה לזה שבין כל שני צמתים ב־G קיים מסלול יחיד.
- $\Longleftarrow$ נניח ש־G חסר מעגלים, ונוכיח שבין כל שני צמתים בו קיים מסלול פשוט יחיד. נניח בשלילה שקיימים שני מסלולים פשוטים בין קודקוד $\tilde{v}$ לבין $\bar{v}$, נסמנם $w=\langle w_i\rangle_{i=0}^n,\ j=\langle j_i\rangle_{i=0}^m$ כאשר $w_n=j_m=\bar{v}$, $w_0=j_0=\tilde{v}$. נסמן $j^{-1}=\langle j_i\rangle_{i=m}^0$, וברור כי j^{-1} גם מסלול (קשתות בגרף לא מחובר הן דו־כיווניות). נסמן $O=w\uplus j^{-1}=\langle w_0,w_1,\ldots,w_n=j_m,j_{m-1},\ldots,j_0\rangle$. בגלל ש־$O$ הוא מסלול וגם $w_0=j_0$, אז O הוא מעגל, כלומר $\neg C$, בסתירה לכך ש־G חסר מעגלים.

נדע $P\ \therefore\ \tilde{P}$ כי אם בין כל שני צמתים ב־G יש מסלול פשוט יחיד, אז בפרט בין כל שני צמתים ב־G קיים מסלול (הוא המסלול הפשוט הנתון).

נתבונן בידוע לנו:

$$\begin{cases}T\sim C\wedge W\\ C\sim\tilde{P}\\ W\sim P\\ \tilde{P}\to P\end{cases}\implies \tilde{P}\longleftrightarrow P\wedge\tilde{P}\longleftrightarrow C\wedge W\ \therefore\ \tilde{P}\sim C\wedge W$$

ולכן הטענות ביניהם היה צריך להוכיח שקילות, שקולות. ■

. . . . (7) . . . .

שאלה: בהינתן $T=\langle V,E\rangle$ וקודקוד $\in V$. אם נסיר העץ את b ואת הקשתות הנוגעות בו, כמה רכיבי קשירות יהיו בגרף שיתקבל?

תשובה: כמות רכיבי הקשירות בגרף שיתקבל יהיה $d(v)$.

הוכחה. יהי $T=\langle V,E\rangle$ עץ, ו־$v\in V$ קודקוד. נוכיח שבגרף $\tilde{T}:=\langle\overbrace{V\setminus\{v\}}^{\tilde{V}},\overbrace{E\setminus\{e\in E\colon v\notin e\}}^{\tilde{E}}\rangle$ יש $d(v)$ רכיבי קשירות.

למה 1. כאשר מסירים צומת מגרף $G=\langle V_G,E_G\rangle$ חסר מעגלים, נסמן את הגרף שהתקבל G', ב־G' יש רכיב קשירות אחד נוסף.

הוכחה. נניח שהצומת שהוסרה היא חלק מרכיב הקשירות $U\subseteq V_G$. לא ייתכן שהיא חלק מרכיב קשירות נוסף, כי $\sim$ הוא יחס שקילות. נסמן $e=\{a,b\}$.

- $\geq$ נוכיח שכמות רכיבי הקשירות גדלה. נניח בשלילה $a\sim b$ ב־G', אזי קיים ביניהם מסלול O מ־a ל־b, ונדע $O\oplus\langle a\rangle$ הוא מעגל ב־G כי בין כל הצמתים בו ידוע קיום מסלול מהיות O מסלול, פרט לצומת בין a ל־b שידוע קיומה מהיות e קיימת, כלומר $O\oplus\langle a\rangle$ הוא מסלול ונבחין שגם מעגל כי $O_1=O_{-1}=a$. סה"כ בסתירה לכך ש־G חסר מעגלים. לכן, בהסרת e, ב־G' לא קיים מסלול בין a ל־b ובהכרח יש לנו רכיב קשירות נוסף.
- $\leq$ נוכיח שכמות רכיבי הקשירות גדלה בלא יותר מ־1. נוכיח טענה יותר חזקה – שני רכיבי הקשירות החדשים, U_1,U_2, מוכלים ב־U, ולא קיימים רכיבי קשירות נוספים.

- נניח בשלילה שקיים רכיב קשירות $J \subseteq V_G$ המקיים $J \nsubseteq U$. אם J לא מוכל באף רכיב קשירות של G, אז קיימים בו $j_1, j_2 \in J$ כך שכל אחד ביניהם נמצא ברכיב קשירות שונה ב־G, כלומר $\neg j_1 \sim_G j_2$, ובגלל שב־G' רק הסחרנו קשתות – $\neg j_1 \sim_{G'} j_2$, וזו סתירה. לכן, J מוכל ברכיב קשירות J' של G, נסמן $J \subsetneq J'$ (אם יתקיים שוויון חזק הוא לא יהיה רכיב קשירות חדש). משום ש־$e \notin J'$ (הוכח קודם לכן) אז $J = J'$, וזו סתירה.
- נותר להוכיח שלא קיים רכיב קשירות פרט ל־U_1, U_2 שמוכל ב־U. ידוע בה"כ $a \in U_1, b \in U_2$ כי $a, b \in U$ אך $\neg a \sim_{G'} b$. נניח בשלילה קיום $U_3 \neq \varnothing$ כך ש־$U_3 \subsetneq U, U_3 \neq U_1, U_2$. מכיוון ש־$U_3$ מחלקת שקילות ב־$\sim_{G'}$ אז U_3 זר ל־U_1, U_2 גם הן מחלקות שקילות. הוא לא ריק, אזי $\exists c \in V_{G'} . c \in U_3$. בגלל ש־$c \notin U_2, U_1$ אז $\neg(c \sim b \vee c \sim a)$ (דה מורגן לפישוט). מכיוון ש־$a, b, c \in U$ אז $c \sim_G b, c \sim_G a$ ונסמן את המסלולים ב־G שנוצרו כ־$W_{c,b}, W_{c,a}$ בהתאמה. זו סתירה כי $W_{b,c} \oplus W_{c,a} \oplus \langle a \rangle$ מעגל ב־G כי קיימת קשת $e = \{a, b\}$ וזו סתירה להיותו חסר מעגלים.

למה 2. ב־$\tilde{T}' = \langle V, \tilde{E} \rangle$, הסינגלטון $\{v\}$ הוא רכיב קשירות.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים $\bar{v} \in V$ כך ש־$v \sim_{\tilde{T}'} \bar{v}$. אזי קיים מסלול W ביניהם, הכולל את v בסופו ועוד לפחות קודקוד נוסף w, ולכן $e := \{w, v\} \in \tilde{E}$. מעקרון ההפרדה, $e \in E \wedge v \notin e$ וזו סתירה לכך ש־$v \in e = \{w, v\}$.

ניעזר בלמות. ידוע מהשיעור שבהסרת צומת מגרף חסר מעגלים, נקבל גרף חסר מעגלים. לכן, אם נסיר צומת המחברת ל־v מהגרף T נקבל גרף חסר מעגלים, ומלמה 1 יהיו בו שני רכיבי קשירות. כצעד אינדוקציה בעבור גרף חסר מעגלים עם n רכיבי קשירות, נסיר מהגרף שקיבלנו צומת נוספת, נקבל גרף חסר מעגלים, ויהיו בו $n+1$ רכיבי קשירות. כלומר, ב־$\tilde{T}'$ לאחר הסרת $d(v)$ קשתות, נקבל שיהיו בו $d(v)+1$ רכיבי קשירות. בגלל ש־$\tilde{T}$ הוא למעשה $\tilde{T}'$ בהסרת v, אז מלמה 2 הסרנו מ־$\tilde{T}'$ בדיוק רכיב קשירות אחד כאשר ייצרנו את $\tilde{T}$, וסה"כ ב־$\tilde{T}$ ישנם $d(v)$ רכיבי קשירות. ■

(8)

(א) צ.ל. בהינתן $s, t \geq 2$ וגם $R(s-1, t), R(s, t-1)$ זוגיים, אז $R(s, t) \leq R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1$.

הוכחה. נתבונן בקליקה בעלת $2n + 2m - 1$ צמתים. ראשית כל, נוכיח קיום צומת ממנה לא יוצאים $2m - 1$ קשתות אדומות. נסמן ב־E_R את קבוצת הקשתות המסומנות בצבע אדום. נניח שמכל הצמתים יוצאים $2m - 1$ קשתות אדומות, אזי סכום הדרגות האדומות (דרגה אדומה = כמות הקשתות בצבע אדום היוצאים צומת, יסומן ב־$d_R(v)$) יהיה:

$$2|E_R| = \sum_{v \in V} d_R(v) = (2m-1)(2n+2m-1) \implies |E_R| = \frac{(2m-1)(2n-1)}{2}$$

ידוע ש־$(2m-1)$ אי זוגי וגם $2n + 2m - 1$ אי זוגי, וכפל אי זוגיים אי זוגי, ולכן חילוקם בשניים לא יהיה שלם וזו סתירה.

בהינתן אותו הקודקוד, נסמנו v, נסמן את קבוצת הצמתים המחוברים בקשת אדומה אליה ב־R ואת קבוצת הצמתים המחוברים בקשת כחולה ב־B. ידוע $|R| \neq 2m - 1$. בגלל ש־$|V| = |R| + |B| = R(s, t-1) + S(s-1, t) - 1$ אז בפרט נדע שיתקיים $|V| \geq R(s, t-1), R(s-1, t)$. לכן, $|R| \geq 2m \vee |B| \geq 2n$ כי אחרת:

$$\begin{cases} 2m - 1 \neq |R| < 2m \implies |R| < 2m - 1 \\ |B| < 2n \end{cases} \implies |R| + |B| < 2n + 2m - 1 = |V|$$

וזו סתירה. לכן בה"כ $|B| \geq 2n = R(s, t-1)$, ולכן או שקיימת קליקה אדומה בגודל s וגמרנו, או שקיימת בתוך הצמתים ב־$|B|$ קליקה גודל $t - 1$ ויחד עם v נקבל קליקה בגודל t כדרוש. ■

(ב) צ.ל. $R(4, 4) \leq 18$.

הוכחה. בהרצאה הוכח כי $R(2, k) = k$ וגם $R(3, 3) = 6$. נתבונן בא"שים הבאים (נסתמך על מה שהוכחנו למעלה):

$$R(3, 4) = R(4, 3) = R(3, 3) + R(2, 4) - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$$

ולכן, מהא"ש $R(s, t) = R(s-1, t) + S(s, t-1)$:

$$R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 9 + 9 = 18$$

כדרוש. ■

(9)

נגדיר את $\chi(G)$ להיות מספר הצביעה החוקית המינימלי של הגרף G, ואת $\alpha(G)$ להיות גודל הקבוצה הבלתי־תלויה הקטנה ביותר, כאשר $U \subseteq V$ היא קבוצה בלתי־תלויה ב־$G = \langle V, E \rangle$ אמ"מ אין אף צלע בין שני קודקודים ב־U.

(א) צ.ל. $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

הוכחה.

למה 1. קיימת קבוצה בלתי תלויה U בגרף G המקיימת $|U| = \alpha(G)$, ובעבורה $\forall v \in U : 2 = \min\{d(w, v) \mid v \neq w \in U\}$, בנחה שקיים רכיב קשירות עם יותר משני איברים.

בעבור חסם תחתון, אם $d(w,v)=0$ אז הם אותו הקודקוד וזו סתירה, ואם $d(w,v)=1$ אז קיימת קשת $\{w,v\}$ וזו סתירה לכך שהם בלתי־תלויים אחד בשני. לכן $d(w,v)\geq 2$. מצד שני, אם $d(w,v)>3$ אז קיים מסלול $\{v,t_1,t_2t_3,\dots,w\}$ ונוכל לבחור $\tilde{U}=U\setminus\{w\}\cup t_2$ היקיים את הטענה. אם t_2 תלוי בקשת אחרת ב־U, אז יש מסלול יותר קצר בין v לאותה הקשת, וזו סתירה לכך שזהו האורך המינימלי. לכן $\tilde{U}$ היא קבוצה בלתי תלויה, וגם $|\tilde{U}|=|U|-1+1-|U|=\alpha(G)$ כדרוש.

נפצל למקרים.

- אם $E\neq\varnothing$ וגם קיים רכיב קשירות בו לפחות שני צמתים, אז קיימת קשת $e=\{w,v\}\in E$, ולכן $c(w)\neq c(v)$ (כאשר c פונקציית הצביעה בעבור $\chi(G)$) וסה"כ $\chi(G)\geq 3$. מלמה 1, נדע $3\alpha(G)\geq|V|$ כי נוכל "לשייך" לכל צומת ב־U לכל היותר שני צמתים הצמודים אליו בצורה שתחסה את הגרף. סה"כ $\alpha(G)\chi(G)\geq|V|$ כדרוש.
- אחרת, אם $V=\varnothing$ אז $\chi(G)\cdot\alpha(G)\geq 0=|V|$ כי כפל חיובים הוא חיובי, וסיימנו
- אחרת, אם $E=\varnothing$, אז $\chi(G)=1$ כי נוכל לצבוע כל צומת באותו הצבע (לא ייתכן מספר נמוך יותר כי אז $\chi(v)\in\emptyset$) וגם $\alpha(G)=|V|$ כי אף צומת לא תלוי בשני (ולא ייתכן יותר מזה כי אז $U\nsubseteq V$) ונוכל לבחור $U=V$.
- אחרת, כל רכיבי הקשירות הם באורך לכל היותר שניים. אם כולם באורך אחד, אז $E=\emptyset$ וזו סתירה. אחרת, קיים רכיב קשירות באורך 2 וממנו $\chi(G)=2$, וברור כי $\alpha(G)\geq n/2$ (כי כל רכיבי הקשירות הם לכל היותר שניים) וסה"כ נעביר אגפים ונציב, $\chi(G)\alpha(G)\geq|V|$ כדרוש.

סה"כ הטענה הוכחה בכל המקרים האפשריים, כדרוש. ■

(ב) יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף, צ.ל. $|E|\geq\binom{\chi(G)}{2}$.

הוכחה. נניח בשלילה $|E|<\binom{\chi(G)}{2}$. בעבור כל קבוצה U של צמתים המקיימים $|c[U]|=|U|=\chi(G)$ (ובפרט הפונקציה $c|_U$ היא חח"ע ועל) וגם $U\subseteq V$. כמות הקשתות המקסימלית בגרף $\tilde{G}=\langle U,\tilde{E}:=\{w,v\in U\mid\{w,v\}\in E\}\rangle$ היא כמות הדרכים לבחור קשתות מתוך $|U|$, היא $\binom{\chi(G)}{2}$. משום ש־$\tilde{E}\subseteq E$ אז $|\tilde{E}|<|E|$ ולכן $|\tilde{E}|<\binom{\chi(G)}{2}=|V|$. לכן, קיימים שני קודקודים $v,w\in U$ כך שאין בינהם קשת. נבחר להשמיד את $c(v)$, ונגדיר $\tilde{c}$ כך ש־$\tilde{c}(v)=c(w)$. באופן דומה, בעבור כל U אפשרית, נמצא m,n מתאימים ולאחד מביניהם עבורו זה יתאפשר, נגדיר בה"כ $\tilde{c}(n)=c(w)$. סה"כ $\tilde{c}$ בעל תמונה בגודל $\chi(G)-1$ וגם צביעה חוקית, וזו סתירה לכך ש־$\chi(G)$ הצביעה החוקית המינימלית בעבור הגרף G. ■

(ג) נסמן ב־$G-v$ את הגרף המתקבל מהסרת $v\in V$ מהגרף G. צ.ל. $\chi(G-v)\in\{\chi(G),\,\chi(G-1)\}$.

הוכחה. נתבונן בגרף $G-v=\langle\tilde{V},\tilde{E}\rangle$. נניח בה"כ ש־$c(v)=1$ (עד לכדי זיווג $[n]\to\mathrm{Im}(c)$). נתבונן בקשת $\{v,w\}$ שהוסרה, ונניח $c(w)=2$. אם קיימת קשת $\{v,\bar{w}\}$ כך ש־$c(\bar{w})=2$, אז לא יהיה אפשר לחבר את הצביעה של הצמתים בצבע 1 אם אלו בצבע 2, ושאר הצבעים לא שונו ולכן הצביעה המינימלית עודנה $\chi(G)$. אחרת, אין שום קשת בין צומת מצבע 1 לצומת מצבע 2 – ולכן אפשר ליצור פונקציה $\tilde{c}$ שתגדיר:

$$\begin{cases}x\mapsto x,\ c(x)\neq 2\\ x\mapsto 1,\ \text{else}\end{cases}$$

שתהיה פונקציית צביעה חוקית מסדר של $\chi(G)-1$. לא ייתכן פחות מכך, כי כל שאר קבוצות הצבעים האחרות נותרו עם אותם הצמתים והקשתות בדיוק.

(יש חור קטן בהוכחה שלא הצלחתי לפתור, בנוגע לפה קורה אם משנים לחלוטין את סדר הצביעה. אשמח אם יסבירו בהרצאה או בתרגול איך לסגור אותו)

■

(ד) צ.ל. $\chi(G)+\chi(\overline{G})\leq|V|+1$.

לא הצלחתי לפתור את הסעיף, ולא ידוע לי על מישהו אחד שפתר את הסעיף.

.... (10) ....

יהי G גרף עם $5n+1$ קודקודים. נצבע את הקודקודים ב־n צבעים. צ.ל. שב־G או ב־$\overline{G}$ יש משולש שכל הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

הוכחה. משובך יונים מורחב, עבור $5n+1$ יונים הן הקודקודים בעבור n תאים הם הצבעים, שיש בהכרח לפחות $\left\lfloor\frac{5n+1}{n}\right\rceil=6$ קודקודים מצבע יחיד, בה"כ צבע ורוד. נסמן את קבוצת הקודקודים הללו ב־c. נתבונן בקליקה הבנוייה מ־$V=c$, בה נסמן בצבע כחול את $\{x,y\}$ אם $x,y\in c\wedge x\sim_G y$, ותכלת אם לאו. ידוע $R(3,3)=6$ ובגלל ש־$6\leq 6=|c|=|V|$ אז בתוך הקליקה קיים משולש. אם המשולש בצבע כחול, אז מיד נובע קיום משולש ב־G בין הצמתים ב־c, אחרת המשולש בצבע כלת ואז יש משולש ב־$\overline{G}$. בכך הוכחנו קיום משולש מתאים בין צמתים מאותו הצבע (נזכור כי ב־c כל הצמתים מאותו הצבע) וסיימנו. ■