ליניארית 1ב

שחר פרץ

22 בינואר 2025

טענה. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נסמנה ב־(a_{ij}). $\forall 1\leq i\leq n\colon |A|=\sum(-1)^{i+j}a_{ij}|A_{ij}|$ כאשר A_{ij} הוא המינור של A.

הוכחה. נסמן ב־A' את המטריצה A לאחר החלפת שורות i,n. אז $|A|=-|A'|$. עתה, ידועה הנוסחה:

$$|A|=-|A'|=-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}a_{ij}\,|A_{ij}|$$

נשים לב ש־$a'_{nj}=a_{ij}$ וגם $A'nj$ הוא כמו A_{ij} עם $i-|n-1|$ החלפות. אז $|A_{ij}|=(-1)^{(n-1)-i}|A'_{ni}|$. נציב ונקבל $|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-1-i}|A_{ij}$ כרצוי.

באופן דומה אפשר לעשות פיתוח לפי שורות:

$$|A|=|A^T|=\text{לפי שורה}=\text{כרצוי}$$

BLOCK MATRIX . . . . (1)

מטריצת בלוקים: $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$. **טענה.** תהינה $A\in M_n(\mathbb{F}),B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),D\in M_m(\mathbb{F})$, אז $\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}=\det A\det D$

הוכחה. נסמן ב־$\varphi_1\cdots\varphi_t$ פעולות דירוג של מטריצה A, כלומר $|A|=|A'|\cdot\prod E_i$ עבור E_i מטריצות אלמנטריות מתאימות לדירוג, ו־A' מדורגת קאנונית שקולה ל־A. קיים ממשפט לפיו פעולות דירוג שקולות להכפלה במטריצה אלמנטרית, ושדיטרמיננטת מכפלת מטריצות היא מכפלת הדיט׳.

נסמן $\varphi_{t+1}\cdots\varphi_s$ פעולות דירוג כמקודם, אז קיימות: $|D|=D'\prod E_i$ באופן דומה. נסמן $\varphi'_1\cdots\varphi'_t$ פעולות המתאימות ל־$\varphi_1\cdots\varphi_s$ בעבור מטריצה מגודל $(m+n)\times(m+n)$, כלומר, כל פעולה תפעל רק על n השורות הראשונות, אבל על שורות בגודל $m+n$בדומה, נסמן ב־$\varphi'_{t+1}\cdots\varphi'_s$. אז, כאשר $E'_1\cdots E'_s$ מתאימות ל־$\varphi'_1\cdots\varphi'_s$.

$$\left[\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\right]=\prod|E'_i|\underbrace{\left[\begin{pmatrix}A' & *\\ 0 & D'\end{pmatrix}\right]}_{GG}$$

אם A או D לא הפיכה, אז $|X|$ עבור X המטריצה הלא הפיכה היא 0, כלומר $X'\neq I$ קאנוני, ולכן X' עם שורת אפסים, וסה״כ GG עם שורת אפסים וסה״כ הדיט׳ שווה ל־0.

אחרת, A,B הופכיות. נקבל $A'=I_n,D'=I_m$ וקיבלנו $\det GG=1$ ובתור מט׳ משולשית עליונה, נקבל סה״כ שוויון ל־$\left[\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\right]\prod|E_i|=$ $|A||D|$.

הערה של קרני: לא באמת צריך את ההפרדה למקרים. ■

ADJUGATE MATRIX . . . . (2)

הגדרה. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה שתסומן ב־(a_{ij}). נגדיר את המטריצה המצורפת (לעיתים נקראת מוצמדת) להיות המטריצה כך ש־:

$$\operatorname{adj}(A)_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

דוגמה.

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^2d & (-1)^{2+1}b\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

משפט. תהי מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$. אז $A\cdot\operatorname{adj}A=\operatorname{adj}A\cdot A=|A|\cdot I$. ובפרט, עבור A הפיכה, מצאנו נוסחא להופכית. כלומר $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\operatorname{adj}A$.

הוכחה. **למה.** יהיו $1 \leq i \leq j \leq n$. אז $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}|A_{jk}| = |A|\delta(i,j)$ כאשר δ היא הדלתא של קרונקר (פונ' χ).

תת־הוכחה. אם $i \neq j$: נתבונן ב־A', המטריצה A שהשורה ה־j שלה שווה לשורה ה־i. ברור כי $\det A' = 0$. נפתח לפי השורה ה־j של A. נבחין בכך ש־$A'_{jk} = A_{jk}$, וגם $a'_{jk} = a_{ik}$.

$$0 = |A'| = \sum(-1)^{j+k}a'_{jk}|A'_{jk}| = \sum(-1)^{j+k}a_{ik}|A_{jk}|$$

אחרת $i = j$ ואז "ברור" (אוטומטית פיתוח). ■

נחזור למשפט.

$$(A \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum a_{ik}(-1)^{k+j}|A_{jk}| = |A|\delta(i,j) = (|A|I)_{ij}$$

וואפי וואפי

עתה נראה ש־$\operatorname{adj} A \cdot A = |A|I$. נסמן $B = (A^T)$. אז:

$$\operatorname{adj} B \cdot B = |B| \cdot I \implies \underbrace{A^T \operatorname{adj} A}_{(\operatorname{adj} A^T)^T \cdot (A^T)^T = (I|A|)^T = |A|I} = \overbrace{|A^T|}^{=|A|} \cdot I$$

■

סוף הקורס (שעומדים לטרוח ללמד אותנו בהרצאה)

אלגברה ליניארית 1א ~ אונ' ת"א ~ תוכנית אודיסאה ~ 2025 ~ מאת שחר פרץ

המשך בעמוד הבא

נקודות ממבחן הדמה:

- תראו לאילו ערכי a, b, c – הכרחי ומספיק, להראות שתי גרירות.
- לא להגדיר מהתמונה של S בשאלה 4. ההרכבה לא מוגדרת היטב ככה.
- לא לפתור שאלות לפי הסדר.
- לא כולם הגדירו פונ' מוגדרת היטב (ט"ל)
- טעויות חישוב בשאלה הראשונה