תרגול בשישי עם גילי

שחר פרץ

17 בינואר 2025

. . . . (1) . . . .

שאלה: נתון $\det(A^2+bI)=0$, ו־A מטריצה 2×2. מצאו את $\det A$. נניח A,b ממשיים, ו־$b>0$.

הוכחה. ידוע קיום $v\neq 0$ כך ש־$(A^2+bI)v=0$. אז $\nexists q\in\mathbb{R}\colon Av=qv$. זאת כי אחרת $-bv=A^2b=qAv=a^2v$ (וריבוע מספר מ־$\mathbb{R}$ הוא חיובי). לכן $B:=\{v,Av\}$ הם בסיס ל־$\mathbb{R}^2$ (כי הראינו בת"ל, ומשום שגודלם שווה אז פורש). לכן:

$$T(v)=0\cdot v+1Av,\ T(Av)=-bv+0Av \implies [A]_B=\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ניזכר שדיטרמיננטה לא תלוי בבחירת בסיס, כי עבור מטריצת מעבר בין בסיסים P:

$$\det[A]_B=\det(PAP^{-1})=\det P\det A\det P^{-1}=\det(PP^{-1})\det A=\det A$$

$$\det[A]_B=b \quad \top$$

■

. . . . (2) . . . .

תהי $T\colon M_n(\mathbb{C})$, המוגדרת לפי $T(A)=A+qA^T$. עבור אילו ערכי q, T הפיכה?

הוכחה. נפרק לחלק סימטרי ואנטי סימטרי:

$$T\left(\frac{A+A^T}{2}\right)=(1+q)\frac{A+A^T}{2},\ T\left(\frac{A-A^T}{2}\right)(1-q)\frac{A-A^T}{2}$$

ידוע $M_n(\mathbb{C})=\mathrm{Sym}(\mathbb{C})\oplus\mathrm{ASym}(\mathbb{C})$ (סכום ישר של מרחב המטריצות הסימטריות האנטי־סימטריות). לכן באופן שקול נרצה שכל אחד מהמרחבים שלנו לא ישלח ל־0, כלומר $q\neq 1,-1$.

אם ניקח B בסיס שהוא איחוד מהבסיסים ממרחב הסימטריים והאנטי־סימטריים, ונקבל ש־$[T]_B$ הוא מטריצה אלכסונית של $1+q$ למשך $\frac{n^2+n}{2}$ איברים (גודל הבסיס של הסימטריים) ומשם $1-q$ יהיה באלכסון ב־$\frac{n^2-n}{2}$ האיברים הנותרים (גודל הבסיס האנטיסימטריים). קיבלנו ייצוג מטריציוני בבסיס אחר, והוא הפיך כל עוד $q\neq 1,-1$.

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1+q & & \\ & \ddots & \\ & & 1-q\end{pmatrix}$$

נחשב דיטרמיננטה למטריצה לעיל ונקבל:

$$\det T=(1+q)^{\frac{n^2+n}{2}}+(1-q)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

נוסף על כך, נקבל ש־$[T^{-1}]_B$ היא ההופכי לאיברי $[T]_B$:

$$[T^{-1}]_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+q} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-q}\end{pmatrix}$$

ולכן ההופכי:

$$T^{-1}(A)=\frac{1}{1+q}\frac{A+A^T}{2}+\frac{1}{1-q}\frac{A-A^T}{2}$$

■

. . . . (3) . . . .

תהי $T\colon V \to W$ העתקה ליניארית על. צ.ל. קיום $S\colon W \to V$ כך ש־$I = T \circ S$.

הוכחה.

- ניקח בסיס B ל־$\ker T$ ונשלים אותו לבסיס $\bar{B}$ ל־V
- נתבונן ב־$T(\bar{B} \setminus B)$ בסיס ל־$\operatorname{Im} T$. (הוכחה של זה: **תרגיל חשוב**) סימונים:

$$B = \{V_1 \dots V_n\},\ \bar{B} = \{V_1 \dots V_n V_{n+1} \dots V_m\}$$

- אז $T(\bar{B} \setminus B) := \{T(V_n), \cdots, T(V_m)\}$, בסיס ל־$W$
- נגדיר S בתור $S(T(V_i)) = V_i$. צריך להוכיח ש(א) מוגדר (ב) ליניארי.

■

. . . . (4) . . . .

. . . . (5) . . . .

. . . . (6) . . . .

ממש מומלץ לפתור

. . . . (7) . . . .

יהי V מ"ו ממימד n ויהי $k > n$. הוכיחו שלכל $T\colon V \to V$ מתקיים $\ker T^k \oplus \operatorname{Im} T^k = V$.