# מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 13 - שחר פרץ

## מידע כללי

| ת.ז.: | מאת: | תאריך הגשה: | ניתן בתאריך: |
|---|---|---|---|
| 334558962 | שחר פרץ | 20.2.2024 | 14.2.2024 |

## תרגיל בית 13 - יחסי סדר

### שאלה 1

#### סעיף (א)

נניח $\langle A, <_A\rangle, \langle B, <_B\rangle$ קבוצות סדורות חזק. נגדיר את יחס הסדר הלקסיקוגרפי על $A \times B$:

$$\langle a, b\rangle <_{lex} \langle c, d\rangle \iff (a <_A c \vee (a = c \wedge b <_B d))$$

נוכיח כי $<_{lex}$ יחס סדר חזק על $A \times B$.

- טרנזיטיבי: יהי $\langle a, b\rangle <_{lex} \langle c, d\rangle, \langle c, d\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$ כאשר $a, c, e \in A \wedge b, d, f \in B$. נוכיח $\langle a, b\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$. מההנחה $\langle a, b\rangle <_{lex} \langle c, d\rangle$, ידוע $a <_A c \vee (a = c \wedge b <_B d)$. נפלג למקרים:
  - אם $a <_A c$: מההנחה $\langle c, d\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$ נסיק $c <_A e \vee (c = e \wedge d <_B f)$. נפלג למקרים:
    - אם $c <_A e$: סה"כ מכיוון ש־$<_A$ יחס סדר חזק ובפרט טרנזיטיבי $a <_A e$ כלומר $\langle a, c\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$.
    - אם $c = e \wedge b <_B f$: אזי מהצבה $a <_A e$ כלומר $\langle a, c\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$.
  - אם $a = c \wedge b <_B d$: מההנחה $\langle c, d\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$ נסיק $c <_A e \vee (c = e \wedge d <_B f)$. נפלג למקרים:
    - אם $c <_A e$: אז מהצבה $a <_A e$ כלומר $\langle a, c\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$.
    - אם $c = e \wedge d <_B f$: אז מטרנזיטיביות שוויון $a = e$ ומטרנזיטיביות יחס הסדר החזק $<_B$ נקבל $b <_B f$ כלומר $\langle a, c\rangle <_{lex} \langle e, f\rangle$.
- אנטי־סימטרי חזק: יהי $\langle a, b\rangle <_{lex} \langle c, d\rangle$, נניח בשלילה $\langle c, d\rangle <_{lex} \langle a, b\rangle$ ונראה סתירה. מההנחה נסיק $a <_A c \vee (a = c \wedge b <_B d)$, נפלג למקרים:
  - אם $a <_A c$: מהנחת השלילה $c <_A a \vee (a = c \wedge d <_B b)$. במקרה ש־$c <_A a$ אז $c <_A a \wedge a <_A c$ בסתירה לכך ש־$<_A$ יחס סדר חזק ובפרט אנטי־סימטרי חזק, ובמקרה ש־$a = c$ נקבל ש־$a <_A a$ שזו סתירה באופן דומה.

- אם $a = c \wedge b <_B d$: מהנחת השלילה $(a = c \wedge d <_B b) \vee a <_A c$. אם $a <_A c$ אז $a <_A a$ וזו סתירה לכך ש־$<_A$ אנטי־סימטרי חזק, ואם $b <_B d$ אז $d <_B b \wedge b <_B d$ בסתירה לכך ש־$<_B$ יחס סדר חזק ובפרט אנטי־סימטרי חזק. ■

## סעיף (ב)

נפריך. נבחר $A = \{1,2\}, B = \emptyset$ (הערה: הטענה מתקיימת לכל $B \neq \emptyset$). נבחר $<_B = \emptyset$ יחס סדר חזק (טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי חזק באופן ריק) ואת $<_A = \{\langle 1,2\rangle\}$ יחס סדר חזק בעל איבר מינימלי 1. נתבונן ביחס הסדר הלקסיקוגרפי על $A \times B = \emptyset$, כלומר על יחס הסדר $\emptyset$, ונניח בשלילה שקיים מינימלי $x \in A \times B$ ונסיק $x \in \emptyset$ שזו סתירה. ■

# שאלה 2

## סעיף (א)

יהי $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נגדיר את היחס: $R_f = \{\langle A,B\rangle \mid f(A) \subseteq f(B)\}$.

נוכיח $R_f$ יחס סדר אמ"מ $f$ חח"ע:

- $\Longleftarrow$: יחס סדר גורר חח"ע: יהי $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונניח בשלילה $R_f$ יחס סדר ו־$f$ לא חח"ע. מההנחה, $R_f$ אנטי־סימטרי וגם כן קיימות $A,B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך ש־$A \neq B$ אך $f(A) = f(B)$. מהכלה דו־כיוונית $f(A) \subseteq f(B) \wedge f(B) \subseteq f(A)$. מההנחה, לכל שתי קבוצות ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ובפרט $A,B$ מתקיים שאם $\langle A,B\rangle \in R_f \wedge \langle B,A\rangle \in R_f$ (שמתקיים לפי האמור לעיל) אז $A = B$, בסתירה לכך ש־$A \neq B$.
- $\Longrightarrow$: חח"ע גורר יחס סדר:
  - רפלקסיבי: יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח $AR_fA$, באופן שקול $f(A) \subseteq f(A)$ ובפרט $f(A) = f(A)$ המהווה פסוק אמת.
  - טרנזיטיבי: יהי $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נניח $AR_fB \wedge BR_fC$ ונוכיח $AR_fC$. מההנחה $f(A) \subseteq f(B)$ וגם $f(B) \subseteq f(C)$, כלומר $f(A) \subseteq f(C)$ ובאופן שקול $AR_fC$ כדרוש.
  - אנטי־סימטרי: יהיו $A,B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונניח $\langle A,B\rangle, \langle B,A\rangle \in R_f$, כלומר נסיק $f(A) \subseteq f(B)$ וגם $f(B) \subseteq f(A)$, נוכיח $A = B$. מהכלה דו־כיוונית $f(A) = f(B)$ ומהיות $f$ חח"ע $A = B$ כדרוש ■

## סעיף (ב)

נגדיר $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כאשר $F$ קבוצת הפונקציות חח"ע על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (כלומר לכל $f \in F$ מתקיים $f$ חח"ע). נשלול $H := \lambda f \in F.R_f$ חח"ע. נניח בשלילה שהיא חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר $f = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{1\}$ ונבחר $g = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{2\}$. נוכיח $H(f) = H(g)$ כדי להשלים את הדוגמה הנגדית. נניח בשלילה $H(f) \neq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, כלומר קיים $\langle A,B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ כך ש־$\langle A,B\rangle \notin H(f)$, כלומר $f(A) \nsubseteq f(B)$ אך מהצבה $\{1\} \nsubseteq \{1\}$ וזו סתירה, ובאופן דומה $H(g) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כלומר סה"כ $H(f) = H(g)$ כדרוש ■

# שאלה 3

## סעיף (א)

תהי $A$ קבוצה סופית, ויהי יחס סדר חלש $R$ על $A$. נוכיח קיום $a_M \in A$ כך ש־$a_M$ איבר מקסימלי.

משום שהקבוצה $A$ סופית, נוכל לסמן $|A| = n \in \mathbb{N}$. נניח בשלילה שאין מקסימום, כלומר נשלול לוגית ונקבל $\forall a \in A.\exists b \in A.aRb \wedge a \neq a$. נוכיח באינדוקציה על $n$ גודל הקבוצה שמתקיימת סתירה:

- בסיס ($n = 1$): נסמן $a = \{A\}$, ולכן $R$ בהכרח משתווה ל־$R = \{\langle a, a\rangle\}$, מהנחת השלילה קיים $a$ $b \neq a$ כך ש־$\langle a, b\rangle$ אך זו סתירה באופן מידי.
- צעד ($n > 1$): נניח בישנה סתירה על קבוצה בגודל $n$, ונוכיח שהסתירה מתקיימת על קבוצה בגודל $n + 1$. אם מתקיימת סתירה על קבוצה בגודל $n$, אזי שעליה קיים מקסימום. נתבונן באיבר $a \in A$, ונתבונן בקבוצה $A \setminus \{a\}$ באורך $n$ בעבורה קיים מקסימום $a_{M_-}$. לפי הנחת השלילה, קיים $a_{M_+}$ כך ש־$a_{M_-} R a_{M_+} \wedge a_{M_-} \neq a_{M_+}$. מטרנזיטיביות יחס הסדר $R$ נקבל ש־$a_{M_-} R a_{M_+}$ ומשום ש־$|A| = n + 1$, אזי בהכרח $a_{M_+} \in A \setminus \{a\}$. לפי הגדרת איבר מקסימום $a_{M_-}$ על הקבוצה $A \setminus \{a\}$, נסיק שלכל איבר $b$ ב־$A \setminus \{a\}$ מתקיים $\neg aRb$. מהטענות לעיל $a_{M_+} R a_{M_-} \wedge a_{M_-} R a_{M_+}$ ומהיות $R$ אנטי־סימטרי $a_{M_-} = a_{M_+}$ וזו סתירה לכך ש־$a_{M_-} \neq a_{M_+}$. ■

## סעיף (ב)

נראה דוגמה נגדית. נבחר את הקבוצה $A = \{1, 2\}$ ואת יחס הסדר $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$, בעל שני איברים מקסימליים $1, 2 \in A$. ■

# שאלה 4

## סעיף (א)

נגדיר $X$ קבוצת כל חלוקות $\mathbb{R}$. נגדיר $\sqsubset$ על $X$ ע"י:

$$\pi_1 \sqsubset \pi_2 \iff \forall Z \in \pi_2 \exists Y \in \pi_1 (Z \subseteq Y)$$

נוכיח ש־$\sqsubset$ יחס סדר חלש על $X$:

- רפלקסיביות: תהי $\pi \in X$, כלומר $\pi$ חלוקה של $\mathbb{R}$, ונוכיח $\pi \sqsubset \pi$, כלומר יהי $Z \in \pi$, ונוכיח קיום $Y \in \pi$ כך ש־$Z \subseteq Y$. נבחר $Z = Y$ וסה"כ $ZY$ כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהי $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ חלוקות של $\mathbb{R}$, נניח $\pi_1 \sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \sqsubset \pi_3$. נוכיח $\pi_1 \sqsubseteq \pi_3$. יהי $Z \in \pi_3$, צ.ל. קיום $Y \in \pi_1$ כך ש־$Z \subseteq Y$. מההנחה $\pi_2 \sqsubset \pi_3$ קיימת $Y_1 \in \pi_3$ כך ש־$Z \subseteq Y_1$, ומההנחה $\pi_1 \sqsubset \pi_2$ קיימת $Y_2 \in \pi_2$ כך ש־$Y_1 \subseteq Y_2$. נבחר $Y = Y_2$ וסה"כ $Z \subseteq Y_1 \subseteq Y$ ומטרנזיטיביות הכלה $Z \subseteq Y$ כדרוש.
- אי־סימטרי חלש: יהי $\pi_1, \pi_2$ חלוקות של $\mathbb{R}$, נניח $\pi_1 \sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \sqsubset \pi_1$ ונוכיח $\pi_1 = \pi_2$. נוכיח $\pi_1 \subseteq \pi_2$, ובאופן דומה יתקיים גם $\pi_2 \subseteq \pi_1$. יהי $Z \in \pi_1$ ונוכיח $Z \in \pi_2$, מההנחה $\pi_2 \sqsubset \pi_1$ נסיק קיום $Y_2 \in \pi_2$ כך ש־$Z \subseteq Y_2$ ומההנחה $\pi_1 \sqsubset \pi_2$, נסיק קיום $Y_1 \in \pi_1$ כך ש־$Y_2 \subseteq Y_1$, וסה"כ $Z \subseteq Y_2 \subseteq Y_1$. בפרט, $Z \subseteq Y_1$, ונניח בשלילה $Z \neq Y_1$, נסיק שמשום שהם באותה החלוקה $\pi_1$ אזי $Z \cap Y = \emptyset$ ובפרט מהכלה דו כיוונית $\forall x \in Z.x \notin Y$.

משום שהוא בחלוקה אז $X \neq \emptyset$ כלומר קיים $x \in X$, ומהטענות לעיל $x \in Y \wedge x \notin Y$ וזו סתירה. סה"כ $Z = Y_1$ , כלומר מהצבה במה שכתבנו $Z \subseteq Y_2 \subseteq Z$ ומהכלה דו כיוונית $Y_2 = Z$ ומשום ש־$Y_2 \in \pi_2$ סה"כ $Z \in \pi_2$ כדרוש. ■

## סעיף (ב)

דוגמה ל־$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in X$ כך ש־$\pi_1 \sqsubset \pi_2 \sqsubset \pi_3$:

$$\pi_1 = \{\{r\} \mid r \in \mathbb{R}\}, \pi_2 = \{[r, r+1) \mid r \in \mathbb{Z}\}, \pi_3 = \{[r, r+2) \mid r \in \mathbb{Z}_{\text{even}}\}$$

## סעיף (ג)

### *קווי*

היחס לא יחס סדר קווי. לדוגמה, בעבור החלוקות:

$$\pi_1 = \{[r, r+2) \mid r \in \mathbb{Z}_{\text{even}}\}, \pi_2 = \{[r, r+2) \mid r \in \{r \in \mathbb{R} \colon r \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}\}$$

מתקיים $\pi_1 \not\sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \not\sqsubset \pi_1$ (כי בעבור $[0,2)$ לא קיים $r \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$ כך ש־$[r, r+2) \subseteq [0,2)$ ולכן $\pi_1 \not\sqsubset \pi_2$ ובאופן דומה $\pi_2 \not\sqsubset \pi_1$) למרות ש־$\pi_1 \neq \pi_2$. ■

### *קיום איבר גדול ביותר*

קיים איבר גדול ביותר $\pi = \{\mathbb{R}\}$, כי יהי $\pi_\_ \in X$, נניח $\pi_\_ \neq \pi$ ונניח בשלילה ש־$\neg \pi_\_ \sqsubset \pi$ כלומר נניח בשלילה שקיים $Z \in \pi_\_$ כך שלא קיים $Y \in \pi$ בעבורו $Z \subseteq Y$, ולפיכך לכל $Y \in \pi$ (שקול $Y = \mathbb{R}$) $Z \not\subseteq Y$ כלומר $Z \not\subseteq \mathbb{R}$ בסתירה לכך ש־$Z \in \pi_\_$ בעוד $\pi_\_$ חלוקה של $\mathbb{R}$. ■

# שאלה 5

## סעיף (א)

יהיו $X, Y \neq \emptyset$ קבוצות, ונניח $\leq_X$ יחס סדר חלש על $X$. נגדיר את יחס הסדר $\preceq$ מעל קבוצת הפונקציות $Y \to X$ באופן ע"י $f \preceq g \iff \forall y \in Y. f(y) \leq_X g(y)$.

נניח $x_0 \in X$ איבר מקסימלי ב־$X$. נוכיח $f := \lambda y \in Y. x_0$ איבר מקסימלי ב־$Y \to X$. יהי $g \in Y \to X$. נוכיח $g = f \vee \neg g \leq_X f$, או באופן שקול לוגית $\neg g \leq_x f \implies g \neq f$ ולפי הגדרת איבר מקסימלי באופן שקול $f$ איבר מקסימלי ב־$x_0$, המהווה פסוק אמת בהתאם להנחה ■

## סעיף (ב)

יהיו קבוצות סדורות $\langle A, \leq_A \rangle, \langle B, \leq_B \rangle$, נגדיר פונקציה $h \colon A \to B$ שומרת סדר:

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \leq_A a_2 \iff h(a_1) \leq_B h(a_2)$$

נוכיח ש־$h$ המוגדרת באופן לפי $h \colon X \to (Y \to X), h = \lambda x \in X. \lambda y \in Y. x$ שומרת סדר (בעבור הקבוצות הסדורות $\langle X, \leq_X \rangle, \langle X \to Y, \preceq \rangle$) . יהיו $x_1, x_2 \in X$, נוכיח $h(x_1) \preceq h(x_2) \iff x_1 \leq_X x_2$:

$$
\begin{aligned}
& h(x_1) \preceq h(x_2) && && (1)\\
\iff & f := \lambda y \in Y.x_1 \preceq g := \lambda y \in Y.x_2 && (\beta \text{ rule}) && (2)\\
\iff & \forall y \in Y. f(y) \leq_X g(y) && (\preceq \text{ definition}) && (3)\\
\iff & \forall y \in Y. x_1 \leq_X x_2 && (\beta \text{ rule}) && (4)\\
\iff & x_1 \leq_X x_2 && && (5)
\end{aligned}
$$

כמבוקש ■

## סעיף (ג)

נניח $X = \{0,1\}, Y \neq \emptyset$. נתבונן בקבוצות הסדורות $\langle \mathcal{P}(Y), \subseteq \rangle, \langle Y \to \{0,1\}, \preceq \rangle$.

יחס הסדר $\preceq$ מוגדר באמצעות יחס הסדר $\leq_X$ החלש על $X$, ויתכנו שתי אפשרויות לזהותו:

$$\leq_X = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle\} \vee \leq_X = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$$

בה"כ זו האפשרות הראשונה (ובפרט $0 \leq_X 1$).

נוכיח ש־$h$ חח"ע ושומרת סדר, בעבור $h$ המוגדרת באופן הבא:

$$h \colon (Y \to \{0,1\}) \to \mathcal{P}(Y). h = \lambda f \in Y \to \{0,1\}. \{y \in Y : f(y) = 1\}$$

### *שומרת סדר*

יהי $f, g \in Y \to \{0,1\}$. נוכיח $h(f) \subseteq h(g) \iff f \preceq g$.

- $\Longrightarrow$: נניח $f \preceq g$, נוכיח $h(f) \subseteq h(g)$. מתוך ההנחה, $\forall y \in Y. f(y) \leq_X g(y)$. נניח בשלילה קיים $y \in h(f) \wedge y \notin h(g)$. לפי הטווח של $h$ המוגדר לעיל, $y \in Y$, כלומר נסיק $f(y) \leq_X g(y)$. ידוע $g(y) = 0 \vee g(y) = 1$, ולכן נוכל לפלג למקרים:
  - אם $g(y) = 0$, אזי $f(y) = 0$ לפי הגדרת הגדרת יחס הסדר $\preceq$, ולכן $y \notin h(f)$ לפי הגדרה וזו סתירה.
  - אם $g(y) = 1$, אזי $y \in h(g)$ לפי הגדרת $h$ וזו סתירה.

  וסה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים כלומר $g(f) \subseteq h(g)$ כדרוש.
- $\Longleftarrow$: נניח $h(f) \subseteq h(g)$, נוכיח $f \preceq g$. מתוך ההנחה, $\forall y \in h(f). y \in h(g)$ כלומר $\forall y. f(y) = 1 \implies g(y) = 1$ לפי הצבה בהגדרת $h$. נניח בשלילה $\neg f \preceq g$, כלומר נניח בשלילה $\exists y \in Y. \neg f(y) \leq_X g(y)$ ונראה סתירה. ידוע $f(y) = 0 \vee f(y) = 1$, ולכן נוכל לפלג למקרים:
  - אם $f(y) = 0$, אז בין אם $g(y) = 0$ או ש־$g(y) = 1$ מתקיים $f(y) = 0 \leq_X g(y)$ לפי הגדרת $\leq_X$.
  - אם $f(y) = 1$, אז לפי הטענה שהנחנו $g(y) = 1$, כלומר לפי הגדרת $\leq_X$ מתקיים $f(y) = 1 \leq_X 1 = g(y)$.

  סה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים כלומר $f \preceq g$ כדרוש. ■

### *על*

תהי $Y' \in \mathcal{P}(Y)$, כלומר נניח $Y' \subseteq Y$. נוכיח קיום $f \in Y \to \{0,1\}$ כך ש־$h(f) = Y'$. נבחר:

$$\text{f}=\lambda y\in Y.\begin{cases}1 & \text{if } y\in Y'\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

לפיכך, לפי תחשיב למדא: $h(f)=\{y\in Y\mid f(y)=1\}=\{y\in Y\mid y\in Y'\}=Y'$ כדרוש. $\blacksquare$

### *חח״ע*

יהיו $f,g\in Y\to\{0,1\}$ פונקציות, נניח $f\neq g$ ונוכיח $h(f)\neq h(g)$. מההנחה קיים $\tilde{y}\in Y$ כך ש־$f(\tilde{y})\neq g(\tilde{y})$. נניח בשלילה $h(f)=h(g)$, לפיכך:

$$\begin{aligned}
& h(f)=h(g) && && (1)\\
\iff & \{y\in Y\mid f(y)=1\}=\{y\in Y\mid g(y)=1\} && (\beta\text{ rule}) && (2)\\
\iff & \forall y\in Y.f(y)=1\longleftrightarrow g(y)=1 && (=\text{definition}) && (3)
\end{aligned}$$

ובפרט עבור $y=\tilde{y}$, כלומר $g(y)=1\longleftrightarrow f(y)=1$. נפלג למקרים: אם $f(y)=1$ אזי $g(y)=1$ ומטרנזיטיביות $f(y)=g(y)$ וזו סתירה. אם $f(y)=0$ אז $\neg g(y)=1$, ומשום ש־$g(y)\in\{0,1\}$ אזי $g(y)=0$ וסה"כ $f(y)=g(y)$ וזו סתירה. לכן, בכל המקרים הגענו לסתירה כלומר $h(f)\neq h(g)$ כדרוש. $\blacksquare$

## שאלה 6

### סעיף (א)

נגדיר על הקבוצה $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ את היחס הבא:

$$f\leq^* g\iff\exists n\in\mathbb{N}.\forall m\geq n.f(m)\leq_{\mathbb{N}}g(m)$$

כאשר $\leq_{\mathbb{N}}$ הוא יחס הסדר הסטנדרטי על הטבעיים. נפריך $\leq^*$ יחס סדר אנטי־סימטרי חלש, ע"י הפרכת אנטי־סימטריות. נבחר:

$$\text{f}=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}1 & \text{if } n=0\\ 0 & \text{if } n=1\\ n & \text{else}\end{cases},\ g=id_{\mathbb{N}}$$

בעבור $n_1=2$ מתקיים $\forall m\geq n_1.f(n)\leq_{\mathbb{N}}g(m)\wedge g(m)\leq_{\mathbb{N}}f(n)$, כלומר $f\leq^* g\wedge g\leq^* f$ אך $f\neq g$ כי $f(0)=1\neq 0=g(0)$. סה"כ סתירה ולכן $\leq^*$ אינו יחס סדר חלש $\blacksquare$

### סעיף (ב)

נגדיר את היחס $R$ על $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$fRg\iff\exists n\in\mathbb{N}.\forall m\geq n.f(m)=g(m)$$

נוכיח $R$ יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהי $f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נוכיח $fRf$. לפי הגדרה, $\forall m\in\mathbb{N}.f(n)=f(n)$, ובפרט בעבור $m\geq n=1\in\mathbb{N}$, כלומר $(n=1)\quad\forall m\geq n.f(n)=f(n)$ כדרוש.

- סימטריות: יהי $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח $fRg$, כלומר קיים $n_1$ כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) = g(m)$ ומקומוטטיביות הזהות על הטבעיים $\forall m \geq n_1 g(n) = f(n)$ כלומר אשר צ.ל. מתקיים בעבור $n = n_1$.
- טרנזיטיביות: יהי $f, g, h \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $fRg \wedge gRf$ ונוכיח $fRh$. מההנחה קיימים $n_1, n_2$ כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) = g(n)$ וגם $\forall m \geq n_2.g(n) = h(n)$. בה"כ $n_1 \geq n_2$, ובפרט הטענה האחרונה מתקיימת בעבור $m \geq n_1 \geq n_2$. ע"פ חוקי הלוגיקה לקיבוץ כמתים $\forall m \geq n_1.f(m) = g(m) \wedge g(m) = h(m)$. מטרנזיטיביות יחס הזהות על $\mathbb{N}$ נגרר $\forall m \geq n_1.f(m) = h(m)$ וסה"כ מתקיים הדרוש בעבור $n = n_1$. ■

## סעיף (ג)

נתבונן בקבוצה $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$, עליה נגדיר את היחס $\leq$ באופן הבא:

$$[f]_R \leq [g]_R \iff f \leq^* g$$

### *בלתי תלוי בנציגים*

יהי $f, f', g, g' \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח $f \leq^* g \wedge f' \in [f]_R \wedge g' \in [g]_R$, נוכיח $f' \leq^* g'$. מההנחה $f'Rf \wedge g'Rg$, כלומר קיימים $n_1, n_2, n_3$ עבורם:

$$\forall m \geq n_1.f(n) = f'(n) \wedge \forall m \geq n_2.g(n) = g'(n) \wedge \forall m \geq n_3.g(n) = f(n)$$

בה"כ $n_1 \geq n_2, n_2 \geq n_3$, ומטרנזיטיביות יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$ נקבל שכל הטענות מתקיימות בעבור $m \geq n_1$;

$$\forall m \geq n_1.f'(m) = f(m) \wedge g'(m) = g(m) \wedge g(m) = f(m)$$

כלומר ע"פ טרנזיטיביות יחס הזהות על $\mathbb{N}$, נגרר $\forall m \geq n_1.f'(m) = g'(m)$ כדרוש. ■

### *יחס סדר חלש*

- רפלקסיביות: יהי $[f]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$, נוכיח $[f]_R \leq [f]_R$, כלומר נוכיח $f \leq^* f$. לפי שוויון פונקציות, $\forall m \in \mathbb{N}.f(n) = f(n)$, ובפרט בעבור $m \geq n = 1 \in \mathbb{N}$, ובהכללה עבור יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$, כלומר $\big(n = 1\big) \quad \forall m \geq n.f(n) \leq_{\mathbb{N}} f(n)$ כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהי $[f]_R, [g]_R, [h]_R \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $[f]_R \leq [g]_R, [g]_R \leq [h]_R$ ונוכיח $[f]_R \leq [g]_R$ ובאופן שקול נוכיח $f \leq^* g$. מההנחה $f \leq^* g, g \leq^* h$ קיימים $n_1, n_2$ כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) \leq_{\mathbb{N}} g(n)$ וגם $\forall m \geq n_2.g(n) \leq_{\mathbb{N}} h(n)$. ובה"כ $n_1 \geq n_2$, ובפרט הטענה האחרונה מתקיימת בעבור $m \geq n_1 \geq n_2$. ע"פ חוקי הלוגיקה לקיבוץ כמתים $\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} g(m) \wedge g(m) \leq_{\mathbb{N}} h(m)$. מטרנזיטיביות יחס הסדר $\leq_{\mathbb{N}}$ נגרר $\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} h(m)$ וסה"כ מתקיים הדרוש בעבור $n = n_1$.
- אנטי־סימטריות: יהי $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$. נניח $[f]_R \leq [g]_R \wedge [g]_R \leq [f]_R$, נוכיח $[f]_R = [g]_R$. מההנחה, $f \leq^* g \wedge g \leq^* f$. נסיק קיום $n_1, n_2$ כך ש־$\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} g(m)$, $\forall m \geq n_2.g(m) \leq_{\mathbb{N}} f(m)$. נתבונן ב־$n = \max\{n_1, n_2\}$ וסה"כ $\forall m \geq n.g(m) \leq f(m) \wedge f(m) \leq g(m)$, ומהאנטי־סימטריות יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$ נקבל $\forall m \geq n.g(m) = f(m)$. באופן שקול, $fRg$, כלומר $[f]_R = [g]_R$ כדרוש. ■

### *הזהות חסם מלעיל על הפונקציות הקבועות*

נגדיר $c_n\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ,$c_n=\lambda x\in\mathbb{N}.n$ ונגדיר $B=\{[c_n]\colon n\in\mathbb{N}\}$. יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $[c_n]_R\leq[id_{\mathbb{N}}]_R$. באופן שקול, נוכיח $c_n\leq^* id_{\mathbb{N}}$ כלומר קיום $a\in\mathbb{N}$ בעבורו $\forall m\geq a.c_n(m)\leq id_{\mathbb{N}}(m)$. נבחר $a=n$, נקבל צ.ל. $\forall m\geq n.c_n(m)\leq id_{\mathbb{N}}(m)$ ובאופן שקול: $\forall m\geq n.n\leq m$ כלומר $m\geq n \implies m\geq n$ המהווה פסוק אמת כדרוש. ■

### *האם מחלקת השקילות של הזהות נמצאת ב־$B$?*

לא. נניח בשלילה שכן. לפיכך, נסיק מהנחת השלילה:

$$\begin{aligned}
&[id_{\mathbb{N}}]\in B && && (1)\\
\iff&\exists n\in\mathbb{N}.[c_n]_R=[id_{\mathbb{N}}]_R && \big(B\text{ definition}\big) && (2)\\
\iff&\exists n\in\mathbb{N}.c_nRd_{\mathbb{N}} && \big([f]_R=[g]_R\longleftrightarrow fRg\big) && (3)\\
\iff&\exists n\in\mathbb{N}.\exists a\in\mathbb{N}.\forall m\geq a.c_n(m)=g(m) && \big(R\text{ definition}\big) && (4)\\
\iff&\exists n\in\mathbb{N}.\exists a\in\mathbb{N}.\forall m\geq a.n=m && \big(c_n,id_{\mathbb{N}}\text{ definition}\big) && (5)
\end{aligned}$$

נתבונן ב־$m=a+n\geq a$, ותחת הנחת השלילה מתקיים $m=a+n=n$, נחסר אגפים ונקבל $a=0$. לכן $\forall m\geq 0.n=m$, ובפרט בעבור $m=n+1\geq 0$, כלומר $n=n+1$. נחסר אגפים ונקבל $1=0$ וזו סתירה. ■

~ סוף ~