מתמטיקה בדידה – עוצמות 5

שחר פרץ

11 למרץ 2024

חזרה ותזכורות

- הגדרנו $2^{\aleph_0} := |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$
- הגדרנו $\aleph := |\mathbb{R}|$ – לעיתים נקרא עוצמת הרצף
- הוכחנו כי $2^{\aleph_0} = \aleph$ (שניהם סימונים שימושיים, בהקשרים שונים)
- כלומר $\aleph = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{N} \to \{0,1\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

משפט: מתקיים כי $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ (הוכחנו משפט דומה על $\mathbb{N}$).

הוכחה. נוכיח באמצעות זיווג. משום ש־$|A' \times B'| = |A \times B| \impliedby |A'| = |A| \land |B'| = |B|$ אזי מאחר ו־$|\mathbb{R}| = |\mathbb{N} \to \{0.1\}|$, נוכל למצוא זיווג $\varphi\colon (\mathbb{N} \to \{0,1\}^2) \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$. אינטואיציה: f היא סדרה של $0,1$ וגם g היא סדרה כזו, נרצה לבנות באופן חח"ע סדרה שתבנה מהסדרות האלו. נסביר את האינטואיציה:

$$f\colon f(0), f(1), f(2) \dots$$

$$g\colon g(0), g(1), g(2) \dots$$

נגדיר:

$$\varphi = \lambda\langle f, g\rangle \in (\mathbb{N} \to \{0,1\})^2.\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} f(\frac{n}{2}) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ g(\frac{n-1}{2}) & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נוכיח ש־φ חח"ע. יהיו $\langle f, g\rangle, \langle f', g'\rangle \in (\mathbb{N} \to \{0,1\})^2$ שונים, ונוכיח $\varphi(\langle f, g\rangle) \neq \varphi(\langle f', g'\rangle)$ (אי שוויון פונקציות). בה"כ נניח $f \neq f'$ (מהטענת המרכזית של זוגות סדורים). לכן, קיים $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(\tilde{n}) \neq f'(\tilde{n})$. נסמן $\tilde{n} = n$ כי אין לי כוח לכתוב כל פעם. צ.ל. $\exists m \in \mathbb{N}$ כך ש־$\varphi(\langle f, g\rangle)(m) \neq \varphi * \langle f', g'\rangle)(m)$. נבחר $m = 2n$, לכן $2 \mid m$, כלומר $m \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, וסה"כ

$$\varphi(\langle f, g\rangle)(m) = \frac{m}{2} = \frac{2n}{2} = n = f(n) \neq f'(n) = \varphi(\langle f', g'\rangle)$$

וקבילנו φ חח"ע כדרוש.
נוכיח φ על. תהי $h\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$, נגדיר:

$$h = \lambda n \in \mathbb{N}.h(2n),\ \ g = \lambda n \in \mathbb{N}.h * 2n_1()$$

. נוכיח ש־$\varphi(\langle f, g\rangle = g$. אלו שתי פונקציות בעלות אות התחום, $\mathbb{N}$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נקבל

$$h(\langle f, g\rangle)(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ g(\frac{n-1}{2}) & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = \begin{cases} h(n) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ h(n) & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

■

משפט: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ לכל $n \in \mathbb{N}_+$

משפט: $|(a,b)| = |[a,b]| = |(a,b)| = |[a,b)| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ נוכיח כי $\forall (a,b) \leq |[a,b(\leq |[a,b]| \leq |\mathbb{R}| \leq |(a,b)|)$, שיגמור לנו הכל עם קש"ב. הרוב נובע מהכלה או שקל להוכיח. נוכיח את השוויון האחרון. מתקיים $|(a,b)| = |(-1,1)|$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

וסה"כ $g\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$

חשבון עוצמות

הנושא האחרון בתוך עוצמות, שזה הנושא האחרון בתוך תקב"צ. **הגדרה:** יהיו A, B קבוצות, נגדיר:

- $|A| + |B| := |(A \times \{0\}) \uplus (B \times \{1\})|$
- $|A \cdot B| := |A \times B|$
- $|A|^{|B|} := |B \to A| = |A^B| = |{}^B A|$

הערה: אם A, B זרות, אז $|A| + |B| = |A \uplus B|$
הערה נוספת: אלו ההגדרות היחידות של חשבון עוצמות, **חיבור וחיסור עוצמות אינם מוגדרים**, לא בקורס הזה ולא מחוצה לו. **משפט (חוקים בסיסיים):** לכל שלוש עוצמות a, b, c מתקיים:

- קומטטיביות (חילופיות): $a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a$
- אסוציאטיביות (קיבוציות): $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ a + (b + c) = (a + b) + c$
- דיסטרבוטיביות (פילוג): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- טענות על איברים קטנים: $a + 0 = a,\ a \cdot 1 = a,\ a \cdot 0 = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}_+.\underbrace{a + a + \cdot + a}_{ntimes} = a \cdot n,\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{ntimes} = a^n$

1. נוכיח $a \cdot b = b \cdot a$:

הוכחה. יהיו A,B קבוצות ונסמן $a=|A|,\ b=|B|$. צ.ל. $|A\times B|=|B\times A|$. נבחר $f\colon A\times B\to B\times A$ המוגדרת לפי $f(\langle x,y\rangle)=\langle y,x\rangle$. f זיווג. ■

2. נוכיח $a+(b+c)=(a+b)+c$.

הוכחה. יהיו A,B,C קבוצות זרות כך ש־$a=|A|,\ b=|B|,\ c=|C|$. לכן:

$$a+(b+c)=|A\uplus(B\uplus C)|=|(A\uplus B)\uplus C|=(a+b)+c$$

כדרוש. ■

3. ידוע $A\times(B\uplus C)=(A\times B)\uplus(A\times C)$ ומכאן דיסטריבוטיביות. 4. תהי A קבוצה כך ש־$a=|A|$. נוכיח כמה טענות:

(1) $a+0=|A\uplus\emptyset|=|A|=a$ ■

(2) $a\cdot 0=|A\times\emptyset|=|\emptyset|=0$ ■

(3) $a\cdot 1=|A\times\{0\}|=|A|\ \ (ex.\ f=\lambda x\in A.\langle x,0\rangle)$ ■

5. את הטענה האחרונה אפשר להוכיח באינדוקציה. מתנה לשיעורי הבית.

טענה: לכל עוצמה a מתקיים $a^0=1,\ 1^a=1$, ולכל עוצמה $a\neq 0$ מתקיים $0^a=0$. תהי a עוצמה כלשהי. לכן $a^0=|\emptyset\to A|$, אך קיימת פונקציה יחידה כזו (הפונקציה הריקה). ■

תהי a עוצמה, לכן $a^1=|A\to\{0\}|$, אך קיימת פונקציה יחידה כזו (הפונקציה הקבועה). ■

תהי $a\neq 0$ עוצמה, לכן לא קיימת פונקציה $A\to\{0\}$ ועל כן $0^a=0$. ■

הבאהבאבהאאה מי צריך פורמליזם, שהמרצה מגדירה $a=|A|$