לינארית 5 ~ משפט קיילי־המילטון

שחר פרץ

21 באפריל 2025

REMINDERS .... (1)

הגדרה 1. מטריצה ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.

הגדרה 2. ט"ל $T\colon V\to V$ משולשית אם ישנו בסיס $B\subseteq V$ כך ש־$[T]_B$ משולשית.

משפט 1. (קיילי המילטון) תהי $T\colon V\to B$ ט"ל (V נ"ס) או $A\in M_n(\mathbb{F})$, ו־$f_A(x)=f_T(x)$ הפ"א, אז $f_A(A)=0,\ \ f_T(T)=0$.

משפט 2. אם A מייצגת של העתקה T. ו־$f\in\mathbb{F}[x]$, אז $f(T)=0\iff f(A)=0$.

(באופן כללי, עבור כל פולינום).

משפט 3. ט"ל משולשית ו־A ניתנת לשילוש, אמ"מ הפ"א האופייני שלהם מתפצל לגורמים לינארים.

PROOF FOR CAYLEY–HAMILTON THEOREM .... (2)

הוכחה. נוכיח את המשפט בשלושה שלבים –

- נניח ש־T ניתנת לשילוש. אזי, קיים בסיס $B=:(v_1\dots v_n)$ כך ש־$[T]_B$ משולשית (עליונה). זאת מתקיים אמ"מ $\forall i\in[n]\colon Tv_i\in\operatorname{span}(v_1\dots v_i)$. נפנה להוכיח את משפט קיילי־המילטון למקרה זה.

  הוכחה. – בסיס: בעבור $n=1$, אז קיים $\lambda\in\mathbb{F}$ כך ש־$f_T(T)=T-\lambda I=0$ (העתקה לינארית חד ממדית היא כפל בסקלר). בפרט $\forall v\in V\colon (T-\lambda)v=0$.

  – צעד: נניח ש־$B=(v_1\dots v_n,v_{n+1})$ שעבורו $[T]_B$ משולשית. קיים תמ"ו $W=\operatorname{span}(v_1\dots v_n)$ כך ש־$\dim W\le\dim V$, ועבורו נכון $\forall w\in W\colon Tw\in W$ (נכון עבור וקטורי הבסיס, ונכון לכל $w\in W$ מלינאריות). נגדיר את $T|_W\colon W\to W$ הצמצום של T ל־W. ידוע ש־$T|_w$ ניתנת לשילוש ולכן מקיימת את תנאי האינדוקציה. לכן, $\forall w\in W\colon f_{T|_W}(T)(w)=0$. אזי $f_{T|_W}(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$ וסה"כ $f_T(x)=(x-\lambda_{n+1})f_{T|_W}(x)$ וקיבלנו $\forall w\in W\colon f_T(T)(w)=0$.

  מספיק להראות ש־$\forall v\in V\colon (T-\lambda_{n+1})v\in W$. למה? כי:

$$f_T(T)(v)=\left(\prod_{i=1}^n(T-\lambda_i)\right)(T-\lambda_{n+1})(v)$$

מלינאריות, מספיק להראות ש־$(T-\lambda_{n+1})(v_{n+1})\in W$, שכן זה מתקיים על כל בסיס אחר. אך זה ברור – עבור $[T]_B$ העמודה האחרונה היא:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(v_{n+1})=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n+\lambda_{n+1}v_{n+1}\implies (T-\lambda_{n+1})(v_{n+1})=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n\in W$$

■

- נוכיח בעבור מטריצה משולשית/ניתנת לשילוש.

הוכחה. אם A משולשית, אז $f_A(x)=f_{T_A}(x)$ כאשר $T_A\colon\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת ע"י $T_A(v)=Av$, ואז T_A ניתנת לשילוש וסיימנו.

אם A ניתנת לשילוש, אז היא דומה למשולשית, והן בעלות אותו הפולינום האופייני. אז חזרה לתחילת ההוכחה. ■

- עבור T כללית או A כללית.

הוכחה. נניח $A=[T]_B$ עבור בסיס B, וידוע $f_T(x)=f_A(x)$. ידוע ש־A ניתנת לשילוש אמ"מ $f_A(x)$ מתפצל. טענה מהעתיד הלא רחוק: לכל שדה $\mathbb{F}$ קיים שדה $K\supseteq\mathbb{F}$ סגור אלגברית (כל פולינום מעל שדה סגור אלגברית מפתצל). על כן, ניתן לחשוב על

$A \in M_n(\mathbb{F})$ כמו $A \in M_n(K)$. הפולינום האופייני מעל K הוא אותו הפולינום האופייני מעל $\mathbb{F}$. לכן הוא מתפצל (מעל K), ולכן הוא דומה למשולשית, ומהמקרה הראשון $f_A(A) = 0$. זאת כי $f_A(A)$ לא תלוי בשדה עליו אנו עובדים, וסה"כ הוכחנו בעבור מטריצה כללית, ולכן לכל ט"ל. ■

■

הערה על שדות סגורים אלגברית. (אולי לא נאמר בקורס) העובדה שלכל שדה יש שדה שסגור אלגברית – טענה שתלויה באקסיומת הבחירה. הסגור האלגברי הוא יחיד.

(3) .... RINGS

מה זה אובייקט אלגברי? דוגמאות: תמורות, חבורות, שדות, מרחבים וקטורים, ועוד. הרעיון – "Data עם אקסיומות".

הגדרה 3. חוג עם יחידה הוא קבוצה עם שתי פעולות, כפל וחיבור, ניטרלים לפעולות (0, 1) כך שמתקיימות כל אקסיומות השדה למעט (אולי) קיום איבר הופכי, וקומטטיביות הכפל.

אנחנו נתעניין ספצפית בחוגים קומטטיבים, כלומר, בהם הכפל כן קומטטיביים. המטריצות הריבועיות מעל אותו הגודל, לדוגמה, הוא חוג שאיננו קומטטיבי. החוג ה"בסיסי ביותר" – חוג השלמים (אין הופכי). ישנם חוגים בלי יחידה (לדוגמה הזוגיים בלי יחידה), לא נדבר עליהם.

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד