

חדו"א 1A ~ תרגילים בית 9

שחר פרץ

17 בינואר 2026

..... (1)

נתבונן בפונקציה הבאה עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ כלשהם:

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נמצא עבור אילו α, β הפונקציה רציפה, גזירה, גזירה ברציפות, או גזירה פעמיים ב-0.

• **רציפה:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_+$. נוכיח: הוכחה.

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot (-1) < \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}_{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} < \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot 1 = 0$$

• **גזירה:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

- $y = \sqrt[k]{\frac{2}{k\pi}}, x = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{2k\pi}}$. יהיו $\delta > 0$ נוקבה של 0 נוכל לבחור נוכל לבוחר x כך ש- y , x בסביבה. ואז: ומארכימדיניות קיימים k גדולים דיו כך ש- y , x בסביבה. ואז:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \right| = \left| \frac{\cancel{x} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\cancel{x}} - \frac{\cancel{x} \sin\left(\frac{1}{y^\alpha}\right)}{\cancel{x}} \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin(\pi k) \right| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

סתירה לקריטריון קושי.

- גזיר: $\beta \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = 0$$

כאשר השווינו האחרון נבע מרציפות שכבר הוכחנו.

• **גזירה ברציפות:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, שכן הנגזרת ב-0 $= f'(0)$ הוכחנו, ומחוקי גזירה לכל $0 \neq x$:

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) - \alpha \cos\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) x^{\beta-\alpha-1}$$

נוכל להפעיל את אותם הנימוקים לרציפות שהראינו קודם לכן כאשר המעריכים יהיו לפחות 1. כלומר - נדרש $1 - \alpha - 1 \geq \beta - 1$ וגם $\beta - 1 \geq 2 \wedge \alpha \leq \beta - 1$. סה"כ $\beta - 1 \geq 2$.

• **גזירה פעמיים:** נשאף לגזור את הפונקציה הרציפה שקיבלו לעיל. נדרש $2 > \alpha + 1 \wedge \alpha > \beta$. זאת כי זה שקול לכך $\beta - 1 \in \mathbb{N}_2$, תנאי הכרחי ומספיק להיות הפונקציה לעיל גזירה ב-0 בעבר הוכחה דומה להוכחה הקודמת של גזירות. ■

..... (2)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה. נוכיח מספר טענות.

(א) נניח f מחזורית על מחזור T . נוכיח f' מחזורית עם מחזור T .

הוכחה. נוכיח לפि הגדירה. יהי $k \in \mathbb{Z}$. ממחוזריות $f(x) = f(x + kT)$ לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + kT) - f(x + kT)}{x_0 + kT - (x + kT)} = \lim_{x \rightarrow x_0 + kT} \frac{f(x_0 + kT) - f(x)}{(x_0 + kT) - x} = f'(x_0 + kT)$$

(אין מניעה להחליף משתנה בגבול, זה כמו הרכבה, ו- f' גזירה ולכן רציפה ב- x_0 קלומר מותר להרכיב). סה"כ מהגדירה f' בעלת מחוזר T .

(ב) אם f זוגית אז f' אי-זוגית.

הוכחה. נוכיח לפि הגדירה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(-x_0) - f(-x)}{x_0 - x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{x_0 + x} = -\lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{(-x_0) - x} = -f'(-x_0)$$

... (3) ...

nocich at ha-teuna habah:

$$(x^n \log x)^{(n)} = n! \left(\log x + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}_0$.

- **בסיס:** עבור $0 = n$ נקבל שהסכום ריק קלומר $0!x^0 \log(x+0) = \log x = (x^0 \log x)^{(0)}$ כנדרש.
- **צעד:**

$$(x^{n+1} \log x)^{(n+1)} = \left((x^{n+1} \log x)^{(n)} \right)'$$

$$\frac{n!}{x}$$

... (4) ...

נפריך את הטענה הבאה: אם $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה, אז f' רציפה ב- (a, b) .

הפרכה. נתבונן בדוגמה הנגדית הבאה: $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ המוגדרת להיות $f(0) = 0$ בתחום $(-1, 1)$. היא גזירה ב- 0 ולא רציפה בו מניימוקים שהועלו בשאלת 1, וכן גזירה ורציפה ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ מהרכבת אלמנטריות.

... (5) ...

nocich shel- $x = \cos x$ יש פתרון ממשי אחד בדיקוק.

הוכחה. נגידיר את הפונקציה $f(x) = x - \cos x$

- **קיים:** נוכיח ש- $f(x) = x - \cos x$ מתאפסת איפשהו. אפשר לחשב ולמצוא $f(0) = -1$ וכן $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ סה"כ משום ש- f רציפה (חיבור אלמנטריות) משפט ערך הביניים קיים $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ כך $f(x) = 0$.

- **יחידות:** נראה ש- $f(x) = x - \cos x$ מונוטונית עולה. נגזר ונקבל $x - \sin x = 1 - \sin x$ המשום ש- $f'(x) = 1 - \sin x \in [0, 2]$. הינה גם עולה חזק שכן יש הנזרת מתאפסת רק ב- $x_0 = 0$ נקודות. סה"כ אם $x = y$ אז $f(x) = f(y) = 0$ כדרוש.

(6)

נתונה $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ כלשהי. נוכיח ונפריך מספר טענות:

(א) נניח $x \in [-1, 1]$ ובעור כל $|f(x)| \leq |\tan x|$ כלשהו. אז f גזירה ב-0.

הפרכה. נתבונן ב- $|x| < x$. ראשית כל, נוכיח $\tan x < x$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. נתבונן בפונקציה $f(x) = x - \tan x$ ש- $\sec x = \frac{1}{\cos x} \in (1, \frac{\pi}{2})$ מותקיים $\sec^2 x > 1 - \sec^2 x = 1 - \cos^2 x > 0$ ומכיון $\sec^2 x > 1$ ו- $\sec x > 1$ סה"כ $f'(x) = 1 - \sec^2 x < 0$ יורדת בתחום, וכשנציג נקבל $f(x) = 1 - \tan x < 0$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ וסה"כ באותו התחום $f(x) < 0$ (מתחילה ב-0 וירדת ממש). מכאן $x - \tan x < 0$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. נסיק שלכל x בסביבת $\frac{\pi}{2}$ נקובה של 0 מתקיים $x < |\tan x| < |x|$. ספציפית עבור $x = |x|$ נקבעו $x - \tan x = 0$ נגיד $x = g(x)$. משום $x - \tan x > 0$ נקבע $x > \frac{\pi}{2}$ לא גירה ב-0, וסיימנו. ■

(ב) נניח $|f(x)| \leq |1 - \cos x|$ ובעור כל $x \in [-1, 1]$. אז f גזירה ב-0.

הוכחה. אפשר לדעת $f(0) = 0$ וסתירה. נראה שהגבול קיים ע"י כך שנמצא את ערכו (ספרויילר: 0)

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{x}}_{\cos^2 x < |\cos x|} = \dots$$

נטפל בגבול שנשאר בנפרד. ניעזר בכך ש- $\cos x \in (-1, 1)$ ככלומר

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{|1 - \cos x|}{|x|} < \frac{1 - \cos x^2}{|x|} = \frac{\sin^2 x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 1 \cdot 0 = 0$$

סה"כ ממשפט הסנדוויץ', בגלל ש- $\frac{f(x)}{x}$ חסום משנה צידי בגבול השוואן ל-0 (משני צידי כי ביצענו את החישובים לעיל בערך מוחלט), נקבל $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$. חוזר אל הנגזרת בהתחלה, קיבלנו:

$$\dots = 0 + 0 = 0$$

כלומר $f'(0)$ מוגדר וערך 0. ■

שחור פראץ, 2026

צופיף כ-LATEX ווציא בפתרונות תוכה חופשית בלבד