אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 10

30 בדצמבר 2025

.1

(א) הוכיחו ש- $\mathbb{R}^4 = \text{span}(e_1, e_2) \oplus \text{span}(e_3) \oplus \text{span}(e_4)$ (כאשר $e_1, \dots, e_4$ הבסיס הסטנדרטי).

(ב) מיצאו דוגמה למרחב וקטורי V ותתי מרחבים $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ כך ש- $V = U_1 + \dots + U_k$ ו- $U_i \cap U_j = 0$ לכל $i \neq j$, אבל V אינו סכום ישר של $U_1, \dots, U_k$.

(ג) הוכיחו ש- $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ אם ורק אם $V = U_1 + \dots + U_k$ וגם לכל $1 \leq i \leq k$,

$$U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = 0.$$

.2 יהיו $A, B \in M_n(F)$ כך ש- B הפיכה. הוכיחו שלמטריצות AB ו- BA יש אותם ערכים עצמיים.

.3 תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה נילפוטנטית (כלומר $A^k = 0$ ל- $k \in \mathbb{N}$ כלשהו) צמודה לעצמה. מיצאו את A.

.4

(א) תהי $H \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה צמודה לעצמה עם $H^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. הראו כי $H^2 = I$.

(ב) הראו כי זה לא נכון עבור H שאינה צמודה לעצמה.

.5

~~(א)~~ נניח ש- $A \in M_n(\mathbb{C})$ מקיימת $\langle Av, v\rangle = 0$ לכל $v \in \mathbb{C}^n$. הוכיחו ש- $A = 0$. (רמז: התבוננו ב $\langle A(u+v), u+v\rangle, \langle A(u+iv), u+iv\rangle$).

~~(ב)~~ הראו שהסעיף הקודם לא נכון מעל $\mathbb{R}$.

~~(ג)~~ הראו שאם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מקיימת $\langle Av, v\rangle = 0$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$ אז A אנטי סימטרית, כלומר $A^t = -A$.

~~6.~~ תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. הוכיחו כי A נורמלית אם ורק אם לכל $v \in \mathbb{C}^n$ מתקיים $\|A^*v\| = \|Av\|$.

7. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה משולשית עליונה ונורמלית. הוכיחו ש- A אלכסונית.