מבנ"ת 1

שחר פרץ

17 במרץ 2025

מרצה: עמית וינשטיין

INFO .... (1)

יהיו תרגילים מעשיים ותרגילים תיאורטיים. התרגילים שנעשו – אלו התרגילים של הפקולטה. נלמד חצי על עמית וחצי עם טל. הוא בערך מתרגל, וחלק ניכר מהזמן שלנו איתו יהיה זמן תרגול. לפחות תרגול אחד של הפקולטה יהיה מוקלט. בסוף הסמסטר מבחן. תיאורטית כל החומר שאנחנו צריכים יהיה בתרגולים של טל. יתכן שיהיו נושאים שבהם יוגד לנו לצפות במצגות וזהו. כדאי שלפחות שני אנשים יראו את ההקלטה מההתחלה עד הסוף, ולוודא שאודיסאה לא פספסו כלום. מסיימים את הסמסטר יותר מוקדם מהסטודנטים. בפרט נסיים לפני שהם מסיימים את החומר. מועד ב׳ ב־33 בספטמבר ע"פ דלית.

נתעמק בחישוב סיבוכיות בצורה יותר פרקטית, נלמד על מבני נתונים יותר לעומק – דברים שקצת נגענו בהם במבוא מורחב; כמו עצים בינארים (נאמר, שמירת איזון של עצים בינארים). נלמד על מבנה ומימוש אלגנטי של רשימה, מערכים, מיונים של מבנים (בפחות מ־$\Theta(n\log n)$), hashes ו־universal hash function, מציאת חציון, ועוד.

אם מסתבכים יותר מדי בש.ב. וכו׳ – תגידו. לא רוצים לפתוח פער שיהיה קשה לסגור אחכ.

COMPLEXITY BUT MORE COMPLEX .... (2)

2.1 אז מה עשינו

מה עשינו עד עכשיו בשביל לחשב סיכוביות?

- ספרנו פעולות "בסיסיות".
- התעניינו בסיבוכיות אסימפטוטית. לא איכפת לנו ממקרי קצה בהתחלה.
- המדידה ביחס לאורך הקלט. [נאמר, עבור מספר=כמות ביטים, רשימה=כמות איברים]
- מתעלמים מקבועים.
- מסתכלים תמיד על ה־worst case.

במבני נתונים, ננסה לספר את זמן הריצה מבלי לשפר את החסם האסימפטוטי התיאורטי. נפריד גם בין פעולות "בסיסיות" יותר ופחות יקרות.

סימונים:

חסם עליון לא אדוק	$o(f)$	חסם עליון	$O(f)$
חסם תחתון לא אדוק	$\omega(f)$	חסם תחתון	$\Omega(f)$
		חסם אדוק	$\Theta(f)$

2.2 ניתוח Amortized

ניקח סדרה של פעולות – ננתח את ה־worst case בעבור כל אחד מהם. נעשה זאת במקום להסתכל על פעולות בודדות.

כלומר, בהינתן פעולות $T_1, T_2, \dots$ נוכל להגיד בניתוח w.c. (כלומר worst case) נסמן $\mathrm{worst}(\mathrm{T_i})$, ונגדיר:

$$\begin{aligned}\sum \mathrm{cost}\, op_i = \mathrm{cost}([op_1, op_2, \dots, op_n]) &\le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{worst}(\mathrm{type}(op_i)) \quad (1)\\ &\le \sum_{i=1}^{n} \mathrm{amort}(\mathrm{type}(op_i)) \quad (2)\end{aligned}$$

נקצה למצוא ערכים של $\text{amort}(T_i)$ כך שאי־השוויון מתקיים לכל סדרת פעולות. אם כן, אז זהו זמן ריצה amortized (אך ייתכן קיו סחסם טוב יותר). זה לעומת סיבוכיות כמו שחשבנו קודם, שבה:

$$\forall i:\ \text{cost}(op_i) \leq \text{worst}(\text{type}(op_i))$$

ננתח בצורה זו הכנסת איברים לרשימה. הצעה: כל פעם שאין מספיק איברים, נגדיל את גודל הרשימה פי 2 ונעתיק את האיברים. השיטה הזו נקרתא doubling.

נרצה לנתח את כמות הפעולות amortized.

2.2.1 ניתוח ראשון – בשיטת aggregation.

השיטה: נספור פעולות ונחלק.

נאמר והכנסתי n פעמים איברים לרשימה. אז הגדלתי את אורך הרשימה $\log n$ פעמים.

cost	1	2	3	1	5	1	1	1	1	1	1	1	9
capacity	1	2	3	1	8	1	1	1	1	1	1	1	8

באופן כללי:

$$\underbrace{n}_{\text{סכום הכנסת האיברים הבודדים}} + \underbrace{1+2+4+\cdots+2^{\lfloor 2^{\log n} \rfloor}}_{3n} = 3n$$

סה"כ, פעולה בודדת עלתה בממוצע $4 = \frac{4n}{n}$ – כלומר $O(1)$.

שיטת ה־Accomting

"שומרים" ב"בנק" tokens עבבור כל פעולה ומשתמשים בהם כשרוצים לבצע פעולות במבנה. הבנק לא מרשה להכנס למינוס אך גם לא נותן ריבית. נרצה שפעולות זולות "יממנו" פעולות ירקרות.

עתה נותר להראות שלא נכנסים למינוס.

בשבוע הבא נוכיח את זה ונראה שיטה נוספת. נראה גם דרך למצוא רשימה ש"אפשר להכניס" ונמצא עוד דרך לנתח א זה. כמו כן נראה רשימה שאין בה בעיה להוסיף איברים וזה באמת $O(1)$.