ליניארית 1א - תרגיל בית 2

שחר פרץ

1 בדצמבר 2024

(1)

יהי $|\mathbb{F}|$ שדה סופי. צ.ל. $\mathbb{F} \mid \operatorname{char}(F)$

הוכחה. נניח בשלילה $|\mathbb{F}| < \operatorname{char}(\mathbb{F})$. נסמן $|\mathbb{F}| = p$ וידוע p ראשוני כי $\mathbb{F}$ שדה סופי. ■

(2)

1. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 7x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2} R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & -6.5 & -10 & 5.5 \\ 0 & -1.5 & -11 & -9.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{2}{13} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & -1.5 & -11 & -9.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{113}{13} & -\frac{107}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{13}{113} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{20}{13} R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 0 & \frac{751}{226} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{69}{113} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{479}{113} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{69}{113} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{479}{113} \\ -\frac{69}{113} \\ -\frac{107}{113} \end{pmatrix}$$

נפתור את מערכות המשוואות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

2. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{3} R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to -\frac{3}{5} R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_4]{\substack{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3} R_4 \\ R_2 \to R_2 - 2R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R - 2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

(3)

נפתור את מערכות המשוואות הבאות:

1. (מעל $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases} ix+(1-i)y=0 \\ 2x-(1-i)y=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} i & (1-i) & 0 \\ 2 & (i-1) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{R_1}{i}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-1-i) & 0 \\ 2 & (i-1) & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-1-i) & 0 \\ 0 & (1+3i) & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{1+3i}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-1-i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to(i+1)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \implies (x_1,x_2)=(0,0)$$

(כלומר, הראינו שהפתרון היחיד למערכת ההומגנית להלן הוא הפתרון הטרוויאלי)

2. (מעל $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases} x-(2-i)y=3-2i \\ (2i-1)x+5iy=1+8i \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-2+i) & (3-2i) \\ (2i-1) & 5i & (1+8i) \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+(1+2i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-2+i) & (3-2i) \\ 0 & (-4+2i) & (8+12i) \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{-4+2i}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-2+i) & (3-2i) \\ 0 & 1 & (-0.4-3.2i) \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+(2-i)R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (-1-8i) \\ 0 & 1 & (-0.4-3.2i) \end{array}\right) \implies (x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -1-8i \\ -0.4-3.2i \end{pmatrix}$$

3. (מעל $\mathbb{Z}_{13}$)

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 12 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 12 & 12 \\ 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to 9R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-12R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

. . . . (4) . . . .

בוצעו הפעולות האלמנטריות הבאות על מטריצה $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. ננסה להופכן כדי לקבל את המטריצה המקורית. לשם כך, נהפוך את סדרן ונבצע את הפעולות ההופכיות.

$$id_{3\times3}\begin{pmatrix} R_2\to R_2-3R_1 \\ R_2\leftrightarrow R_3 \\ R_3\to R_3+R_2 \\ R_1\to 2R_1-R_2 \\ R_2\to R_2+R_3 \\ R_1\to R_1-0.5R_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1\to R_1+0.5R_3 \\ R_2\to R_2-R_3 \\ R_1\to 0.5R_1+0.5R_2 \\ R_3\to R_3-R_2 \\ R_3\leftrightarrow R_2 \\ R_2\to R_2+3R_3 \end{pmatrix}$$