הרצאה ליני – פתרון מועד ג' משפד" סמסטר א'

שחר פרץ

27 בינואר 2025

. . . . (1) . . . .

יהיו $m,n,k\geq 1$ ותהי $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. נגדיר $u=\{B\cdot A\mid B\in m_{n\times m}(\mathbb{F})\}$.

1. הוכיחו כי u ת"מ של $M_{k\times n}(\mathbb{F})$.

הוכחה. עבור $0\in M_{k\times m}(\mathbb{F})$ נקבל $0\cdot A=0_{k\times n}\in u$. נוודא גם סגירות לצ"ל. עבור $B_1,B_2\in M_[k\times m]$ ועבור $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}$. נתבונן ב־:

$$\lambda_1B_1A+\lambda_2B_2A=\underbrace{(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)}_{\in M_{k\times m}}A\in u$$

■

2. חשבו את $\dim u$

הוכחה. נשים לב:

$$\mathrm{Row}(B,A)\subseteq\mathrm{Row}(A)$$

נסמן ב־$(v_1,v_2,\dots v_r)$ בסיס למ"ו השורות של A, כאשר $r=\operatorname{rk}A$. נתבונן באוסף:

$$M_{ij}:=\left\{\begin{pmatrix} & 0 & \\ & \vdots & \\ | & v_j^T & | \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}\right\}$$

זוהי קב/ שבה $k\times r$ מטריצות. קל לוודא שקב' זו בת"ל שהרי: (עבור $\{\lambda_{ij}\}\subseteq\mathbb{F}$)

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}M_{ij}=0$$

לכל $1\leq i\leq k$ מתקיים $\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}v_j$ ומכיוון ש־$(v_1,\dots,v_r)$ בסיס ובת"ל בהכרח $\lambda_{ij}=0$ $1\leq k\leq r.$.

cbux; kfk $B\in M_{k\times m}(\mathbb{F})$ מתקיים $\mathrm{Row}(B\cdot A)\subseteq\mathrm{Row}\,A==\mathrm{span}\{v_1\cdots v_r\}$ לכן לכל $1\leq i\leq k$ מתקיים:

$$\varphi_i^t\cdot(BA)=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}$$

ונוכל לרשום $BA=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}M_{ij}\in\mathrm{span}(M_{ij})$ כלומר הקב' גם פורשת את u ומכאן שהיא בסיס ל־u ולכן $\dim u=k\times r$.

נשים לב שלכל $1\leq i\leq k,\ 1\leq j\leq r$ מתקיים ש־$M_{ij}\in u$ שהרי עבור $v_j\in\mathrm{Row}(A)$, נוכל להציג את $v_j=\sum_{\ell=1}^{m}\alpha_\ell R_\ell$ כאשר R_ℓ השורה ה־ℓ־ית של A ואז:

$$M_{ij}=\begin{pmatrix}| & 0 & | \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ | & 0 & |\end{pmatrix}\cdot A$$

■

.... (2) ....

תהי $T\colon V\to V$ ח"ל ונניח $n=\dim V\geq 2$. נניח כי $\mathrm{rk}(T^n)<\mathrm{rk}(T^{n-1})$.

1. הוכיחו ש־$\mathrm{rk}(T^{n-1})<\mathrm{rk}(T^{n-2})$ נשים לב: $\ker T^{n-1}\subseteq\ker T^n$ ולכן $\dim\ker T^{n-1}\leq\dim\ker T^n$. מהנתון: $\mathrm{rk}(T^n)=\mathrm{rk}\,T^{n-1}=\dim\operatorname{Im}T^{n-1}\neq\dim\operatorname{Im}T^n$ וממשפט הממדים נסיק כם $\dim\ker T^n\neq\dim\ker T^{n-1}$. נסיק שקיים $v\in V$ כך ש־$T_v^n=0\wedge T_v^{n-1}\neq 0$. נתבונן בוקטור T_v, בהכרח:

$$T_v\in\ker T^{n-1}\setminus\ker T^{n-2}\impliedby T^{n-2}(T_v)=T_v^{n-1}\neq 0,\ T^{n-1}(T_v)=T_v^n=0$$

כלומר $\dim\ker T^{n-2}\neq\dim\ker T^{n-1}$ שהרי כמקודם, $\ker T^{n-2}\subseteq\ker T^{n-1}$ וממשפט הממדים $\mathrm{rk}\,T^{n-1}=\dim\operatorname{Im}T^{n-1}\neq\dim\operatorname{Im}T^{n-2}=\mathrm{rk}\,T^{n-2}$.

2. הוכיחו ש־$\mathrm{rk}(T^k)<\mathrm{rk}(T^{k-1})$ לכל $k\in[n]$.

הוכחה. באופן דומה, עבור $1\leq k\leq n$, נקבל: $T^k(T_v^{n-k})=T_v^n=0$ וגם $T^{k-1}(T_v^{n-k})\neq 0$, כאשר $\ker T^{k-1}\subseteq\ker T^k$ וגם $\dim\ker T^{k-1}\neq\dim\ker T^k$ ושוב נפעיל את משפט הממדים בכדי לחסוך $\mathrm{rk}\,T^{k-1}=\dim\operatorname{Im}T^{k-1}\neq\dim\operatorname{Im}T^k=\mathrm{rk}\,T^k$. ■

השאלה תהיה רלוונטית בליניארית 2 כאשר נדבר על העתקה נילפוטנטית. $T\colon V\to V$ נילפוטנטית אם קיים $n\in|n$ שעבורו $T^n=0$. נסמן את החזקה המינימלית שמתאפסת ב־n, כלומר $T^n=0\wedge T^{n-1},T^{n-1}\neq 0$ ואז קיים $v\in V$ שעבורו $T_v^{n-1}=0$ ואז הקבוצה $\{v,Tv,T^2v\vdots,T^{n-1}v\}$.

.... (3) ....

תהינה $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$ מטריצות מסדר 2 מעל השדה $\mathbb{F}$ ותהי $X=\begin{pmatrix}A&A\\B&C\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{F})$

1. הוכיחו/הפריכו: $\det(X)=\det A\cdot(\det C-\det B)$.

הפרכה. ניתן דוגמה נגדית: $A=B=I_2, C=2I_2$. אז:

$$\det X=\begin{bmatrix}I_2&I_2\\I_2*2I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_2&I_2\\0&I_2\end{bmatrix}=1,\ \det I_2(\det(2I_2)-\det I_2)=3$$

■

2. הוכיחו/הפריכו: $\det X=\det A\cdot\det(C-B)$.

$$\det X=\det\begin{pmatrix}A&A\\B&C\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A&0\\B&C-B\end{pmatrix}=\det A\det(C-B)$$

.... (4) ....

תהי $O_{r\times k}$ מטריצת האפס מסדר $r\times k$ ותהי I_n מטריצת היחידה מסדר n ויהיו $u,v\in\mathbb{F}^n$.

(א) הראו ש־:

$$\begin{pmatrix}I_n&0_{n\times 1}\\v^t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I+uv^t&u\\0_{1\times n}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&0_{n\times 1}\\-v^t&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n&u\\0_{1\times n}&1+v^tu\end{pmatrix}$$

נבחין שכל המטריצות מסדר $(n+1)\times(n+1)$. זה פשוט כפל ידני של מטריצות. אין כאן שום הוכחה מעניינת. בשורה התחתונה נכפול ונקבל:

$$\cdots=\begin{pmatrix}I+uv^t&u\\v^t+v^tuvv^t&v^tu+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n&0_{n\times 1}\\-v^t&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I+uv^t-uv^t&u\\v^t+v^tuv^t-v^tuv^t-v^t&v^tu+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n&u\\0_{1\times n}&1+v^tu\end{pmatrix}$$

(ב) $\det(I_n+uv^t)+1+v^tu$

$$\det(\cdots)=\begin{bmatrix}I_n&0_{n\times 1}\\v^t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I+uv^t&u\\0_{1\times n}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&0_{n\times 1}\\-v^t&1\end{bmatrix}=1\cdot|I+uv^t|\cdot 1=\det(I+uv^t)$$

מצד שני:

$$\det\begin{pmatrix}I_n&u\\0&1+v^tu\end{pmatrix}=1+v^tu$$

כלומר, $\det(I_n+uv^t)=1+v^tu$.

. . . . (5) . . . .

כאן היה פשוט צריך להגדיר 7 מושגים שהיו בקורס. תעשו יהיו יהיה תהינה ותהיו פורמלית.