איחוד וחיתוך מוכללים

הגדרה: תהי F קבוצה שאיבריה הם קבוצות.

האיחוד המוכלל של F הוא:

$$\bigcup F=\{x \mid \exists A.\ A\in F \land x\in A\} \qquad \exists A\in F.\ x\in A$$

החיתוך המוכלל של F, עבור $F\neq\emptyset$, הוא:

$$\bigcap F=\{x \mid \forall A.\ A\in F \to x\in A\} \qquad \forall A\in F.\ x\in A$$

הערה: נשים לב שעבור $F=\{A,B\}$, אזי $\bigcap F=A\cap B$, $\bigcup F=A\cup B$.

דוגמאות:

1. עבור $F=\{\{1,2,3\},\{3,4\},\{1,3\}\}$

מתקיים: $\bigcap F=\{3\}$, $\bigcup F=\{1,2,3,4\}$

2. עבור $F=P(\mathbb{N})$, מתקיים $\bigcap F=\emptyset$, $\bigcup F=\mathbb{N}$

גם עבור $F=P(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ מתקיים $\bigcap F=\emptyset$, $\bigcup F=\mathbb{N}$.

3. עבור $F=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$, מתקיים:

$$\bigcup F=\emptyset\cup\{\emptyset\}\cup\{\{\emptyset\}\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

$$\bigcap F=\emptyset\cap\{\emptyset\}\cap\{\{\emptyset\}\}=\emptyset$$

4. באופן כללי, עבור $F=P(A)$, מתקיים $\bigcap F=\emptyset$, $\bigcup F=A$.

שאלה: מה היה קורה אם F ריקה?

$$\bigcap F=\bigcap\emptyset=\{x \mid \underbrace{\forall A.\ \underbrace{\underbrace{A\in\emptyset}_{F}\to x\in A}_{T}}_{T}\}$$

הרישא של הפסוק $A\in\emptyset \to x\in A$ תמיד שקרית, ולכן הפסוק תמיד אמת. כלומר, לכל x מתקיים התנאי $\forall A.\ A\in\emptyset\to x\in A$, מה שאומר שהקבוצה $\bigcap\emptyset$ מכילה את כל הקבוצות (בתור איברים, "כל דבר שייך אליה") וזו סתירה כי לא קיימת קבוצה כזו.

עבור F שאינה ריקה, קיימת $B\in F$ קבוצה, ולכן ניתן לכתוב את $\bigcap F$ באופן הבא: $\bigcap F=\{x\in B \mid \forall A.\ A\in F\to x\in A\}$

וזו קבוצה חוקית לפי עקרון ההפרדה.

עם איחוד מוכלל, אין בעיה ש-F תהיה ריקה:

$$\bigcup\phi=\underbrace{\{x \mid \exists A.\ \underbrace{\underbrace{A\in\phi}_{F}\wedge x\in A}_{F}\}}_{F}=\phi$$

סימון נוסף לאיחוד וחיתוך מוכללים: אם F כתובה באופן הבא: $F=\{A_i \mid i\in I\}$

אז נהוג לסמן את $\bigcap F$, $\bigcup F$ כך:

$$\bigcup F=\bigcup_{i\in I}A_i \quad , \quad \bigcap F=\bigcap_{i\in I}A_i$$

הקבוצה I נקראת קבוצת האינדקסים.

דוגמה: בהינתן A_1,A_2,A_3 קבוצות, $\bigcup_{i\in\{1,2,3\}}A_i=A_1\cup A_2\cup A_3$.

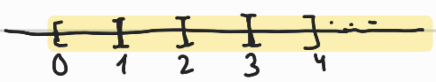
<u>הערה</u>: אם $I=\mathbb{N}$, נהוג לסמן כך: $\bigcup F=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\ \underbrace{\text{"="}\ A_0\cup A_1\cup A_2\cup\dots}_{\text{לא פורמלי}}$

<u>דוגמה</u>: עבור $F=\{\{n\}\mid n\in\mathbb{N}\}$, נוכל לסמן לכל $i\in\mathbb{N}$, $A_i=\{i\}$.

מתקיים $\bigcup F=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcup_{i=0}^{\infty}\{i\}=\mathbb{N}$.

<u>תרגיל</u>: פשטו את הקבוצה $\bigcup_{n=0}^{\infty}[n,n+1]$.

<u>פתרון</u>: נוכיח $\underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty}[n,n+1]}_{A=}=[0,\infty)$ בעזרת הכלה דו כיוונית.



$\subseteq$: יהי $x\in A$. אז לפי הגדרת איחוד מוכלל, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$x\in[n,n+1]$.
בפרט, מאחר ש-n טבעי, מתקיים $0\le n\le x$, ולכן $x\ge 0$, כלומר $x\in[0,\infty)$.

$\supseteq$: יהי $x\in[0,\infty)$. נגדיר $n=\lfloor x\rfloor$ (ערך שלם תחתון, כלומר עיגול כלפי מטה).
מתקיים $\lfloor x\rfloor\le x\le\lfloor x\rfloor+1$, כלומר $x\in[n,n+1]$, מאחר ש-$x\ge 0$,

עם $n = \lfloor x \rfloor \geq 0$, וסה"כ n מספר טבעי. קיבלנו שקיים $n \in \mathbb{N}$
כך ש- $x \in [n, n+1]$ ולכן $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} [i, i+1]$.

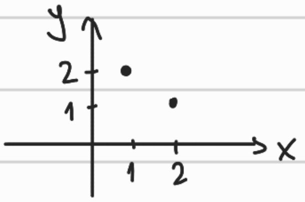
<u>הערה</u>: פורמלית, ערך שלם תחתון: $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$.
ערך שלם עליון: $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$.

<u>הגדרה</u>: אוסף הקבוצות $\{A_i \mid i \in I\}$ הוא אוסף של קבוצות זרות בזוגות,
כלומר, $\forall i,j \in I.\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$, אז האיחוד של כל הקבוצות הללו
נקרא <u>איחוד זר</u> ומסומן $\biguplus_{i \in I} A_i$.

הערה: אנחנו רשאים להשתמש בסימון $\uplus$ רק אם הוכחנו שהקבוצות זרות בזוגות.

זוגות סדורים

ראינו שאין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. היינו רוצים להגדיר אובייקט מסוג חדש
שבו יש חשיבות לסדר ולחזרות.



לדוגמה, כל נקודה במישור הממשי מיוצגת ע"י זוג מספרים
ממשיים, עם חשיבות לסדר.
למשל, הנקודות $\langle 2,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle$ במישור שונות זו מזו.
באופן כללי, נרצה להגדיר מושג של "זוג סדור" $\langle a,b \rangle$ בעזרת הכלים שיש לנו.
התכונה שנדרשת מזוג סדור: $\langle a,b \rangle = \langle c,d \rangle \iff a=c \wedge b=d$.
(לתכונה הנ"ל קוראים "התכונה המרכזית של זוג סדור")

<u>הגדרה</u>: הזוג הסדור $\langle a,b \rangle$ הוא הקבוצה $\{\{a\}, \{a,b\}\}$.

<u>דוגמאות</u>:
* $\langle 1,2 \rangle = \{\{1\}, \{1,2\}\}$
* $\langle 2,1 \rangle = \{\{2\}, \{1,2\}\}$
* $\langle 2,2 \rangle = \{\{2\}, \{2,2\}\} = \{\{2\}\}$

הגדרה טובה? צריך לבדוק!
$\langle a,b \rangle = \{\{a\}, \{\{b\}\}\}$