לינארית 1א 5

שחר פרץ

27 בנובמבר 2024

DIMENSIONS..(1)

תזכורת: בהינתן V מרחב וקטורי מעל F שדה, ובהינתן B_1, B_2 בסיסים, אז $|B_1| = |B_2|$. ניזכר שבסיס הוא אוסף וקטורים כך שקיים ויחיד צירוף ליניארי מהוקטורים ב־B. כלומר בסיס B במ"ו V אם:

$$\forall v \in V \exists! (\lambda_i)_{i=1}^{|B|} \colon v = \{b_i\}_i$$

הגדרה. יהיו $v_1, dots v_2 \in V$. השדה תלוי הליניארית אם קיימים $\lambda_1 \dots \lambda_s$ כך שאחד מהם שונה מ־0 כך ש־$\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i = 0$

סדרה בלתי־תלויה ליניארית (בת"ל) אם היא לא תלויה ליניארית. שקול לקיום $\sum \lambda_i v_= 0 \implies \forall 1 \le i \le s \colon \lambda_i = 0$

לדוגמה, בהינתן $v_1 = (1,2), v_2 = (-2,3)$ הם יהיו תלויים ליניארית רק אם למשוואה למעלה (היא משוואה הומוגנית) יהיה פתרון לא טרוויאלי. במקרה הזה:

$$\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_2 \iff \lambda_1(1,2) + \lambda_2(-2,3) = (0,0) \iff \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

מסקנה. בהינתן $v_1, \dots v_n \in F^n$, ו־A מטריצת העמודות שלה, אז הסדרה בה"ל אמ"מ בצורה הקאנונית ששקולה ל־A בכל שורה יש איבר פותח.

טענה. יהי $V \in F^n$, הסדרה $e_1, \dots e_n$ היא בת"ל והיא בסיס.

הוכחה. נראה ש־$\{e_i\}_{i=0}^n$ בהת"ל כלומר נניח $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, $\lambda_i \in F$כך ש־$\sum \lambda_i e_i = 0$ ונראה ש־$\lambda_i = 0$. אכן נקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן עבור כל $1 \le i \le n$ נקבל $\lambda_i \cdot 1 = 0$ כרצוי, ולכן בת"ל.

זהו גם בסיס: נראה שלכל $v \in V$ קיים ויחיד $\lambda_i, \dots, \lambda_n$ נבחר $\lambda_i = v_i$ ונקבל ייצוג. נראה שיחיד, כלומר λ_i בהכרח שווה ל־v_i. בהכרח:

$$\sum \lambda_i e_i = v$$

(כי בכל קורדינרטה נקבל את השוואה הזאת). כלומר $\forall i . \lambda_i \cdot 1 = v_i$. ■

הערה. תהי $U \subseteq V$ קבוצה. אז U תמ"ו אמ"מ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F, u, n \in U$ יתקיים $\lambda_i u + \lambda_i v \in U$ וגם U לא ריקה.

טענה. בהינתן $U \subseteq V$ תמ"ו ובהינתן $u_1, \dots u_s \in U$, אז כל צירוף ליניארי שלהם ב־U.

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \dots \lambda_2 \in F$. נראה $\sum \lambda_i u_i \in U$ באינדוקציה על s. עבור $s = 1$, נקבל ששייך מתכונת הסגירות. עבור $s < 1$, אז:

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{s-1} \lambda_i u_i}_{\in U (\text{ה.א.})} + \lambda_s u_s$$

ובסכום של שניהם מסגירות כרצוי. ■

הגדרה. בהינתן $x = v_1, \dots v_2$ קבוצת וקטורים, אז $\text{span}(\text{X}) = \{\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i \mid \lambda_i n F\}$. בפרט, נגדיר $\text{span}(\emptyset) = \emptyset$ (המרצה לא בטוח לגבי מקרה הקצה הזה).

כדי למצוא מימד, יהיה איזשהו מתח – איך יוצרים את כל המרחב, כלומר, איך ה־span הוא כל המרחב, ומצד שני מתי יש לנו דברים מיותרים – כלומר מתי יש תלות ליניארית בין שני דברים.

טענה. יהי V מ"ו. כן $x = (v_1, \dots v_2 2) \subseteq V$. אזי, $\text{span}(x)$ הוא התמ"ו המינימלי שמכיל את X.

הוכחה. נראה שזהו תמ"ו. נשתמש בהגדרה השקולה. נסמן את $T = \mathrm{span}(X)$. אז $T \neq \emptyset$ כי $v_1 \in T$. נראה סגירות. אכן, יהי $u \in T = \sum \alpha_i v_i$, $w \in T = \sum \beta_i v_i$, $\alpha, \beta \in F$. נראה ש־$\lambda_1 u + \lambda_2 w \in T$. ואכן:

$$\lambda_1 v_i \sum \alpha_i v_i + \lambda_2 v_i = \sum (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta_i) v_)$$

וזה ב־T כי צירוף ליניארי של X.

נוכיח שמינימלי, נראה שכל Y תמ"ו שמכיל את X מכיל את T. ואכן יהי $t \in T$, נראה $t \in Y$. t צירוף ליניארי של X (מטענה קודמת) וגם Y מ"ו שמכיל את X ולכן $t \in Y$. ■

גרסה יותר חזקה של הטענה הזו:

$$\mathrm{span}(X) = \bigcap_{X \subseteq U \subseteq V,\ \text{תמ"ו U}} U$$

דוגמה. נגדיר $V = (1,0) \in \mathbb{R}^2$. עבורו, $\mathrm{span}(1,0) = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{span}((1,1)) = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in F\}$.

הגדרה. בהינתן V מ"ו, $X \subseteq X$, נאמר ש־X פורש את V אם $V = \mathrm{span}(X)$. לעיתים, נאמר ש־X קבוצת יוצרים של V.

הגדרה. בהינתן V מ"ו. נאמר ש־V נוצר סופית אם קיימת $X \subseteq V$ סופית כך ש־X פורשת את V.

הערה. בסיס הוא גם פורש.

לדוגמה, F^n נוצר סופית בעבור הבסיס הסטנדרטי, $e_1, \dots, e_n$, ו־$\mathrm{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ לא כי הוא מעוצמה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אך:

$$|\mathrm{span}(X)| = |\{\sum \lambda_i \phi_i \mid \lambda i \in \mathbb{R}\} = |\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \neq 2^{\aleph} = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$$

טענה. V מ"ו נוצר סופית, $X \subseteq V$ פורשת סופית. נגדיר $|X| = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. כל סדרה בת"ל ב־$V$ גודלה לכל היותר.

הוכחה. תהי $1u_1, \dots, u_n, u_{n+}$ סדרה, נראה שתלויה.

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} v_{i,j}$$

כי $u_i \ni \mathrm{span}(X)$ונראה קיימים $\lambda \dots \lambda_{n+1}$ כך ש־$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0 \wedge \exists \leq n+1 \colon \lambda_i \neq 0$. נמשיך לפתח:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i &= \sum_{i=1}^{n+1} \cdot (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} v_j \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \alpha_{ij} \end{aligned}$$

נראה כי קיימים $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ לא טרוויאלים כך ש־$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda r \cdot \alpha'_{ij} i, j \in \mathbb{N}$. זוהי מערכת משוואות הומוגנית עם $n+1$ נעלמים ו־n משוואות. אכן, מדובר במערכת משוואות הומוגנית עם יותר נעלמים ממשוואודת – יש יותר מפתרון אחד. סה"כ יש פתרון לא טרוויאלי. ■

סימון. בהינתן $X \subseteq V$ שדות וקטורים $(v_1, \dots v_n)$ ו־$u \in v$ וקטור. אז:

$$(v_1, \dot{;} v, u) = XX \cup \{u\}$$

למה. X בת"ל ב־V. נרצה לכויח $u \in V \setminus \mathrm{span}(X)$ גורר $X \cup \{u\}$ בת"ל.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$X \cup \{u\}$ צלויה. אז:

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda \in F,\ v, \dots v_s, \in X$$

לא כולם אפס;

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \lambda_i u_i = 0$$

אם $\lambda = 0$, אז $\sum \lambda_i v_i = 0$ עבור $\{\lambda_i\}$ לא טרוויאלי. אזי סה"כ X בת"ל.

אחרת, $\lambda \neq q0$. ואז $\sum \lambda_i v_i = -\lambda u$ ולכן $\sum \frac{\lambda_i}{-\lambda} \cdot v_i = u$. סתירה לכך ש־$u \in V \setminus \mathrm{span}(X)$. ■

טענה. V מ"ו נוצר סופית, ו־X סדרת יוצרים, $v_1,\dots,v_m$ בת"ל, ולכן קיימים $v_{m+1}\dots v_n\in X$ כך ש־$v_1,\dots v_m,v_{m+1},\dots v_n$ פורשת ובהת"ל.

הוכחה. נסמן $N=|x|-m$. לכן $N\geq 0$. נוכיח באינדוקציה על N.

1. אם $N=0$: אם $X\subseteq \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$ אז $\operatorname{span}(X)\leq \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$ (מטענה קודמת על X קבוצת וקטורים ומרחב וקטורי שמכיל אותה). לכן, $v_1,\dots,v_m$ בת"ל ופורשת. אחרת, $X\not\subseteq \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$: אזי קיים $x\in X\colon x\notin \operatorname{span} v_1,\dots,v_m$ ולכן "אופס, משהו פה לא עובד" (המרצה). אז מצאנו סדרה בגודל $|X|+1$ בת"ל למרות שיש סדרה בגודל $|X|$ שהיא פורשת, לפי טענה קודמת, כל סדרה בת"ל תהיה קטנה ממנה.
2. נראה עבור $N>0$. אם $X\subseteq \operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)$, אז מאנו סדרה רצויה כמו בבסיס. אחרת, $T:=\operatorname{span}(v_1,\dots,v_m)\not\supseteq X$, וקיים $x\in X\setminus T$ ולכן $(v_1,\dots,v_m,x)$ בת"ל ומהנחת האינדוקציה ניתן להוסיף וקטורים מ־X עד שתהיה בת"ל.

■

משפט. $B=(v_1,\dots,v_s)\subseteq V$. אז B בסיס אמ"מ הוא פורש ובת"ל.

הוכחה.

$\Leftarrow$ יהי $v\in V$. נראה שיש צירוף ליניארי של B ששווה ל־V, ושהוא יחיד.

קיום: נתון ש־B פורש ולכן $\forall v\in V. v\in\operatorname{span}(B)$ (קיום צירוף ליניארי מהגדרת ה־span).

יחידות: נניח קיום בלה בלה כך ש־-: $\sum\alpha_i v_i=\sum\beta_i v_i$. אזי $\sum(\alpha_i-\beta_i)i=0$ ולכן $\{\alpha_i,\beta_i\}$ סדרת סקלרים לא טרוויאלית ובפרט כל הערכים ב־B בת"ל.

$\Longrightarrow$פורש: נראה ש־$V=\operatorname{span}(B)$ ואכן יהי $v\in V$ נראה ש־$v\in\operatorname{span}(B)$ (בורר ש־$V\subseteq \operatorname{span}$). ל־$V$ יש צירוף ליניארי של B. בגלל ש־B בסיס:

$$\exists\{\lambda_i\}^{|B|}\sum\lambda_i v_i=v\implies v\in\operatorname{span}(B)$$

בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{|B|}v_i=0$. מיחידות - הצירוף הליניארי היחיד שייקיים את זה הוא $\forall 1\leq i\leq |B|.\lambda_i=0$.

■

דוגמה. בהינתן $V_1=(1,2,3),\ v_2=(3,2,1),V_3=(3,3,4)$. נבדוק שהאם בסיס של $\mathbb{Q}^3$ מעל $\mathbb{Q}$. נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix}1&3&3\\2&2&3\\3&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

אם לא יהיה איבר פותח, זה לא יהיה בסיס. טריק למחשבה: בהינתן הוקטורים $V=(1,0,0),E=(0,1,0)$. זה קטן מדי - לכן לא בסיס. האם הוא תלוי ליניארית?

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

למרות שהיא לכאורה לא כמו שאנחנו רגילים - עדיין הפתרון היחיד הוא 0 והם בת"לים.

1.1 idk

בהינתן וקטורים $v_1,\dots v_m\in V=F^m$. נתבונן במטריצת השורות שלהם:

$$\begin{pmatrix}\cdots&v_1&\cdots\\\vdots&&\vdots\\\cdots&v_m&\cdots\end{pmatrix}$$

כל פעולה אלמנטרית משמרת את ה־span שלהם (=המרחב שנפרש ע"י השורות)

הוכחה. ניקח מטריצה A ונעשה פעולה אלמנטרית ונקבל B שורות. B תהינה צירוף ליניארי של שורות A – $\operatorname{span}(B)\subseteq\operatorname{span}(A)$. נשים לב שעבור A,B קיימת פעולה אלמנטרית שמעבירה מ־B ל־A. לכן $\operatorname{span}(A)\subseteq\operatorname{span}(B)$, וסה"ר $\operatorname{span}(A)=\operatorname{span}(B)$. ■

מסקנה. V מ"ו, X סדרת יוצרים.

1. כל סדרה בת"ל ניתן להשלמים ע"י X.

2. בעבור B_1, B_2 בסיסים $|B_1| = |B_2|$

הוכחה. יהיו B_1, B_2 בסיסים. נניח בשלילה בה"כ $|B_1| < |B_2|$. אבל: B_1 בסיס ולכן פורש ובת"ל. כל סדרה ב־V שגדולה באורכה מ־B_1 לא בת"ל. סתירה לכך ש־B_1 בת"ל, ונסיק $|B_1| \not< |B_2|$ וזו סתירה. ■

הגדרה. בהינתן V מ"ו ו־B בסיס סופי. אז $|B| := \dim V$ ("מימד").

משפט. בהינתן V מ"ו ו־$v_1, \dots v_s$ סדרת יוצרים. אז ניתן לצמצם אותה לבסיס.

הוכחה. "אני אעשה את ההוכחה הזו חצי פורמלית ואתן לכם להשלים את זה" (אני לא יודע לעשות אינדוקציה הפוכה) המרצה. אם $v_1, \dots v_s$ בת"ל – אז סיימנו. אחרת, מתקיים $\sum \lambda_i v_i = 0$ עבור $\{\lambda_i\}$ לא כולם 0. נניח $\lambda_1 \neq 0$, אז $\lambda_1 v_2 = \sum_{i=2} \lambda_i v_i$. ולכן, $\text{span}(v_2, \dots v_s) = \text{span}(v_1, \dots, v_s)$. באינדוקציה אפשר לצמצם את זה. ■

מסקנה. V מ"ו, ממימד n. אז:

1. סדרה בת"ל מקסימלית היא בסיס.
2. סדרה פורשת מינימלית היא בסיס.
3. סדרה בת"ל/פורשת עם $\dim V$ איברים, היא בסיס.

הוכחה.

1. נראה שפורשת – ואכן אחרת קיים $v \in V \setminus \text{span}(B)$ ומכאן $B \cup \{v\}$ בת"ל בסתירה למקסימליות.
2. נראה שבת"ל – אחרת קיימים $\sum \lambda_i v_i = 0$ עבור $\{\lambda_i\}$ לא טרוויאלים. נניח $\lambda_1 = 0$, נגרר $V = \text{span}(v_2, \dots, v_s)$ (כי $v_1 \in \text{span}(v_2, \dots, v_s)$). ובפרט, B לא מינימלית.
3. בת"ל בעל $\dim V$ איברים – זו מקסימלית מהטענה על סדרה יוצר עם $\dim V$ איברים (כל סדרה שגדול ממנה היא ???) פורשת עם $\dim V$ – נניח שלא מינימלי קיימת סדרה קטנה יותר, הצלחנו לצמצלם אותה לבסיס קטן יותר, מאנו בסיס $|B|$ שבגודל $|B| < \dim V$ וזו סתירה.

■

משפט.

יהיו V מ"ו, $U \subseteq V$ תמ"ו. אז:

1. $\dim U \leq \dim V$
2. $\dim U = \dim V$ אמ"מ $U = V$

הוכחה. 1. יהי B_U בסיס של V. נרחיב את B_U לבסיס נקבל B_V. מתקיים $|B_V| \geq |B_U|$ ובהתאם המימדים.

2.

$\Longrightarrow$ ברור

$\Longleftarrow$ נסתכל על B_V בסיס היא סדרה בת"ל והגודל $\dim V$ ולכן B_U סכום ל־V וסה"כ $V = \text{span}(B_V)$

■

משפט. יהי $V \subseteq F^n$ מרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית. אזי $\dim V$ הוא מספר המשתנים החופשיים במטריצה הקאנונית המתאימה.

הוכחה. נסמן $I =$ אינדקסים של משתנים תלויים, ו־$J =$ אינדקסים של משתנים חופשיים. נשים לב שעבור $\{a_j\}_J \in F^J$ נותנת פתרון יחיד. נסמן $V_j \in F^n$ להיות הפרון שמתאים ל־$a_j = 1$, ו־$a_{j'} = 0$ עבור $j' \neq j \ni J$. ולכן $(V_j)_J$ בסיס . אז $\{v_j\}_{j \in J}$ בסיס כי:

בת"ל כי נניח שלא, $\sum \lambda_i vj = 0$ (עבור האינדקסים $j \in J$ הערכים נראים כמו e_i) ולכן $\forall j \in J. \lambda_j = 0$, כרצוי. פורש כי לכל $v \in V$ פתרון בחירת a_j מתאימה תתן אותו מתכונות המשוואה. כלומר, $x_i = -\sum_{j \in J} c_i a_j$.

סה"כ $\dim V = |\{v_1, \dots, v_j\}|$ (כי כזה בסיס) = מספר מהשתנים החופשיים (כי כזה הגדרה). ■

LINEAR MAPS . . . . (2)

הגדרה. בהינתן V_1, V_2 מרחבים וקטוריים מעל F שדה, וקיים $\varphi \colon V_1 \to V_2$. נגדיר φהעתקה ליניארית אם:

1. $\forall u, v \in v_1. \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\forall \lambda \in F, v \in V. \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ זה שקול לכך ש־: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F, v_1, v - 2 \in V. \varphi(\lambda_1 v - 2 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$

הגדרה. שיכון אם חח"ע.

סימון. $\text{Im}\varphi = \text{Im}(\varphi) = \{\varphi(v) \mid v \in V_1\} \subseteq V_2$

סימון. גרעין (kernel) יהיה $\ker \varphi = \ker(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V_1$

סימון. הומומורפיזם $\hom_F(V_1,V_2)=\{\varphi\colon V_1\to V_2\mid \text{העתקה ליניארית } \varphi\}$

סימון. $\hom(V):=\hom(V,V)$

2.1 דוגמאות

כל אלו העתקות ליניאריות:

נתבון ב־$0=(x)\varphi$ $\varphi\colon V_1\to V_2$. לעיתים הוא יסומן ב־0 ("העתקת ה־0").

גם $x\mapsto x$ $\varphi\colon V\to V$. לעיתים יסמון ב־$id, id_V, 1$.

גם סיבוב היא העתקה ליניארית.

"לא משנה עושים גיאומטריה בסדר", לדוגמה: $(x,y)\mapsto(y,-x)$ היא העתקה ליניארית (סוג של סיבוב). נוכיח - נסמן $u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2)$. ואין זמן למורה.