הרהורים אחרי מבחן דמה ושאלות נוספות

שחר פרץ

31 ביולי 2025

מתרגל: דניאל גינגולד

אימייל: daniel2gingold@gmail.com

הבהרה: הפתרונות לא פורמליים.

.... (1) ....

תהי $T\colon \mathbb{R}_{\le 3}[x]$ כך ש־:

$$T(p) = p(x+1) - p(0)x^2 - p'(1)(x+1)$$

1. נמצא בסיס לקרנל והתמונה של ההעתקה. ניקח את הבסיס $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 - x^2 \\ T(x) &= 0 \\ T(x^2) &= x^2 - 1 \\ T(x^3) &= x^2 + 2x^2 - 2 \end{aligned}$$

ניכר כי $\dim\ker T = 2 = \dim\operatorname{Im} T$ בגלל ש־$T(1), T(x^2)$ ת"לים ו־$T(x) = 0$, אך $T(1)$ בת"ל ביחס ל־$T(x^3)$. פתרון אחד יהיה להעביר כאן למרחב המטריצות ולדרג, פתרון יותר פשוט זה להגיד ש־$\{x, x^2+1\}$ זוג וקטורים בת"לים בתוך הקרנל ולכן בסיס. כדי למצוא בסיס לתמונה נוכל להסתכל על העתקה כללית ולהבין איך הבסיס נראה: ברור ש־x^2-1, x^3+3x^2-2 בת"לים ונמצאים בתמונה, אך נוכל גם להפוך אותו לבסיס יותר יפה: (יהי וקטור כללי שנוצר ע"י הבסיס בתמונה)

$$ax^2 - a + bx^3 + 2bx^2 - 2b = bx^3 + (a+3b)x^2 - 2b - a = \begin{pmatrix} b \\ a+3b \\ 0 \\ -2b-a \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(זה סתם בסיס יותר יפה)

2. נמצא U, V תמ"וים כך ש־$\operatorname{Im} \oplus U = \ker \oplus V = \mathbb{R}_{\le 3}$: נרחיב לבסיס, וניקח את הוקטורים שנוספו. לדוגמה, בשביל הקרנל נוסיף את $1, x^3$ ונבחר $V = \operatorname{span}(1, x^3)$. באופן דומה לתמונה נגדיר $U = \operatorname{span}(1, x)$. אלו וקטורים מהבסיס ה"סטנדרטי" שאפשר להרחיב אליו בקלות.

(צריך להוכיח שהסכום הזה יוצא ישר, קל לעשות את זה משיקולי ממדים).

הערה של גינגולד: אם לא רואים מיד את ההרחבה לבסיס, אפשר לדרג ולהוסיף מהבסיס הסטנדרטי בכל עמודה שלא מתחילה ב־1 פותח. הסבירו את זה בתרגול.

הערות לעצמי: תציב נכון ותוודא את זה פעמיים

.... (2) ....

פרטים פורמליים בתרגול מאתמול.

א. יהיו $v_1 \dots v_n$ בת"לים, ו־$n \ge 2$. האם קיים v כך ש־$v_1 - v \dots v_n - v$ ת"ל, ו־$v_i \neq v$.

הוכחה. נרצה שהם יהיו ת"לים, כלומר קיים צירוף לינארי לא טרוויאלי $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ כך ש־$\sum \lambda_i(v_i - v)$. בפרט נסיק ש־$\sum v_i\lambda_i =$ $v(\sum \lambda_i)$. נוכל לחלק בסכום של $\sum \lambda_i$ כי הצירוף לא טרוויאלי ולכן $\sum v_i\lambda_i$ לא אפס. נקבל:

$$\sum \lambda_i v_i = (\sum \lambda_i)v \implies \sum \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i} v_i = v$$

נוכל לבחור כל λ_i מתאים לעיל, וזה יעבוד. נבחר $\lambda_i = 1$, ונקבל:

$$\lambda_i = 1 \implies v = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} v_i$$

עתה, נבחין ש־:

$$\sum v_i - v = \sum \left(v_i - \sum \frac{1}{n} v_i\right) = \sum v_i - \cancel{n \cdot \frac{1}{n}} \cdot v_i = \sum 0 = 0$$

נותר להוכיח ש־$v_i \neq v$. נניח בשלילה $v = v_i$. לכן הצירוף הלינארי היחיד עבורו v $\sum \lambda_i v_i =$ הוא v_i, סתירה. (בניסוח אחר: מיחידות צירופים לינארים בקבוצות בת"ל). ■

ב. יהיו $v_1 \ldots v_n$ כך ש־בסיס $\{v_1 \ldots v_n\} \setminus \{v_i\}$ $\forall i\colon$. נוכיח קיום $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ **כולם** לא 0 כך ש־$\sum \alpha_i v_i = 0$.

הוכחה. (טיעוני ממדים) יהי צירוף לינארי לא טרוויאלי $\sum \lambda_i v_i = 0$. נניח בשלילה קיום $\lambda_i = 0$ כלשהו, אזי $\lambda_1 \ldots \lambda_n \setminus \lambda_i$ צירוף לינארי לא טרוויאלי של $v_1 \ldots v_n$, סתירה. ■

(3)

יהי $T\colon V \to V$, ו־$B = \{v_1, v_2\}$ בסיס. נניח $[T]_B = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$. נגדיר $v_1 = 2w_1 - w_2, v_w = w_1 - w_2$.

א. נוכיח $\{v_1, v_2\}$ בסיס. ידוע $\{v_1, v_2\} \subseteq \operatorname{span}\{w_1, w_2\} \subseteq V$ ולכן $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2\} = \operatorname{span}\{2_1, w_2\}$. מש"ל.

ב. נמצא את $[T]_B^C$. נפתח את ההגדרה:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} | & | \\ [Tv_1]_B & [Tv_2]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

נבחין ש־:

$$v_1 - v_2 = w_1 \quad v_1 - 2v_2 = w_2 \quad [w_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [w_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$[Tw_1]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [Tw_2]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

סה"כ מההגדרה לעיל:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כדרוש.

ג. עתה נמצא את $[T \circ T]_C^C$. נפצל את זה לשתי מטריצות:

$$[T^2]_C^C = [T]_C^B [T]_B^C$$

את הימנית כבר מצאנו. נקבל:

$$[Tv_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cong v_1 + 2v_2 \quad [v_1 + 2v_2]_C = w2_1 - w_2 + w(2_1 - w_2) = 4w_1 - 3w_2 \cong \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

באופן דומה בעבור השני, ואז נקבל:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

לחילופין אפשר גם למצוא מטריצת מעבר.

א. יהיו $v_1 \dots v_n$ בסיס. נגדיר $A = \sum v_i v_i^T$. חשבו את $\operatorname{rank} A$.

הוכחה. נגדיר:

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ניכר כי B הפיכה כי יש בה n עמודות בת"ל (כלומר הן בסיס). עתה נוכיח $A = BB^T$. יהיו i, j. אזי:

$$(A)_{i,j} = \left(\sum v_i v_i^T\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (v_k)_i \cdot (v_k)_j = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} \cdot B_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} B^T_{j,k} = (BB^T)_{i,j}$$

ומהיות BB^T כפל של הפיכות, A הפיכה ולכן $\operatorname{rank} A = n$.

הערה שלי: אפשר עם יותר מאמץ ללקחת קומבינציה לינארית לעמודות. ■

ב. יהי נתבונן במטריצה הבא:

$$\begin{vmatrix} x_1+1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2+1 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_n & \cdots & & x_n+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 = R_1 + \sum R_i} = \begin{vmatrix} \sum x_i + 1 & \cdots & \sum x_i 1 + 1 \\ x_2 & x_2+1 & \cdots \\ \vdots & & \\ x_n & \cdots & \end{vmatrix} = \left(\sum x_i + 1\right) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_2+1 & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum x_i + 1\right) \text{משהו משולשית תחתונה}$$

להלן שאלות מהתרגול עצמו. **שאלה ראשונה.** יהיו V, U, W מונ"סים, ויהיו $T \colon V \to U, S \colon U \to V$ כך ש־$S \circ T$ איזו'.

נתחיל מלהוכיח שהחיתוך טרוויאלי. יהי $v \in \operatorname{Im} T \cap \ker S$. לכן $Sv = 0$ וגם קיים $u \in V$ כך ש־$Tu = v$ ולכן $(S(Tu)) = 0$ וסה"כ $u = 0$. משום ש־$(S \circ T)u = 0$ ו־$S \circ T$ איזו, אז $u = 0$ ואז $v = 0$ ולכן החיתוך ריק כדרוש.

עתה נוכיח שוויון ממדים. ממשפט הממדים ידוע $\dim U = \dim \ker S + \dim \operatorname{Im} S = \dim U$. נותר להוכיח $\dim \operatorname{Im} S = \dim \operatorname{Im} T$. אפשר להוכיח ש־$S_{|\operatorname{Im} T}$ צמצום, היא איזו', אך לא נעשה זאת. מהיות $S \circ T$ איזו' נדע S על ו־T חח"ע. כלומר $\ker T = \{0\}$ ו־$\operatorname{Im} S = W$. בגלל ש־$S \circ T$ איזו' אז $\dim V = \dim W$, וסה"כ וסה"כ ממשפטי ממדים אפשר להראות $\dim \operatorname{Im} T = \dim \operatorname{Im} S$. וסה"כ:

$$\dim \ker S + \dim \operatorname{Im} T = \dim U \wedge \operatorname{Im} T \cap \ker S = \{0\} \implies \ker S \oplus \operatorname{Im} T = U$$

כדרוש.

שאלה שנייה. יהיו $A_{i,j} \in \{1, -1\}$ ו־$A \in M_{4\times 4}$. נוכיח $\frac{\det A}{8} \in \mathbb{Z}$.

הוכחה. נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 R_1} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{R_3 \to R_3 + R_1} 8 \left(R_1\right)$$

■
