# סיכום - בדידה - עוצמות (שיעור שני)

## מידע כללי

| מרצה | מאת: | תאריך כתיבה: | כשאני עושה שיעורי בית יש כאן משהו אבל עכשיו אין כאן כלום |
|---|---|---|---|
| נטלי שלום | שחר פרץ | 26.02.2024 | |

## סיכום

*קש״ב*

**משפט קנטור־שרדרד־ברנשטיין** (קש"ב): יהיו $A, B$ קבוצות, נניח $|B| \le |A|$, ונניח $|A| \le |B|$, אמ"מ $|A| = |B|$. לא נוכיח את המשפט מסיכומי זמן, אבל מומלץ לקרוא את ההוכחה בספר של א. אברון. [ההוכחה ארוכה, אך בתחום ההבנה שלנו]. *אין להשתמש בתרגיל בית זה במשפט הזה*. ביקשו למצוא זיווגים אז תמצאו זיווגים.

דוגמה לשימוש במשפט: [וגם טענה חוקית, שמותר להשתמש בה בלי הוכחה] $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. לפי קש"ב, נמצא שתי פונקציות חח"ע מכל קבוצה לשנייה.

- $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$: נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}. f(n) = \langle n, n \rangle$. $f$ חח"ע (בהרצאה לא נוכיח, זה די פשוט).
- $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \le |\mathbb{N}|$: נגדיר $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י $g = \lambda \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. 2^n 3^m$. נוכיח שזו פונקציה חח"ע. יהיו $\langle n_1, m_2 \rangle, \langle n_2, m_2 \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שונים, נוכיח $2^{n_1} 3^{m_1} \ne 2^{n_1} 3^{m_2}$. מאחר שהזוגות הסדורים שונים, מתקיים $n_1 \ne n_2 \vee m_1 \ne m_2$. נפצל למקרים:
  - אם $n_1 \ne n_2$, אז בה"כ $n_1 > n_2$, ולכן $n_1 - n_2 \in \mathbb{N}_+$. נניח בשלילה $2^{n_1} 3^{m_1} = 2^{n_2} 3^{m_2}$. נחלק ב־$2^{n_2}$ ונקבל $2^{n_1 - n_2} 3^{m_1} = 3^{m_2}$. ידוע שאגף ימין מתחלק ב־2 ומהשוויון אגף שמאל מתחלק ב־2, בסתירה לכך שאגף ימין אינו מתחלק ב־2 וסיימנו.
  - אם $m_1 \ne m_2$: דומה.

  סה"כ $g$ חח"ע וסיימנו.

זיווג ישיר בין $\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (סתם לעיון): $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f = \lambda \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. 2^n(2m+1) - 1$ (ה־$-1$ בסוף אחראי להוסיף את $0$ לתמונה). לא נספק הוכחה.

**מסקנה מקש"ב:**

1. $|A| < |B| \wedge |B \le |C| \implies |A| < |C|$
2. $|A| \le |B| \wedge |B| < |C| \implies |A| < |C|$

נוכיח את הטענה הראשונה. יהיו $A,B,C$ קבוצות ונניח $|A|<|B| \wedge |B| \leq |C|$. מטענה שראינו בשיעורים קודמים, $|A| \leq |C|$. נותר להוכיח ש־$|C| \neq |A|$. נניח בשלילה $|C| = |A|$. מכך ש־$|B| \leq |C| \wedge |C| = |A|$ נובע ש־$|B| \leq |A|$. יחד עם כך ש־$|A| < |B|$ נקבל מקש"ב $|A| = |B|$, וזו סתירה לכך ש־$|A| \neq |B|$ ■

טענה: נניח $|A'| \leq |A|$ ו־$B$ קבוצה כלשהי [5 טענות שכתבתי על דף ההגדרות והמשפטים שלי, תכתבו לי אם אתם צריכים אותן]

### *עוצמות סופיות*

**סימון:** יהי $n \in \mathbb{N}$, נסמן $\mathbb{N}_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ (כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}_+$ אז $\mathbb{N}_n = \{0, \dots, n-1\}$ ועבור $n=0$ מתקיים $\mathbb{N}_0 = \emptyset$)

**הגדרה:** קבוצה $A$ נקראת סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|A| = |\mathbb{N}_n|$ [הערה: בעבור קבוצה ריקה, היחס הריק יהיה הזיווג].

**הגדרה:** קבוצה $A$ נקראת אין־סופית, אם הי אלא סופית ($\forall n \in \mathbb{N}. |A| \neq |\mathbb{N}_n|$)

נסמן ב־$<_{\mathbb{N}}$ כיחס הסדר הרגיל על הטבעיים. כמה טענות:

1. יהיו $n,m \in \mathbb{N}$, נניח $n <_{\mathbb{N}} m$, אז $|\mathbb{N}_n| < |\mathbb{N}_m|$
2. אם $X$ סופית ו־$Y \subseteq X$ אז $Y$ סופית.
3. אם $X$ סופית ו־$Y \subsetneq X$ אז $|Y| < |X|$

**טענה:** תהי $A$ קבוצה סופית, קיים ויחיד $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|A| = |\mathbb{N}_n|$.

**סימון:** עבור $A$ קבוצה סופית, נסמן $|A| = n$ עבור ה־$n$ היחיד שמקיים $|A| = |\mathbb{N}_n|$

באופן דומה נגדיר את $<, \leq$ של עוצמות ביחס למספרים.

**משפטים נוספים:**

1. לכל $A$ סופית מתקיים $|A| < |\mathbb{N}|$
2. (AC) לכל קבוצה אינסופית $A$ מתקיים $|\mathbb{N}| \leq |A|$
3. (AC) $A$ אינסופית אמ"N קיימת $B \subsetneq A$ כך ש־$|A| = |B|$

[אומנם הטענות להלן מתבססות על אקסיומת הבחירה, אך מותר להשתמש בהן. נשים לב שהשימוש באקסיומת הבחירה אסור]

משום שעוצמת הטבעיים היא "העוצמה בסיסית", נסמן $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ (ולא, *אסור* לכתוב בכתב. תסתדרו עם כתיב).

העשרה: ככל הנראה משתמשים באות א' כי קנטור (המפתח העיקרי של תורת הקבוצות) היה יהודי, והוא חיפש סימון שלא תפוס ל־2000000 שימושים שונים (כמו האותיות הלטיניות והיווניות), והוא בחר את א'. נ.ב. הוא המיר את הדת שלו לנצרות.

כל קבוצה בעלת עוצמה $\aleph_0$ תקרא בת־מניה (ברבים: בנות־מניה). נניח $A$ בת־מניה, נסיק שקיים זיווג $f: \mathbb{N} \to A$ כך שנוכל לרשום $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

לא פומרלית, ניתן "למספר" את האיברים בה, כלומר $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ (הוא סימון חוקי עבור $a_0$ **קבוצות סופיות ובנות מניה**, אך יש צורך להגדיר את הזיווג ידנית ע"י $a_n := f(n)$ כל פעם שנרצה להשתמש בו).

**משפט:** הקבוצות הבאות בנות־מניה: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{\text{odd}},\mathbb{N}_{\text{even}}$, $\forall n\in\mathbb{N}_+.|\mathbb{N}^n|=\aleph_0$ [הבהרה: $\mathbb{N}^3=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, אין לערבב עם $\mathbb{N}^{(n)}$ של הרכבת יחסים] (אפשר להוכיח באינדוקציה), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

נתחיל מלהוכיח שהשלמים ברי־מניה. נגדיר:

$$\mathrm{f}:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}, f=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{if } \in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{n+1}{2} & \text{if } n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

ניתן להוכיח ש־$f$ זיווג (זה *לא* טרוויאלי ויש להוכיח זאת), ולכן $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}|$.

הוכחה לכך שהרציונלים בני־מנייה:

ברור שאפשר לעשות קש"ב על השבר המצומצם ביותר או משהו כזה, וננסה למצוא את הדרך האלגנטית ביותר לעשות זאת. נעשה זאת בשיעור הבא.