עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

שחר פרץ

28 בספטמבר 2024

Combinatorics

(1)

(א) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים, אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: ראשית כל, נתבונן ב־$52!$ הסידורים האפשריים של החפיסה כולה. עתה נתבונן בקבוצת המשלים – כמות האפשרויות לחפיסות בהן ישנם 4 אסים רצופים. סדרה שכזו יכולה להתחיל ולהגמר ב־$52-4$ מקומות שונים, ובכל אופציה, את $52-4=48$ הקלפים הנותרים, יהיו $48!$ אפשרויות לסדר. סה"כ מכלל הכפל $58 \cdot 48!$ אפשרויות בקבוצת המשלים. אזי:

$$\mathscr{A}nswer = \mathbf{52 - 48 \cdot 48!}$$

(ב) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש בהן כל 4 קלפים מאותו הסוג (13 סוגים שונים) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: נגדיר $a_i =$ כמות האפשרויות לסידור בו i רצפים של 4 תווים. מובן כי $0 \le i \le \frac{52}{4} = 13$ (לא ייתכנו רצפים בסדר גודל הארוך יותר מהחפיסה כולה).

כדי למצוא את a_i, נבחר את הרצף הראשון מבין 13 האפשרויות, ואז נמצא $48 \cdot 48!$ באופן דומה לסעיף הקודם. נמשיך הלאה: השני מבין 12 האפשרויות שנותרו, ולכך יהיו $44 \cdot 44!$ אפשרויות. בכלליות:

$$a_i = \sum_{j=1}^{i} (14-i) \cdot (52-4i) \cdot (52-4i)!$$

ומעקרון ההכלה וההדחה, אם $A_i =$ קבוצת כל הרצפים באורך 4 מסוג נתון, ומשום שאין הגבלה על הכלליות בבחירת קלף מסויים, $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ זהה בערכו לכל $I \in [n]$ כך ש־$|I|$ קבוע בגודל k, ובפרט שווה ל־a_k (המקרה הסמטרי של העקרון), ובשילוב עם עקרון המשלים (על קבוצת על הקומבינציות שגודלה $52!$), נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}nswer &= 52! - \sum_{\emptyset \neq I \in [n]} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (14-k)(52-4i) \cdot (52-4i)!
\end{aligned}$$

(2)

(3)

(4)

(5)

Graph Theory

. . . . (1) . . . .

. . . . (2) . . . .

. . . . (3) . . . .

. . . . (4) . . . .

. . . . (5) . . . .

. . . . (6) . . . .

. . . . (7) . . . .

. . . . (8) . . . .

. . . . (9) . . . .

. . . . (10) . . . .