מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 12 - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך הגשה:	ניתן בתאריך:
תחפשו בקומיטים הקודמים	שחר פרץ	10.2.2024	7.2.2024

תרגיל בית 12 - יחסי שקילות ואי־תלות בנציגים

שאלה 1

סעיף (א)

תהי $h \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה, נגדיר לסעיף הזה ולסעיפים הבאים את יחס השקילות R_h באופן הבא:

$$R_h = \{f, g\rangle \in (A \to \mathbb{N})^2 \mid h \circ f = h \circ g\}$$

נוכיח ש־R_h יחס שקילות:

- רפלקסיביות: יהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נוכיח $\langle f, f\rangle \in R_h$, כלומר $h \circ f = h \circ f$ שמתקיים באופן ברור.
- סימטריות: יהיו $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח $\langle f, g\rangle \in R_h$. מההנחה $h \circ f = h \circ g$ ומקומוטטיביות שוויון קבוצות $h \circ f = g \circ h$ וסה"כ $\langle g, f\rangle \in R_h$ כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהיו $f, g, k \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח $\langle f, g\rangle \in R_h \wedge \langle g, k\rangle \in R_h$, נוכיח $\langle f, k\rangle \in R_h$. מההנחה $h \circ f = h \circ g \wedge h \circ g = h \circ k$ ומטרנזיטיביות שוויון קבוצות $h \circ f = h \circ k$ וסה"כ $\langle f, k\rangle \in R_h$ כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נקבע $h' = \lambda n \in \mathbb{N}.n \bmod 2$. נוכיח ש־$\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ מערכת נציגים ליחס $R_{h'}$.

לפנות הכל, נוכיח כמה טענה שתעזור לנו בהמשך:

טענה (1): תהי פונקציה $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, נוכיח $h \circ f = f$: לפי כלל η, צ.ל. $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)$ (שמתקיים לפי הצבה) ונוסף על כך צ.ל. $\forall x \in \mathbb{N}.(h \circ f)(x) = f(x)$, כלומר $\forall x \in \mathbb{N}.h(f(x)) = f(x)$. נפצל למקרים:

- אם $f(x) = 0$ אז $h(f(x)) = h(0) = 0 \bmod 2 = 0 = f(x)$ כדרוש.
- אם $f(x) = 1$ אז $h(f(x)) = h(1) = 1 \bmod 2 = 1 = f(x)$ כדרוש.
- אם $f(x) \neq 0, 1$ אז $f(x) \notin \mathrm{range}(f)$ וזו סתירה.

סה"כ $f = h \circ f$ כדרוש.

עתה, ניגש להוכחה עצמה:

- קיום: תהי פונקציה $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נוכיח קיום $g\in\mathbb{N}\to\{0,1\}$ כך ש־$h\circ f=h\circ g$. נבחר $g=h\circ f$, לפי טענה (1) $g=h\circ g$ ולכן סה"כ מהצבה $h\circ f=h\circ g$ כלומר fR_hg כדרוש.
- יחידות: תהי $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ויהיו $g_1,g_2\colon \mathbb{N}\to\{0,1\}$, נניח $g_1R_{h'}f\wedge g_2R_{h'}f$ ונוכיח $g_1=g_2$. לפי ההנחה בשילוב עם טענה (1) נסיק $g_1=g_1\circ h=f\circ h\wedge g_2=g_2\circ h=f\circ h$ כלומר מטרנזיטיביות $g_1=g_2$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נניח h זיווג. נוכיח ש־$(A\to\mathbb{N})/R_h=\{\{f\}\mid f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$.

תהי $f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נוכיח $[f]_{R_h}=\{f\}$ באמצעות הכלה דו־כיוונית: מרפלקסיביות $\{f\}\subseteq[f]_{R_h}$, ונשאר להוכיח $[f]_{R_h}\subseteq\{f\}$, כלומר תהי $g\in[f]_{R_h}$ ונוכיח $g\in\{f\}$ ובניסוח שקול $g=f$). נניח בשלילה $f\neq g$. משוויון פונקציות, קיים $\tilde{x}$ כך ש־$f(\tilde{x})\neq g(\tilde{x})$. מההנחה $g\in[f]_{R_h}$ נסיק fR_hg, כלומר $h\circ f=h\circ g$, ומשוויון פונקציות $\forall x\in .h(f(x))=h(g(x))$. משום ש־$h$ זיווג ובפרט על אז קיים $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ כך ש־$g(\tilde{x})=h(y_2)$, $f(\tilde{x})=h(y_1)$, ומשום שהטענה לעיל מקיימת בפרט עבור $x=\tilde{x}$ אז $h(f(\tilde{x}))=h(g(\tilde{x}))$, ולכן $h(y_1)=h(y_2)$. מהצבה $y_1\neq y_2 \implies f(\tilde{x})\neq g(\tilde{x})$ ומשום ש־h זיווג ובפרט חח"ע אז מסיבה זו $h(y_1)\neq h(y_2)$ וסה"כ $h(y_1)=h(y_2)\wedge h(y_1)\neq h(y_2)$ שזו סתירה לח"ע הפונקציה h.

משום שהוכחנו שלכל $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מתקיים $[f]_{R_h}=\{f\}$, אזי נוכל לקבוע:

$$(A\to\mathbb{N})/R_h:=\{[f]_{R_h}\mid f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}=\{\{f\}\mid f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}\qquad \mathscr{Q.E.F.}$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים לפי הגדרה והשוויון השני מתקיים מהצבה בטענה שהוכחנו.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד)

נוכיח:

$$A:=\{h\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\colon |(A\to\mathbb{N})/R_h|=1\}=\{f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\colon \exists c\in\mathbb{N}.\forall n\in\mathbb{N}.f(n)=c\}:=B$$

נעשה זאת באמצעות הכלה דו כיוונית.

- יהי $f\in A$, נוכיח $f\in B$. לפי ההנחה $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ וגם $|(A\to\mathbb{N})/R_h|=1$. לפיכך, נסיק שלכל $f,g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מתקיים fR_hg כלומר $h\circ f=h\circ g$. נניח בשלילה שלא קיים $c\in\mathbb{N}$ ש־h קבועה בו. לפיכך, קיימים $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$h(x_1)\neq h(x_2)$. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$\mathrm{f}=\lambda x\in\mathbb{N}.x_1, g=\lambda x\in\mathbb{N}.x_2$$

מההנחה $h\circ f=h\circ g$ משוויון פונקציות $\forall x\in\mathbb{N}.h(f(x))=h(g(x))$ ומכלל β מתקיים $\forall x.h(x_1)=h(x_2)$ וזו סתירה.

- נניח $h\in B$ ונוכיח $h\in A$. מההנחה קיים $c\in\mathbb{N}$ כך ש־$n\in\mathbb{N}.f(n)=c$ ולכן מכלל η אפשר לקבוע $f=\lambda n\in\mathbb{N}.c$. נוכיח $f\in A$, כלומר נוכיח $|(A\to\mathbb{N})/R_h|=1$. ידוע $|(A\to\mathbb{N})/R_h|\neq 0$ כי R_h אינו היחס הריק ולכן ניתן לבצע החלפה. נניח בשלילה $|(A\to\mathbb{N})/R_h|>1$, ומהנחת השלילה קיימים $f_1,f_2\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש־$[f_1]_{R_h}\neq[f_2]_{R_h}$. לכן, $\neg f_1R_hf_2$ ולכן $f_1\circ h\neq f_2\circ h$.

נראה שזו סתירה; נוכיח $f_1\circ h=f_2\circ h$ באמצעות כלל η;

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{N}.(h \circ f_1)(x) = (h \circ f_2)(x)\\ \iff& \forall x \in \mathbb{N}.h(f_1(x)) = h(f_2(x))\\ \iff& \forall x \in \mathbb{N}.c = c\end{aligned}$$

כאשר האחרון פסוק אמת. סה"כ הגענו לסתירה ולכן $|(A \to \mathbb{N})/R_h| = 1$, ובאופן שקול מעקרון ההפרדה $h \in A$ כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ה)

נקבע:

$$\mathrm{h} = \lambda n \in \mathbb{N} \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n-1 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נוכיח ש־F מוגדרת היטב:

$$F =: (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R_h \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}), F = \lambda [f]_{R_h} \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R_h.\lambda n \in \mathbb{N}. \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$$

או באופן שקול, נוכיח שהפונקציה $G = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\lambda n \in \mathbb{N}. \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$ בלתי תלויה בנציג. יהיו $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ונניח fR_hg. נוכיח $F(f) = F(g)$, כלומר $\lambda n \in \mathbb{N}. \left\lfloor \frac{g(n)}{2} \right\rfloor = \lambda n \in \mathbb{N}. \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$, ומכלל η יהי $n \in \mathbb{N}$, ונוכיח $\left\lfloor \frac{g(n)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$. מההנחה fR_hg נסיק ש־$h \circ f = h \circ g$, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$h(f(n)) = h(g(n))$. נפלג למקרים:

- אם $f(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $h(f(n)) = f(n) = h(g(n))$. לכן, $g(n) = f(n) \lor g(n) = f(n) + 1$ לפי הפיצול למקרים של h (אפשר להוכיח את זה עם עוד שתי שורות אבל זה נראה לי מיותר). נפלג למקרים:
  - אם $g(n) = f(n)$ אז $\left\lfloor \frac{g(n)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$ כדרוש.
  - אם $g(n) = f(n) + 1$ אז משום ש־$f(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $\left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor = \frac{f(n)}{2} := c \in \mathbb{N}$ ולכן $g(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ולכן $\frac{g(n)}{2} = \frac{f(n)}{2} + 0.5 = c.5$ וסה"כ $\lfloor c.5 \rfloor = c$ ומטרנזיטיביות והצבה $\left\lfloor \frac{g(n)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$ כדרוש.
- אם $f(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $\left\lfloor \frac{g(n)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$ באופן דומה למקרה לעיל.

סה"כ $G(f) = G(g)$ ולכן G בלתי תלויה בנציג ובפרט F מוגדרת היטב כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

שאלה 2

סעיף (א)

יהי $h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר לסעיף הזה ולסעיפים הבאים את $S_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$S_h = \left\{ \langle f, g \rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \right\}$$

נוכיח S_h יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהי $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נוכיח fS_hf כלומר נוכיח $f(x) \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x)$ שמתקיים באופן ברור.
- סימטריות: יהיו $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נניח fS_hg כלומר $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ ומקומטטיביות שוויון מספרים gS_hf כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהיו $f, g, k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נניח $fS_hg \wedge hS_hk$ ונסיק:

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \wedge g(x) \cdot h(x) = k(x) \cdot h(x)$$

לפי טרזיטיביות שוויון מספרים $f(x) \cdot h(x) = k(x) \cdot h(x)$ וסה"כ fS_hk כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

סעיף (ב)

טענה: $\forall x \in \mathbb{R}.h(x) \neq 0 \iff S_h = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. נוכיח את שתי הגרירות.

- נניח $S_h = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$. נניח בשלילה שקיים $x_1 \in \mathbb{R}$ כך ש־$h(x_1) = 0$. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$\mathrm{f} = \lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_1 \\ = x & \end{cases}, g = \lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 2 & \text{if } x = x_1 \\ x & \end{cases},$$

ידוע $f \neq g$ כי . נוכיח , כלומר $\forall x \in \mathbb{R}.f(x)h(x) = g(x)h(x)$. יהי $x \in \mathbb{R}$, נפצל למקרים:

  - אם $x = x_1$ אז $f(x)h(x) = 1 \cdot 0 = 2 \cdot 0 = g(x)h(x)$ כדרוש.
  - אם $x \neq x_1$ אז $fS_hgf(x_1) = 1 \neq 2 = g(x_1)f(x)h(x) = xh(x) = g(x)h(x)$ כדרוש.

סה"כ הפונקציות אינן שוות אך שקולות, וזו סתירה. $\neg(\exists x \in \mathbb{R}.h(x) = 0)$ ובאופן שקול $\forall x \in \mathbb{R}.h(x) \neq 0$ כדרוש.

- נניח שלכל x לא מתקיים $h(x) = 0$. נוכיח $S_h = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$, כלומר יהיו $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מתקיים $f = g \longleftrightarrow fS_hg$. נוכיח את שתי הגרירות.
  - נניח $f = g$, נוכיח $f(x)h(x) = g(x)h(x)$. משוויון פונקציות $\forall x.f(x) = g(x)$ ולכן $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ מהצבה כדרוש.
  - יהי $x \in \mathbb{R}$, נניח $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, נוכיח $f = g$, כלומר $f(x) = g(x)$. משום ש־$h(x) \neq 0$ אז נוכל לחלק אגפים ולקבל $f(x) = g(x)$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

סעיף (ג)

נגדיר לסעיף זה ולסעיף הבא:

$$h_1 \sim h_2 \iff S_{h_1} = S_{h_2}$$

טענה: $h_1 = \lambda n \in \mathbb{N}.1, h_2 = \lambda n \in \mathbb{N}.0$ מקיימות $\neg h_1 \sim h_2$. כדי להוכיח זאת נסתמך על סעיף (ד) שהוכח ללא תלות בסעיף זה. נניח בשלילה שהן מקיימות $h_1 \sim h_2$, לפיכך מסעיף (ד) $F([h_1]_\sim) = F([h_2]_\sim)$ אחרת F אינה מוגדרת היטב. לכן, $\{x \in \mathbb{R} \mid h_2(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid h_1(x) = 0\}$. מכלל β נקבל $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 = 0\}$ כלומר $\mathbb{R} = \emptyset$ וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

סעיף (ד)

נגדיר:

$$F\colon ((\mathbb{R}\to\mathbb{R})/\sim)\to\mathcal{P}(\mathbb{R}), F=\lambda[f]_\sim.\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$$

נוכיח ש־F חח"ע ומוגדרת היטב.

מוגדרת היטב

נוכיח $F'=\lambda f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$ בלתי תלויה בנציג, כלומר לכל $f\sim g$ מתקיים $F'(f)=F'(g)$. באופן שקול, נוכיח $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$, לכן, משוויון קבוצות, יהי $\tilde{x}\in\mathbb{R}$, נוכיח $f(x)=0\longleftrightarrow g(x)=0$, ובה"כ נוכיח $g(\tilde{x})=0\implies f(\tilde{x})=0$. נניח $f(\tilde{x})=0$, ונניח בשלילה $g(\tilde{x})\neq 0$. מההנחה $f\sim g$ נסיק $S_f=S_g$, כלומר סה"כ נגרר לכל h_1,h_2 מתקיים שאם לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים$f(x)h_1(x)=f(x)h_2(x)$ אז נגרר שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $g(x)h_1(x)=f(x)h_2(x)$. נתבונן בפונקציות h_1,h_2 המוגדרות באופן הבא:

$$\mathrm{h}_1=\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases}1 & \text{if } x=\tilde{x}\\ x & \text{else}\end{cases}, h_2=\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases}2 & \text{if } x=\tilde{x}\\ x & \text{else}\end{cases}$$

מההנחה, בפרט עבור $x=\tilde{x}$ מתקיים $g(\tilde{x})h_1(\tilde{x})=f(\tilde{x})h_2(\tilde{x})$ ולכן $2f(\tilde{x})=1g(\tilde{x})$. ידוע $f(\tilde{x})=0$ וסה"כ $g(\tilde{x})=2\cdot 0=0$ כלומר $g(\tilde{x})\neq 0\wedge g(\tilde{x})=0$ וזו סתירה להיות g פונקציה ובפרט ח"ע.

סה"כ $g(\tilde{x})=0\implies f(\tilde{x})=0$ ומסימטריה $g(x)=0\longleftrightarrow f(x)=0$ כדרוש.

חח"ע

יהיו f_1,f_2 ונניח $[f_1]_\sim\neq[f_2]_\sim$. נוכיח $F([f_1]_\sim)\neq F([f_1]_\sim)$, ובאופן שקול נוכיח:

$$\{x\in\mathbb{R}\mid f_1(x)=0\}\neq\{x\in\mathbb{R}\mid f_2(x)=0\}$$

כלומר קיום $x\in\mathbb{R}$ בעבורו $\neg(f_1(x)=0\longleftrightarrow f_2(x)=0)$, ולכן:

$$\neg(f_1(x)=0\longrightarrow f_2(x)=0)\vee\neg(f_2(x)=0\longrightarrow f_1(x)=0)$$

שלפי חוקי הלוגיקה שקול לכך ש־$(f_1(x)=0\wedge f_2(x)\neq 0)\vee(f_2(x)=0\wedge f_1(x)\neq 0)$.

מההנחה $[f_1]_\sim\neq[f_2]_\sim$ נסיק $\neg f_1\sim f_2$, כלומר $S_{f_1}\neq S_{f_2}$. לכן ידוע שקיימות g,h עבורן קיים $\tilde{x}\in\mathbb{R}$ כך ש־$\neg(f_1(\tilde{x})g(\tilde{x})=f_1(\tilde{x})h(\tilde{x})\longleftrightarrow f_2(\tilde{x})g(\tilde{x})=f_2(\tilde{x})h(\tilde{x}))$. נבחר $x=\tilde{x}$. אם $f_1(x)=0\wedge f_2(x)=0$ אז סה"כ $\neg(0=0\longleftrightarrow 0=0)$ וזו סתירה, ולכן $f_1(x)\neq 0\vee f_2(x)\neq 0$ ובה"כ $c_1:=f_2(x)\neq 0$. נוכיח $f_1(x)=0$. נניח בשלילה $c_2:=f_1(x)\neq 0$ ונסיק $\neg(c_1g(\tilde{x})=c_1h(\tilde{x})\longleftrightarrow c_2g(\tilde{x})=c_2h(\tilde{x}))$ כלומר מחלוקת אגפים סה"כ נקבל $\neg(g(\tilde{x})=h(\tilde{x})\longleftrightarrow g(\tilde{x})=h(\tilde{x}))$ וזו סתירה. סה"כ $f_1(x)=0\wedge f_2(x)\neq 0$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

שאלה 3

סעיף (א)

נגידר באופן הבא לסעיף הזה ולסעיפים הבאים את $T\subseteq(\mathbb{N}\to\mathbb{N})^2$ באופן הבא:

$$T=\left\{\langle f,g\rangle\in(\mathbb{N}\to\mathbb{N})^2\colon\forall n\in\mathbb{N}.2\mid(f(n)-g(n))\right\}$$

נוכיח ש־T יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נוכיח fTf כלומר $\forall n\in\mathbb{N}.2\mid(f(n)-f(n))=0$ וסה"כ $2\mid 0$ כדרוש.
- סימטריות: יהיו $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נניח fTg ונוכיח gTf. יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $2\mid g(n)-f(n)$. מההנחה $2\mid f(n)-g(n)$, כלומר קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$2k=f(n)-g(n)$. נתבונן ב־$\tilde{k}=-k$ ומהכפלת האגפים ב־-1 נמצא ש־$2\tilde{k}=-2k=g(n)-f(n)$ כלומר $2\mid g(n)-f(n)$ ו־gTf כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהיו $f,g,h\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נניח $fTg\wedge gTh$, ונוכיח fTh. יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח קיום $k_3\in\mathbb{N}$ כך ש־$2k_3=f(n)-h(n)$. מההנחה נסיק קיום $k_1,k_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$2k_1=f(n)-g(n)$ וגם $2k_2=g(n)-h(n)$. נבחר $k_3=k_1+k_2\in\mathbb{N}$. נחבר משוואות ונקבל:

$$2k_1+2k_2=f(n)-g(n)+g(n)-h(n)$$
$$2k_3=2(k_1+k_2)=f(n)-h(n)$$

וסה"כ $2\mid f(n)-h(n)$ כלומר fTh כדרוש.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ב)

טענה: $\mathbb{N}\to\{0,1\}$ מערכת נציגים.

- **קיום נציג:** יהי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, נוכיח קיום $g:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ כך ש־fTg. נבחר את הפונקציה הבאה:

$$\mathrm{g}=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & \text{if } f(n)\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 1 & \text{if } f(n)\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $2\mid f(n)-g(n)$, כלומר $f(n)-g(n)$ זוגי. נפלג למקרים:

  - אם $f(n)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$, אז $g(n)=0$ וסה"כ $f(n)-g(n)=f(n)-0=f(n)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$.
  - אם $f(n)\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$, אז $g(n)=1$ וסה"כ $f(n)-g(n)=f(n)-1\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ (חיסור אי־זוגיים הוא זוגי).

סה"כ fTg כדרוש.

- יחידות נציג: יהי $h\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ויהיו $f,g\in\mathbb{N}\to\{0,1\}$, נניח $fTh\wedge gTh$ ולכן מטרנזטיביות וסימטריות fTg. נוכיח $f=g$. נניח בשלילה ש־$f\neq g$ ולכן קיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש־$f(x)\neq g(x)$. ידוע שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)-g(n)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$, ובפרט עבור $n=x$ ולכן $f(x)-g(x)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$. מסימטריות T בה"כ $f(x)=0$ ומשום ש־$\mathrm{range}(g)=\{0,1\}\wedge f(x)\neq g(x)$ אז $g(x)=1$ וסה"כ $f(x)-g(x)=0-1=-1\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ וזו סתירה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ג)

טענה: הפונקציה H חח"ע ומוגדרת היטב;

$$\mathrm{H}:((\mathbb{N}\to\mathbb{N})/T)\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N}),H=\lambda[f]_T\in(\mathbb{N}\to\mathbb{N})/T.\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & \text{if } f(n)\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 1 & \text{if } f(n)\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

מוגדרת היטב

כדי להוכיח שהפונקציה מוגדרת היטב, נוכיח ש־F המוגדרת באופן הבא בלתי תלויה בנציג:

$$\mathrm{F} = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} 0 & \text{if } f(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 1 & \text{if } f(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

כלומר, יהיו $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציות ונניח fTg, נוכיח $F(f) = F(g)$. מההנחה, נסיק שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) - g(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. מכלל η, נצטרך להוכיח שיהי n, וצ.ל. $F(f)(n) = F(g)(n)$. נפלג למקרים: אם $f(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, אז $F(f)(n) = 0$ וגם נניח בשלילה ש־$g(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ונסיק $f(n) - g(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ שזו סתירה וסה"כ $g(n) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, לכן $F(g)(n) = 0$ ומטרנזיטיביות $F(f)(n) = F(g)(n)$ כדרוש. אם $f(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז המקרה הזו באופן דומה יגרור ש־$g(n) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ולכן סה"כ $F(f)(n) = 1 = F(g)(n)$. התנאי האחרון של כלל η הוא ש־$\mathrm{dom}(F(f)) = \mathrm{dom}(F(g))$ שמתקיים מתוך תחשיב למדא. כיסינו את כל המקרים והוכחנו את שוויון הפונקציות $F(g) = F(f)$, כדרוש.

חח״ע

יהיו $[f]_T \neq [g]_T$ מחלקות שקילות של $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונסיק $\neg fTg$. נוכיח $F(f) \neq F(g)$. מההנחה נסיק שקיים $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ בעבורו $f(\tilde{n}) - g(\tilde{n}) := n' \notin \mathbb{N}_{\text{even}}$. נניח בשלילה ש־$F(f) = F(g)$, ובפרט משוויון פונקציות לכל $\forall n \in \mathbb{N}.F(f)(n) = F(g)(n)$, ובפרט, עבור $n = \tilde{n}$. נסיק $F(f)(\tilde{n}) = F(g)(\tilde{n})$, ולפי כלל β ופיצול למקרים, בה"כ $F(f)(\tilde{n})$, ונסיק $F(g)(\tilde{n}) = 0$ גם הוא. לכן, סה"כ בהתאם להגדרת $F(f), F(g)$ המפוצלת למקרים נסיק ש־$f(\tilde{n}), g(\tilde{n}) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ ומשום שחיבור (ובפרט חיסור) זוגיים הוא זוגי נסיק $n' = f(\tilde{n}) - g(\tilde{n}) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ בסתירה לכך ש־$n' \notin \mathbb{N}_{\text{even}}$. סה"כ $F(f) \neq F(g)$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

~ סוף ~