חדו"א 1א ~ תרגיל בית 4

שחר פרץ

1 בדצמבר 2025

(1)

נחשב את הגבולות הבאים:

(א) יהיו $a_0 \dots a_k \geq 0$ כלשהם. נמצא את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots a_1 n + a_0}$$

ניעזר במשפט הסנדוויץ':

$$0 \leq \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots a_1 n + a_0} \leq \sqrt[n]{n \cdot a_k n^k}$$

נבחין שהחסם העליון שואף ל־0:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot a_k \cdot n^k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{k+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = 0 \cdot 0 = 0$$

וכמובן שגם הגבול התחתון. מכאן שהגבול הוא 0.

(ב) נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{c_n}$$

ראשית כל, נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} n + 1 - \sqrt{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} n+1-\sqrt{n^2+n} \cdot \frac{n+1+\sqrt{n^2+n}}{n+1+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - (n^2+n)}{n+1+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1+\sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) + \sqrt{\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

נגדיר את הסדרות הבאות:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad b_n = \sqrt{n} \quad \implies \quad c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

ואז, נחשב את הגבול הבא, תוך היעזרות בגבול שחשבנו בהתחלה:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1-(\sqrt{n^2+n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{0.5} = 2$$

משום שהגבול קיים, ממשפט צ'זארו $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 2$ כלומר $\lim_{n\to\infty} c_n = 2$ וסיימנו.

(ג) יהי $k \in \mathbb{N}$. נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{(k+i)!}{i!}}{n^{k+1}}$$

ננסה להיעזר בצ'אזרו בתקווה שהגבול קיים:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(k+i)!}{i!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{(k+i)!}{i!}}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\frac{\frac{(k+n+1)!}{(n+1)!}}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\frac{(n+1)\cdots(n+k+1)}{((n+1)^{k+1}-n^{k+1})}=\frac{(n+1)\cdots(n+k+1)}{\sum_{i=0}^{k+1}\left(\binom{k+1}{i}n^i\right)-\sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}n^i\right)}=:\frac{P}{Q}$$

אחרי שפתחנו את הבינום של ניוטון להנאתנו, נחלק ב־n^k את שני האגפים. לכל $n\geq 3k$ מתקיים:

$$\frac{P}{n^k}\geq\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{n+2}{n^2}+\cdots\frac{n+k+1}{n^2}\geq\frac{n^2}{n^2}=1$$

מזהות פסקל $\binom{n+1}{i}-\binom{n}{i}=\binom{n-1}{i-1}$. גם כאן, לכל $n\geq 2k$:

$$\frac{Q}{n^k}=\frac{(k+1)n^k+\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+1}{i}-\binom{n}{i}\right)n^i}{n^k}=(k+1)+\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{(i-1)\cdots(n-1)\cdot n^i}{n^k}}_{\geq\frac{n^{2k-2}}{n^{3k}}}\geq(k+1)+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i^n}\xrightarrow{n\to\infty}(k+1)$$

סה"כ קיבלנו מאריתמטיקת גבולות:

$$\triangle=\frac{P}{Q}=\frac{\frac{P}{n^k}}{\frac{Q}{n^k}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{k+1}$$

כלומר הגבול קיים, ולכן ממשפט צ'אזרו הגבול הכיפי למעלה שואף ל־$\frac{1}{k+1}$ וסיימנו.

(2)

יהיו $0<b_1<a_1$ כאשר $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ ו־$b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. נוכיח ששתיהן מתכנסות סימולטנית ל־$\sqrt{a_1b_1}$.

הוכחה. נבחין ש־:

$$a_{n+1}=\mathrm{AM}(a_n,b_n)\quad b_{n+1}=\mathrm{HM}(a_n,b_n)$$

ומשום שבהינתן $x<y$ מתקיים $x<\mathrm{HM}(x,y)<\mathrm{AM}(x,y)<y$, באינדוקציה על הבסיס $0<b_1<a_1$ נקבל:

$$0<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n<a_1$$

נבחין ש־a_n מונוטונית יורדת חסומה ע"י 0 ולכן מתכנסת. נבחין ש־b_n מונוטונית עולה חסומה ע"י a_1 ולכן מתכנסת. סה"כ שתיהן מתכנסות, וממשפט בגלל ש־$a_n>b_n$, לאותו הגבול. (TODO: להראות ש־$\lim_{n\to\infty}a_n-b_n=0$)

נניח שהן מתכנסות לערך ℓ כלשהו. בגלל ש־b_n מונוטונית עולה ו־a_n מונוטונית יורדת, נקבל $a_n>\ell>b_n$. יהי $\varepsilon>0$. בעבור $\frac{1}{2}\varepsilon$ מהגדרת הגבול, קיים $N\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $n>N$ מתקיים:

$$\begin{cases}a_n-\ell=|a_n-\ell|<\frac{1}{2}\varepsilon\\ \ell-b_n=|b_n-\ell|<\frac{1}{2}\varepsilon\end{cases}\implies \cancel{a_n-\ell+\ell}+b_n=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

מא"ש הממוצעים:

$$\mathrm{AM}-\mathrm{HM}=\underbrace{(\mathrm{AM}-\mathrm{GM})}_{\geq 0}+\underbrace{(\mathrm{GM}-\mathrm{HM})}_{\geq 0}>\mathrm{AM}-\mathrm{GM},\ \mathrm{GM}-\mathrm{HM}$$

בפרט:

$$\varepsilon>|a_n-b_n|=|\mathrm{AM}(a_{n+1},b_{n+1})-\mathrm{HM}(a_{n+1},b_{n+1})|>|\mathrm{AM}(a_{n+1},b_{n+1})-\mathrm{GM}(a_{n+1},b_{n+1})|\overset{(1)}{>}|a_{n+1}-\mathrm{GM}(a_1,b_1)|$$

כאשר (1) מתקיים כי באינדוקציה $\mathrm{GM}(a_{>1},b_{>1})<\mathrm{GM}\left(a_1,b_1\right)$ שכן $a_{n+1}>a_n>b_n>b_{n+1}$ ואז נקבל את הצעד:

$$|a_{n+1},b_{n+1}|>|a_n,b_{n+1}|>|a_n,b_n|>|a_1,b_1|$$

ו־GM משמר גודל.

סה"כ a_n,b_n מתכנסות שתיהן לאותו הגבול $\ell=\mathrm{GM}(a_1,b_1)=\sqrt{a_1,b_1}$. ■

(3)

נפריך ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות:

(א) תהי a_n סדרה. נניח $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=L$, אז $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

הפרכה. נגדיר $a_n=(-1)^n$. נבחין שהטור ש־a_n יוצרת הוא $\sum_{i=0}^n a_n=\delta_{\mathbb{N}_{\text{even}}}(n)$ כאשר:

$$\delta_{\mathbb{N}_{\text{even}}}(n)=\begin{cases}0 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\\ 1 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\end{cases}\qquad 0\le g(n)\le 1$$

ואז נקבל:

$$0\le\frac{g(n)}{n}\le\frac{1}{n}\to 0$$

כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^n(-1)^n}{n}=0$. עם זאת, a_n חסרת גבול (הוכחנו זאת). ■

(ב) יהיו x_n,y_n סדרות כאשר y_n עולה ממש ושואפת ל־$+\infty$, וכן $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\ell$, אז $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

נבחר $y_n=n$ ו־$x_n=(-1)^n$. נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n-(-1)^{n+1}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(-1)^n}{1}=2\lim_{n\to\infty}(-1)^n$$

שלא קיים. עם זאת:

$$0\leftarrow-\frac{1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n}\to 0$$

כלומר $\frac{x_n}{y_n}=\frac{(-1)^n}{n}\to 0$, ומכאן ש־$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\to 0$, וזו סתירה.

(4)

תהי a_n סדרה מתכנסת, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n\neq 0$ ונניח $a_n\to 0$. נוכיח ש־:

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e$$

הוכחה. **למה.** מתקיים ש־:

$$c_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\to e$$

ראשית, נוכיח ש־a_n מונוטונית יורדת:

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}\implies\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\implies a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}=a_{n+1}$$

עתה נראה שהיא חסומה ע"י $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\overset{(1)}{>}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=c_n$$

כאשר (1) נכון כי $1-\frac{1}{n}$. עוד נבחין ש־:

$$\begin{aligned}b_n<c_n&\iff\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}\\&\iff\left(1^2-\frac{1}{n^2}\right)^n<1\\&\iff 1-\frac{1}{n^2}<1\iff\top\end{aligned}$$

כלומר אכן מתקיים $c_n < c_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. ממשפט c_n, b_n מתכנסים סימולטנית. משום ש־$b_n \to e$, אז $c_n \to e$, וסיימנו את הוכחת הלמה.

עתה נפנה להוכיח את המשפט. תהי a_n סדרה כך ש־$a_n \to 0$ ו־$a_n \neq 0$. נוכיח שהיא מתכנסת ל־e. יהי $\varepsilon > 0$. מהתכנסות $c_n \to e$ בהכרח קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־$|c_n - e| < \varepsilon$. באופן דומה מהתכנסות $b_n \to e$ בהכרח קיים N_2 עבורו $\forall n \geq N_2 \colon\ |b_n - e| < \varepsilon$. מהתכנסות a_n קיים $N_3 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N_3 \colon\ |a_n| < \frac{1}{n}$. אזי, לכל $n \geq N_3$:

- אם $a_n > 0$ אז:

$$a_n < \frac{1}{n} \implies -\varepsilon < 0 < \left|(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} - e\right| < \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| = |b_n - \varepsilon| < \varepsilon$$

- אם $a_n < 0$ אז:

$$a_n < -\frac{1}{n} \implies \varepsilon < 0 < \left|(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} - e\right| < \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} - e\right| = |c_n - \varepsilon| < -\varepsilon$$

כלומר בהכרח $|a_n - e| < \varepsilon$ וסיימנו. ■

(5)

נקבע האם $\sin n$ מתכנסת.

לא. אפילו לא קרובה להתכנס. נניח בשלילה ש־$a_n = \sin n$ מתכנסת ל־ℓ. נסמן את תמונתה ב־A. ממשפט בהרצאה, בסביבה נקובה $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ יש כמות אין־סופית מאיברי הסדרה, ומחוץ ממנה, יש כמות סופית. ידוע:

$$-1 \leq \sin n \leq \ell \leq \sin n \leq 1$$

כלומר $\ell \in [-1, 1]$. נסמן $A' = A \cap (\mathbb{R} \setminus [-1+0.5, 1-0.5]) = A \cap [-0.5, 0.5]$. בעבור $\varepsilon = 0.5$ נקבל ש־$|A'| < \aleph_0$. משום שיש בקבוצה כמות סופית של איברים, יש לה מינימום m_1, וגם ב־$A' \setminus \{m_1\}$ יש מינימום m_2. מצפיפות A ב־$[-1, 1]$ שהוכחנו בשיעורי הבית הקודמים, וכן משום ש־$m_1, m_2 \in [-1, 1] \triangle [-0.5, 0.5]$ (חיתוך סימטרי), בהכרח קיים $m' \in (m_1, m_2) \cap A$ כלשהו. נפריד למקרים.

א. אם $m_1, m_2 \in [-1, -0.5)$ או $m_1, m_2 \in (1, 0.5]$ אז $m' \in A'$ כלומר m_2 לא מינימלי ב־$A' \setminus \{m_1\}$ וסתירה.

ב. אם $m_1 \in [-1, -0.5)$ ו־$m_2 \in (0.5, 1]$ (המקרה ההפוך לא אפשרי כי $m_1 < m_2$) אז נגדיר $m_2 := -0.5$ וקיים $m' \in (m_1, m_2) \cap A$ מהצפיפות וסתירה כמו במקרה א'.

סה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים (הצפיפות גררה שלא יכולים להיות כמות סופית/בדידה של איברים מחוץ לסביבה). ■

(6)

תהי a_n סדרה. נניח ש־$a_{n+1} - a_n \to 0$. נוכיח ש־:

$$\mathcal{P}(a_n) = [\liminf a_n, \limsup a_n]$$

הוכחה. נניח ש־a_n חסומה, אחרת $\mathcal{P}(a_n)$ לא מוגדר אלא במובן הרחב.

נסמן ב־$i := \liminf a_n$ וב־$s := \limsup a_n$. יהי $a \in [\liminf a_n, \limsup a_n]$. נוכיח ש־$a$ גבול חלקי. יהיו $\varepsilon > 0, N_1 \in \mathbb{N}$ ונוכיח קיום $n > N_1$ כך ש־$|a_n - a| < \varepsilon$. נגדיר $\varepsilon_i = \frac{|a-i|}{2}$ ו־$\varepsilon_s := \frac{s-a}{2}$. נבחין ש־$\varepsilon_s, \varepsilon_i > 0$. מהנתון $a_{n+1} - a_n \to 0$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N_1 \colon\ |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$. נסמן $N = \max\{N_1, N_2\}$. מהגדרת גבול חלקי, קיים $n_1 \geq N$ כך ש־$|a_{n_1} - i| < \varepsilon_i$. באופן דומה קיים $n_2 \geq \max\{N, n_1\}$ כך ש־$|a_{n_2} - s| < \varepsilon_s$. סה"כ:

$$a_{n_1} < i + \varepsilon_i = i + \frac{i+a}{2} \leq a \leq s + \frac{s+a}{2} = s + \varepsilon_s < a_{n_2}$$

כלומר רצף האינדקסים $n_1 \dots n_2$ איפשהו כולל מעבר $n \in [n_1, n_2] \cap \mathbb{N}$ כך ש־$a_n \leq a \leq a_{n+1}$ (אפשר להראות את זה באינדוקציה, כי רצף האינדקסים סופי). אחרי שנעביר אגפים נקבל:

$$|a_n - a| = a - a_n < a_{n+1} - a_n = |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$$

כי $n \geq n_1 > N_2$. סה"כ הוכחנו את הדרוש. ■

(7)

נמצא סדרה a_n כך ש־$a_{n+1}-a_n\to 0$ וכן $\mathcal{P}(a_n)=[0,1]$. נוכיח ש־$a_n=2\left|\{\sqrt{n}\}-0.5\right|$ כאשר $\{x\}$ הערך השברי של x (הוא $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$).

הוכחה. קל לראות ש־$0\le a_n\le 1$ (נטו מתחומי ההגדרה של הפונקציות). בשיעורי בית קודמים הוכחנו ש־$\{\sqrt{x}\}$ בעלת איפימום 0, וסופרמום 1, ומכאן (עם מעט מאוד מניפולציות אלגבריות) ש־$\sup a_n=1\wedge\inf a_n=0$. ידוע ש־:

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0$$

נבחין מתנהגות המודלו:

$$0=-0\leftarrow-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\le a_n-a_{n+1}\le\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\to 0$$

ש־$a_n-a_{n+1}\to 0$. סה"כ ממשפט 6 בהכרח $\mathcal{P}(a_n)=[0,1]$ כנדרש. ■

(8)

תהי a_n סדרה חיובית כך ש־$\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow{n\to\infty}1$. נמצא דוגמה לפונקציה המקיימת כל אחת מהתוכנות הבאות:

- **התכנסות ל־0:** עבור $a_n=\frac{1}{n}$ מתקיים $a_n\to 0$ וגם:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

- **התכנסות ל־1:** עבור $a_n=\frac{1}{n}+1$ מתקיים $a_n\to 1$ וגם:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}+1}{\frac{1}{n}+1}=\lim\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}=\lim\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}=\lim\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=1$$

- **התבדרות ל־$+\infty$:** עבור $a_n=n$ מתקיים $a_n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$ ו־:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{1}=1$$

- **אי התכנסות במובן הרחב:** נגדיר את הסדרה:

$$a_n=\begin{cases}n & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{1}{n} & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

נבחין ש־$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ניתן לכיסוי ע"י שתי ת"סים, האחת $\frac{n}{n+1}$ והשנייה $\frac{n+1}{n}$, ושתיהן שואפות ל־1, כלומר ממשפט הכיסוי $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$. עם זאת, a_n מכיל גבול חלקי $\frac{1}{2n+1}$ וגבול חלקי $2n$, האחד שואף ל־0 והשני ל־$+\infty$, כלומר a_n בעל שני גבולות חלקיים שונים במובן הרחב ולכן לא מתכנס.

(9)

נגדיר $a_n=\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. נוכיח ש־$\mathcal{P}(a_n)=[0,1]$.

הוכחה. נתחיל מהמקרה הרציונלי. יהי $q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, אז קיימים $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש־$q=\frac{n}{m}$ וגם $m>n$. נגדיר את הסדרה:

$$n_k=(mk)^2+2nk$$

נבחין ש־:

$$(bk)^2<\underbrace{(mk)^2+2nk}_{n_j}<(mk)^22+2bk\cdot 1+1=(mk+1)^2\implies\lfloor\sqrt{n_k}\rfloor=bk$$

נותר להראות ש־a_{n_j} הינה ת"ס שואפת ל־q. אכן:

$$\begin{aligned} a_{n_j} &= \sqrt{n_j} - \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor && = \sqrt{n_k} - \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor \cdot \frac{\sqrt{n_k} + \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor}{\sqrt{n_k} + \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor} \\ &= \frac{n_k - \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor^2}{\sqrt{n_k} + \lfloor\sqrt{n_k}\rfloor} && = \frac{\cancel{(mk)^2 - (mk)^2} + 2nk}{\sqrt{(mk)^2 + 2nk + mk}} \\ &= \frac{\frac{2n\cancel{k}}{\cancel{k}}}{\sqrt{\frac{m^2\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} + 2\frac{n\cancel{k}}{k^{\cancel{2}}} + \frac{m\cancel{k}}{\cancel{k}}}} = \frac{2n}{\sqrt{m^2 + \frac{m}{k}} + m} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{m^2+m}} = \frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}m} = \frac{n}{m} = q \end{aligned}$$

דהיינו q גבול חלקי של a_n.

הערה: לא אני מצאתי את הת"ס הזו. הקרדיט שייך לנגה מפיזיקה.

עתה, יהי $r \in \mathbb{R} \cap [0,1]$ מספר כלשהו. נראה שהוא גבול חלקי לפי אחת מההגדרות השקולות. נסמן $A = \operatorname{Im} a_n$ לנוחות. יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן בסביבה $U = (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$. מצפיפות הרציונליים בממשיים קיימים $q_1, q_2 \in U \cap \mathbb{Q}$ כך ש־$q_1 < r < q_2$. בגלל שהם גבול חלקי של $\aleph_0$, בכל סביבה נקובה סביבם יש אינסוף איברים מ־A, ובפרט עבור $\varepsilon_2 := \frac{r+\varepsilon+q_2}{2}$ ו־$\varepsilon_1 = \frac{r+\varepsilon+q_1}{2}$ והסביבות שהן משרים המקיימות:

$$q_1 \in \underbrace{(r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1)}_{U_1} \subseteq (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \supseteq \underbrace{(r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2)}_{U_2} \ni q_2$$

יש אינסוף איברים מ־A, כלומר $|U_1 \cap A|, |U_2 \cap A| \geq \aleph_0$, ומכאן שבהכרח $|A \cap U| \geq \aleph_0$ (ממשפטי עוצמות) ומהגדרה שקולה שהראינו מתישהו, r גבול חלקי.

(השתמשו בעובדה ש־$r \in \mathbb{R} \cap [0,1]$ ולא $r \in \mathbb{R}$ כללי, כאשר טענו שהסביבות U_1, U_2 מוכלות ב־U) ■

(10)

נוכיח את משפט בולצאנו־וויראשטראס תוך שימוש בעקרון הרווחים המקוננים של קנטור, ללא שימוש באקסיומת השלמות.

הוכחה. יהי $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ שדה סדור מלא. בכל קונטקסט בו המושגים מוגדרים (דהיינו קשורים לכמתים), נסמן $b_0 =: \pi_1(c_n)$ ו־$\pi_2(c_n) =: a_0$.

תהי a_n סדרה חסומה. בפרט $-M < a_n < M$ עבור M כלשהו. אם $\operatorname{Im} a_n$ סופי, אז ת"ס קבועה קיימת בה בהכרח וסיימנו. אחרת, נגדיר את הסדרה הבאה:

$$c_n \colon \mathbb{N} \to A \times B \quad \begin{cases} c_1 = \langle -M, M \rangle \\ c_{n+1} = \begin{cases} \left\langle b_0, \frac{b_0+a_0}{2} \right\rangle & \text{if } \left| \left[b_0, \frac{b_0+a_0}{2}\right] \cap A \right| \geq \aleph_0 \\ \left\langle \frac{b_0+a_0}{2}, a_0 \right\rangle & \text{if } \left| \left[\frac{b_0+a_0}{2}, a_0\right] \cap A \right| \geq \aleph_0 \end{cases} \end{cases}$$

הסדרה מוגדרת היטב, כי:

- משפט הרקורסיה.
- משובך יונים, כאשר נחצה קבוצה B אינסופית ל־$B = C \oplus D$, אז C או D כוללים אינסוף איברים. בפרט על A ובאינדוקציה אחד משני התנאים מתקיים.

עתה נגדיר את הסדרות:

$$b_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad b_n = \pi_1 \circ c_n \quad a_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad a_n = \pi \circ c_n$$

מהגדרת c_n מתקיים ש־$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$. יהי $\varepsilon > 0$. ידוע קיום $N \in \mathbb{N}$ עבורו $\varepsilon > \frac{M}{2^{n-1}}$ (כן. צריך בשביל זה ארכימדיאניות. בדקתי, גם בויקיפדיה מופיעה אותה ההוכחה. גם בהרצאה אמרתם לנו להוכיח עם אריה במדבר. זה לא עובד, צריך ארכימדיאניות. למעשה כמו שהראה בהמשך התרגיל, מספיק קיום של סדרה מונוטונית עולה חיובית, אבל זה סיוט לאחר־כך, ובכל מקרה זה לא עובד בשדה סדור מלא כללי). בגלל שכל פעם אנו חוצים את הקטעים פי 2, נקבל ש־$b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}$. מכאן ש־:

$$|a_n - b_n| = \frac{M}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, ועכשיו ניתן להפעיל את עקרון הרווחים המקוננים ולקבל ש־$\bigcap_{n=1}^{\infty} [b_n, a_n] = \{c\}$. נבחין ש־$a_n, b_n \to c$ כי לכל $\varepsilon > 0$ נוכל לבחור N כך ש־$|a_n - b_n| < \varepsilon$, ו־$c \in [b_n, a_n]$ כלומר $|a_n - c| < \varepsilon \wedge |b_n - c| < \varepsilon$ וסה"כ $a_n, b_n \to c$ כדרוש. נגדיר $p(b,a) = A \cap [b,a]$ ואז נקבל שהפונקציה $F = p \circ c_n$ (עם תמונה שלא כוללת קבוצות ריקות, מהגדרת c_n) בעלת פונקציית בחירה $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ היא סדרה בשם d_n, ואז נקבל ש־$a_n \leq d_n \leq b_n$ וממשפט הסדוויץ' $d_n \to c$. מהגדרת p בהכרח $d_n \in A$ ומהגדרת c_n היא בהכרח משמרת סדר ביחס ל־a_n, כלומר d_n ת"ס מתכנסת של a_n וסיימנו.

■

נראה כי הטענות הבאות שקולות:

1. אקסיומת השלמות.
2. כל סדרת קושי מתכנסת.
3. עקרון הרווחים המקוננים.

$1 \to 2$

הוכח בהרצאה.

$2 \to 3$

יהי $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ שדה סדור מלא כלשהו (ששתם בחרתי לסמן ב־$\mathbb{R}$). נניח שביחס לנורמה $|\cdot|$ כל סדרת קושי מתכנסת. נראה שעקרון הרווחים המקוננים מתקיים.

הוכחה. תהי a_n סדרה עולה ו־b_n סדרה יורדת, כך ש־$a_n < b_n$. נניח שהגבול $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$. נגדיר $A_i = [a_i, b_i]$ שמההנחות שלנו בהכרח לא ריק. מונוטוניות הסדרות, $A_{i+1} \subseteq A_i$. נבחין ש־$A_i \colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ היא פונקציה, ולכן קיימת לה פונקציית בחירה $c_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. עוד נבחין ש־$c_i$ סדרה. נראה ש־c_i קושי. יהי $\varepsilon > 0$. בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} a_i - b_i = 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N \colon b_i - a_i = |a_i - b_i| < \varepsilon$. יהי $n \geq N$ ו־$k \geq 0$. נבחין שמהגדרת A_n ו־A_{n+k}:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad a_n \leq a_{n+k} \leq c_{n+k} \leq b_{n+k} \leq b_n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n, c_{n+k} \in [a_n, b_n] = A_n$$

משום ש־$|a_n - b_n| \leq \varepsilon$, נקבל שהמרחק בין כל שני איברים ב־A_n קטן גם הוא מ־ε ובפרט $|c_n - c_{n+k}| \leq \varepsilon$. סה"כ c_n קושי. הנחנו שכל סדרת קושי מתכנסת, אזי בפרט c_n מתכנסת לערך c כלשהו, ונסמן $c_n \to c$. נראה ש־$\bigcap_n^\infty A_n = \{c\}$:

$\subseteq$ יהי $d \in \bigcap_{n=1}^\infty A_i$. יהי $\varepsilon > 0$. בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, קיים N עבורו $\forall n \geq N \colon\ |a_n - b_n| \leq \varepsilon$. נבחין ש־$d \in A_N$, וכן $c_N \in A_N$, כלומר $|c_n - d| \leq \varepsilon$ (שני איברים בקטע סגור שקצוותיו במרחק קטן מ־ε). מכאן ש־$\lim_{n\to\infty} c_n - d = 0$ מהגדרת הגבול. משום שהגבול של c_n קיים והוא c, מתקיים מאריתמטיקת גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} d = \lim_{n\to\infty} c_n + d - c_n = \lim_{n\to\infty}(c_n) + \lim_{n\to\infty}(d - c_n) = c - 0 = c$$

כלומר d סדרה קבועה ששואפת ל־c, ומכאן ש־$\forall \varepsilon > 0 \colon\ |d - c| \leq \varepsilon$, כלומר $d = c$ (משפט שהוכחנו ללא תלות באקסיומת השלמות).

$\supseteq$ יהי $i \in \mathbb{N}$. נבחין שהחל מ־$i = N$ מתקיים $\forall i \geq N \colon a_i \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq b_i$ כלומר c_n חסומה בין a_i לבין b_i החל ממקום מסוים, ולכן $c = \lim_{n\to\infty} c_n \in [a_i, b_i] = A_i$. מהגדרת חיתוך מוכלל $c \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ כנדרש.

סה"כ הראינו הכלה דו־כיוונית, כלומר $\exists c \in \mathbb{R} \colon\ \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = \{c\}$, כדרוש. ■

$3 \to 1$

יהי $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ שדה סדור מלא כלשהו (ששתם ממש באקראי מסיבה שלא קשורה לכלום בחרתי לסמן ב־$\mathbb{R}$). נניח שביחס לנורמה $|\cdot|$ עקרון הרווחים המקוננים מתקיים. נראה ש־$\mathbb{R}$ הוא שדה (למעשה, השדה עד לכדי איזומורפיזם) שמתקיים את אקסיומת החסם העליון.

הוכחה. תהי A קבוצה חסומה מלעיל. נסמן ב־B את קבוצת החסמים מלעיל של A.

למה. בהינתן $a \in A,\ b \in B$, לכל $\varepsilon > 0$, קיימים $a' \in A,\ b' \in B$ כך ש־$[a', b'] \subseteq [a, b]$ וגם $|a' - b'| = b' - a' < \varepsilon$.

הוכחת הלמה. נניח בשלילה שלא קיימת קבוצה מתאימה. מכאן, שקיים ε כך ש־$\forall a < a' \in A, b > b' \in B \colon b' - a' \geq \varepsilon$. נתבונן בקבוצה $[a, b] \in [a', b']$ כך ש־$b' - a' < 2\varepsilon$ (אם לא קיימת כזו, נגדיר את ε להיות 2ε באינדוקציה) ואז $c = \frac{a+b}{2}$ מקיים $c \in [a', b']$, אם $c \notin B$ אז קיים $a'' > c$ ואז $[a'', b']$ מקיים $b' - a'' < \varepsilon$ וסתירה, אחרת $c \in B$ ואז $[a', c]$ מקיים $c - a' < \varepsilon$ וסתירה. ■

צריך להפוך את הרווחים המדוברים לבדידים בשביל להשתמש בעקרון הרווחים המקוננים, ובשביל זה צריך קיום סדרה חיובית שואפת לאפס. בממשיים זה נגרר מארכימדיאניות שתלויה באקסיומת השלמות. זה לא עובד בשדה סדור מלא כללי. אז או שאני טיפש ויש הוכחה שלא צריכה קיום של סדרה כזו, או שמי שבנה את התרגיל לא הוכיח את כולו ועשה ובנה אותו לפי אינטואיציה של מרחבים מטריים. לפי ויקיפדיה הטענה הזו שקולה לבונלצאנו־וויראשטראס, משפט שאיננו שקול לאקסיומת החסם העליון. אזי אחרי הפסקה הארוכה אני פשוט אפיל מהשמיים p_n כלשהי כך ש־$p_n > 0$ וגם $p_n \to 0$.

מהלמה, ומהגדרת התכנסות של p_n, נבחין שלכל $a, b \in A \times B$ קיים $z_{a,b} \in \mathbb{N}$ כלשהו כך ש־$|a - b| \leq p_n$, ומכאן ש־$[a, b - p_n]$ לא ריקה לכל $n \geq z_{a,b}$.

נגדיר את הפונקציה:

$$F \colon (A \times B) \times \mathbb{N} \to \mathcal{P}(A \times B) \quad F((a,b), n) = \left\{ (a', b') \in A \times B \colon a' \in A\ \wedge\ b' \in B\ \wedge [a', b'] \subseteq [a, b - p_{\max(n, z_{a,b})}] \right\}$$

מהגדרת $z_{a,b}$ ומקסימום, נבחין שתמונת F לא מכילה קבוצות ריקות אף פעם, לכן קיימת לה פונקציית בחירה $f\colon (A\times B)\times\mathbb{N}\to A\times B$ כלשהי. בהינתן $c_1=(a,b)$ כאשר $a\in A, b\in B$ כלשהם (כי B לא ריקה מההנחה ש־A חסומה) פונקציית הבחירה משרה את הנסיגה הבאה:

$$c_n\colon \mathbb{N}\to A\times B \quad \begin{cases} c_1=(a,b) \\ c_n=f(c_1,n)\end{cases}$$

היא מוגדרת היטב ממשפט הרקורסיה. c_n בתורה משרה את הסדרות:

$$b_n\colon\mathbb{N}\to B \quad b_n=\pi_2\circ c_n \quad a_n\colon\mathbb{N}\to A \quad a_n=\pi_1\circ c_n$$

מהיות הרווחים $[a_n,b_n]$ מקוננים מהגדרתם, b_n מונוטונית יורדת ו־a_n מונוטונית עולה. בגלל ש־B קבוצת החסמים מלעיל של A, בהכרח $a_n<b_n$. עוד נבחין ש־$a_n,b_n\in[a_n,b_n]\subseteq[a_{n+1}+p_n,b_{n+1}-p_n]$ (עד לכדי $z_{a,b}$ שגם הוא מונוטוני עולה חזק, כמו n) כלומר $|a_n-b_n|\le p_n\le\varepsilon$ החל מ־N מסוים לכל $n>N$ ואז $\lim_{n\to\infty}a_n-b_n=0$. מעקרון הרווחים המקוננים $\exists! c\in\mathbb{R}\colon \bigcap[a_n,b_n]=\{c\}$. נפצל למקרים.

- אם $c\in A$, אז c חסם מלעיל של A, ולכן הוא מקסימום של A ובפרט סופרמום וסיימנו.
- אם $c\in B$, ונניח בשלילה קיום $B\ni b<c$, אזי עבור ε קטן דיו קיים $i\in\mathbb{N}$ כך ש־$[a_i,b]\supseteq[a_i,b_i]$ אזי $c\notin\bigcap[a_n,b_n]$ וזו סתירה. מכאן ש־c חסם עליון מינימלי ובפרט סופרמום.

סה"כ הראינו קיום סופרמום בכל קבוצה A חסומה מלעיל, כלומר אקסיומת החסם העליון מתקיימת. ■

.... (12) ....

נמצא סדרה a_n בעלת יותר משני גבולות חלקיים המקיימת $a_n\cdot a_{n+1}\to 1$.

נסמן את הסדרה שמצאנו בשאלה 7 ב־c_n. נגדיר $b_n=c_n+2$. החל ממקום N_1 מסויים, $c_n>1$, משום שקול הגבולות החלקיים של b_n הם $[2,3]$. מכאן שלכל $n\ge N_1$ מתקיים $\frac{a}{b_n}<a$. יהי $\varepsilon>0$, ובגלל ש־$b_{n+1}-b_n\to 0$ (זה נשמר תחת הזחה ב־2 מאריתמטיקת גבולות), החל מ־N_2 מסוים מתקיים בהכרח $|b_{n+1}-b_n|<\varepsilon$. נקבל ש־:

$$1-\varepsilon<1-\frac{\varepsilon}{b_n}=\frac{b_n-\varepsilon}{b_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}<\frac{b_n+\varepsilon}{b_n}=1+\frac{\varepsilon}{b_n}<1+\varepsilon$$

ומכאן ש־$\frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנסת.

נתבונן בסדרה:

$$a_n=\begin{cases} b_n & n\in\mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{1}{b_n} & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

נבחין של־$a_n\cdot a_{n+1}$ יש שתי סדרות שמכסות אותה, $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ שמאריתמטיקה של גבולות שואפת ל־1, וכן $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ שהראינו ששואפת ל־1. סה"כ $a_n\cdot a_{n+1}\to 1$ כי כל הגבולות החלקיים של הסדרות שמכסות אותה הם 1.

נתבונן בת"סים b_{2n} ו־$\frac{1}{b_{2n+1}}$. נבחין ש־b_{2n} ו־b_{2n+1} מכסים את b_n, ולה יש אינסוף גבולות חלקיים, ומשובך יונים ל־b_{2n+1} או b_{2n} יש אינסוף גבולות חלקיים. אם זה b_{2n} אז ל־a_n יש אינסוף גבולות חלקיים וסיימנו, ואם זה b_{2n+1} אז $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$ אינסוף גבולות חלקיים (מאריתמטיקה) וסיימנו גם.

סה"כ מצאנו a_n סדרה עם אינסוף גבולות חלקיים (ובפרט יותר מ־2) המקיימת $a_n\cdot a_{n+1}\to 1$.

....