חדו"א 1א 8

שחר פרץ

15 בדצמבר 2025

אריתמטיקה של גבולות

משפט 1. תהאנה $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $X_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. (בסיכומים של שירי ואסף, הם יגידו ש־$f,g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. זה מקרה מאוד פרטי – הם עוסקים בקטעים בלבד, במקום בקבוצות פתוחות). נניח כי יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$, ונניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\wedge\lim_{x\to x_0} g(x)=m$.

1.
$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\colon \lim_{x\to x_0} f(\alpha g(x)+\beta g(x))=\alpha\ell+\beta m$$

2.
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\ell m$$

3.
$$m\neq 0\implies(\exists\delta>0.\,\forall x\in A\colon 0<|x-x_0|<\delta\implies g(x)\neq 0)\wedge\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}\right)$$

הוכחת 3. נניח $m\neq 0$. ידוע $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$. לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|g(x)-m|<\frac{m}{2}$. נתבונן ב־δ. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז $|g(x)-m|<\frac{m}{2}$. לכן:

$$|g(x)|\geq|m|-|g(x)-m|>|m|-\frac{|m|}{2}=\frac{|m|}{2}$$

סיימנו את החלק הראשון של המשפט. עתה נותר להוכיח ש־$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$. תהא a_n סדרה המקיימת $\operatorname{Im} a_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ וכן $\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$. לפני היינה $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$, וכן $\lim_{n\to\infty} g(a_n)=m$. ידוע $m\neq 0$, ולכן לפי אריתמטיקת גבולות של סדרות, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\ell}{m}$$

לפי היינה (מהכיוון השני) סה"כ $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$. ■

אפשר להכליל את החלק הראשון של שלוש (זו אותה ההוכחה) ולקבל את המשפט הבא:

משפט 2. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. אם קיים ל־f גבול סופי ב־x_0, קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה f חסומה.

"להיות חכם זה לדעת שעבניה זה פרי, ולהיות אינטליגנט זה לדעת לא להכניס אותו לסלט פירות"

הערה 1. המרצה רימה. לא בהכרח קיימת סביבה נקובה שמוכלת כולה ב־A. מההקשר, אפשר להבין שהכוונה ב"שבה" היא כל נקודה שבתחום ההגדרה מוכלת בסביבה הזו.

משפט 3. תהאנה $f,g\in A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי A אינה חסומה מלעיל [כלומר אינסוף הוא נקודת הצטברות]. נניח כי g חסומה וכי הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$. אז $\lim_{x\to\infty} f(x)+g(x)=-\infty$.

הוכחה. g חסומה לכן קיים $M>0$ חסם שלה כך ש־$\forall x\in A\colon |g(x)|\leq M$. [מה צ.ל.? שלכל $K>0$ קיים $N>0$ כך ש־$\forall x\in A$ אם $x>N$ אז $f(x)+g(x)<-K$] יהי $K>0$. ידוע $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ולכן קיים $N>0$ כך שלכל $A\ni x>N$ מתרחש $f(x)<-K-M$. נניח $x>N$. אז $f(x)+g(x)<-K-M+M=-K$. לכן $\lim_{x\to\infty} f(x)+g(x)=-\infty$ ■

משפט 4. תהאנה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x, $f(x)\leq g(x)$. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

הוכחה. מהנתון קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$, אז $f(x)\leq g(x)$. תהא a_n סדרה המקיימת $\operatorname{Im} a_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ וכן $\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$. קיים N_1 כך ש־$\forall n\geq N_1$ מתקיים $0<|a_n-x_0|<\delta$ (השתמשנו בהגדרת הגבול, כאשר "ה־ε שלנו" הוא δ). ידוע $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ לכן לפי היינה $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$. יהי $K>0$. קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N_2\colon f(a_n)>K$. נתבונן ב־$N=\max\{N_1,N_2\}$. יהי $n\geq N$. אז $g(a_n)\geq f(a_n)>K$. לכן $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\infty$ ולכן מהיינה $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$. ■

משפט 5. תהנה $f,g,h\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x $h(x)\le f(x)\le g(x)$. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נניח $\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=\ell$. אז $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

הוכחה. לבית – להוכיח עם הגדרת קושי, ועם הגדרת היינה. ■

משפט 6. תהאנה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$. נניח $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell\wedge\lim_{x\to x_0}g(x)=m$.

1. אם קיימת סביבה של x_0, כל שלכל x בה $f(x)\le g(x)$ אז $\ell\le m$.
2. אם $\ell<m$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x בה $f(x)<g(x)$.

הוכחה ל־2. נניח $\ell<m$. קיים $\delta_1>0$ כך ש־$\forall x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta_1$ אז $|f(x)-\ell|<\frac{m-\ell}{2}$. באותו האופן קיים $\delta_2>0$ כך ש־$\forall x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta_2$ אז $|g(x)-m|<\frac{m-\ell}{2}$. נתבונן ב־$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז:

$$f(x)<\ell+\frac{m-\ell}{2}=\frac{m+\ell}{2}=m-\frac{m-\ell}{2}<g(x)$$

■

ההוכחה של 1 מאוד דומה.

להלן משפט העונה לשם "משפט על גבולות והרכבה".

משפט 7. תהאנה $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to B\subseteq\mathbb{R},\ g\colon B\to\mathbb{R}$. תהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהיו $y_0,\ell\in\mathbb{R}$. נניח כי:

1. $\lim_{x\to x_0}f(x)=y_0$
2. קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל $f(x)\neq y_0$.
3. $\lim_{x\to y_0}g(x)=\ell$

אז $\lim_{x\to x_0}g\circ g(x)=\ell$.

הערה 2. גם כאן המרצה עשה עברה – יש כאן הנחה ש־y_0 נקודת הצטברות של B. זה בסדר, כי באמצעות 1 ו־2 אפשר להראות ש־y_0 נקודת הצטברות של B בכל מקרה.

יש גם ניסוח עם קטעים, פחות בעייתי: תהאנה $f\colon I\setminus\{x_0\}\to J\setminus\{x_0\}$ וכן $g\colon J\to\mathbb{R}$ (מקובל ש־I,J מסמנים קטעים) ואז ממשיכים את שאר המשפט. אבל הניסוח הזה מקרה פרטי למדי. חשוב לדעת להתבטא כך כי ככה מלמדים בקורס ברגיל.

הוכחה. ראשית כל, נצטרך לוודא שכל החרא שלנו מוגדר היטב. לשם כך נראה שמ־1 ו־2 אכן נובע ש־y_0 נקודת הצטברות של B. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta_1$ ואז $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $f(x)\neq y_0$. נסמן $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. x_0 נקודת הצטברות של A, לכן קיים $x\in A$ כך ש־$0<|x-x_0|<\delta$. נתבונן ב־$f(x)$. אז $f(x)\in B$ וכן $0<|f(x)-y_0|<\delta$ ולכן y_0 נקודת הצטברות של B וסיימנו.

תהא a_n כך ש־$\operatorname{Im}a_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ וגם $\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$. אז לפי היינה $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=y_0$. אז:

1. מתקיים $\operatorname{Im}f(a_n)\subseteq B$.
2. כמעט תמיד $f(a_n)\neq y_0$ (זה מספיק להיינה. את זה גם צריך להוכיח, לבית).
3. בהכרח $\lim_{n\to\infty}a_n=y_0$.

לכן לפי היינה $\lim_{n\to\infty}g(f(a_n))=\ell$, כלומר $\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(a_n)=\ell$. לפי היינה $\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x_0)=\ell$. ■

גבולות חד־צדיים

הגדרה 1. תהא $f\colon A\to B$ פונקציה. תהי ת"ק $C\subseteq A$. נגדיר $g\colon C\to B$ על־ידי $g(x)=f(x)$ לכל $x\in B$. g נקראת הצמצום של f ל־C ומסמנים $g=f|_C$.

ניתן היה אפשר להגדיר תת־סדרה של a_n (בדידה) כצמצום של הסדרה לקבוצה אינסופית של טבעיים. הטרמינולוגיה הזו לא צריכה שהסדר על התחום יהיה סדר טוב. לכן נוכל להכליל אותה ל־$\mathbb{R}$.

משפט 8.
1. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $B\subseteq A$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. אם x_0 נקודת הצטברות של B אז $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
2. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהאנה $B,C\subseteq A\setminus\{x_0\}$ כך ש־$A=B\cup C$. אם $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של Aאז x_0 נקודת הצטברות של B או ש־x_0 נקודת הצטברות של C (ה"או" לא בהכרח xor).

הוכחה. לבית ■

מה שנעשה עכשיו על ת"קים ספציפיים, היה אפשר לעשות על כל תת־קבוצה.

נגדיר את הסימון הבא לסיכום הזה בלבד (הוא לא מקובל). תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נסמן $A_{x_0^+}:=\{x\in A\mid x>x_0\}=A\cap(x_0,+\infty)$. נגדיר את $A_{x_0^-}:=\{x\in A\mid x<x_0\}=A\cap(-\infty,x_0)$.

מהמשפט הקודם, אם x_0 נקודת הצטברות של A, אז x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן של $A_{x_0^-}$.

הגדרה 2. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$ וגם קיים הגבול של $f|_{A_{x_0}^+}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$.

הגדרה 3. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$ וגם קיים הגבול של $f|_{A_{x_0}^-}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$.

הכל כמובן במובן הרחב.

דוגמה. נוכיח ש־$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

הוכחה. יהי $K>0$. נתבונן ב־$\delta=\frac{1}{K}$. יהי $x>0$ בסביבת הדלתא של 0 (כלומר $x<\delta$), אז $x\in(0,\delta)$ ולכן $K=\frac{1}{\delta}>\frac{1}{k}$ מכאן $\lim_{x\to x_0^+}=+\infty$. ■

משפט 9. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהי $\ell\in\mathbb{R}$ ונניח $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$. אז אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$, אז $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$, אז $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$.

הערה 3. אין באמת סיבה להסתכל על $A_{x_0}^+$ ו־$A_{x_0}^-$. אפשר היה להגדיר "גבול חלקי" על קבוצה כללית ולטעון את המשפט הזה. היינו מקבלים משפט הומורפי לכך שכל הגבולות החלקיים של פונקציה בדידה מתכנסים לגבול יחיד כאשר היא מתכנסת. עוד הערה: בד"כ לא יכתבו "x_0 נקודת הצטברות של $A\cap(x_0,\infty)$" אלא "אם יש משמעות לגבול משמאל ס־x_0".

משפט 10. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהי $\ell\in\mathbb{R}$.

1. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$ וכן נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$, אז $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$ גורר ש־$\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

אחרת [כלומר x_0 אינה נקודת הצטברות של אחת מהקבוצות]:

2. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$ אז $\lim_{x\to x_0^-}=\ell$ גורר $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד השלילי – זה יקבע את הגבול]
3. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$ אז $\lim_{x\to x_0^+}=\ell$ גורר $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד החיובי – זה יקבע את הגבול]

"הוא ריחם על היאור, על החול במדבר... אבל לסלע הוא נתן זאפטה"

נתחיל מלהוכיח את המשפט הקודם.

הוכחה. נניח ש־x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$. יהי $\varepsilon>0$. ידוע $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$ לכן קיים לנו $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. נתבונן ב־δ. יהי $x\in A$ ונניח $x<x_0$. אז בפרט $0<|x-x_0|<\delta$ כלומר $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ לכן $\lim_{x\to x_0^-}=\ell$

החלק השני (החיובי) – בדומה. ובכך סיימנו. ■

עכשיו נחזור להוכיח את המשפט האחרון.

הוכחת 1. נניח x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$ וגם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$. נניח שהגבול משמאל ומימין שניהם ℓ. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $x_0<x<x_0+\delta$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $x_0-\delta<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז $x_0<x<x_0+\delta$ או $x_0-\delta<x<x_0$. לכן $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. ■

הוכחת 2. נניח x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0}^-$ וגם x_0 אינה נקודת הצטברות של $A_{x_0}^+$. נניח $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$. קיים $\delta_1>0$ כך ש־$A\cap(x_0,x+\delta_1)=\varnothing$. ידוע $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$ לכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $x_0-\delta_2<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. מכאן ממשיכים כמו ההוכחה הקודמת. ■

קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה

משפט 11. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. ל־f יש גבול סופי ב־x_0 אמ"מ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$, כך שלכל $x,y\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $0<|y-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

ההוכחה זה פחות או יותר היינה עם קושי.

רציפות

רציפות וגזירות אלו שני המושגים שהחלו את החדו"א. בימים של לגראנג', ניוטון ולייבניץ הגדירו באמצעות זה שהפונקציה סימפטית מספיק ואפשר לצייר אותה על דף. ההגדרה הפורמלית היא **תכונה לוקאלית** – היא מוגדרת בעבור נקודה, לא בעבור כל הפונקציה. ישנן גם תכונות גלובליות, כמו "בכל נקודה לפונקציה יש גבול" או "הפונקציה רציפה בכל התחום". ההגדרה האינטואיטיבית של רציפות היא תכונה גלובלית.

הגדרה 4. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in A$. נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם:

$$\forall\varepsilon>0.\,\exists\delta>0.\ \forall x\in A\colon\ (|x-x_0|<\delta)\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

הערה 4. כדי לדבר על רציפות בנקודה, חייבים לדבר על נקודה בתחום ההגדרה של הפונקציה. לא מספיקה נקודת התכנסות. מכאן גם, שאם יש חור בתחום ההגדרה, זה לא אומר שהפונקציה לא רציפה. לדוגמה, סדרות רציפות בכל נקודה.

"לקחתי את העפרון ודחפתי נקודות קצת על הגרף, וזהו! הכל רציף!ם" $\sim$ פיזיקאי כועס

משפט 12. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in A$. אם $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A, אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

כשמדברים על קטעים, המשפט הזה פשוט מספק הגדרה שקולה. זה לא עובד יותר כשיש נקודות מבודדות.

"הוא נחנק, אבל הוא בסדרם'

הוכחה. נניח ש־$x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.

$\Leftarrow$ נניח f רציפה ב־x_0. יהי $\varepsilon>0$. מהגדרת הרציפות קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. בפרט $|x-x_0|<\delta$ ולכן $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ומכאן $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$\Longrightarrow$ נניח $\lim_{x\to x_0}f(x)=x_0$. נוכיח שהיא רציפה ב־x_0. יהי $\varepsilon>0$. מהגדרת הגבול קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|(|x-x_0)<\delta$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $x\in A$. נניח $|x-x_0|<\delta$. אם $x=x_0$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=0$. אחרת $0<|x-x_0|<\varepsilon$ ולכן $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ וסיימנו. ■

הבחנה: תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח $x_0\in A$ נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן של $A_{x_0^-}$. אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. קיים ל־f גבול סופי ב־x_0 משמאל, וקיים ל־f גבול סופי ב־x_0 מימין
2. שני הגבולות להלן שווים
3. שני הגבולות להלן שווים ל־$f(x_0)$

(זה בדיוק כמו להגיד את מה שכתוב במשפט למעלה)

למה זה מנוסח כזה פרגמטי (עם פ' רפה)? כי לפעמים יעניין אותנו "עד כמה f רציפה בנקודה".

מיון נקודות רציפות

הגדרה 5. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$. נניח ש־f אינה רציפה בה. [מכאן, שבהכרח היא נקודת הצטברות – כי נקודה שאיננה נקודת הצטברות, היא רציפה. לכן אפשר לדבר על הגבול]. אז [הדוגמאות ל־$x_0=0$]:

- אם 1-2 מתקיים (מהמיון לעיל) אז x_0 תקרא אי־רציפות סליקה. לדוגמה:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 67 & x=0\end{cases}$$

- אחרת, אם רק 1 מתקיים, x_0 תקרא אי־רציפות מסוג ראשון. לדוגמה:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x>0\\ x^2+67 & x\leq 0\end{cases}$$

- אחרת, רק 2 מתקיים, ו־x_0 תקרא אי־רציפות מסוג שני. לדוגמה: פונקציית דיריכלה, $\frac{1}{x}$.

מה המשמעות של אי־רציפות סליקה? שהפונקציה פחות או יותר רציפה בנקודה הזו, אבל ספציפית הנקודה הזו קופצת.

משפט 13. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה. אז לכל $x_0\in I$, יש ל־f גבול סופי משמאל ב־x_0 וגם גבול סופי מימין.

זה למעשה משפט ויירשטראס בעבור סדרות.

הוכחה. נסמן $A=\sup\{f(x)\mid x<x_0\}$. לכל $a\in A$, מתקיים $a\leq f(x_0)$ ומהמונוטוניות של f. לכן A חסומה. $A\neq\varnothing$ כי x_0 בתוך הקטע. לכן קיים ל־A חסם עליון. נסמן $\ell=\sup A$. יהי $\varepsilon>0$. אז קיים $x<x_0$ כך ש־$f(x)>\ell-\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta=x_0-x$. יהי $x=x_0-\delta<y<x_0$. אז $\ell-\varepsilon<f(x)\leq f(y)\leq\ell<\ell+\varepsilon$. לכן $|f(y)-\ell|<\varepsilon$. מכאן $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$. בדומה יש ל־$f$ גבול מימין ב־x_0. ■

לפונקציה מונוטונית יש רק נקודות רציפות מסוג ראשון. מכאן שיש רק כמות בת־מנייה של נקודות רציפות.