חדו"א 1א - תרגיל 1

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

   (א) אם $a+\frac{1}{a}$ מספר שלם, אז גם $a^3+\frac{1}{a^3}$ הוא מספר שלם.
   האם הטענה נכונה עבור $a^n+\frac{1}{a^n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$?

   ~~(ב)~~ $\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$.

   ~~(ג)~~ לכל $a,b\geq 0$ ממשיים, מתקיים: $\min\{-a,-b\}=-\max\{a,b\}$.

   (ד) יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ הראו כי $3\mid a^2+b^2$ אם ורק אם $3\mid a$ ו-$3\mid b$.
   הערה: עבור $m,n\in\mathbb{Z}$ הסימן $m\mid n$ משמעו n מחלק את m. כלומר, קיים $k\in\mathbb{Z}$ עבורו $nk=m$.

~~2.~~ הוכיחו בעזרת אקסיומות השדה הסדור בלבד (אקסיומות 1-14 שראיתם בשיעור) את הטענות הבאות:

   ~~(א)~~ לכל $x,y\in\mathbb{R}$, אם $x<y$ אז $0<y-x$. (זכרו כי הגדרנו את $x-y$ כ $(x+(-y))$

   ~~(ב)~~ לכל $x,y\in\mathbb{R}$, אם $0<x$ וגם $0<y$ וגם $x^2<y^2$ אז $x<y$.

3. הוכיחו את האי-שוויונים הבאים, ומצאו תנאי הכרחי ומספיק לקיום שוויון.

   ~~(א)~~)אי שוויון המשולש ההפוך($||x|-|y||\leq|x-y|$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

   ~~(ב)~~ $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2$ לכל $a\neq 0$.

   (ג) $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ לכל $x,y>0$.

~~4.~~ הוכיחו באינדוקציה (או בכל דרך אחרת):

   ~~(א)~~ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

   ~~(ב)~~ הוכיחו כי לכל $q\neq 1$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $1+q+q^2+...+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

   ~~(ג)~~ $7^n+12n+17$ מתחלק ב-18 לכל $n\in\mathbb{N}$.

~~5.~~ הוכיחו כי עבור $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

(שימו לב שע"פ הגדרה $(-1)^0=1$).

~~6.~~ יהי $h>0$, ויהיו $x,y,a,b\in\mathbb{R}$. הוכיחו שאם מתקיימים שני האי-שוויונות $|x-a|<h, |y-b|<h$, אזי

$$|xy-ab|<h\left(|a|+|b|+h\right)$$

רמז: תוכלו להיעזר בשוויון $xy-ab=xy-ab+xb-xb$.

~~7.~~ הוכיחו באינדוקציה (או בכל דרך אחרת):

~~(א)~~ (אי שוויון ברנולי המוכלל) אם לכל $i = 1 \dots n$ מתקיים $x_i \geq 0$, אז $\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

~~(ב)~~ (אי שוויון המשולש המוכלל) לכל $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

~~8.~~ יהיו d, a_0 ממשיים חיוביים ו-- $n \in \mathbb{N}$. לכל $1 \leq k \leq n+1$ נסמן $a_k = a_0 + k \cdot d$. הוכיחו כי

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$$

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. תהיינה $B=[0,4)\ ,\ \ A=(-\infty,1]\cup(3,5)$ תתי קבוצות של $\mathbb{R}$. נסמן $A^c=\mathbb{R}\backslash A$ המשלים של A.
כתבו את הקבוצות הבאות באופן מפורש:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A\backslash B,\ B\backslash A,\ A^c,\ B^c$$

2. פתרו את האי-שוויונים הבאים:

(א) $|x\,(1-x)|<\frac{1}{20}$

(ב) $||x+1|-|x-1||<1$

(ג) $|2x-1|<|x-1|$

(ד) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{3x-2}$

3. הוכיחו באינדוקציה)או בכל דרך אחרת(:

(א) $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

(ב) הוכיחו כי לכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(ג) $\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ו-$x,y\in\mathbb{R}$.

4. הוכיחו את האי-שוויונים הבאים, וציינו מתי מתקיים שוויון.

(א) $|a-1|+|a-2|+|a-3|\geq 2$ לכל $a\in\mathbb{R}$.

(ב) $|\sin(nx)|\leq n\,|\sin x|$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. הוכיחו כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\cos(x^2)+\cos(y^2)-\cos(xy)<3$.