מתמטיקה בדידה – תרגיל בית 17

שחר פרץ

26 במרץ 2024

שאלה 1

תהי a עוצמה, צ.ל. $\forall n \in \mathbb{N}_+. \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ times}} = a^n$

הוכחה. נסמן $|A| = a$. נוכיח באינדוקציה;

- בסיס: נניח $n = 0$, מכאן $a = a^1$ שנכון ממשפט וגמרנו.
- צעד: נניח באינדוקציה את נכונות הטענה על n ונוכיח בעבור $n+1$. מכאן, צ.ל. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+1 \text{ times}} = \underbrace{a^n}_{\text{induction}} \cdot a \overset{!}{=} a^{n+1}$. ידוע $a = a^1$ כלומר מחוקי חזקות של עוצמות $a^n \cdot a = a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$ כדרוש.

■

שאלה 2

נניח $a \leq b \land c \leq d$, נוכיח מספר טענות. נניח קיום A, B, C, D קבוצות כך ש־$|A| = a,\ |B| = b,\ |C| = c,\ |D| = d$. לצורך הנוחות, נניח שאלו קבוצות זרות.

(א) $a + c \leq b + d$

הוכחה. מחשבון עוצמות, צ.ל. $|A \uplus C| \leq |B \uplus D|$. מההנחות קיימות פונקציות $f\colon A \to B, g\colon C \to D$ חח"ע. נטען $h = f \cup g$ פונקציה $(A \uplus C) \to (B \uplus D)$ חח"ע. היא תהיה מוגדרת היטב (במקרה הזה, ח"ע) אמ"מ $f \cap g = \emptyset$, נוכיח זאת. נניח בשלילה קיום איבר $\langle x, y\rangle \in f, g$ ומכאן $x \in A \land x \in C$ כלומר A, C אינן זרות וזו סתירה. סה"כ h מוגדרת היטב. נותר להוכיח h חח"ע. יהי $x_1, x_2 \in A \cup C$ שונים ונניח בשלילה $y_1 := h(x_1) = h(x_2) =: y_2$. מכאן $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in (A \to B), (C \to D)$. אם הם בקבוצות שונות אז מזרות הקבוצות $y_1 \neq y_2$ וזו סתירה וסיימנו. אם לא אז בה"כ הם ב־$A \to B$, כלומר הם ב־f, וסה"כ גמרנו מחח"ע הפונקציה f כדרוש. ■

(ב) $a \cdot c \leq b \cdot d$

הוכחה. מחשבון עוצמות, צ.ל. $|A \times C| \leq |B \times D|$. ידוע קיום $f\colon A \to B,\ g\colon C \to D$ פונקציות חח"ע. נתובנן בפונקציה הבאה: $h\colon (A \times C) \to (B \times D)$ $h = \lambda\langle a, c\rangle \in A \times C. \langle f(a),\ g(c)\rangle$ ונטען להיותה חח"ע. **מוגדרת היטב:** $f(a),\ g(c)$ ביטויים מוגדרים היטב כי $a \in A, c \in C$ מכפל קרטזי, והפונקציה בעלת טווח מתאים כי $f(a) \in B,\ g(c) \in D$. **חח"ע:** יהי $a_1, a_2 \in A,\ c_1, c_2 \in C$ שונים, מכאן $f(a_1) \neq f(a_2)$ מחח"ע, כלומר מהמשפט המרכזי של זוג סדור $\langle f(a_1), c_1\rangle \neq \langle f(a_2), c_2\rangle$ ומכלל β סה"כ $h(\langle a_1, c_1\rangle) \neq h(\langle a_2, c_2\rangle)$ כדרוש. סה"כ מצאנו פונקציה חח"ע בעלת תחום וטווח מתאימים והוכחנו את הטענה לפי הגדרה כדרוש. ■

(ג) $a^c \leq b^c$

הוכחה. מחשבון עוצמות, צ.ל. $|C \to A| \leq |C \to B|$. מההנחות קיימות פונקציות $f\colon A \to B, g\colon C \to D$ חח"ע. נתבונן בפונקציה $h\colon (C \to A) \to (C \to B)$ המוגדרת לפי $h = \lambda k \in C \to A.\ f \circ k$. היא מוגדרת היטב בהתאם לטווחים של הפונקציות שהרכבנו. נוכיח שהיא חח"ע. יהי $g_1, g_2\colon C \to A$ שונות ונוכיח $h(g_1) \neq h(g_2)$. כלומר צ.ל. $f \circ g_1 \neq f \circ g_2$. מהיותן פונקציות שונות קיים $c \in C$ כך ש־$g_1(c) \neq g_2(c)$. לכן מחח"ע הפונקציה f יתקיים $(f \circ g_1)(c) = f(g_1(c)) \neq f(g_2(c)) = (f \circ g_2)(c)$ ומשוויון פונקציות הוכחנו את אשר דרוש. ■

שאלה 3

יהיו a, b, c עוצמות. נבחר A, B, C קבוצות זרות כך ש־$|A| = a,\ |B| = b,\ |C| = c$. נוכיח מספר טענות.

(א) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

הוכחה. מהגדרת חשבון עוצמות צ.ל. $|(C \to (B \times A))| = |(C \to A) \times (C \to B)|$. נבחר זיווג בין הקבוצות האלו המוגדר באופן הבא:

$$h\colon (C \to (A \times B)) \to (C \to A) \times (C \to B),\ h = \lambda f \in (C \to (A \times B)).\ \lambda c \in C. \langle \pi_1(f(c)),\ \pi_2(f(c))\rangle$$

נוכיח ש־h זיווג. **על:** יהיו $f\colon C\to A, g\colon C\to B$ פונקציות, נבחר $k=\lambda c\in C.\langle f(c),\ g(c)\rangle$ יקיים $h(k)=\langle f,g\rangle$. נמצא שזה נכון לפי כללי β,η של תחשיב למדא, ולפי הטענה המרכזית של זוג סדור. **חח"ע:** יהיו $k_1,k_2\colon(C\to(A\times B))$ שונים, כלומר קיים $c\in C$ כך ש־$k_1(c)\neq k_2(c)$. נסמן $k_1(c)=\langle a_1,b_1\rangle, h_2(c)=\langle a_2,b_2\rangle$ ובה"כ $a_1\neq a_2$. נניח בשלילה $h(k_1)=h(k_2)$. סה"כ מכלל β נקבל $\lambda c\in C.\langle a_1,b_2\rangle=\lambda c\in C.\langle a_1,b_2\rangle$ כלומר מכלל η נסיק $\langle a_1,b_1\rangle=\langle a_2,b_2\rangle$ משמע $a_1=a_2$ וזו סתירה. ■

(ב) $a^{b+c}=a^b\cdot a^c$

הוכחה. מהגדרת חשבון עוצמות צ.ל. $|(B\to A)\times(C\to A)|=|(B\uplus C)\to A|$. נבחר את הזיווג הבא:

$$h\colon|(B\uplus C)\to A|=|(B\to A)\times(C\to A)|,\ \ h=\lambda f\in(B\uplus C)\to A.\left\langle\{\langle b,a\rangle\in f\mid b\in B\},\{\langle c,a\rangle\in f\mid c\in B\}\right\rangle$$

נוכיח שהפונקציה עונה על דרישותנו. **מוגדרת היטב:** יש להוכיח כי הפונקציה בעלת טווח מתאים, כלומר, לכל קלט f תקין, נרצה להראות ש־$\pi_1(h(f))\in B\to A\wedge\pi_2(h(f))\in C\to A$. נוכיח את הטענה הראשונה, והשנייה תתקיים באופן דומה. ראשית, $\pi_1(h(f))$ ח"ע כי אם לא כן אז קיימים $b_1,b_2\in B,a\in A$ כך ש־$\langle b_1,a\rangle,\langle b_2,a\rangle\in f$ וזו סתירה לכך ש־f פונקציה ח"ע. שנית, $\pi_1(h(f))$ מלא כי אם לא כן אז קיים $b\in B$ כך שלכל $a\in A$ לא מתקיים $\langle b,a\rangle\in f$ וזו סתירה לכך ש־f מלאה ב־$B\uplus C$. **על:** יהיו $f\colon B\to A,\ g\colon C\to A$ פונקציות, ונוכיח קיום k כך ש־$h(k)=\langle f,g\rangle$. נבחר $k=g\cup f$, ומכאן ואילך – ראה את חלק למוגדרת היטב בהוכחה 2(א) במסמך זה (עד לכדי החלפת שמות משתנים), ולכן k מוגדרת היטב, ולפי עקרון ההפרדה טענה על דרישותנו לכך ש־ $h(k)=\langle f,g\rangle$. **חח"ע:** יהי $f_1,f_2\colon(B\uplus C)\to A$ שונים. נניח בשלילה $h(f_1)=h(f_2)$ ונראה סתירה. מכך שהם שונים, נסיק בה"כ קיום $\tilde{b}\in B$ כך ש־$f_1(\tilde{b})\neq f_2(\tilde{b})$. מהנחת השלילה, $\{\langle b,a\rangle\in f_1\mid b\in B\}=\{\langle b,a\rangle\in f_2\mid b\in B\}$, ובפרט $\langle\tilde{b},a\rangle\in f_2\iff\langle\tilde{b},a\rangle\in f_1$, ומשום שהפונקציות מלאות, אזי השקילות מתקיימת באופן שאינו ריק (טריוואלי), כלומר $f_1(\tilde{b})=f_2(\tilde{b})=a$ וזו סתירה. ■

שאלה 4

נחשב את עוצמת הקבוצות הבאות באמצעות חשבון עוצמות:

(א) $|\mathbb{R}\to\mathbb{R}|$

$$|\mathbb{R}\to\mathbb{R}|=2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}=2^{\aleph}$$

(ב) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}|=|2^{\aleph_0}\to\aleph_0|=(\aleph_0)^{\left(2^{\aleph_0}\right)}=\aleph_0^{\aleph}$$
$$2^{\aleph}\leq\aleph_0^{\aleph}\leq(2^{\aleph_0})^{\aleph}=2^{\aleph_0\cdot\aleph}=2^{\aleph}\implies|\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}|=2^{\aleph}$$

(ג) $|\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

$$|\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})|=|\aleph_0\to2^{\aleph_0}|=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph\cdot\aleph}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

(ד) $|\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|=2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$$

(ה) $|\mathcal{P}(\mathbb{N}\to\mathbb{N})|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}\to\mathbb{N})|=2^{|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|}=2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}=2^{\aleph}$$

(ו) $|\mathcal{P}(\mathbb{N}\to\mathbb{R})|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N}\to\mathbb{R})|=2^{|\mathbb{N}\to\mathbb{R}|}=2^{\left(\aleph^{\aleph_0}\right)}=2^{\left((2^{\aleph_0})^{\aleph_0}\right)}=2^{2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}}=2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}=2^{\aleph}$$

(ז) $|\mathcal{P}(\mathbb{R}\to\mathbb{N})|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}\to\mathbb{N})|=2^{|\mathbb{R}\to\mathbb{N}|}=2^{\left(\aleph_0^{\aleph}\right)}=2^{\left(2^{\aleph}\right)}$$

[השמשתי בטענה שהוכחתי בסעיף (ב)]

(ח) $|\mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathbb{N}|$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R})\to\mathbb{N}|=|2^{\left(2^{\aleph_0}\right)}\to\aleph_0|=|2^{\aleph}\to\aleph_0|=\aleph_0^{\left(2^{\aleph}\right)}=2^{\left(2^{\aleph}\right)}$$
$$2^{\left(2^{\aleph}\right)}\leq\aleph_0^{\left(2^{\aleph}\right)}\leq(2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph}\right)}=2^{\aleph_0\cdot2^{\aleph}}=2^{\left(2^{\aleph}\right)}\implies\aleph_0^{\left(2^{\aleph}\right)}=2^{\left(2^{\aleph}\right)}$$

שאלה 5

תהי A קבוצה. נניח $1<|A\times A|\leq|A|$. נפריך $|A|^{\aleph_0}=|A|$.

הוכחה. נניח בשלילה שהמשפט נכון. בפרט, הוא יהיה נכון בעבור $A=\mathbb{N}$, כלומר $|A|=\mathbb{N}$, כי $1<\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$. מהנחת השלילה, $\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph_0$. נחשב את העוצמה $\aleph_0^{\aleph_0}$:

$$2^{\aleph_0}\leq\aleph_0^{\aleph_0}\leq(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$

מקש"ב נקבל $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$, ומטרזניטיביות שוויון עוצמות סה"כ נקבל $\aleph_0=|A|=2^{\aleph_0}$ וזו סתירה למשפט קנטור. ■

שאלה 6

נוכיח מספר טענות.

א. $\aleph_0^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$

הוכחה. נוכיח אי שוויון חזק.

- $\leq$: ממונוטוניות, $\aleph_0^{\left(2^{\aleph_0}\right)} \leq 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} \leq 2^{\aleph_0}$ (כי $2 \leq \aleph_0 \wedge \aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$) כדרוש.
- $\neq$: נניח בשלילה שוויון. מכאן:

$$2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} \leq \aleph_0^{\left(2^{\aleph_0}\right)} \leq 2^{\aleph_0} \implies 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} \leq 2^{\aleph_0}$$

ובפרט עבור $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, יתקיים לפי הטענה לעיל $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}|$, בסתירה למשפט קנטור.

הוכחנו את כל אשר דרוש לאי שוויון חזק, וסה"כ $\aleph_0^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$ כדרוש. ■

ב. תהי A קבוצה, מתקיים $2^{|A|} \neq \aleph_0$.

הוכחה. תהי $|A|$ קבוצה. נניח בשלילה קיום שוויון. אם $|A|$ סופית, אז $\exists n \in \mathbb{N}.n = |A|$, נקבל $2^n = \aleph_0$ וזו סתירה. אחרת $|A|$ אינסופית. אם $|A| = \aleph_0$ אז $2^{\aleph_0} = \aleph_0$ וזו סתירה. אחרת $|A| \geq \aleph_0$ וממונוטוניות $\aleph_0 = 2^{|A|} \geq 2^{\aleph_0}$ כלומר $2^{\aleph_0} \geq \aleph_0$ וזו סתירה גם כן. סה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים לכן $2^{|A|} \neq \aleph_0$ כדרוש. ■

שאלה 7

הוכך/הפרך: יהיו a, b, c, d עוצמות ונניח קיום A, B, C, D קבוצות כך ש־$|A| = a,\ |B| = b,\ |C| = c,\ |D| = d$.

(א) $a < b \implies a^c < b^c$: הטענה אינה נכונה.

הוכחה. נניח בשלילה שהטענה נכונה, ונראה דוגמה נגדית. נבחר $a = 2, b = 4, c = \aleph_0$. ידוע $2 < 4$, ולפיכך מהטענה $2^{\aleph_0} < 4^{\aleph_0}$ ובפרט לא שווה, בסתירה לכך ש־$4^{\aleph_0} = 2^{2\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. ■

(ב) $b < c \implies a^b < a^c$: הטענה אינה נכונה.

הוכחה. נניח בשלילה שהטענה נכונה ונראה דוגמה נגדית. נבחר $a = \aleph_0, b = 1, c = 2$. ידוע $b < c$, ולפיכך מהטענה $\aleph_0^1 < \aleph_0^2$ ובפרט לא שווה, בסתירה לכך ש־$\aleph_0^2 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0^1$. ■

(ג) $a < b \wedge c \leq d \implies a + c < b + d$: הטענה אינה נכונה.

הוכחה. נניח בשלילה שהטענה נכונה ונראה דוגמה נגדית. נבחר $c = d = \aleph_0,\ a = 1,\ b = 2$. ידוע $c \leq d \wedge a < b$, ולפיכך מהטענה $\aleph_0 + 1 < \aleph_0 + 2$ ובפרט לא שווה, בסתירה לכך ש־$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 = \aleph_0 + 1$ (לפי משפט). ■

(ד) $a < b \wedge c \leq d \implies a \cdot c > b \cdot d$ הטענה אינה נכונה.

הוכחה. נניח בשלילה שהטענה נכונה ונראה דוגמה נגדית. נבחר $c = d = \aleph_0,\ a = 1,\ b = 2$. ידוע $c \leq d \wedge a < b$, ולפיכך מהטענה $\aleph_0 \cdot 1 < \aleph_0 \cdot 2$ ובפרט לא שווה, בסתירה לכך ש־$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 1$. ■

שאלה 8

(א) נרצה להוכיח כי קבוצת כל היחסים הסימטריים, נסמנה $\mathcal{S}$, בעלת עוצמה $2^{\aleph_0}$.

הוכחה. ראשית כל, ידוע $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, כלומר $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$, וחשבון עוצמות $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = 2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$, וסה"כ $|\mathcal{S}| \leq 2^{\aleph_0}$. נרצה להוכיח $|S| \geq 2^{\aleph_0}$. נעשה זאת באמצעות מציאות פונקציה חח"ע בין $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ ל־$\mathcal{S}$. נבחר בפונקציה הבאה:

$$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{S},\ \ f = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{\langle n+1, 0\rangle \mid n \in N\} \cup \{\langle 0, n+1\rangle \mid n \in N\}$$

ראשית כל, נוכיח ש־f מוגדרת היטב ובעלת הטווח המתאים. יהי $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נוכיח ש־$f(N) \in \mathcal{S}$, כלומר שהוא יחס סימטרי על $\mathbb{N}$. יהי $\langle a, b\rangle \in f(N)$, נוכיח $\langle b, a\rangle \in f(N)$ וש־$a, b \in N$. בה"כ $\langle a, b\rangle \in \{\langle n+1, a\rangle \mid n \in N\}$. מכאן $\exists n \in N$ (ולכן גם $n \in \mathbb{N}$) כך ש־$a = n+1, b = 0$, כלומר $a, b \in \mathbb{N}$. נבחר את אותו ה־N, ונקבל כי $\langle b, a\rangle \in \{\langle 0, n+1 \mid n \in N\}$, ומהגדרת איחוד סה"כ $\langle b, a\rangle \in \mathcal{S}$ כדרוש. עתה, נוכיח כי f חח"ע. יהיו $N_1, N_2 \in \mathcal{P}(N)$ שונות, נוכיח $S_1 := f(N_1) \neq f(N_2) =: S_2$. משום שהקבוצות שונות, קיים בה"כ $n \in N_1 \setminus N_2$. סה"כ $\langle n+1, 0\rangle \in S_1$, ונניח בשלילה את קיומו ב־S_2, נקבל $n+1 = 0$ כלומר $n = -1 \notin \mathbb{N}$ וזו סתירה, או ש־$n \in N_2$ וזו סתירה. סה"כ הגענו לסתירה ולכן $S_1 \neq S_2$ כדרוש.

נסכם: הוכחנו $|\mathcal{S}| \geq 2^{\aleph_0} \wedge |\mathcal{S}| \leq 2^{\aleph_0}$, ולכן מקש"ב $|\mathcal{S}| = 2^{\aleph_0}$ כדרוש. ■

(ב) נגדיר $A = \{f \in \mathbb{N} \ \to \{0,1\} \colon |f^{-1}[\{0\}]| = |f^{-1}[\{1\}]|\}$. נוכיח $|A| = \aleph$.

הוכחה. ידוע $A \subseteq \mathbb{N} \to \{0,1\}$ כלומר $|A| \leq |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$, ומחשבון עוצמות $|A| \leq 2^{\aleph_0} = \aleph$. בעבור הכיוון השני נמצא פונקציה חח"ע:

$$h\colon (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \to A,\ \ h = \lambda f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}.\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} 0 & n \equiv 0 \\ 1 & n \equiv 1 \\ f(\frac{n-2}{3}) & n \equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

מוגדרת היטב: (טווח מתאים) יהי $f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$, נוכיח $h(f) \in A$. בכל המקרים יוחזר 0 או 1, לכן $h(f) \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$. ניגש להוכיח את התנאי השני. טענה: $\mathfrak{A} := \{n \equiv 0 \mod 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ קבוצה סופית, סתירה בעבור הפונקציה החח""ע $\lambda n \in \mathbb{N}.3n$. מצד שני, $|\mathfrak{A}| \le \aleph_0$ כי הוא מוכל בה, ולכן מקש"ב $\mathfrak{A} = \aleph_0$. באופן דומה בעבור $\mathfrak{B} := \{n \equiv 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. מהפיצול למקרים בפונקציה, נקבל $h(f)[\mathfrak{A}] = 0,\ h(f)[\mathfrak{B}] = 1$, ומשום ש־$|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| = \aleph_0$, אזי $|h(f)^{-1}[\{0\}]| = |h(f)^{-1}[\{1\}]| = \aleph_0$, לכן $h(f) \in A$. **חח"ע:** יהי $f_1, f_2 \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$ פונקציות שונות (לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_1(n) \neq f_2(n)$), נוכיח $h(f_1) \neq h(f_2)$. נניח בשלילה שוויון, בעבור $3m+2$ יתקיים $h(f_1)(3m+2) = f_1(\frac{3m+2-2}{3}) = f_1(m) \neq f_2(m) = f_2(\frac{3m+2-2}{3}) = h(f_2)(3m+2)$ (זאת כי $3m+2 \equiv 2 \pmod 3$).

סה"כ $|\mathbb{N} \to \{0,1\}| \le |A| \le 2^{\aleph_0}$, ומשום ש־$|\mathbb{N} \to \{0,1\}| = 2^{\aleph_0}$ מחשבון פונקציות, אזי מקש"ב $|A| = 2^{\aleph_0} = \aleph$ – כדרוש. ■

(ג) נסמן את קבוצת כל יחסי השקילות מעל $\mathbb{R}$ ב־$\mathcal{R}$. נרצה להוכיח $|\mathcal{R}| = 2^{\aleph}$

הוכחה. ידוע $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, ומכאן כי $|\mathcal{R}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})|$. ידוע $|\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$. סה"כ $|\mathcal{R}| \le 2^{\aleph}$. נרצה להוכיח $|\mathcal{R}| \ge 2^{\aleph}$. נמצא פונקציה חח"ע מתאימה ($2^{\aleph} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$):

$$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{R},\ f = \lambda R \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\{\langle r, r+1\rangle \mid r \in R\} \cup \{\langle r+1, r\rangle \mid r \in R\} \cup \{\langle r, r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$$

ראשית כל, נוכיח כי f מוגדרת היטב ובעלת טוח מתאים. יהי $R \in \mathcal{P}(R)$, ונוכיח כי $\sim := f(R)$ יחס שקילות. תחילה נוכיח שהוא **סימטרי:** מכיוון ש־$\{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$ סימטרי כי הוא שווה להופכי שלו, נדע כי $f(R)$ יחס סימטרי (שאר ההוכחה זהה למה שכבר כתבנו בסעיף (א)). נוכיח שהוא **טרנזיטיבי;** נניח $a \sim b \wedge b \sim c$, ונוכיח כי $a \sim c$. נפלג למקרים: אם $\langle a,b\rangle \in \{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$ או ש־$\langle a,b\rangle \in \{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$, אז $a = b$, ולכן $b \sim c \iff a \sim c$ שכבר נתון וגמרנו. בשאר המקרים, בה"כ $\langle a,b\rangle \in \{\langle r,r+1\rangle \mid r \in R\}$, לכן קיים $r \in R$ כך ש־$a = r, b = r+1$. אם $\langle b,c\rangle$ באותה הקבוצה, אז קיים $r_2 \in R$ כך ש־$b = r$ כלומר $r = r+1 \in R \in$ וזו סתירה. לכן, במקרה הראשון $\langle b,c\rangle \in \{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$, ומשום ש־$b = r+1$ אז $c = 0$ וסה"כ $a \sim b \iff a \sim c$ שכבר נתון לנו, או ש־$\langle b,c\rangle \in \{\langle r+1,r\rangle \mid r \in R\}$ ועבור אותו ה־r יתקיים $a = r = c$ כלומר $a \sim c$ כי $\langle a,c\rangle \in \{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$ כדרוש. נותר להוכיח כי היחס **רפלקסיבי:** יהי $r \in \mathbb{R}$, צ.ל. קיום $r' \in \mathbb{R}$ כך ש־$r \sim r'$. נבחר $r' = r$, יתקיים $\langle r,r'\rangle \in \{\langle r,r\rangle \mid r \in \mathbb{R}\}$, סה"כ $r \sim r'$ כדרוש.

ניגש להוכיח ש־f חח"ע. יהיו $R_1, R_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ שונות, נוכיח כי $S_1 := f(R_1) \neq f(R_2) =: S_2$. משום שהקבוצות שונות, נדע בה"כ קיום $r \in R_1 \setminus R_2$. ידוע $\langle r, r+1\rangle \in \{\langle r, r+1\rangle \mid r \in R_1\}$ ובהכלה $\langle r, r+1\rangle \in f(R_1)$. נניח בשלילה $\langle r, r+1\rangle \in f(R_2)$, ונסיק כי או ש־$\langle r, r+1\rangle \in \{\langle r+1, r\rangle \mid r \in R_2\}$ או ש־$\langle r, r+1\rangle \in \{\langle r, r\rangle r \in \mathbb{R}\}$, בשני המקרים נגרר $r = r+1$ וזו סתירה, פרט ומקרה היחיד בו $\langle r, r+1\rangle \in \{\langle r, r+1\rangle \mid r \in R_2\}$, ומכאן $r \in R_2$ וגם זו סתירה. סה"כ בכל המקרים הגענו לסתירה, כלומר $\langle r+1, r\rangle \in f(R_1) \setminus f(R_2)$, לכן $f(R_2) \nsubseteq f(R_1)$ כלומר $f(R_1) \neq f(R_2)$ כדרוש.

נשים לב שבהוכחה ש־$|\mathcal{R}| \ge 2^{\aleph_0}$ הסתמכנו על הטענה ש־$R := \mathbb{R} \setminus \{0\} = 2^{\aleph_0}$. היא נכונה כי $R \subseteq \mathbb{R}$ ולכן $|R| \le 2^{\aleph_0}$, ועבור הפונקציה החח"ע הבאה:

$$h\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}),\ h = \lambda r \in \mathbb{R}. \begin{cases} r+1 & r \ge 0 \\ r-1 & r \le 0 \end{cases}$$

נקבל כי $|\mathbb{R}| \ge |R|$, וסה"כ מקש"ב $|R| = |\mathbb{R}| = \aleph$. לכן, ההוכחה תקינה. נסכם: $|R| \ge 2^{\aleph} \wedge |R| \le 2^{\aleph}$. מקש"ב $|R| = 2^{\aleph}$ כדרוש. ■

שאלה 9

יהי $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, נגדירן כ"כמעט מסכימות" אמ"מ $\exists i \in \mathbb{N}.\forall j \ge i.f(j) = g(j)$. נגדיר $R = \{\langle f,g\rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid f, g \text{ almost agrees}\}$.

(א) נוכיח כי R יחס שקילות.

הוכחה. **רפלקסיביות:** יהי $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. נוכיח fRf. נבחר $j = 0$, יהי $i \ge j$, ידוע $f = f$ ולכן משוויון פונקציות $f(i) = f(i)$ כדרוש. **סימטריות:** יהי $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ונניח fRg כלומר $\exists j.\forall i \ge j.f(i) = g(i)$, מקמטוטיביות הזהות נסיק $\forall i \ge j.g(i) = f(i)$ ומכאן gRf כדרוש. **טרנזיטיביות:** יהיו $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ונניח $fRg \wedge gRh$, כלומר קיימים $j, k \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall i \ge j.f(i) = g(i),\ \forall i \ge k.g(i) = h(i)$, ובפרט עבור $m := \max\{j,k\}$. מחוק קיבוץ כמתים לוגיים נקבל $\forall i \ge m.f(i) = g(i) = h(i)$ וסה"כ מטרזניטיביות הזהות נקבל fRh כדרוש. הוכחנו רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות, ולכן R יחס שקילות. ■

(ב) טענה: תהי $[f]_R \in R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, יתקיים $|[f]_R| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. חסם תחתון $[f]_R \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ לכן $|[f]_R| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. סה"כ $|[f]_R| \le 2^{\aleph_0}$. את החסם העליון נוכיח באמצעות מציאת פונקציה חח"ע מתאימה.

$$h\colon \mathbb{R} \to [f]_R,\ h = \lambda r \in \mathbb{R}.\lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} r & n = 0 \\ f(n+1) & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח שהפונקציה חח"ע ובטווח המתאים. **מוגדרת היטב:** (טווח מתאים) יהי $r \in \mathbb{R}$, צ.ל. $h(r) \in [f]_R$, כלומר $h(r)$ ו־f כמעט מסכימות. עבורן, נבחר $i = 1$, יתקיים $\forall j \ge i = 1$ ש־$j \neq 0$ ולכן $h(r)(j) = f(j)$ ישירות. **חח"ע:** יהי $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, יתקיים $h(r_1) \neq h(r_2)$ כי $h(r_1)(0) = r_1 \neq r_2 = h(r_2)(0)$.
סה"כ מקש"ב $|[f]_R| = \aleph$, כדרוש. ■

(ג) נוכיח אשר $|R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph$

הוכחה. מען הנוחות, כאשר נדבר על מחלקת שקילות $[f]_R$, נגדיר את ה־i המקסימלי כאיבר אשר יהווה את המקסימום של תמונת פונקצית הבחירה של ערך ה־i המתאים לכל זוג פונקציות כמעט מסכימות באותה מחלקת השקילות. נבנה פונקציות חח"ע משני הצדיים.

$$h\colon R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}.\ h = \lambda[f]_R \in R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}}.\ f(\mathrm{i})$$

(כאשר i יבחר כ־i המקסימלי של מחלקת השיקלות שבחרנו, שימוש נוסף באקסיומת הבחירה). נוכיח שהפונקציה **בלתי תלויה בנציג**: יהי $[f]_R \in R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, נניח בשלילה $fRg \wedge f(\mathrm{i}) \neq g(\mathrm{i})$, סתירה כי לכן הפונקציות אינן כמעט מסכימות (המקסימום של כל ערכי ה־i בפרט גדול מהם). עתה נוכיח שהיא **חח"ע**: נניח בשלילה $\neg fRg \wedge h(f) \neq h(g)$, ומכאן שהן כמעט מסכימות [לבדוק]. סה"כ מצאנו פונקציה חח"ע.

נמצא פונקציה חח"ע גם בכיוון השני:

$$h_2\colon \mathbb{R}\to R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ h_2=\lambda r\in\mathbb{R}.\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists i\in\mathbb{N}.\forall j\geq i.f(j)=r\}$$

נוכיח שהפונקציה **מוגדרת היטב** (בעלת טווח מתאים): יהי $r\in\mathbb{R}$, מכאן יהיו $f,g\in h_2(r)$, נוכיח fRg. מעקרון ההפרדה, קיים $i\in\mathbb{N}$ בעבורו לכל $j\geq i$ יתקיים $f(j)=r=g(j)$, לכן הן כמעט מסכימות באופן שקול fRg כדרוש. ניגש להוכחה כי היא **חח"ע**: יהי $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ שונים, נניח בשלילה $h(r_1)=h(r_2)$, מהכלה דו־כיוונית לכל $f\in h(r_1) \implies f\in h(r_2)$, ומשום שמחלקות שקילות אינן ריקות לפי הגדרת חלוקה (ונתון ממשפט כי קבוצת המנה היא חלוקה) אז קיים $f\in h(r_1)$ כלשהו. מכאן, קיים i_f כלשהו ממנו $\forall j\geq i_f.f(j)=r_1$. באופן דומה, קיימת פונקציה $g\in h(r_2)$ שעבורה קיים i_g כלשהו ממנו $\forall j\geq i_g.g(j)=r_2$. בפרט, בעבור $j'=\max\{i_f,i_g\}$ נדע $j'\geq i_f, g'\geq i_g$ ולכן $f(j')=r_1\neq r_2=g(j')$, סתירה לשוויון פונקציות; כלומר, $h(r_1)\neq h(r_2)$, כדרוש.

סה"כ הוכחנו כי $\aleph\leq|R/\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|\leq\aleph$ (כי $|R|=\aleph$), ומקש"ב $|R/R^{\mathbb{N}}|=\aleph$ כדרוש. ■

שאלה 10

נגדיר את יחס השקילות S באופן הבא:

$$\sim := S := \{\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\times\mathcal{P}(\mathbb{Z})\colon |A|=|B|=|A\cup B|\}$$

נתון כי $\sim=S$ יחס שקילות, כלומר $|A|=|B|=|A\cup B| \iff A\sim B$ לכל $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

(א) בסעיף זה נתבקשנו לשתי הוכחות שונות:

(1) נוכיח ש־$[\mathbb{N}]_\sim=\{Z\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \nexists n\in\mathbb{N}.|Z|=n\}:=\mathcal{A}$.

הוכחה. נוכיח בהכלה דו כיוונית. $\subseteq$: יהי $B\in[\mathbb{N}]_\sim$, כלומר $B\sim\mathbb{N}$. מכאן, $|B|=\aleph_0=|\mathbb{N}|$, לכן B אינסופית, משמע $\nexists n\in\mathbb{N}.|B|=n$ (לפי הגדרה). באופן שקול, $B\in\mathcal{A}$ כדרוש. $\supseteq$: יהי $A\in\mathcal{A}$, נוכיח $A\in[\mathbb{N}]_\sim$ כלומר צ.ל. $A\sim\mathbb{N}$. מההנחה $\nexists n\in\mathbb{N}.|A|=n$, כלומר A אינסופית וסה"כ $\aleph_0\leq A$. מעקרון ההפרדה, $A\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}) \implies A\subseteq\mathbb{Z} \implies |A|\leq|\mathbb{Z}| \implies |A|\leq\aleph_0$. סה"כ מקש"ב $|A|=\aleph_0$, כלומר $|A|=\aleph_0=|\mathbb{N}|$ וגם $|A\cup\mathbb{N}|\leq|A|+|\mathbb{N}|=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0=|A|$, כלומר $|A|=|\mathbb{N}|=|A\cup\mathbb{N}|$ וסה"כ $A\sim\mathbb{N}$ כדרוש. מצאנו כי $\mathcal{A}=[\mathbb{N}]$. ■

(2) נוכיח ש־$[\{2,3\}]_\sim=\{\{2,3\}\}$.

הוכחה. נוכיח בהכלה דו כיוונית. מרפלקסיביות, $\{2,3\}\sim\{2,3\}$ וסה"כ כיוון אחד מתקיים. מהכיוון השני, יהי $A\in[\{2,3\}]_\sim$, נניח בשלילה $A\neq\{2,3\}$, כלומר קיים $\exists a\in A.a\notin\{2,3\}$. מההנחות $A\sim\{2,3\}$, כלומר $|A|=|\{2,3\}|=2$. סה"כ נקבל $|A\cup\{2,3\}|\geq 3$, בסתירה לכך שמכיוון ש־$A\sim\{2,3\}$ אז $|A\cup\{2,3\}|=2$. ■

(ב) נרצה להוכיח כי $\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})=\{\mathcal{A}\}\cup\{\{Z\}\mid Z\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\setminus\mathcal{A}\}:=\mathcal{B}\ \wedge\ |\sim/\mathcal{P}\mathbb{Z}|=\aleph$. (כאשר הקבוצה $\mathcal{A}$ מוגדרת כפי הוגדרה בתת־סעיף 10(א)(1)).

הוכחה. נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית. $\subseteq$: יהי $[Z]_\sim\in\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. נוכיח $[Z]_\sim\in\mathcal{B}$. נפלג למקרים: אם Z אינסופית, אז $Z\in\mathcal{A}$ ומסעיף (א)(1) נסיק $[Z]_\sim=\mathcal{A}$, וידוע $\mathcal{A}\in\mathcal{B}$ וסיימנו. אם B סופית, אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$|Z|=n$. נרצה להוכיח כי $[Z]_\sim=\{Z\}$; נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית נוספת. כיוון אחד יתקיים באופן טרוויאלי מרפלקסיביות יחס השקילות $\sim$, ובעבור הכיוון השני, נניח בשלילה קיום $Z'\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ כך ש־$Z\sim Z'$ וגם $Z'\notin\{Z\}$ (כלומר $Z\neq Z'$), מכאן $|Z'|=|Z|=n$, ומהנחת השלילה קיים $z\in Z'\setminus Z$. מכאן, $|Z\cup Z'|\geq n+1$, וזו סתירה כי $n\neq n+1$ (בשוויון עוצמות) שנדרש כחלק מהשקילות. $\supseteq$: יהי $B\in\mathcal{B}$, נוכיח $B\in\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. נפלג למקרים. אם B אינסופית אז היא לא סינגילטון כלומר $B=\mathcal{A}$, בעבורה הוכח בסעיף (א)(1) כי היא מחלקת שקילות תקינה. אם B סופית, אז $\exists Z\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ כך ש־$B=\{Z\}$ (מהגדרת איחוד עקרון ההפרדה). מעקרון ההפרדה, עלינו להוכיח קיום $\tilde{Z}\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ כך ש־$\{Z'\in\mathbb{Z} \mid Z'\sim\tilde{Z}\}=\{Z\}$. נבחר $\tilde{Z}=Z$, ומכאן ההוכחה שקולה לשוויון הקבוצות שכבר הוכחנו בסעיף זה. סה"כ מהכלה דו כיוונית $\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})=\mathcal{B}$ כדרוש.

ניגש לחלק השני בהוכחה: $\aleph=|\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})|$. ברור מעקרון ההפרדה כי $\aleph\geq\{\{Z\}\mid Z\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\setminus\mathcal{A}\}$, ולכן סה"כ $\aleph=\aleph_0+1\geq|\mathcal{B}|$.
לכיוון השני, פונקציה חח"ע:

$$f\in\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})\to\mathcal{P}(\mathbb{Z})\cup\{\{\mathbb{N}\}\},\ f=\lambda[Z]_\sim\in\sim/\mathcal{P}(\mathbb{Z})\begin{cases}\mathbb{N} & |Z|=\aleph_0\\ Z & \text{else}\end{cases}$$

יש להוכיח כי הפונקציה מוגדרת היטב וחח"ע. **חח"ע**: (בלתי תלויה בנציג): יהי $[Z_1]_\sim,[Z_2]_\sim\in\sim\ \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, נניח כי $f([Z_1]_\sim)=f([Z_2]_\sim)$, ונניח בשלילה $[Z_1]_\sim\neq[Z_2]_\sim$ (כלומר נניח בשלילה $\neg Z_1\sim Z_2$). אם Z סופית, אז מההנחות ומהפיצול למקרים, $Z_1=Z_2$, נפצל את הנחת השלילה למקרים: אם $|Z_1|\neq|Z_2|$ אז $Z_1\neq Z_2$ וזו סתירה. אחרת, $|Z_1|=|Z_2|\neq|Z_1\cup Z_2|$, אך מהנחת השלילה $|Z_1\cup Z_2|=|Z_1\cup Z_1|=|Z_1|$ וזו סה"כ סתירה לכך ש־$\neg Z_1\sim Z_2$. אם Z אינסופית, אז $Z\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ כלומר $|Z|\leq\aleph_0$, וגם $\aleph_0\leq Z$ (כי היא אינסופית), ומקש"ב $Z=\aleph_0$, כלומר $h([Z_1]_\sim)=\mathbb{N}$, אך אם $h([Z_2]_\sim)=\mathbb{N}$ אז $|Z_2|=\aleph_0$ כלומר $|Z_1|=|Z|$ וגם $\aleph_0\leq|Z_1\cup Z_2|\leq\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ ומקש"ב $|Z_1|=|Z_2|=|Z_1\cup Z_2|=\aleph_0$ כלומר $Z_1\sim Z_2$ בסתירה להנחת השלילה. סה"כ

הפונקציה בלתי תלויה בנציג. **טווח:** יהי $[Z]_\sim \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) / \sim$, אם Z סופית אז $h([Z]_\sim = Z \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ וגמרנו, אם לאו אז $h([Z]_\sim) = \{\mathbb{N}\}$ וסיימנו. **חח"ע:** יהי $[Z_1]_\sim, [Z_2]_\sim \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) / \sim$, נניח $[Z_1]_\sim \neq [Z_2]_\sim$ כלומר $\neg Z_1 \sim Z_2$, ונוכיח כי $h([Z_1]_\sim) \neq h([Z_2]_\sim)$; בין כה וכה, מרפלקסיביות $Z_1 \neq Z_2$. אם Z_1 סופית, אז אם Z_2 סופית $Z_1 \neq Z_2$ ולכן אי שוויון, אם Z_2 אינסופית אז $Z_1 \neq \{\mathbb{N}\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ וגמרנו, אם Z_2 אינסופית אז באופן דומה יתקיים אי־השוויון הרצוי.
סה"כ מקש"ב $|\mathcal{B}| = |\mathcal{P}(\mathbb{Z}) / \sim| = \aleph$. ■

שאלה 11

נדרשנו רק לראות סרטון, אך לכתוב דבר.