מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 15

ניתן בתאריך 28.2.2024. להגשה עד 5.3.2024.

1. הוכיחו את הטענה הבאה שראיתם בהרצאה: לכל $n \in \mathbb{N}_+$, הקבוצה $\mathbb{N}^n$ היא בת מנייה.
תזכורת: $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n \text{ times}}$.

2.
   (א) הוכיחו כי אם R יחס שקילות על קבוצה A, אז $|A/R| \le |A|$.
   (ב) נסתכל על יחס השקילות "שוויון עוצמות" מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (אין צורך להוכיח שזה יחס שקילות). הוכיחו שהעוצמה של קבוצת המנה היא $\aleph_0$.

3. הוכיחו ע"י שימוש במשפט קנטור־שרדר־ברנשטיין:
   (א) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{X \subseteq \mathbb{N} : \text{אינסופית } X\}|$
   (ב) העוצמה של קבוצת הפונקציות מ־$\mathbb{N}$ ל־$\{0,1\}$ שווה לעוצמת קבוצת הפונקציות מ־$\mathbb{N}$ ל־$\{0,1\}$ ללא רצף של שני אפסים. כלומר,

$$|\mathbb{N} \to \{0,1\}| = |\{f \in \mathbb{N} \to \{0,1\} : \neg (\exists i \in \mathbb{N}. f(i) = f(i+1) = 0)\}|$$

4. בהרצאה ראיתם את המשפט: איחוד לכל היותר בן מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בן מנייה.
הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) איחוד בן מנייה של קבוצות סופיות הוא בן מנייה.
   (ב) איחוד סופי של קבוצות בנות מנייה הוא בן מנייה.

5. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן בנות מנייה, ע"י שימוש במשפט של איחוד לכל היותר בן מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה.
שימו לב כי ע"פ המשפט, עוצמת האיחוד תהיה לכל היותר $\aleph_0$. הוכיחו מדוע במקרים הבאים עוצמת האיחוד היא בדיוק $\aleph_0$.
   (א) קבוצת הפולינומים עם מקדמים שלמים.
   הערה: פולינום הוא פונקציה מהצורה $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. המספרים $a_0, \dots, a_n$ נקראים המקדמים של הפולינום.
   (ב) $B = \left\{ f \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \colon\ \exists a \in \mathbb{N}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0.\ f(n) = a \right\}$.

6. נאמר שפונקציה f היא **סוף־חד־ערכית** אם מתקיים:

$$\forall x \in dom(f).\ |\{a \in dom(f) : f(a) = f(x)\}| < \aleph_0$$

תהי A קבוצה כלשהי. הוכיחו שאם $f \colon A \to \mathbb{Q}$ פונקציה סוף־חד־ערכית, אז $|A| \le \aleph_0$.

7. יהי E יחס שקילות על $\mathbb{N}$ ונניח כי $\left|\mathbb{N}/E\right| < \aleph_0$. חשבו את העוצמה של הקבוצה:

$$X = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N}.\ (nEm \to f(n) = f(m))\}$$

8. נאמר שתת קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ היא **צפופה** אם לכל $B \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית, $A \cap B$ אינה ריקה.
   (א) הוכיחו כי $A \subseteq \mathbb{N}$ היא צפופה אמ"מ קיים n טבעי כך ש־ $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_n \subseteq A$.
   (תזכורת: הגדרנו $\mathbb{N}_0 = \emptyset$, ולכל $n \ge 1$ טבעי - $\mathbb{N}_n = \{0, \dots, n-1\}$)
   (ב) הוכיחו כי קבוצת כל תתי הקבוצות הצפופות של $\mathbb{N}$ היא בת מנייה.