אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 8

לאורך כל התרגיל F הינו שדה כלשהו.

1. הוכיחו שאם $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות חיוביות, אז גם $A+B$ חיובית.

2.

(א) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה מטריצה $A\in M_3(\mathbb{R})$. מיצאו מטריצות M הפיכה ו- B אלכסונית כך ש- $B=M^tAM$. **הציגו את הדרך בה מצאתם אותן.**

i. $\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$

(ב) נניח ש- $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות חופפות ו- A חיובית. הוכיחו שגם B חיובית.

(ג) לגבי כל אחת מהמטריצות A בסעיף הראשון, אם A חיובית הוכיחו זאת, ואם לא מיצאו וקטור $v\neq 0$ כך ש- $v^tAv\leq 0$.

3. יהיו $p,q\in F[x]$ שונים מ- 0. הוכיחו כי

$$\deg(p\cdot q)=\deg p+\deg q$$

4. חלקו עם שארית את הפולינום p בפולינום q בסעיפים הבאים. היעזרו באלגוריתם שלמדנו והציגו את הדרך.

(א) $p=x^{20}$ ו- $q=x^{10}$

(ב) $p=x^{10}$ ו- $q=x^{20}$

(ג) $p=x^4-x^3-18x^2+7x+1$ ו- $q=x+4$. **הסבירו איך התוצאה שקיבלתם מסתדרת עם המשפט הקטן של בזו.**

(ד) $p=x^3+x^2-5$ ו- $q=6$ (בסעיף זה אין צורך להיעזר באלגוריתם) (הערה: אנו מניחים בסעיף הזה ש- $\mathrm{char}(F)\neq 2,3$, אחרת $q=0$)

5. יהי $p\in\mathbb{R}[x]$ כך ששארית החלוקה של p בפולינום $x+1$ היא 2 ושארית החלוקה של p בפולינום $x+2$ היא 1. מיצאו את שארית החלוקה של p בפולינום $(x+1)(x+2)$. (רמז: השארית צריכה להיות פולינום ממעלה לכל היותר 1. היעזרו במשפט הקטן של בזו כדי למצוא משוואות שבעזרתן תוכלו למצוא את הפולינום הזה.)

6. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של הפולינומים הבאים והציגו אותו כצירוף ליניארי שלהם עם מקדמים מ $\mathbb{R}[x]$:

(א) $p_1=2x^3+4$, $p_2=x^2-2$.

(ב) $p_1=x^4-1$, $p_2=x^3-1$.

7.

(א) יהי $p=\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$ פולינום בעל מקדמים שלמים. יהי $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ שורש של p, כך ש-a,b זרים. הוכיחו כי $b|\alpha_n$ ו $a|\alpha_0$.

(ב) מצאו את כל השורשים הממשיים של $p=2x^4-2x^3-15x^2+24x-9$ ופרקו אותו כפולינום ב $\mathbb{R}[x]$ וכפולינום ב $\mathbb{Q}[x]$.