

# תרגיל בית 6, אלגברה לינארית 2א

3 במאי 2025

1. נסמן:

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$$

$$\text{Asym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}.$$

הוכיחו שאלו תתי מרחבים של  $M_n(\mathbb{R})$  וחשבו את המימדים שלהם.  
2. יהיו  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}^n$  ותהי  $A$  המטריצה ששורותיה הן  $v_1, \dots, v_k$ . הוכיחו:

$$\dim\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} = n - k$$

3. תהי  $A \in M_n(\mathbb{R})$  מטריצה המקיימת  $A^k = 0$ . הוכיחו שהקבוצה הבאה תלויה לינארית:

$$\{(A + I)^0, (A + I)^1, \dots, (A + I)^k\}$$

רמז - הוכיחו באינדוקציה.

4. נגדיר:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

חשבו את המטריצות  $3A - 4B, CD, B^T A, DD^T, AC, BD$ . אם לא ניתן לבצע חלק מהחישובים, הסבירו בכל מקרה מדוע.

5. תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . נגדיר את העקבה שלה להיות סכום איברי האלכסון הראשי ונסמנה  $\text{tr}(A)$ . הוכיחו:

(א) לכל שתי מטריצות ריבועיות  $A, B$  מאותו הסדר מתקיים  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .

(ב) לכל  $C \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), D \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  מתקיים  $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$ .

6. יהיו  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכות ותהיי  $C \in M_n(\mathbb{F})$ . הוכיחו/הפריכו:

(א) הפיכה  $A + B$

(ב) הפיכה  $AC$

(ג) הפיכה  $ABA$

(ד) אם  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$  שדה שמרחיב את  $\mathbb{F}$  (כלומר הצמצום של פעולות  $\mathbb{K}$  לתת הקבוצה  $\mathbb{F}$  נותן את פעולות  $\mathbb{F}$ ) אז  $A$  הפיכה גם ב  $M_n(\mathbb{K})$ .

(ה) אם  $AC = BC$  אז  $A = B$ .

7. בסעיפים הבאים מצאו את המטריצה ההופכית למטריצה הנתונה או קבעו כי איננה הפיכה מעל השדה הרלוונטי:

(א) מעל  $\mathbb{R}$   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(ב) מעל  $\mathbb{R}$   $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{Z}_7 \text{ מעל } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$\mathbb{R} \text{ מעל } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

$$(\lambda \in \mathbb{R} \text{ מעל } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}) \quad (\text{ד})$$

8. (ממבחן) תהינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $A^2 = A, B^k = 0$ . הוכיחו כי  $I + A$  ו-  $I - B$  הפיכות.