אלגברה לינארית ביקום מקביל

שחר פרץ

30 ביולי 2025

זה השלב שבן מעביר עוד שיעור על תורת הקטגוריות במסווה של אגלברה לינארית.

ביקום מקביל, נלמד קוסד העתקות ואז מטריצות. כלומר:

$$\mathbb{F}^n \overset{\omega_B}{\cong} V \xrightarrow{T} W \overset{\omega_c}{\cong} \mathbb{F}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{F}^n$$

(תציירו את זה בריבוע)

נוכיח שהדיאגרמה מתחלפת.

משפט 1.

$$\omega_C \circ T = T_a \circ \omega_B$$

הוכחה. יהי $v \in V$. אז:

$$(\omega_c \circ T)(v) = \omega_C(T(v)) = [Tv]_C = [T]_C^B[v]_B = T_A([v]_B) = (T_A \circ \omega_B)v$$

■

משפט 2. $\omega_c(\operatorname{Im} T) = \operatorname{Im} T_A \wedge \omega_B(\ker T) = \ker T_A$

הוכחה. נתחיל מהשוויון התמונות.

$\subseteq$ יהי $y \in \omega_C(\operatorname{Im} T)$. אז:

$$\exists y' \in \operatorname{Im} T\colon y = \omega_C(y'), y' \in \operatorname{Im} T \implies \exists x' \in V : T(x') = y'$$

ידוע $\omega_C \circ T = T_A \circ \omega_C$. לכן:

$$y = (\omega_C \circ T)(x) = (T_A \circ \omega_B)(x') = T_A(\omega_B(x')) \in \operatorname{Im} T_A$$

$\supseteq$ ידוע $y \in \operatorname{Im} T_A$. נוכיח $y \in \omega(\operatorname{Im} T)$:

$$\exists c \in \mathbb{F}^n\colon T_A(x) = y \implies \exists x' \in V : \omega_B(x') = x \implies (\omega_C \circ T)(x') = (T_A \circ \omega_B)(x') = y \in \omega_C(\operatorname{Im} T)$$

עתה נוכיח את השוויון הקרנלים.

$\subseteq$ יהי $x \in \omega_B(\ker T)$. לכן:

$$\exists x' \in \ker T\colon \omega_B(x') = x \implies \underbrace{(\omega_C \circ T)(x')}_{\omega_c(0)=0} = (T_A \circ \omega_B)(x') = T_A(x) \implies x \in \ker T_A$$

$\supseteq$ יהי $x \in \ker T_A$ (הערה: כאן כבר היה אפשר לסיים עם שיקולי ממדים מהסעיף הקודם). $\exists x' \in V\colon \omega_B(x') = x \implies (\omega_C \circ T)(x') = (T_A \circ \omega_B)(x') = T_A(x) = 0$ רצינו להוכיח ש־$x \in \omega_B(\ker T)$, כלומר $\exists x' \in \ker T$ כך ש־$x = \omega_B(x')$. מהיות $(\omega_C \circ T)(x') = 0$ מהמשוואות לעיל, ומהיות ω_C איזו ובפרט חח"ע, נקבל $x' \in \ker T$ כדרוש.

■

תרגיל: תהי $T\colon V \to V$, כך ש־$V = \mathbb{R}_{\le 2}[x]$ ו־$T(p(x)) = p(x) + p'(x) - p(0) \cdot \frac{x^2}{2}$. מצאו בסיסים לגרעין ולתמונה.

נצטרך לתרגם דברים למטריצות.

פתרון. נבחר בסיס ל־$B = C = (1, x, x^2)$. נבנה את:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_B & [T(x)]_B & [T(x^2)]_B & | & | & | \end{pmatrix}$$

נבחין ש־:

$$T(1) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2} \implies [T(1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$T(x) = x + 1 - 0 \implies [T(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = x^2 + 2x - 0 \implies [T(x^2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את המרחב המאפס:

$$\mathcal{N}[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נבחין ש־:

$$\operatorname{Im}[T]_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \implies \operatorname{Im} T = \operatorname{span}(1, -0.5x^2, 1 + x)$$

$$\mathcal{N}[T]_A = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \ker T = 2 - 2x + x^2$$

. . . .

תהי $T\colon V \to W$ ט"ל, ו־V נ"ס. נגדיר $\operatorname{rank} T := \dim \operatorname{Im} T$. אם A מייצגת את T, אז $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} A$.

תזכורת: $T\colon V \to W$ איזו' אמ"מ $[T]_C^B$ איזו'

הוכחה. ידוע שאם T איזו' אז T^{-1} איזו', ולכן:

$$[T]_B^C \cdot [T^{-1}]_C^B = [T \circ T^{-1}]_B = [id]_B = I_n$$

ולכן $[T^{-1}]_C^B$ ההופכית של $[T]_B^C$. ■

משפט 3. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A הפיכה אמ"מ $\operatorname{rank} A = n$.

הוכחה. כמו שאר הדברים בשיעור הזה, נרצה להוכיח זאת בניסוחים של העתקות לינאריות. נגדיר $T_A\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ע"י $T_A(v) = Av$. נגדיר את $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ הבסיס הסטנדרטי. אז $[T_A]_\mathcal{E} = A$. נבחין ש־:

$$\text{הפיכה}A \iff T_A \text{ איזו'} \iff T_A \text{ על} \iff \dim \operatorname{Im} T_A = n \iff n = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[T_A]_\mathcal{E} = \operatorname{rank} T_A = n$$

כאשר הטענה האחרונה נובעת מהמשפט הקודם. ■

. . . .

משפט 4. יהי $U \overset{T_1}{\to} V \overset{T_2}{\to} W$.

1. $\operatorname{rank} T_2 \circ T_1 \le \operatorname{rank} T_2$

2. $\operatorname{rank} T_1 \circ T_2 \le \operatorname{rank} T_1$
3. אם T_1 על אז $\operatorname{rank}(T_2 \circ T_1) = \operatorname{rank} T_2$
4. אם T_2 חח"ע אז $\operatorname{rank}(T_2 \circ T_1) = \operatorname{rank} T_1$

הוכחה. נתחיל מלהוכיח תמיד $\le$ (את 1 + 2)

1. יש הכלה $\operatorname{Im} T_2 \circ T_1 \subseteq T_2$. יהי $w \in \operatorname{Im} T_2 \circ T_1$. אז קיים $u \in U$ כך ש־$T_2 \circ T_1(u) = w$. לכן $v \in V$ $=: T_1 u$, כלומר $w \in \operatorname{Im} T_2 \implies w = T_2 v$ כדרוש.
2. הפעם אין הכלה על התמונות (כי הם במכלל המ"ום שונים), אך יש הכלה על הגרעינים ויש לנו את משפט הממדים.

$$\dim U =: n, n = \dim\ker T_1 + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T_1}_{\operatorname{rank} T_1} = \dim\ker T_1 \circ T_2 + \underbrace{\dim \operatorname{Im} T_1 \circ T_2}_{\operatorname{rank} T_1 \circ T_2}$$

לכן מספיק להוכיח ש־$\ker T_2 \circ T_1 \supseteq \ker T_1$.

עתה נותר להוכיח $\ge$, שלא יהיה נכון באופן כללי אלא תחת התנאים (על/חח"ע) בלבד. כלומר, נותר להוכיח $\operatorname{Im} T_2 \subseteq T_2 \circ T_1$ אם T_1 על, ו־$\ker T_2 \circ T_1 \subseteq \ker T_1$ אם T_2 חח,ע.

3. יהי $w \in \operatorname{Im} T_2$. נרצה להוכיח $w \in \operatorname{Im} T_2 \circ T_1$. קיים $v \in V$ מקור כך ש־$T_2 v = w$, ידוע T_1 על ולכן קיים $u \in U$ כך ש־$T_1 u = v$. סה"כ $(T_2 \circ T_1)v = w$ כלומר $w \in \operatorname{Im} T_2 \circ T_1$ כדרוש.
4. יהי $u \in \ker T_2 \circ T_1$. אז ידוע $T_2(T_1 u) = (T_2 \circ T_1)u = 0$. מהיות T_2 חח"ע נקבל $T_1 u = 0$ כלומר $u \in \ker T_1$ כדרוש.

■

מהחלק הראשון של ההוכחה, הוכחנו למעשה ש־$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A \operatorname{rank} B$. פרטים בקרוב.

משפט 5. יהיו $A \in M_{m\times p}(\mathbb{F}), A \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$. אז:

- $\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A$
- $\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B$
- אם B הפיכה אז $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} A$
- אם A הפיכה אז $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$

זה למעשה די זהה לחלק הראשון של ההוכחה הקודמת.

הוכחת 3. B הפיכה, כלומר ידוע $p = n$, $\mathbb{F}^m \overset{T_A}{\to} \mathbb{F}^n \overset{T_B}{\to} \mathbb{F}^n$. נסמן $\mathcal{E}_n$ סטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ ו־$\mathcal{E}_m$ סטנדרטי של $\mathbb{F}^m$. לכן:

$$[T_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m} = A,\ \ [T_B]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n} = B$$

נבחין ש־:

$$T_{AB} \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^M \implies [T_{AB}]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n} = AB$$

סה"כ:

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} T_{AB} = \operatorname{rank}(T_A \circ T_B) = \cdots$$

B הפיכה אמ"מ T_B איזו' אמ"מ T_B על, וסה"כ אנחנו בסיטואציה של 3 מהסעיף הקודם. לכן:

$$\cdots = \operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank}[T_A]_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n} = \operatorname{rank} A$$

כדרוש. ■

תרגיל. להוכיח שאם A הפיכה מימין ומשמאל, אז היא ריבועית. (לשם כך צריך להגדיר הפיכות ללא־ריבועיות).

. . . . (1) . . . .

יהיו V, W תמ"וים מעל $\mathbb{F}$, ו־$T \colon V \to W$ ט"ל. בעבור $U \subseteq W$ נגדיר $T^{-1}(U) = \{v \in V \colon Tv \in U\}$.

1. נוכיח $T^{-1}(U) \subseteq V$ תמ"ו

הוכחה. ע"מ להוכיח ש־$T^{-1}(U)$ תמ"ו מספיק להוכיח את ההבאים:

- $0_V \in T^{-1}(U)$ כי $T(0_V) = 0_W \in U$ כדרוש.
- T ,$Tv \in U \iff v \in T^{-1}U$ $\forall v, u \in T^{-1}(U), \forall \alpha \in \mathbb{F}\colon$ אז $Tv + \alpha Tu \in U$ $v + \alpha u \in T^{-1}(U)$ צריך לתת הסברים על לינאריות וסגירות של U.

■

2. נגדיר $V=W=\mathbb{R}^3$, ו־:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\\7x+8y+9z\end{pmatrix}\quad U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נבחין ש־:

$$T^{-1}(U)\overset{\text{span}}{=}\{v_1\dots v_k\}\implies\underbrace{T(\operatorname{span}(v_1\dots v_k))}_{\operatorname{span}(Tv_1\dots Tv_k)}\subseteq U$$

שימו לב! נמצאים שם לא רק המקורות של הוקטורים ב־U, אלא גם $\ker A$. זה יראה מוזר: נקבל שקבוצת הפתרונות של $Ax=(1,4,7)$, נקבל משהו כמו:

$$v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

אבל זה בסדר. כי למעשה גם כל הקרנל נמצא ב־$T^{-1}(U)$ וכשמאחדים אותם זה מסתדר. (צריך לכתוב פורמלית)

3. נוכיח באופן כללי שאם V נ"ס אז $\dim(T^{-1}(U))=\dim\ker T+\dim(\operatorname{Im}T\cap U)$.

הוכחה. נגדיר העתקה $S\colon T^{-1}(U)\to W$ כך ש־$\forall v\in T^{-1}(U)\colon Sv=Tv$ ונוכיח ש־$\dim(T^{-1}(U))=\dim\ker S+\dim\operatorname{Im}S$ (כי אפשר להוכיח ש־$\ker T=\ker S$). ■

. . . . (2) . . . .

נתונה מטריצה $A\in M_3(\mathbb{R})$ כך ש־:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&5\end{pmatrix}\quad U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\colon x+y+z=0\right\}$$

תהא $T\colon U\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $\forall u\in U\colon Tu=AU$. עבור כל אחת מהמטריצות הבאות, תנו דוגמה לזוג ביסיסם B,C של $U,\mathbb{R}^3$ כך ש־$[T]_C^B=M_i$.

1. $M_1=A$
2. $M_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}$
3. $M_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

נבחין שב' נפסל כי הוא ת"ל ושיקולי ממדים לא מאפשרים זאת. ג' אפשרי באופן הבא:

$$B=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ואז:

$$\left[T\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}$$

ואת הוקטור האחרון נבחר איך שבא לנו.

. . . .