פרויקט - מתמטיקה בדידה - שחר פרץ - שיעורי בית 7, תרגיל 7.ב

מידע כללי

תאריך הגשה: 20.1.2024

השאלה

תהי פונקציה $f: A \to B$, ויהי $X \subseteq A$, נגדיר את הצמצום של f ל־X בתור פונקציה $f|_X: X \to B$ המקיימת $\forall x \in X. f|_X(x) = f(x)$. כחלק מתרגיל בית 6, גם ניתנו ההגדרות השקולות הבאות:

$$f|_X := f \cap (X \times B) = \{\langle a, b \rangle \in f \mid a \in X\}$$

יהיו $A, B, C \neq \emptyset$ קבוצות. נגדיר:

$$H\colon ((B \cup C) \to A) \to ((B \to A) \times (C \to A)) \tag{1}$$
$$H = \lambda h \in (B \cup C) \to A. \langle h|_B, h|_C \rangle \tag{2}$$

צ.ל. תנאי הכרחי ומספיק על A, B, C לכך ש־H על $(B \to A) \times (C \to A)$

מה לא נכון בהוכחה שנתתי בשיעורי הבית

ניסיתי להוכיח ש־$B \cap C = \emptyset$ אמ"מ H על.

במהלך הגרירה השנייה, הייתי צריך להוכיח ש־H על גורר $B \cap C = \emptyset$ (שבדיעבד אינו נכון). שיטת ה"הוכחה" שנקטתי בה הייתה הנחה בשלילה; הנחתי בשלילה ש־H על, ו"הוכחתי" שנגרר $B \cap C = \emptyset$, אך זו אינה אפילו שיטה להוכחת גרירה – סה"כ כל *מה שהוכחתי באמת הוא ש־H לא על*. גישה נכונה, הייתה, לדוגמה, להניח ש־H על ולהוכיח את אשר נדרש ממני, ואז, דוגמה, להניח בשלילה ש־$\boldsymbol{B \cap C = \emptyset}$ (ולא ההפך) ולהראות ש**תחת ההנחה**, זאת מוביל לסתירה (אבל כמובן שזה אינו אפשרי).

הוכחה מתוקנת

נוכיח ש־$(B \cap C = \emptyset \lor |A| = 1)$ שקול לכך ש־H על. נוכיח שתי גרירות.

- נניח $B \cap C = \emptyset \lor |A| = 1$. נוכיח H על, כלומר, יהי $\langle f_1, f_2 \rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$, נוכיח קיום $h \in ((B \cup C) \to A)$ כך ש־$H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$. נפלג למקרים.
  - נניח $B \cap C = \emptyset$: נבחר $h = f_1 \cup f_2$. נוכיח ש־h פונ', המקיימת $H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$:
    - h פונ': נוכיח מליאות וחד ערכיות:
      - מליאות ב־$B \cup C$: יהי $x \in B \cup C$, נוכיח קיום $y \in A$ כך ש־$\langle x, y \rangle \in h$. נפצל למקרים: אם $x \in B$, נבחר $y = f_1(x) \in B$ כך ש־$\langle x, f_1(x) \rangle \in f_1 \cup f_2$, ואם $x \in C$ באופן דומה נבחר $y = f_2(x)$.

- חד־ערכיות: יהי $x \in B \cup C$, ויהי y_1, y_2 כך ש־$\langle x, y_1\rangle \in h \wedge \langle x, y_2\rangle \in h$. נוכיח $y_1 = y_2$. נניח בשלילה שלא כן. נפצל למקרים:
  - אם $x \in B \setminus C$, אז $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \notin f_2$ ולכן הם ב־f_1, ומשום ש־f_1 ח"ע אז $y_1 = y_2$.
  - אם $x \in C \setminus B$, אז $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \notin f_1$ ולכן הם ב־f_2, ומשום ש־f_1 ח"ע אז $y_1 = y_2$.
  - אם $x \in C \cap B$ אז $x \in \emptyset$ והטענה נכונה באופן ריק.
- h מקיימת $H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$: נשתמש בכלל β וכלל α של תחשיב למדא, נקבל שצ.ל.:

$$\langle (f_1 \cup f_2)|_B, (f_1 \cup f_2)|_C\rangle = \langle f_1, f_2\rangle$$

ובהתחשב בזה שהתחומים של f_1 ו־f_2 הם A, B בהתאמה שהן קבוצות זרות, ובהתאם להגדרה השקולה של הצמצום המופיע לעיל, זהו פסוק אמת.

- נניח $|A| = 1$, יהי $a \in A$, נסיק $A = \{a\}$. ידוע $f_1 : B \to A$, וידוע $f_2 : C \to A$. נבחר $h = \lambda x \in B \cup C.a$, לפי הגדרה, $h : (B \cup C) \to A$, ונשאר להוכיח $h|_B = f_1 \wedge h|_C = f_2$. משום שאין שום הגבלה על B או C, נוכיח בה"כ $h|_B = f_1$. משום ש־$|A| = 1$, אזי f_1 הפונקציה הקבוצה ב־a (נניח בשלילה שלא כן, לפיכך קיים $b \in A \wedge b \neq a$ בעבורו ישנו x כך ש־$f_1(x) = b$ אך $A = \{a\}$ ולכן $b \in \{a\} \wedge b \neq a$, ובאופן שקול $b = a \wedge b \neq a$ וזו סתירה), ולפי הגדרת הפונקציה הקבועה שניתנה בשיעור $h|_B = \lambda x \in B.a$. מעתה ואילך, נוכיח $h|_B = f_1$ באמצעות הכלה דו כיוונית.
  - $f_1 \subseteq h|_B$: יהי $\langle x, y\rangle \in f_1$, ולפי כלל β $x \in B \wedge y = a$, צ.ל. $\langle x, y\rangle \in h|_B$. באופן שקול, לפי עקרון ההפרדה, צ.ל. $\langle x, y\rangle \in h \wedge x \in B$. הטענה $x \in B$ נכונה מהנתונים, והטענה $\langle x, y\rangle \in h$ נכונה כי $x \in B \cup C \wedge y = a$, שזה שקול לכך ש־$\langle x, y\rangle \in h$ לפי כלל β.
  - $h|_B \subseteq f_1$: יהי $\langle x, y\rangle \in h|_B$, נוכיח $\langle x, y\rangle \in f_1$. לפי עקרון ההפרדה, ידוע $\langle x, y\rangle \in h \wedge x \in B$, ולפי כלל β סה"כ $x \in B \cup C \wedge y = a \wedge x \in B$ ובאופן שקול $x \in B \wedge y = a$ שלפי כלל β בכיוון ההפוך גורר $\langle x, y\rangle \in f_1$ כדרוש.

  סה"כ $B \cap C = \emptyset \vee |A| = 1$ תנאי מספיק להיות H על; $\mathscr{Q.E.F.}$

- נניח H על, נוכיח $B \cap C = \emptyset \vee |A| = 1$. נניח בשלילה את הטענה ההפוכה; ש־$B \cap C \neq \emptyset$ וגם $|A| \neq 1$ (לפי חוקי דה־מורגן על לוגיקה). ידוע $A, B, C \neq \emptyset$, ולכן $|A| \geq 2$ (ויהי $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$) וגם ישנו לפחות איבר יחיד ב־$B \cap C$ (ויהי $x \in B \cap C$). כדי להראות דוגמה נגדית להנחת השלילה, נתבונן בנתון על היות H על, ונסיק שלכל $\langle f_1, f_2\rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$ מתקיים קיום $h \in (B \cup C) \to A$ עוברו $H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$, ובפרט עבור $f_1 = \langle x, a_1\rangle, f_2 = \langle x, a_2\rangle$ זאת מתקיים קיום h כזה [הערה: כאן צריך את קיום לפחות שני איברים ב־A, תנאי שנעדר מההוכחה הקודמת]. מתוך כלל β על הטענה $H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$, נסיק $h|_B = f_1 \wedge h|_C = f_2$. מן הנתון $f_1 = \langle x, a_1\rangle, f_2 = \langle x, a_2\rangle$ ומכלל η לשוויון בין פונקציות, נסיק $\langle x, a_1\rangle \in h|_B \wedge \langle x, a_2\rangle \in h|_C$, ולפי הגדרת $h|_X$ המתבצעת לפי עקרון ההפרדה נסי $\langle x, a_1\rangle \in h \wedge \langle x, a_2\rangle \in h \wedge a_1 \neq a_2$, ולכן לפי הגדרה h אינה ח"ע ובפרט h אינה פונקציה, שהינה סתירה להנחה h פונקציה. סה"כ $B \cap C = \emptyset \vee |A| = 1$ תנאי הכרחי להיות H על; $\mathscr{Q.E.F.}$

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

II

~ סוף ~