לינארית 2א 14

שחר פרץ

26 במאי 2025

הגדרה 1. יהיו $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר שהן חופפות אם קיימת הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$A' = P^T AP$.

משפט 1. מטריצות חופפות אמ"מ הן מייצגות את אותה התבנית הבילינארית.

משפט 2. אם A, A' חופפות, אז:

1. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$
2. $\exists 0 \neq c \in \mathbb{F}\colon\ \det A' = c^2 \det A$

הוכחה. הגדרנו $\operatorname{rank} f$ כאשר f בילינ' להיות הדרגה של המייצגת את התבנית, וראינו שהיא לא תלויה בבסיס. בכך למעשה כבר הוכחנו את 1.. עבור 2., מתקיים $A' = P^T AP$ ו־P הפיכה (ולמעשה מטריצת מעבר בסיס) ולכן אם נסמן $c = |P| = |P^T|$ מתקיים:

$$|A'| = |P^T AP| = |P^T| \cdot |A| \cdot |P| = c^2 |A|$$

■

(הערה: יש שדות שמעליהם טענה 2 לא מעניינת במיוחד).

הגדרה 2. תבנית f מעל V נקראת סימטרית אם $\forall v, w \in V\colon f(v, w) = f(w, v)$

הגדרה 3. תבנית f מעל V נקראת אנטי־סימטרית אם $\forall v, w \in V\colon f(v, w) = -f(w, v)$

נבחין שאם $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, ניתן להגדיר את:

$$\varphi(v, w) = \frac{f(v, w) + f(w, v)}{2},\ \psi(v, w) = \frac{f(v, w) - f(w, v)}{2}$$

מתקיים ש־φ סימ' ו־ψ א־סימ' וכן $f = \varphi + \psi$.

משפט 3. תהי f תבנית ביליני' על V, ו־$B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל־B. נניח $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ המייצגת את f ביחס ל־B. אז f סימ'/אסימ' אממ A סימ'/אסימ'.

הוכחה. $\implies$ אם f סימ'/אסימ', אז:

$$\begin{aligned} a_{ij} = f(v_i, v_j) &\overset{\text{Sym}}{=} f(v_j, v_i) = a_{ji} \\ a_{ij} = f(v_i, v_j) &\overset{\text{ASym}}{=} -f(v_j, v_i) = -a_{ji} \end{aligned}$$

$\impliedby$ אם A סימ' אז:

$$f(v, w) = [u]_B^T A [w]_B \overset{(1)}{=} ([u]_B^T A [w]_B)^T = [w]_B^T A^T ([u]_B^T)^T = [w]_B^T A [u]_B = f(w, v)$$

כאשר (1) מתקיים כי transpose למטריצה מגודל 1×1 מחזיר אותו הדבר. וכן במקרה האנטי־סימטרי:

$$f(u, w) = [w]_B^T (-A) [u]_B = -[w]_B^T A [u]_B = -(w, u)$$

■

תת־פרק חדש:

QUADRATIC FORM .... (1) ....

הגדרה 4. תהא f תבנית על V. התבנית הריבועית:

$$Q_p\colon V \to \mathbb{F},\ Q_f(v) = f(v, v)$$

היא לא העתקה לינארית. היא תבנית ריבועית. **דוגמאות:**

-
$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = xv + uy \implies Q\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = xy + yx = 2xy$$

-
$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = xv - uy \implies Q\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = xy - yx = 0$$

- התבנית הסטנדרטית:
$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = xu + yv \implies Q_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

סימון 1. עבור תבנית בילינארית f על V, נגדיר את $\hat{f}(u,v) = f(v,u)$

אם f סימטרית נבחין ש־$Q_f = Q_{\hat{f}}$

משפט 4. תהי f תבנית בילי' סימ' על V, ונניח ש־$\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$, אז:

- $f(v,w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2}$
- אם f איננה תבנית ה־0 אז קיים $0 \neq v \in V$ כך ש־$Q_f(v) \neq 0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w) =& f(v+w, v+w) - f(v,v) - f(w,w)\\ =&\quad f(v,v) + f(v,w)\\ &- f(w,v) + f(w,w)\\ &- f(v,v) - f(w,w)\\ \overset{\text{Sym}}{=}& 2f(v,w)\end{aligned}$$

■

עבור 1, עתה נוכיח את 2: נניח $\forall v \in V : Q_f(v) = 0$ אז

$$\forall v, w, \in V : f(v,w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} = 0$$

למה שונה ממציין 2 חשוב:

$$f(\binom{x}{y},\ \binom{u}{v}) = xv + yu \implies Q_f = 0 \wedge f \neq 0$$

' הערה: אין ממש טעם להגדיר תבנית ריבועית על תבנית בילינארית שאיננה סימטרית. הסיבה? כל מטריצה יכולה להיות מפורקת לחלק סימטרי וחלק אנטי־סימטרי, החלק האנטי־סימטרי יתאפס (אלכסון אפס) ורק החלק הסימטרי ישאר בכל מקרה. זה לא שאי־אפשר, זה פשוט לא מעניין במיוחד.

משפט 5. נניח $\mathrm{char}\,F \neq 2$, ו־f סימטרית על V. אז קיים בסיס ל־V הוא $B = (v_i)_{i=1}^n$ כך ש־$[f]_B$ אלכסונית.

תזכורת: $[f]_B$ סימון המוגדר בסיכום זה בלבד. בקורס מדברים על המטריצה המייצגת של בי־לינארית במילים.

הוכחה. באינדוקציה על n. בסיס $n = 1$ ברור. אם f תבנית ה־0, אז כל בסיס שנבחר מתאים. אחרת, קיים $0 \neq v \in V$ כך ש־$Q_f(v) \neq 0$. נגדיר $U = \{u \in V \mid f(u,v) = 0\}$. תמ"ו כי גרעין של ה"ל (כי קיבענו את v). מה התמונה של ההעתקה? $f(v,v) = Q_f(v) \neq 0$. לכן תמונת ההעתקה היא כל $\mathbb{F}$, וממדה 1. ידוע U תמ"ו מממד $n-1$. אז $f_{|U} : U \times U \to \mathbb{F}$ לכסינה ולכן קיים בסיס B_U כך ש־$[f_{|U}]$ אלכסונית. נגדיר את $B = \{v\} \cup B_U$ נבחין שהיא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots \\ 0 & [f_{|U}]_B & - \\ \vdots & | & \end{pmatrix}$$

■