לינארית 2א 23

שחר פרץ

30 ביוני 2025

תרגיל. חשבו: (כולל פתרון)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

מכאן נסיק שאכן המטריצות להלן דומות עד לכדי שינוי בסיס, וזו הסיבה שלא איכפת לנו מהסימן של b כמו שראינו בהרצאה 22.

משפט 1. תהי $T\colon V\to V$ צמודה לעצמה ואי שלילית $\langle Tv \,|\, v\rangle \ge 0$, אז קיימת ויחידה $R\colon V\to V$ אי־שלילית צמודה לעצמה כך ש־$R^2 = T$.

הוכחה. **קיום.** מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס א"נ של ו"ע להעתקה אי־שלילית כל הע"ע הם אי־שליליים.

$$[T]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad [R]_B^B = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda}_1 \dots \sqrt{\lambda}_n)$$

(ראינו זאת בתרגול). עוד נבחין ש־R צמודה לעצמה כי ע"ע ממשיים.

יחידות. נבחין שכל ו"ע של T הוא ו"ע של R: יהי $i\in[n]$, ו־$B=(e_1\dots e_n)$ בסיס מלכסן, ואז עבור R צמודה לעצמה כלשהי מתקיים: אז ו"ע של R עם ע"ע $\sqrt{\lambda}$ הוא ו"ע של T עם ע"ע λ כי:

$$\lambda v = R^2 v = Tv \implies Rv = \sqrt{\lambda}$$

הגרירה נכונה מאי־שליליות R שהמשפט מניח עליה יחידות. כלומר הערכים העצמיים של R כלשהי (לא בהכרח זו שברחנו בהוכחת הקיום) נקבעים ביחידות מע"ע של T. בסיס של ו"ע של T הוא בסיס ו"ע של R, סה"כ ראינו איך R פועלת על בסיס ו"ע כלשהו של T מה שקובע ביחידות את R. ■

סימון 1. את ה־R לעיל נסמן $R := \sqrt{T}$.

POLAR DECOMPOSITION .... (1)

משפט 2. (פירוק הפולארי) תהי $T\colon V\to V$ הפיכה, אז קיימות $V\to V\to R$ חיובית וצמודה לעצמה ו־$U\colon V\to V$ אוניטרית כך ש־$T=RU$.

הערה: לא הנחנו T צמודה לעצמה. הפירוק נכון להעתקה הפיכה כללית.

הוכחה. נגדיר $S=TT^*$. נבחין ש־S צמודה לעצמה וחיובית:

$$\forall V\ni v\neq 0\colon\ \langle Sv\,|\,v\rangle = \langle TT^*v\,|\,v\rangle = \langle T^*v\,|\,T^*v\rangle = ||T^*v|| > 0$$

האי־שוויון האחרון נכון כי $\ker T=\{0\}$, ממשפט קודם $\ker T^* = \ker T = \{0\}$, ו־$v\neq 0$. יצא שזה חיובי ולכן בפרט ממשי, כלומר היא צמודה לעצמה וחיובית.

קיימת ויחידה $R\colon V\to V$ צמודה וחיובית כך ש־$S=R^2$. כל ערכיה העצמיים של $R=\sqrt{S}$ אינם 0, ולכן היא הפיכה (ראינו בהוכחה של קיומה שהיא לכסינה יחדיו עם S).

נגדיר $U=R^{-1}T$. נותר להראות ש־U אוניטרית.

$$U^*U = (R^{-1}T)^*(R^{-1}T) = T^*\underbrace{(R^{-1})^*}_{R^{-1}}R^{-1}T = T^*(R^{-1})^2T = T^*S^{-1}T = T^*(TT^*)^{-1}T = I$$

כדרוש. הטענה $(R^{-1})^* = R^{-1}$ נכונה משום ש־R צמודה לעצמה. ■

הערה לגבי יחידות. אם T אינה הפיכה, מקבלי סש־R יחידה אבל U אינה. בשביל לא הפיכות נצטרך להצטמצם לבסיס של התמונה ועליו לפרק כמתואר לעיל. במקרה של הפיכות אז $T=RU=R\tilde{U}$ ואז נקבל R הפיכה כלומר $U=\tilde{U}$ וגם U הפיכה.

עתה נראה ש־R נקבעת ביחידות (בניגוד ליחידות U – יחידות R נכונה גם בעבור פירוק פולארי של העתקה שאיננה הפיכה):

הוכחה.
$$TT^* = RU(RU)^* = RUU^*R^* = R^2$$
כלומר R היא בכל פירוק שורש, והראינו קודם את יחידות השורש. ■

הערה. קיים גם פירוק כנ"ל מהצורה $T = UR$.

הוכחה. באותו האופן שפירקנו את T, נוכל לפרק את $T^* = \tilde{R}\tilde{U}$ פירוק פולארי. נפעיל * על שני האגפים ונקבל:
$$T^* = \tilde{R}\tilde{U} \implies T = (T^*)^* = \tilde{U}^*\tilde{R}^* = \tilde{U}^{-1}\tilde{R}$$
נסמן $\tilde{R} =: R,\ \tilde{U}^{-1} =: U$ וסה"כ $T = UR$ כדרוש. ■

למה 1. עבור $T\colon V \to V$ אז ל־TT^*, T^*T נגדיר $S = TT^*$. נבחין ש־S צמודה לעצמה וחיובית:
$$\forall V \ni v \neq 0\colon\ \langle Sv \,|\, v\rangle = \langle TT^*v \,|\, v\rangle = \langle T^*v \,|\, T^*v\rangle = ||T^*v|| > 0$$
יש אותם הערכים העצמיים.

הוכחה. ניעזר בפירוק הפולארי:
$$\begin{aligned} TT^* &= RUU^*R^* \\ &= R^2 \\ TT^* &= U^{-1}R^2U \end{aligned}$$
סה"כ TT^*, T^*T הן העתקות דומות ולכן יש להן את אותם הערכים העצמיים. ■

הערה. אז איך זה קשור לפולארי? R האי־שלילית היא "הגודל", בעוד U האוניטרית לא משנה גודל – היא ה"זווית".

1.1 פירוק פולארי בעבור מטריצות

משפט 3. (פירוק פולארי עבור מטריצות) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז קיימות $U, R \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר U א"נ ו־R חיובית צמודה לעצמה כך ש־$A = UR$.

הוכחה. נסתכל על A^*A. היא חיובית וצמודה לעצמה (בדומה לעיל). אז $A^*A = P^{-1}DP$, כאשר D אלגסונית חיובית. כאשר $R = P^{-1}\sqrt{D}P,\ R^2 = AA^*$. היא קיימת ויחידה מאותה הוכחה בדיוק להעתקות. ■

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD) . . . . (2)

משפט 4. (פירוק לערכים סינגולריים למטריצה – SVD) לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות מטריצות אוניטריות U, V ומטריצה אלכסונית עם ערכים אי־שליליים כך ש־$A = UDV$.

הוכחה. ידוע שניתן לכתוב $A = \tilde{U}R$ פירוק פולארי. משום ש־R צמודה לעצמה, ניתן לפרקה ספקטרלית ל־V אוניטרית ו־D אלכסונית אי־שלילית (כי R אי־שלילית) כך ש־$R = V^{-1}DV$. סה"כ:
$$A = \underbrace{\tilde{U}V^{-1}}_{=:U}DV = UDV \quad \top$$
כי $\tilde{U}V^{-1}$ מכפלה של אוניטריות ולכן U אוניטרית כנדרש. ■

הערה.
$$\begin{aligned} AA^* &= (UDV)V^*D^*U^* = UD^2U^{-1} \\ A^*A &= V^{-1}D^2V \end{aligned}$$

הגדרה 1. הערכים העצמיים האי־שליליים של A^*A נקראים הערכים הסינגולריים והם נקבעים ביחידות ע"י A.

הערכים הסינגולרים הם גם הע"ע של R^2 הפירוק בפולארי וכן הע"ע של D^2 בפירוק SVD.

הערה. פירוק SVD יחיד למטריצה הפיכה.

. . . .

שחר פרץ ~ סוף הקורס ~ 2025

הקובץ לא נגמר – יש הרחבה על דואלים בעמוד הבא

הגדרה 2. בהינתן V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נגדיר $V^* = \hom(V, F)$.

הבנה. אם $\dim V = n$ אז $\dim V^* = n$. לכן $V \cong V^*$. לא נכון במקרה הסוף ממדי.

למה 2. יהי $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל־V. אז $\forall i \in [n] \colon \exists \psi_i \in V^* \colon \forall j \in [n] \colon \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$

משפט 5. יהי V נ"ס ו־$B = (v_i)_{i=1}^n$ אז קיים ויחיד בסיס $B^* = (\psi_i)_{i=1}^n$ המקיים $\forall i, j \in [n] \colon \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$.

הוכחה. נבחין שהבדרנו העתקה לינארית $\varphi \colon B \to V^*$ והיא מגדירה ביחידות ψ לינארית $\psi \colon V \to V^*$ המקיימת את הנרש. ברור שהבנייה של φ_i קיימת ויחידה כי היא מוגדר לפי מה קורה לבסיס. נותר להוכיח שזה אכן בסיס. יהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש־$\sum \alpha_i \psi_i = 0$. (האפס הזה הוא פונקציונל האפס). יהי $j \in [n]$. אז $0(v_j) = 0 = \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i\right) v_j = \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(v_j) = \sum \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$ וסה"כ $\alpha_j = 0$. ∎

נבחין שאפשר להגדיר:

הגדרה 3. $V^{**} = \hom(V^*, \mathbb{F})$

ואכן $\dim V < \infty$ אז:

$$V \cong V^* \cong V^{**}$$

במקרה הזה, בניגוד לאיזו' הקודם, יש איזו' "טבעי" (קאנוני), כלומר לא תלוי באף בסיס.

משפט 6. קיים איזומורפיזם קאנוני בין V ל־V^{**}.

הוכחה. נגדיר את האיזו' הבא:

$$\psi \colon V \to V^{**} \quad \psi(v) =: \bar{v} \quad \forall \psi \in V^* \colon \bar{v}(\psi) = \psi(v)$$

נוכיח שהוא איזו':

- **ט"ל:** יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F},\ v, u \in V$. אז:

$$\psi(\alpha v + \beta u) = \overline{\alpha v + \beta u} \overset{!}{=} \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}$$

נוכיח זאת:

$$\overline{\alpha v + \beta u}(\varphi) = \varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(u) = \alpha v(\varphi) + \beta \bar{u}(\varphi) = (\alpha \bar{v} + \beta \bar{u})(\varphi) = (\alpha \psi(v) + \beta \psi(u))(\varphi)$$

- **חח"ע:** יהי $v \in \ker \psi$. רוצים להראות $v = 0$.

$$\forall \varphi \in V^* \colon \bar{(}\varphi) = 0 \implies \forall \varphi \in V^* \colon \varphi(v) = 0$$

אם v אינו וקטור האפס, נשלימו לבסיס $V = (v_i)_{i=1}^n$ ואם $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ בסיס הדואלי אז $\varphi_1(v) = 1$ אבל אז $0 = \bar{v}(\varphi_1) = 1$ וסתירה.

- **על:** משוויון ממדים $\dim V^{**} = \dim V$.

∎

כלומר, הפונקציונלים בדואלי השני הם למעשה פונקציונלים שלוקחים איזשהו פונקציונל בדואלי הראשון ומציבים בו וקטור קבוע.

סימון 2. לכל $v \in V$ ו־$\varphi \in V^*$ נסמן $\varphi(v) = (\varphi, v)$

משפט 7. ייהו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, $T \colon V \to W$. אז קיימת ויחידה $T^* \colon W^* \to V^*$ כך ש־$(\psi, T(v)) = (T^*(\psi), v)$.

אם לצייר דיאגרמה:

$$V \xrightarrow{T} W \cong W^* \xrightarrow{T^*} V^* \cong V$$

(תנסו לצייר את זה בריבוע, ש־V, W למעלה ו־V^*, W^* למטה, כדי להבין ויזולאית למה זה הופך את החצים)

ברמה המטא־מתמטית, בתורת הקטגוריות, יש דבר שנקרא פנקטור – דרך לזהות בין אובייקטים שונים במתמטיקה. מה שהוא עושה, לדוגמה, זה להעביר את $\hom(V, W)$ – מרחבים וקטרים סוף ממדיים – למרחב המטריצות. הדבר הזה נקרא פנקטור קו־וראיינטי. במקרה לעיל, זהו פנקטור קונטרא־ווריאנטי – שימוש ב־T^* הופך את החצים. (הרחבה של המרצה)

אז אפשר להגדיר פנקטור אבל במקום זה נעשה את זה בשפה שאנחנו מכירים – לינארית 1א. בהינתן $\psi \in W^*$, נרצה למצוא $T^*(\psi) \in V^*$. נגדיר:

$$T^*(\psi) = \psi \circ T$$

ברור מדוע $T^* \colon W^* \to V^*$. בעצם, זהו איזומורפיזם ("בשפת הפנקטורים") קאנוני. עוד קודם לכן ידענו (בגלל ממדים) שהם איזומורפים, אך לא מצאנו את האיזומורפיזם ולא ראינו שהוא קאנוני.

$$\tau \colon \hom(V, W) \to \hom(W^*, V^*) \quad \tau(T) = T^*$$

היא איזומורפיזם.

(הערה: תודה למרצה שנענה לבקשתי ולא השתמש ב/phi אחרי שעשיתי /renewcommand /phi {/varphi/})

הוכחת לינאריות. יהיו $T,S\in\hom(V,W)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. אז:

$$\tau(\alpha T+S)=(T+\alpha S)^*$$

יהי $\psi\in W^*$, אז:

$$(T+\alpha S)^*(\psi)=\psi\circ(T+\alpha S)$$

יש למעלה פונקציונל ב־V^*. ננסה להבין מה הוא עושה על V. יהי $v\in V$:

$$[\psi(T+\alpha S)](v)=\psi((T+\alpha S)v)=\psi(T)v+\alpha\psi(S)(v)=(\psi\circ T+\alpha\psi\circ S)(v)=((T^*+\alpha S^*)\circ(\psi))v=(\tau(T)+\alpha\tau(S))(\psi)(v)$$

סה"כ קיבלנו לינאריות:

$$\tau(T+\alpha S)=\tau(T)+\alpha\tau(S)$$

■

נוכל להוכיח זאת יותר בפשטות עם הנוטציה של "המכפלה הפנימית" שהגדרנו לעיל, (φ,v). עתה נוכיח ש־τ לא רק לינארית, אלא מוגדרת היטב.

הוכחה.

- **חח"ע:** תהי $T\in\ker\tau$, אז $\tau(T)=T^*=0_{\hom(W^*,V^*)}$. נרצה להראות ש־$T$ העתקה האפס. נניח בשלילה ש־$T\neq 0$. אז קיים $v'\in V$ כך ש־$T(v')\neq 0$. נשלימו לבסיס – $(T(v)=w_1,w_2\dots w_n)$ בסיס ל־W. יהי $(\psi_1\dots\psi_n)$ הבסיס הדואלי. אז:

$$\tau(T)(\psi_1)=T^*(\psi_1)=\psi_1$$

אז:

$$0=\tau(T)(\psi_1)(v')=T^*(\psi_1)(v')=\psi_1\circ T(v')=\psi_1(w_1)=1$$

סתירה. לכן $\ker\tau=\{0\}$ ולכן τ חח"ע.

- **על:** גם כאן משוויון ממדים

■

שאלה ממבחן שבן עשה. ("את השאלה הזו לא פתרתי בזמן המבחן, ואני די מתבייש כי אפשר לפתור אותה באמצעות כלים הרבה יותר פשוטים" "חה חה" "לא חח"ע זה חד־חד ערכי") יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־$(w_1\dots w_n)$ בסיס של W. תהי $T\colon V\to V$. הוכיחו שקיימים $\varphi_1\dots\varphi_n\in V^*$ כך שלכל $v\in V$ מתקיים:

$$T(v)=\sum_{i=0}^n\varphi_i(v)w_i$$

שימו לב: בניגוד למה שבן עשה במבחן, V לא בהכרח נוצר סופית.

הוכחת ראש בקיר. לכל $v\in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1\dots\alpha_n$ כך ש־$T(v)=\sum_{i=0}^n\alpha_iw_i$. נגדיר $\forall i\in[n]\colon\varphi_i(v)=\alpha_i$. זה לינארי. ■

הוכחה "מתוחכמת". "אני אהבתי את ההוכחה שלי": נתבונן בבסיס הדואלי $B^*=(\psi_1\dots\psi_n)$ שמקיים את הדלתא של קרונקר והכל. נגדיר $\varphi_i=:T^*(\psi_i)$. יהי $v\in V$. קיימים ויחידים $\alpha_1\dots\alpha_n$ כך ש־$T(v)=\sum_{i=0}^n\alpha_iw_i$. אז:

$$\sum_{i=0}^n\varphi_i(v)w_i=\sum T^*(\psi_i)(v)w_i$$

צ.ל. $\alpha_i=T^*(\psi_i)(v)$. אך נבחין שהגדרנו:

$$T^*(\psi_i)(v)=\psi_i(T(v))=\psi_i\left(\sum_{i=0}^n\alpha_jw_j\right)=\alpha_j$$

■

"הפכת למרצה במתמטיקה כדי להתנקם באחותך?" "כן."

2.1 המאפס הדואלי ומרחב אורתוגונלי

הגדרה 4. יהי V מ"ו נוצר סופית. יהי $S \subseteq V$ קבוצה. נגדיר $S^0 \subseteq V^* =: \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in S : \varphi(v) = 0\}$.

דוגמאות. $\{0\}^0 = V^*, \ V^0 = \{0\}$

משפט 8.

1. S^0 תמ"ו של V^*.
2. $(\operatorname{span} S)^0 = S^0$
3. $S \subseteq S' \implies S'^0 \subseteq S^0$

משפט 9. יהי V נ"ס, $U \subseteq V$ תמ"ו. אז $\dim U + \dim U^0 = n$

באופן דומה אפשר להמשיך ולעשות:

$$\dim U^0 + \dim U^{**} = n$$

וכן:

$$U \cong U^{**}$$

איזומורפיזם קאנוני. זאת כי:

$$\forall \varphi \in U^0 \, \forall u \in U : \varphi(u) = 0$$

ומי אלו הוקטורים שיאפסו את φ שמאפס את u? הוקטורים ב־U עד לכדי האיזומורפיזם הקאנוני מ־U ל־U^{**}.

נבחין ש־:

$$[T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T$$

כאשר $\mathcal{A}$ בסיס ל־V, $\mathcal{A}^*$ ל־V^*, $\mathcal{B}$ ל־W, $\mathcal{B}^*$ ל־W^*.

"כוס אמא של קושי" – בן על זה שקושי גילה את המשפט לפניו.

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־$\LaTeX$ ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד