תרגיל בית 10

שאלה 1 בתרגיל זה נעסוק בקיומו של פתרון למערכת משוואות ריבועית מהצורה

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

א. הוכיחו שאם לפולינום $a_2x^2 + a_1x + a_0$ יש שורשים α_1, α_2 ולפולינום $b_2x^2 + b_1x + b_0$ יש שורשים β_1, β_1 אז

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = a_2^2 \cdot b_2^2 \cdot (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$$

רמז : הביעו את a_0, a_1 באמצעות a_2, α_1, α_2 ואת b_0, b_1 באמצעות b_2, β_1, β_2.

ב. הסיקו שלמערכת המשוואות

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$$

קיים פתרון אמ"מ מתקיים ש

$$\det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = 0$$

ג. הוכיחו שלמערכת המשוואות הבאה קיים פתרון

$$2x^2 + 3.66x + 1.66 = 0$$

$$3x^2 + 8.49x + 5.49 = 0$$

שאלה 2 מטריצת ונדרמונד -

א. הוכיחו שמתקיים

$$\det\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\\ 1 & d & d^2 & d^3\end{pmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

ב. חשבו את

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 7 & 49 & 343\end{pmatrix}$$

שאלה 3

יהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ומתקיים ש $rank(A) = n-1$. הוכיחו ש $rank(adj(A)) = 1$.

שאלה 4 יהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית עליונה הפיכה. הוכיחו שההופכית שלה גם משולשית עליונה.

שאלה 5 יהי $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ שכל הערכים שלה שווים ל1 או 1-. הוכיחו שהדטרמיננטה שלה מתחלקת ב 2^n.

רמז: השתמשו בנוסחה לדטרמיננטה המשתמשת בתמורות שראינו בתרגול.

שאלה 6 חשבו את $adj(A)$ עבור $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

שאלה 7 נגדיר את הפרמננטה של מטריצה $A \in M_n$ עם ערכים $a_{i,j}$ להיות

$$perm(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

כלומר, זה אותו ביטוי כמו הדטרמיננטה (בעזרת תמורות) אבל ללא הסימנים של התמורות.

א. הראו ש $perm(A) = perm(A^T)$.

ב. הראו שאם E המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולת השורה $R_i \to \lambda R_i$ של להכפיל את השורה i בקבוע $\lambda \neq 0$,
אז $perm(EA) = \lambda \cdot perm(A)$.

ג. הראו שם A משולשית עליונה או תחתונה אז $perm(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ כלומר שווה למכפלת איברי האלכסון.