עוצמות 7

שחר פרץ

25 ביולי 2024

שיעור הבא – ברביעי הבא. תזכורות:

1.
   - $\aleph_0 + az = az \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
   - $\aleph + \aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph$
   - $\aleph_0 + \aleph = \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$
2. $\forall n \in \mathbb{N}.\aleph_0 + n = \aleph_0,\ \forall n \in \mathbb{N}_+.\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$
3. לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a + \aleph_0 = a$, ולכל מספר טבעי $a + n = a$.

טענה: $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph$

הוכחה. $|\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \uplus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + |\mathbb{Q}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + \aleph_0$. נניח בשלילה $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| < \aleph_0$, מכאן שהיא סופית כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = n$ ואז נקבל $|\mathbb{R}| = n + \aleph_0 = \aleph_0$ וזו סתירה. סה"כ $|\mathbb{R} + \mathbb{Q}| \geq \aleph_0$ (כלומר, אינסופית),ומטענה ידועה $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| + \aleph_0 = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$ ומרטזיניטביות $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph$ כדרוש. ■

0.0.1 תרגילים

1. חשבו את $|\mathbb{N} \to \mathbb{N}|$. **פתרון:** לפי הגדרה, $|\mathbb{N} \to \mathbb{N}| = \aleph_0^{\aleph_0}$. נפשט. $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (ממונוטוניות) וסה"כ מקש"ב והצבה $|\mathbb{N} \to \mathbb{N}| = \aleph$.
2. חשבו את $|\mathbb{R} \to (\mathbb{Q} \to \mathbb{Q})|$. **פתרון:** לפי הגדרה, $|\mathbb{R} \to (\mathbb{Q} \to \mathbb{Q})| = |\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}|^{\mathbb{R}} = (\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{R}} = (\aleph_0^{\aleph_0})^{\aleph} = (2^{\aleph_0})_0^{\aleph} = 2^{\aleph \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph}$
3. נתון יחס השקילות הבא מעל $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $S = \{\langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \ \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^4 \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}$ (נק' שקולות אמ"מ מרחק שווה מהראשית). חשבו את $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/S|$. **פתרון:** נגדיר את הפונקציה $f(r) = [\langle 0, r \rangle]_S$ ונוכיח שהיא זיווג חח"ע: . משום ש־$0 \leq r_1 \neq r_2$ מספיק כדי להראות $\langle \langle 0, r_1 \rangle, \langle 0, 2_r \rangle \rangle \notin S$ וגם $0^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 + r_2^2$ ולכן $\langle \langle -, r_1 \rangle, \langle 0, r_2 \rangle \rangle \notin S$. על: יהי $[\langle x, y_1 \rangle]_S \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/S$, נבחר $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ אז $0^2 + \tilde{r}^2 = x_1^2 + y_1^2$ ולכן $[\langle x_1, y_1 \rangle] = [\langle 0, \tilde{r} \rangle]_S = f(\tilde{r})$. סה"כ $\aleph = |[0, \infty]| = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/S$ כדרוש.
4. מצאו את עוצמת היחסים הרפלקסיביים מעל $\mathbb{R}$. **פתרון:** מצד אחד, $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ולכן $|A| \leq \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{\aleph \cdot \aleph} = 2^{\aleph}$. מצד שני: נגדיר פונקציה $f \colon \mathcal{P}([0,1]) \to A$ ע"י $f = \lambda X \in \mathcal{P}([0,1]).(X \times \{17\})$. נוכיח f **מוגדרת היטב (מליאות):** יהי $X \in \mathcal{P}([0,1])$ ונוכיח $f(X) \in A$. ראשית $f(x) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. בנוסף, $id_{\mathbb{R}} \subseteq f(X)$ ולכן $f(X)$ רפלקסיבי מעל $\mathbb{R}$. **חח"ע:** נניח $X_1, X_2 \in \mathcal{P}([0,1])$ שונות. אז קיים בה"כ $x_0 \in X_1 \setminus X_2$ ולכן $\langle x_0, 17 \rangle \in X_1 \times \{17\} \subseteq f(X_1)$ ומצד שני $x_0 \neq 17$ ולכן $\langle x_0, 17 \rangle \notin id_{\mathbb{R}}$ וכן $\langle x_0, 17 \neq x_2 \times \}17$ וסה"כ $\langle x_0, 17 \rangle \in f(x_2)$.
   לכן, $|A| \leq |\mathcal{P}([0,1])| = 2^{|[0,1]} = 2^{\aleph}$. סה"כ מקש"ב $|A| = 2^{\aleph}$.
5. מצאו את העוצמה של הקבוצה כל הפונקציות החח"ע על $\mathbb{N}$ שסימונה B. **פתרון:** $B \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ולכן $|B| \leq \aleph_0^{\{}\aleph_0\} = 2^{\aleph_0}$. מצד שני, נגדיר פונ' $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to B$ ע"י:

$$f = \lambda X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 2n & n \in X \\ 2n+1 & n \notin X \end{cases}$$

***f* מוגדרת היטב:** צ.ל. שלכל $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(X)$ פונקציה חח"ע. יהיו $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ שונים. אם $n_1 \in X \wedge x_2 \notin X$ אז בהכרח $f(X)(n_1) = 2n_1 \neq 2n_2 + 1 = f(X)(n_2)$. אחרת, נניח $x_1, x_2 \in X$, אז $2n_1 \neq 2n_2$ וגמרנו, ואם $x_1, x_2 \notin X$ אז באופן דומה $2n_1 + 1 \neq 2n_2 + 1$.

***f*חח"ע:** יהיו $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ שונות, אז בהכרח $_0 \in X_1 \setminus X_2$, ניקח $n = x_0$ ונקבל $f(X_1)(x_1) = 2x_0 \neq 2x_0 + 1 = f(X_2)(x_0)$ ולכן f חח"ע.

אזי, $|B| \leq |\mathcal{P}(A)| = 2^{\aleph_0}$ וסה"כ מקש"ב $|B| = \aleph$.