תרגול

שחר פרץ

30 ביולי 2025

$$(1)$$

יהיו L_1, L_2 תמ"ים של V ונניח $\dim L_1 + L_2 = 1 + \dim L_1 \cap L_2$, נ"ס. נוכיח $L_1 \subseteq L_2 \vee L_2 \subseteq L_1$.

הוכחה. נסמן $n = \dim L_1, m = \dim L_2, k = \dim L_1 \cap L_2$. ע"פ משפט הממדים:

$$\dim L_1 + L_2 = n + m - k = 1 + k \implies n + m = 1 + 2k$$

נניח בשלילה ש־$L_2 \nsubseteq L_1$ וגם $L_1 \nsubseteq L_2$. לכן $n > k \wedge m > k$ ומהיות ממדים שלמים $n \geq k + 1 \wedge m \geq k + 1$. נחבר ונקבל:

$$2k + 1 = n + m \geq 2(k + 1) = 2k + 2 \implies 1 \geq 2 \quad \perp$$

■

$$(2)$$

יהיו:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_1 - 3c_1 & a_3 - 3c_3 & a_2 - 3c_2 \\ a_1 + b_1 & a_3 + b_3 & a_2 + b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}$$

נניח $\det A = 2$.

1. מצאו את $\det B$

$$\det A = \det A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix} = \det B$$

סה"כ $\det B = -2$.

2. נמצא את $\det C$: זה לדרג את B. מכאן מולטילינאריות ומסיימים.
3. מצאו T כך ש־$C = TB$. הפתרון: T מכפלת האלמנטריות שמדרגות את B ל־C. הבחנו ש־

$$B \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} B' \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_3} C$$

ששקול ל־:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז $C = E_2 E_1 B$. במקום לחשב את $E_1 E_2$ אפשר להפעיל על I את שתי הפעולות מיד ואז לקבל:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

תהי:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&3&4\\1&0&2&1\\0&1&-3&3\\1&0&4&3\end{pmatrix}$$

1. חשבו את A^{-1} (אין לי כוח)
2. מצאו בסיס למרחב המאפס של A^{-1} – $\mathcal{N}(A)=\{0\}$ כי אחרת
3. נגדיר העתקה לינארית $T\colon M_4(\mathbb{R})\to M_4(\mathbb{R})$. הוכיחו/הפירוכ: קיים בסיס B של $M_4(\mathbb{R})$ כך ש־$[T]_B=A^{-1}$

(4)

נגדיר העתקה $D(p)=p$ ו־$\mathbb{R}_n[x]$ ל־$\mathbb{R}_n[x]$ נגדיר:

$$J=\begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$$

1. מצאו בסיסים סדורים B,C של $\mathbb{R}_n[x]$ כך ש־$[D]_C^B=J$.

$$[D]_C^B=\begin{pmatrix}|&&|\\ [D(b_1)]_C&\cdots&[D(b_{n+1})]_C\\ |&&|\end{pmatrix}$$

מהיותם שווים ל־$e_1\dots e_n,0$ ונקבל:

$$D(b_1)=e_1^T(C_1\dots C_n)=C_1\dots D(b_n)=C_n,\;\;D(b_{n+1})=0$$

נבחר את B להיות הסטנדרטי, ואת D להיות $(x^n,x^{n-1},\dots,1)$ סטנדרטי הפוך, ואת $C=(nx^{n-1},(n-1)x^{n-2},\dots v)$ כאשר v יכול להיות כל וקטור כי הוא מוכפל ב־0 בכל מקרה. הבהרה: זו הבחירה הכי נוחה ומהירה, לא כל הבסיסים בעולם.

2. חשוב את $[D]_E^E$ כאשר $E=(1,x,x^2\dots x^n)$. נקבל:

$$[D]_E=\begin{pmatrix}0&1&&&&&\\&0&2&&&&\\&&0&3&&&\\&&&0&4&&\\&&&&\ddots&\ddots&\\&&&&&0&n\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$

פשוט תפחו את ההגדרה.

3. נמצא בסיס סדור B של $\mathbb{R}_n[x]$ כך ש־$[D]_B^B=J$. פתרון: לא קיים. זה גורר $D(b_1)=b_1$ וזו סתירה. זה עוד גורר $\mathrm{tr}[D]_B^B=\mathrm{tr}[D]_B^B\implies n-1=0$ וזו סתירה (כי tr נשמר בדומות).

הערה: מי שפספס, ה־tr נשמר בדמיון

הוכחה.

$$\mathrm{tr}([D]_B)=\mathrm{tr}(M^{-1}[D]_EM)=\mathrm{tr}([D]_E^E\cancel{MM^{-1}})=\mathrm{tr}([D]_E^E)$$

■

זאת כי tr ציקלי, כלומר $\mathrm{tr}\,ABC=\mathrm{tr}\,CAB$ (אפשר לעשות "סיבובים")

(5)

תהיינה A,B,C ריבועיות מסדר n המקיימות $C(I+AB)=I$. נרשום את המטריצה $(I-BCA)(I+BA)$ בצורה הפשוטה ביותר.

$$(I+BA)(I-BCA)=I+BA-BCA-B\underbrace{CAB}_{I-C}A=I+BA-BCA-BA+BCA=I$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

יהיו V,W נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $T\colon V\to W$ ע"ל ו־B,C בסיסים של V,W. נוכיח שב־$[T]_C^B$ יש לכל היותר $\dim W - \dim \operatorname{Im} T$ שורות אפסים.

הוכחה.

$$\operatorname{rank}(\underbrace{[T]_C^B}_{A}) = \dim \operatorname{Im} T$$

יש לכל היותר $n - \operatorname{rank} A$ שורות אפסים במטריצה A (כאשר $n = \dim W$), שבמקרה שלנו לכל היותר:

$$n = \operatorname{rank} A = \dim W - \dim \operatorname{Im} T$$

כדרוש. ■

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

תהי $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ט"ל המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \ker T$$

נמצא את המטריצה $[T]_B^B$ לפי הבסיס:

$$B = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

של $\mathbb{R}^3$.

פתרון. נתחיל מלהראות שהוקטורים שערכם נתון (האחד שבקרנל והשניים עם השוויון) בת"ל:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

זה אומר שהם פורסים את הבסיס שלנו, ונוכל באמצעות ערכם שאנחנו יודעים למצוא את ערכי איברי הבסיס.

ניעזר בקומבינציות לינאריות (אפשר לדרג כדי לחפש אותם, אני מחפש קומבינציות בראש):

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1.5T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0.5T\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

אם היינו רוצים למצוא את הקומבינציה בעצמנו, היינו מדרגים את המטריצה הבאה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

נבחין ש־:

$$\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

עבור העמודה השנייה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0.5T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 0.5T\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

סה"כ:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B & [T(b_3)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

■

(8)

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס של V. תהי $T\colon V \to V$ ט"ל כך ש־$C = (Tv_1 \dots Tv_n)$ גם כן בסיס של V. הוכיחו כי $[T]_B^B = [T]_C^B$.

הוכחה.

$$[T]_C = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(c_1)]_C & \cdots & [T(c_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נתבונן בעמודה ספציפית:

$$T(C_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i c_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T v_i = T\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i\right)$$

מהיות T איזו', ממשפט מהכיתה נסיק שבגלל ש־$T(C_i) = T(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i)$ נקבל $C_i = \sum_{i=0}^n v_i$. עתה נבחין ש־:

$$Tv_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i = C_i$$

ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B \\ | & & | \end{pmatrix} = [T]_C$$

■