

חדוא א - תרגיל 7

1 יהי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R$. הוכחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור נתון עי $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|}$.

2 מצאו את תחום ההתכנסות (רדיוס ההתכנסות והתכוניות בנקודות הקצה) של הטורים הבאים:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (x+1)^{2n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (x-1)^n$

3 הוכחו\ הפריכו:

(א) יהי b_n טורים, ונניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. אזי הטורים מתכנסים וمتבדרים יחד.

(ב) תהי a_n סדרה, המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ מתכנסים וمتבדרים יחד.

(ג) תהי a_n סדרה חיובית, המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

4 קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהשלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(א) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$$

$$(ב) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}\right)$$

5 יהי $p \in \mathbb{N}$, לכל $n \in \mathbb{N}$ נחלק את n ב- p עם שארית ונסמן $n = pq_n + r_n$ כאשר $0 \leq r_n < p$ ונשメן n כאשר n נגיד:

$$a_n = \begin{cases} 1 & q_n \text{ odd} \\ -1 & q_n \text{ even} \end{cases}$$

באופן שקול, בכל פעם שאנו שולחים עבורינו בכפולה של p , אנחנו מחליפים סימן. כמובן, עבור p האיברים הראשוניים מתקיים $a_1 = \dots = a_p = -1$ ועבור p האיברים האחרים מתקיים $a_{p+1} = \dots = a_{2p} = -1$ וכך הלאה. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

6 מצאו את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

$$(א) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

$$(ב) \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$$

$$(ג) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$$

7 מצאו את כל ערכי x עבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ מתכנס.

8 תהי $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכחו כי קיימות פונקציה זוגית f_1 ופונקציה אי-זוגית f_2 ייחזות כך שלכל $x \in [-a, a]$ מתקיים $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

9 פונקציית דיריכלה (Dirichlet) מוגדרת עי

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(א) הוכחו כי זו פונקציה מחזורית, אך אין לה מחזור מינימלי.

(ב) תהי פונקציה $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: כך שבכל נקודה $a \in \mathbb{R}$ קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ וכן לכל $n \in \mathbb{N}$ הוא מוחזר של f , האם f בהכרח פונקציה קבועה? הוכחו.

10. הוכחו:

(א) אם לפי הינה וגם לפי קושי.

(ב) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 2$

(ג) הגבול הבא לא קיים: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

(ד) הגבול הבא לא קיים: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

11. תהי f מוגדרת בסביבה מנויקבת של $a \in \mathbb{R}$, ונניח כי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \frac{1}{|f(x)|} = 0$. מצאו את $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ והוכחו לפי ההגדרה שהוא אכן הגבול.

שאלות לתרגול נוספת (לא להגשה)

1. חקרו את התכונות הטוריים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \text{ (א)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} \text{ (ב)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2\sqrt{n}-1}{n} \text{ (ג)}$$

2. מצאו את רדיוס ההחנשות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ עבור הסדרות הבאות:

$$a_n = n + 1 \text{ (א)}$$

$$a_n = \frac{2^n + 3^n + 5^n}{3n} \text{ (ב)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n} \text{ (ג)}$$