עוצמות 8

שחר פרץ

27 במרץ 2024

1 דוגמאות מתרגילים מש.ב. 9

1.1 תרגיל 9

הגדרה: נאמר ש־$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ הן "כמעט מסכימות" אם קיים i כך שלכל $j \geq i$ מתקיים $f(j) = g(j)$. [נסיק: $i \in \mathbb{N}$]. נגדיר:

$$R = \{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2 \mid f, g \text{ almost agrees}\}$$

(א) אמור להיות קל

(ב) מצאו את העוצמה של כל מחלקת שקילות; תהי $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. נחשב את $|[f]_R|$. עוזר לאינטואיציה, ולרוב גם להוכחה: מצד אחד, $[f]_R \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ולכן $|[f]_R| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = א$. מהכיוון השני: נגדיר $G \colon \mathbb{R} \to [f]_R$ ע"י:

$$g = \lambda r \in \mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{N}.\begin{cases} r, & n = 0 \\ f(n), & n \geq 1 \end{cases}$$

צריך להוכיח שהיא מוגדרת היטב (מגיעה לטווח מתאים: $\forall r \in \mathbb{R}.g(r) \in [f]_R$) ושהיא חח"ע. כרגע לא נוכיח זאת כאן [אני אנצל את זה בשביל להגיד שיש לי הוכחה פורמלית על הפונקציה הזו בדיוק בענן, שאמורה להיות יחסית נכונה].

מקיום הפונקציה, $|[f]_R| \leq |\mathbb{R}| = א$. סה"כ מקש"ב $|[f]_R| = א$.

(ג) מצאו את העוצמה של קבוצת המנה; $|(\mathbb{N} \to \mathbb{R})/R| = ?$. טעות נפוצה הייתה היא, להתבונן בחסם העליון של ההכלה ולהניח כי הוא החסם העליון. במקרה הזה, $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})/R \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N} \to \mathbb{R}))$, ומכאן נובע החסם העליון $2^{(2^{א})}$ (הערה: מותר גם בלי סוגריים והכוונה היא לזה). החסם העליון הזה לעוצמה הוא לא ההדוק ביותר! ראוי לציון שלכל יחס שקילות R מעל A תמקיים $|A/R| \leq |A|$ – אומנם אסור להשתמש בזה כמשפט, אבל הוא מאפשר להקטין את החסם יותר כשמדברים על מחלקות שקילות. אין זה משפט, אבל די לנמקו בקצרה: $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$. ניקח $A' \subseteq A$ מערכת נציגים ליחס R (AC). כעת $\lambda a \in A'.[a]_R$ היא זיווג $A' \to A/R$ ולכן $|A/R| = |A'| \leq |A|$ (אין צורך להוכיח מעבר לכך). **זו הדרך הנוחה למצוא חסם עליון לקבוצות מנה.**

דיברנו די; נחזור להוכחה. מהטענה לעיל, $|(\mathbb{N} \to \mathbb{R})/R| \leq |\mathbb{N} \to \mathbb{R}| = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = א$. בעבור הכיוון השני: נתבונן בכל הפונקציות הקבועות האפשרויות, שברור כי הן אינן מסכימות (נידרש להוכיח זאת בהמשך). נגדיר $F \colon \mathbb{R} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R})/R$ ע"י:

$$F = \lambda r \in \mathbb{R}.[\lambda x \in \mathbb{N}.r]_R$$

אין צורך להוכיח ש־F מוגדרת היטב כי אנחנו מחזירים מחלקת שקילות של R וזה די ישיר. יש צורך להוכיח שהיא חח"ע (כלומר $\forall r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}.\langle x \in \mathbb{N}.r_1, \lambda x \in \mathbb{N}.r_2\rangle \notin R$). [הערה: אם אתם תחפשו את ההוכחה המוגמרת אצלי, תמצאו בעיקר חרא, אז אל תעשו את זה. כל שאר התרגילים חוץ מהסעיף הזה כתובים טוב]

1.2 סעיף 10)

נגדיר:

$$S = \{\langle A < B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \colon |A| = |B| = |A \cup B|\}$$

1. $[\{2,3\}]_S = \big\{\{2,3\}\big\}$, $[\mathbb{N}]_S = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid |X| = \aleph_0\}$. בהכללה, אפשר להכיח אשר $\forall A \text{ finite}.[A]_S = \{A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \text{ infinite}.[A]_S = [\mathbb{N}]_S$.
2. מהי קבוצת המנה? מהי עוצמתה? קבוצת המנה:

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z})/S = \{[A]_S \mid A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})\} = \big\{\{A\} \mid A \in \underbrace{\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid |X| < \aleph_0\}}_{:=\mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{Z})}\big\} \uplus \big\{\underbrace{\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid |X| = \aleph_0\}}_{[\mathbb{N}]_S}\big\}$$

. מכאן: $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/S| = |\mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{Z})|+1$. טענה: $|\mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{Z})| = \aleph_0$ (כדאי לזכור את זה). נוכיח זאת. סה"כ $\mathcal{P}_{\text{finite}} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathcal{P}(\underbrace{\{-n, \dots, n\}}_{2n+1})}_{2^{2n+1} \implies \text{finite}}$

איחוד בן מניה של קבוצות סופיות, הוא לכל היותר בן מניה. מצד שני, $\lambda n \in \mathbb{N}.\{n\}$ היא חח"ע $\mathbb{Z} \to \mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{Z})$, לכן $|\mathcal{P}_{\text{finite}}(\mathbb{Z})| \geq \aleph_0$. סה"כ שוויון מקש"ב. סיימנו: $|\mathcal{P}(\mathbb{Z})/S| = \aleph_0 + 1 = \aleph_0$ כדרוש.