

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 21

להגשה עד יום שלישי 18.6.24 בשעה 23:59.

1. הוכיחו קומבינטורית את נוסחאות הנסיגה הבאות עבור D_n (מספר התמורות ללא נקודות שבת על n איברים):

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \quad (\text{א}) \\ D_n &= (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (\text{ב}) \end{aligned}$$

2. חשבו את מספר ההילוכים מ $-(0,0)$ ל $-(2n,0)$ שצעדיהם הם $(+1, +1)$ ו $-(+1, -1)$ בלבד, ושלעולם לא עוברים אל מתחת לציר ה $-x$.

3. נסמן ב $-G_n$ את אוסף הסדרות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ המקיימות $a_i \in \{-1, 1\}$ ובנוסף $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$. נקרא להן סדרות טובות.

(א) כמה סדרות טובות יש?

(ב) נסמן ב $-P_n \subseteq G_n$ את הסדרות הטובות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ המקיימות בנוסף כי לכל $1 \leq k < 2n$, $\sum_{i=1}^k a_i > 0$. מצאו את $|P_n|$.

(ג) לכל $1 \leq k \leq n$ נסמן ב $-Q_{n,k} \subseteq G_n$ את אוסף הסדרות הטובות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ עבורן k הינו המינימלי עבורו $\sum_{i=1}^{2k} a_i = 0$. מצאו את $|Q_{n,k}|$.

4. חשבו את מספר הסדרות a_1, \dots, a_{2017} המקיימות את שלושת התנאים:

(א) $a_i \in \{-1, 1\}$ לכל i , וגם

(ב) $\sum_{i=1}^{2017} a_i = 7$, וגם

(ג) $\sum_{i=1}^j a_i > 0$ לכל $1 \leq j \leq 2017$.

5.

(א) בשיעור הוכחנו את הנוסחה הסגורה עבור מספר קטלן ה $-n$: $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. פשטו אלגברית את הנוסחה הסגורה הנ"ל והסיקו את השוויונות הבאים:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$$

(ב) הוכיחו בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2n+1}{n}$$

6. מהו מספר הסדרות x_1, x_2, \dots, x_{4n} שבהן $x_i \in \{-1, 1\}$ לכל i , ומתקיים

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = \sum_{i=1}^{4n} x_i = 0$$

וכן לכל $1 \leq j < 2n$ מתקיים $\sum_{i=1}^j x_i > 0$, ולכל $2n \leq j \leq 4n$ מתקיים $\sum_{i=1}^j x_i \geq 0$?

7. בבניין רב קומות, הקומות ממוספרות לפי הסדר במספרים $50, 49, 48, \dots, 1, 0, -1, -2$ (הקומות $-1, -2$ הן קומות חנייה, הקומה 0 היא קומת הקרקע, וישנן עוד 50 קומות מעליה).

חתול ישן ב -1 בינואר בקומה 0 ובכל יום בהמשך חודש ינואר עובר לנמנם בקומה סמוכה (גבוהה יותר או נמוכה יותר).

נסמן ב $-s_i$ את מספר הקומה בה החתול נמנם ביום מספר i ($1 \leq i \leq 31$). בפרט, $s_1 = 0$, ולכל $1 \leq i \leq 30$,

$s_{i+1} \in \{s_i - 1, s_i + 1\}$. מהו מספר הסדרות האפשריות $(s_1, s_2, \dots, s_{31})$ שבהן $s_{31} = 6$?