ליניארית 1א, תרגיל בית 5

שחר פרץ

22 בדצמבר 2024

.... (1) ....

בכל אחד מהסיעפים הבאים, נקבע האם קיימת T העתקה ליניארית המקיימת את הנתון, נקבע האם היא יחידה. במידה והיא יחידה נמצא את תמונתה, גרעינה, ונקבע האם היא חח"ע, על או איזומורפיזם.

נסמן ב־E, בכל סעיף בנפרד, להיות הבסיס הטרוויאלי של טווח הפונקציה אותה נרצה למצוא.

א) מעל $\mathbb{Z}_3$ נמצא העתקה $T\colon (\mathbb{Z}_3)^3 \to M_2(\mathbb{Z}_3)$ המקיימת:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

ננסה לבנות מטריצה שתייצג את ההעתקה. לשם כך, תחילה נוכיח שהוקטורים הבאים בת"ל ופורשים. נתבונן במרחב השורות של הוקטורים.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_1\to R_1+R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל משתנה קשור באיבר פותח, ולכן הקבוצה פורשת. מרחב הפתרונות למטריצה ההומגנית טרוויאלי בלבד, ולכן הקבוצה בת"ל. סה"כ הוקטורים הללו בסיס ל־$\mathbb{R}^3$, נסמנו B.

נתבונן באיזומורפיזם הבאה:

$$\varphi \to M_2(\mathbb{Z}_3) \to \mathbb{Z}_3^4,\ \varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

זוהי איזומטריה שכן תחת הגדרות הקורס, אבסטרקטית, φ היא הזהות מעל $\mathbb{Z}_3^4$. אזי לכל T נוכל למצוא $f\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^4$ כך ש־$\varphi\circ f = T$ (שוב, אבסטרקטית $f = T$).

עתה נוכל לבנות את $[T]_E^B$.

$$\mathrm{Col}_1 = \left[\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \left[\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathrm{Col}_2,\ \mathrm{Col}_3 = \left[\varphi\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

נמצא את הקרנל:

$$v \in \ker T \iff T(v) = 0 \iff [T]_E^B[v]_B$$

נקבל:

$$\ell et\ [v]_B = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \implies [T]_E^B[v]_B = 0 \iff \big(a+b+2c, 0, -c, a+b+c\big) = (0,0,0,0)$$

בכך למעשה הראינו שהקרנל לפי בסיס B יהיה דירוג המטריצה המייצגת. ב־$R_n \to \top$ נסמן שנוכל להתעלם משורה מכיוון שמהווה טאוטולוגיה.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to\top]{R_4\to R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_3\to\top}\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

סה"כ נקבל שקבוצת הפתרונות לפי הבסיס B תהיה:

$$\left\{\left[\begin{pmatrix}-s\\s\\0\end{pmatrix}\right]_B \mid s\in\mathbb{Z}_3\right\}\xrightarrow{E}-s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-s\\0\end{pmatrix}$$

סה"כ קיבלנו $\ker T=((0,-s,0)\mid s\in\mathbb{Z}_3)$. עתה נחפש את התמונה. נתבונן בוקטור $[v]_B=(a,b,c)$ בתחום, ונקבל את התמונה להיות:

$$\operatorname{Im}T=\left\{\begin{pmatrix}a+b+2c\\0\\-c\\a+b+c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$$

אין זה משנה שאת v ייצגנו באמצעות a,b,c קומבינציתו ליניאריות מ־B, שכן B בסיס ובפרט פורש את $\mathbb{Z}_3^3$. לכן זוהי התמונה.

בגלל שעבור $s=1$ נקבל $\ker T\ni(0,-1,0)\neq(0,0,0)$, אז T אינה חח"ע. בגלל ש־$(1,1,1,1)\in\operatorname{Im}T$ גורר $1=0$ וזו סתירה, מצאנו וקטור מ־$\mathbb{Z}_3^4$ (שקול עד לכדי הרכבה באיזומורפיזם φ ל־$M_2(\mathbb{Z}_3)$) ולכן גם T איננה על. בפרט אינה איזומורפיזם.

ב) העתקה $T\colon(\mathbb{Z}_5)^3\to M_s(\mathbb{Z}_5)$ המקיימת:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ראשית כל, נבדוק האם הוקטורים בתחום שנתון ערכם הינם בסיס:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\end{pmatrix}$$

מצאנו שהם בת"ל, שכן קיים פתרון לא טרוויאלי, אבל הם לא פורשים; נותר משתנה בלתי תלוי. נוכל למלא את החסר ב־e_3. סה"כ השלמנו לבסיס:

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

עתה נבנה את $[T]_E^B$.

$$\mathrm{Col}_1=\left[T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\left[T\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right)\right]=\mathrm{Col}_2,\ \mathrm{Col}_3=\left[T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right]_E:=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

כאשר למעשה $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3$ אך לא צוינה כל הגבלה נוספת. סה"כ נקבל את המטריצה המייצגת:

$$[T]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&0&b\\0&0&c\\1&1&d\end{pmatrix}$$

נבחין כי היא איננה יחידה – בעבור המטריצה המייצגת נוכל לבחור בכל a,b,c,d ב־$\mathbb{Z}_5$, ומשום שקיים איזומורפיזם בין מרחב המטריצות המייצגות לבין מרחב ההעתקות הליניאריות – כל שינוי ב־a,b,c,d יגרור שהמטריצה תייצג העתקה ליניארית אחרת. בגלל ש־$|\mathbb{Z}_5|>1$ אז בפרט ייתכן יותר מ־a יחיד וסה"כ קיימת יותר מהעתקה ליניארית יחידה.

ג) מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(1+2x+x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T(1+x^2) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

בדומה לסעיפים קודמים, נבדוק האם הנתונים בסיס:

$$(B_1, B_2, B_3) := \left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -2R_2, R_3 \to -R_3]{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3} = 1$$

אכן כל המשתנים קשורים ולכן פורש, ובת"ל כי דירגנו מטריצה הומוגנית ומצאנו פתרון טרוויאלי בלבד. עתה נבנה את $[T]_E^B$. נקבל:

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ [T(B_1)]_C & [T(B_2)]_C & [T(B_3)]_C\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ T(B_1) & T(B_2) & T(B_3)\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

בכך מצאנו שההעתקה יחידה. נמצא את תמונתה וגרעינה.

גרעין. יהי $p = (a,b,c)$. אז:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\2 & 1 & 2 & b\\1 & 1 & 0 & c\end{array}\right)$$

ד) מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת:

$$\operatorname{Im} T = \ker T = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לא תיתכן העתקה כזו, שכן אם זהו $\operatorname{Im} T$ אז $0 \notin \operatorname{Im} T$ (כי כפל ב־$0 \in \mathbb{R}$ בכל וקטור יביא אותנו ל־$(0,0,0) \notin \operatorname{Im} T$) אך $\operatorname{Im} T$ מ"ו ובפרט קיים בו את איבר ה־0 וזו סתירה.

ה) מעל שדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת:

$$\operatorname{Im} T = \ker T = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לא קיימת העתקה כזו באופן זהה לסעיף הקודם.

. . . . (2) . . . .

בסעיפים הבאים, נמצא את $[v]_B$ בהינתן V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־B בסיס של V.

א)

$$\mathbb{F} = \mathbb{R},\ V = M_2(\mathbb{R}), v = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right) := (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

בדומה לסעיפים קודמים, נרכיב כל מטריצה בזיווג $\varphi\colon M_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^4$ באמצעות:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

נחפש a,b,c,d מתאימים כך ש־:

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + dp_4 = v \iff a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$$

נכניס את מערכת המשוואות לתוך מטירצות:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&2\\0&0&0&1&1\\1&0&1&0&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&2\\1&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_4}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

סה"כ:

$$[v]_B=(a,b,c,d)=(1,1,2,1)$$

ב)

$$\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5, V=(\mathbb{Z}_5)^5, v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, B=\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

באופן דומה לסעיף הקודם, נחפש קבועים מתאימים:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\4&0&0&1&0&2\\0&1&0&0&0&3\\4&1&0&0&1&4\\4&1&0&0&0&5\end{array}\right)\xrightarrow{\forall n\in\{2,4,5\}:\ R_n\to R_n+R_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&3\\0&1&0&0&0&4\\0&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\forall n\in[4,5]:\ R_n\to R_n-R_3]{R_2\to R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&1&0&1&2\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5\to R_5-R_3]{R_4\to R_4-R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&4&1&4\\0&0&0&4&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_5-R_4]{R_4\to 4R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&1&4&1\\0&0&0&0&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-R_5]{R_5\to 4R_5}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_4}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right)$$

סה"כ מדירוג המטריצה, באופן דומה לסעיף הקודם, מצאנו:

$$[v]_B=(4,4,3,1,4)$$

ג)

$$\mathbb{F}=\mathbb{R},\ V=\mathbb{R}_4[x],\ v=2+4x-5x^3+x^5,\ B=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x^2+x^3+x^4)$$

באופן דומה לסעיף א', נייצג את הפולינומים באמצעות וקטורים מ־$\mathbb{R}_5$ במהלך השאלה. נרצה למצוא $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ כך ש־:

$$a\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\4\\2\end{pmatrix}$$

נעביר את מערכת המשוואות למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&-5\\0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&4\\1&1&1&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_n\to R_n-R_1]{\forall\mathbb{N}\ni n<5}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&1&0&-1\\0&1&1&1&0&3\\1&1&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_n\to R_n-R_2]{\forall\mathbb{N}\ni n<4}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&1&0&0&9\\1&1&1&0&0&7\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_5-R_3]{R_4\to R_4-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&0&0&0&4\\1&1&0&0&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_5\to R_5-R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&0&0&0&4\\1&0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

וסה"כ, בדומה לסעיפים קודמים:

$$[v]_B = (a,b,c,d,e) = (-2,4,5,-6,1)$$

. . . . (3) . . . .

בסעיפים הבאים נחשב את $[T]_C^B$ בהינתן העתקה ליניארית T ובסיסים B, C.

א)

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \end{pmatrix},\ B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Col}_1 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix} 0.\bar{3} \\ 0.\bar{3} \end{pmatrix},\ \mathrm{Col}_2 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -0.\bar{3} \\ -0.\bar{3} \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ב)

$$T(ax^2+bx+c) = T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c-a & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \\ a-b \end{pmatrix},\ B = (1, 1+x, 1+x^2),\ C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Col}_1 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix},\ \mathrm{Col}_2 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Col}_3 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -9 & -13 & -2 \end{pmatrix}$$

ג) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ הנתונה ע"י:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4 \\ 2x_1+x_3+x_4 \end{pmatrix}, B = E_{\mathbb{R}^4}, C = E_{\mathbb{R}^3}$$

כאשר E_V הבסיס הסטנדרטי של V.

$$\mathrm{Col}_1 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{Col}_2 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{Col}_3 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Col}_4 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. . . . (4) . . . .

נחשב את המכפלות הבאות:

א.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+0\\ -2\cdot 7+4\\ 7\cdot 2-4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -10\\ -2\end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix}6 & 7 & 9 & -12 & 3\\ 4 & 7 & 1 & -3 & 9\\ 1 & -7 & -3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 6-14+9+12+3\\ 12-14+1+3+9\\ 3+14-3-4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\ 11\\ 11\end{pmatrix}$$

. . . . (5) . . . .

נגדיר:

$$\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5,\ T\colon \mathbb{F}_2[t]\to\mathbb{F}^2,\ T(p(t))=\begin{pmatrix}p(1)\\ p(2)\end{pmatrix},\ B=(1,t+1,t^2+t+1),\ C=\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

כאשר B,C בסיסים של $\mathbb{F}_2[t],\mathbb{F}^2$ בהתאמה. בתרגול ראינו ש־ $[T]_C^B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

א) צ.ל. $\forall p\in\mathbb{F}_2[t]\colon [T(p)]_C=[T]_C^B\cdot[p]_B$ ללא שימוש במשפט הטוען זאת לכל T העתקה ליניארית.

הוכחה. יהי $p\in\mathbb{F}_2[t]$. אז קיימים a,b,c כך ש־:

$$p=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{F},\ T(p)=\begin{pmatrix}p(1)\\ p(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(at^2+bt+c)(1)\\ (at^2+bt+c)(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\ 4a+2b+c\end{pmatrix}$$

נמצא את המקדמים לפי בסיס C:

$$\left(C_1\quad C_2\,\middle|\,T(p)\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a+b+c\\ 1 & 1 & 4a+2b+c\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a+b+c\\ 0 & 1 & 3a+b\end{array}\right)\implies [T(p)]_C=\begin{pmatrix}a+b+c\\ 3a+b\end{pmatrix}$$

נחפש את $[p]_B$:

$$\left(B_3\quad B_2\quad B_1\,\middle|\,p\right)\iff\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 1 & 1 & 0 & b\\ 1 & 1 & 1 & c\end{array}\right)\xrightarrow[R_n\to R_n-R_3]{\forall n\in[2,3]}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b-a\\ 0 & 1 & 1 & c-a\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & b-a\\ 0 & 0 & 1 & c-b\end{array}\right)\implies [p]_B=\begin{pmatrix}c-b\\ b-a\\ a\end{pmatrix}$$

נכפול במטריצה המייצגת:

$$[T]_C^B[p]_B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c-b\\ b-a\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c-b+2b-2a+3a\\ b-a-4a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\ 3a+b\end{pmatrix}$$

מטרנזיטיביות נקבל $[T(p)]_C=[T]_C^B[p]_B$ כדרוש.

נדרש למצוא את הגרעין והתמונה של T באמצעות המטריצה המייצגת.

גרעין. נדרוש $T(p)=0$. בגלל ש־$[p]_C=0 \iff p=0$ מהיות C בסיס שפורש מ"ו אם איבר 0 יחיד, אז $\forall p\in\mathbb{F}_2[x]\colon p=0\iff$ $[p]_C=0$. יהי $p\in\mathbb{F}_2[t]$, $p=(a,b,c)$. ידוע:

$$p\in\ker T\iff T(p)=0\iff [T(p)]_C=0\iff [T]_C^B[p]_B=0$$

כבר ידועיים $[p]_B, [T]_C^B$ מסעיף הקודם, והכפל ביניהם גם חושב בו. לאחר שחישבנו את הכפל במטריצה המייצגת, קיבלנו:

$$[T]_C^B[p]B = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 3a+b \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

וסה"כ:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+b=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 + \frac{R_2}{2}]{R_2 \to -0.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} -0.5s \\ 1.5s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{F} \right\}$$

תמונה. ידוע $v \in \operatorname{Im} T \iff \exists p \in \mathbb{F}_2[t] \colon T(p) = v$. יהי $p \in \mathbb{F}_2[t]$, נעביר אותו דרך T כדי לקבל כל ערך v אפשרי.

$$\ell et\ p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ [T]_C^B[p]_B = [T]_C^B \begin{pmatrix} c-b \\ b-a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 3a+b \end{pmatrix}$$

(מרבית השוויון חושבו בסעיף הקודם). סה"כ:

$$\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} s+t+w \\ 4s+t \end{pmatrix} \mid s,t,w \in \mathbb{F} \right\}$$

■

.... (6) ....

יהיו V, W מ"וים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $T \colon V \to W$ העתקה יניארית. יהי C בסיס כלשהו של W.

א) צ.ל. קיום בסיס B של V כך ש־$\dim \ker T$ העמודות הראשונות של $[T]_C^B$ הן אפסים.

הוכחה. נסמן $\dim \ker T = n$. נדע ש־$\dim \ker T \le \dim \operatorname{Im} T$ בגלל ש־$\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$. נתבונן במ"ו $\operatorname{Im} T$:

- אם $\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T$ אז בהכרח $\dim T = \ker T$ כי שניהם מ"וים מוכלים אחד בשני, והשלמת בת"ל מ־$\ker T$ והשלמתו לבסיס של $\ker T$ תגרור באינדוקציה את פרישת המרחב $\operatorname{Im} T$. אזי ההעתקה $T(v) = 0$ שכן $(\forall v \in \operatorname{Im} T . v \in \ker T) \implies$ $(\forall v \in \operatorname{Im} T . v = 0)$ ולכן $T(v) = 0$. נבחר את מטריצת האפס שכפל בה יתן 0 כדרוש.
- אחרת, $\dim \operatorname{Im} T < \dim \ker T$. נתבונן בבסיס B של $\ker T$. אזי B בת"ל ב־$\operatorname{Im} T$. נשלים אותו לבסיס $\tilde{B}$. מהנתון $|\tilde{B}| > |B|$ כלומר $\exists v \neq 0 \colon v \in \tilde{B} \setminus B$. נסמן את המרחב $\mathcal{V} = \operatorname{span}\{v \in V \mid T(v) \in \tilde{B} \setminus B\}$. הצמצום $T|_{\mathcal{V}}$ בעל המטריצה המייצגת $[T]_{\tilde{B} \setminus B}^{\mathcal{V}}$ הוא איזומורפיזם $T|_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \to \operatorname{span}(\tilde{B} \setminus B)$ כי בכלל שהוקטורים בו נוצרים מבסיסים זרים לקרנל, $\ker T|_{\mathcal{V}} = \{0\}$, ולכן חח"ע, והוא על לפי הגדרת $\mathcal{V}$.

נשלים לבסיס פורש את $\tilde{B} \setminus B$ ונסמן את אשר קיבלנו ב־$\mathcal{B}$ (נגדיר את הסדר הפנימי ב־$\mathcal{B}$ בצורה קונסטרקטיבית במהלך ההוכחה). נטען:

$$[T]_C^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots & [T]_{\tilde{B} \setminus B}^{\mathcal{V}} \\ \iddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \cdots & 0 & & \end{pmatrix} := A$$

כלומר למעשה לקחנו את המטריצה בגודל $n \times n$ שקיבלנו קודם לכן, והרחבנו אותה למטריצה מגודל $\dim \mathcal{B} \times \dim C$ כאשר בכל מקום חדש הוספנו אפסים. ידוע שמטריצות שוות אמ"מ ההעתקות אותן מייצגות שוות (מקיום איזומורפיזם ובפרט חח"ע בין מרחב ההעתקות הליניאריות לבין מרחב המטריצות המייצגות) אשר שוות אמ"מ לכל $v \in V$ יחזירו אותן ערכים, שיתקיים אמ"מ כפל של $[v]_{\mathcal{B}}$ במטריצות המייצגות יחזיר את אותו הערך. נוכיח שזאת אכן יתקיים. יהי $v \in V$, נסמן $[v]_C = (x_1 \cdots x_m)$ כאשר $m = \dim V = |C|$ (ייצוג קיים ויחיד בגלל ש־C בסיס):

$$[T]_C^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = x_1 \operatorname{Col}_1[T]_C^{\mathcal{B}} + \cdots + x_m \operatorname{Col}_m[T]_C^{\mathcal{B}}$$

כאשר Col_i וקטור $[T(b)]_C$ כאשר $b \in \mathcal{B}$ (מהגדרת n־יה סדורה נקבל קיום i כך ש־$b = B_i$). בגלל ש־n מהוקטורים ב־$\mathcal{B}$ שייכים לקרנל, אז י יתקיים בעבורם $T(b) = 0$ ובגלל שפתרון מטריצה הומוגנית אפשרי הוא וקטור ה־0 אז $[T(b)]_C = 0$. סה"כ:

$$\exists N \subseteq [m] \colon |N| = n \land \forall i \in \mathbb{N} \colon \operatorname{Col}_i = [T(B_i)]_C = 0$$

ומכיוון שנתני לעצמי את החופש לקבוע את הסדר ב־$\mathcal{B}$ (חוקי כי רק צריך להוכיח קיום בסיס כזה, ובפרט אפשר להגדירו), נבחר $N = [n]$. נחזור לשוויון לעיל. מהגדרה, $\tilde{B} \setminus B = \{B_i \mid i \in [n]\}$ נקבל:

$$[T(v)]_C = [T]_C^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \sum_{i\in[m]} x_i \operatorname{Col}_i = \underbrace{\sum_{i\in N} x_i \operatorname{Col}_i[T]_C^{\mathcal{B}}}_{=0} + \sum_{i\in[m]\setminus N} x_i \operatorname{Col}_i[T]_C^{\mathcal{B}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i \operatorname{Col}_i A}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{m} x_i \operatorname{Col}_i[T]_C^{\mathcal{B}}$$

בגלל ש־$[T(v)]_C$ בכל בסיס שהוא ב־$B_{i\in[n]}$ יהיה 0 בגלל שאותו הבסיס בקרנל, אז:

$$\cdots = \sum_{i=n+1}^{m} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\dim C} ([T]_C^{\mathcal{B}})_{ij}\right)}_{\sum_{j=1}^{n}([T]_C^{\mathcal{B}})_{ij} + \sum_{j=n+1}^{C}([T]_C^{\mathcal{B}})_{ij}} = \sum_{i=n+1}^{m} x_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i A_{ij} = A[v]_C \quad \top$$

■

ב) נניח ש־T איננה העתקת ה־0. נוכיח קיום בסיס B' כך שב־$[T]_C^{B'}$ אין עמודות אפסים בכלל.

הוכחה. ידוע שאיננה העתקת האפס, לכן נוכל להניח $\exists v \in \operatorname{Im} T \colon T(v) \neq 0$ ובפרט נוכל להרחיבו לבסיס שכולל וקטור שלא מקיים $T(v) = 0$, תנאי הכרחי לבסיסי $\ker T$ מהיותם ב־$\ker T$, ולכן $\dim \ker T < \dim \operatorname{Im} T$. נסמן את v להיות וקטור כלשהו המקיים $T(\mathrm{v}) \neq 0$. נתבונן ב־$\tilde{B}$ להיות הבסיס המורחב מ־(v). נסמן:

$$B = \left(\begin{cases} b & T(b) \neq 0 \\ b + \mathrm{v} & T(b) = 0 \end{cases} \middle| b \in B\right) \implies \forall b \in B \colon \exists \mathrm{b} \in \tilde{B} \colon \begin{cases} b = \mathrm{b} & \implies T(b) \neq 0 \\ b = \mathrm{b} + \mathrm{v} & \implies T(b) = T(b + \mathrm{v}) = \overbrace{T(b)}^{=0} + \overbrace{T(\mathrm{v})}^{\neq 0} \neq 0 \end{cases}$$

נבחין שלא הוספנו את v לעצמו, כלומר, אם היינו מסדרים זאת במטריצות שורות – ביצענו פעולות אלמנטריות בלבד, ולכן לא שיננו את מרחב השורות של $\tilde{B}$ (הוא V, כי B פורש) או את מרחב הפתרונות (הוא הפתרון הטרוויאלי בלבד, כי B בת"ל) וסה"כ B בסיס כי הוא בת"ל ופורש. בפרט, המטריצה $[T]_C^B$ קיימת ומוגדרת היטב. נוכיח שאין בה שורות שהינן אפסים. תהי שורה ב־T_C^B וקיים $i \in [\dim B]$ כך שמתקיים שוויון ל־ Col_i, אז יתקיים $\operatorname{Col}_i = [T(B_i)]_C$. נניח בשלילה שוויון לאפס, נקבל $[T(B_i)]_C = 0$ כלומר קיימת קומבינציה ליניארית של הוקטורים ב־C בין קבועים (הם הערכי וקטורים) שאינם טרוויאלים (שכן $T(B_i) \neq 0$) ולכן C אינו בת"ל וזו סתירה. סה"כ $[T]_C^B$ מטריצה מייצגת בלי עמודות אפסים, ולכן מצאנו $B' = B$ כדרוש. ■