חדו"א ו־א 3

שחר פרץ

9 בנובמבר 2025

תהאנה a_n, b_n סדרות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם a_n אינה מתכנסת, וגם b_n אינה מתכנסת, אז $a_n + b_n$ אינה מתכנסת.

תשובה: לא נכון. אפשר להראות שזה לא עובד, לדוגמה עבור $a_n = (-1)^n$ ו־$b_n = (-1)^{n+1}$, הראינו ש־a_n אינה מתכנסת ובאופן דומה b_n אינה מתכנסת. אבל, $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n + b_n = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$

ב. אם a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת, אז $(a_n + b_n)_{i=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת. **תשובה:**

הוכחה. נניח ש־a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת. נניח בשלילה ש־$a_n + b_n$ מתכנסת. מכאן שיש גבול ℓ לסדרה, ומאריתמטיקה של גבול $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\cancel{a_n - a_n} + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$ אך $\lim_{n\to\infty} b_n$ אינו מוגדר שכן b_n לא מתכנסת. ■

ג. אם a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת, אז $a_n \cdot b_n$ מתכנסת.

תשובה: בניגוד להוכחה הקודמת, צריך בשביל להוכיח לטעון ש־$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ כדי שנוכל לחלק. לא מפתיע אם כן שעבור $a = 0, b_n = (-1)^n$ נקבל סתירה שכן b_n לא מתכנסת, אך $a_n \cdot b_n = 0$ הסדרה הקבוע.

ד. לבית: כמו הסעיף הקודם אבל $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

משפט 1. תהא a_n סדרה, יהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.

הוכחה. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \le N \colon |a_n - \ell| < \varepsilon$. נתבונן ב־$N$. יהי $n \ge N$. מא"ש המשולש ההפוך:

$$||a_n| - |\ell|| \le |a_n - \ell| < \varepsilon$$

מההגדרה $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$ כדרוש. ■

הערה 1. הבעייתיות בכיוון השני היא אם a_n מחליפה סימן אינסוף פעמים. הוא נכון אם a_n שומרת סימן מגבול מסויים (מה ששקול לכך שיש לה גבול, ממשפט נחמד שהראינו בעבר).

משפט 2. תהאנה a_n, b_n, c_n סדרות. נניח כי־:

1. $$\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \ge N \colon a_n \le c_n \le b_n$$
2. $$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} b_n$$

אז $\lim_{n\to\infty} c_n = \ell$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \ge N_2 \colon |b_n - \ell| < \varepsilon$, ובאופן דומה קיים $N_3 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \in N_3 \colon |a_n - \ell| < \varepsilon$. נסמן $N = N_1$ (מהנתון). נתבונן ב־$N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. יהי $n \ge N$. אז נסיק $\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ וכן $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ ואז:

$$\ell - \varepsilon < c_N \le c_n \le b_n < \ell + \varepsilon$$

כלומר $|c_n - \ell| < \varepsilon$ כדרוש. ■

0.1 גבולות ושוויונות

משפט 3. תהנא a_n, b_n סדרות. יהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. נניח כי:

(1) לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $a_n < b_n$. (הערה: מספיק גם אם החל מ־N כלשהו התנאי הזה מתקיים)

(2) מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

(3) מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = m$

אז $\ell \le m$

הוכחה. נניח בשלילה $m < \ell$. נסמן $\varepsilon = \frac{\ell - m}{2}$, בהכרח $\varepsilon > 0$. לכן $\exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_1 \colon |a_n - \ell| < \varepsilon$. כמו כן $\exists N_2 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_2 \colon |b_n - m| < \varepsilon$. נתבונן ב־$N = \max\{N_1, N_2\}$. שם, מתקיים:

$$b_N < m + \varepsilon = \frac{\ell + m}{2} = \ell - \varepsilon < a_N$$

בסתירה ל־(1). וסיימנו. ■

למה היינו צריכים להניח בשלילה? כי עקרונית נרצה לקחת את $\frac{|\ell - m|}{2}$ ולעבוד עם זה, ולהפעיל על זה את הגדרת הגבול, אבל זה יכול להיות 0. לכן נרצה להניח בשלילה ש־$\ell > m$, כי כאן יש א"ש חזק ממש.

לועמת זאת, אם נניח ב־(1) במקום זאת $\forall n \in N \colon a_n < b_n$, עדיין נוכל לדעת $\ell \leq m$ בלבד, למרות שהא"ש לכאורה חזק. לדוגמה, בעבור $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = 0$ מתקיים שוויון חלש ולא חזק בגבול, על אף ש־$b_n < a_n$.

משפט 4. תהאנה a_n, b_n סדרות, ויהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. נניח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} b_n = m$. נניח גם $\ell < m$. נוכיח שהחל ממקום מסויים $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N \colon a_n < b_n$.

הוכחה לבית.

משפט 5 (משפט ויירשטראס הראשון)**.** תהא a_n סדרה. אם a_n מונוטונית וחסומה, אז a_n מתכנסת.

הוכחה. בה"כ נניח ש־a_n מונוטונית עולה (אחרת ההוכחה בדומה). ידוע ש־a_n חסומה, ובהכרח מלמעלה, ולכן לפי אקסיומת השלמות חיים לה חסם עליון, נסמנו $\ell = \sup a_n$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$, כך ש־$a_n > \ell - \varepsilon$. נתבונן ב־N. יהי $n \geq N$. אז:

$$\ell - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$$

כלומר $|a_n - \ell| < \varepsilon$. לכן a_n שואפת ל־ℓ, כדרוש. ■

הגדרה 1. סדרה a_n תקרא בעלת גבול במובן הרחב אם $(\exists \ell \in \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} a_n = \ell) \vee \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

משפט 6. בהינתן סדרה מונוטונית לא חסומה, היא שואפת ל־$\pm\infty$.

מסקנה 1. תהי a_n מונוטונית. אז ל־a_n יש גבול במובן הרחב.

0.2 e

משפט 7. נגדיר $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ו־$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אז:

1. a_n חסומה, מונוטונית עולה וחסומה ב־3.
2. b_n חסומה, ומונוטונית עולה.
3. $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq b_n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}. \exists k > n \colon b_n \leq a_{n+k}$

המסקנה מ־1, 2 הוא שיש להן גבול (ממשפט וויראשטראס). ממשפט אחר שהראינו, 3 ו־4 גוררים ש־a_n, b_n מתכנסות לאותו הגבול. נסמנו ב־e.

הגדרה 2. נסמן:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

תת־סדרות וגבולות חלקיים

הגדרה 3. תהי פונקציה $n_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ סדרה עולה ממש של טבעיים, ותהא a_n סדרה. אז הסדרה $a_{(n_k)}$ נקראת תת־סדרה של a_n. פורמלית, זוהי הרכבה $a_n \circ n_k$.

הגדרה 4. ℓ יקרא גבול חלקי של ℓ כאשר קיימת ת"ס של a_n המתכנסת ל־ℓ.

הגדרה 5. $\pm\infty$ יקרא גבול חלקי של a_n, כאשר קיימת ת"ס השואפת ל־$\pm\infty$.

לדוגמה, עבור $a_n = (-1)^n$, ו־a_{2k} ת"ס של a_n, אז $\lim_{n\to\infty} a_{2k} = 1$. לכן 1 גבול חלקי של a_n. באופן דומה -1 גבול חלקי של a_n ואפשר גם להוכיח יחידות.

הערה 2. לעיתים, לגבולות חלקיים קוראים נקודות גבול.

להלן משפט שקצת יוצא מתחומי החדו"א.

משפט 8 (משפט הרקורסיה)**.** תהא $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. יהי איזשהו $a \in \mathbb{R}$. אז קיימת סדרה יחידה a_n המקיימת:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \colon a_{n+1} = f(n, a_n) \end{cases}$$

למה אנחנו צריכים את המשפט הזה? כי אם כותבים משהו כמו $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 2^n a_n + 1$ (בהקשר הזה $f(x,y) = 2^x y + 1$), למה שבכלל תהיה a_n שתקיים את תנאי הנסיגה הזה? המשפט הזה דואג לכך שנוסחאות נסיגה יהיו מוגדרות היטב (קיימות ויחידות בהינתן כלל נסיגה עם תנאי בסיס). אפשר להכליל באינדוקציה לפונקציות נסיגה מדרגה k־ית.

השבוע יעלה למודל תרגיל מודרך העוסק בזה.

משפט 9 (משפט בולצנו־וייראסטראס)**.** לכל סדרה חסומה, יש ת"ס מתכנסת.

למה 1. תהא a_n סדרה. נניח של־a_n אין איבר מקסימלי. אז יש לה תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

הוכחה. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \colon m > n \wedge a_m > a_n\}$. מהיות a_n ללא איבר מקסימלי, לכן קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_m > \max\{a_1 \dots a_n\}$. בפרט $a_m > a_n$ ולכן $m \in A$. מכאן שבהכרח A_n לא ריקה.

נגדיר $n_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ברקורסיה:

$$\begin{cases} n_1 = 1 \\ n_{k+1} = \min A_{(n_k)} \end{cases}$$

המינימום בהכרח מוגדר היטב מהיות $A_{(n_k)}$ לא ריקה. ממשפט הרקורסיה $(n_k)_{i=1}^{\infty}$ מוגדרת היטב. כדי להראות שהיא ת"ס, יש להראות שהיא מונוטונית עולה חזק. ואכן מהגדרה $n_{k+1} > n_k$. יתרה מכך, היא גם מונוטונית עולה חזק על a_n שכן מהגדרה $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. סה"כ $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ת"ס מונוטונית עולה ממש וסיימנו. ■

הערה 3. מה שהבטיח לנו את קיום המינימום, פרט לכך שהקבוצה לא ריקה, הוא שהסדר על הטבעיים **סדר טוב**.

למה 2. תהא a_n סדרה שבה אינסוף איברים שונים. אם ל־a_n אין ת"ס מונוטונית עולה ממש, אז יש לה ת"ס מונוטונית יורדת ממש.

הערה 4. ת"ס של ת"ס היא ת"ס

הוכחת משפט בולצאנו־וייראשטראס. תהא a_n סדרה. נפריד למקרים.

- נניח ש־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (הטווח של a_n) סופית. אז קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש־$|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = \ell\}| = \aleph_0$. נבנה ברקורסיה ת"ס $\{a_{n_k}\}$ עבורה $a_{n_k} = \ell$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
- אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין־סופי, אז מהלמה הקודמת קיימת ל־a_n ת"ס סדרה מונוטונית (ממש) a_{n_k}. בגלל ש־a_n חסומה אז בפרט a_{n_k} חסומה. לפי משפט קודם כל סדרה מונוטונית חסומה היא מתכנסת, וסיימנו.

סה"כ בשני המקרים מצאנו ת"ס מתכנסת. ■

משפט בולצאנו־וייראשטראס השתמש במשפט וייראשטראס (הראשון), שתלוי באקסיומת השלמות. משפט בוצאלנו־וייראשטראס תלוי באקסיומת השלמות!

להלן הוכחה נוספת, קונסטקרטיבית אפילו פחות (לא שפונקציית בחירה זה קונסטקרטיבי במיוחד):

הוכחה נוספת לבולצאנו־וייראשטראס. נסמן ב־A את התמונה של a_n. אם A סופית – כמו קודם. אחרת A אינסופית. נגדיר את הקבוצה:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \colon\ |\{y \in A \mid y \le x\}| \ge \aleph_0\}$$

B חסומה מלמטה (למשל ע"י $\inf a_n$). היא לא ריקה, כי לדוגמה $\sup a_n \in B$. לכן ל־B קיים חסם תחתון (אקסיומת השלמות). נסמן $\alpha = \inf B$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $b \in B$ כך ש־$b < \alpha + \varepsilon$. מתקיים $\alpha - \varepsilon \notin B \implies \alpha - \varepsilon < \alpha$ לכן $\{y \in A \mid y \le b \le \alpha + \varepsilon\}$ אין־סופית, אבל $\{y \in A \mid y \le \alpha - \varepsilon\}$ סופית. לכן, $A_\varepsilon = \{y \in A \colon\ |y - \alpha| < \varepsilon\}$ אינסופית!

נסכם: לכל $\varepsilon > 0$, ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \ge \mathbb{N}$ כך ש־$|a_n - \alpha| < \varepsilon$, בגלל ש־$A_\varepsilon$ אינסופי. וזו כבר הגדרה שקולה לקיום גבול חלקי, כמו שנראה בקרוב. ■

משפט 10. $\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \ge N \colon\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ אמ"מ לקבוצה יש גבול חלקי ב־α.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח את הטענה שנראית מפחיד. נגדיר:

$$\begin{cases} n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \colon\ |a_n - \alpha| < 1\} \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \colon n < n_k \wedge |a_n - \alpha| < \frac{1}{k+1}\} \end{cases}$$

אז a_{n_k} ת"ס של a_n. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{K+1} < \varepsilon$. יהי $k \ge K$ אז:

$$|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \le \varepsilon$$

וסה"כ $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ וסיימנו.

$\Longrightarrow$ לבית

■

הערה 5. המשפט לעיל הוא לא באמת משפט בקורס. צריך להוכיח אותו כל פעם מחדש.

"בשפה של בני אדם", הטענה השקולה הזו אומרת שבכל קטע פתוח שמכיל את α יש אינסוף איברים מהסדרה, [וההגדרה של גבול לא חלקי דורשת ש־] מחוץ אליו, יש מספר סופי של איברים.

מסקנה 2. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

משפט 11. סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

הוכחה. $\Longleftarrow$ בכיוון הראשון, נוכיח: תהא a_n סדרה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ אז כל ת"ס של a_n מתכנסת ל־ℓ.

כיוון זה לבית. שימו לב שצריך להפריד למקרים גבולות מתבדרים וכאלו שאינם.

$\Longrightarrow$ עתה, תהא a_n סדרה, ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם כל ת"ס של a_n מתכנסת ל־ℓ, אז $\lim_{n\to\infty} a_n a_n = \ell$.

לבית גם כן. (זה טרוויאלי. a_n ת"ס של עצמה וסיימנו)

■

משפט 12. תהא a_n סדרה חסומה ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. נניח כי כל ת"ס מתכנסת של a_n מתכנסת ל־ℓ. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

הערה 6. מה לא טרוויאלי כאן? אי אפשר פשוט לבחור את a_n, שכן היא לא מתכנסת בהכרח (צריך להוכיח את זה).

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $A = \{n \in \mathbb{N} \colon |a_n - \ell| \geq \varepsilon\}$. נניח בשלילה ש־$A$ אינסופית. נסמן $A_+ := \{n \in \mathbb{N} \colon a_n \geq \ell + \varepsilon\}$ ו־$A_- = \{n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq \ell - \varepsilon\}$. משום ש־$A = A_+ \cup A_-$, ללא הגבלת הכלליות, A_+ אינסופית. לכן קיימת ת"ס a_{n_k} כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in A_+$. a_{n_k} חסומה ולכן יש לה ת"ס $a_{n_{k_j}}$ מתכנסת. נסמן את גבולה m. לכל $j \in \mathbb{N}$, מתקיים $\ell + \varepsilon \leq a_{n_{k_j}}$. לכן $m \geq \ell + \varepsilon > \ell$, כלומר $m \neq \ell$ גבול חלקי של a_n בסתירה. ■

המטרה בלהכניח ש־a_n חסומה, היא לחסוך את הפיצול למקרה האין־סופי.

. . . .

שחר פרץ, 2025