חדו"א 1א ~ תרגיל בית 7

שחר פרץ

28 בדצמבר 2025

הערה לבודק

בתרגיל בית זה הטענה $f(A)=x$ שקולה לכך ש־$\forall a\in A\colon f(a)=x$. זה מקצר כתיבה בחלק מהתרגילים.

(1)

יהי $\sum_{i=1}^{\infty}a_n(x-x_0)$ טור חזקות, ונניח את קיום הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\ell$. נוכיח שרדיוס ההתכנסות נתון ע"י $R=\frac{1}{\ell}$ (במובן הרחב).

הוכחה. ראינו את משפט דאלמבר: אם a_n חיובית, ו־$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\ell$, אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$. אך לא ידוע ש־$a_n$ חיובית, ולכן ניאלץ להוכיח את המשפט במובן רחב יותר. תהי a_n חיובית ונניח $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\ell$. נראה $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\to\ell$, לפי הגדרה (ההוכחה המקורית של א"ש הממוצעים לא עובדת פה). יהי $\varepsilon>0$. מהתכנסות $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\xrightarrow{n\to\infty}\ell$, נסיק:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}-\ell\right|<\delta\implies\ell-\delta<\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|<\ell+\varepsilon\implies(L-\varepsilon)\left|a_{n-1}\right|<\left|a_n\right|<(L+\varepsilon)\left|a_{n-1}\right|$$

באינדוקציה נקבל:

$$\left|a_1\right|(\ell-\varepsilon)^n<\left|a_n\right|<(\ell+\varepsilon)^n\left|a_1\right|\implies(\ell-\varepsilon)^n<\left|\frac{a_n}{a_1}\right|<(\ell+\varepsilon)^n\implies\left|\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_1}\right|}-\ell\right|<\varepsilon$$

כלומר, מהגדרה $\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_1}\right|}\xrightarrow{n\to\infty}\ell$. נבחין ש־:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{a_1}\right|}=\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_1}}\xrightarrow{n\to\infty}\ell=\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}{1}\implies\sqrt[n]{a_n}=\ell$$

משום ש־$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell$, מכאן שבפרט $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ גבול חלקי של $\sqrt[n]{a_n}$ ולכן שואף ל־ℓ. עתה, ניעזר במשפט קושי־הדמרד; נקבל שרדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{i=1}^{\infty}a_n(x-x_0)$ נתון ע"י $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\ell}$ כנדרש.

במובן הרחב, אם $\ell=\infty$ אז $a_n\to\pm\infty$ ומכאן שהמ"מ סימנה קבועה, ובה"כ היא חיובית (אחרת נוכל להחליף סימן בתוצאה מאריתמטיקה של גבולות). במקרה זה נוכל להשתמש במשפט הד'מרד כמו שהוא (הוכחנו אותו במובן הרחב בעבור a_n חיובית), ונקבל $R=0$. אם $\ell=0$, ההוכחה לעיל בדבר התכנסות $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\to 0$ תקיפה, ומשפט קושי־הד'מרד עובד גם הוא במובן הרחב, וכאן נקבל $R=\infty$. ■

(2)

נמצא את תחום ההתכנסות (רדיוס ההתכנסות וההתכנסות בנקודות הקצה) של הטורים הבאים:

א. נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$

מצאנו בשאלה 6א שרדיוס התכנסותו הוא $R=\infty$. אף טור חיובי לא מתכנס בעבור $x\to\pm\infty$, ומכאן שתחום ההתכנסות של הטור לעיל הוא $\mathbb{R}$.

ב. נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n(x-1)^n$$

מצאנו בשאלה 6ב שרדיוס התכנסותו הוא $R=\frac{1}{3}$. נבדוק מה קורה בקצוות הרדיוס. לצורך הנוחות, נתייחס לטור לעיל כאל טור סביב x^n, ואז נזיח את התחום ב־1 חזרה.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(2+(-1)^n)\frac{1}{3^n}=\sum_{i=1}^{N}\left(3^{2i}\cdot\frac{1}{3^{2i}}\right)+\sum_{i=1}^{N}\left(2^{2i+1}\cdot\frac{1}{3^{2i+1}}\right)>\frac{1}{2}N & x=\frac{1}{3} \\ \sum_{i=1}^{N}(2+(-1)^n)\frac{1}{(-3)^n}=\sum_{i=1}^{N}\left(3^{2i}\cdot\frac{1}{3^{2i}}\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(2^{2i+1}\cdot\frac{1}{3^{2i+1}}\right)<\frac{1}{2}N-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-n \bmod 2} & x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

דהיינו הטור מתבדר בכל מקרה, כי פעם אחת הוא חסום מלמטה ע"י טור שמתבדר לאינסוף ($x=\frac{1}{3}$) ופעם אחרת חסום מלמעלה ע"י טור שמתבדר ל־$-\infty$ ($x=-\frac{1}{3}$). סה"כ רדיוס ההתכנסות $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ ולאחר הזחה נקבל $\left(1-\frac{1}{3},1+\frac{1}{3}\right)$.

ג. נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{n^2}$$

מצאנו בשאלה 6ג שרדיוס התכנסותו הוא $R=\frac{1}{2}$. נבדוק מה קורה בקצוות הרדיוס. נבחין ש־:

$$0<\sum_{i=1}^{N}2^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\leq\sum_{i=1}^{N}2^{\frac{1}{2}n^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$$

כלומר עבור $x=\frac{1}{2}$ הטור חסום ע"י שני טורים מתכנסים, ומכאן שגם הוא מתכנס. אך עבור $R=-\frac{1}{2}$, בגלל שריבוע של מספר הוא זוגי אמ"מ שורשו זוגי, נקבל ש־:

$$\sum_{i=1}^{N}2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n^2}=\sum_{i=1}^{N}(-1)^n 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$$

ממשפט לייבניץ, משום ש־$2^n\cdot\frac{1}{2^n}$ קבועה ולכן $\frac{2^n}{2^{n^2}}$ מונוטונית יורדת, מתקיים שהטור לעיל מתכנס. סה"כ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ הוא תחום ההתכנסות של הטור.

ד. נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(x+1)^{2n+1}$$

נבחין שבהינתן:

$$a_n=\begin{cases} f(n) & P(n) \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

כאשר P טענה שמתקיימת באופן שכיח, נסמנה $n\in\mathbb{P}$, בהכרח ל־$\sqrt[n]{n}$ שמחולקת ע"י $\mathbb{P}$ ו־$\mathbb{N}\setminus\mathbb{P}$ יש שני גבולות חלקיים בלבד, הם $\sqrt[n]{a_{\mathbb{P}}}$ ו־0, מתוכם $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{\mathbb{P}}}$ (בהנחה ש־$a_{\mathbb{P}}$ מתכנס). בפרט בעבור:

$$a_n=\begin{cases} (-1)^n\sqrt{n} & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

נמצא את רדיוס התכנסותו:

$$\limsup a_n=\limsup\sqrt[n]{\left|(-1)^n\sqrt{n}\right|}=\limsup\sqrt[n^2]{n}=\limsup\sqrt[n]{1}=1$$

כלומר $R=\frac{1}{1}=R$. משום ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(x)^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}x^n$$

לא מתכנס בעבור $x=\pm1$ (כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר), בהכרח רדיוס ההתכנסות הוא $(-2,0)$.

(3)

נוכיח ונפריך את הטענות הבאות:

(א) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים, ונניח כי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. נוכיח שהטורים מתכנסים ומתבדרים ביחד.

הוכחה. מקרה פרטי של משפט ההשוואה הגבולי ($L = 1$). לכן הטענה נכונה. ■

(ב) תהי a_n סדרה כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ונוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ מתכנס.

$$\sum_{i=1}^{N}(a_n + a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{N} a_n + \sum_{i=1}^{N} a_{n+1}$$

משום ש־$\sum_{i=1}^{N} a_n = \sum_{i=1}^{N} a_{n+1}$ הם מתכנסים ומתבדרים יחדיו (נבדלים בחיבור קבוע) ומכאן ש־$\sum_{i=1}^{N} a_n + a_{n+1}$ הוא סכום של שני טורים מתכנסים. סכום של שני טורים מתכנסים הוא טור מתכנס בעצמו וסיימנו.

$\Longleftarrow$ נניח $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ מתכנס ונראה ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. נבחין ש־:

$$\sum_{i=1}^{N}(a_n + a_{n+1}) = -a_1 + a_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{N} a_n \le -a_1 + 3\sum_{i=1}^{N}$$

ממשפט ההשוואה ואריתמטיקת טורים סיימנו.

■

(ג) תהי a_n סדרה חיובית כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

הפרכה. נקבע:

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

נבחין ש־:

$$0 \xleftarrow{n\to\infty} -\frac{1}{n} = -|a_n| < a_n < |a_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן a_n מתכנסת ממשפט הסנדוויץ'. עם זאת:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{(-1)^n(-1)^{n+1}}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

וזו סתירה. ■

(4)

נקבע אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

(א) נתבונן בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$$

התכנסות בהחלט. נבחין ש־$\sqrt{n} > 1$ לכל n גדול מספיק, ולכן $1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ חיובי. חזקה של מספר חיובי היא חיובית. ניעזר במבחן השורש על הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}$ (חוקי שכן הטור חיובי) ונקבל:

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

משום ש־$\sqrt{n}$ מונוטונית עולה חיובית, ממשפט שהוכחנו בתרגיל בית הביטוי לעיל שואף ל־$\frac{1}{e}$. משום ש־$\frac{1}{e} \in [0,1)$ ממבחן השורש קיבלנו התכנסות בהחלט ובפרט הטור לעיל מתכנס. ■

(ב) נתבונן בטור:

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right)\right)$$

התכנסות. נסמן $a_n := \frac{i}{2^i}$. נתחיל מלנתח את a_n. ננסה להראות ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. זהו טור חיובי גדול מחצי (שכן $a_1 = \frac{1}{2}$). נפעיל עליה את מבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

כאשר את השוויון $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ הוכחנו בתרגול, ו־$\sqrt[n]{2^n} = 2$ קבוע לא 0. ממבחן השורש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, נסמן את הערך אליו הוא מתכנס ב־ℓ. משום ש־a_n חיובית אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מונוטוני עולה, כלומר $\sum_{i=1}^{N} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$. סה"כ נקבל:

$$\sum_{i=2}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right)\right) < \sum_{i=2}^{N}\left((-1)^n\frac{\ell}{m}\right)$$

ממשפט לייבניץ, בגלל ש־$\frac{\ell}{m}$ מונוטוני יורד, אז הטור מתכנס. סה"כ ממבחן ההשוואה הראשון הטור כולו מתכנס. נראה שהוא לא מתכנס בהחלט.

$$\infty \xleftarrow{n\to\infty} \sum_{i=2}^{N}\left(\frac{0.5}{n}\right) < \sum_{i=1}^{N}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right)}{n} = \sum_{i=2}^{N}\left(\left|\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}\right)\right|\right)$$

ממשפט ההשוואה הגבולי האיטלקי (נוסח משפט הפיצה) נקבל שהטור לעיל איננו מתכנס. ■

(5)

יהי $p \in \mathbb{N}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נחלק את n ב־p עם שארית לפי $n = qp_n + r_n$ כאשר $r_n \in [0,p) \cap \mathbb{N}$ ו־$q_n \in \mathbb{N}$. נגדיר:

$$a_n = \begin{cases} 1 & q_n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \\ -1 & q_n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \end{cases} = (-1)^{q_n}$$

נוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ מתכנס.

הוכחה. נגדיר $K_i = (\mathbb{N} \cap [ip, ip+1)) \cdot p$. נבחין ש־$\biguplus_{i=0}^{\infty} K_i = \mathbb{N}$. נבחין ש־$q_{K_i} = i$ שכן לכל $n \in K_i$ מתקיים $a = ip + r$ כאשר $r \in [0,p) \cap \mathbb{N}$ ואז מיחידות חלוקה עם שארית בתחום אוקלידי, ומהגדרת q_n, בהכרח $q_n = i$ כנדרש. סה"כ (עד לכדי abuse of notion שאני עושה חופשי) $a_{K_i} = (-1)^{q_n} = (-1)^i$ סימן קבוע לכל a_{K_i}. לכן, ממשפט, הקיבוץ הבא משמר התכנסות:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_{pi+k}}{n} = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{i} = (p-1)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i}$$

ממשפט לייבניץ $\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס לאנשהו. מאריתמטיקת גבולות גם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ מתכנס. ■

(6)

נמצא את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

(א) נתבונן בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$

נמצא את רדיוס ההתכנסות שלו. ניעזר במשפט ד'לאמבר.

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = 2\cdot\frac{1}{(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן ממשפט ד'לאמבר משום שהגבול לעיל קיים, אז $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. מכאן שרדיוס ההתכנסות הוא $R = \frac{1}{0} = \infty$ (קושי־הדמרד עובד במובן הרחב).

(ב) נתבונן בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n x^n$$

אזי רדיוס ההתכנסות ממשפט קושי־הדמרד הוא:

$$R=\limsup\sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n}=\limsup 2+(-1)^n=2+\limsup(-1)^n=3$$

סה"כ רדיוס ההתכנסות הוא $R=\frac{1}{3}$.

(ג) נתבונן בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{n^2}$$

נבחין שהסדרה היוצרת היא:

$$a_n=\begin{cases}2^n & \exists k\in\mathbb{N}\colon k^2=n\\ 0 & \text{other}\end{cases}$$

נבחין ש־$a_{n^2}=2^n$ גבול חלקי ראשון, והמשלים לה נסמנו $a_{\overline{n^2}}=0$ גבול חלקי שני. ממשפט הפריסה, הגבולות החלקיים של סדרות אלו אילו כל הגבולות החלקיים של הסדרה. כנ"ל על $\sqrt[n]{a_n}$, ומכאן ש־:

$$R=\limsup a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}=2$$

סה"כ רדיוס התכנסות $R=\frac{1}{2}$.

(7)

נמצא את כל ה־$x\neq\pm1$ עבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ מתכנס. קושי הדמרד קצת לא עובד כי הגבול לא ממש מוגדר עבור $|x|>1$.

הוכחה. נוכיח שהטור מתכנס לכל $|x|<1$. נבחין שעבור $|x|>1$ מתקיים:

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{\frac{x^n}{x^n}}{\frac{1-x^n}{x^n}}=\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{-1}=-1$$

גבול שאינו שואף ל־0, ובפרט הטור אינו מתכנס. עבור $|x|<1$:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}<\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\frac{1}{x^n}-\frac{0.5}{x^n}}=\sum_{i=1}^{N}2x^n$$

כאשר הא"ש נכון המ"מ שכן $\frac{0.5}{x^n}\to\infty$ כאשר $|x|<1$. באותו המקרה גם הטור לעיל מתכנס וסה"כ הכל מתכנס ממבחן ההשוואה הראשון. ■

(8)

תהי $f\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$ פונקציה. נוכיח קיום f_1 זוגית ו־f_2 אי־דוגית יחיזות כך ש־$f=f_1+f_2$.

הוכחה. • **קיום:** נגדיר:

$$f_1=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\quad f_2=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\quad f_1,f_2\colon[-a,a]\to\mathbb{R}$$

בגלל שהתחום של f הוא $[a-,a]$ הפונקציות f_1,f_2 מוגדרות היטב. נבחין ש־:

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f((-1)^2x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f_1(x)$$
$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f((-1)^2x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-f_2(x)$$

מכאן ש־f_1 זוגית ו־f_2 אי־זוגית. עוד נבחין ש־:

$$(f_1+f_2)(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} - \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{f(x)+f(x)+\cancel{f(-x)-f(-x)}}{2} = \frac{\cancel{2}f(x)}{\cancel{2}} = f(x)$$

כנדרש.

- **יחידות:** תהי $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ונניח קיום (f_1,f_2) ו־(g_1,g_2) זוגית ואי־זוגית בהתאמה כך ש־$f_1+f_2=f \wedge g_1+g_2=g$. מכאן ש־:

$$\begin{aligned} f=h_1+h_2 \wedge f=g_1+g_2 &\implies g_1+g_2=f_1+f_2 \\ &\implies g_1+g_2=f_1+f_2 \\ &\implies g_1-f_1=f_2-g_2=:h \end{aligned}$$

ידוע ש־f_1 ו־g_1 אי־זוגיות וכן חיבור/חיבור של פונקציות אי־זוגיות הוא אי־זוגי (הוכחה: $(f_1-g_1)(x)=f_1(x)-g_1(x)=-f_1(-x)+g_1(-x)=-(f_1-g_1)(-x)$). באופן דומה f_2,g_2 זוגיות ולכן חיבורן/חיסורן זוגי גם הוא (הוכחה: $(f_2-g_2)(x)=f_2(x)-g_2(x)=f_2(-x)-g_2(-x)=(f_2-g_2)(-x)$). סה"כ h פונקציה זוגית ואי־זוגית, כלומר לכל $x\in[-a,a]$ בהכרח $-x\in[-a,a]$ ואז $h(x)$ מוגדרת ונקבל $h(x)=-h(-x)=-h(x)$. דהיינו h קבועה ב־0 בכל תחום הגדרתה וסה"כ $g_1-f_1=0=f_2-g_2$. נחבר אגפים ונקבל $g_1=f_1\wedge g_2=f_2$ כלומר מהמשפט היסודי של זוגות סדורים $(f_1,f_2)=(g_1,g_2)$ וסיימנו.

■

(9)

(א) נתבונן בפונקציית דיריכלה, האינדיקטור של $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$. נוכיח שהיא פונקציה מחזורית ללא מחזור מינימלי.

הוכחה. יהי $q\in\mathbb{Q}$. נוכיח ש־q מחזור של $D(x)$. יהי $x\in\mathbb{R}$. נפרק למקרים. נסמן $q=\frac{a}{b}$ כאשר $a,b\in\mathbb{Z}$.

- אם $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אז $x+q\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (נניח בשלילה שלא כן, אז $x+q=\frac{m}{n}$ ואז $x=\frac{mb-an}{mb}\in\mathbb{Q}$ וסתירה). אז $D(x)=0=D(x+q)$.
- אם $x\in\mathbb{Q}$, אז $x+q\in\mathbb{Q}$ (שכן $x=\frac{m}{n}$ ואז $x+q=\frac{mb+an}{mb}\in\mathbb{Q}$ וסיימנו). אז $D(x)=1=D(x+q)$.

סה"כ כל מספר רציונלי הוא מחזור של D, בפרט D מחזורית בעבור המחזור $q=1$, ואין לה מחזור מינימלי כי לא קיים מינימום לרציונליים החיוביים (וגם לרציונליים החיוביים, במקרה ולא מגדירים מחזור שלילי). ■

(ב) תהי $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שבכל נקודה $a\in\mathbb{R}$ קיים הגבול $\lim_{x\to a}f(x)$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים ש־$\frac{1}{n}$ מחזור של f. אז f קבועה.

הוכחה. תהי $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח ש־$\frac{1}{n}$ מחזור והגבול שלה בכל נקודה מוגדר. ראשית כל נוכיח שלכל $r\in\mathbb{R}$ ולכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $f(r+q)=f(r)$. נבחין ש־$q=\frac{m}{n}$ עבור $m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$ כלשהם. מהגדרת מחזור $f(r)=f\left(r+\frac{1}{n}\right)=f\left(r+\frac{2}{n}\right)=\cdots=f\left(r+\frac{m}{n}\right)$ באינדוקציה על m. מכאן ש־$f(r+q)=f\left(r+\frac{m}{n}\right)=f(r)$.

עתה יהי $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. נוכיח $f(r)=c$, כאשר $c=f(0)$ (מהטענה הקודמת $f(q)=c$ לכל $q\in\mathbb{Q}$). ראשית נוכיח ש־$\lim_{x\to r}f(x)=c$: נתבונן בסדרת רציונליים ששואפת ל־r שבהכרח קיימת ממשפט, נסמנה a_n, ונבחין ש־$a_n\neq r$ כי רציונלי איננו אי־רציונלי, ואז בהכרח $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}c=c$ וממשפט היינה $\lim_{x\to a}f(x)=c$ (מהיות הגבול קיים, מהיינה, כל הסדרות ששואפות ל־r מקיימות ש־$f(a_n)$ שואף לגבול, ומצאנו לאן אחת מהן שואפת – דהיינו גם כל השאר שואפות לשם).

עתה נראה ש־$f(r)=\lim_{x\to r}f(r)=:\ell$ לכל $r\in\mathbb{R}$. נניח בשלילה שקיים r כך שלא כן מתקיים. נסמן $f(r)=\alpha$ ו־$f(0)=\ell$. נבחר $\varepsilon=|\ell-\alpha|$. תהי $\delta>0$. ידוע קיום $0<q<\delta$ מצפיפות, ונבחין ש־$0<|r-(r+q)|<\delta$ כלומר $x=r+q$ נמצא בסביבת ה־δ הנקובה של r. אך:

$$f(x)=f(r+q)=f(r)=\alpha \implies |f(x)-\ell|<\varepsilon \implies |\alpha-\ell|<|\alpha-\ell| \quad \perp$$

סתירה וסיימנו. מכאן שאותה נקודה r לא קיימת ובכל נקודה $r\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(r)=\lim_{x\to r}f(r)$ כלומר הפונקציה רציפה. הראינו שהגבול בכל נקודה קבוע וערכו $f(0)$, סה"כ ישירות מרציפות $f(r)=f(0)$ לכל $r\in\mathbb{R}$ כלומר הפונקציה קבועה ב־$f(0)$ כדרוש. ■

(10)

נמצא את הגבולות הבאים:

(א) נוכיח ש־$\lim_{x\to 3}x^2=9$ לפי היינה ולפי קושי.

היינה. תהי $x_n\to 3$ כך ש־$x_n\neq 3$ סדרת מספרים. נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to\infty}x_n^2=\left(\lim_{x\to\infty}x_n\right)^2=3^2=9$$

לכל x_n שמקיימת את התנאים המתאימים. מהיינה $\lim_{x\to 3}f(x)=3$. ■

קושי. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta > 0$ כך שבסביבת δ נקובה של 3 בהכרח $|f(x) - 9| < 0$. ידוע $0 < |x-3| < \delta$. לכן בפרט מהגדרת ערך מוחלט $x - 3 < \delta \wedge x + 3 < \delta$. עבור $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ נקבל:

$$|f(x) - 9| = \left|x^2 - 9\right| = |x-3|\,|x+3| < \delta^2 = \varepsilon$$

כדרוש מקושי, וסיימנו. ■

(ב) נוכיח ש־$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ אינו מוגדר לפי היינה ולפי קושי.

היינה. נתבונן בסדרה ששואפת ל־1 ולא עוברת דרכו x_n שקיימת ממשפט. נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) - 2) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 4x_n + 3}{x_n^2 - 3x_n + 2} - 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{-(x_n-1)^2}{(x_n-1)(x_n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x_n}{x_n - 2} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - x_n}{\lim_{n\to\infty} x_n - 2} = \frac{0}{-1} = 0$$

זאת כי $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. מאריתמטיקת גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - 2) + \lim_{n\to\infty} 2 = 0 + 2 = 2$$

לכן לפי היינה הגבול שואף ל־2 כדרוש. ■

קושי. יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב־$0 < |x-1| < \delta$ עבור $\delta = \min\{2, 2\varepsilon\}$. דהיינו $x - 1 > 2$ כלומר $x - 2 > 1$. נקבל:

$$\left|\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} - 2\right| = \left|\frac{-x^2+2x-1}{x^2-3x+2}\right| = \left|\frac{-(x-1)^2}{(x-1)(x-2)}\right| = \left|\frac{x-1}{x-2}\right| < \frac{\delta}{1} = \varepsilon$$

סה"כ סיימנו לפי קושי. ■

(ג) נוכיח שהגבול הבא לא קיים: $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$.

הוכחה. ידוע:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \iff \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{4\pi k + \pi} \iff \dfrac{2\pi}{x} = \dfrac{1}{2k + 0.5} \\ \sin x = 0 \iff x = 2\pi k \iff \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2\pi k} \iff \dfrac{2\pi}{x} = \dfrac{1}{2k} \end{cases}$$

מכאן ש־:

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \quad f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2k} \wedge f(x) = 1 \iff x = \frac{1}{2k+0.5}$$

נתבונן בסדרה $x_n = \frac{1}{2n+0.5}$ ובסדרה $y_n = \frac{1}{2n}$. נבחין ש־$x_n, y_n \neq 0$ וכן $x_n, y_n \to 0$. ונקבל:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2k+0.5}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2k}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

סה"כ משום שלא כל הסדרות a_n השואפות ל־0 ולא מגיעות אליו, מקיימות ש־$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ מתכנסות לאותו המקום (כי x_n, y_n מתכנסות למקומות שונים) סה"כ לפי היינה הגבול $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\pi}{x}\right)$ אינו מוגדר. ■

(ד) נוכיח שהגבול $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ לא קיים.

הוכחה. ידוע שהקבוצה $\mathbb{R}_- =: \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ והקבוצה $\mathbb{R}_+ =: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ מקיימות:

$$f(a) = \frac{a}{|a|} = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{|a|}{|a|} = \operatorname{sgn} a \implies f(\mathbb{R}_-) = -1 \wedge f(\mathbb{R}_+) = 1$$

ומכאן ש־:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \wedge \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

כלומר ל־$f(x)$ גבול עליון ותחתון שונים ב־0, ומכאן שהיא אינה מתכנסת בנקודה זו (משפט). ■

$\mathbf{(11)}$

תהא f המוגדרת בסביבה מנוקבת של $a\in\mathbb{R}$ (נקודת הצטברות), ונניח $\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$. נוכיח ש־$\lim_{x\to a}f(x)=-1$.

הוכחה. נפרק למקרים:

- אם $\lim_{x\to a}f(x)$ קיימת, אז מאריתמטיקת גבולות נקבל:

$$\lim_{x\to a}f(x)=0-\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}\qquad \lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\right)-\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}$$

אם $\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=0$ אז $\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty$ ומכאן או ש־$\lim_{x\to a}f(x)$ אינו קיים וסתירה, או ש־$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ ואז $\lim_{x\to a}f(x)+\frac{1}{|f(x)|}\geq\infty$ וסתירה. מפה לשם $\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}\neq 0$ ולכן $\lim_{x\to a}f(x)<0$. משום שהראינו ש־$\lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}$ קיימת, ו־$\lim_{x\to a}f(x)<0$, נוכל להסיק:

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\frac{1}{\lim_{x\to a}|f(x)|}\implies\lim_{x\to a}f(x)\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|=-1$$

מכאן:

$$\operatorname{sgn}\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)=-1\wedge\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^2=1\implies\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|=1$$

דהיינו $\lim_{x\to a}f(x)=-1$ וסיימנו.

- אם $\lim_{x\to a}$ אינו קיים, נראה סתירה. מהיינה קיימים $x_n,y_n\to a$ כך ש־$x_n,y_n\neq a$ וכן $m=:\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)=:\ell$ (בהכרח קיים גבול חלקי שמתכנס לאנשהו מ־BW, ובהכרח הוא אינו יחיד, ומכאן שקיימים שניים). מנימוקים זהים למקרה לעיל $\ell,m\neq 0$ והגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(x_n)}$ ו־$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(y_n)}$ קיימים. נבחין שמהיינה:

$$m+\frac{1}{m}=\lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)+\frac{1}{|f(x_n)|}\right)=0=\lim_{n\to\infty}\left(f(y_n)+\frac{1}{|f(y_n)|}\right)=\ell+\frac{1}{\ell}$$

מכאן ש־$m=\ell$. סתירה.

■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד