

חדו"א א -- תרגיל 9

1. נגדיר את הפונקציה הבאה: $(\alpha, \beta \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של α, β הפונקציה $f(x)$ רציפה/גירה/גירה ברציפות/גירה פעמיים בנקודה 0.

הערה: פונקציה נקראת גירה ברציפות אם היא גירה והנגזרת היא פונקציה רציפה.

2. נתונה פונקציה גירה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם f מחזורית עם מחזור T גם f' מחזורית עם מחזור T .

(ב) אם f זוגית אז f' אי-זוגית.

3. הוכיחו כי $(n \geq 1 \wedge x > 0 \text{ לכל } x^n \log x)^{(n)} = n! (\log x + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$

4. הפריכו את הטענה הבאה: אם $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה גירה, אז f' רציפה ב- (a, b) .

5. הוכיחו כי למשווה $x = \cos x$ יש בדיק פתרון ממשי אחד.

6. נתונה פונקציה $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $|f(x)| \leq |\tan x|$ לכל $x \in [-1, 1]$ אז f פונקציה גירה ב-0.

(ב) אם $|f(x)| \leq |\cos x - 1|$ לכל $x \in [-1, 1]$ אז f פונקציה גירה ב-0.