

עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

להגשה עד פתיחת שנת הלימודים, יום ראשון 3.11.2024.

1 קומבינטוריקה

1.

(א) כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים (מארבע הצורות יהלום, לב, תלתן ועלה) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני? נמקו תשובתכם.
הבהרה: מותר ששניים או שלושה אסים יופיעו ברצף, אך לא כל הארבעה.

(ב) כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן כל 4 קלפים מאותו סוג (אס, 2, 3, ..., 10, נסיד, מלכה, מלך) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני? נמקו תשובתכם. ניתן להשאיר תשובה עם סכימה.
הבהרה: מותר ששניים או שלושה קלפים מאותו סוג יופיעו ברצף, אך לא כל הארבעה.

2. נתון סריג דו-מימדי. נאמר שמסלול בסריג הוא חוקי, אם בכל צעד מנקודה $\langle x, y \rangle$ ניתן לנוע אך ורק לנקודות מהצורה $\langle x+1, y+r \rangle$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

לדוגמה, $\langle 0, 0 \rangle \rightarrow \langle 1, 0 \rangle \rightarrow \langle 2, 2 \rangle \rightarrow \langle 3, 5 \rangle$ הוא מסלול חוקי של שלושה צעדים מהנקודה $\langle 0, 0 \rangle$ לנקודה $\langle 3, 5 \rangle$.

(א) כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0, 0 \rangle$ ל- $\langle n, k \rangle$?

(ב) כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0, 0 \rangle$ ל- $\langle 2n, 2k \rangle$ שאף צעד בהם אינו מסיים בנקודה $\langle n, k \rangle$?

(ג) כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0, 0 \rangle$ ל- $\langle n, k \rangle$ כך שבכל צעד $\langle x_1, y_1 \rangle \rightarrow \langle x_2, y_2 \rangle$ בהם מתקיים $y_1 + 2 \leq y_2$?

3. נתונים n כדורים ממוספרים $1, 2, \dots, n$. יש לסדרם ב- n תאים הממוספרים $1, 2, \dots, n$ כך שבכל תא ימצא בדיוק כדור אחד. כמו כן, לכל $1 \leq i \leq n-1$ אסור להכניס את הכדור ה- i לתא ה- i (אין מגבלה על הכדור ה- n). נסמן ב- $F(n)$ את מספר האפשרויות לסדר את הכדורים תחת האילוצים הנ"ל.

(א) הביעו את $F(n)$ בעזרת D_m (מספר התמורות ללא נקודות שבת על m איברים).

(ב) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה מתאימים עבור $F(n)$. בסעיף זה אין להשתמש ב- D_m וכמו כן אין להשתמש בסימן הסכימה.

4.

(א) הוכיחו את הזהות הבאה באופן קומבינטורי וללא מניפולציות אלגבריות על המשוואה:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$$

(ב) מצאו ביטוי ללא סכימה לסכום הבא:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$$

5. תהינה $(a_i)_{i=1}^{2n}, (b_i)_{i=1}^{2n}$ שתי סדרות באורך $2n$ של מספרים שלמים כך שלכל $1 \leq i \leq 2n$ מתקיים $1 \leq a_i \leq n$ וגם $1 \leq b_i \leq n$. הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של אינדקסים $I, J \subseteq [2n]$ עבורן מתקיים $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$.

2 תורת הגרפים

1. הוכיחו או הפריכו:

- (א) קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: 1, 3, 3, 3, 4, 5.
 (ב) קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: 1, 3, 3, 3, 5, 5.
 (ג) קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: 1, 3, 3, 3, 4, 4.

2.

- (א) הוכיחו שבכל עץ עם $n \geq 2$ צמתים יש לפחות שני עלים (עלה הוא צומת מדרגה 1).
 (ב) יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף. נאמר שקשת $e \in E$ היא גשר אם לגרף $G' = \langle V, E \setminus \{e\} \rangle$ יש יותר רכיבי קשירות מאשר ל- G . הוכיחו כי אם דרגת כל צומת ב- G היא זוגית אז ב- G' אין גשר.
 3. יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף שבו לכל צומת $v \in V$ מתקיים $d(v) \geq k > 1$. הוכיחו כי ב- G קיים מעגל פשוט באורך לפחות $k + 1$.
 4. יהי $G = \langle [n], E_G \rangle$ גרף. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על G , עבורו לכל גרף $H = \langle [n], E_H \rangle$ שאיזומורפי ל- G מתקיים $G = H$. הוכיחו את תשובתכם.

5. יהי $G_1 = \langle V, E_1 \rangle, G_2 = \langle V, E_2 \rangle$ המוגדרים באופן הבא: $V = \{1, 2, \dots, 100\}$
 $E_1 = \{\{a, b\} : |a - b| = 10 \vee |a - b| = 90\}$
 $E_2 = \{\{a, b\} : |a - b| = 11 \vee |a - b| = 89\}$

האם G_1 איזומורפי ל- G_2 ? אם כן, בנו את האיזומורפיזם. אם לא, הוכיחו זאת.

6. הוכיחו שגרף $G = \langle V, E \rangle$ הוא עץ אם ורק אם יש מסלול פשוט יחיד בין כל שני צמתים.
 7. נתון עץ $T = \langle V, E \rangle$ וקודקוד $v \in V$. אם נסיר מהעץ את v ואת כל הקשתות הנוגעות בו, כמה רכיבי קשירות יהיו בגרף שיתקבל? הוכיחו את תשובתכם.

8. **תזכורת:** בהינתן $s, t \geq 1$ טבעיים, מספר ראמזי $R(s, t)$ הוא המספר הטבעי הקטן ביותר כך שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם $K_{R(s, t)}$ בכחול ואדום קיים תת גרף K_s כחול או תת גרף K_t אדום. בהרצאה ראיתם שלכל $s, t \geq 2$ מתקיים

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$$

- (א) יהיו $s, t \geq 2$ טבעיים כלשהם. הוכיחו שאם $R(s - 1, t)$ וכן $R(s, t - 1)$ שניהם זוגיים, אז

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1) - 1$$

הדרכה: סמנו $R(s - 1, t) = 2m, R(s, t - 1) = 2n$ עבור $n, m \in \mathbb{N}_+$ מתאימים. הוכיחו תחילה שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם $K_{2m+2n-1}$ בכחול ואדום, קיים צומת שמספר הקשתות האדומות היוצאות ממנו אינו $2m - 1$.

- (ב) היעזרו בסעיף הקודם והוכיחו שמתקיים $R(4, 4) \leq 18$. (הערה: למעשה, מתקיים שוויון).

9. **תזכורת:** בהינתן גרף $G = \langle V, E \rangle$, צביעה חוקית (של הצמתים) שלו ב- k צבעים היא פונקציה $f \in V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ כך שלכל קשת $\{u, v\} \in E$ מתקיים $f(u) \neq f(v)$. אם קיימת צביעה כזו, הגרף נקרא k-צביע. ה- k המינימלי עבורו G הוא k -צביע נקרא מספר הצביעה של G , ומסומן $\chi(G)$.

הגדרה: בגרף $G = \langle V, E \rangle$ נאמר שקבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא בלתי תלויה אם אין אף צלע בין שני קודקודים של U . נסמן ב- $\alpha(G)$ את גודל קבוצה הבלתי-תלויה הגדולה ביותר.

- (א) הוכיחו שלכל גרף מתקיים $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

- (ב) הוכיחו שלכל גרף מתקיים $|E| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

- (ג) בהינתן גרף G וקודקוד v , נסמן ב- $G - v$ את הגרף המתקבל מהסרת v והקשתות הנוגעות בו. הוכיחו ש-

$$\chi(G - v) \in \{\chi(G), \chi(G) - 1\}$$

- (ד) הוכיחו שלכל גרף G מתקיים $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$ (רמז: אינדוקציה).

10. יהי G גרף עם $5n + 1$ קודקודים. נצבע את הקודקודים ב- n צבעים. הוכיחו שב- \overline{G} יש משולש שכל הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

בהצלחה!