לינארית 2א ~ תרגיל בית 9

שחר פרץ

4 בינואר 2026

(1)

נתבונן במטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & 4 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

עבור $a, b, c \in \mathbb{Q}$ רציונליים כלשהם. נמצא עבור אילו ערכים A לכסינה מעל $\mathbb{Q}$. ראשית, נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה:

$$p_A(x) = \det(A - Ix) = (1-x)(2-x)(a-x)$$

אם $a \neq 2$, אזי קיבלנו 3 ע"עים שונים וסיימנו. אחרת, $a = 2$, ואז נדרוש שהריבוי הגיאומטרי של הע"ע 2 הוא 2 (כדי שנוכל לבנות בסיס מלכסן). לשם כך:

$$2 = \dim \mathcal{N}\left(A - 2I\right) = \dim \mathcal{N} \begin{pmatrix} -1 & c & 4 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff b = 0$$

סה"כ, המטריצה לכסינה אם $a = 0 \lor (a \neq 0 \land b = 0)$. לטענה זו שקילות לוגית לכך ש־:

$$\boldsymbol{a = 0 \lor b = 0}$$

(2)

תהי $B \in M_n(\mathbb{F})$ ו־$a_0 \dots a_n \in \mathbb{F}$ סקלרים. נסמן $f = a_n x^n + \dots + a_1 x^0$ ונניח $f(B) = 0$.

- נוכיח שאם ℓ ע"ע של B, אז $f(\ell) = 0$.

הוכחה. אם ℓ ע"ע של B עבור ו"ע v נבחין ש־$B^i v = B^{i-1}(\ell v) = \ell^i v = \cdots \ell^i v$ לכל $i \in \mathbb{N}$ (באינדוקציה). לכן:

$$f(\ell) \cdot v = \sum_{i=0}^{n} a_i \ell^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(B^i v\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i B^i\right) v = 0 \cdot v = 0$$

משום שמהגדרת ע"ע $v \neq 0$ אז $f(\ell) = 0$ כדרוש וסיימנו. ■

- תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח $A^2 = 4A - 3I$. נוכיח שאם $\ell \in \mathbb{R}$ אז $\ell = 1 \lor \ell = 3$.

הוכחה. מן ההוכחה לעיל כל פולינום $\deg f \leq n$ (לא הכרחי $\deg f \leq n$ אבל רק מקרה זה הוכחנו) שמאפס את A מחלק את הע"ע של A. נבחין שבעבור $f = x^2 - 4x + 3$ נקבל:

$$A^2 = 4A - 3I \implies A^2 - 4A + 3I = 0 \implies f(A) = 0$$

סה"כ f מאפס את A. נניח ℓ ע"ע של A. מהנימוקים לעיל, תנאי הכרחי לכך הוא ש־$f(\ell) = 0$. נבחין ש־$f = (x-3)(x-1)$ וממשפט בזו ומיחידות הפירוק לגורמים אי־פריקים בתחום אוקלידי, בהכרח $\ell = 3 \lor \ell = 1$, כדרוש. ■

(3)

נאמר ש־ℓ ע"ע שמאלי של $A \in M_n(\mathbb{F})$ אם קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש־$v^T A = \ell v^T$, ו־v יקרא ו"ע שמאלי.

(א) נוכיח: ℓ הוא ע"ע אמ"מ הוא ע"ע שמאלי.

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נוכיח שאם v ע"ע שמאלי אז הוא ע"ע של A. יהי v ע"ע שמאלי של A^T, מכאן קיים v כך ש־$v^TA^T=\ell v^T$. נפעיל שחלוף על שני הצדדים ונקבל $Av=(v^TA^T)^T=(\ell v^T)^T=\ell v$ כלומר ℓ ע"ע של A כדרוש.

$\Longleftarrow$ עקרונית הכיוון השני מדואליות שחלוף אבל נוכיח את מפורשות. יהי v ע"ע של A. אזי $Av=\ell v$ ומכאן שהוא ע"ע שמאלי של A^T כי $v^TA^T=\ell v^T$. לכן $p_{A^T}(\ell)=0$. משום ש־$p_{A^T}(x)=p_A(x)$ בפרט $p_A(\ell)=0$ וסה"כ ℓ ע"ע של A שכן הוא מאפס את הפולינום האופייני.

■

(ב) נפריך: v ו"ע עצמי אמ"מ הוא ו"ע שמאלי. נתבונן במטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad Av=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot v$$

עם זאת:

$$v^T\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\neq\lambda v\ \forall\lambda\in\mathbb{F}$$

. . . . (4) . . . .

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T<S\colon V\to V$ העתקות לינאריות וכן λ_T,λ_S ע"ע של T,S בהתאמה. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

(א) נפריך את הטענה $\lambda_T+\lambda_S$ ע"ע של $T+S$.

הפרכה. נתבונן בהעתקות הבאות (טכנית, בהעתקות המוגדרות ע"י הכפל במטריצות הבאות):

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

נבחין ש־1 ע"ע לשתיהן בעבור $\binom{1}{0}$ ו־$\binom{0}{1}$ בהתאמה. אך:

$$p_{A+B}(x)=\det\left(\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}-Ix\right)=(x-2)^2-1=x^2-4x+3$$

פולינום ש־$2=1+1$ אינו שורש שלו ולכן לא ע"ע שלו. ■

(ב) נפריך את הטענה $\lambda_T\lambda_S$ ע"ע של $T\circ S$.

הוכחה. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$T(v)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}v\quad S(v)=Iv=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}v$$

לשניהם ע"ע 1. אך נבחין ש־:

$$(T\circ S)(v)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}v=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}v$$

הפולינום האופייני של העתקה זו הוא $(2-x)(1-x)-2$ ונבחין ש־1 (כפל הע"עים) לא מאפס את הפולינום. לכן הוא אינו ע"ע שלה כדרוש. ■

(ג) נוכיח את הטענה λ_T^2 ע"ע של $T\circ T$.

הוכחה. נתבונן ב־v ו"ע של λ_T. נבחין ש־:

$$(T\circ T)(v)=T(T(v))=T(\lambda_Tv)=\lambda_TTv=\lambda_T^2v$$

ומכאן ש־λ_T^2 ע"ע של $T\circ T$ כדרוש. ■

(ד) נוכיח ש־$\alpha\lambda_T$ ע"ע של αT לכל $a\in\mathbb{F}$.

הוכחה. נסמן ב־v ו"ע של λ ב־T. מכאן ש־:

$$(\alpha T)v=\alpha(Tv)=(\alpha\lambda)v$$

כנדרש. ■

(5)

יהי $V=\mathbb{C}_n$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n. נגדיר העתקה $T\colon V\to V$ ע"י $(T(p))(x)=p'(x)+p(0)x^n$. נוכיח שהיא העתקה לכסינה.

הוכחה. נתבונן בבסיס $e_i=x^i$ למרחב הפולינומים ($i\in\{0\dots n\}$). נבחין ש־$T(e_i)=T(x^i)=ix^{i-1}+x^n$ (שכן $e_i(0)=0$) אלא אם $i=0$ ואז $e_0(0)=1, e_0'=0$ ונקבל $T(e_0)=1$. מכאן שהמטריצה המייצגת בבסיס זה היא (זוהי מטריצה $(n+1)\times(n+1)$):

$$[T]_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ n & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

מכאן שהפולינום האופייני שלה הוא (נפתח דטרמיננטה לפי השורה העליונה):

$$p_T(x)=\det(Ix-[T]_{\mathcal{E}})=\begin{vmatrix}x & 0 & \cdots & 0 & -1\\ -n & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-n & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1-n & x & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 2-n & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & x & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-n & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1-n & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -2 & x\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\cdot x^n+1\cdot 1\cdot\prod_{i=1}^{n}(-i)=x^{n+1}+(-1)^n n!$$

נוכיח שלפולינום $x^{n+1}+(-1)^n n!$ יש $n+1$ שורשים מעל המרוכבים. נטען שלכל $k\in[n+1]$ (יש $n+1$ כאלו), המספר הבא הוא שורש של הפולינום:

$$x_k=\operatorname{sgn}\left((-1)^n\right)\sqrt[n+1]{n!}\left(\cos\frac{2\pi k}{n+1}+\sin\frac{2\pi k}{n+1}\right)=\sqrt[n+1]{n!}e^{\frac{2\pi ik}{n+1}}$$

(אינטואציה: שורשי יחידה לא מנורמלים) sgn מסמן את הסימן של המספר שהוא מקבל, שבמקרה הזה שווה ל־-1 אם n אי־זוגי ול־1 אחרת. כאשר $\sqrt[n]{n!}$ קיים כי לכל מספר ממשי יש שורש. נוכיח:

$$x_k^{n+1}+(-1)^n n!=\left(\operatorname{sgn}\left((-1)^{n+1}\right)\sqrt[n+1]{n!}e^{\frac{2\pi ik}{n+1}}\right)^{n+1}+(-1)^n n!=\underbrace{\left(\sqrt[n+1]{n!}\right)^n}_{n!}\cdot\overbrace{e^{2\pi\cancel{\frac{ik}{n+1}\cdot(n+1)}}}^{e^{2\pi ik}=\cos(2\pi k)+i\sin(2\pi k)=1+0i=1}\cdot\underbrace{(\operatorname{sgn}((-1)^n))^n}_{(-1)^{n+1}}-(-1)^n$$

$$=n!\cdot 1\cdot(-1)^{n+1}+(-1)^n n!=n!-n!=0$$

עוד נבחין ש־$j=k\iff x_k=x_j$, שכן הזווית היא arctan (פונקציה חח"ע) של המעריך, שמשתנה בעבור כל k שונה. מכאן של־$p_T(x)$ פולינום ממעלה $n+1$ יש $n+1$ שורשים שונים וסה"כ המטריצה לכסינה ממשפט. ■

(אני לא ממש התעסקתי במרוכבים בחיים שלי אז מקווה שאין בעיות מהותיות בהוכחה)

(6)

נגדיר את ההעתקה $T\colon M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ הנתונה ע"י $T(A)=A^T$. נראה ש־T לכסינה.

הוכחה. נבחין שלכל $A\in\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ מתקיים $T(A)=A^T=A$ ולכל $A\in\mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$ מתקיים $T(A)=A^T=-A$. ידוע ש־$M_n(\mathbb{C})=\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})\oplus\mathrm{ASym}_n(\mathbb{C})$. לכן נוכל לקחת בסיס $A_1\dots A_n$ כך ש־$A_1\dots A_{\binom{n}{2}}$ א־סימטריות ו־$A_{\binom{n}{2}+1}\dots A_n$ סימטריות. בעבור הסימטריות נקבל ע"ע 1 ובעבור האנטי־סימטריות נקבל ע"ע -1. סה"כ מצאנו בסיס מלכסן, כאשר $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ המ"ו העצמי של 1 ו־$\mathrm{ASym}(\mathbb{C})$ המ"ו העצמי של -1. ■

(7)

עבור המטריצות הבאות, נקבע אם הן נורמליות, הרמיטיות או אוניטריות.

(א) נתבונן במטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

נבדוק אם היא נוראמלית:

$$AA^*=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}=A^*A$$

מכאן שהיא איננה נורמאלית. היא בבירור איננה אוניטרית שכן הנורמה של השורה הראשונה היא $\sqrt{2}$ ולא 1, ובפרט איננה הרמטית שכן היא איננה נורמאלית.

(ב) נתבונן במטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

נבדוק אם היא נורמאלית:

$$AA^*=AA^T=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A^TA=A^*A$$

סה"כ היא נורמאלית ולכן לכסינה אורתוגונלית מעל $\mathbb{C}$. אך היא איננה צמודה לעצמה, שכן $A_{23}\neq A^T_{23}$. מכאן שהיא איננה לכסינה אורתוגונלית מעל $\mathbb{R}$.

(ג) נתבונן במטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

נבחין שהיא צמודה לעצמה שכן $A^T=A$. מכאן שבפרט היא נורמאלית. היא איננה אוניטרית שכן איננה משמרת את נורמת הוקטור $(1,0,0)$. בגלל שהיא צמודה לעצמה ניתן למצוא לה לכסון אורתוגונלי מעל $\mathbb{R}$. לשם כך, נמצא את הפולינום האופייני:

$$\begin{aligned}p_A(x)=\det(Ix-A)=\begin{vmatrix}x-2&-2&-2\\-2&x-2&-2\\-2&-2&x-2\end{vmatrix}&=(x-2)\begin{vmatrix}x-2&-2\\-2&x-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&x-2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&x-2\\-2&-2\end{vmatrix}\\&=(x-2)((x-2)^2+4)+\cancel{2(2(x-2)+2^2)}+\cancel{2(2^2-2(x-2))}=x^3-6x^2+16x-16x=x^2(x-6)\end{aligned}$$

נמצא בסיס למ"ו העצמי של 0:

$$\mathcal{N}(A-0I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}2&2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-x+-y\\-x\\-y\end{pmatrix}\mid x,y\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נעשה גרם־שמידט:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2+0^2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=:v_1$$

אחרי שנרמלנו:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},v_1\right\rangle v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נורמל שוב:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.5^2\cdot 2+1^2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=:v_2$$

נותר לנו למצוא את המ"ו העצמי של ע"ע 6, שממשפט הפירוק הספקטרלי מאונך למרחב העצמי של ע"ע 0.

$$\mathcal{N}(A-6I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

נורמל את הוקטור האחרון שקיבלנו:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2\cdot 3}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=:v_3$$

כלומר הבסיס הבא אורתונורמלי מלכסן:

$$v_1,v_2,v_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

כאשר v_1,v_2 משוייכים לע"ע 0 ו־v_3 לע"ע 6 של המטריצה הנתונה בתחילת השאלה.

(8)

תהי $A\in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה עם ע"ע $\lambda_1\dots\lambda_n$ כך ש־$|\lambda_i|=1$. נוכיח/נפריך ש־A אוניטרית.

הפרכה. נתבונן במטריצה הבאה:

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad A=B^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$$

נבחין שמשום ש־B הפיכה אז $A\sim\operatorname{diag}(1,-1)$, ומכאן שיש לה ע"ע $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$. אך הוקטור $\binom{0}{1}$ לא שומר על הנורמה שלו:

$$\left\|\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}^T\right\|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}\neq 1=\left\|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\|$$

דוגמה נגדית מתאימה. ■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד