מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 8 - שחר פרץ

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

תאריך הגשה: 5.1.2024 (פעם ראשונה שאני מגיש לא ברביעי אחרי 23:00 lol)

~~~ תרגיל בית 8 ~~~

שאלה 1

סעיף (א)

צ.ל.: תהיה פונקציה $f: A \to B$, נוכיח f חח"ע אמ"מ f^{-1} יחס ח"ע.

הוכחה: נפצל שתי גרירות.

- נניח f חח"ע, נוכיח f^{-1} יחס ח"ע. יהי $a \in A$, ויהי $b_1, b_2 \in B$, נניח $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in f^{-1}$ ונוכיח $b_1 = b_2$. ההנחה שקולה לטענה $\langle b_1, a\rangle, \langle b_2, a\rangle \in f$, ולפי הנתון חח"ע f נסיק $b_1 = b_2$.
- נניח f^{-1} ח"ע, נוכיח f חח"ע. כלומר, יהי $a_1, a_2 \in A$, ונניח $f(a_1) = f(a_2)$, נוכיח $a_1 = a_2$. נסמן $b = f(a_1)$, כלומר לפי טרנזיטיביות והגדרת סימון פונקציה נקבל $\langle a_1, b\rangle, \langle a_2, b\rangle \in f$. נשתמש בהגדרת יחס הופכי, ונקבל $\langle b, a_1\rangle, \langle b, a_2\rangle \in f^{-1}$. לפי הנתון f^{-1} ח"ע, ומשום ש־$b = b$ (כל גודל שווה לעצמו), נסיק $a_1 = a_2$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

צ.ל.: תהיה פונקציה $f: A \to B$, נוכיח f על אמ"מ f^{-1} מלא ב־B.

הוכחה: נפצל לשתי גרירות;

- נניח f על, נוכיח f^{-1} מלא ב־B, כלומר, יהי $b \in B$, נוכיח קיום $a \in A$ כך ש־$\langle b, a\rangle \in f^{-1}$, או באופן שקול, $\langle a, b\rangle \in f$. משום ש־$f$ פונקציה על, אז ל־b יש איבר $\tilde{a} \in A$ כך ש־$f(\tilde{a}) = b$, או באופן שקול $\langle \tilde{a}, b\rangle \in f$. נבחר $a = \tilde{a}$, נקבל $\langle a, b\rangle \in f$, שכמו שצוין זה שקול למה שצ.ל. כדרוש.
- נניח f^{-1} יחס מלא ב־B, נוכיח f על A, כלומר לכל $a \in A$ נוכיח קיום $b \in B$ כך ש־$f(a) = b$, או בניסוח שקול, $\langle a, b\rangle \in f$, כאמור שקול ל־$\langle b, a\rangle \in f^{-1}$. הפסוק $\forall b \in B.\exists \tilde{a} \in A.\langle b, a\rangle \in f^{-1}$ פסוק אמת לפי המליאות של f^{-1} ב־B שנתונה, ולכן נוכל לבחור $a = \tilde{a}$ ולקבל פסוק אמת כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■
~~~

סעיף (ג)

צ.ל.: תהי f פונקציה, נוכיח f^{-1} פונקציה אמ"מ f חח"ע ועל.

הוכחה: נוכיח בעזרת פיצול לשתי גרירות.

- נניח f^{-1} פונקציה, נוכיח f חח"ע ועל. ע"פ הגדרת פונקציה, f ח"ע ומלאה ב־B, כלומר לפי סעיפים (1)(א) ו־(1)(ב) נגרר f חח"ע ועל כדרוש.
- נניח f חח"ע ועל, נוכיח f פונקציה. ע"פ הגדרת פונקציה, צ.ל. f ח"ע ומלאה ב־B, שנגרר באופן ישיר לאחר שילוב הנתונים עם סעיפים (1)(א) ו־(1)(ב) כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 2

סעיף (א)

צ.ל.: יהיו $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ פונקציות. נניח f, g חח"ע, נוכיח $g \circ f$ חח"ע.

הוכחה: יהי $a_1, a_2 \in A$, נניח $(f \circ g)(a_1) = (f \circ g)(a_2)$, נוכיח $a_1 = a_2$. הנתון שקול לטענה $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$. לפי הנתון f חח"ע, לכל $f(x_1) = f(x_2)$ נגרר $x_1 = x_2$, ובפרט $g(a_1) = g(a_2)$. לפי הנתון g חח"ע, לכל $g(x_1) = g(x_2)$ נגרר $x_1 = x_2$, בפרט $a_1 = a_2$, כדרוש. //

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

צ.ל.: יהיו $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ פונקציות. נניח f, g על A, B בהתאמה, נוכיח $g \circ f$ על.

הוכחה: יהי $x \in c$, נוכיח קיום $a \in A$ עבורו $(g \circ f)(a) = c$, או באופן שקול נוכיח $g(f(a)) = c$. משום ש־g על C וכי $c \in C$, אז קיים $b \in B$ עבורו $g(b) = c$. משום ש־f על B, אז לכל $\tilde{b} \in B$ קיים $\tilde{a} \in A$ עבורו $f(\tilde{a}) = \tilde{b}$. נבחר את ה־$\tilde{a}$ המתאים ל־b כך ש־$a = \tilde{a}$, לכן $f(a) = b$ ומשום ש־$g(b) = c$, נציב ונקבל $g(f(a)) = c$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 3

סעיף (א)

נתון:

$$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), f = \lambda A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).A \cup B$$

צ.ל.: f על, f לא חח"ע.

הוכחה:

על

יהי $r \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. צ.ל. קיום $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש־$f(A, B) = r$. נבחר $\tilde{A} = r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \tilde{B} = \emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. נתבונן ב־$f(\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle)$, ולפי כלל β ונמצא את הזהות $f(\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle) = \tilde{A} \cup \tilde{B} = r \cup \emptyset = r$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שלילת חח״ע

נניח בשלילה חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר ונבחר $A_1 = B = \{1\}, A_2 = \emptyset$. לפיכך $A_1 \neq A_2$ משום ש־$1 \in \emptyset$ פסוק שקר, ולפי התכונה המרכזית של זוג סדור, $\langle A_1, B \rangle \neq \langle A_2, B \rangle$. נשתמש בתחשיב למבדא, ונגיע לכך אשר:

$$f(\langle A_1, B \rangle) = A_1 \cup B = \{1\} \cup \{1\} = \{1\} = \{1\} \cup \emptyset = A_2 \cup B = f(\langle A_2, B \rangle)$$

וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון:

$$g \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})), g = \lambda A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).A \cup B$$

שלילת על

נניח בשלילה על ונראה דוגמה נגדית. נבחר $f = \lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\emptyset, f \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. לפי הנחת השלילה, קיים $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש־$g(A) = f$, כלומר לפי כלל β קיים $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כך ש־$\lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).A \cup B = \lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\emptyset$. משום שהטווח שווה, לפי כלל η נסיק $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).B \cup A = \emptyset$. נבחר דוגמה נגדית $B = \{1\}$, עבורו כלומר $\{1\} \cup A = \emptyset$, ובפרט $\{1\} \cup A \subseteq \emptyset$, ולפי הגדרות הכלה ואיחוד $\forall x \in \mathbb{R}.x \in A \lor x = 1 \implies x \in \emptyset$, שלפי חוקי הלוגיקה גורר $x = 1 \implies x \in \emptyset$ וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

הוכחת חח״ע

תהי פונקציה $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, יהיו שתי קבוצות $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. נניח $g(A_1) = g(A_2) = f$, ונוכיח $A_1 = A_2$. נפתח בעזרת תחשבי למדא:

$$\begin{aligned}
& g(A_1) = g(A_2) & \\
\iff & \lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).B \cup A_1 = \lambda B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).B \cup A_2 & (\beta \text{ rule}) \\
\iff & B \cup A_1 = B \cup a_2 & (\eta \text{ rule}) \\
\iff & \forall x.x \in B \lor x \in A_1 \longleftrightarrow x \in B \lor x \in A_2 & (=, \cup \text{ definition})
\end{aligned}$$

לאחר פירוק עם מספר שקלויות לוגיות נוספות שלא אציין כאן (כי זה נראה לי מפורט מדי ומיותר), ניתן להגיד לגרירה של $x \in A_1 \longleftrightarrow x \in A_2$, כלומר $A_1 = A_2$, כנדרש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון:

$$F\colon (\mathbb{N}\to\mathbb{N})\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N}), F=\lambda g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}.\max\{g(i)\mid i\in\{0,...n\}\}$$

לא על

נמצא דוגמה נגדית. נבחר $g=\lambda x\in\mathbb{N}.(x-1)^2$, ונראה שלכל $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $F(f)\neq g$. נניח בשלילה שקיים f כזה, ולכן לפי כלל β והנחת השלילה נקבל $F(f)=\lambda n\in\mathbb{N}.\max\{f(i)\mid i\in\{0,\dots,n\}\}=(n-1)^2$. משום שהתחום זהה, מכלל η נסיק $\forall n\in\mathbb{N}.f(n)=\max\{f(i)\mid i\in\{0,\dots,n\}\}=g(n)=(n-1)^2$, בפרט עבור הערכים $n=0,n=1$. נסיק $f(0)=g(0)=(-1)^2=1\wedge f(1)=g(1)=(1-1)^2=0$, כלומר $\max\{f(i)\mid n\in\{0,\dots,0\}\}=1$ משום ש־$F(0)=g(0)=1$. באופן דומה $\max\{f(i)\mid n\in\{0,\dots,1\}\}=0$, כלומר $f(1)>f(0)$ וסה"כ $0>1$ וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

לא חח"ע

נראה דוגמה נגדית. נניח בשלילה שהפונקציה חח"ע. נבחר $f_1=\{\langle0,0\rangle,\langle1,1\rangle,\langle2,0\rangle\}$, ונבחר $f_2=\{\langle0,0\rangle,\langle1,1\rangle,\langle2,1\rangle\}$. לפי הנחת השלילה, $F(f_1)\neq F(f_2)$. בפרט, לפי כלל η, $\max\{f_1(i)\mid\{0,1,2\}\}\neq\max\{f_2(i)\mid\{0,1,2\}\}$. נחשב בעזרת עקרון ההחלפה וסימון פונקציה $f(x)$, ונקבל $\max\{0,1,0\}\neq\max\{0,1,1\}$, כלומר $1\neq1$, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד)

נתון:

$$G\colon(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\mathbb{N}\to\mathbb{N}, G=\lambda g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}.\max\{g(i)\mid i\in\{0,\dots,n\}\}$$

על

יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח קיום $\langle f_1,m\rangle\in(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ כך ש־$G(\langle f_1,m\rangle)=n$. נבחר $f_1=\lambda x\in\mathbb{N}.n, m=0$. נציב בעזרת כלל β, ונקבל:

$$G(\langle f_1,m\rangle)=\max\{g(i)\mid i\in\{0,\dots,0\}\}=\max\{n\mid i\in\{0\}\}=n$$

כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

לא חח"ע

נניח בשלילה שהפונקציה חח"ע, ונראה דוגמה נגדית. נבחר $n=0$. נתבונן בזוגות הסדורים $n_:=\langle\lambda n\in\mathbb{N}.0, m_1:=0\rangle, n_2:=\langle\lambda n\in\mathbb{N}.0, m_2:=1\rangle\in(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N}$, שלפי המשפט המרכזי של זוג סדור לא שווים כי $1\neq0$. לפי הנחת השלילה $F(n_1)\neq F(n_2)$. נחשב:

$$F(n_1)=\max\{(\lambda n\in\mathbb{N}.0)(i)\mid i\in\{0,\dots,0\}\}=\max\{0\mid i\in\{0\}\}=0$$

$$F(n_2)=\max\{(\lambda n\in\mathbb{N}.0)(i)\mid i\in\{0,\dots,1\}\}=\max\{0\mid i\in\{0,1\}\}=0$$

ולכן $F(n_1)=F(n_2)$, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ה)

נתון:

$$F\colon(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, F=\lambda g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}.\sum_{i=0}^{n}g(i)$$

על

יהי $n\in\mathbb{N}$. נוכיח קיום $\langle f,m\rangle\in(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ כך ש־$F(\langle f,m\rangle)=n$. נבחר $f=\lambda t\in\mathbb{N}.n, m=1$. נציב ונקבל:

$$F(\langle f,m\rangle)=\sum_{i=0}^{m}f(i)=\sum_{i=0}^{1}n=n$$

כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

לא חח"ע

נניח בשלילה ש־F חח"ע ונראה סתירה. נבחר $n=0\in\mathbb{N}$, ונבחר זוגות סדורים ב־$(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ המוגדרים לפי $n_1=\langle f,0\rangle, n_2=\langle f,1\rangle$ שלפי התכונה המרכזית של זוג סדור $n_1\neq n_2$, כאשר f היא פונקציה קבועה על $\mathbb{N}$ ב־0. לפי הנחת השלילה, $F(n_1)\neq F(n_2)$. אומנם זאת, אך:

$$F(n_1)=\sum_{i=0}^{0}f(i)=f(0)=0$$
$$F(n_2)=\sum_{i=0}^{1}f(i)=f(1)+f(0)=0$$

ולכן $F(n_1)=F(n_2)$ וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ו)

נתון:

$$G\colon(\mathbb{N}\to\mathbb{N})\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N}), G=\lambda g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}.\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{i=0}^{n}g(i)$$

לא על

נניח בשלילה שהפונקציה על. נבחר $f = \{\langle 0,1\rangle\} \cup \lambda n \in \mathbb{N}_{\leq 1}.0$. לפי ההנחה קיימת $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש־$G(g) = f$. לפי כללי β, η:

$$\begin{aligned} & G(g) = f \\ \iff & \lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} g(i) = f \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .g(n) = f(n) \end{aligned}$$

ובפרט עבור $n = 0, n = 1$. נציב בכלל β, ונקבל:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{0} .g(i) = f(0) \\ \sum_{i=0}^{1} .g(i) = f(1) \end{cases} \implies \begin{cases} g(0) = f(0) = 1 \\ g(0) + g(1) = f(1) = 0 \end{cases}$$
$$\implies 1 + g(1) = 0 \implies g(0) = -1$$

וזו סתירה כי $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אך $g(0) \notin \mathbb{N}$.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

חח״ע

יהיו $f_1, f_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $f_1 \neq f_2$. נניח בשלילה שהפונקציה לא חח"ע, ונסיק $G(f_1) = G(f_2)$, כלומר, לפי כללי β, η:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_1(i) = n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_2(i)$$

לפי כלל η, $f_1 \neq f_2$ שקול לקיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_1(m) \neq f_2(m)$. נסכום עד $m \in \mathbb{N}$ הנמוך ביותר המקיים תכונה זו. משום שהוא הנמוך ביותר, $\forall t < m \in \mathbb{N}. f_1(t) = f_2(t)$ ולכן, עבור $t = m - 1$, הסכומים להלן שווים:

$$\sum_{i=0}^{t} f_1(i) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i)$$

(אפשר להוכיח את זה באינדוקציה קטנה). עתה, נתבונן בסכום עד m, ונכיל את הנחת השלילה שלנו:

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{m} f_1(i) = \sum_{i=0}^{m} f_2(i) \\ \sum_{i=0}^{t} f_1(i) + f_1(m) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i) + f_2(m) \\ f_1(m) = f_2(m) \end{gathered}$$

וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

שאלה 4

נתון

נתון:

$$H = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\mathrm{Im}(f) \triangle \mathrm{Im}(g)$$

$$H \colon (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

סעיף (א)

צ.ל.: H לא חח"ע

הוכחה: נניח בשלילה ש־H חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר:

$$n_1 := \langle f_1 := \lambda n \in \mathbb{N}.0, f_2 := \lambda n \in \mathbb{N}.1 \rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2$$
$$n_2 := \langle g_1 := \lambda n \in \mathbb{N}.1, g_2 := \lambda n \in \mathbb{N}.0 \rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2$$

לפי התכונה המרכזית של זוגות סדורים ולפי כלל η, משום ש־$f_1(0) = 0 \neq g_1(0) = 1$ אז $f_1 \neq g_1$ ולכן $n_1 \neq n_2$. לפי הנחת השלילה, $H(n_1) \neq H(n_2)$, ולכן לפי כלל β:

$$\mathrm{Im}(f_1) \triangle \mathrm{Im}(f_2) \neq \mathrm{Im}(g_1) \triangle \mathrm{Im}(g_2)$$

ידוע ש־$\mathrm{Im}(f_1) = \{0\}, \mathrm{Im}(f_2) = \{1\}, \mathrm{Im}(g_1) = \{1\}, \mathrm{Im}(g_2) = \{0\}$ (בה"כ $\mathrm{Im}(f := \lambda n \in \mathbb{N}.t) = \{t\}$, נניח בשלילה שלא כן, לפיכך קיים $m \neq t$ עבורו $\exists n \in \mathbb{N}.f(n) = m$ אך $f(n) = t$ ולכן $m = t$). לכן:

$$\{0\} \triangle \{1\} \neq \{1\} \triangle \{0\}$$

ולפי קומוטטיביות הפעולה $\triangle$, זו סתירה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ב)

צ.ל.: H על

הוכחה: יהי $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נוכיח קיום $\langle f_1, f_2 \rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2$ כך ש־$H(\langle f_1, f_2 \rangle) = N$. לפי הטענה שהוכחה בכיתה, לכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ קיימות $B, C \subseteq \mathbb{N}$ לא ריקות כך ש־$B \triangle C = A$, ובפרט עבור $A = N$. נתבונן ב־B, C המתאימות ל־N. נתבונן ב־n־יות הסדורות $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ המקיימות $(\forall i \in \mathbb{N}.\mathcal{B}_i \in B) \wedge (\forall i \in \mathbb{N}.\mathcal{C}_i \in C)$ בהן אין חזרות, ונבחר:

$$f_1 = (\lambda i \in \mathbb{N}_{\leq |\mathcal{B}|}.\mathcal{B}_i) \cup (\lambda n \in \mathbb{N}_{>|\mathcal{B}|}.\mathcal{B}_0), f_2 = (\lambda i \in \mathbb{N}_{\leq |\mathcal{C}|}.\mathcal{C}_i) \cup (\lambda n \in \mathbb{N}_{>|\mathcal{C}|}.\mathcal{C}_0)$$

נוכל לדעת ש־f_1, f_2 פונקציות על $\mathbb{N}$ כי הן איחוד של שתי פונקציות שהתחום שלהן זר (המשפטים הדרושים כדי להגיד את זה כבר הוכחו בשיעורי הבית הקודמים). בה"כ תהיה קבוצה A, ו־n־יה $\mathcal{A}$ המקיימת $\forall i \in \mathbb{N}.\mathcal{A}_i \in A$ בלי חזרות, ופונקציה f מהצורה $f = (\lambda i \in \mathbb{N}_{\leq |\mathcal{A}|}.\mathcal{A}_i) \cup (\lambda n \in \mathbb{N}_{>|\mathcal{A}|}.\mathcal{A}_0)$, ויהי n, נוכיח $a \in A$ אמ"מ $\exists n \in \mathbb{N}.f(n) = a$. נוכיח שתי גרירות:

- יהי $a \in A$. ע"פ הגדרת $\mathcal{A}$, קיים אינדקס $i \in \mathbb{N}$ עבורו $\mathcal{A}_i = a$. נבחר $n = i$, וע"פ הגדרתה $f(n) = a$.

- יהי $n \in \mathbb{N}$, נניח $f(n) = a$, נוכיח $a \in A$. נפלג למקרים;
  - אם $n \leq |\mathcal{A}|$, אז $f(n) = \mathcal{A}_i$ וע"פ בניית $\mathcal{A}$ ידוע $\mathcal{A}_i \in A$ ולכן $f(n) \in A$ כדרוש.
  - אם $n > |\mathcal{A}|$, אז $f(n) = \mathcal{A}_0$ וע"פ בניית $\mathcal{A}$ ידוע לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathcal{A}_i \in A$ ובפרט עבור $i = 0$, ולכן $f(n) \in A$ כדרוש.

עתה, נוכל להגיד $\mathrm{Im}(f_1) = B, \mathrm{Im}(f_2) = C$. נתבונן ב־$H(\langle f_1, f_2 \rangle)$, ולפי תחשיב למדא:

$$H(\langle f_1, f_2 \rangle) = \mathrm{Im}(f_1) \triangle \mathrm{Im}(f_2) = B \triangle C = N$$

כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

שאלה 5

נתון

יהיו A, B, C קבוצות לא ריקות, נגדיר:

$$Cu\colon ((A \times B) \to C) \to (A \to (B \to C))$$
$$Cu = \lambda f \in (A \times B) \to C.\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle)$$

סעיף (א)

צ.ל.: יהי $f \in (A \times B) \to C$, נניח f חח"ע, נוכיח $Cu(f)$ חח"ע.

הוכחה: יהי $a_1, a_2 \in A$, נניח $Cu(f)(a_1) = Cu(f)(a_2)$, נוכיח $a_1 = a_2$. נפרק את הנתון:

$$\begin{aligned}
& Cu(f)(a_1) = Cu(f)(a_2) \\
\iff & (\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle))(a_1) = (\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle))(a_2) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & \lambda b \in B.f(\langle a_1, b \rangle) = \lambda b \in B.f(\langle a_2, b \rangle) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & f(\langle a_1, b \rangle) = f(\langle a_2, b \rangle) && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}$$

כלומר, נתון $f(\langle a_1, b \rangle) = f(\langle a_2, b \rangle)$. לפי הנתון f חח"ע, נגרר $a_1 = a_2$, כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

צ.ל.: נשלול יהי $f \in (A \times B) \to C$, נניח f על, נוכיח $Cu(f)$ על.

הוכחה: נבחר:

$$g = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} \in B \to C$$

$$f = ((A \times B) \times \{0\} \setminus \{\langle 0, 0 \rangle, 0\}) \cup \{\langle \langle 0, 0 \rangle, 1 \rangle\} \in (A \times B) \to C.$$

$$A = \{1,0\}, B = \{0,1\}, C = \{0\}$$

f על כי עבור $1 \in C$ נבחר $f(\langle 0,0\rangle) = 1$, עבור $0 \in C$ נבחר $f(\langle 0,1\rangle) = 0$. נניח בשלילה קיום $a \in A$ עבורו $Cu(f)(a) = g$, או במילים אחרות, צריך נשלול קיום $a \in A$ עבורו:

$$\begin{aligned} & Cu(f)(a) = g \\ \iff & \lambda b \in B. f(\langle a,b\rangle) = g && (\beta \text{ rule}) \\ \iff & \forall b \in B. f(\langle a,b\rangle) = g(b) && (\eta \text{ rule}) \end{aligned}$$

לסיכום, $\exists a \in A. \forall b \in B. f(\langle a,b\rangle) = g(b)$. נפלג למקרים:

- אם $a = 0$, אז עבור $b = 0$ מתקיים $f(\langle 0,0\rangle) = 1 \neq g(0) = 0$ וזו סתירה.
- אם $a = 1$, אז עבור $b = 1$ מתקיים $f(\langle 1,1\rangle) = 0 \neq g(1) = 1$ וזו סתירה.

סה"כ כל המקרים מובילים לסתירה ולכן $Cu(f)$ לא על.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

~ סוף ~