מתמטיקה בדידה ~ קומבי 7 ~ נוסחאות נסיגה, המשך

שחר פרץ

3 למאי 2024

1 מגדלי האנוי

נתונים שלושה מוטות, שיקראו A, B, C. סבביב המוט A מסודרות n שונות בגודלן, מהגדולה לקטנה. בכל פעולה, מותר להזיז טבעת אחת מהמוט עליה היא נמצאת למוט אחר, ואסור להניח טבעת מעל טבעת שקטנה ממנה. המטרה, תהיה להעביר את כל הטבעות ממוט A למוט C.

השאלה: מה מספר הצעדים המינימלי הדרוש לשם כך?

פתרון: נסמן את המספר הדרוש של צעדים ב־$h(n)$. מקרה פרטי: נראה ש־$7 \le h(3)$. הוכחה: נסמן את הטבעות ב$1, 2, 3$. צעדים:

$$1 \to C,\ 2 \to B,\ 1 \to B, 3 \to C,\ 1 \to A, 2 \to C, 1 \to C \blacksquare$$

טענה: $h(1) = 1,\ \forall n \ge 2,\ h(n) = 2h(n-1) + 1$.

הוכחה. נראה $\le$: (קיום אלגו' מתאים): נעביר את $n-1$ הטבעות העליונות ל־B ($h(n-1)$), נעביר את הטבעת הגדולה ביותר בתחתית ל־C (1) ואז את הערימה שב־B ל־C ($h(n-1)$) וסה"כ $h(n) = 2h(n-1) + 1$.

נראה $\ge$: (הוכחת מינימליות): כדי להגיע לכך שבמוט C תהיה הטבעת n, עלינו להגיע למצב שבו C ריק, ועל מוט A ישנה הטבעת n בלבד. כלומר, עלינו להעביר את $n-1$ הטבעות הקטנות ל־B בצורה חוקית. לכן, יהיו לפחות $h(n-1)$ צעדים לשם כך. נוסיף לזה את הצעדים הדרושים להעבירם ל־C, ואת המעבר של הטבעת ה־n ל־C, ונקבל $2h(n-1) + 1 \le h(n)$.

עתה, נרצה למצוא נוסחה סגורה. נעשה הצבה חוזרת (לא חלק מההוכחה) כדי להבין מה קורה כאן:

$$h(n) = 2h(n-1) + 1 = 2(2h(n-2) + 1) + 1 = 2^2 + h(n-2) + 2 + 1 =$$

$$2^2(2h(n-3)+1)+2+1 = h^2h(n-3)+2^2+2+2^0 = \dots 2^{n-1}h(1)+2^{n-2}+\dots+2^0 = 2^{n-1}+\sum^{n-1} 2^k = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n-1$$

תזכורת, של סכום סדרה הנדסית:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

נחזור להוכחה. נוכיח באינדוקציה $\forall n \ge 1. h(n) = 2^n - 1$. בסיס: $h(1) \stackrel{?}{=} 2^1 - 1$ ונקבל $1 = 1$ כדרוש.

צעד:

$$\begin{aligned} &h(n+1) \\ =&2h(n)+1 && \text{definition by} \\ =&2(2^n-1)+1 && \text{induction} \\ =&2^{n+1}-2+1 = 2^{n+1}-1 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

המשך בעמוד הבא

2 מספרי קטלן

הגדרה: (לא פומרלית) מבנה סוגריים מאוזן הוא רצף של "(" ו־")" הוא רצף בו מספר הפוצחים גדול או שווה ומספר הסוגרים, וברצף כולו מספרם שווה.

דוגמה: עבור רצף באורך $2 \cdot 3$, כל האפשרויות הן $((())),\ ()()(),\ (())(),\ ()(()),\ (()())$, כלומר 5 אפשרויות.

הגדרה שקולה פורמלית: סדרה $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$, אשר עבורה $\forall.1 \leq i \leq 2n.a_i \in \{-1,1\}$, היא תקראה מאוזנת אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $\sum_{i=1}^{2n} a_I = 0$ (יש כמות שווה של 1 ו־-1).
2. $\forall 1 \leq k \leq 2n. \sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ (התנאי השני).

הגדרה: מספר קטלן ה־n־י, מסומן $\mathcal{C}_n$, הוא מספר מבני הסוגריים המאוזנים באורך $2n$.

טענה: (נוסחת נסיגה עבור $\mathcal{C}_n$):

$$\mathcal{C}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_{n-1-i}$$

נגיד שהיא מסדר 1 כי זה מגדיר אותה ואנחנו לא רוצים לתת ∞ איברי בסיס (הסיבה האמיתית היא שזה מספיק בשביל להגדיר את כל המשתנים האחרים אבל אני מעדיף לנסח את זה ככה). תנאי התחלה $\mathcal{C}_0 = 1$.

הוכחה. נתבונן במבנה סוגריים מאוזן באורך $2n$. כמות האפשרויות היא $\mathcal{C}_n$. הוא, בהכרח מתחיל בפותח, שלאחריו יהיה סוגר. ביניהם, יש מבנה סוגריים מאוזן באורך $2i$ ($0 \leq i \leq n-1$). מספר האפשרויות עבורו יהיה $\mathcal{C}_i$. עבור יתר התווים, שיצרו מבנה סוגריים מאוזן באורך $2n-2i-2$ (אורך כללי, פחות אורך פינמי פחות פותח וסוגר) ולכך יש $\mathcal{C}_{n-i-1}$ אפשרויות. סה"כ מכלל החיבור מצאנו שהנוסחה עובדת. ■

טענה: (נוסחה סגורה ל־$\mathcal{C}_n$):

$$\mathcal{C}_n = \binom{2n}{n} - \frac{2n}{n-1}$$

הוכחה. נוכיח קומבינטורית. נתבונן בבעיה: מה מספר הדרכים להגיד במישור, מהנקודה $(0,0)$ לנקודה (n,n) כאשר בכל שלב מותר למנוע ימינה או למעלה בלבד מבלי לחצות את האלכסון $y = x$.

צד שמאל: נתאים צעד ימינה ל־$(+1)$ (או "(") וצעד למעלה ל־(-1) (או ")"). לכן מספר האפשרויות החוקיות הוא $\mathcal{C}_n$.
צד ימין: מספר האפשרויות להגיע מ־$(0,0)$ ל־(n,n) ללא ההגבלה על האלכסון, הוא $\binom{2n}{n}$; עלינו לבצע שני n צעדים, מתוכם n ימינה, אז נבחר אילו מהצעדים ימינה. ניעזר בעקרון המשלים, וההסבר את למה זה עובד ייגמר ברביעי כי לנטלי אין זמן.

■