

## חדו"א 1א - תרגיל 8

1. חשבו 10 מהגבולות הבאים לבחירתכם:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1983} - (1+1983x)}{x^2 + x^{1983}}$	ב.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$	א.
$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$	ד.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1)^{1/x}$	ג.
$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2}$	ו.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$	ה.
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$	ח.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$	ז.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[ \frac{b}{x} \right], a, b > 0$	י.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 0$	ט.
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$	י"ב.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}, \alpha, \beta \neq 0$	י"א.
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$	י"ד.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x}} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{\sin x}}$	י"ג.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin x \cdot \sin 2x}$	ט"ז.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$	ט"ו.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ עבור $a > 0$	י"ח.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$	י"ז.
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( \sin \frac{1}{x} \right)^2 + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$ ★	כ.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(\alpha x))}{\log(\cos(\beta x))}$ עבור $\alpha, \beta \neq 0$	י"ט.
		$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ ★	כ"א.

2. תהינה  $x_0 \neq x_1$  שתי נקודות כלשהן. מצאו דוגמא לפונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  הרציפה בדיוק ב- $x_0$  ו- $x_1$ .

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם  $f, g$  לא רציפות בנק'  $x_0$  אזי  $f \cdot g, f + g$  אינן רציפות ב- $x_0$ .

(ב) אם  $f$  רציפה בנק'  $x_0$  ו- $g$  אינה רציפה בנק'  $x_0$  אזי  $f \cdot g, f + g$  אינן רציפות ב- $x_0$ .

(ג) אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה וחסומה אז היא משיגה ערך מקסימלי ו/או ערך מינימלי ב- $\mathbb{R}$ .

4. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[0, 1]$  המקיימת  $f(x) > x$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי קיים  $h > 0$  כך ש  $f(x) > x + h$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

5. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) מצאו דוגמה לפונקציה רציפה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקבלת כל ערך ב  $\mathbb{R}$  בדיוק 3 פעמים.

(ב) האם קיימת פונקציה רציפה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקבלת כל ערך בדיוק פעמיים?

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונק' רציפה עם  $f(0) = f(1)$ . הוכיחו כי למשוואה  $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  יש פתרון  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

(ב) יהיו  $a_1, a_2, a_3 > 0$  ו  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  מספרים כלשהן. הראו כי למשוואה הבאה יש בדיוק שני פתרונות:

$$\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3} = 0$$

7. נתונה פונקציה רציפה  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  הוכיחו כי לכל  $n$  נק':  $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$  קיימת נק'  $x \in (a, b)$  כך ש:

$$f(x) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

8. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון:

(א)  $(1-x) \cos x = \sin x$  בקטע  $(0, 1)$ .

(ב) לכל  $\alpha > 0$ , המשוואה  $\cot x = \alpha x$  בקטע  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

9. הוכיחו כי למשוואה  $|P(x)| = e^x$ , כאשר  $P(x)$  פולינום (שאינו 0), יש לפחות פתרון ממשי אחד.

10. הוכיחו כי פונקציה מחזורית ורציפה ב- $\mathbb{R}$  מקבלת מקסימום ומינימום.

## שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. הוכיחו כי אם  $f$  חסומה בסביבת נקודה  $x_0$ , וכן  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) f(x) = 0$ .

(א) על פי הגדרת הגבול לפי היינה.

(ב) על פי הגדרת הגבול לפי קושי.

2. נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(5x+1)} & x > 0 \\ \frac{2x+\alpha}{x+3} & x \leq 0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי  $\alpha$  קיים ל- $f$  גבול בנקודה  $x_0 = 0$ ?

3. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי קושי והיינה. אם הגבול אינו קיים, הוכיחו זאת.

(א)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$  אינו קיים.

(ב)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ , עבור  $a > 1$ .

4. עבור הפונקציות הבאות, הוכיחו/הפריכו את קיום הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

(א)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin |x| & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  עבור:

i.  $x_0 \in \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

ii.  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

(ב)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$  עבור:

i.  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

ii.  $x_0 \in \{-1, 1\}$

5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = 1$$

רמז: השתמשו באי שוויון ברנולי.

6. חשבו את  $f \circ g$  ואת  $g \circ f$  עבור  $f, g$  הבאות:

(א)  $f(x) = x^2, g(x) = \frac{1}{x+1}$

(ב)  $f(x) = e^x, g(x) = \frac{1}{x}$

7. נתון  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ , לכל  $x \neq -1$ . מצאו בצורה מפורשת את  $f(x)$ , לכל  $x \neq 1$ .

8. חשבו את הגבולות הבאים: