תרגיל בית 9 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות דומות. הוכיחו שגם המטריצות הבאות דומות:
   א) A^T,B^T
   ב) $p(A),p(B)$ לכל פולינום $p\in\mathbb{F}[x]$ (כאשר ההגדרה של הצבה של מטריצה C בפולינום $q(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ מוגדר להיות $q(C)=a_nC^n+\ldots+a_nC+a_0I$)
   ג) A^{-1},B^{-1} בהנחה ש־A,B הפיכות

2. תהי $D\colon\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ הנתונה על ידי $D(p)(x)=p'(x)$. נגדיר

$$J=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0&0\\0&1&\ldots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\ldots&1&0\\0&0&\ldots&0&0\end{pmatrix}$$

   א) האם קיים בסיס B של D עבורו $[D]_B^B=J$? אם כן, מצאו בסיס כזה.
   ב) האם קיימים בסיסים B,C של D עבורם $[D]_C^B=J$? אם כן, מצאו כאלה.

3. יהי V מ"ו ממימד n ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. בכל סעיף מצאו תנאי הכרחי ומספיק למה שמבקשים:
   א) מה התנאי (על T) לכך שקיים בסיס B של V עבורו $[T]_B^B=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$?
   ב) מה התנאי (על T) לכך שקיימים בסיסים B,C של V עבורם $[T]_C^B=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\\0&0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$?

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם A מתאימה ל־B. במידה וכן, מצאו מטריצות הפיכות P,Q עבורן $B=Q^{-1}AP$.
   א)

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&6&1\\4&2&0\\3&2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\7&3&0\\3&-5&2\\3&17&-5\end{pmatrix}$$

ב)

$$A=\begin{pmatrix}1&5&-2\\2&3&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&3&1\\-4&2&3\end{pmatrix}$$

5. חשבו את הדטרמיננטות הבאות מעל השדות הנתונים:

א)

$$\begin{vmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{vmatrix}$$

מעל $\mathbb{Z}_5$

ב)

$$\begin{vmatrix}1+i&2i&1-i\\1&0&3\\i&-i&1\end{vmatrix}$$

מעל $\mathbb{C}$

6. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה שכל רכיביה הם 1 או -1. הוכיחו ש־$\det A$ מתחלק ב־2^{n-1}.
רמז: על ידי פעולות דירוג, הפכו את המטריצה למטריצה שבה החל מהשורה השנייה, כל הרכיבים הם 0 או ± 2.

7. יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{pmatrix}$$

רמז: הסתכלו על המטריצה AA^T

8. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות ב־$M_n(\mathbb{R})$:

א)

$$\begin{pmatrix}1-n&1&1&\dots&1\\1&1-n&1&\dots&1\\1&1&1-n&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\dots&1-n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

ב)

$$\begin{pmatrix}1&a_1&a_2&\dots&a_n\\1&a_1+b_1&a_2&\dots&a_n\\1&a_1&a_2+b_2&\dots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&a_1&a_2&\dots&a_n\\1&a_1&a_2&\dots&a_n+b_n\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

עבור $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$

ג)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n-1\\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

(באופן מפורש: במקום ה־i,j מופיע $\min(i,j)$)