לינארית 2א 21

Shahar Perets

24 ביוני 2025

משפט 1. אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ נורמלית, אזי קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־$A^* = f(A)$
דיברנו על המשפט הזה בשבוע שעבר, אבל ההוכחה הייתה קצת עקומה אז נחזור עליה.

הוכחה. עבור A נורמלית מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן ולכן קיימת P הפיכה כך ש־$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. לכן $P^{-1}A^*P = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$. נשתמש במשפט לפיו יש פולינום $f \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־$f(x_i) = \bar{x}_i$ ובפרט בעבור $x_i = \lambda_i$ קיים פולינום עבורו $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$. אזי

$$f(\operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)) = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P = P^{-1}A^*P \implies f(A) = A^*$$

עוד נבחין ש־$\deg f = n-1$. ■

ננסה להבין מי הן $A \in M_2(\mathbb{R})$ שהן נורמליות. מעל $\mathbb{C}$ הן פשוט לכסינות. נבחין ש־:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A^* = f(A) \in \mathbb{R}_{\le 1}[x] = \alpha A + BI,\ A = \alpha A^T + \beta I = \alpha(\alpha A + \beta I) + \beta I$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a + \beta(\alpha+1) & \alpha^2 b \\ \alpha^2 c & \alpha^2 d + \beta(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = 1 \implies A = A + 2\beta I \implies \beta = 0,\ A = A^T \cancel{+\beta I} \\ (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = -1 \implies A^T = -A + \beta I \implies A + A^T = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \implies b = -c,\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ (b \vee c = 0) \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

המקרה השני – זה פשוט סיבובים, אבל בניפוח (כי הדטרמיננטה היא $a^2 - b^2$).

בכל מקרה, מסקנה מהמשפט הקודם.

משפט 2. אם $T\colon V \to V$ נורמלית, אז $\exists f \in \mathbb{R}[x]\colon f(T) = T^*$.

הוכחה. נבחר בסיס א"נ $A = [T]_B \impliedby A^* = [T^*]_B$. כבר הוכחנו שאם T נורמלית אז A נורמלית ולכן מהמשפט הקודם קיים f מתאים כך ש־$[T^*]_B = A^* = f(A) = f([T]_B) = [f(T)]_B$. סה"כ $[T^*]_B = [f(T)]_B$ ומחח"ע העברת בסיס $T^* = f(T)$ כדרוש. ■

אם $T\colon V \to V$ ט"ל, $U, W \subseteq V$ תמ"ים T־איוונריאנטי כך ש־$U \oplus W = B$. אם $\mathcal{B}$ בסיס של V, כאשר קישא של הבסיס הוא הבסיס של U אז:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T|_U]_{\mathcal{B}} & \\ & [T|_W]_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}$$

בפרט בעבור ניצבים $V = U \oplus U^\perp \implies U \subseteq V$. ניעזר בכך כדי להוכיח את המשפט הבא:

משפט 3. אם $U \subseteq V$ תמ"ו אינווי' ביחס ל־T אז $U^\perp$ הוא T^*־אינווי'.

הוכחה. יהי $w \in U^\perp$. רוצים להראות $T^*w \in U^\perp$. יהי $u \in U$ אז:

$$\langle T^*w \mid u \rangle = \langle w \mid Tu \rangle = \langle w \mid u' \rangle,\ u' \in U \implies \langle w \mid u' \rangle = 0 \quad \top$$

■

משפט 4. בעבור $T\colon V\to V$ נורמלית, אם היא U-אינוי אז גם T^* הוא U-אינוי'

הוכחה. נבחין ש-$T^*=f(T)$ כלשהו, וכן U הוא T-איוו' ולכן U הוא $f(T)$-איוו' וכאן די גמרנו את ההוכחה. ■

מסימטריות $U^\perp$ הוא T^*, מהמשפט גם $(T^*)^*$ איונ' ולכן T-אינוי'.

משפט 5. יהי V מעל $\mathbb{R}$ מ"ו וכן $T\colon V\to V$ ט"ל. אז קיים $U\subseteq V$ שהוא T-איווי' וממדו לכל היותר T.

הערה: מעל $\mathbb{C}$ "זה מטופש" כי הפולינום מתפרק (ואז המרחב העצמי יקיים את זה).

הוכחה. נפרק ל-$m_T(x)$ מינימלי ו-$g(x)$ גורם אי־פריק כך ש-$m_T(x)=g(x)h(x)$. לכל g אי פריק ב-$\mathbb{R}$ הוא לינארי הוא ממעלה 2, מהמשפט היסודי של האלגברה ומהעובדה ש-$m_T(\bar{x})=0 \implies m_T(x)=0$.

- אם g לינארי אז יש ע"ע ממשי של T מה שנותא U (שנפרש ע"י הו"ע) ממד 1.
- אם $\deg g=2$ כמובן שניתן להניח g מתוקן. ז"א $g(x)=x^2+ax+b$ אז $g(T)$ אינו הפיך (מלמת החלוקה לפולינום מינימלי) כלומר $\exists 0\neq v\in\ker g(T)$. לכן:

$$(T^2+aT+bI)v=0 \implies T^2v=-aTv-bv$$

ולכן $U=\mathrm{span}(v,Tv)$ תמ"ו עם ממד לכל היותר 2 וגם נשמר תחת T.

■

הערה: בעבור נורמלית הטענה נכונה ללא תלות במשפט היסודי של האלגברה.

לכן, בעבור נורמליות, מהמשפט הספקטרלי ומטענות קודמות, עבור $T\colon V\to V$ ממשית קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ של V שבעבורו המטריצה המייצגת של T היא מטריצת בלוקים 2×2 מצורה של $\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & b_k\\ -a_k & b_k\end{pmatrix},\ \lambda_1\cdots\lambda_m\right)$$

כאשר כמובן $2k+m=n$.

UNITARY MATRIXES .... (1)

הגדרה 1. יהי V ממ"פ. אז $T\colon V\to V$ תקרא אוניטרית (אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) או אורתוגונלית (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) אם $T^*T=I$ או במילים אחרות $T^*=T^{-1}$.

ברור שט"ל כזו היא נורמלית. **דוגמה.** עבור T_θ הסיבוב ב-θ מעלות, במישור $\mathbb{R}^2$, אז $(T_\theta)^*=T_{-\theta}=T_\theta^{-1}$. **דוגמה.** עבור T שיקוף מתקיים $T^2=I$ וכן $T^*=T$ וסה"כ $T^*=T=T^{-1}$.

משפט 6. התנאים הבאים על $T\colon V\to V$ שקולים:

- $T^*=T^{-1}$
- $\forall v,u\colon\ \langle Tv\,|\,Tu\rangle=\langle v\,|\,u\rangle$
- T מעבירה כל בסיס א"נ של V לבסיס א"נ של V
- T מעבירה בסיס א"נ אחד של V לבסיס א"נ של V (כלומר, מספיק להראות שקיים בסיס יחידה שעובר לבסיס אחר).
- $\forall v\in V\colon\ ||Tv||=||v||$

כלומר: היא משמרת זווית (העתקה פנימית) וגודל. במילים אחרות, היא משמרת העתקה פנימית.

הוכחה. נפרק לרצף גרירות

$1\to 2$ $$T^*=T^{-1}\implies \langle Tv\,|\,Tu\rangle=\langle v\,|\,T^*Tu\rangle=\langle v\,|\,u\rangle$$

$2\to 3$ נאמר ש-$(v_1\dots v_n)$ א"נ. צ.ל. $(Tv_i)_{i=1}^n$ א"נ. לשם כך נצטרך להוכיח את שני התנאים - החלק של האורתו והחלק של הנורמלי. בשביל שניהם מספיק להוכיח ש-: $\langle Tv_i\,|\,Tv_j\rangle=\langle v_i\,|\,v_j\rangle=\delta_{ij}$

$3\to 4$ טרוויאלי

$4\to 5$ יהי $(v_1\dots v_n)$ בסיס א"נ כך ש-$(Tv_1\dots Tv_n)$ א"נ. אז:

$$v=\sum_{i=0}^n\alpha_iv_i\implies ||v||^2=\left\langle\sum_{i=0}^n\alpha_iv_i\,\middle|\,\sum_{i=0}^n\alpha_iv_i\right\rangle=\sum_{i=0}^n|\alpha_i|^2$$
$$||Tv||^2=\left\langle T\left(\sum_{i=0}^n\alpha_iv_i\right)\,\middle|\,T\left(\sum_{i=0}^n\alpha_iv_i\right)\right\rangle=\left\langle\sum_{i=0}^n\alpha_iT(v_i)\,\middle|\,\sum_{i=0}^n\alpha_iT(v_i)\right\rangle=\sum|\alpha_i|^2$$

$1 \to 5$ מניחים $\forall v \in V: \ ||Tv|| = ||v||$. ידועות השקילויות הבאות:

$$T^* = T^{-1} \iff T^*T = I \iff T^*T - I = 0$$

בעבר ראינו את הטענה הבאה: נניח ש־S צמודה לעצמה וכן ש־$\forall v: \ \langle Sv \,|\, v \rangle = 0$, אז $S = 0$. במקרה הזה:

$$S := T^*T - I \implies S^* = (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = S \implies S^* = S$$

והיא אכן צמודה לעצמה. עוד נבחין ש־:

$$\langle Sv \,|\, v \rangle = \langle (T^*T - I)v \,|\, v \rangle = \langle T^*Tv \,|\, v \rangle - \langle v \,|\, v \rangle = \langle Tv \,|\, Tv \rangle - \langle v \,|\, v \rangle = ||Tv||^2 - ||v||^2 = 0$$

השוויון האחרון נכון מההנחה היחידה שלנו ש־$||Tv|| = ||v||$. סה"כ $TT^* - I = 0$. סה"כ הוכחנו $TT^* - I = 0$ שזה שקול ל־$T^* = T^{-1}$ מהשקילויות לעיל כדרוש.

■

משפט 7. תהי $T \colon V \to V$ אוני'אורתו', ו־λ ע"ע של T. אז $|\lambda| = 1$

הוכחה. יהי v ו"ע של הע"ע λ. אז:

$$|\lambda|^2 \langle v \,|\, v \rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle v \,|\, v \rangle = \langle Tv \,|\, Tv \rangle = \langle v \,|\, v \rangle$$

■

הגדרה 2. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A תיקרא אוניטרית/אורתוגונלית אם $A^* = A^{-1}$.

משפט 8. אוניטרית: $A\overline{A^T} = I$

משפט 9. אורתוגונלית: $AA^T = I$

הערה: אוניטרית בה מלשון unit – היא שומרת על הגודל, על וקטורי היחידה (ה־unit vectors).

משפט 10. יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ של V ו־$T \colon V \to V$ אז T אוניטרית/אורתוגונלית אפ"ם $A = [T]_B$ אוניטרית/אורתוגונלית.

הוכחה.

$$AA^* = [T]_{\mathcal{B}}[T^*]_{\mathcal{B}} = [TT^*]_{\mathcal{B}}, I = AA^* \iff [TT^*]_{\mathcal{B}} = I \iff TT^* = I$$

■

הנושאים האחרונים למבחן – צורה קאנונית של העתקה נורמלית מעל הממשיים, וכן העתקות אורתוגונליות ואוניטריות. ללא צורה קאנונית של העתקה אורתוגונלית. לכן ההרצאות בשיעורים הבאים לא נכנסות לחומר. תודה איראן.

הערה. איזומטריה היא העתקה שמשמרת גדלים, ואיזומטריה אורתוגונלית היא פשוט אוניטרית. משום מה זה שם שמדברים עליו בע"פ אבל לא הגדירו מסודר. ....

שחר פרץ, 2025