מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 6

ניתן ב־20.12.23. להגשה עד יום רביעי 27.12.23.

תזכורת: בהינתן קבוצה $f \in A \to B$, ותתי קבוצות $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, הגדרנו את התמונה של X תחת f:

$$f\left[X\right]=\left\{ f\left(x\right)\mid x\in X\right\}$$

והגדרנו את קבוצת המקורות של Y תחת f:

$$f^{-1}\left[Y\right]=\left\{ a\in A\,|\,f\left(a\right)\in Y\right\}$$

לדוגמה: עבור הפונקציה $h=\lambda A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right).1$, מתקיים

$$h\left(\emptyset\right)=1\ ,\quad h\left[\emptyset\right]=\emptyset\ ,\quad h\left[\left\{ \emptyset\right\} \right]=\left\{ 1\right\} \ ,\quad h^{-1}\left[\left\{ 7\right\} \right]=\emptyset\ ,\quad h^{-1}\left[\left\{ 0,1,7\right\} \right]=\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$$

1. (שאלת חימום) לכל אחת מהפונקציות הבאות, כתבו תחום וטווח אפשרי. הסבירו בקצרה.
   (א) $f_{1}=\lambda x\in\mathbb{R}.\left\{ x^{2}\right\}$
   (ב) $f_{2}=\lambda X\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right).X\cap\mathbb{N}$
   (ג) $f_{3}=\lambda f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}.f^{-1}\left[\left\{ 1\right\} \right]$
   (ד) $f_{4}=\lambda X\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right).\begin{cases} \min\left(X\right) & 4\in X\\ X & \text{else} \end{cases}$
   (ה) $f_{5}=\lambda X\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right).\left\langle X\cap\mathbb{N},X\cap\mathbb{Z},X\cap\mathbb{Q}\right\rangle$
   (ו) $f_{6}=\lambda\left\langle n,m\right\rangle \in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}.\,\lambda x\in\mathbb{R}.\,n+x\cdot m$
   (ז) $f_{7}=\lambda n\in\mathbb{N}.\,\lambda x\in\mathbb{R}.\,x+n$
   (ח) $f_{8}=\lambda X\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right).\left\{ f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\,|\,f\left[X\right]=\left\{ 0\right\} \right\}$
   (ט) $f_{9}=\lambda f\in\mathbb{R}\to\mathbb{N}.\,\lambda n\in\mathbb{N}.\,\lambda y\in\mathbb{R}.\,f\left(n+y\right)$

2. (שאלת חימום) עבור הפונקציות מהשאלה הקודמת, חשבו: (אין צורך להוכיח, אבל הראו דרך ככל האפשר)
   (א) $f_{1}\left(5\right)$
   (ב) $f_{2}\left(\left(-\infty,5\right)\right)$, $f_{2}\left(\left\{ -1,1,\pi\right\} \right)$
   (ג) $f_{3}\left(\lambda n\in\mathbb{N}.n+1\right)$, $f_{3}\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\,n\bmod2\right)$. הערה: לכל n טבעי, $n\bmod2=\begin{cases} 0 & n\text{ is even}\\ 1 & n\text{ is odd} \end{cases}$.
   (ד) $f_{4}\left(\left\{ n\in\mathbb{N}\,|\,n^{2}-2n+1\leq9\right\} \right)$, $f_{4}\left(\mathbb{N}_{\text{even}}\right)$
   (ה) $f_{5}\left(\left[-1,1\right]\right)$, $f_{5}\left(\mathbb{Z}\right)$
   (ו) $f_{6}\left(\left\langle 1,-1\right\rangle \right)\left(\frac{1}{2}\right)$
   (ז) $f_{7}\left(1\right)\left(1\right)$
   (ח) $f_{8}\left(\emptyset\right)$, $f_{8}\left(\mathbb{N}\right)$
   (ט) $f_{9}\left(\lambda x\in\mathbb{R}.\left|\left\lfloor x\right\rfloor \right|\right)\left(3\right)\left(\pi\right)$, $f_{9}\left(\lambda x\in\mathbb{R}.\,1\right)\left(a\right)\left(b\right)$. (הערה: לכל x ממשי, $\left\lfloor x\right\rfloor$ מסמן את הערך השלם התחתון של x. למשל $\left\lfloor 1.9\right\rfloor =1$).

3. כתבו את הפונקציות הבאות בכתיב למדא, וכתבו גם מהו תחומן וטווח אפשרי עבורן.
   (א) פונקציה אשר לוקחת מספר טבעי ומחזירה את הקבוצה של כל המספרים הרציונלים שקטנים ממנו.

(ב) פונקציה אשר לוקחת קבוצה של מספרים ממשיים ומחזירה את איברי הקבוצה אשר לא נמצאים בקטע $[0,1]$.

(ג) פונקציה אשר לוקחת מספר שלם x ומחזירה פונקציה מהטבעיים, קבועה עם הערך z.

(ד) הפונקציה שמקבלת פונקציה f מהטבעיים לממשיים ומוסיפה לכל ערך $f(x)$ שלה 1.

(ה) פונקציה אשר מקבלת פונקציה f מהממשיים לטבעיים ומספר טבעי n ומחזירה את כל המספרים הממשיים אשר נשלחים ע"י f למספר הטבעי n.

(ו) פונקציה אשר מקבלת שלושה מספרים טבעיים ומחזירה את הממוצע שלהם.

(ז) פונקציה אשר מקבלת קבוצה סופית לא ריקה של מספרים טבעיים ומחזירה את הממוצע שלהם.

(ח) פונקציה אשר לוקחת פונקציה מהטבעיים לטבעיים f, ומחזירה את הפונקציה g המוגדרת באופן רקורסיבי: $g(0)=f(0)$, ולכל n טבעי $g(n+1)=g(n)+f(n+1)$. (רמז: $\sum$)

4. יהיו $A,B\subseteq E$. הוכיחו: (שימו לב, בכל סעיף מדובר בשוויון פונקציות, כלומר יש לוודא שתחומן זהה, ולהוכיח שעבור כל x בתחום שלהן הן נותנות את אותו ערך)

(א) $\chi_{A\cup B}^{(E)}=\lambda y\in E.\max\left\{\chi_{A}^{(E)}(y),\chi_{B}^{(E)}(y)\right\}$

(ב) $\chi_{A\backslash B}^{(E)}=\lambda y\in E.\chi_{A}^{(E)}(y)\left(1-\chi_{B}^{(E)}(y)\right)$

(ג) $\chi_{A\triangle B}^{(E)}=\lambda y\in E.\max\left\{\chi_{A}^{(E)}(y),\chi_{B}^{(E)}(y)\right\}-\chi_{A}^{(E)}(y)\cdot\chi_{B}^{(E)}(y)$

5. תהי $f:A\to B$ פונקציה, ויהיו $Y\subseteq B$, $X\subseteq A$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $f^{-1}[f[X]]=X$.

(ב) $X\subseteq f^{-1}[f[X]]$.

(ג) $f\left[f^{-1}[Y]\right]=Y$.

(ד) $f\left[f^{-1}[Y]\right]\subseteq Y$.

(ה) הוכיחו: $A=\bigcup_{b\in Im(f)}f^{-1}[\{b\}]$.

6. עבור A,B קבוצות ו־$f\in A\to B$, נגדיר שתי פונקציות:

$$f_{\rightarrow}\in\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(B),\ f_{\rightarrow}=\lambda U\in\mathcal{P}(A).f[U]$$
$$f_{\leftarrow}\in\mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(A),\ f_{\leftarrow}=\lambda V\in\mathcal{P}(B).f^{-1}[V]$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) עבור $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f=\lambda x\in\mathbb{R}.|x|$ מתקיים $f_{\rightarrow}(f_{\leftarrow}(\{-2,0,1\}))=\{-2,0,1\}$.

(ב) עבור $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f=\lambda x\in\mathbb{R}.|x|$ מתקיים $f_{\leftarrow}(f_{\rightarrow}(\{-2,0,1\}))=\{-2,0,1\}$.

(ג) $\exists X.\exists f\in X\to X.\exists U\in\mathcal{P}(X).\forall n\in\mathbb{N}.f_{\rightarrow}^{(n+1)}(U)\subsetneq f_{\rightarrow}^{(n)}(U)$

(הערה: $f_{\rightarrow}^{(n)}$ משמעו ההרכבה ה־n של הפונקציה $f_{\rightarrow}$ עם עצמה, כמו שהוגדר בהרכבת יחסים. בנוסף, $\subsetneq$ משמעו מוכל ולא שווה).

(ד) $\exists X.\exists f\in X\to X.\exists V\in\mathcal{P}(X).\forall n\in\mathbb{N}.f_{\leftarrow}^{(n+1)}(V)\subsetneq f_{\leftarrow}^{(n)}(V)$.

7. יהיו A,B קבוצות. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$H=\lambda f\in A\to\mathcal{P}(B).\bigcup_{a\in A}(\{a\}\times f(a))$$

(א) כתבו את התחום של H וטווח אפשרי. אין צורך להוכיח.

(ב) כתבו בכתיב למדא פונקציה K כך ש־$H\circ K$ ו־$K\circ H$ הן פונקציות Id (כל אחת על הקבוצה המתאימה). אין צורך להוכיח.

(ג) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על f כך ש־$H(f)$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא A. תחילה נסחו את התנאי המילים, ואז הצרינו אותו. הוכיחו שהתנאי שרשמתם אכן הכרחי ומספיק.

8. לצורך השאלות הבאות, ניתן **הגדרה**: תהי $f : A \to B$, ותהי $X \subseteq A$. נגדיר את <u>הצמצום של f על X</u> באופן הבא:

$$f|_X \coloneqq f \cap (X \times B) = \{\langle a,b\rangle \in f \mid a \in X\}$$

הוכיחו ש־$f|_X$ היא פונקציה מ־X ל־B, ושהיא מקיימת $\forall x \in X.\ f|_X(x) = f(x)$.

9. יהיו A, B קבוצות. נסמן $X = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.

(א) כתבו בכתיב למדא פונקציה $f \in A \cup B \to X$ כלשהי.

(ב) עבור f שכתבתם, כתבו את $f|_A$ בכתיב למדא. מצאו את תמונתה והוכיחו שזו התמונה.

(ג) עבור f שכתבתם, כתבו את $f|_B$ בכתיב למדא. מצאו את תמונתה והוכיחו שזו התמונה.

10. תהי A קבוצה כלשהי. תהי X קבוצה כך שכל איבר $f \in X$ הוא פונקציה חלקית ל־A (כלומר, f יחס חד ערכי ו־$\mathrm{dom}(f) \subseteq A$).

נניח כי X היא שרשרת ביחס ההכלה, כלומר שלכל $f, g \in X$ מתקיים $f \subseteq g \vee g \subseteq f$.

נגדיר: $h = \bigcup_{g \in X} g$. הוכיחו:

(א) h היא פונקציה חלקית ל־A.

(ב) $\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{g \in X} \mathrm{dom}(g)$.

(ג) לכל $g \in X$ מתקיים $h|_{\mathrm{dom}(g)} = g$.