שאלה 3 מתוך בוחן אמצע סמסטר א' בדידה 2021

נגדיר פונקציה:

$$F=\lambda f\in\mathbb{N}\to P(\mathbb{Z}).\lambda z\in\mathbb{Z}.\{n\in\mathbb{N}|\, z\in f(n)\}$$

א. מצאו תחום וטווח עבור הפונקציה (אין צורך להוכיח). (7 נק')

ב. חשבו את הביטויים הבאים (אין צורך להוכיח):

$F(\lambda n\in\mathbb{N}.\{n \bmod 2\})(1)$ $\qquad$ $F(\lambda n\in\mathbb{N}.\{-n,n\})(-4)$ $\qquad$ (8 נק')

ג. קבעו האם F חח"ע? האם F על? הוכיחו תשובתכם. (20 נק')

פתרונות:

א.

$$dom\,(F)=\mathbb{N}\to P\,(\mathbb{Z})$$
$$Range\,(F)=\mathbb{Z}\to P\,(\mathbb{N})$$

ב.

$$F\,(\lambda n\in\mathbb{N}.\,\{-n,n\})\,(-4)=\{n\in\mathbb{N}:-4\in\{-n,n\}\}=\{4\}$$
$$F\,(\lambda n\in\mathbb{N}.\,\{n \mod 2\})\,(1)=\{n\in\mathbb{N}:1\in\{n \mod 2\}\}=\mathbb{N}_{\text{odd}}$$

ג.

<u>**נוכיח ש־F חח"ע:**</u> יהיו $f_1,f_2\in\mathbb{N}\to P\,(\mathbb{Z})$ כך ש־$f_1\neq f_2$ (שני איברים שונים בתחום של F). צריך להוכיח ש־ $F\,(f_1)\neq F\,(f_2)$.
מאחר ש־$F\,(f_1)\,,F\,(f_2)$ הן פונקציות בעלות אותו תחום $\mathbb{Z}$, כדי להוכיח שהן שונות צריך להוכיח שקיים $z\in\mathbb{Z}$ כך ש־ $F\,(f_1)\,(z)\neq F\,(f_2)\,(z)$. נשים לב שלכל $f\in\mathbb{N}\to P\,(\mathbb{Z})$, הפונקציה F פועלת כך:

$$F\,(f):\mathbb{Z}\to P\,(\mathbb{N})$$
$$\forall z\in\mathbb{Z}\;F\,(f)\,(z)=\{n\in\mathbb{N}:z\in f\,(n)\}$$

ולכן כדי להוכיח ש־$F\,(f_1)\,(z)\neq F\,(f_2)\,(z)$, צריך להוכיח $\{n\in\mathbb{N}:z\in f_1\,(n)\}\neq\{n\in\mathbb{N}:z\in f_2\,(n)\}$.
מההנחה, ידוע ש־f_1,f_2 הן פונקציות <u>שונות</u> בעלות אותו תחום $\mathbb{N}$, אז קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש־$f_1\,(n_0)\,,f_2\,(n_0)$ הם שונים. מאחר ש־$f_1\,(n_0)\,,f_2\,(n_0)$ הם קבוצות (שייכים ל־$P\,(\mathbb{Z})$), המשמעות היא שקיים באחת מהן איבר שלא קיים בקבוצה השנייה. בלי הגבלת הכלליות, נוכל לסמן $z_1\in f_1\,(n_0)\;,\;z_1\notin f_2\,(n_0)$.
אז מתקיים

$$n_0\in\{n\in\mathbb{N}:z_1\in f_1\,(n)\}=F\,(f_1)\,(z_1)$$
$$n_0\notin\{n\in\mathbb{N}:z_1\in f_2\,(n)\}=F\,(f_2)\,(z_1)$$

כלומר מצאנו שקיים איבר בקבוצה $F\,(f_1)\,(z_1)$ שלא שייך לקבוצה $F\,(f_2)\,(z_1)$ ולכן $F\,(f_1)\,(z_1)\neq F\,(f_2)\,(z_1)$, וסך הכל נקבל $F\,(f_1)\neq F\,(f_2)$ כרצוי.

<u>**נוכיח ש־F על:**</u> נראה שלכל $g\in\mathbb{Z}\to P\,(\mathbb{N})$ (איבר בטווח של F) קיים $f\in\mathbb{N}\to P\,(\mathbb{Z})$ (איבר בתחום של F) כך ש־$F\,(f)=g$.
תהי $g:\mathbb{Z}\to P\,(\mathbb{N})$. אז לכל $z\in\mathbb{Z}$ מתקיים $g\,(z)\in P\,(\mathbb{N})$, כלומר $g\,(z)$ תת קבוצה של טבעיים.
<u>נרצה לחפש</u> $f\in\mathbb{N}\to P\,(\mathbb{Z})$ כך שיתקיים $F\,(f)=g$, כלומר שיתקיים $\lambda z\in\mathbb{Z}.\,\{n\in\mathbb{N}|z\in f\,(n)\}=g$, כלומר ש־

$$\forall z\in\mathbb{Z}.\;\;\{n\in\mathbb{N}|z\in f\,(n)\}=g\,(z)$$

נשים לב כי $g\,(z)\subseteq\mathbb{N}$ ולכן ניתן לרשום אותה כך: $g\,(z)=\{n\in\mathbb{N}|n\in g\,(z)\}$. אז במילים אחרות, צריך שיתקיים:

$$\forall z\in\mathbb{Z}.\;\;\{n\in\mathbb{N}|z\in f\,(n)\}=\{n\in\mathbb{N}|n\in g\,(z)\}$$

כלומר, לכל $z\in\mathbb{Z}$ נרצה שיתקיים: $z\in f\,(n)$ אם ורק אם $n\in g\,(z)$.

לכן נגדיר את f באופן הבא:

$$f=\lambda n\in\mathbb{N}.\{z\in\mathbb{Z}|n\in g(z)\}$$

אז f היא אכן פונקציה ב־$\mathbb{N}\to P(\mathbb{Z})$, ומתקיים

$$\begin{aligned}F(f)&=\lambda z\in\mathbb{Z}.\{n\in\mathbb{N}:z\in f(n)\}\\&=\lambda z\in\mathbb{Z}.\{n\in\mathbb{N}:z\in\{z'\in\mathbb{Z}:n\in g(z')\}\}\\&=\lambda z\in\mathbb{Z}.\{n\in\mathbb{N}:n\in g(z)\}\\&=\lambda z\in\mathbb{Z}.g(z)\cap\mathbb{N}\\&=\lambda z\in\mathbb{Z}.g(z)\\&=g\end{aligned}$$

וסיימנו.

שאלה 3 מתוך בוחן אמצע סמסטר א' בדידה 2020

נגדיר פונקציה:

$$F=\lambda X\in P(\mathbb{R}).\lambda f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}.f\left[f^{-1}[X]\right]$$

א. מצאו תחום וטווח עבור הפונקציה. (7 נק')

ב. מצאו אם אפשר שני איברים שונים בקבוצות הבאות:

$$F(\mathbb{R})(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1)\ ,\quad F(\{0,1\})(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1)$$

במידה ולא ניתן למצוא כאלו, הוכיחו זאת. במידה ויש, רשמו באופן פורמלי. (13 נק')

ג. קבעו האם F חח"ע? האם F על? הוכיחו תשובתכם. (15 נק')

פתרונות:

א.

$$\begin{aligned}dom(F)&=P(\mathbb{R})\\Range(F)&=(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})\end{aligned}$$

ב. ביטוי ראשון: מתקיים

$$F(\mathbb{R})\left(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1\right)=Im\left(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1\right)=[1,\infty)$$

כאשר $[1,\infty)$ זו הקבוצה $\{x\in\mathbb{R}:x\geq1\}$. דוגמה לשני איברים שונים בקבוצה: $1,2$.

ביטוי שני:

$$F(\{0,1\})\left(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1\right)$$

לא ניתן למצוא שני איברים שונים בקבוצה. נוכיח זאת:
נסמן $f=\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1$. הקבוצה הנתונה היא:

$$F(\{0,1\})\left(\lambda x\in\mathbb{R}.x^2+1\right)=f\left[f^{-1}[\{0,1\}]\right]$$

נחשב את $f^{-1}[\{0,1\}]$. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x^2\geq0$, ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)\geq1$. בפרט, ל־0 אין מקור בפונקציה f.
נחפש מקור ל־1:

$$f(x)=1\iff x^2+1=1\iff x^2=0\iff x=0$$

לכן 0 הוא מקור יחיד ל־1, וסה"כ $f^{-1}\left[\{0,1\}\right]=\{0\}$.
לכן:

$$f\left[f^{-1}\left[\{0,1\}\right]\right]=f\left[\{0\}\right]=\{f\left(0\right)\}=\{1\}$$

כלומר קיים איבר יחיד בקבוצה הנתונה.

ג.
<u>F חח"ע:</u> יהיו $X_1,X_2\in P\left(\mathbb{R}\right)$ שונות, נוכיח $F\left(X_1\right)\neq F\left(X_2\right)$.
מכך ש־$X_1\neq X_2$, נובע שקיים איבר באחת מהן שלא קיים בשנייה. בלי הגבלת הכלליות נניח $r\in X_1,\ r\notin X_2$.
$F\left(X_1\right),F\left(X_2\right)$ הן פונקציות $\left(\mathbb{R}\to\mathbb{R}\right)\to P\left(\mathbb{R}\right)$, לכן כדי להוכיח ש־$F\left(X_1\right)\neq F\left(X_2\right)$ נצטרך למצוא $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$F\left(X_1\right)\left(f\right)\neq F\left(X_2\right)\left(f\right)$ (אי שוויון בין קבוצות).
נגדיר פונקציה $f_0\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f_0=\lambda x\in\mathbb{R}.\,r$$

כלומר f_0 היא פונקציה קבועה שמחזירה תמיד r, ולכן $f_0^{-1}\left[X_1\right]=\mathbb{R}$ כי $r\in X_1$, ו־ $f_0^{-1}\left[X_2\right]=\emptyset$ כי $r\notin X_2$.
אז:

$$F\left(X_1\right)\left(f_0\right)=f_0\left[f_0^{-1}\left[X_1\right]\right]=f_0\left[\mathbb{R}\right]=\{r\}$$
$$F\left(X_2\right)\left(f_0\right)=f_0\left[f_0^{-1}\left[X_2\right]\right]=f_0\left[\emptyset\right]=\emptyset$$

כלומר, קיבלנו $F\left(X_1\right)\left(f_0\right)\neq F\left(X_2\right)\left(f_0\right)$ ולכן גם $F\left(X_1\right)\neq F\left(X_2\right)$ כרצוי.

<u>F לא על:</u> נראה שקיים $g\in\left(\mathbb{R}\to\mathbb{R}\right)\to P\left(\mathbb{R}\right)$ (כלומר איבר בטווח של F) כך שלא קיים $X\in P\left(\mathbb{R}\right)$ עבורו מתקיים $F\left(X\right)=g$.
נגדיר:

$$g=\lambda f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\,\mathbb{R}$$

כלומר g היא פונקציה קבועה שמחזירה תמיד את הקבוצה $\mathbb{R}$.
נניח בשלילה שקיים $X_0\in P\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש־$F\left(X_0\right)=g$. אז לכל $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים $F\left(X_0\right)\left(f\right)=g\left(f\right)$, כלומר (לפי הגדרת F ולפי הגדרת g):

$$f\left[f^{-1}\left[X_0\right]\right]=\mathbb{R}$$

בפרט, זה אומר ש־f חייבת להיות על (כי נובע שהתמונה של f חייבת להיות $\mathbb{R}$), והרי שזה לא נכון לכל $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כללית.
לדוגמה: נבחר $f_0=\lambda x\in\mathbb{R}.\,0$ (הפונקציה הקבועה 0). אז $Im\left(f_0\right)=\{0\}$, ובפרט לא ייתכן

$$f_0\left[f_0^{-1}\left[X_0\right]\right]=\mathbb{R}$$

כי $f_0\left[f_0^{-1}\left[X_0\right]\right]\subseteq Im\left(f_0\right)=\{0\}$.
סה"כ הוכחנו ש־F אינה על.