מתמטיקה בדידה - תרגיל בית ח - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך הגשה:	ניתן בתאריך:
תחפשו בקומיטים הקודמים	שחר פרץ	12.2.2024	3.2.2024

פרויקט ~ תיקון 1

השאלה

תהי פונקציה $f\colon A \to B$ ויהי $X \subseteq A$, נגדיר את הצמצום של f ל־X בתור פונקציה $f|_X\colon X \to B$ המקיימת $\forall x \in X. f|_X(x) = f(x)$. כחלק מתרגיל בית 6, נתנו גם ההגדרות השקולות הבאות:

$$f|_X := f \cap (X \times B) = \{\langle a, b\rangle \in f \mid a \in X\}$$

יהיו $A, B, C \neq \emptyset$ קבוצות, נגדיר"

$$H\colon ((B \cup C) \to A) \to ((B \to A) \times (C \to A))$$
$$H = \lambda h \in (B \cup C) \to A. \langle h|_B, h|_C\rangle$$

צ.ל. תנאי הכרחי ומספיק על A, B, C לכך ש־H על $(B \to A) \times (C \to A)$

הוכחה (שינויים מסומנים בצהוב)

נוכיח ש־$(B \cap C = \emptyset \lor |A| = 1)$ שקול לכך ש־H על. נוכיח שתי גרירות.

- נניח $B \cap C = \emptyset \lor |A| = 1$. נוכיח H על, כלומר, יהי $\langle f_1, f_2\rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$, נוכיח קיום $h \in ((B \cup C) \to A)$ כך ש־$H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$. נפלג למקרים.
  - נניח $B \cap C = \emptyset$: נבחר $h = f_1 \cup f_2$. נוכיח ש־h פונ', המקיימת $H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$:
    - h פונ': נוכיח מליאות וחד ערכיות;
      - מליאות ב־$B \cup C$: יהי $x \in B \cup C$, נוכיח קיום $y \in A$ כך ש־$\langle x, y\rangle \in h$. נפצל למקרים: אם $x \in B$, נבחר $y = f_1(x) \in B$. לכן, $\langle x, f_1(x)\rangle \in f_1 \cup f_2$, ואם $x \in C$ באופן דומה נבחר $y = f_2(x)$.
      - חד־ערכיות: יהי $x \in B \cup C$, ויהי y_1, y_2 כך ש־$\langle x, y_1\rangle \in h \land \langle x, y_2\rangle \in h$. נוכיח $y_1 = y_2$. נניח בשלילה שלא כן. נפצל למקרים:
        - אם $x \in B \setminus C$, אז $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \notin f_2$ ולכן הם ב־f_1, ומשום ש־f_1 ח"ע אז $y_1 = y_2$.
        - אם $x \in C \setminus B$, אז $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \notin f_1$ ולכן הם ב־f_2, ומשום ש־f_2 ח"ע אז $y_1 = y_2$.

- אם $x \in C \cap B$ אז $x \in \emptyset$ והטענה נכונה באופן ריק.

- h מקיימת $H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$: לפי תחשיב למדא, צ.ל.:

$$\langle (f_1 \cup f_2)|_B, (f_1 \cup f_2)|_C \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle$$

ובהתחשב בזה שהתחומים של f_1 ו־f_2 הם A, B בהתאמה שהן קבוצות זרות, ובהתאם להגדרה השקולה של הצמצום המופיע לעיל, זהו פסוק אמת.

- נניח $|A| = 1$, יהי $a \in A$, נסיק $A = \{a\}$. ידוע $f_1 \colon B \to A$, וידוע $f_2 \colon C \to A$. נבחר $h = \lambda x \in B \cup C.a$, לפי הגדרה, $h \colon (B \cup C) \to A$, ונשאר להוכיח $h|_B = f_1 \wedge h|_C = f_2$. משום ש־$|A| = 1$, אזי f_1 הפונקציה הקבועה ב־a, ולפי הגדרת הפונקציה הקבועה שניתנה בשיעור $h|_B = \lambda x \in B.a$. מעתה ואילך, נוכיח $h|_B = f_1$; ומשום שאין שום הגבלה שונה על B או C, סה"כ באופן דומה עתיד להתקיים $h|_C = f_2$ גם כן. נוכיח באמצעות כלל η:
  - שוויון תחום: $\mathrm{dom}(h|_B) = (B \cup C) \cap B = B = \mathrm{dom}(f_1)$.
  - שוויון איברים: יהי $b \in B = \mathrm{dom}(f_1)$, לכן ישירות $h|_B(b) = f_1(b)$ כדרוש.

  וסה"כ גם במקרה הזה H על.

לכן, $|A| = 1 \vee B \cap C = \emptyset$ תנאי מספיק להיות H על; $\mathscr{Q.E.F.}$

- נניח H על, נוכיח $|A| = 1 \vee B \cap C = \emptyset$. נניח בשלילה את הטענה ההפוכה; ש־$B \cap C \neq \emptyset$ וגם $|A| \neq 1$. ידוע $A, B, C \neq \emptyset$, ולכן $|A| \geq 2$ (ויהי $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$) וגם ישנו לפחות איבר יחיד ב־$B \cap C$ (ויהי $x \in B \cap C$). כדי להראות דוגמה נגדית להנחת השלילה, נתבונן בנתון על היות H על, ונסיק שלכל $\langle f_1, f_2 \rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$ מתקיים קיום $h \in (B \cup C) \to A$ עבורו $H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$, ובפרט עבור $f_1 = \{\langle x, a_1 \rangle\}, f_2 = \{\langle x, a_2 \rangle\}$ זאת מתקיים קיום h כזה. בגלל ש־$H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$, אזי $h|_B = f_1 \wedge h|_C = f_2$. מן הנתון $f_1 = \{\langle x, a_1 \}\rangle, f_2 = \{\langle x, a_2 \rangle\}$ ומשוויון בין פונקציות, נסיק $\langle x, a_1 \rangle \in h|_B \wedge \langle x, a_2 \rangle \in h|_C$, ולכן $\langle x, a_1 \rangle \in h \wedge \langle x, a_2 \rangle \in h \wedge a_1 \neq a_2$, ולכן לפי הגדרה h אינה ח"ע ובפרט h אינה פונקציה, שהינה סתירה להנחה h פונקציה. סה"כ $|A| = 1 \vee B \cap C = \emptyset$ תנאי הכרחי להיות H על; $\mathscr{Q.E.F.}$

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■