

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 8

ניתן בתאריך 3.1.2024. להגשה עד יום רביעי 10.1.2024.

1. תזכורת: בהינתן יחס R , הגדרנו את היחס ההופכי ל- R ע"י $R^{-1} := \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$.
תהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה. בסעיפים הבאים, f^{-1} הוא היחס ההופכי ל- f .

(א) הוכיחו: f חח"ע אמ"מ f^{-1} יחס חד ערכי.

(ב) הוכיחו: f על אמ"מ f^{-1} יחס מלא ב- B .

(ג) בעזרת הסעיפים הקודמים, הסיקו: f^{-1} פונקציה אמ"מ f חח"ע ועל.

2. יהיו $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ שתי פונקציות. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם f, g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.

(ב) אם f, g על אז $g \circ f$ על.

3. בכל סעיף, קבעו האם הפונקציה היא חח"ע והאם היא על והוכיחו את תשובתכם.

(א) $f : P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$, $f = \lambda A \in P(\mathbb{R}), B \in P(\mathbb{R}). A \cup B$

(ב) $g : P(\mathbb{R}) \rightarrow (P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R}))$, $g = \lambda A \in P(\mathbb{R}). \lambda B \in P(\mathbb{R}). A \cup B$

(ג) $F : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$, $F = \lambda g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \lambda n \in \mathbb{N}. \max \{g(i) \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$

(ד) $G : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $G = \lambda g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}. \max \{g(i) \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$

(ה) $F : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $F = \lambda g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^n g(i)$

(ו) $G : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$, $G = \lambda g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^n g(i)$

4. נגדיר פונקציה $H \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ באופן הבא:

$$H = \lambda f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \text{Im}(f) \triangle \text{Im}(g)$$

(א) האם H חח"ע? הוכיחו תשובתכם.

(ב) הוכיחו ש- H^{-1} על.

תזכורת: בכיתה הוכחנו טענת עזר עבור השאלה, תוכלו להשתמש בה: לכל $A \in P(\mathbb{N})$ קיימות קבוצות $B, C \subseteq \mathbb{N}$ כך ש- $B \triangle C = A$.

5. יהיו A, B, C קבוצות לא ריקות. נתבונן בפונקציית Curry עבור קבוצות אלו, המוגדרת ע"י:

$$Cu : ((A \times B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$Cu = \lambda f \in (A \times B) \rightarrow C. \lambda a \in A. \lambda b \in B. f(\langle a, b \rangle)$$

הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל $f \in (A \times B) \rightarrow C$, אם f חח"ע אז $Cu(f)$ חח"ע.

(ב) לכל $f \in (A \times B) \rightarrow C$, אם f על אז $Cu(f)$ על.