

# חדו"א 1 ו' 5

שחר פרץ

23 בנובמבר 2025

## טורים

כל סדרה ניתנת לייצוג כטור. זו דרך אחרת להציג סדרות. הגדרה 1. תהא  $a_n$  סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של  $a_n$  להיות:

$$\forall n \in \mathbb{N}: S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הבחנה: כל סדרה היא סדרת סכומים חלקיים של איזושהי סדרה.

הוכחה. תהא  $a_n$  סדרה, נגדיר את:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_{n+1} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

נקבל שהסכום הטלסקופי:

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_n$$

از מעשה אין שום דבר חשוב בסכום עצמו. מה שחשיבות זה הקשר בין הסדרה עצמה לבין סדרת הסכומים החלקיים שלה. סימן 1. תהא  $a_n$  סדרה. תהי ב-  $S_n$  את סדרת הסכומים החלקיים של  $a_n$ . אז אם  $S_n$  מתכנסת לגבול  $\ell \in \mathbb{R}$  נאמר כי הטור מתכנס, ונסמן:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

הבחנה חשובה: הסימן הזה של  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  משמש אותנו להגיד שהטור לא מתכנס, כלומר נאמר "לא מתכנס" גם אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  לא קיים. זאת ביגוד לגבולות, שם אנחנו לא ממש יכולים לכתוב " $\lim_{n \rightarrow \infty}$  לא קיים" (שכן  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  לא ביטוי מוגדר).

• דוגמה: יהיו  $\ell \in \mathbb{R}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}$  נסמן ב-  $S_n$  את סדרת הסכומים החלקיים. אז:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+: S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

לכן הטור מתכנס אם ו רק אם  $|q| < 1$  (הוכחנו את זה בתרגיל הבית) ואז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{q-1}$$

• דוגמה 2: נגדיר  $a_n := \frac{1}{n(n+1)}$  ונסמן ב-  $S_n$  את סדרת הסכומים החלקיים המתאימה לא- $a_n$ . נבחן שסכום משותף:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ואז (סכום טלסקופי):

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{לכל } k \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

$$\text{מכאן אפשר להוכיח ש- } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ מתכנס (עשינו את זה גם בתרגול).}$$

אלו לפחות או יותר הדוגמאות היחידות (גיאומטרי וטילסקופי) שנראה בקורס הזה לגבי משחו שאשכלה מתכנס. בד"כ נרצה לדעת האם טור מסוימים הוא מתכנס או לא. כשייהו לנו אינטגרלים (בחדו"א 2) יהיה לנו קצת יותר כוח להוכיח טורים. אבל כמו הרבה דברים בחדו"א, גם זה לא תמיד יספיק.

### קריטריון קושי להתכנסות טורים

תהא  $a_n$  סדרה. אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם"מ:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \forall N \leq n \leq m: \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

$$|S_n - S_{m+1}|$$

זה לא מעניין בכלל. זה פשוט קריטריון קושי לסדרות, אבל על סדרת הסוכמים החלקיים.

**מסקנה 1.** תהא  $a_n$  סדרה. אז אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$  מתקנס, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**הערה 1.** הצד השני לא מתקיים, לדוגמה עבור  $a_n = \frac{1}{n}$  מתקיים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n \rightarrow \infty$  למרות ש-  $0 \rightarrow n^{-1}$ . בדומה לגבולות של סדרות, שינוי של מספר סופי של איברים (בסדרה המקורי) אולי ישנה את הגבול (כי סוכמים כאלה), אבל לא עומדת לשנות את התכנסות.

**משפט 1.** הטור הוא לינארי, כלומר  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ . אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים.

זה נובע ישירות מריתמטיקה של גבולות, על סדרת הסוכמים החלקיים.

### התכנסות בהחלה

כאן יש שאכלה הגדירה חדשה.

**הגדרה 2.** תהא  $a_n$  סדרה. נאמר כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס כהחלט כאשר  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  מתכנס.

**משפט 2.** אם טור מתכנס בהחלה, אז הוא בפרט מתכנס.

אין לנו שום דבר חכם להגיד על הקשר בין הגבולות של שניים. עם ננסת להוכיח עם סנדוויץ' (תנשו), נכשל במהרה. יש כאן צורך בקסם, שיפלו לנו גבול מהשניים, וזה בדיקת מה שקשירות השלומות מספקת לנו. ספציפית, השתמש בקריטריון קושי שתלי בפה.

הוכחה. תהא  $a_n$  סדרה, ונניח ש-  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס בהחלה. מקריטריון קושי, קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך ש-:

$$\forall n \geq m \geq N: \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

נתבונן ב-  $N$ . יהיו  $n \geq m \geq N$ . מא"ש המשולש המוכלל:

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

סה"כ מקריטריון קושי לטורים גם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.



### טורים א"ש-ילידיים

יש פרק שלם בטורים שעוסק בטורים שומרי סימן (איברים גדולים ממש מואפס או קטנים ממש מואפס. לצורך הנוחות מתעסק במקרה הראשון). יש להו שתי סיבות:

- בغالל הנושא של התכנסות בהחלה.
- זה מקרה נפוץ שקורה הרבה בעולם האמתי.
- יש משפטיים מועילים על זה.

בהרבה מהמקרים נדרש א"ש-ילידיות בכל  $N$  גם אם זה נכון רק החל מ-  $N$  ממשיים.

"אפס הוא חיובי יחסית"

**משפט 3.** תהא  $a_n$  סדרה, ונניח ש- $0 \in \mathbb{N}$ :  $a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . אז אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה. זה דורש את אקסימות השלומות) אין כאן אשבירה הוכחה. אם  $0 \geq a_n$  אז סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה, ומשפט (ויראשטראס 1) כל הסיפור הזה מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

נתעסק קצת בקריטריוני השווהה.

1. תהינה  $a_n, b_n$  סדרות אי-שליליות. נניח כי  $a_n \leq b_n$ , לא צריך לכל  $\mathbb{N}$ , מספיק כמעט תמיד. ההוכחה קצת שונה אבל כמעט תמיד יותר חזק). אז אם  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מותכנס אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מותכנס.

הוכחה. נניח ש- $b_n$  מותכנס ל- $\ell$ . ידוע  $b_n$  מונוטונית וכך מוכנסת לספרום שלה, ונסיק:

$$\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k \leq \ell$$

לכן  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מונוטונית עולה וחסומה ולכן מותכנסת (יש כאן שימוש באקסימות השלומות).

2. נניח  $0 > b_n > \forall n \in \mathbb{N}$ : ( $b_n$  חיובית ממש!) ונניח  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \ell$ . כמו כן  $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מותכנס. הוכחה. נוכחים רק כיון אחד, והכיון שהשני יגרר מאריתמטיקה של גבולות (נهاוף את  $\frac{a_n}{b_n}$  וזה חוקי כי  $a_n$  ממוקם מסוים לא נוגע ב-0 כי  $0 \neq \ell$ ). קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים:

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2\ell}$$

(הריאנו שזה נכון באופן כללי לפחות שגדל מ- $\ell$  + התנו אי-שליליות). לעומת כן  $a_n < \frac{3\ell}{2\ell} b_n$ , כלומר  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ell}{2} b_n$  מותכנס.

3. **מבחן השורש:** תהא  $a_n$  סדרה אי-שלילית. נניח כי קיים  $q \in (0, 1)$  כך  $\sqrt[q]{a_n} \leq q$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מותכנס.

הוכחה. לכל  $\mathbb{N} \in n$  נבחן ש- $a_n \leq q^n$ , ומבחן השווהה עם הטור הגיאומטרי (שמותכנס) סיימנו.

4. **מבחן השורש הגבולי:** תהא  $a_n$  סדרה אי-שלילית. נניח ש- $\sqrt[q]{a_n} < q \in [0, 1]$ :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{a_n} < q$  אז מותכנס.

**הערה 2.** זה משפט קצת יותר חזק מהקודם.

**הערה 3.** שני מבחני השורש כיוון אחר – אם  $1 < q$  אז הטור מתבדר.

הוכחה. ידוע  $1 < q < 1$  אז  $\sqrt[q]{a_n} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{a_n} + \frac{1-q}{2}$  כמעט תמיד. לכן  $\sqrt[q]{a_n} < \frac{1+q}{2}$  כמעט תמיד. אז  $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  כמעט תמיד, כלומר  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$  מותכנס.

5. **מבחן המנה:** נניח  $0 > a_n$  (כמעט תמיד) וכי  $q \in (0, 1)$ , ונניח  $q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (כמעט תמיד) אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מותכנס.

הוכחה. השורה התחתונה של ההוכחה היא:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq q^n \cdot a_1$$

ואז מבחן השווהה.

6. **מבחן המנה הגבולי:** יהיו  $0 < m < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell < 1$ . נסמן  $a_n > 0$  אז אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מותכנס, ואם  $1 > m > \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  אז מבחן המנה לא מתקיים.

הוכחה. לבית.

**דוגמה:** האם הטור  $a_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$  מותכנס? נסמן ב- $\ell$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} n!}{n^{\frac{n}{2}} (n+1)!} = \frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}} \rightarrow \sqrt{e \cdot 0} = 0$$

לכן  $1 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ . ממשפט המנה הגבולי נקבל שהוא מותכנס.

## קירוב סטרליינג

קירוב סטרליינג אומר ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{e\pi n}} = 1$$

איןטואיטיבית, זה אומר ש- $n$  עצרת בגבול מתנהג כמו החזקה  $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ . לא נוכחים אותו – המריצה לא מודעת אף להוכחה שמשתמשת בכלים שלמדנו.

עתה נפטרור את התתרגיל ממקודם, של  $b_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}}$ , באמצעות קירוב סטירלינג ובחן השורש הגבולי. נגידר: נקבל:

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{e} \cdot \underbrace{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}_1} \rightarrow 0$$

כמו כן לפי סטרליינג:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{n/2}}{n!}}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

לכן לפי משפט ההשוואה הגבולי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!}$  מתכנס.

למעשה יש עודבחן לטורים איז-שליליים שלא הזכרנו.

9. תהא  $a_n$  סדרה מונוטונית יורדת ואיז-שלילית אז  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנסת אם'  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  מתכנסת. הוכחה.  $\Rightarrow$  נניח שהטור מתכנס. יהי  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=1}^n 2^k a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{2^k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{2^k-1} a_{2^{k-1}+\ell} = 2 \sum_{k=2}^{2^n} a_k \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

וכזה מהבחן הראשון סיימנו שוב.

$\Leftarrow$  נניח ש-  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n}$  מתכנס. נוכיח ש-

$$\sum_{k=1}^n \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} a_{2^k+\ell} \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}$$

כאן, נחליף באיבר הראשון.



אז למה אנחנו צריכים את הבן העיבוי?

• עבור  $1 \leq \alpha$  הראינו ש-  $\sum \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$  ולכן  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  מותבדר.

• עבור  $2 \geq \alpha$  הראינו ש-  $\sum \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$  ולכן  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  מתכנס.

מה לגבי כל מה שבין 1 ל-2?

**משפט 4.** הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  מתכנס אם'  $\alpha > 1$ .

הוכחה. יהי  $0 < \alpha$ . אז  $\frac{1}{n^\alpha}$  מונוטונית יורדת וחובייה. נסמן  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ . אז:

$$b_n = 2^n a_{2n} = \frac{2^n}{n^{\alpha n}} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})^n$$

נבחן ש-  $b_n$  גיאומטרי. הוא מתכנס אם'  $1 - \alpha > 0$ . עוד ידוע ש-  $b_n$  מותכנס אם'  $a_n$  מותכנס מבן העיבוי, ושה"כ מותכנס אם'  $\alpha > 1$ .



נעשה עוד תרגיל, אולי קצת פחות מעיל.

**תרגיל 1.** האם  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  מותכנס? (בסיס הלוגוריית לא משנה)

הוכחה. נגידר  $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ . ניעזר בבחן העיבוי:

$$2^n a_{2n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = (n \ln 2)^{-1} \rightarrow \inf$$

לכן גם  $\sum 2^n a_{2n}$  מותבדר שכן  $a_n$  מותבדר.



**טורים מנוי סימן**

כל מה שאמרנו על שומר סימן נכון על מי שומר סימן כמעט תמיד. ככלומר אלו שלא נופלים לקטגוריה זו, הטורים מנוי הסימן, מחליפים סימן באופן שכיח. הטורים הראשונים שנדבר עליהם הם כאלה שלא רק משנים סימן באופן שכיח, אלא ממש כל מעבר.

**משפט 5 (משפט ליבניץ).** תהא  $a_n$  סדרה חיובית ומונוטונית יורדת שגבולה 0. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

מתכנס.

התובנה החשובה בהוכחה היא שאפשר לדעת את המרחק מהגבול, בכל נקודה בסכום, גם אם קשה לחשב אותו. "אבל המבחןים לא עובדים לי. [תשובה: אויויו]."

אנחנו לא יודעים מה הגבול, אנחנו לא רוצים לדעת מה הגבול, המבחןים עובדים רק לדברים משמרי סימן... נשארנו עם כושי. הוכחה. יהי  $\varepsilon > 0$ . קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n \geq N$  מתקיים  $\varepsilon < |a_n|$ . נתבונן ב- $N$ . יהיו  $n \geq m \geq N$ . השטיק יהיה שהזוגות  $(a_k - a_{k-1}) < 0$ :

• אם  $m - n$  זוגי נקבל:

$$\begin{aligned} & a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\ & = a_m + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+3}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) < a_m < \varepsilon \end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} & a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\ & = (a_m - a_{m+1}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_1 \geq a_n > 0 > -\varepsilon \end{aligned}$$

לכן:

$$\left| \sum_{k=m}^n (-1)^k a_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} a_k \right| < \varepsilon$$

• אם  $m - n$  אי-זוגי נקבל הוכחה דומה.



מההוכחה, ניתן להסיק:

$$\ell := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \implies \forall n \in \mathbb{N}: \left| \ell - \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

מכאן, ש-  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  מתכנס, ולא בהחלט. על טור זהה, אומרם שהוא מתכנס בתנאי.

למאלנו, לאור הcin מעננו עוד קритריונים מרתקים לשיעור, והם הכללה של קритריון דיריכלה והשני אבל.

### קריטריון דיריכלה

תהאנה  $a_n, b_n$  סדרות. נניח כי:

1.  $b_n$  מונוטונית ( יורדת ) וגבול 0.

2. סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל-  $a_n$  חסומה ( אבל לא בהכרח מתכנסה ).

או  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

לבית – יש להוכיח שקריטריון אבל נובע מקריטריון דיריכלה.

### 0.0.1 קритריון דיריכלה

תהאנה  $a_n, b_n$  סדרות. נניח כי:

1.  $b_n$  מונוטונית ( יורדת ) ( אבל לא בהכרח גבול 0 ).

2. או  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  חסומה.

או  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  מתכנס.

הוכחה. לכל  $n \in \mathbb{N}$  נסמן  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$  שואפת ל-0 אז  $\exists M > 0. \forall n \in \mathbb{N}: |A_n| \leq M$  כי היא חסומה. בגלל ש-  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$   $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: |b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^k a_k b_k &= \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} - A_{m-1} b_m = \sum_{k=m}^{n-1} (A_k(b_k - b_{k+1})) + A_n b_n - A_{m-1} b_m \end{aligned}$$

לכן (ניעזר בהזה ש-  $b_n$  מונוטונית יורדת):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| &\leq \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \right| + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \leq \sum_{k=m}^n (|A_k| (b_k - b_{k+1})) + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \\ &\leq M(b_m - b_{n+1}) + Mb_n + Mb_m < 2 \cdot M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

לסכום זהה קוראים סכום אבל. אולי קוראים לזה דיריכלה אבל אבל הראשון שעשה את זה.

**תרגיל 2.** האם הטוֹר  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$  מתכנס בהחלט, בתנאי, או מותבדר? רמז שאפשר להוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=1}^n \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{b\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

נסמן  $a_n = \sin n$  ו-  $b_n = \frac{1}{n}$ . אפשר לדעת ש-  $b_n$  מונוטונית יורדת שגבוהה 0, ו-:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$$

"יש כאן אולי טעות בנוסחה. בתרגיל בית תקבלו את זה כמו שצרכיך". ואז זה מהתכנס לפי דיריכלה. יש כאן שאלה, האם זה מהתכנס בהחלט?

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{מתכנס מדים (בsecos)}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\text{мотבדר (בsecos)}}$$

מאריתמטיקה של גבולות, סיימנו.

שחור פרץ, 2025

שופfil כ-TEX ווצר באמצעות תוכנה חופשית כלכ