# מתמטיקה בדידה – עוצמות 4

שחר פרץ

6 למרץ 2024

### תזכורות:

- $2^{\aleph_0} = |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$
- $2^{|A|} := |A \to \{0,1\}|$
- $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$
- $\forall A.|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ ובפרט עבור $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$
- משפט קנטור: $\forall A.|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- $\aleph := |\mathbb{R}|$
- $\aleph = 2^{\aleph_0}$

הוכחה למשפט האחרון מהרשימה: נשתמש בקש"ב. בכיוון הראשון, $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$ ע"י הגדרת הפונקציה:

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}),\ \ f(r) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq r\}$$

נוכיח ש־$f$ חח"ע. יהיו $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ שונים. בה"כ $r_1 < r_2$. מצפיפות הרציונליים בממשיים, קיים $q_0 \in \mathbb{Q}$ כך ש־$r_1 < q_0 < r_2$. לכן, $q_0 \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq r_2\} = f(r_2)$ וגם $q \neq \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq r_1\} = f(r_1)$ וסה"כ $q_0 \in f(r_2) \setminus f(r_1)$ ולכן $f(r_1) \neq f(r_2)$ וסה"כ $f$ חח"ע. [להוסיף בהוכחה יותר פורמלית: $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$]

בכיוון השני: צ.ל. $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$. ניעזר בתכונה הבאה של $\mathbb{R}$: לכל סדרה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ של ספרות $\{0, \dots, 9\}$, קיים מספר ממשי שהוא $0.a_0a_1a_2\dots$ (זה אולי נשמע טרוויאלי, אבל זה לא נכון על $\mathbb{Q}$ לדוגמה). מתקיים לכל $n \in \mathbb{N}$: אם $a_n < 9$ אז $0.a_0a_1\dots a_n \dots \leq 0.a_0\dots(a_n+1)$ (דוגמה: $0.1348 \leq 0.134794\dots$). (למה נכתב $\leq$ ולא $<$? יתכן שוויון עבור $0.1 = 0.09999\cdots$ [כל הבלגן הזה כדי להמנע מלהכנס להגדרה של ממשיים, כמו שעשינו עם ארז].

נגדיר פונקציה $g \colon (\mathbb{N} \to \{0,2\}) \to \mathbb{R}$ ע"י $g = \lambda h \in \mathbb{N} \to \{0,1\}.0.h(0)h(1)h(2)\dots$. לפי התכונה הנ"ל. הטווח של $g$ הוא אכן $\mathbb{R}$. נוכיח ש־$g$ חח"ע. יהיו $h_1, h_2 \in \mathbb{N} \to \{0,2\}$. אז קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$h_1(n_0) \neq h_2(n_0)$. בה"כ נניח ש־$h_1(n_0) = 0 \land h_2(n_0) = 2$. אז:

$$g(h_1) = 0.h_1(0)\dots\underbrace{h_1(n_0)}_{=0}\dots < 0.h_1(0)\dots 1 < 0.h_1(0)\dots 2 = 0.h_2(0)\dots 2 \leq g(h_2)$$

זאת בהנחה שבחרנו את ה־$n_0$ הקטן ביותר האפשרי, כך ש־$\forall n < n_0.h_1(n) = h_2(n)$. סה"כ $g(h_1) < g(h_2)$ ולכן $g$ חח"ע.

**"בואו נוכיח, ונעשה שיהיה לנו פשוט"** (נטלי). לא ההוכחה הכי פורמלית...

סה"כ, "הוכחנו" ש־$|R| \leq 2^{\aleph_0}$, ולסיכום מקש"ב $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

### הערה:

דוגמאות לקבוצות מעוצמה $2^{\aleph_0}$:

- $\mathbb{N} \to \{0,1\}, \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ וכו'
- $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})$ וכו'

### הערה 2:

השערת הרצף: לא קיימת קבוצה $X$ כך ש־$\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$ (במילים אחרות, $2^{\aleph_0}$ היא העוצמה הראשונה שגדולה ממש מ־$\aleph_0$). השערת הרצף התחילה בתור השערה, אבל הוא לא באמת השערה בימנו אנו: הוכיחו כי הטענה הזו בלתי תלויה באקסיומות, כלומר **שאי אפשר להוכיח אותה באמצעות ZFC אבל גם אי־אפשר להפריכה**. עושים את זה באמצעות כלים מתמטיים יחסית מתקמים.

### הערה 3:

לא בחומר: $\aleph_1$ היא העוצמה הראשונה שגדולה יותר מ־$\aleph_0$

## קצת תרגול בלכסון

### א

הוכיחו ע"י לכסון שהקבוצה הבאה אינה בת מנייה: $A = \{f \in \mathbb{N} \to \{0,1\} \mid \forall i \in \mathbb{N}.f(i) \cdot f(i+1) = 0\}$

פתרון: נניח בשלילה ש־$|A| = \aleph_0$. אז קיים זיווג $F \colon \mathbb{N} \to A$. נבנה $g \in A$ באופן הבא:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 1 - F\left(\frac{n}{2}\right)(n) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נוכיח ש־$g \in A$: ראשית, לכל $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ מתקיים $f(\frac{n}{2}) \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ולכן $F(n/2)(n) \in \{0,1\}$ ולכן $g(n) = 1 - f(n/2)(n) \in \{0,1\}$, ולכל $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ הגדרנו $g(n) = 0$, ולכן $\{0,1\}$ הוא טווח עבור $g$, כלומר $g \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$. בנוסף, לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים שאחד מבין $i, i+1$ הוא אי זוגי, ולכן $g(i) = 0 \lor g(i+1) = 0$ אז $g(i) \cdot g(i+1) = 0$. סה"כ $g \in A$. עכשיו נוכיח ש־$\forall m \in \mathbb{N}.g \neq F(m)$. יהי $m \in \mathbb{N}$. צ.ל. $in\mathbb{N}n$ כך ש־$g(n) \neq F(m)(n))$. נבחר $n = 2m$. אז $g(2m) = 1 - F(2m/2)(2m) = 1 - F(m)(2m) \neq F(m(2m))$. לכן $g(2m) \neq F(m)(2m)$ ולכן $G \neq F(n)/$. סה"כ $g \notin \text{Im}F$ אך כן $g \in A$ ולכן $|A| \neq \aleph_0$

### ב

הוכיחו ע"י לכסון שקבוצת כל הפונקציות החח"ע מ־$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (נסמנה $A$) אינה בת מנייה. פתרון: נניח בשלילה $F \colon \mathbb{N} \to A$ זיווג. נגדיר:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} (F(i)(i) + 1) + 1$$

(מי שלא היה: היא הסבירה הרבה על הפונקציה הזו בע"פ, אז תכתבו לי אם לא ברור למה זה עובד. בכללי זה מונוטוני עולה אז זה חח"ע)