מבחן בית במתמטיקה בדידה, סיכום תקב"צ

שחר פרץ

תשפ"ד, 9.5.2024

1 עוצמות

(א) נניח בשהשערת הרצף נכונה. נפריך קיום חלוקה Π של $\mathbb{R}$ כך ש־$|\Pi| < 2^{\aleph_0} \wedge \forall X \in \Pi.|X| < 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. נניח בשלילה קיום חלוקה כזו. נוכיח, לכל עוצמה a יתקיים $a \leq \aleph_0 \implies a < 2^{\aleph_0}$, תחת הנחת השערת הרצף. נניח בשלילה שלא כן, כלומר קיימת a עוצמה כך ש־$\neg(a \leq \aleph_0) \wedge a < 2^{\aleph_0}$, לכן גם $a > \aleph_0$, כלומר $\aleph_0 < a < 2^{\aleph_0}$ וזו סתירה להשערת הרצף. בפרט, מהנתונים נסיק כי $|X| \leq \aleph_0$ וגם לכל $X \in \Pi$ יתקיים $|X| \leq \aleph_0$. משום ש־Π חלוקה של $\mathbb{R}$, אזי ידוע $\bigcup_{X\in\Pi} X = \mathbb{R}$ ומשום ש־$|X| \leq \aleph_0$ אז האיחוד לכל היותר בן מנייה, ומשום ש־$|X| \leq \aleph_0$ אז האיחוד הוא של קבוצות בנות מנייה, ואיחוד בן מנייה של קבוצות לפחות בנות מנייה הוא בן מנייה כלומר $\aleph_0 \geq \left|\bigcup_{X\in\Pi}\right| = |\mathbb{R}|$ וסה"כ $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0$ וזו סתירה למשפט קנטור. ∎

(ב) צ.ל. קיום חלוקה $|\Pi| = 2^{\aleph_0}$ של $\mathbb{R}$ כך שלכל $X \in \Pi$ יתקיים $|X| = 2^{\aleph_0}$

הוכחה. לצורך הנוחות, נגדיר את הפונקציה:

$$\Sigma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ \Sigma = \lambda r \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \sum_{x \in \{r' | r' < r\}} x$$

. נתבונן בקבוצה הבאה:

$$\Pi = \left\{[\Sigma(r), \Sigma(r) + r) \mid r \in \mathbb{R}_{>0}\right\}$$

נוכיח שהקבוצה להלן היא חלוקה של $\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את התנאים הנדרשים. נסמן $\mathcal{C}_r := [\Sigma(r), \Sigma(r) + r)$

- **זרות בזוגות:** יהיו $R_1, R_2 \in \Pi$, כאשר $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ הם הקבועים המקיימים $\mathcal{C}_{r_1} = R_1, \mathcal{C}_{r_2} = R_2$ הקיימים מעקרון ההחלפה. נניח בשלילה $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, ולכן קיים $r \in R_1 \cap R_2$ בה"כ $r \in R_1 \setminus R_2$. מהנתונים $r \in [\Sigma(r_1), \Sigma(r_1) + r_1) \wedge r \in [\Sigma(r_2), \Sigma(r_2) + r_2)$. אם $r_1 < r_2$ אז $\Sigma(r_1) + r_1 \leq \Sigma(r_2)$ אך $r < \Sigma(r_1) + r_1 \wedge r \geq \Sigma(r_2)$ וסה"כ זו סתירה, באופן דומה אם $r_1 > r_2$ אז נקבל סתירה, ואם $r_1 = r_2$ אז $\mathcal{C}_{r_1} = \mathcal{C}_{r_2}$ כלומר $R_1 = R_2$ ואז אין בעיה.
- **שוויון האיחוד:** נרצה להוכיח $\bigcup \Pi = \mathbb{R}_{>0}$. נוכיח בהכלה דו־כיוונית.
  - יהי $r \in \mathbb{R}$, נוכיח $r \in \bigcup \Pi$ כלומר קיים $X \in \Pi$ כך ש־$r \in X$. קיים סכום של ממשיים רצופים שערכו r, ואת החסם העליון שלהם נסמן ב־a. נתבונן ב־$\mathcal{C}_a$ שקיים ב־Π מעקרון ההחלפה, עבורו יתקיים $r \in \mathcal{C}_a \implies \Sigma(a) = r$ (לפי הבחירה של a), ועבור $X = \mathcal{C}_a$ סיימנו.
  - יהי $r \in \bigcup \Pi$, לכן קיים $X \in \Pi$ כך ש־$r \in X$ ומשום ש־$X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ אז $r \in \mathbb{R}$ כדרוש.
- **קבוצות שאינן ריקות:** נניח בשלילה קיום קבוצה ריקה R, אז קיים $r \in \mathbb{R}_{>0}$ כך ש־$\mathcal{C}_r = \emptyset$, אך $\Sigma(r) \geq 0$ (כי זהו סכום של מספרים חיוביים), וגם $r > 0$, וסה"כ $\nexists x \in [\Sigma(r), \Sigma(r) + r)$ כלומר $\nexists \Sigma(r) \leq x < \Sigma(r) + r$ וסה"כ $\nexists 0 < x < r$ אך זו סתירה לכך ש־$r > 0$ ולצפיפות הממשיים.
- **עוצמת קבוצות:** יהי $X \in \Pi$, נוכיח $|X| = 2^{\aleph_0}$. משום ש־$[\Sigma(r), \Sigma(r) + r)$ (כאשר r מוגדר באופן דומה לאיך שכבר הוגדר בסעיף זה) אינטרוואל תקין ולא ריק, לפי משפט עוצמתו $2^{\aleph_0}$ כדרוש.
- **עוצמת החלוקה:** נתבונן בזיווג $f\colon \mathbb{R} \to \Pi,\ f = \lambda r \in \mathbb{R}.\mathcal{C}_r$. נוכיח שהוא זיווג. נניח בשלילה אינו חח"ע, לכן $\exists r_1, r_2.r_1 \neq r_2 \wedge \mathcal{C}_{r_1} = \mathcal{C}_{r_2}$ אך זה נסתר כאשר הוכחנו זרות בזוגות, ונניח בשלילה שהוא לא על כלומר קיים $X \in \Pi$ כך ש־$\forall r \in \mathbb{R}.\mathcal{C}_r \neq X$ וזו סתירה לעקרון ההפרדה.

עתה הוכחנו שקיימת חלוקה שעונה על הדרישות על הממשיים הגדולים ממש מ־0. קיים זיווג $F\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}_{\geq 0}$ קרן ועוצמתה א לפי משפט, ולכן החלוקה $\Pi_2 = \{F(X) \mid X \in \Pi\}$ תענה על התנאים כי אין הזיווג ישנה את תכונות החלוקה. ∎

(ג) נתון יחס שקילות $R = \left\{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \colon |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}| \leq \aleph_0\right\}$. צ.ל. $|(\mathbb{R} \to \mathbb{R})/R| = א$

הוכחה. נוכיח באמצעות קש"ב.

- **חסם עליון:** נמצא פונקציה חח"ע. מתאימה. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$F\colon (\mathbb{R} \to \mathbb{R})/R \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ F = \lambda[f]_R.\overline{\bigcap_{k \in [f]_R} k}$$

כאשר $\overline{A}$ הוא המשלים של A בעבור עולם דיון $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. נוכיח שהיא חח"ע.

– **מוגדרת היטב:** אין צורך להוכיח בלתי־תלות בנציג משום שהנציג אינו קשור בפונקציה.

– **חח"ע:** יהיו $\overline{[f]_R,\ [g]_R}$ מחלוקות שקילות שונות. נוכיח $F([f]_R)\neq F([g]_R)$. נניח בשלילה שוויון, אזי יתקיים השוויון $\overline{\bigcap_{k\in[f]_R}k=\bigcap_{k\in[g]_R}k}=:\mathcal{A}$. נניח בשלילה $|[f]_R|=1$, נתבונן ב־$f'=f\setminus\langle 0,f(x)\rangle\cup\langle 0,f(x)+1\rangle$ ונמצא סתירה. לכן, $|[f]_R|>1$ וקיימת שם לפחות פונקציה אחת נוספת. נבחר $f'\in[f]_R$, ידוע $|\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq f'(x)\}|\leq\aleph_0$ כלומר כמות האיברים השונים ביניהם קטנה מ־$\aleph_0$ ומשום ש־$F([f]_R)=\mathcal{A}$ מוגבל להכיל את כל האיברים השונים בין כל הפונקציות במחלקת השקילות, אז $\mathcal{A}\leq\aleph_0$. נסיק, שבפרט $f\cap g\subseteq\mathcal{A}$ יקיים $|f\cap g|=|\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq f(x)\}|\leq|\mathcal{A}|\leq\aleph_0$ ולכן fRg כלומר $[f]_R=[g]_R$ וזו סתירה לכך שמחלקות השקילות שונות.

סה"כ $\aleph=|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|\leq|(\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2/R|$.

- **חסם תחתון:** נתבונן בפונקציה הבאה:

$$G\colon\mathcal{P}(\mathbb{N})\to(\mathbb{R}\to\mathbb{R})/R,\ G=\lambda f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}.[\lambda r\in\mathbb{R}.f(\lfloor r\rfloor)]_R$$

ברור היא התחום והטווח שלה נכונים. נוכיח שהיא חח"ע. יהיו $f_1,f_2\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציות שונות. לכן, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$f_1(n)\neq f_2(n)$. צ.ל. $G(f_1)\neq G(f_2)$. נתבונן בנציג $g_1=\lambda r\in\mathbb{R}.f(\lfloor r\rfloor)$ מ־$[f_1]_R$ ובנציג $g_2=\lambda r\in\mathbb{R}.f(\lfloor r\rfloor)$ מ־$[f_r]_R$. עבור $r\in[n,n+1)$ יתקיים $\lfloor r\rfloor=n$ ולכן $g_1(r)\neq g_2(r)$, וידוע $[n,n+1)\subseteq\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\neq g(x)\}=:\mathcal{C}$ כלומר $\mathcal{C}\leq|[n,n+1)|=\aleph$ בניגוד לתנאי ההכרחי והמספיק $\mathcal{C}\leq\aleph_0$ לקיום g_1Rg_2 ולכן $\neg g_1Rg_2$, כלומר $G(f_1)=[g_1]_R\neq[g_2]_R=G(f_2)$ כדרוש. מקיום אותה הפונקציה נסיק $\aleph=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\leq|(\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2/R|$.

הוכחנו $\aleph\leq|(\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2/R|\leq\aleph$ ומקש"ב $\aleph=|(\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2/R|$ כדרוש. ■

2 יחסי סדר

תהי $\langle A,\preceq\rangle$ קבוצה סדורה חלש. נגדיר $f\colon A\to\mathcal{P}(A)$ באמצעות $f=\lambda a\in A.\{b\in A\mid a\preceq b\}$

(א) צ.ל. f חח"ע.

הוכחה. נניח בשלילה f אינה חח"ע. לכן, קיימים $a,b\in A$ שונים כך ש־$f(a)=f(b)$. מכלל β נסיק ש־:

$$\mathcal{A}:=\{a'\in A\mid a\preceq a'\}=\{b'\in A\mid a\preceq b'\}=:\mathcal{B}$$

משום שהיחס יחס סדר חלש, אזי $a\in\mathcal{A}\wedge b\in\mathcal{B}$, לכן משוויון קבוצות גם $a\in\mathcal{B}\wedge b\in\mathcal{A}$ כלומר $b\preceq a\wedge a\preceq b$ ומאנטי־סימטריות חלשה סה"כ $a=b$ וזו סתירה לכך שהם שונים, כלומר f חח"ע כדרוש. ■

(ב) נגדיר את קבוצת האיברים המינימליים להיות X. נוכיח $\mathcal{C}=\bigcup_{a\in X}f(a)=A$.

הוכחה. נביא דוגמא ניגדית. נקבע $A=\mathbb{R}$, ונתבונן ביחס הסדר הבא:

$$\preceq=(\leq_{\mathbb{R}}\setminus\mathbb{Z}^2)\cup\leq_{\mathbb{N}}\cup\{\langle z,z\rangle\mid z\in\mathbb{Z}\}$$

מפילוג למקרים יהיה ניתן להוכיח בקלות כי הוא יחס סדר. יתקיים שבעבורו 0 איבר מינימלי, כי נניח בשלילה קיום איבר $0\preceq r\wedge r\neq 0$, אזי או ש־$0(\leq_R\setminus\mathbb{Z}^2)r$ וזו סתירה כי 0 שלם ובפרט אינו בר השוואה ביחס הזה, או ש־$0\leq_{\mathbb{N}}r$ וזו סתירה. גם ידוע כי אין איברים מינימלים נוספים, כי ל־$(\leq_R\setminus\mathbb{Z}^2)$ אין מינימום ובעבור $\leq_{\mathbb{N}}$ אין איברים הנמצאים ביחס הסדר נמוך מ־0 וגם הוא קווי. נניח בשלילה ש־$-1\in\mathcal{C}$, לפיכך קיים $a\in X$ (כאשר X קבוצות כל המינימליים, וכבר הוכח ש־0 הוא האיבר המינימלי היחיד כלומר $a=0$) כך ש־$-1\in f(a)$. בעקבות כך ש־$-1\in\mathbb{Z}$, אז -1 לא בר השוואה ביחס $\leq_R\setminus\mathbb{Z}^2$, ולכן נסיק שבהכח $-1\leq_{\mathbb{N}}0\vee 0=-1$ וכך או אחרת זו סתירה. ■

(ג) תהי $B\subseteq A$ קבוצה. נגדיר חסם מלמעלה של B לאיבר $m\in A$ אמ"מ $\forall b\in B.b\preceq m$. נגדיר ש־$m\in A$ חסם עליון של B אמ"מ הוא חסם מלמעלה ולכל m' חסם מתמעלה יתקיים $m\preceq m'$. נוכיח $f(m)=\bigcap_{b\in B}f(b)$.

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.

- יהי $c\in f(m)$ כלומר $c\in A\wedge m\preceq c$. נוכיח $c\in\bigcap_{b\in B}f(b)$, או באופן שקול, יהי $b\in B$, נוכיח $c\in f(b)$. ידוע m חסם מלמעלה לכן לכל $b\preceq m$, ומטרנזיטיביות $b\preceq c$ ומכאן $c\in\{a\in A\mid b\preceq a\}=f(b)$ כדרוש.
- יהי $c\in\bigcap_{b\in B}f(b)$ כלומר $\forall b\in B.c\in f(b)$, נוכיח $c\in f(m)$. נניח בשלילה $c\notin f(m)$. אם $c\preceq m$: ידוע שלכל $b\in B$ יתקיים כי $b\preceq c$ (כי $c\in f(b)$), ונסיק ש־c חוסם מלמעלה את B. לכן, בגלל ש־m חסם עליון, אז $m\preceq c$. כלומר $c\in f(m)$ וזו סתירה.

סה"כ מהכלה דו כיוונית יתקיים שוויון כנדרש. ■

3 פונקציות

תהי $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה. פונקציה $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא שורש של f אמ"מ $f=g\circ g$.

(א) נניח f הפיכה, ותהי g שורש של f, נוכיח g הפיכה.

הוכחה. נניח בשלילה g אינה הפיכה, או באופן שקול היא אינה חח"ע או שאינה על. נפלג למקרים.

- נניח והיא אינה חח"ע. מכאן, קיים איברים שונים $n,m\in\mathbb{N}$ כך ש־$f(n)=f(m)$. לכן, $g(n)=(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(f(m))=(f\circ f)(m)=g(m)$ כלומר $g(n)=g(m)$ כלומר g לא חח"ע וזו סתירה.
- נניח והיא אינה על. אזי, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall a\in\mathbb{N}.f(a)\neq n$. נניח בשלילה קיום $m\in\mathbb{N}$ כך ש־$g(m)=n$, נסיק $f(f(m))=n \implies (f\circ f)(m)=n$ ומכאן קיים $a=f(m)$ כך ש־$f(a)=n$ וזו סתירה, לכן g לא על וזו סתירה.

סה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים כלומר f בהכרח זיווג כדרוש. ■

(ב) נרצה להוכיח שהקבוצה $A=\{g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid g \text{ a root of } id_{\mathbb{N}}\}$ מקיימת $|A|=\aleph$.

הוכחה. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$F\colon (\mathbb{N}\to\{0,1\})\to A.F=\lambda f\in\mathbb{N}\to\{0,1\}.\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases} n+1 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\wedge f\left(\frac{n}{2}\right)=1\\ n-1 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\wedge f\left(\frac{n-1}{2}\right)=1\\ n & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח שהיא חח"ע ומוגדרת היטב.

- **מוגדרת היטב:** יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $F(n)\in A$. $f:=F(n)$. לשם כך, צ.ל. $f\circ f=id_{\mathbb{N}}$ כלומר יהי $m\in\mathbb{N}$, נוכיח $(f\circ f)(m)=id_{\mathbb{N}}(m)$. נפלג למקרים. אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ וגם $f(n/2)=1$ אז $f(n)=n+1$, וגם $n+1\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ ו־$f((n+1-1)/2)=f(n/2)=1$ כלומר $f(n+1)=n+1-1=n$. סה"כ $(f\circ f)(n)=f(f(n))=f(n+1)=n=id_{\mathbb{N}}(n)$ כדרוש. באופן דומה אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ נגיע לתוצאות זהות. בכל מקרה אחר, $f(f(n))=f(n)=n=id_{\mathbb{N}}(n)$ כדרוש גם־כן. סה"כ בכל המקרים יתקיים השוויון הנדרש. כמו כן $f(\dots)$ תמיד מוגדר היטב כי אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $n/1\in\mathbb{N}$ ואם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $(n-1)/2\in\mathbb{N}$, וגם $n\geq 1$ כלומר $f(n)\in\mathbb{N} \implies n-1\in\mathbb{N} \implies n-1\geq 0$.
- **חח"ע:** יהיו $f_1,f_2\in\mathbb{N}\to\{0,1\}$ פונקציות שונות, כלומר קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$f_1(n)\neq f_2(n)$, ובה"כ $f_1(n)=0, f_2(n)=1$ (הרי יש רק שתי אופציות). לכן, $F(f_1)(2n)=n\neq n+1=F(f_2)(n)$ ומשוויון פונקציות $F(f_1)\neq F(f_2)$ כדרוש.

סה"כ $|A|\leq|\mathbb{N}\to\{0,1\}|=\aleph$ וגם $A\subseteq\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כלומר $\aleph=|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|=\aleph_0^{\aleph_0}=|A|$ כי $\aleph=2^{\aleph_0}\leq\aleph_0^{\aleph_0}\leq(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ ולכן $|A|=\aleph$ מקש"ב, כדרוש. ■

4 לכסון

נגדיר:

$$X=\{f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}.f(n^2)=f(n)\}$$

נוכיח באמצעות לכסון כי $|X|\neq\aleph_0$.

הוכחה. נניח בשלילה קיום פונקציה $F\colon\mathbb{N}\to X$ זיווג. נסמן את קבוצת כל הראשוניים ב־P. ידוע שהיא אינסופית ומוכלת בטבעיים, כלומר $\aleph_0\leq|P|\leq\aleph_0$ משמע $|P|=\aleph_0$ כלומר קיימת פונקציית זיווג בין הטבעיים לבינה, נסמנה f_p. נסמן $P_n=f_p(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

ניגש להגדיר את פונקציית הלכסון:

$$g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases} F(m)(P_m)+1 & \exists m,k\in\mathbb{N}.P_m^k=n\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח כמה דברים על מנת להתקדם הלאה.

- **g מוגדרת היטב:** בזמן הגדרת הפונקציה השתמשנו ב־m,k הקשורים ב־n, אך איננו יודעים שהם קשורים ל־n באופן חח"ע, כלומר יתכן וההגדרה אמביגציונית כך ש־g לא ח"ע. לכן כך, יהי n, נניח $\exists m,k\in\mathbb{N}.P_m^k=n$ ונוכיח שהם יחידים. נניח בשלילה שקיימים $m'\neq m, k'\neq k$ כך ש־$P_{m'}^{k'}=n$. משום ש־P_m ו־$P_{m'}$ ראשוניים, הפירוק לגורמים ראשוניים של n הוא הן $\underbrace{P_m\cdot P_m}_{k\text{ times}}$ והן $\underbrace{P_{m'}\cdot P_{m'}}_{k'\text{ times}}$ כלומר הפירוק לגורמים ראשוניים לא יחיד וזו סתירה למשפט היסודי של האריתמטיקה. המקרה השני לא תלוי בשום דבר ולכן הוא תקין. נותר להוכיח כי $\text{range}(g)=\mathbb{N}$, דבר שיתקיים כי $0\in\mathbb{N}$ וגם $F(m)(m)\in\mathbb{N}$ כלומר $F(m)(m)+1\in\mathbb{N}$ וכל המקרים טבעיים.
- **$g\in A$:** יהי $n\in\mathbb{N}$, נרצה להוכיח $f(n^2)=f(n)$. נפלג למקרים.
  - אם $\exists m\in\mathbb{N}.P_m=n$, אז $f(n)=F(m)(P_m)+1$ כאשר $k=1$. בעבור $k=2$ ואותו ה־m יתקיים $f(n^2)=F(m)(P_m)+1=f(n)$.

- אם $\nexists m,k.P_m^k = n$ אז $f(n) = 0$, ו־$f(n^2) = 0$ גם כן כי נניח בשלילה שקיימים m,k כך ש־$P_m^k = n^2$, נסיק $P_m^{0.5k} = n$.
אם $k \mid 2$ אז $k' = 0.5k$ וזו סתירה, אם לא אז קיים $j \in \mathbb{N}$ כך ש־$k = j + 0.5$ ולכן $P_m^{0.5k} = P_m^{j+0.5} = P_m^j \cdot \sqrt{P_m} \in \mathbb{N}$
כלומר $\sqrt{P_m} \in \mathbb{N}$ (כי כפל טבעי ובאי־טבעי הוא אי־טבעי) וסה"כ סתירה כי זה אומר שקיים $P' \in \mathbb{N}$ כך ש־$P'^2 = P_m$ אך P_m ראשוני, ומהלמה של אוקלידס, אי־פריק – סתירה.

- **$g \notin \mathrm{Im}(F)$:** באופן שקול נוכיח $\forall m \in \mathbb{N}.F(m) \neq g$. יהי $m \in \mathbb{N}$, נניח בשלילה $F(m) = g$. משוויון פונקציות $\forall n \in \mathbb{N}.F(m) = g$.
משום שישנם אינסוף ראשוניים, קיים $n := P_m \in P$, ונסיק $F(m)(n) = g(n)$ ומכיוון שבעבור $k' = 1, m' = m$ יתקיים $P_{m'}^k = n$ אז $f(n) = F(m)(P_m) + 1$ ומטרזנטיביות $F(m)(P_m) + 1 = F(m)(P_m)$ כלומר $1 = 0$ וזו סתירה.

סה"כ, g היא פונקציה שנמצאת ב־A אך אינה בתמונה של F, כלומר F אינה על חרף היותה זיווג, וזו סתירה. על כן $|X| \neq \aleph_0$. ■