תרגיל בית 2 - אלגברה לינארית 2א' לאודיסיאה סייבר

1. לכסנו את המטריצות הבאות:

א) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

ב) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ג) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Z}_3$

2. בשאלה זו נוכיח שלכל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, ל-AB ול-BA יש את אותו פולינום אופייני.

א) ראשית הוכיחו את הטענה במקרה ש-A הפיכה.

רמז: הוכיחו שבמקרה זה המטריצות דומות

ב) הוכיחו את הטענה כאשר A היא מטריצת בלוקים מהצורה $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג) הוכיחו את הטענה לכל מטריצה.

רמז: זכרו ש-A מתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ עבור $r = \mathrm{rank}A$.

3. עבור פולינום מתוקן $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, נגדיר את המטירצה המלווה של p להיות

$$A_p \coloneqq \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

א) הוכיחו כי $p_{A_p}(x) = p(x)$

ב) נניח שלפולינום $p(x)$ יש n שורשים שונים. לכסנו את A_p

ג) מצאו נוסחה סגורה לאיברי נוסחת הנסיגה הבאה:

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 2, f_{n+3} = 4f_{n+2} + 7f_{n+1} - 10f_n$$

(אנחנו נעשה תרגיל דומה בתרגול 3, אז אם אתם מסתבכים אתם יכולים לחכות לאחרי התרגול בשביל לפתור את הסעיף הזה)