חדו"א 1 א -- תרגיל 5

1. מצאו את כל הגבולות החלקיים עבור הסדרות הבאות:

(א) $a_n = \sqrt[n]{4^2+2^n}$ (ב) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ (ג) $a_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$

2. תהי a_n סדרה המקיימת $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{-1,3\}$. נגדיר סדרה חדשה $b_n = |a_n - 1|$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$.

3. מצאו דוגמאות עבור סדרות a_n המקיימות:

(א) $\mathcal{P}(a_n) = M$ כאשר $M \subset \mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה.

(ב) תהי x_n סדרה. תנו דוגמא לסדרה כך שכל אברי הקבוצה $\{x_1, x_2, ...\}$ הם גבולות חלקיים שלה.

(ג) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \hat{\mathcal{P}}(a_n)$. האם קיימת סדרה שאלו **כל** הגבולות החלקיים שלה?

4. הוכיחו או הפריכו: אם a_n סדרה כך שלכל שלם $p > 1$ התת־סדרה $(a_{pk})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז a_n מתכנסת.

5. תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = 1$. הראו כי אם $L > 0$ גבול חלקי של a_n, אז גם $\frac{1}{L}$ גבול חלקי שלה.

6. בהינתן סדרה (a_n) נאמר ש:

תכונה מתקיימת כמעט תמיד אם קיים N כך שלכל $n > N$ היא מתקיימת עבור a_n (כלומר החל ממקום מסוים).
תכונה מתקיימת באופן שכיח אם לכל N קיים $n > N$ כך שהיא מתקיימת עבור a_n (כלומר באינסוף מקומות).

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם סדרה היא חסומה כמעט תמיד אז היא חסומה.

(ב) אם סדרה היא חסומה באופן שכיח היא חסומה.

(ג) אם סדרה היא עולה באופן שכיח היא מתכנסת במובן הרחב.

(ד) אם סדרה עולה כמעט תמיד אז היא מתכנסת במובן הרחב.

(ה) אם סדרה היא מתכנסת אז היא מונוטונית כמעט תמיד.

7. תהי a_n סדרה של איברים חיוביים כך שמתקיים $\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1$. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

8. (א) הוכיחו כי סדרה a_n אינה חסומה מלעיל אם ורק אם $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(ב) נסחו והוכיחו קריטריון ב"שפת N, ε" לכך שמספר $L \in \mathbb{R}$ הינו $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

9. הוכיחו את קריטריון אבל להתכנסות טורים. ניתן להשתמש בקריטריון דיריכלה להתכנסות טורים.

10. הוכיחו כי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0$ אז מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + \beta n) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

11. הוכיחו או הפריכו את התכנסות הסדרות הבאות **באמצעות קריטריון קושי בלבד**:

(א) $a_n = (-1)^n$,

(ב) $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$,

(ג) $a_n = \frac{n+1}{4n^2+3}$.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. מצאו את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

   (א) $a_n = \cos^n\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

   (ב) $b_n = n^{(-1)^n n}$.

2. הוכיחו כי אם $|a_n|$ אינה מתכנסת ל־∞, אז לסדרה (a_n) יש גבול חלקי סופי.

3. תהי סדרה a_n ונגדיר סדרה b_n באופן הבא: $b_n = \sqrt[n]{n} \cdot a_n$. הוכיחו כי לשתי הסדרות יש את אותם הגבולות החלקיים.

4. מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

   (א) $a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & n \, \text{even} \\ \frac{1}{n^2}, & n \, \text{odd} \end{cases}$

   (ב) $a_n = (-1)^{n+1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$

   (ג) $a_n = 1 + n \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

   (ד) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n} + (-1)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}{2 + \sin\left(\frac{1}{2}\pi n^2\right)}$

5. הוכיחו כי אם $\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ קבוצה סופית, אז ניתן לפרק את a_n לאיחוד של מספר סופי של תת־סדרות מתכנסות (במובן הרחב).

6. מצאו סדרה a_n המקיימת $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathcal{P}(a_n)$. האם קיימת סדרה שאלו **כל** הגבולות החלקיים שלה?