

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 19

להגשה עד יום שלישי 28.5.24 ב-23:59.

ביום שני 20.5.24 יתווספו לקובץ הנוכחי שאלות נוספות שיעסקו בעיקרון שובך היונים (מועד ההגשה יישאר זהה).

1. בכמה דרכים ניתן לחלק 55 כדורים זהים ל-5 תאים (שונים) כך שבתא ה- i לא יהיו יותר מ- $10i$ כדורים?
2. (*) נסמן $A = \{1, \dots, 2023\}$. בשאלה זו נחשוב על תמורות של A כעל מחרוזות באורך $|A|$ שכל תוויהן שונים (התווים הם איברים של הקבוצה A).
 - (א) בכמה תמורות של A מופיעים שני הרצפים 1, 2 ו-3, 4? בכמה תמורות מופיע הרצף 5, 6, 7?
 - (ב) בכמה תמורות של A לא מופיע שום רצף מהצורה $i, i+1$? נמקו.
3. כמה מספרים שלמים יש בין 1 ל-1000 שלא מתחלקים באף אחד מהמספרים 4, 6, 9?
4. בבית הספר לפסיכולוגיה 100 סטודנטים לומדים את הקורס "עקרונות ההכלה וההקשבה". כל סטודנט מקבל ציון שהוא מספר טבעי בין 0 ל-100 שמתחלק ב-5. צוות הקורס החליט שהממוצע בקורס יהיה לפחות 60. בכמה דרכים יכולים המרצים לחלק ציונים לסטודנטים בקורס?
5. נאמר שפונקציה $f \in [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$ היא מונוטונית עולה חלש ביחס להכלה אם $\forall i, j \in [n]. i \leq j \rightarrow f(i) \subseteq f(j)$. פונקציה כנ"ל היא מונוטונית כולה חזק ביחס להכלה אם $\forall i, j \in [n]. i \leq j \rightarrow f(i) \subsetneq f(j)$.
 - (א) כמה פונקציות $f \in [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$ הן מונוטוניות עולות חלש ביחס להכלה?
 - (ב) כמה פונקציות $f \in [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$ הן מונוטוניות עולות חזק ביחס להכלה?
6. נסמן ב- $U = \{0, 1\}^{2n}$ את אוסף המחרוזות הבינאריות באורך $2n$. נגדיר את $A_i = \{x \in U \mid x_i = 0 \wedge x_{i+1} = 1\}$ עבור $1 \leq i \leq 2n-1$.
 - (א) תהי $J \in \mathcal{P}_r([2n-1])$, מה עוצמת החיתוך $\bigcap_{j \in J} A_j$? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- J). עבור כמה $J \in \mathcal{P}_r([2n-1])$ החיתוך $\bigcap_{j \in J} A_j$ אינו ריק?
 - (סימון: $\mathcal{P}_r(X)$ היא קבוצת כל תתי הקבוצות של קבוצה X שהן בגודל r)
 - (ב) הוכיחו על ידי שיקול קומבינטורי את הזהות הבאה:
$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} = 2n+1$$
7. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות במילה boondoggle כך שלא יופיעו הרצפים oo, gg, le, el