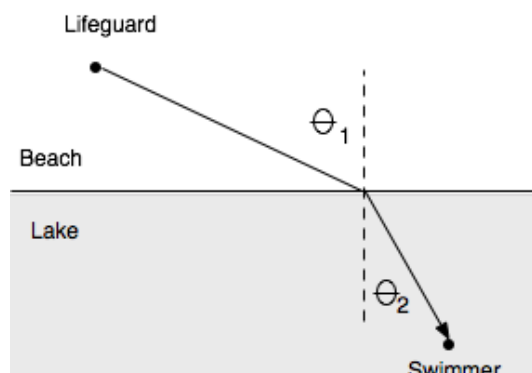


תרגיל בית 3



1. חוק סנל (השלמה מהשיעור): מצילה נמצאת על החוף במרחק l_1 מקו החוף, ושחינית טובעת נמצאת באגם במרחק l_2 מקו החוף, והמרחק בין השתיים לאורך קו החוף הוא d . מהירות הריצה של המצילה על החוף היא v_1 , ומהירות שחייתה באגם v_2 . נסמן את הזוויות כמו בסרטוט. המטרה של המצילה – להגיע לשחינית הטובעת במינימום זמן.

a. השתכנעו כי הדרך הקצרה ביותר היא אכן מהצורה של ריצה בקו ישר +

שחיה בקו ישר, וכי θ_1, θ_2 בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b. מצאו קשר גאומטרי בין שתי הזוויות, והראו כי הזמן שייקח למצילה לעבור מסלול המוגדר לפי θ_1 נתון הוא

$$t(\theta_1) = \frac{l_1}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{l_2}{v_2} \sqrt{1 + \left(\frac{l_1 \tan \theta_1 - d}{l_2} \right)^2}$$

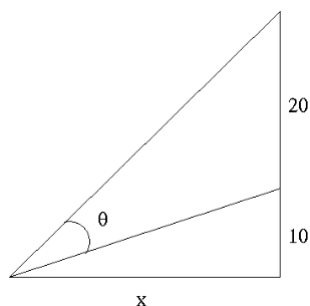
c. הראו כי הזמן המינימלי מתקבל כאשר

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

2. פתרו את בעיות האקסטרמיזציה הבאות.

a. מסך קולנוע נמצא בגובה 10 רגל מהרצפה וגובהו 20 רגל. באיזה מרחק x ממנו יש לשבת על מנת שזווית הראיה θ תהיה מקסימלית?

b. מהן אורכי הצלעות של המלבן עם ההיקף המינימלי ששטחו S ?



c. מבין כל הגלילים הסגורים משני הצדדים (גליל ומכסה

מלמעלה ומלמטה) עם שטח פנים 50 סמ"ר, מה היחס בין גובה הגליל לבסיסו במקרה של הגליל עם הנפח הגדול ביותר? תוכלו להיעזר בכך שנפח גליל עם רדיוס r וגובה h הוא $\pi r^2 h$ וששטח הפנים של המעטפת (ללא הבסיסים) $2\pi r h$.

3. חקרו באופן מלא את הפונקציות הבאות. יש למצוא: תחום הגדרה; סימטריה; נק' חיתוך עם הצירים; נק' סטטיונריות ומיון לנק' מינ' לוקאלי, מקס' לוקאלי, ועוקף;

תחומי עליה וירידה; אסימפטוטות וגבולות; נקודות פיתול; תחומי קמירות וקעירות – ולשרטט את הפונקציה על בסיס הממצאים.

a. $\frac{e^x}{1+x}$

b. עבור $a > 1$ $\frac{(x+a)^2}{1-|x|}$

c. עבור $a > 0$ $\sqrt{(a^2 - x^2)(1 + 2x^2)}$ בסעיף זה אין צורך למצוא נקודות

פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

4. פתרו את השאלה הבאה:

א. מצא לאילו ערכי a יש לפונקציה $y = x^4 + ax^3 + 6x^2$ שתי נקודות פיתול.
 ב. האם יש ערך של a עבורו יש לפונקציה נקודת פיתול אחת? הוכח את תשובתך.

5. ידוע כי $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ לכל x .

a. הוכיחו כי $\sin x < x$ עבור $x > 0$.

b. הוכיחו כי $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ עבור $x > 0$.

c. הוכיחו כי $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ עבור $x > 0$.

6. הוכיחו כי $(1+x)^a \leq 1+ax$ לכל $0 \leq a \leq 1$, $x \geq -1$, כאשר יש שוויון אם $x=0$ או $a=1$.