

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 16

ניתן בתאריך 6.3.2024. להגשה עד 12.3.2024.

1. הוכיחו באמצעות ליכסון שהקבוצות הבאות הן מעוצמה גדולה ממש מ- \aleph_0 :

(א) קבוצת הפונקציות $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שאינן חח"ע.

(ב) קבוצת הפונקציות $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ שהן על \mathbb{N} .

(ג) $A = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq n\}$

(ד) יהי $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. נגדיר קבוצה B כך: $B = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, a\} \mid \neg \exists n \in \mathbb{N}. f(n) = f(n+1) = a\}$

(ה) $C = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}. f(n) + f(n+1) \equiv 1 \pmod{3}\}$

(ו) $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$, כלומר קבוצת היחסים מעל \mathbb{N} שאינם פונקציות.

(ז) $X = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}. |f^{-1}[\{n\}]| \geq 2\}$

2. אדון שוקו ניסה לפתור את השאלה הבאה: "הוכיחו באמצעות ליכסון שקבוצת כל הפונקציות העולות

$$X = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall m, n \in \mathbb{N} (n \leq m \rightarrow f(n) \leq f(m))\}$$

אינה בת מנייה.

אדון שוקו, שטכניקת הליכסון מוכרת לו מימים ימימה, הציע את הפתרון הבא: "נניח בשלילה שקיימת פונקציית זיווג $F \in \mathbb{N} \rightarrow X$ ונגדיר את הפונקציה $f = \lambda n \in \mathbb{N}. F(n)(n) + 1$. מאחר ש- F על אז קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $f = F(m)$, אך $f(m) = F(m)(m) + 1 \neq F(m)$ ולכן $f \neq F(m)$ סתירה!"

(א) הסבירו את הטעות של אדון שוקו. נסו להסביר בדיוק באיזו נקודה בהוכחה מופיעה הטעות.

(ב) תקנו את ההוכחה והוכיחו ש- X אינה בת מנייה.

3. נגדיר יחס שקילות $H \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$:

$$\forall f, g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \langle f, g \rangle \in H \iff \forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^2 f(3n+i) = \sum_{i=0}^2 g(3n+i)$$

אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות.

תזכורת: הסימון $\sum_{i=0}^k a_i$ מבטא את הסכום $a_0 + a_1 + \dots + a_k$.

(א) תנו דוגמה לפונקציה g שנמצאת ביחס H עם פונקציית הזהות, אך שונה ממנה. אין צורך להוכיח.

(ב) נתונה קבוצה בת מנייה של פונקציות $f_0, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. הציגו במפורש פונקציה h אשר איננה ביחס H עם אף f_i . הוכיחו את תשובתכם.