לינארית 2א ~ משפט הפירוק הספקטרלי להעתקות כלליות

שחר פרץ

22 ביוני 2025

מבוסס על הקלטה 18 של הקורס ב־2024-2025

מרצה: ענת אמיר

המטרה: להבין לאילו העתקות בדיוק מתקיים המשפט הספקטרלי. מעל הממשיים, הבנו שאילו העתקות צמודות לעצמן. אז מה קורה מעל המרוכבים?

משפט 1. (משפט z). יהי V ממ"פ סופי ויהי $\varphi \in V^*$. אז קיים ויחיד וקטור $u \in V$ שמקיים $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \,|\, u\rangle$.

הוכחה. **קיום.** יהי $B = (b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתונורמלי של V (הוכחנו קיום בהרצאות קודמות). נסמן $u = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i$. בכדי להראות $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \,|\, u\rangle$ מספיק להראות תכונה זו לאברי הבסיס B, כלומר נראה ש־$\forall 1 \le j \le n\colon \varphi(b_j) = \langle b_j \,|\, u\rangle$. ואכן:

$$\langle b_j \,|\, u\rangle = \left\langle b_j \,\middle|\, \sum_{i=0}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\overline{\overline{\varphi(b_i)}}}_{b_i} \underbrace{\langle b_j \,|\, b_i\rangle}_{ij} = b_j \quad \top$$

יחידות: אם קיים וקטור נוסף שעבורו $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \,|\, w\rangle$ אז בפרט עבור $v = u - w$ נקבל:

$$\varphi(v) = \langle v \,|\, w\rangle = \langle v \,|\, u\rangle \implies \langle v \,|\, u - w\rangle = 0 \implies 0 = \langle u - w \,|\, u - w\rangle = ||v - w||^2 = 0 \implies v - w = 0 \implies v = w$$

סה"כ הוכחנו קיום ויחידות. ■

משפט 2. יהי V ממ"פ מנ"ס ותהי $T\colon V \to V$ לינארית. אז קיימת ויחידה $T^*\colon V \to V$ ומקיימת $\forall u, v \in V\colon \ \langle Tu \,|\, v\rangle = \langle u \,|\, T^* v\rangle$.

הגדרה 1. ההעתקה T^* לעיל נקראת ההעתקה הצמודה ל־T.

הוכחה. לכל $v \in V$, נתבונן בפונקציונל הלינארי $\varphi_V \in V^*$ המוגדר ע"י $\forall u \in V\colon \varphi_V(u) = \langle Tu \,|\, v\rangle$. ממשפט ריס קיים ויחיד $T^* v \in V$ שעבורו $\forall u \in V\colon \ \langle Tu \,|\, v\rangle = \varphi_V(u) = \langle u \,|\, T^* v\rangle$. כלומר, ההעתקה $T^*\colon V \to V$, קיימת ויחידה, ונותר להראות שהיא לינארית. עבור $v, w \in V$ ועבור $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\forall u \in V\colon \ \langle u \,|\, T^*(\alpha v + \beta w)\rangle = \langle Tu \,|\, \alpha v + \beta w\rangle = \bar{\alpha} \langle Tu \,|\, v\rangle + \bar{\beta} \langle Tu \,|\, v\rangle = \bar{\alpha} \langle u \,|\, T^* v\rangle + \bar{\beta} \langle u \,|\, T^* w\rangle = \langle u \,|\, \alpha T^* u + \beta T^* w\rangle$$

מסך נסיק ש־$T^*(\alpha v + \beta w) = \alpha T^* u + \beta T^* w$ מנימוקים דומים. ■

דוגמאות. מעל $\mathbb{C}^n$, עם המ"פ הסטנדרטי, נגדיר ט"ל $T_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ מוגדרת ע"י $T_A(x) = Ax$. אז:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n\colon \ \langle T_A(x) \,|\, y\rangle = \langle Ax \,|\, y\rangle = \overline{(Ax)^T} \cdot y = \overline{x^T} \cdot \overline{A^T} y \cdot = \overline{x^T} T_{\overline{A^T}}(y) = \left\langle x \,\middle|\, T_{\overline{A^T}} y \right\rangle$$

כלומר, $(T_A)^* = T_{A^*}$ כאשר $A^* = \overline{A^T}$, וקראנו לה המטריצה הצמודה.

הערה: ההוכחה הזו הפוכה כי צריך לינאריות ברכיב הראשון ולא בשני והמרצה התבלבלה אבל אין לי כוח לתקן. עדיין $(T_A)^* = T_{A^*}$.

נבחין שהעתקה נקראת צמודה לעצמה אממ $T^* = T$.

עוד נבחין שעבור העתקה הסיבוב $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בזווית θ, מתקיים ש־T^* היא הסיבוב ב־$-\theta$, וכן היא גם ההופכית לה. כלומר $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$. זו תכונה מאוד מועילה וגם נמציא לה שם במועד מאוחר יותר.

משפט 3. (תכונות ההעתקה הצמודה) יהי V ממ"פ ותהיינה $T, S\colon V \to V$ זוג העתקות לינאריות. נבחין ש־:

(א) $(T^*)^* = T$

(ב) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$

(ג) $(T + S)^* = T^* + S^*$

(ד) $\forall \lambda \in \mathbb{F}\colon (\lambda T)^* = \bar{\lambda}(T^*)$

"זה אחד וחצי לינאריות"

הוכחה.

א) $\forall u,v\in V\colon \langle T^*u\,|\,v\rangle = \overline{\langle v\,|\,T^*u\rangle} = \overline{\langle Tv\,|\,u\rangle} = \langle u\,|\,Tv\rangle \implies (T^*)^*=T$

ב) $\langle (T\circ S)u\,|\,v\rangle = \langle Su\,|\,T^*v\rangle = \langle u\,|\,S^*T^*\rangle \implies (TS)^*=T^*S^*$

ג) $\langle (T+S)u\,|\,v\rangle = \langle Tu\,|\,v\rangle + \langle Su\,|\,v\rangle = \langle u\,|\,T^*v\rangle + \langle u\,|\,S^*v\rangle = \langle u\,|\,T^*v+S^*v\rangle$

ד) כנ"ל

■

משפט 4. יהי V ממ"פ נ"ס ותהי $T\colon V\to V$ לינאריות. אם $B=(b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתוגונלי לו"ע של T, אז $\forall 1\le i\le n$ ו"ע של ההעתקה הצמודה.

כלומר: אם מתקיים המשפט הספקטרלי, אז הבסיס שמלכסן אורתוגונלית את T מלכסן אורתוגונלית את הצמודה.

הוכחה. יהי $i\in[n]$ ונסמן בעבורו את λ_i הע"ע המתאים לו"ע b_i. עבור $i\neq j\in[n]$ נחשב את $\langle b_i\,|\,T^*b_j\rangle$:

$$\langle b_i\,|\,T^*b_j\rangle = \overline{\langle Tb_i\,|\,b_j\rangle} = \overline{\langle \lambda_i b_i\,|\,b_j\rangle} = \lambda_i\,\langle b_i\,|\,b_j\rangle = 0$$

לכן $T^*b_j\in(\operatorname{span}\{b_i\}_{i=1}^n)^\perp \overset{!}{=} \operatorname{span}\{b_j\}$. משיקולי ממדים, הפריסה מממד $n-1$ ולכן המשלים האורתוגונלי שלו מממד 1 ולכן השוויון. סה"כ $T^*b_j\in\operatorname{span}\{b_j\}$ ולכן b_j ו"ע של T^* כדרוש. ■

מסקנה. אאם V ממ"פ נ"ס ו־$T\colon V\to V$ ט"ל עם בסיס מלכסן אורתוגונלי, אז T,T^* מתחלפות כלומר $TT^*=T^*T$.

הוכחה. לפי הטענה הקודמת כל b_i הוא ו"ע משותף ל־T ול־T^*, ולכן:

$$TT^*(b_i)=T(T^*(b_i))=\beta_iT^*(b_i)=\beta_i\delta_ib_i=\alpha_i\beta_ib_i=\alpha_iT^(b_i)=T^*T(b_i)$$

העתקה מוגדרת לפי מה שהיא עושה לבסיס ולכן $TT^*=T^*T$. ■

הגדרה 2. העתקה כזו המקיימת $AA^*=A^*A$ נקראת נורמלית).

עתה, ננסה להראות שכל העתקה נורמלית מקיימת את המפשט הספקטרלי.

משפט 5. (המשפט הספקטרלי) יהי V ממ"פ נוצר סופית מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T\colon V\to V$ לינארית. אז קיים בסיס אורתוגונלי של ו"ע של T אמ"מ T נורמלית.

למה 1. יהי V ממ"פ ותהיינה $S_1,S_2\colon V\to V$ זוג ט"ל צמודות ולעמן ומתחלפות (כלומר $S_1S_2=S_2S_1$). אז קיים בסיס אורתוגונלי של V שמורכב מו"עים משופים ל־S_1 ול־S_2.

הוכחה. ידוע ש־S_1 צמודה לעצמה, לכן לפי המשפט הספקטרלי להעתקות צמודות לעצמן (לא מעגלי כי הוכח בנפרד בהרצאה הקודמת), קיים לה לכסון אורתוגונלי ובפרט S_1 לכסינה. נציג את V כ־$V=\bigoplus_{i=1}^m\ker(S_1-\lambda_iI)$, כאשר $\lambda_1\dots\lambda_m$ הע"עים השונים של S_1. לכל $1\le i\le m$ מתקיים ש־V_{λ_i} (המרחב העצמי) הוא S_1־אינווריאנטי שהרי אם $v\in V_{\lambda_i}$ ונחשב:

$$S_1(S_2v)=S_2(S_1v)=S_2(\lambda_iv)=\lambda_iS_2v \implies S_2v\in V_{\lambda_i}$$

כאשר $S_2|_{V_{\lambda_i}}\colon V_{\lambda_i}\to V_{\lambda_i}$ צמודה לעצמה, ולכן המפשט הספקטרלי לצמודות לעצמן אומר שבתוך V_{λ_i} ישנו בסיס אורתוגונלי של ו"עים מ־S_2. האיחוד של כל הבסיסים הללו מכל מ"ע של S_1 יהיה בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל־S_1 ול־S_2. ■

הוכחת המשפט הספקטרלי.

$\Longrightarrow$ לפי המסקנה הקודמת, אם ישנו לכסון אורתוגונלי T בהכרח נורמלית.

$\Longleftarrow$ נגדיר $S_1=\frac{T+T^*}{2},\ S_2=\frac{T-T^*}{2i}$. הן וודאי צמודות לעצמן מהלינאריות וכל השטויות ממקודם, והן גם מתחלפות אם תטרחו להכפיל אותן. מהטענה קיים ל־V בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל־S_1,S_2 ונסמנו $\{b_i\}_{i=1}^n$ וגם $S_1b_i=\alpha_ib_i,\ S_2b_i=\beta_ib_i$. אפשר גם לטעון ש־$\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$ אבל זה לא מועיל לנו. נשים לב ש־$T=S_1+iS_2$, כלומר $\forall i\in[n]\colon T(b_i)=S_1(b_i)+iS_2(b_i)=$ $\alpha_ib_i+i\beta_ib_i=(\alpha+i\beta_i)b_i$ וזהו בסיס אורתוגונלי של ו"עים של T.

■

למעשה, הבנו מהפירוק של S_1,S_2 ש־S_1 נותנת את החלק הממשי של הע"ע ו־S_2 את החלק המדומה.

"אגב – לא השתמשתי במשפט היסודי של האלגברה"