יחסים

<u>תזכורת</u>: <u>יחס</u> R מ-A ל-B הוא $R\subseteq A\times B$.

<u>הרכבת יחסים</u>: יהיו $S\subseteq A\times B$, $R\subseteq B\times C$. ההרכבה $R\circ S$ היא היחס מ-A ל-C המוגדר ע"י:

$$R\circ S=\{\langle a,c\rangle\in A\times C \mid \exists b\in B.\ \langle a,b\rangle\in S\wedge\langle b,c\rangle\in R\}$$

<u>דוגמה</u>: נתונים $S=\{\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 1,3\rangle\}$, $R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$, יחסים מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$. נחשב את ההרכבות:

$$R\circ S=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$$
$$S\circ R=\{\langle 0,3\rangle,\langle 0,0\rangle\}$$

יחסים שחשוב להכיר:

1. יחס הזהות על קבוצה A: $Id_A=\{\langle a,a\rangle \mid a\in A\}$.
2. היחס השלם בין A ל-B: $A\times B$.
   בפרט, היחס השלם מעל A: $A\times A$.
3. היחס הריק מ-A ל-B: $\emptyset$

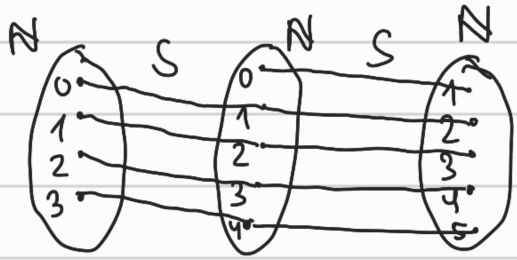
<u>טענה</u>: יהי R יחס מעל A. אזי $R\circ Id_A=R=Id_A\circ R$.

<u>הגדרה</u>: (הרכבות של R עם עצמו) יהי R יחס מעל A.
נגדיר $R^{(0)}=Id_A$, ולכל n טבעי, (נגדיר ברקורסיה): $R^{(n+1)}=R^{(n)}\circ R$.

לדוגמה, $R^{(1)}=R^{(0)}\circ R=Id_A\circ R=R$, $R^{(2)}=R^{(1)}\circ R=R\circ R$, וכו'.

<u>דוגמה</u>: עבור היחס $S=\{\langle n,n+1\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$, מתקיים:

$$S^{(2)}=S\circ S=\{\langle n,n+2\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$$



ועבור $k\in\mathbb{N}_+$, ניתן להוכיח באינדוקציה שמתקיים:

$$S^{(k)}=\{\langle n,n+k\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$$

פונקציות

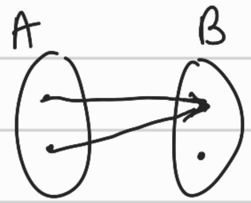
<u>דוגמאות:</u> $f(x)=x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=0$, $y=mx+b$.
$f(x)=\sqrt{x}$, $\pi_1(\langle a,b\rangle)=a$.

<u>הגדרה:</u> יהי R יחס מ-A ל-B.

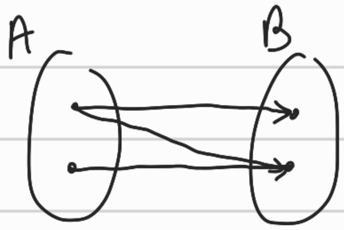
1. נאמר ש-R יחס <u>מלא</u> (ב-A) אם $\forall a\in A.\ \exists b\in B.\ \langle a,b\rangle\in R$.
2. נאמר ש-R יחס <u>חד-ערכי</u> (כלומר: <u>פונקציה חלקית מ-A</u>) אם:

$$\forall a\in A.\ \forall b_1,b_2\in B.\ (\langle a,b_1\rangle\in R\wedge\langle a,b_2\rangle\in R)\to b_1=b_2$$

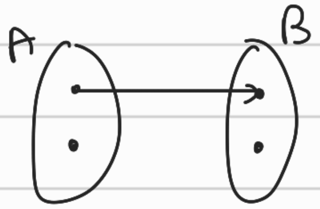
<u>דוגמאות:</u>



מלא, חד ערכי



מלא
לא חד-ערכי



לא מלא
כן חד-ערכי

<u>הגדרה:</u> <u>פונקציה</u> מקבוצה A לקבוצה B היא יחס מלא (ב-A) וחד-ערכי.

<u>הגדרה שקולה:</u> יחס R נקרא פונקציה אם:

$$\forall a\in A.\ \underbrace{\exists!}_{\text{קיים ויחיד}}\, b\in B.\ \langle a,b\rangle\in R$$

<u>טענה:</u> יהיו $S\subseteq A\times B$, $R\subseteq B\times C$.

1. אם R,S מלאים, אז $R\circ S$ מלא (ב-A).
2. אם R,S חד ערכיים, אז $R\circ S$ חד ערכי.
3. אם R,S פונקציות, אז $R\circ S$ פונקציה.

$R_+ = \{x\in R \mid x>0\} = (0,\infty)$

$y = \frac{100}{x}$

דוגמה: $f = \{\langle x,y\rangle \in R_+ \times R_+ \mid x\cdot y = 100\}$.

f יחס מלא ב- R_+ וחד ערכי ולכן פונקציה.

לעומת זאת, אם היינו משנים את R_+ ל- R אז היחס לא היה מלא ולכן לא פונקציה.

סימונים חשובים:

* אם $f\subseteq A\times B$ פונקציה, נהוג לסמן זאת כך: $f: A\to B$.

* אם $f: A\to B$ ומתקיים $\langle a,b\rangle\in f$, אז נכתוב $f(a)=b$, ונאמר ש- b הוא התמונה של a, ונאמר ש- a הוא מקור של b.

ה"הגדרה" מרמזת על כך של- a יש רק תמונה אחת, אבל ל- b "תכן הרבה מקורות".

* קבוצת הפונקציות מ- A ל- B מסומנת ב- $A\to B$, או B^A.

למעשה, הסימונים $f: A\to B$ ו- $f\in A\to B$ הם בעצם אותה משמעות.

דוגמאות: * יחס הזהות הוא פונקציה $Id_A: A\to A$, $Id_A(x)=x$.

* הפונקציה $f(x)=x^2$, $f: R\to R$ היא היחס $f=\{\langle x,x^2\rangle \mid x\in R\}$.

* פונקציות ההטלה הן פונקציות. למשל: $\pi_1: A\times B\to A$, $\pi_1(\langle a,b\rangle)=a$.

* $R=\{\langle x,y\rangle\in R^2 \mid y^2=x\}$ אינו פונקציה כי הוא אינו חד ערכי, למשל $\langle 1,1\rangle, \langle 1,-1\rangle \in R$. אבל, אם נצמצם את התחום ל- $R_{\geq 0}=[0,\infty)$ נקבל פונקציה, זו פונקציית השורש. $\sqrt{\ } = \{\langle x,y\rangle \in R^2_{\geq 0} \mid y^2=x\}$.

משפט: יהיו $g\in B\to C$, $f\in A\to B$. אז היחס $g\circ f$ הוא פונקציה $g\circ f\in A\to C$, ולכל $x\in A$ מתקיים: $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

דוגמה: ניקח את הפונקציות $f,g: R\to R$, $g(x)=3x+1$, $f(x)=x^2+5$.

אז לכל $x\in R$:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+5) = 3(x^2+5)+1 = 3x^2+16$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = (3x+1)^2+5$$

הגדרה: תהי $f:A\to B$.

1. התחום של f הוא הקבוצה A ומסומן $\mathrm{dom}(f)$.
2. הקבוצה B נקראת טווח של f, ומסומנת $\mathrm{range}(f)$.
3. התמונה של f מוגדרת להיות:

$$\mathrm{Im}(f)=\{y\in B \mid \exists x\in A.\ y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in A\}$$

דוגמה: עבור הפונקציה $\sin$, מתקיים שהתחום שלה הוא $\mathbb{R}$, טווח אפשרי: $\mathbb{R}$, והתמונה שלה היא $[-1,1]$.

הערה: לכל פונק' יש מס' טווחים אפשריים, אבל תמונה יחידה. כל קבוצה שמכילה את התמונה של הפונקציה היא טווח אפשרי.