ליניארית 1א - תרגיל בית 6

שחר פרץ

26 בדצמבר 2024

(1)

נחשב את כפל המטריצות הבאות:

א.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 9 & -12 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -7 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-14+9+12+3 \\ 12-14+1+3+9 \\ 3+14-3-4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 5 & 10 \\ 2 & -8 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28+6+4 & 63+42-16 & 42+30+0 & 21+60-6 \\ -12+1+12 & 27+7-28 & 18+5+0 & 9+10-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 89 & 72 & 75 \\ 1 & 6 & 23 & 1 \end{pmatrix}$$

ג.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1-8 & -21-8-32 \\ -2+5+18 & 7-40+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -61 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

(2)

נמצא את כל המטריצות $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ שמתחלפות עם המטריצה $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

תהא $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה. נדרוש $AB = BA$. נגדיר את E להיות הבסיס הסטנדרטי של מרחב המטריצות המרובעות מגודל 2.

$$\bar{C} := \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ c+2d & 2c-d \end{pmatrix} =: \tilde{C}$$

$$\bar{C} = \tilde{C} \iff \bar{C} - \tilde{C} = 0 \iff \begin{pmatrix} a+2c \\ b+2d \\ 2a-c \\ 2b-d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+2b \\ 2a-b \\ c+2d \\ 2c-d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2c-2b \\ -2a+2b+2d \\ 2a-2c-2d \\ 2b-2c \end{pmatrix} = 0$$

נדרג במטריצה.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_n \to \frac{R_n}{2}]{\forall n \in [4]} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_3]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שורת אפסים במטריצה הומגנית שקולה לפסוק אמת ולכן נוכל להישאר שקולים בהתעלמותנו ממנה

$$\xrightarrow[R_1 \to -R_1]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_{1,2} \to R_{1,2} - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \iff a, b, c = 1, d \in \mathbb{R}$$

סה"כ מצאנו:

$$(AB = BA \iff \exists r \in \mathbb{R}\colon AB = BA) \supset \mathscr{A}nswer = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; r \in \mathbb{R} \right\}$$

. . . . (3) . . . .

נחשב את המטריצות הבאות:

א. לפי הגדרה:

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 19 \\ 8 & 6 & 13 \\ -13 & 3 & 8 \\ 9 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -9 & 8 & -13 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 2 \\ 19 & 13 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

ב. לפי הגדרה:

$$\begin{pmatrix} 9-2i & 1+i & 5i & 1 \\ 3i & -8+2i & 4+i & 2-i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -9+2i & -3i \\ 1-i & -8-2i \\ -5i & 4-i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

. . . . (4) . . . .

נגדיר $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. נמצא את כל המטריצות $A \in m_3(\mathbb{R})$ עבורן $AB = A$.

תהי A מטריצה. אז:

$$\ell et\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},\ AB \overset{!}{=} A \iff AB - A = 0 \iff \begin{pmatrix} 2a+2b+2c & b+2c & a+2b+5c \\ 2d+2e+2f & e+2f & d+2e+5f \\ 2g+2h+2i & h+2i & g+2h+5i \end{pmatrix} - A = 0$$

נבחין שההגבלות עבור a,b,c סימטריות לחלוטין לאלו בעבור d,e,f ו־g,h,i (בהתאמה פנימית). לכן נידרש לדרג מטריצה יחידה בלבד. נחסר קודם לכן.

$$\begin{pmatrix} a+b+c \\ -a+c \\ b+4c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{R_3}{2}]{R_2 \to R_2 - R_3} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאנו פתרון טרוויאלי בלבד, כלומר $a,b,c,d,e,f,g,h,i = 0$. סה"כ המטריצה היחידה המקיימת $AB = A$ היא מטריצת ה־0 – $\mathscr{A}nswer = \{0_{M_3(\mathbb{R})}\}$.

. . . . (5) . . . .

תהא $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ העתקה ליניארית. יהי $B = (1, x+1, x^2-x+1)$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ כך ש־:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נמצא את $\ker T, \operatorname{Im} T$.

תמונה. יהי $p \in \mathbb{R}_2[x]$. מהיות בסיס פורש, קיימים $a,b,c \in \mathbb{R}$ כך ש־$[p]_B = (a,b,c)$. הם גם יחידים מהיותו בת"ל. ננסה למצוא את p בבסיס הסטנדרטי E כתלות ב־a,b,c:

$$[p]_E = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \tilde{a} \\ 0 & 1 & -1 & \tilde{b} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{c} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_2 \to R_2 + R_3} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \tilde{a} - \tilde{c} \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{b} + \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{c} \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a} - \tilde{b} - \tilde{c} \\ \tilde{b} + \tilde{c} \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$[T]_B^B[p]_B = \begin{pmatrix} \tilde{a}-\tilde{b}-\tilde{c}+2\tilde{b}+2\tilde{c}+5\tilde{c} \\ -\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c}+\tilde{c} \\ \tilde{b}+\tilde{c}+2\tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}+\tilde{b}+6\tilde{c} \\ -\tilde{a}+\tilde{b}+3\tilde{c} \\ \tilde{b}+\tilde{c} \end{pmatrix} \implies \mathscr{A}nswer = \left\{ \begin{pmatrix} r+s+6t \\ -r+s-3t \\ s+t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(אני יודע שלא הייתי צריך לבצע את ההמרה בין הבסיסים, אבל זה עוזר למציאת הגרעין)

גרעין. נדרוש שאיבר מהתמונה יהיה שווה ל־0. מכיוון שהם מבוטאים ע"י הבסיס הסטנדרטי, נוכל להשתמש בייצוג תחת הבסיס הסטנדרטי וממנו להוציא את מקדמי הפולינום. יהי פולינום $[p]_E = (a,b,c)$, בסעיף הקודם חישבנו את תוצאתו מהתמונה, נדרוש שוויון ל־0 (נשים לב שתחומי קשירת המשתנים מהסעיף הקודם פגו).

$$\begin{pmatrix} a+b+6c \\ -a+b+3c \\ b+c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2+R_1} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 0.5\mathbb{R}_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -3.5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 0.5R_2]{R_3 \to \frac{-2R_3}{7}}$$

המטריצה מדורגת ולכן קיים פתרון קאנוני. נסיק שהפתרון טרוויאלי (אז בסוף לא הייתי צריך לעשות את זה בבסיס הסטנדרטי). סה"כ $\ker T = \{0\}$.

. . . . (6) . . . .

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $a \in \mathbb{F}$ סקלר. נגדיר:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a^n \end{pmatrix}$$

כאשר $A, B \in M_{n+1}(\mathbb{F})$. $AB = aBA$ תוך שימוש בהעתקות $T_a, D\colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_n[x]$ הן:

$$T_a(p)(x) = p(ax), \; D(p)(x) = p'(x)$$

הוכחה. מהידוע על גזירה והצבה בפולינום:

$$\ell et \; p = a_0x^0 + \cdots + a_nx^n \implies p' = 1a_1x^0 + 2a_2x^1 + \cdots + na_nx^{n-1} \wedge p(ax) = (a_0)(ax)^0 + \cdots + (a_n)(ax)^n = a^0a_0x + \cdots + a^na_nx^n$$

מאשר חישבנו, ננסה להביע את הפונקציות $T_a(p), D(p)$ כמפוי בעבור כל קורדינאטה:

$$T_a\colon a_ix^i \mapsto ia_ix^{i-1}, \; D\colon a_ix^i \mapsto a^ia_ix^i$$

כאשר מהמקדם של x נוכל להסיק את המקום בפולינום. לנוחות ופומרליות, נבחין כי:

$$A_{ij} = \begin{cases} j & i+1=j \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \; B = \begin{cases} a^{j-1} & i=j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נגדיר את E להיות הבסיס הסטנדרטי. יהי פולינום p. נתבונן ב־$e_i \in E$ (כאשר e_1 הוא מקדם המשתנה החופשי) ונראה שני שוויונות בעבור $([p]_E)_i$.

- נוכיח $A = [T_a(p)]_E^E$, באמצעות הוכחה ש־$([T_a(p)]_E^E[p]_E)_i = (A[p]_E)_i$ לכל $e_i \in E$. יתקיים:

$$(A[p]_E)_i = \sum_{j=1}^{n+1}([p]_E)_i \cdot A_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{j-2} 0\right) + j([p]_e)_{j-1} + \left(\sum_{k=j}^{n+1} 0\right) = i([p]_E)_{i-1} = ([p']_E)_i = ([T]_E^E[p]_E)_i$$

כלומר A מטריצה מייצגת של T_a לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

- נוכיח ש־$[D]_E^E = B$ באמצעות הוכחה ש־$([D]_E^E[p]_E)_i = (B[p]_E)_i$ לכל $e_i \in E$. אזי:

$$(B[p]_E)_i = \sum_{j=1}^{n+1}([p]_E)_i \cdot B_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{j-2} 0\right) + a^{j-1}([p]_E)_i + \left(\sum_{k=j}^{n+1} 0\right) = a^{i-1}([p]_E^E)_i = ([p(ax)]_E)_i = ([D]_E^E[p]_E)_i$$

כלומר B מטריצה מייצגת של D לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

נרכיב את ההעתקות T_a, D משני הכיוונים כדי להבחין בזהות מעניינת:

$$\begin{aligned}(T_a \circ D)(p) &= T_a(D(p)) = T_a(a^0 a_0 x^0 + a^1 a_1 x^1 + \cdots + a^n a_n x^n) = 1a^1 a_1 x^0 + \cdots + a^n x_n x^{n-1} &:= \tilde{p} \\ (D \circ T_a)(p) &= D(T_a(p)) = \quad D(1a_1 x^0 + 2a_2 x^1 + \cdots + n a_n x^{n-1}) = 1a^0 a_1 x^0 + \cdots + a^{n-1} x_n x^{n-1} &:= \bar{p}\end{aligned}$$

סה"כ, מהידוע על מטריצות מייצגות, ומכל אשר קיבלנו:

$$\begin{aligned}\tilde{p} = a\bar{p} &\implies (T_a \circ D)(p) = a(D \circ T_a)(p) \implies [T_a \circ D]_E^E [p]_E = a[D \circ T_a]_E^E [p]_E \\ &\implies [T_a]_E^E [D]_E^E [p]_B = [D]_E^E [T_a]_E^E [p]_B \implies AB = aBA \qquad \blacksquare\end{aligned}$$