מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 3

מידע כללי

שם: שחר פרץ

ת.ז.: 334558962

מורה: נטלי שלום

תאריך הגשה: 29.11.2023

~ תרגיל בית 3 ~

הערות

1. השתמשתי באנגלית בתוך טקסט של מתמטיקה, כי לא הצלחתי לגרום ללתך לעבוד עם עברית. אני מצטער מראש אם יש לי שגיאות בשמות של מושגים, שכן אני לומד בעברית ולא מכיר שמות של מושגים מתמטיים באנגלית. עשיתי כמיטב יכולתי כדי שזה יהיה ברור ומדויק, אבל יכול להיות שפספסתי משהו.
2. לפעמים אשתמש בכמת "לכל" עבור קבוצות, בלי לציין שאלו בהכרח קבוצות. אלא אם כן צוין אחרת, בהיכתב $\forall A, B, C, D$ (לא בהכרח עבור כל הקבוצות הללו) כוונתי ל"לכל A, B, C, D **קבוצות**". אני מניח שזה ברור אבל רציתי להבהיר את זה כדי למנוע בלבול.
3. לפעמים, כאשר זה ברור מאליו, אני אדלג על כמת "לכל", במיוחד בהקשר של x. כאשר יכולה להיות לזה כל השפעה על ההבנה של ההוכחה, הכמת יצויין.

1. קביעת נכונות טענות

(א) טענה: $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{even}})$ לא נכון. נימוק: נניח בשלילה שזה נכון. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{even}} = \mathbb{N}_{\text{odd}}$, לכן, לפי הגדרת קבוצת חזקה + הצבה, $\{1,2,3\} \subseteq \mathbb{N}_{\text{odd}}$, שגורר $2 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ – סתירה.

(ב) טענה: $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})$ נכון. נימוק: לפי הגדרת הפרש קבוצות:

$$\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land \neg(\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}))$$

מכאן, לפי הגדרת קבוצת חזקה:

$$(\forall x \in \{1,2,3\}. x \in \mathbb{N}) \land (\exists x \in \{1,2,3\} \notin \mathbb{N}_{\text{even}})$$

נציב בתנאי הראשון את כל האיברים ונמצא שכולם נמצאים ב־$\mathbb{N}$. נציב בתנאי השני $x = 2$ ונמצא ש־$2 \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כדרוש.

2. הוכחת טענות הנכונות לכל הקבוצות

הערה

הטענות הבאות, קשורות כל אחת בנפרד, בסעיפיה שלה, בכמת $\forall A, B, C$, גם אם לא צויין כך.

(א) הוכחת זהות של הפרש

- צ.ל.:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

- יהי $x \in A \setminus B$. נגדיר מרחב עבודה $x \in u$ (אפשר להוכיח את קיום מרחב עבודה כזה באמצעות האקסיומות של איחוד). נוכיח ש-$x \in A \cap \overline{B}$ באמצעות מעברי אמ"מ:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\iff x \in A \land x \notin B && \left(\setminus \text{ definition}\right) && (1) \\ &\iff x \in A \land (x \notin B \land x \in u) && (\text{given } x \in u) && (2) \\ &\iff x \in A \land \overline{x} && \left(\overline{X} \text{ definition}\right) && (3) \\ &\iff x \in A \cap \overline{B} && \left(\cap \text{ definition}\right) && (4) \end{aligned}$$

- לפי הגדרת שיוויון בין קבוצות, הוכחנו את הצ.ל.. **מש"ל** ■

(ב) הוכחת זהות של הפרש (פתיחת סוגריים עם חיתוך)

- צ.ל.:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

- נוכיח באמצעות שרשרת זהויות:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap (\overline{B \cup C}) && (\text{known } A \setminus B = A \cap \overline{B}) && (1) \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && (\text{De Morgan}) && (2) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && (\text{Distributive, Commutative}) && (3) \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) && (\text{known } A \setminus B = A \cap \overline{B}) && (4) \end{aligned}$$

- **מש"ל** ■

(ג) הוכחת דה מורגן (איחוד)

- צ.ל.:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- יהי $x \in \overline{A \cap B}$. נגדיר עולם עבודה $x \in u$. לפי הגדרת שיוויון קבוצות, נוכיח אמ"מ $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, זאת אמצעות מעברי אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cap B} &\iff x \in u \land \neg(x \in (A \cap B)) && \left(\overline{X} \text{ definition}\right) && (1)\\
&\iff x \in u \land \neg(x \in A \land x \in B) && \left(\cap \text{ definition}\right) && (2)\\
&\iff x \in u \land (x \notin A \lor x \notin B) && (\text{De Morgan}) && (3)\\
&\iff (x \in u \land x \notin A) \lor (x \in u \land x \notin B) && (\text{Distributive}) && (4)\\
&\iff x \in \overline{A} \land x \in \overline{B} && \left(\overline{X} \text{ definition}\right) && (5)\\
&\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} && \left(\cup \text{ definition}\right) && (6)
\end{aligned}
$$

- **מש"ל** ■

(ד) הוכחת שקילות בדבר איחוד שמוכל בקבוצה

- צ.ל.:

$$A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C \land B \subseteq C$$

- נוכיח בעזרת מעברי אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
A \cup B \subseteq C &\iff \forall x . x \in A \cup B \to x \in C && \left(\subseteq \text{ definition}\right)\\
&\iff \forall x . (x \in A \lor x \in B \longrightarrow x \in C) && \left(\cup \text{ definition}\right)\\
&\iff \forall x . (x \in A \to x \in C) \land (x \in B \to x \in C) && \left(A \lor B \to C \iff A \to C \land B \to C\right)\\
&\iff A \subseteq C \land B \subseteq C && \left(\forall A x . A \land B \longleftrightarrow A x . A \land A x . B, \ \subseteq \text{ definition}\right)
\end{aligned}
$$

- **מש"ל** ■

(ה) שקילות של קבוצה שמוכלת בחיתוך

- צ.ל.:

$$C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \land C \subseteq B$$

- נוכיח בעזרת מעברי אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
C \subseteq A \cap B &\iff \forall x . x \in C \longrightarrow x \in A \land x \in B && \left(\subseteq, \cup \text{ definitions}\right)\\
&\iff \forall x . (x \in C \to x \in A) \land (x \in C \to x \in B) && \left(A \to B \land C \iff (A \to B) \land (A \to C)\right)\\
&\iff C \subseteq A \land C \subseteq B && \left(\forall A x . A \land B \longleftrightarrow A x . A \land A x . B, \ \subseteq \text{ definition})\right)
\end{aligned}
$$

- **מש"ל** ■

3. הוכחת טענות נוספות

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$A \subseteq C \implies B \setminus C \subseteq B \setminus A$$

- כלומר, נניח $A \subseteq C$, ונוכיח $B \setminus C \subseteq B \setminus A$, או במילים אחרות, נניח:

$$A \subseteq B \iff \forall x . x \in A \to x \in C$$

- לפי הגדרת הכלה, צ.ל. $\forall x . x \in B \setminus C \implies x \in B \setminus A$. נוכיח:
- יהי $x \in B \setminus C$. לפי הגדרת הפרש קבוצות $x \in B \wedge x \notin C$. מכאן, לפי ההנחה שלנו, $x \notin A$. סה"כ קיבלנו $x \in B \wedge x \notin A$, כלומר $x \in B \setminus A$, כדרוש.
- **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- נפשט:

$$\begin{aligned} &= (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= \big((A \cap B) \cup (A \setminus B)\big) \cup \big((B \cap A) \cup (B \setminus A)\big) \end{aligned}$$

- הטענה הזו נכונה לפי אסוציאטביות.
- נוכיח שבלי הגדרת הכלליות $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, ואז נציב את זה בטענה שלנו.
  - נגדיר עולם $A, B \subseteq u$ (קיומו נכון מתוך אקסיומת האיחוד).
  - נפשט:

$$\begin{aligned} & (A \cap B) \cup (A \setminus B) && \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) && \big(A \setminus B = A \cap \overline{B}\big) \\ &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \big(\text{Distributive} \\ &= A \cap u && \big(\overline{X}\text{ definition}\big) \\ &= A && \end{aligned}$$

  - הטענה האחרונה נכונה כי u הוא עולם הדיבור שלנו שמוכל ב־A, ולכן מתוך הגדרת הכלה ומתוך הגדרת שיוויון זה נכון.
  - קיבלנו שזה שווה ל־A, כדרוש.
- נציב את זה בטענה שלנו ונקבל $A \cup B$, כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ג)

- צ.ל.:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cup B)$$

- יהי $x \in A \setminus (A \cap B)$. נוכיח $x \in A \setminus B$ בעזרת מעברי אמ"מ (חוקי לפי הגדרת שיוויון בין קבוצות):

$$
\begin{aligned}
x \in A \setminus (A\cap B) &\iff \forall x. x\in A \wedge \neg(x\in A\cap B) && \big(\setminus \text{ definition}\big)\\
&\iff x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B) && \big(\cap \text{ definition}\big)\\
&\iff x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B) && (\text{De Morgan})\\
&\iff (x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B) && (\text{Distributive})\\
&\iff x\in A\wedge x\notin B && \big(Q\wedge\neg Q=\mathrm{F}\big)\\
&\iff x\in A\setminus B
\end{aligned}
$$

- **מש"ל** ■

סעיף (ד)

- צ.ל.:

$$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$$

- יהי $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$. לפי הגדרת שיוויון בין קבוצות, צ.ל. אמ"מ $x\in A\cap(B\setminus C)$. נוכיח בעזרת מעברי אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
& x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)\\
\iff & x\in A\wedge x\in B\wedge\neg(x\in A\wedge x\in C) && \big(\setminus \text{ and } \cap \text{ definition}\big)\\
\iff & x\in B\wedge x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin C) && (\text{De Morgan})\\
\iff & x\in B\wedge\big((x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin C)\big) && \big(A\wedge(B\vee C)\longleftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\big)\\
\iff & x\in B\wedge x\in A\wedge x\notin C && \big(\neg A\wedge A=F\big)\\
\iff & x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C) && (\text{Commutative})\\
\iff & x\in A\cap(B\setminus C) && \big(\setminus \text{ and } \cap \text{ definition}\big)
\end{aligned}
$$

- כדרוש. **מש"ל** ■

4. הוכחת שקילות הגדרות ההפרש הסימטרי

- צ.ל.:

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cup B)$$

- נפשט:

$$
\begin{aligned}
& (A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cup B)\\
\iff & \forall x. x\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\longleftrightarrow x\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)\\
\iff & \forall x. x\in(x\notin A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\
\iff & \forall x. x\in(x\notin A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin B)
\end{aligned}
$$

- יש לנו גרירה דו־כיוונית, על כן נוכיח את שתי הגרירות.
- יהי x. נוכיח עבורו את הטענה.
- גרירה ראשונה:

- נניח $x \in (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$. צ.ל. את החלק השני של הגרירה.
- נפרק למקרים:
  - במקרה והצד הימני של ההנחה מתקיים, אז $x \notin A \wedge x \in B$. לפיכך, $x \in A \vee x \in B$ וגם לפי זה נוכל להגיד ש־$x \in A \vee x \notin B$, שני התנאים הדרושים.
  - נוכיח באופן דומה את המקרה עבורו $x \notin B \wedge x \in A$.
- הגרירה הראשונה הוכחה, כדרוש.

- גרירה שניה:
  - יהי $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ או במילים אחרות $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$. נניח בשלילה שלא $x \in (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$, כלומר $x \in (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \notin A \vee x \in B)$ (לפי דה־מורגן);
  - נוכיח את שני התנאים ההכרחיים – הראשון $x \in A \vee x \notin B$, והשני $x \notin A \vee x \in B$, אשר יתקיים באופן דומה. אמ"מ, נוכיח שבלי הגדרת הכלליות $x \notin A \vee x \in B$.
  - מתוך ההנחה שלנו, x שייך לקבוצה כלשהי A, וגם לא שייך ל־A או שלא שייך לקבוצה כלשהי B. אם $x \notin A$ אז זו סתירה, משמע $x \notin B$, כדרוש.
- הוכחנו את שתי הגרירות, משמע הגרירה הדו כיוונית הוכחה. **מש"ל** ■

5. הוכחת שקילות של שיוויון ושיוויון של קבוצות המהוות איחוד של קבוצה אחרת

- צ.ל.:

$$\forall A, B. A = B \iff (\forall C. A \cup C = B \cup C)$$

- יהיו A, B קבוצות. נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית.
- גרירה ראשונה: $A = B \implies (\forall C. A \cup C = B \cup C)$
  - כלומר, נניח ש־A, B שוות (נגדיר כהנחה 1), ונוכיח שאז יהי קבוצה C המקיימת $A \cup C = B \cup C$. כלומר, $\forall x. x \in A \vee x \in C \iff x \in B \vee x \in C$.
  - בלי הגדרת הכלליות, נניח $x \in A \vee x \in C$ (נגדיר כהנחה 2), נוכיח $x \in B \vee x \in C$. נפרק למקרים: אם $x \in A$, אז נובע מהנחה 1 ש־$x \in B$, אשר מקיים את אשר צריך להוכיח. אם $x \in C$, הגרירה נכונה באופן טרוויאלי.
  - באופן דומה נוכיח את $x \in B \vee x \in C \to x \in A \vee x \in C$.
  - על בסיס ההנחה הוכחנו את אשר דרוש.
- גרירה שניה: $(\forall C. A \cup C = B \cup C) \implies A = B$
  - כלומר, נניח $\forall C. A \cup C = B \cup C$, ונוכיח $A = B$, משמע $\forall x. x \in A \iff x \in B$.
  - מתוך ההנחה שלנו, נסיק שגם עבור $C = \emptyset$ מתקיים $A \cup \emptyset = B \cup \emptyset$.

- ◦ נתונה זהות שבלי הגדרת הכלליות $A \cup \emptyset = A$. נציבה בזהות שהוכחנו בשורה הקודמת, ונקבל $A = B$, אמ"מ הטענה הוכחה.
- הוכחנו את שתי הגרירות, כדרוש. **מש"ל** ■

6. הוכחת שקילויות על קבוצות מוכלות

צ.ל. $A \cup B = B \iff A \setminus B = \iff A \cap B = A \iff A \subseteq B$. נוכיח בשרשרת גרירות. חלק מהגרירות כבר הוכחו בשיעור.

גרירה (ג)

- נוכיח $A \cup B = B \implies A \setminus B = \emptyset$.
- נניח $A \setminus B = \emptyset$, ונוכיח את הגרירה.
- נפשט את ההנחה שלנו, מתוך הגדרת שיוויון ומתוך הגדרת חיסור קבוצות.

$$(A \setminus B = \emptyset) \iff (\forall x. x \in A \setminus B \longleftrightarrow x \in \emptyset) \iff (\forall x. x \in A \land x \notin B \longleftrightarrow x \in \emptyset)$$

- הפישוט לפי הגדרת שיוויון ולפי הגדרת חיסור קבוצות.
- נוכיח בהכלה דו כיוונית את הטענה.
  - ◦ הכלה ראשונה: $A \cup B \subseteq B$: יהי $x \in A \cup B$, כלומר $x \in A$ או $x \in B$. נפרק למקרים ונוכיח ש־$x \in B$:
    - ▪ אם $x \in A$, נניח בשלילה $x \notin B$. לפי הנתון $x \in \emptyset \iff x \in A \land x \notin B$. שזו סתירה כי יתכן מצב בו $x = 1$ (שאינו נמצא בקבוצה ריקה, אך יכול להימצא בכל A). כלומר, $x \in B$.
    - ▪ אם $x \in B$, אז $x \in B$, כדרוש.
  - ◦ הכלה שניה: $B \subseteq A \cup B$. ידוע שטענה זו אמ"מ $\forall x. x \in B \implies x \in B \lor x \in A$, אשר הוא טוטולוגיה, כדרוש.
- הוכחנו את ההכלה הדו־כיוונית, כלומר $A \cup B = B$. **מש"ל** ■

גרירה (ד)

- צ.ל.:

$$A \cup B = B \implies A \subseteq B$$

- נניח $A \cup B = B$. יהי $x \in A$, נוכיח $x \in B$ (לפי הגדרת הכלה, זה מה שעלינו להוכיח).
- נפרק את ההנחה שלנו (בלי קשירה ל"יהי x"):

$$
\begin{aligned}
& A \cup B = B \\
\Longrightarrow\ & \forall x.x \in (A \cup B) \to x \in B && (=,\iff \text{definition}) \\
\iff & \forall x.x \in A \vee x \in B \to x \in B && (\cup\ \text{definition}) \\
\iff & \forall x.(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in B) && ((A \vee B \to C) \iff (A \to C) \wedge (B \to C)) \\
\iff & \forall x.x \in A \to x \in B && (\varphi \wedge T \iff \varphi)
\end{aligned}
$$

- כלומר, הוכחנו ש־$x \in B$, כדרוש. **מש"ל** ■

סיכום

הטענה הוכחה באמצעות שרשרת גרירות, כאשר גרירות (א) ו־(ב) הוכחו בשיעור וגרירות (ג) ו־(ד) הוכחו כאן.

7. הוכחה או הפרכה של טענות

סעיף (א)

- נניח בשלילה:

$$\forall A,B,C,D.(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap B) \cup (C \cap D)$$

- נגדיר:

$$
\begin{aligned}
A &= \{1\} \\
B &= \{2,1\} \\
C &= \{2,3\} \\
D &= \emptyset
\end{aligned}
$$

- נציב ונצמצם:

$$
\begin{aligned}
(\{1\} \cup \{2,1\}) \cap (\{2,3\} \cup \emptyset) &= (\{1\} \cap \{2,1\}) \cup (\{2,3\} \cap \emptyset) \\
\{1,2\} \cap \{2,3\} &= \{1\} \cup \emptyset \\
\{2\} &= \{1\}
\end{aligned}
$$

- שזו סתירה להנחת השלילה.

סעיף (ב)

- נניח בשלילה:

$$\forall A,B.\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

- יהי A,B קבוצות. יהי $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$ נפשט:

$$
\begin{aligned}
& x \in A \cap B && \\
\iff & x \subseteq A \cap B && (\mathcal{P} \text{ definition}) \\
\iff & \forall y. y \in x \to y \in A \cap B && (A \to B \iff \neg A \vee B) \\
\iff & \forall y. (y \notin x) \vee (y \in A \wedge y \in B) && ((y \notin x \vee y \in A) \wedge (y \in x \vee y \in B) \\
\iff & (\forall y. (y \in x \to y \in A) \wedge (\forall y. y \in x \to t \in B) && (\forall x. A \wedge B \iff (\forall x. A) \wedge (\forall x. B), A \to B \iff \neg A \vee B) \\
\iff & x \subseteq A \wedge x \subseteq B && (\subseteq \text{ definition}) \\
\iff & x \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in \mathcal{P}(B) && (\mathcal{P} \text{ definition}) \\
\iff & x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) && (\cap \text{ definition})
\end{aligned}
$$

- כדרוש, לפי הגדרת שיוויון. **מש"ל** ■

סעיף (ג)

- צ.ל.:

$$A \cap B \neq \emptyset \to \mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$$

- נניח את הראשי, נוכיח את הנגרר.

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) && \\
\iff & \forall C. C \in \mathcal{P}(A \setminus B) \to C \in \mathcal{P}(A) \wedge x \notin \mathcal{P}(B) && (\subseteq \text{definition}) \\
\iff & \forall C. C \subseteq (A \setminus B) \to C \subseteq A \wedge C \nsubseteq (B) && (\mathcal{P} \text{ definition}) \\
\iff & \forall C. (\forall x. x \in A \wedge x \notin B) \to (\forall x. x \in A) \wedge (\exists x. x \notin B) && (\subseteq \text{definition})
\end{aligned}
$$

- על מנת להוכיח את הטענה הזו, נניח את הראשי ונוכיח את הנגרר;
  - תהי קבוצה C. מתוך הראשי, ידוע שכל איבר ב־C קיים ב־A (נגדיר כטענה 1) ולא קיים ב־B (נגדיר כטענה 2).
  - ישנם שני תנאים הכרחיים לקיום הטענה: הראשון, שכל איבר ב־C קיים ב־A (שנכון לפי טענה 1), והשני, שקיים איבר ב־C כך שהוא לא קיים ב־B (לפיכך, הוא הדבר שנותר להוכיח).
  - נניח בשלילה לכל יהי x איבר ב־C, x קיים ב־B. הטענה הזו עומדת בשלילה לכך שכל איבר ב־x לא קיים ב־B (שנכון לפי טענה 2).
- הוכחנו את הגרירה, שהיא ביחס אמ"מ לטענה שצ.ל., לכן הטענה הוכחה. **מש"ל** ■

סעיף (ד)

- נניח בשלילה:

$$\forall A, B. \mathcal{P}(A \triangle B) = \mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)$$

- נציב:

$$
\begin{align}
A &= \{1,2\} \tag{1}\\
B &= \{2,3\} \tag{2}\\
C :&= A \triangle B = \{2\} \tag{3}\\
\mathcal{P}(A) &= \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\} \tag{4}\\
\mathcal{P}(B) &= \big\{\emptyset, \{3\}, \{2\}, \{3,2\}\big\} \tag{5}\\
\mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}B &= \big\{\{1\}, \{2\}\{1,2\}, \{3,2\}\big\} \tag{6}\\
A \triangle B &= \{1,3\} \tag{7}\\
\{1,3\} &\in \mathcal{P}(A \triangle B) \tag{8}
\end{align}
$$

- טענה (6) ביחד עם טענה (8) מהוות סתירה לאחר הצבה בהנחת השלילה, כלומר, הטענה שגויה. **מש"ל** ■

8. מציאת תנאי הכרחי ומספיק עבור קיום טענות, והוכחה שלו

סעיף (א)

- נוכיח תנאי הכרחי ומספיק $A = B$:

$$A = B \iff A \triangle B = \emptyset$$

- כלומר, צריך להוכיח ש־$A = B$ אמ"מ:

$$
\begin{aligned}
A \triangle B \longleftrightarrow x \in \emptyset &\iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \longleftrightarrow x \in \emptyset\\
&\iff \forall x. x \in A \setminus B \lor x \in B \setminus A \longleftrightarrow x \in \emptyset\\
&\iff \forall x. (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A) \longleftrightarrow x \in \emptyset
\end{aligned}
$$

- נפלג את הגרירה הדו כיוונית.
- הכרחי:
  - נניח שמתקיים $A = B$ ונוכיח את הטענה הדרושה.
  - כלומר, צריך להוכיח ש־$x \in \emptyset \longleftrightarrow x \in A \setminus B \lor x \in B \setminus A$. ידוע $A = B$, משמע נציב ונקבל אמ"מ $x \in \emptyset \longleftrightarrow x \in A \setminus A \lor x \in A \setminus A$. נתונה זהות $A \setminus A = \emptyset$, כלומר הטענה הקודמת שקולה לטענה $x \in \emptyset \lor x \in \emptyset$. ידועה זהות $A \iff A \lor A$, משמע הטענה הקודמת אמ"מ $x \in \emptyset$, כדרוש.
- מספיק:
  - נניח שמתקיים $x \in \emptyset \longleftrightarrow \forall x. (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A)$ (טענה 1) ונוכיח שנגרר $A = B$.
  - נפלק למקרים ונוכיח את הגרירה (פילוג למקרים של גרירה דו כיוונית נכון לפי הגדרת גרירה דו כיוונית ולפי חוק $A \to C \land B \to C \iff A \lor B \to C$).
  - בלי הגדרת הכלליות $x \in \emptyset \longleftrightarrow x \in A \land x \notin B$, אז או ש־$A = \emptyset$ או ש־$A \subseteq B$ כך ש־B הופרד מכל A (נזכור כי חיסור קבוצות מוגדר לפי עקרון ההפרדה) (נגדיר זאת כטענה 2).
  - לפי טענה 1, בהחלה לתוך טענה 2, נקבל ש־$(A \subseteq B \land B \subseteq A) \lor (A = \emptyset \land B = \emptyset)$ ששקול, לפי הגדרת שיוויון ולפי הכלה דו כיוונית ל־$A = B \iff A = B \land A = B$, כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$A \cup B = A \setminus B \iff B = \emptyset$$

- נפשט נוכיח. יהי A, B קבוצות. נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית.
  - גרירה ראשונה: נניח $B = \emptyset$, נוכיח $A \cup B = A \setminus B$.
    - יהי $x \in A \cup B$. נפשט על מנת להוכיח $x \in A \setminus B$ (אשר צ.ל. לפי הגדרת שיוויון):

$$\begin{aligned}
& x \in A \cup B \\
\iff & x \in A \vee x \in B && (\cup \text{ definition}) \\
\iff & x \in A \vee x \in \emptyset && (\text{given } B =) \\
\iff & x \in A && (\emptyset \text{ definition}) \\
\iff & x \in A \wedge x \notin B && (\emptyset \text{ definition; } \forall x.x \notin \emptyset = B) \\
\iff & x \in A \setminus B && (\setminus \text{ definition})
\end{aligned}$$

    - כדרוש.
  - גרירה שניה: נניח $A \cup B = A \setminus B$, ונוכיח $B = \emptyset$.
    - נפשט את הנתון ונגיע לסתירה בכל מצב אלא אם $x \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
& A \cup B = A \setminus B \\
\iff & \forall x.x \in A \vee x \in B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B && (\cup, \setminus, = \text{ definitions}) \\
\iff & \forall x.(x \in A \wedge x \in A) \wedge (x \in B \wedge x \notin B) && (A \wedge B \to C \iff A \to C \wedge B \to C, \iff \text{definition}) \\
\iff & \forall x.T \wedge (x \in B \wedge x \notin B)
\end{aligned}$$

    - הטענה $x \in B \wedge x \notin B$ נכונה רק אם $B = \emptyset$, כדרוש.
- **מש"ל** ■

סעיף (ג)

- נקבע תנאי הכרחי ומספיק F (קיצור של false). נשים לב כי זה קשור בכמת "לכל" של הטענה עצמה, לכן לא כל טענה אמ"מ F אלא אך ורק לטענה שזה התנאי ההכרחי והמספיק היחידי שלה. צ.ל.:

$$A \cap B = A \setminus B \iff F$$

- יהי x. נוכיח עבורו

$$\begin{aligned}
& x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A \setminus B && (= \text{ definition}) \\
\iff & x \in A \wedge x \in B \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B && (\cap, \setminus \text{definitions}) \\
\iff & (x \in A \longleftrightarrow x \in A) \wedge (x \in B \longleftrightarrow x \notin B) && (A \wedge B \to C \iff A \to C \wedge B \to C, \iff \text{definition}) \\
\iff & T \wedge F \iff F
\end{aligned}$$

- כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ד)

הערה: יש בהוכחה הזו טעויות ואני מודע להן. זה הכי טוב שהצלחתי לספק.

- צ.ל.:

$$\mathcal{P}(A\triangle B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\iff A\subseteq B\vee B\subseteq A$$

- נפשט ונוכיח:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(A\triangle B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) && \\
\iff&\forall x.x\in\mathcal{P}(A\triangle B)\to x\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) && (\subseteq\text{ definition})\\
\iff&\forall x.x\subseteq A\triangle B\to x\in\mathcal{P}(A)\vee x\in\mathcal{P}(B) && (\mathcal{P},\cup\text{ definition})\\
\iff&\forall x.x\subseteq (A\cup B)\setminus(A\cap B)\longrightarrow x\subseteq A\vee x\subseteq B && (\mathcal{P},\triangle\text{ definition})
\end{aligned}$$

- גרירה ראשונה:
  - נכניס את ההנחה שלנו לתוך ההצרנה. נפלג למקרים, הראשון $B\subseteq A$ והשני $A\subseteq B$:
    - מקרה ראשון, A מוכל ב־B:
      - נכניס את ההנחה שלנו:

$$x\subseteq B\setminus A\longrightarrow x\subseteq B$$

      - זה מתוך זה שידוע $A\cup B=B\iff A\subseteq B=A\iff A\subseteq B$
      - כדרוש, הטענה שהגענו אליה טוטולוגיה.
  - המקרה השני יתקיים באופן דומה.

9. הוכחת היחס בין כמות האברים בקבוצה לכמות איברי קבוצת החזקה שלה

- צ.ל.:

$$\forall n\in\mathbb{N}.\forall A.(|A|=n)\implies(|\mathcal{P}(A)|=2^n)$$

- נניח זאת, באינדוקציה על n.
  - בסיס (עבור $n=0$): $|A|=n=0\implies A=\emptyset$. לפיכך, $\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$, אשר מקיים $|\mathcal{P}(A)|=1=2^0$, כדרוש.
  - צעד: נניח $(|\mathcal{P}(A)|=2^n)\implies(|A|=n)$, ונוכיח עבור $n+1$;
    - זהו הצ.ל.:

$$(|A|=n+1)\implies(|\mathcal{P}(A)|=2^{(n+1)}=2^n\cdot 2)$$

- נתבונן בקבוצה B המקיימת $A \subset B$ (קיימת קבוצה כזו עבור כל קבוצה שהיא לא $n = 0$, מקרה הבסיס שלנו שכבר הוכח בנפרד). כמו כן, נבחר את B כך שתקיים $|B| = |A| - 1$ (נכון מאותה סיבה ש־A קיימת מלכתחילה). לפי זאת, קיים איבר x עבורו $x \in B \wedge x \notin A$.
- נתבונן ב־$\mathcal{P}(B)$. ידוע $\mathcal{P}(B) = n$ לפי טענת האינדוקציה. נוכל לבטא את קבוצת החזקה של A בצורה כזו:

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup \{x \cup X . X \in \mathcal{P}(B)\}$$

- זה נכון, כי קבוצת חזקה מכילה את כל האיברים שקיימים בקבוצה הקטנה יותר (B) שמוכלת בה (ולכן מוכלת בקבוצת החזקה שלה, לפי הגדרת קבוצת חזקה והגדרת הכלה), בשילוב עם כל האפשרויות שנותרו – x יחדיו עם כל האיברים ב־$\mathcal{P}(B)$.
- אורך $\mathbb{A} := \{x \cup X . X \in \mathcal{P}(B)\}$ הוא כאורך $\mathcal{P}(B)$, שכן היא לא מכילה חזרות (כי $x \notin X$, לפי הגדרת קבוצת חזקה ולפי הגדרת x כ־$x \in B$).
- גם לאחר השילוב, לא יווצרו כל חזרות שיקטינו את אורך הקבוצה שכן ניתן להתאים לכל קבוצה ב־$\mathbb{A}$ קבוצה באורך קטן ב־1 בתוך $\mathcal{P}(B)$ (לפי האופן בה היא מוגדרת, בה ניקח את אותה הקבוצה הקטנה ב־1 ונוסיף לה איבר 1 שלא מוכל בה, כמו שהוכח בטענה הקודמת, ונקבל קבוצה חדשה ב־$\mathbb{A}$).
- משמע, $|\mathcal{P}(A)| = 2|\mathcal{P}(B)| = 2 \cdot 2^n$, כדרוש.

• האינדוקציה הוכחה. **מש"ל** ■