אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 6

1. יהי $V=\mathbb{C}_{\le 2}[x]$ עם המכפלה האוקלידית

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\overline{q(x)}dx.$$

בצעו את תהליך גרם־שמידט על הבסיס $(1,x+i,x^2)$.

2. יהי V מרחב הרמיטי ממימד $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו שבהינתן סדרה אורתוגונלית $(v_1,\dots,v_k)\subset V$ (של וקטורים שונים מ־ 0), אפשר להשלים אותה לבסיס אורתוגונלי של V, כלומר אפשר למצוא וקטורים $v_{k+1},\dots,v_n\in V$ כך ש־ $(v_1,\dots,v_n)$ בסיס אורתוגונלי של V.

3.

(א) מיצאו $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^2$ כך שלכל $i\neq j$, $v_i\cdot v_j<0$ (המכפלה הסקלרית הסטנדרטית) (כלומר, הזווית בין כל שני וקטורים היא זווית קהה).

(ב) יהי V מרחב אוקלידי ממימד 1. הוכיחו **שלא** קיימים $v_1,v_2,v_3\in V$ כך שלכל $i\neq j$, $\langle v_i,v_j\rangle<0$.

(ג) (רשות) יהי V מרחב אוקלידי ממימד n, ויהיו $v_1,\dots,v_m\in V$ כך ש־ $\langle v_i,v_j\rangle<0$ לכל $i\neq j$. הוכיחו כי $m\le n+1$ (רמז: הוכיחו באינדוקציה על n. השתמשו בפירוק האורתוגונלי של הוקטורים ביחס ל־ $\mathrm{span}(v_m)\oplus v_m^\perp$, והשתמשו בהנחת האינדוקציה במרחב האוקלידי $v_m^\perp$).

(ד) (רשות) הוכיחו כי $v_1,\dots,v_{m-1}$ מהסעיף הקודם הם בת"ל (רמז: הטילו את v_m על $\mathrm{span}(v_1,\dots,v_{m-1})$ והשתמשו בסעיף הקודם).

4.

(א) יהיו $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. הוכיחו ש־ A,B אינן חופפות מעל $\mathbb{R}$, כלומר לא קיימת $M\in M_2(\mathbb{R})$ כך ש־ $A=M^tBM$ (רמז: השתמשו בתנאי על הדטרמיננטה שראיתם.ן בהרצאה).

(ב) יהי F_3 השדה עם 3 איברים (מסומן גם $\mathbb{Z}_3$ או $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$). מיצאו $A,B\in M_2(F_3)$ **הפיכות** שאינן חופפות מעל F_3.

5.

(א) מיצאו את כל המטריצות $A\in M_2(\mathbb{R})$ כך שהתבנית הריבועית המתאימה להן היא

$$q(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix})=x_1^2+3x_1x_2-7x_2^2$$

(ב) מיצאו את כל המטריצות הסימטריות שמתאימות לתבנית הריבועית מהסעיף הקודם.

(ג) מיצאו את כל המטריצות $A\in M_2(\mathbb{R})$ כך ש־

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\cdot_A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=x_1y_1+3x_1y_2-7x_2y_2$$

6.

~~(א)~~ הוכיחו שחפיפת מטריצות היא יחס סימטרי: אם F שדה ו־ $A,B,M \in M_n(F)$ כאשר M הפיכה, כך ש־ $A = M^tBM$ אז קיימת מטריצה Q כך ש־ $B = Q^tAQ$.

~~(ב)~~ דיברנו על כך שכל מטריצה סימטרית ניתנת לחיפסון. הוכיחו את הכיוון השני: אם $A \in M_n(F)$ ניתנת לחיפסון, אז A סימטרית.

7. תהי $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

~~(א)~~ כיתבו נוסחה לתבנית הריבועית שמתאימה ל־ A: $q(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$.

~~(ב)~~ מיצאו חילוף משתנים (במילים אחרות: שינוי בסיס או כפל של המשתנים במטריצה הפיכה) כך שבמשתנים החדשים התבנית המתאימה p היא מהצורה $p(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}) = az^2 + bw^2$ עבור $a,b \in \mathbb{R}$ כלשהם. מה המטריצה M שמתאימה לחילוף המשתנים (כלומר, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$)?

~~(ג)~~ מיצאו $B \in M_2(\mathbb{R})$ סימטרית כך ש־ p היא התבנית הריבועית המתאימה לה.

(ד) ודאו שמתקיים $A = M^tBM$.