# לינארית 2א 8

שחר פרץ

5 במאי 2025

## T-INVARIANT SPACES ........ (1)

בגדול סיימנו את הפרק על חוגים. להלן תוספת קטנה מקורס לינארית 2 של האונ' העברית, שנמצאת באופן חלקי בחומר שלנו.

**הגדרה 1.** נניח ש־$V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו־$T\colon V \to V$ ט"ל. אז $U \subseteq V$ תמ"ו נקרא $T$־אינווריאנטי/$T$-שמורה אם לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.

**דוגמאות.** $V, \{0\}$ הם $T$־אינווריאנטים. גם המ"ע (המרחבים העצמיים) הם $T$־אינוו'.

**סימון 1.** שימו לב: אם $U \subseteq V$ תמ"ו אינווריאנטי, אז $T|_U\colon U \to U$ ט"ל.

נניח ש־$u_1 \dots u_k$ בסיס ל־$U$ כנ"ל, ו־$W \subseteq V$ תמ"ו כך ש־$U \oplus W = V$, ונגיד ש־$w_{k+1} \dot{w}_n$ בסיס ל־$W$, אז $B = (u_1 \dots u_k, w_{k+1} \dots w_n)$ מקיים:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_{|_U}] & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(כאשר $[T_{|_U}] \in M_k$ ו־$B \in M_k$).

**הגדרה 2.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $T\colon V \to V$ ט"ל ו־$v \in V$ וקטור. אז תת־המרחב־הציקלי הנוצר מ־$T$ ע"י $T$ הוא

$$\mathcal{Z}(T, v) := \operatorname{span}\{T^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

**טענה.**

- $\mathcal{Z}(T, v)$ תמ"ו של $V$ – טרוויאלי .
- $\mathcal{Z}(T, v)$ תמ"ו $T$־־אינ' – טרוויאלי גם.

עתה נציג משהו נחמד. אם $V$ נוצר סופית, גם $\mathcal{Z}(T, v)$ נ"ס. נגיד שיהיה $n \in \mathbb{N}_0$ מינימלי, כך ש־$\mathcal{Z}(T, v) = \operatorname{span}\{v, Tv, \dots T^{n-1}v\}$. אז $T^n v \in \mathcal{Z}(T, v)$. לכן קיימים $a_0 \dots a_{n-1}$ כך ש־$T^n v + a_{n-1}T^{n-1}v + \dots + a_0 v = 0$. ניתן לקחת כבסיס את $v, Tv \dots T^{n-1}v$ של $\mathcal{Z}(T, v)$. אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כאשר השורה האחרונה כי:

$$T(T^{n-1}v) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k v$$

כלומר, $A_f = [T]_B$ היא המטריצה המצורפת לפולינום $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

## EXTENDING FIELDS ........ (2)

**הגדרה 3.** $I \subseteq R$ אידיאל נקרא ראשוני אם $\forall a, b \in R\colon (a \cdot b) \subseteq P$, אז $(a) \in P \vee (b) \in P$.

**הגדרה 4.** אידיאל $I \subseteq R$ נקרא אי־פריק אם $\forall a, b \in R$ אם $I = (a \cdot b)$ אז $I = (a)$ או $I = (b)$.

ראינו, שבתחום ראשי אי פריק=ראשוני. ניתן להראות באופן שקול כי:

**משפט 1.** $R$ תחום ראשי, אז $I$ ראשוני אמ"מ $I$ אי־פריק.

**הגדרה 5.** יהי $R$ תחום שלמות [אפשר להתעסק גם עם אידיאל ימני ושמאלי] ונניח ש־$I \subseteq R$ אידיאל. אז $R/_I := \{a + I \mid a \in R\}$ הוא חוג (בהגדרת $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$ חיבור מנות), כאשר הפעולות:

- $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$
- $(a+I)(b+I)=ab+I$

צריך להוכיח שזה לא תלוי בנציגים (הנציגים $a, b$) והכל אבל בן לא עומד לעשות את זה.

**משפט 2.** בתחום ראשי $R$, אם $I$ אידיאל אי־פריק, אז $R/_I$ שדה.

**דוגמאות.**

- $\mathbb{Z}/_{\langle p\rangle}$ שדה.
- $\mathbb{R}[x]$ תחום ראשי, ידוע $x^2+1$ אי־פריק. לכן $\mathbb{R}[x]/_{\langle x^2+1\rangle}\cong\mathbb{C}$. הרעיון: נוכל להסתכל על $p$ פולינום המבוטא כמו:

$$p(x)=q(x)\cdot(x^2+1)+ax+b=ax+b+\langle x^2+1\rangle$$

ואם נכפיל שני יצורים כאלו:

$$((ax+b)+I)+(cx+d+I))=acx^2+(ad+bc)x+bd+I$$

אך ידוע ש־$x^2+1=0$ (כי זה האידיאל שלנו) עד לכדי נציג, כלומר מתקיים שוויון ל־$bd-ac+(ad+bc)+I$ זהו כפל מרוכבים. אפשר גם להראות קיום הופכי וכו'.

הוכחה. יהי $0\neq a+I\in R/_I$. אם $a\neq 0$, אז ב־$R$ מתקיים $p\nmid a$ אי $p$ א"פ (אם הוא היה מחלק את $a$ אז $a=0$) ולכן $p, a$ זרים (כי האידיאל אי פריק וכו'). אז קיימים $r, s\in R$ כך ש־$ar+ps=1$. סה"כ:

$$ar+ps+I=1+I\implies ar+I=1+I\quad\top$$

לכן $r+I$ הופכי של $a+I$ וסיימנו. ■

(למעשה זה אממ).

........................................................................................................................

**שחר פרץ, 2025**

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד