מתמטיקה בדידה – תרגיל בית 16

שחר פרץ

12 במרץ 2024

שאלה 1

בכל סעיף, צ.ל. עוצמת הקבוצה המוגדרת גדולה ממש מ־$\aleph_0$.

סעיף (א)

נזמן ב־A את קבוצת הפונקציות ב־$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שאינן חח"ע. צ.ל. $A < \aleph_0$

הוכחה. נוכיח גדול ולא שווה.

- $\leq$**:** נבחר פונקציה $h\colon \mathbb{N} \to A$ מתאימה.

$$h = \lambda n \in \ \mathbb{N}.\lambda m \in \mathbb{N}.n$$

נוכיח כמה טענות:

- $\mathbf{range}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}$**:** יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $h(n) \in A$ כלומר $h(n)$ אינה חח"ע. נניח בשלילה $h(n)$ חח"ע, נקבל $\forall i, j \in \mathbb{N}.h(n)(i) = h(n)(j) \implies i = j$, סתירה לכך שבעבור $i = 0, j = 1$ יתקיים $h(n)(i) = h(n)(j) = n$ למרות ש־$i \neq j$ כי $1 \neq 0$. סה"כ הגענו לסתירה כלומר $h(n)$ אינה חח"ע, משמע $h(n) \in A$.
- $\boldsymbol{h}$ **חח"ע:** יהיו $n, m \in \mathbb{N}$, ונניח $h(n) = h(m)$, נוכיח $n = m$. נניח בשלילה $n \neq m$, לפיכך משוויון פונקציות $\forall i \in \mathbb{N}.h(n)(i) = h(m)(i)$ $n \neq m =$ וזו סתירה, לכן $n = m$ כדרוש.

סה"כ מצאנו פונקציה חח"ע בטווח המתאים ולכן $\aleph_0 \leq A$.

- $\neq$**:** נניח בשלילה קיום $F\colon \mathbb{N} \to A$ זיווג. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} 0 & n = 0 \vee n = 1 \\ F(n-2)(n) + 1 & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח כמה טענות.

- $\boldsymbol{g \in A}$**:** נוכיח g לא חח"ע, נניח בשלילה שהיא חח"ע ונקבל סתירה בעבור $g(1) = 0 = g(0)$ למרות ש־$1 \neq 0$.
- $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}.F(n) \neq g}$**:** יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $F(n) \neq g$. נניח בשלילה שוויון, לכן משוויון פונקציות ערכי החזרתן יהיו שווים לכל $i \in \mathbb{N}$, ובפרט בעבור $i = n + 2$. לכן, $F(n)(n+2) = g(n+2) = F(n\cancel{+2-2})(n+2) + 1$ כלומר נחסר אגפים ונקבל $0 = 1$ – סתירה.

סה"כ מצאנו פונקציה $g \in A \wedge \forall n \in \ N.F(n) \neq g$ כלומר F לא על A וזו סתירה לכך ש־F זיווג. על־כן, $|A| \neq \aleph_0$.

נסכם: $|A| \neq \aleph_0 \wedge |A| \leq \aleph_0$ כלומר $\aleph_0 < |A|$ כדרוש. ■

סעיף (ב)

נסמן ב־A את קבוצת הפונקציות ב־$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהן על $\mathbb{N}$. צ.ל. באמצעות לכסון $A < \aleph_0$.

הוכחה. נוכיח אי שוויון עוצמות חזק.

- $\leq$**:** נניח בשלילה קיום זיווג $F\colon \mathbb{N} \to A$. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ F(\frac{n-1}{2})(n) + 1 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נוכיח כמה טענות:

- **מוגדר היטב:** הביטוי $F(\frac{n-1}{2})$ מוגדר היטב לכל $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ כי $2 \mid n - 1$ וגם $n - 1 \leq 0$ ולכן $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$. סה"כ כל שאר הביטויים מוגדרים גם הם.
- $\boldsymbol{g \in A}$**:** צ.ל. $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (שמתקיים מתחשיב למדא + $F(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ולכן $F(n)(n) \in \mathbb{N}$), וכי הוכח בסעיף הקודם כי g פונקציה. נוסף על כך, צ.ל. g על. יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל. קיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$g(m) = n$. נבחר $m = 2n$. משום ש־$2 \mid 2n$ אזי $g(2n) = \frac{2n}{2} = n$ כדרוש. סה"כ $g \in A$.
- $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}.F(n) \neq g}$**:** יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל $F(n) \neq g$ כלומר משלילת שוויון פונקציות צריך למצוא $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$F(n)(m) \neq g(m)$. נבחר $m = 2n + 1$, נניח בשלילה קיום שוויון ונקבל:

$$\begin{aligned} F(n)(2n+1) &= g(2n+1) && \beta \wedge 2 \nmid 2n+1 \\ F(n)(2n+1) &= F(\tfrac{2n+1}{2})(2n+1) + 1 = F(n)(2n+1) + 1 && -F(n)(2n+1) \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

וזו סתירה, כלומר מצאנו m מתאים לדרישות והפרכנו קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$F(n) = g$.

סה"כ, $g \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}.F(n) \neq g$, כלומר F אינה על A, וזו סתירה לכך ש־F זיווג. הפרכנו את טענת השלילה ומצאנו כי $|A| \neq \aleph_0$

- $\leq$**:** נמצא פונקציה חח"ע $h\colon \mathbb{N} \to A$:

$$h = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda m \in \mathbb{N}.\begin{cases} m & m \leq n \\ m - 1 & m > n \end{cases}$$

נוכיח כמה טענות:

- **$\mathbf{range}(\boldsymbol{h})) = A$:** יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $h(n) \in A$ כלומר $h(n)$ על, או באופן שקול, יהי $m \in \mathbb{N}$, נמצא $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$g(k) = m$ נפלג למקרים. אם $k \leq n$, נבחר $k = m$ ויתקיים ישירות $h(n)(k) = h(n)(m) = m$ כדרוש. אם $m + 1 > m > n$, אז נבחר $k = m + 1$ וסה"כ $h(n)(k) = h(n)(m + 1) = m + 1 - 1 = m$ כדרוש.
- **$\boldsymbol{g}$ חח"ע:** יהיו $m, n \in \mathbb{N}$, נניח $h(n) = h(m)$ ונוכיח $n = m$. נניח בשלילה $m \neq n$, בה"כ $m > n$ משוויון פונקציות, $\forall i \in \mathbb{N}.h(n)(i) = h(m)(i)$ ובפרט בעבור $i = m > n$, נקבל $h(n)(m) = m - 1 \neq h(m)(m)$, וזו סתירה. סה"כ $n = m$ כדרוש.

נסכם: h חח"ע ובעלת הטווח המתאים, ולכן $|A| \leq \aleph_0$

סה"כ $|A| \neq \aleph_0 \wedge \aleph_0 \leq |A|$ כלומר $|A| > \aleph_0$ כדרוש. ■

סעיף (ג)

נגדיר $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}.f(n) \leq n\}$. צ.ל. $A < \aleph_0$

הוכחה. נוכיח אי שוויון עוצמות חזק.

- **$\leq$:** פונקציה חח"ע:

$$h\colon \mathbb{N} \to A, f = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda m \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & m \leq n \\ m & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח שהיא חח"ע. יהי $i, j \in \mathbb{N}$, בה"כ $i \leq j$, נניח $h(i) = h(j)$. משוויון פונקציות, $\forall n \in \mathbb{N}.h(i)(n) = h(j)(n)$, בפרט בעבור $n = i$. לכן, $h(i)(i) = 0 = h(j)(i)$. נוכל להניח $j \neq 0$ כי אם לא כן אז $i \leq j = 0$ כלומר $i = 0$ וסיימנו. נניח בשלילה $j \neq i$, לכן $j > i$ כלומר $h(j)(i) = i \neq 0$ וזו סתירה. סה"כ $i = j$ כדרוש. [לתקן מקרי קצה]. נותר להוכיח ש־$\mathrm{range}(h) = A$. יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל. $h(n) \in A$. יהי $m \in \mathbb{N}$, נפלג למקרים. אם $m \leq n$ אז $f(n)(m) = 0 \leq m$ כדרוש. אחרת, $f(n)(m) = m \leq m$ כדרוש.
מצאנו פונקציה חח"ע מתאימה ולכן $|A| \leq \aleph_0$.

- **$\neq$:** נניח בשלילה קיום $F\colon \mathbb{N} \to A$ פונקציה חח"ע. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ g = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \min(n, h(i+1)(i)) - 1 & n > 0 \end{cases}$$

נוכיח כמה טענות שייסיעו לנו:

- **$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}.\boldsymbol{F(n)} \neq \boldsymbol{g}$:** יהי $n \in \mathbb{N}$, נניח בשלילה $g = F(n)$, לכן משוויון פונקציות, הן יהיו שוון בערכן לכל איבר מתחומן, ובפרט $n - 1$. נפצל למקרים:
  * נניח בשלילה $n = 0$ ולכן $n - 1 \notin \mathbb{N}$ כלומר $F(n)(n-1)$ אינו מוגדר וזו סתירה.
  * אם $F(n)(n-1) > n > n - 1$ ולכן $F(n)(n-1) \neq n - 1$ וגם $g(n-1) = \min(F(n-1+1)(n-1), n) - 1 = n - 1 \neq F(n)(n-1)$ וסה"כ $F(n)(n-1) \neq g(n-1)$ וזו סתירה.
  * אם $F(n)(n-1) \leq n$ אז $\min(F(n)(n-1), n) = F(n)(n-1)$ ולכן $g(n-1) = F(n-1+1)(n-1) - 1 = F(n)(n-1) \neq F(n)(n-1)$ וזו סתירה.

  סה"כ בכל המקרים הגענו לסתירה כלומר לא קיימת פונקציה $g = F(n)$.
- **$\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{A}$:** ראשית, דרוש כי $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $g(n) \in \mathbb{N}$. אם $n = 0$ אז $g(n) = 0$ כדרוש, אם $n \neq 0$ אז $n \leq 1$ ולכן $\min(n, x) > 1$ וכי $F(n)(n) \in \mathbb{N}$ אז סה"כ $g(n) \in \mathbb{Z} \wedge g(n) > 0$ כלומר $g(n) \in \mathbb{N}$ כדרוש. שנית, נוכיח $\forall n \in \mathbb{N}.f(n) \leq n$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נפלג למקרים. אם $n = 0$ אז $n = 0 \leq 0 = f(n)$ כדרוש. אם $n \neq 0$ אז $g(n) = \min(n, F(n)(n)) - 1 < n$ כדרוש.
  סה"כ $g \in A$ מעקרון ההפרדה.

לסיכום, $g \in A \wedge \forall n \in \mathbb{N}.g \neq F(n)$ כלומר F לא על A וזו סתירה, לכן $|A| \neq \aleph_0$.

נסכם: $|A| \leq |\aleph_0| \wedge |A| \neq \aleph_0$ לכן לפי הגדרה $|A| < \aleph_0$ כדרוש. ■

סעיף (ד)

יהי $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. נגדיר $B = \{f \in \mathbb{N} \to \{0, a\} \mid \nexists n \in \mathbb{N}.f(n) = f(n+1) = a\}$, צ.ל. $|B| < \aleph_0$.

הוכחה. נוכיח אי שוויון עוצמות חזק:

- **$\leq$:** נתבונן בפונקציה הבאה:

$$h = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda m \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & m \neq n \\ a & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח שהיא פונקציה חח"ע ל־B. נניח $n, m \in \mathbb{N} \wedge h(n) = h(m)$, לכן מתחשיב למדא $\forall i \in \mathbb{N}.h(n)(i) = h(m)(i)$ ובפרט בעבור $i = n$ יתקיים $h(n)(i) = 0$, נניח בשלילה $m \neq n$, לכן $h(m)(i) = a$, ומרטנזיטיביות $a = 0$ וזו סתירה לכך ש־$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, לכן $n = m$ והפונקציה חח"ע. עתה, נוכיח $A = \mathrm{range}h$. יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל. $\nexists m \in \mathbb{N}.f(n)(m) = f(n)(m+1) = a$. נניח בשלילה קיום n כזה, ונסמן $f = h(n)$. נפלג למקרים. אם $n = a$ אז $n + 1 \neq a$ כלומר $a = 0 = f(n+1) = a = f(n)$ וזו סתירה כי $a \neq 0$. אם $n \neq a$ אז $a = f(n+1) = 0 = f(n)$ וזו סתירה. סה"כ $h\colon \mathbb{N} \to A$ זיווג, כלומר $|A| \leq \aleph_0$ כדרוש.

- **$\neq$:** נניח בשלילה קיום זיווג $F\colon \mathbb{N} \to A$. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \\ a - F\left(\frac{n}{2}\right)(n) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \end{cases}$$

נוכיח כמה טענות. ראשית כל, $g \in A$, כי נניח בשלילה קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = f(n+1) = f(n)$. אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $g(n+1) = 0 \neq a$ וזו סתירה, ואם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $g(n) = 0 \neq a$ וזו סתירה. לכן, מהיות F זיווג ולכן על A, בהכרח קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$g = F(n)$. משוויון פונקציות, בפרט יתקיים שוויון עבור הכנסת הערך $2n$. ידוע $2 \mid 2n$ לכן $2n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, סה"כ $g(2n) = a - F\left(\frac{2n}{2}\right)(2n)$. מטרנזיטיביות $F(n)(2n) = a - F(n)(2n)$ כלומר $a = 0$ וזו סתירה לקיומו של n, כלומר F אינו זיווג, סתירה להנחת השלילה, לכן $|A| \neq \aleph_0$

סה"כ $|A| \geq \aleph_0 \wedge |A| \neq \aleph_0$ כלומר $|A| > \aleph_0$ כדרוש. ■

סעיף (ה)

נגדיר $C = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}.f(n) + f(n+1) \equiv 1 \mod 3\}$. צ.ל. $|C| > \aleph_0$.

הוכחה. נוכיח אי־שוויון עוצמות חזק.

- $\le$**:** נמצא פונקציה חח"ע מתאימה. נבחר:

$$f\colon \mathbb{N}\to C,\ f=\lambda m\in\mathbb{N}.\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 3m & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח f חח"ע ובטווח המתאים. **חח"ע:** יהי $n,m\in\mathbb{N}$, נניח $f(n)=f(m)$, לכן משוויון פונקציות $\forall i\in\mathbb{N}.f(n)(i)=f(m)(i)$ ובפרט עבור $i=1$ נקבל $3n=3m$ וסה"כ $n=m$ כדרוש. **טווח:** יהי $n\in\mathbb{N}$. צ.ל. $f(n)\in C$. ברור כי $f(n)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. יהי $i\in\mathbb{N}$, צ.ל. $f(n)(i)+f(n)(i+1)\equiv 1 \pmod 3$. מכיוון שחיבור הוא קומוטטיבי, נוכל בה"כ להניח $i\in\mathbb{N}_{\text{even}}$. סה"כ $f(n)(i)=1, f(n)(i+1)=3n$, כלומר $f(n)(i)+f(n)(i+1)=3n+1$ ומשום ש־$n\in\mathbb{N}$ אזי $(3n+1)\bmod 3=1$ כדרוש.

- $\ne$**:** נניח בשלילה קיום זיווג $h\colon\mathbb{N}\to C$. נתבונן בפונקציה:

$$g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}, g=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}3(h(i)(i)+1) & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 3(h(i)(i)+3) & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

ראשית כל, נוכיח ש־$g\in C$. יהי $i\in\mathbb{N}$, צ.ל. $g(n)+g(n+1)\equiv 1 \pmod 3$. משום שחיבור הוא קומוטטיבי, נוכל להניח בה"כ $i\in\mathbb{N}_{\text{even}}$, סה"כ $g(i)+g(i+1)=3(h(i)(i)+1)+3(h(i)(i)+3)=6(h(i)(i))+4\equiv 1 \mod 3$ (השקילות מתקיימת כי $h(i)(i)\in\mathbb{N}$), ולכן $g\in C$. נניח בשלילה שקיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$h(n)=g$. משוויון פונקציות $\forall i\in\mathbb{N}.h(n)(i)=g(i)$ ובפרט בעבור $n=i$. נפלג למקרים: אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$, אז $h(n)(n)=3h(n)(n)+1$, נעביר אגפים ונקבל $h(n)(n)=-0.5$ וזו סתירה. באופן דומה, אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $h(n)(n)=-1.5$ וזו גם סתירה. סה"כ $g\in A/\text{Im}h$ כלומר h לא על בסתירה לכך ש־h זיווג, לכן $|C|\ne\aleph_0$.

הוכחנו $|C|\le\aleph_0\wedge|C|\ne\aleph_0$ או באופן שקול $|C|>\aleph_0$ כדרוש. ■

סעיף (ו)

נגדיר $Y=\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\setminus(\mathbb{N}\to\mathbb{N})$. צ.ל. $\aleph_0>|Y|$.

הוכחה. נוכיח גדול אך לא שווה.

- $\le$**:** נתבונן בפונקציה $h\colon\mathbb{N}\to Y$ הבאה:

$$h=\lambda n\in\mathbb{N}.\{\langle 0,n\rangle\}$$

ידוע $\text{range}(h)=Y$ כי לכל $n\in\mathbb{N}$ יתקיים $h(n)=\{\langle 0,n\rangle\}$ ומשום ש־$0,n\in\mathbb{N}$ אז $\langle 0,n\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ולכן $\{\langle 0,n\rangle\}\in\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ וגם $h(n)\notin\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כי h אינה מלאה (דוגמה נגדית $h(1)$ אינו מוגדר). סה"כ $h(n)\in Y$ לפי הגדרת $\setminus$ כדרוש. נותר להוכיח h חח"ע. יהי $n,m\in\mathbb{N}$, נניח $h(n)=h(m)$, לכן $\{\langle 0,n\rangle\}=\{\langle 0,m\rangle\}$. משוויון קבוצות, $\langle 0,n\rangle=\langle 0,m\rangle$ ומשוויון פונקציות $0=0\wedge n=m$ כלומר $n=m$ כדרוש.

- $\ne$**:** נניח בשלילה קיום זיווג $F(n)\colon\mathbb{N}\to Y$, ונסמן $\forall n\in\mathbb{N}.R_n=F(n)$. נתבונן ביחס הבא:

$$S=\bigcup_{i=1}^{n}\Big(\{\langle n-1,x\rangle \mid x\notin\{m\in\mathbb{N}\mid (n-1)R_{n-1}m\}\}\Big)\cup\{\langle 0,0\rangle,\ \langle 0,1\rangle\}$$

נוכיח כמה טענות שייסייעו לנו:

  - $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}.F(n)\ne S}$**:** יהי $n\in\mathbb{N}$, נניח $F(n)=R_n=S$, ולכן מהכלה דו כיונית, בפרט $\langle n+1,x\rangle\in R_n \implies \langle n+1,x\rangle\in S$. אם $\langle n-1,x\rangle\in S$, אז $x\notin\{m\mid (n+1)R_{n-1+1}m\}$ כלומר $\neg nR_nx$ כלומר $\langle n+1,x\rangle\notin R_n$ וזו סתירה.
  - $\boldsymbol{S\in Y}$**:** נניח בשלילה S פונקציה, לכן לכל $x,y\in\mathbb{N}.\langle 0,x\rangle,\ \langle 0,y\rangle\in S \implies x=y$ אך בעבור $x=0,y=1$ מתקיים $\langle 0,0\rangle,\ \langle 0,1\rangle\in S$ למרות ש־$0\ne 1$ וזו סתירה.

סה"כ, מצאנו $S\in Y$ אך בניגוד לכך $\forall n\in\mathbb{N}.F(n)\ne Y$, כלומר F אינה על Y וזו סתירה לכך ש־$|Y|=\aleph_0$.

נסכם: $|Y|\ne\aleph_0\wedge|Y|\ge\aleph_0$ כלומר $|Y|>\aleph_0$ כדרוש. ■

סעיף (ז)

נגדיר $X=\{f\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}\colon\forall n\in\mathbb{N}.|f^{-1}[\{n\}]|\ge 2\}$. צ.ל. $|X|>\aleph_0$.

הוכחה. נוכיח אי־שוויון עוצמות חזק.

- $\le$**:** נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f=\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda m\in\mathbb{N}\begin{cases}0 & m\le n+1\\ \frac{m+n}{2}+1 & m+n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{m+n+1}{2}+1 & m+n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$$

נוכיח שהיא פונקציה חח"ע בעלת טווח מתאים.

  - **חח"ע:** יהיו $i,j\in\mathbb{N}$, ונניח $f(i)=f(j)$. בה"כ נניח $j\ge i$. משוויון פונקציות, נסיק שהפונקציות שתיקבלו יחזירו ערכים זהים לכל ערך, ובפרט בעבור $n=i-2$. לכן, נקבל $0=f(i)(i-2)=f(j)(i-2)$. נניח בשלילה $j>i$, ונסיק $0=h(i)$ כאשר $h(i)>\le i$ (כאילו אין לי כוח לפלג לעוד מקרים) ומשום ש־$i>1$ זו סתירה, לכן $i\ge j\wedge j\ge i$ כלומר $i=j$ כדרוש. במקרה ו־$i=0$ אז $j\ge i$ כלומר $j=0=i$. אם $i=1$ אז נניח בשלילה $j=0$ ונקבל בעבור 3 אשר $f(i)(3)=0\ne h(3,0)=f(i)(3)$ וזו סתירה, לכן $i=j=1$ כדרוש. סה"כ בכל המקרים $i=j$ כלומר f חח"ע.
  - **טווח:** נרצה להוכיח $X=\text{range}(f)$. יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $g:=f(n)\in X$. יהי $m\in\mathbb{N}$, צ.ל. $|g^{-1}[\{m\}]|\ge 2$, כלומר את קיום $i,j\in\mathbb{N}$ שונים כך ש־$m=g(j)=g(i)$. עבור $n=0$ נבחר $i=0,j=1$ ונקבל פסוק אמת. עבור $n>0$ נבחר $i=2m-3-n,j=2m-2-n$ וסה"כ נקבל פסוק אמת מכלל β.

- $\ne$**:** נניח בשלילה קיום זיווג $F\colon\mathbb{N}\to X$. מטעמי נוחות, נסמן $F(n):=f_n$. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ g=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & n=0\vee n=1\\ F(\frac{n}{3}-1)(3n+3)+1 & n\equiv 0\\ \frac{n+2}{2} & n\equiv 1\\ \frac{n+1}{2} & n\equiv 2\end{cases}\qquad\pmod 3$$

כדי להראות סתירה, נוכיח $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\ne g\wedge g\in X$.

  - $f_n\ne g$: יהי $n\in\mathbb{N}$, נוכיח $f_n\ne g$. נניח בשלילה קיום שוויון, לכן $\forall i\in\mathbb{N}.f_n(i)=g(i)$ ובפרט בעבור $i=3n+3$, כלומר $f_n(3n+3)=g(3n+3)$. משום ש־$3n+3\equiv 0 \mod 3\wedge 3n+3\ne 0,1$ אזי מהגדרת g המפוצלת נקבל $f_n(3n+3)=F(\frac{3n+3}{3}-1)(3n+3)+1=f_n(3n+3)+1$ וסה"כ $1=0$ וזו סתירה. נסיק $f_n\ne g$

- $g \in X$: יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל. $|g^{-1}[\{x\}]| \geq 2$ כלומר $\exists i,j \in \mathbb{N}.i \neq j \wedge g(i) = g(j) = n$. נפלג למקרים.
  * אם $n = 0$, נבחר $i = 0, j = 1$ וסה"כ $g(i) = g(j) = 0$ כדרוש.
  * אם $n \neq 0$ נבחר $i = 2n-2, j = 2n-1$. משום ש־$i \equiv 1, j \equiv 2 \pmod 3$ אז $g(i) = \frac{2n-2+2}{2} = n = \frac{2n-1+1}{2} = g(j)$ וסה"כ $g(i) = g(j) = n$ כדרוש.

נסכם: $g \in X$ אבל $\forall n \in \mathbb{N}.F(n) \neq g$, ובאופן שקול F לא על, בסתירה לכך ש־F זיווג.

הוכחנו $|X| \leq \aleph_0 \wedge |X| \neq \aleph_0$ או באופן שקול $|X| > \aleph_0$ כדרוש. ■

שאלה 2

סעיף (א)

הטעות בפתרון של אדון שוקו הינה שהוא מניח כי f ב־X, הנחה שדרושה בשביל לסתור את היות F חח"ע. f תלויה ליניארית ב־F, פונקציה שאינה ידוע עליה כלום פרט לכך שהיא זיווג, וודאי שלא ידוע עליה שום מידע בדבר המצאותה ב־X.

סעיף (ב)

הוכחה. נניח בשלילה שקיימת פונקציה $F : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$. נתבונן בפוקציה הבאה:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} (F(i)(i) + 1) + 1$$

ברור כי $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. מהנחת השלילה, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$F(n) = g$. לכן:

$$h(n)(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i)(i) + n + 1 \geq F(n)(n) + 2$$

סה"כ מטרנזיטיביות נקבל $F(n)(n) \geq F(n)(n) + 2$, נחסיר $F(n)(n)$ משני האגפים ונקבל $0 \geq 2$, וזו סתירה.

עתה, נותר להוכיח כי $F \in X$, כלומר F פונקציה עולה. יהיו $m, n \in \mathbb{N}$, ונניח $n \leq m$ (כלומר $m - n \leq 0$). צ.ל. $f(n) \leq f(m)$, כלומר:

$$\begin{aligned}
&(1) && f(n) \leq f(m) && \iff \\
&(2) && \sum_{i=0}^{n} (F(i)(i) + 1) + 1 \leq \sum_{i=0}^{m} (F(i)(i) + 1) + 1 && \iff \\
&(3) && \sum_{i=0}^{n} (F(i)(i)) + n + 1 \leq \sum_{i=0}^{m} (F(i)(i)) + m + 1 && \iff \\
&(4) && 0 \leq \sum_{i=n}^{m} \underbrace{(F(i)(i))}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{m - n}_{\geq 0} && \iff
\end{aligned}$$

חיבור של מספרים טבעיים / חיוביים הוא חיובי בעצמו, וסה"כ מצאנו שקילות לפסוק אמת, כדרוש. נסכם: $g \in X \wedge \nexists n \in \mathbb{N}.F(n) = g$ כלומר F לא על, סתירה לכך שהיא זיוווג. ■

שאלה 3

נגדיר את יחס השקילות H באופן הבא:

$$H \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2, \ \forall f, g, \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} fHg \iff \forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{2} f(3n+i) = \sum_{i=0}^{2} g(3n+i)$$

סעיף (א)

טענה: $gHid_{\mathbb{N}} \wedge g \neq id_{\mathbb{N}}$. g מוגדרת באופן הבא:

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ g = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} n & n \equiv 0 \\ n+1 & n \equiv 1 \\ n-1 & n \equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

סעיף (ב)

תהי קבוצת פונקציות $f_0, f_1, f_2, \dots \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בת מנייה. טענה: h המוגדרת באופן הבא מקיימת $\forall i \in \mathbb{N}.\neg f_i H h$:

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ h = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} f_{\frac{n}{3}}(n) + 1 & n \equiv 0 \\ f_{\frac{n-1}{3}}(n) & n \equiv 1 \\ f_{\frac{n-2}{3}}(n) & n \equiv 2 \end{cases} \pmod 3$$

הוכחה. נניח בשלילה שקיימת פונקציה f_i כך ש־$f_i H g$. מכאן, יתקיים שוויון לכל $n \in \mathbb{N}$ כמפורט ביחס השקילות, ובפרט בעבור $n = 3i$. נציב ונחשב אלגברית:

$$\begin{aligned}
&(1) && \sum_{i=0}^{2} f(3n+i) = \sum_{i=0}^{2} g(3n+i) && \iff \\
&(2) && g(9i) + g(9i+1) + g(9i+2) = f_i(9i) + f_i(9i+1) + f_i(9i+2) && \iff \\
&(3) && f_i(9i) + 1 + f_i(9i+1) + f_i(9i+2) = f_i(9i) + f_i(9i+1) + f_i(9i+2) && \iff \\
&(4) && 1 = 0 && \iff
\end{aligned}$$

וזו סתירה. ■

~ ~ ~ סוף ~ ~ ~