מתמטיקה בדידה - תרגול מס' 9 - קומבינטוריקה בסיסית

הגדרה. נסמן $[n]=\{1,...,n\}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$.

ספירה בסיסית - עם ובלי חזרות, עם ובלי חשיבות לסדר

משפט. מספר הדרכים לסדר n עצמים שונים בשורה:

$$n!=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots2\cdot1=\prod_{i=1}^{n}i$$

משפט. מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל: $(n-1)!$.

הוכחה. נראה שתי פתרונות.

1. נשים את העצם הראשון במיקום מסוים במעגל, ונסדר את יתר העצמים ביחס אליו. סה"כ $(n-1)!$ אפשרויות.
2. נסמן ב x את מספר האפשרויות לסדר n עצמים במעגל. נסדר n עצמים בשורה באופן הבא: ראשית נסדר אותם במעגל (x אפשרויות), ולאחר מכן נבחר מיקום "לחתוך" בו את המעגל כך שיתקבל סידור בשורה (n מיקומים אפשריים). סה"כ נקבל שיש $x\cdot n$ דרכים לסדר n עצמים בשורה. לכן $x\cdot n=n!$ ונקבל ש $x=\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

$\square$

תרגיל. במשפחת ברנולי יש אב, אם ו-k ילדים.

1. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול?
2. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר יש מקום מסומן בשולחן בו האב יושב?
3. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר האב והאם יושבים תמיד אחד ליד השני?
4. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר אסור לשני ההורים לשבת ביחד?

פתרון.

1. זהו סידור של $k+2$ אנשים במעגל: $(k+1)!$ אפשרויות

2. נושיב את האב במקום המסומן (אפשרות אחת) ואז את יתר האנשים, סה"כ $(k+1)!$ אפשרויות.

3. נתייחס לאב ולאם כישות אחת, כלומר לסדר $k+1$ אנשים במעגל: $k!$. לאחר מכן, "נכניס סדר" בין אבא לאמא ובסה"כ $2!k!$.

4. נחשב את המאורע המשלים ונחסר מסך כל האפשרויות. מהסעיף הקודם, נקבל כי בסה"כ מספר האפשרויות הוא $(k+1)!-2!k!$.

הערה. בסעיף האחרון, שימו לב שמתקיים $(k+1)!-2!k!=k!\left((k+1)-2\right)=k!\left(k-1\right)$. נסו לחשוב על פתרון שנותן באופן ישיר את הביטוי $k!\left(k-1\right)$.

פיזור כדורים בתאים

נתונים n תאים (תאים תמיד יהיו שונים). בכמה אופנים ניתן לפזר בהם k כדורים כאשר:

	אין חשיבות לסדר	יש חשיבות לסדר
אסור חזרות	כדורים זהים, בכל תא לכל היותר כדור אחד $C\left(n,k\right)=\binom{n}{k}$	כדורים שונים, בכל תא לכל היותר כדור אחד $P\left(n,k\right)=\frac{n!}{(n-k)!}$
מותר חזרות	כדורים זהים, אין מגבלה למספר כדורים בתא $S\left(n,k\right)=\binom{k+n-1}{k}$	כדורים שונים, אין מגבלה למספר כדורים בתא: n^k

שאלות שקולות:

1. $\binom{n}{k}$: כמה תתי קבוצות בגודל k ניתן לבחור מתוך $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$?

2. $P\left(n,k\right)$: מספר הדרכים לבחור k אנשים מתוך n ולסדרם בשורה.

3. $S\left(n,k\right)$: מה מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+\ldots+x_n=k$ כאשר $x_i\in\mathbb{N}$ לכל i.

4. n^k: כמה סדרות באורך k יש מעל א"ב בגודל n?

תרגיל. כמה אפשרויות יש להושיב n אנשים על ספסל, אם:

1. משה רואה את דן מימינו (לאו דווקא צמוד).

2. משה רואה את דן מימינו ומיכל רואה את רונה משמאלה.

3. ליאת רואה את אדם ורונן משמאלה.

פתרון.

1. נבחר שני מקומות לדן ומשה, $\binom{n}{2}$ אפשרויות (אין צורך להכניס "סדר" ביניהם כי ברגע שנקבעו המקומות הסדר כבר נקבע). לאחר מכן, נסדר את יתר האנשים. סה"כ: $\binom{n}{2}\left(n-2\right)!$.

2. בדומה, נבחר שני מקומות לדן ומשה, שני מקומות מבין הנותרים למיכל ורונה ולאחר מכן נסדר את כל השאר. סה"כ: $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)!$.

3. נבחר שלושה מקומות וכעת יש שתי אפשרויות סידור חוקיות לאדם ורונן. לבסוף, נסדר את הנותרים. סה"כ: $\binom{n}{3}2!(n-3)!$.

הערה. בסעיף הראשון, נשים לב שמתקיים $\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! = \frac{n!}{2}$. ניתן להצדיק זאת ע"י "שיקולי סימטריה": בדיוק בחצי מ $n!$ הסידורים האפשריים דן מימין למשה. נסו לפשט את הביטויים בסעיפים האחרים ולהסביר את הביטוי שמתקבל באופן ישיר.

תרגיל. נתונות האותיות A, B, C, D כל אחת 4 פעמים. כמה מילים בנות 10 אותיות ניתן ליצור מהן, אם כל אות צריכה להופיע לפחות פעמיים?

פתרון שגוי: נדאג שכל אות תופיע לפחות פעמיים: ראשית נבחר 2 מקומות מתוך 10 לאות A, לאחר מכן 2 מקומות מתוך ה 8 הנותרים לאות B וכן הלאה. נישאר עם 2 מקומות פנויים שבהם יש 4 אפשרויות איזה אות להוסיף. סה"כ:

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}4^2$$

הבעיה: יש מילים זהות שמתקבלות ביותר מדרך אחת, ולכן נספרות יותר מפעם אחת. לדוגמא, המילה $AABBCCDDAA$ יכולה להתקבל אם בשלב הראשון בוחרים לשים A בשני המקומות הראשונים, ואילו שני המקומות האחרונים נותרים פנויים בשלב האחרון, ואנו בוחרים לשניהם את האות A, באופן דומה היא יכולה להתקבל אם בשלב הראשון בוחרים לשים A בשני המקומות האחרונים, ואילו שני המקומות הראשונים נותרים פנויים בשלב האחרון, ואנו בוחרים לשניהם את האות A. ויש דרכים נוספות לקבל את אותה מילה.

פתרון.
נפריד לשני מקרים זרים:

- אות אחת מופיעה 4 פעמים, ושאר האותיות מופיעות פעמיים. במקרה זה, ישנן 4 אפשרויות לבחור את האות שמופיעה 4 פעמים ואז יש לסדר את יתר האותיות:

$$\binom{4}{1}\frac{10!}{4!2!2!2!}$$

- שתי אותיות מופיעות שלוש פעמים והשתיים הנותרות מופיעות פעמיים. ישנן $\binom{4}{2}$ אפשרויות לבחור את האותיות שתופענה פעמיים ואז יש לסדר את יתר האותיות:

$$\binom{4}{2}\frac{10!}{3!3!2!2!}$$

וודאו כי מקרים אלו מכסים את כל המקרים האפשריים, ולכן התשובה הסופית היא סכומם $\binom{4}{1}\frac{10!}{4!2!2!2!} + \binom{4}{2}\frac{10!}{3!3!2!2!}$.

תרגיל. כמה פתרונות יש למשוואות הבאות?

1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}$ לכל $1 \leq i \leq 100$.
2. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}^+$ לכל $1 \leq i \leq 100$.
3. $\sum_{i=1}^{100} x_i \leq 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}$ לכל $1 \leq i \leq 100$.

פתרון.

1. חלוקת 200 כדורים זהים ל- 100 תאים עם חזרות. לכן: $S\left(100, 200\right) = \binom{200+100-1}{200}$.
2. נחלק תחילה כדור אחד לכל תא, ואת ה100שנותרו נחלק בדומה לסעיף קודם. לכן: $S\left(100, 100\right) = \binom{100+100-1}{100}$.
3. נוסיף עוד תא "זבל" שיקבל את מה שנשאר מהכדורים שחולקו. במילים אחרות, מספר הפתרונות הדרוש שווה למספר הפתרונות של $\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right) + y = 200$ כאשר $x_i \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ לכן: $S\left(101, 200\right) = \binom{200+101-1}{200}$.

תרגיל. כמה זוגות של קבוצות $\langle A, B\rangle$ מקיימים: $A, B \subseteq [n]$ ו $|A \cap B| = k$?

פתרון. נבחר את $C = A \cap B$, יש לכך $\binom{n}{k}$ אפשרויות. כל האיברים שאינם ב-C, ויש $n-k$ כאלה, יכולים להיות או רק ב-A, או רק ב-B או לא בשתיהן, ולכן יש לנו 3 דרכים לבחור איפה כל אחד מהם נמצא, סה"כ יש $\binom{n}{k} \cdot 3^{n-k}$ אפשרויות.

תרגיל. כמה סדרות בינאריות באורך n מכילות בדיוק k תוים של 1 , כך ש:

1. אף שני 1-ים אינם צמודים?
2. בין כל שני 1-ים יש לפחות שני 0-ים?

פתרון.

1. נחשוב על ה-$n-k$ אפסים בתור מחיצות פנימיות של $n-k+1$ תאים, כאשר בכל תא יכול להיות אפס או אחד 1-ים (זה שקול לכך שאין שני 1-ים צמודים). סה"כ $\binom{n-k+1}{k}$.
2. נחשוב על ה-k אחדים בתור מחיצות פנימיות של $k+1$ תאים, כאשר בכל תא פנימי (יש $k-1$ כאלה) יש לפחות שני אפסים (זה שקול לכך שאין שני 1-ים שבינהם פחות משני 0-ים).
כלומר שאלה שקולה:
כמה פתרונות יש ל-$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = n-k$ כאשר $x_1, x_{k+1} \geq 0$ ו-$x_2, x_3, \ldots, x_k \geq 2$.
שקול ל: כמה פתרונות יש ל-$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} = n-k-2\left(k-1\right)$ כאשר לכל $x_i \geq 0$. כאלה יש בדיוק $S\left(k+1, n-3k+2\right) = \binom{n-2k+2}{k}$.

מסקנה. יש $\binom{n-k+1}{k}$ תתי קבוצות בגודל k של $[n]$ ללא שני איברים סמוכים.

הגדרה. זיווג $f\in[n]\to[n]$ נקרא תמורה של $[n]$.

שאלה 4 (מבחן)

תרגיל. סעיף א: כמה איברים יש בקבוצה הבאה

$$\left\{f\in[n]\to[6]\mid\exists s\in\mathbb{N}.\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)=3s\right\}$$

נמקו.

פתרון. נשים לב שלכל בחירה של $f\left(1\right),....,f\left(n-1\right)$ יהיו בדיוק שתי בחירות של $f\left(n\right)$ עבורן $\sum_{k=1}^{n}f\left(k\right)$ מתחלק ב-3. לכן התשובה היא $2\cdot6^{n-1}$.

תרגיל. סעיף ב: יהי k טבעי כך ש-$1\leq k\leq n$. כמה תמורות $f\in[n]\to[n]$ מקיימות $\forall i\in[k].f\left(i\right)\leq f\left(k\right)$? נמקו. תשובה עם סכימה תזכה בניקוד חלקי.

פתרון. ניסוח שקול: בכמה תמורות של $[n]$ האיבר k מופיע מימין ל-$\{1,...,k-1\}$? נבחר ראשית k מקומות לאיברים $\{1,...,k\}$ ונשים את k במקום הימני ביותר: יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות. נסדר את האיברים $1,\ldots,k-1$ ב-$k-1$ המקומות שנותרו: $(k-1)!$ אפשרויות. את שאר ה-$n-k$ האיברים נסדר ב-$n-k$ המקומות שנותרו: $(n-k)!$ אפשרויות. סה"כ:

$$\binom{n}{k}\cdot(k-1)!\cdot(n-k)!=\frac{1}{k}\cdot n!$$

למעשה יכולנו להגיע לזה מראש משיקולי סימטריה. כי על כל סידור חוקי (k מופיע במקום "הנכון" שלו) יש $k-1$ סידורים לא חוקיים, לכן זה $\frac{1}{k}$ מכלל הסידורים שיש.