מתמטיקה בדידה ~ קומבי 6 ~ שיטת הפולינום האופייני

שחר פרץ

29 למאי 2024

1 הגדרה ומבוא

הגדרה: בהינתן נוסחאות נסידה $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ (כאשר c_1, c_2 קובעים ו־$c_2 \neq 0$), הפולינום האופייני שלה הוא $p(x) = x^2-c_1x-c_2$.

לא ניכס להוכחה של שיטת פתרון האופייני, אך להלן טעימה מתוך ההוכחה: **טענה:** תהי נוסחת נסיגה הנ"ל,

1. אם α הוא שורש של הפולינום האופייני, אז הסדרה $a_n = \alpha^n$ מקיימת את נוסחאת הנסיגה.

   הוכחה. מהנתון α שורש של הפולינום האופייני, נקבל:

$$\begin{aligned} p(\alpha) = \alpha^2 - c_1\alpha - c_2 = 0 & \\ \alpha^n - c_1\alpha^{n-1} - c_2\alpha^{n-2} = 0 & \quad \cdot\alpha^{n-2} \\ \alpha_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} & \end{aligned}$$

   צ.ל. $\alpha^n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2}$, וקיבלנו זאת לעיל. ■

2. אם $a_n = \alpha^n$ ו־$b_n = \beta^n$ מקיימות את נוסחאת הנסיגה, אז גם כל קומבינציה ליניארית שלהם מקיימת את נוסחת הנסיגה.

   כלומר, לכל $A, B \in \mathbb{R}$ יתקיים $A \cdot a_n + B \cdot b_n$ מקיימת את נוסחאת הנסיגה. (זו גם טענה קלה להוכחה שלא תוכח כאן).

ניתן להוכיח כי הקומבינציות הליניאריות של α, β הן היחידות שמקיימות את נוסחאת הנסיגה, אך את ההוכחה נראה רק באלגברה ליניארית בעוד שנה.

2 השיטה

vh, $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ ($c_1, c_2 \neq 0$ קבועים);

1. נחשב את הפולינום האופייני $x^2 - c_1x - c_2$
2. נמצא את שורשיו, יסימנו r_1, r_2 (לא בהכרח שונים, אם הריבוי הוא 2).
3. נחלק למקרים:
   - אם $r_1 \neq r_2$: הפתרון לנוסחת הנסיגה הוא $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ לכל $A, B \in \mathbb{R}$
   - אם $r = r_1 = r_2$: הפתרון הכללי הוא מהצורה: $a_n = A \cdot r^n + B \cdot nr^n$.
4. נציב את תנאי ההתחלה כדי למצוא את A, B.

3 דוגמאות

3.1

ננסה למצוא נוסחה לסדרת פיבונאצ'י. תזכורת:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0, \ F_1, = 0 \end{cases}$$

פולינום אופייני: $x^2 - x - 1$. נמצא שורשים. נקבל $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot r\cdot(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. לכן, הפתרון הכללי שני נוסחת הנסיגה הוא:

$$F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} F_0 = 0 = A + B \\ F_1 = 1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

נחשב ונקבל $A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. נציב ונקבל:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

הערה: יחס הזהב, הינו $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$ (אי־רציונלי מן הסתם) הוא הערך של $\lim_{x\to\infty}\frac{F_x}{F_{x-1}}$.

3.2

שאלה: נתון שביל בממדים $n \times 2$ומרצפות בממדים $1 \times 2, 2 \times 1, 2 \times 2$. נסמן ב־$a_n$ את מספר הריצופים השונים האפשריים של השביל בעבור n. מצאו נוסחה סגורה.

תשובה: נתבונן בשביל. נפריד למקרים, לפי המשבצת השמאלית עליונה.

- אם כיסינו אותה ע"י 2×2, אז נותר לרף שביל $(n-2) \times 2$ באותם התנאים ולכך יש a_{n-2} אפשרויות.
- אם כיסינו אותה ע"י 2×1, אז יש a_{n-1} אפשרויות לרף את יתר השביל.
- אם עיסינו אותה ע"י 1×2, אז גם שתי המשבצות שמתחתיה יכוסו גם הן ע"י 1×2 ועבור יתר השביל יהיו a_{n-2} אפשרויות.

סה"כ, נוסחת הנסיגה תהיה:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_{n-2} = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

נצטרך למצוא את תנאי ההתחלה. ברור כי $a_1 = 1$ (ע"י המרצפת 2×1) ו־$a_0 = 1$. לא לחלוטין ברור למה $a_0 = 1$, לכן נמצא את $a_2 = 3$, ולפיו נציב ונמצא את a_0: $3 = 1 + 2a_0$ כלומר $2a_0 = 2$ וסה"כ $a_0 = 1$ כדרוש.

נסכם:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_{0,1} = 1 \end{cases}$$

נרצה למצוא נוסחה סגורה. פולינום אופייני: $x^2 - x - 2$, למה כל המורים מסוכלים לעשות טרינום בראש $(x-2)(x+1) = 0$ כלומר $x_{1,2} = -1, 2$ כלומר הפתרון הכללי $A \cdot 2^n + B(-1)^n$. נציב תנאי התחלה: $1 = 2A - B \wedge 1 = A + B$. נפתור, ונמצא ש־$A = \frac{2}{3}$ ו־$B = \frac{1}{3}$.

3.3

"תרגילון": נסו למצוא נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

3.4

תרגיל: בכמה מילים באורך n מעל $\{A, B, C\}$ מופיע הרצף CB?

תשובה: אפשר לפתור במגוון דרכים, אך הפעם נרצה לפתור בנוסחאות נסיגה. נפריד למקרים לפי התו הראשון. הפתרון יסומן ב־a_n. איור של ההפרדה למקרים:

$$a_n \begin{cases} A\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ B\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ C\begin{cases} CA\underbrace{\qquad}_{n-2} \\ CC\left\{\ldots\right. \end{cases} \end{cases}$$

1. אם הוא מתחיל ב־A: אז לאחריו יהיו a_{n-1} תווים בעלי אותה המגבלות, כלומר a_{n-1} אפשרויות
2. אם הוא מתחיל ב־B: כנ"ל
3. אם הוא מתחיל ב־C: יש כמה אפשרויות:

- יותר מבלבל, ופחות פורמלי: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 1 + 1$. באופן דומה $a_{n-1} = 2a_{n-2} + \cdots + a_1 + 1 + 1$. נחסר בין המשוואות:

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-2} + \cancel{a_{n-3} - a_{n-3} + \cdots = \cdots + a_1 - a_1}$$

סה"כ קיבלנו $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. תנאי התחלה: $a_0 = 1$ (בעבור המילה הריקה), $a_1 = 3$.

- דרך אחרת, מבלבלת פחות ועם נוסחאות נסיגה מסדר מוגדר היטב: עשינו משהו דומה ביום שני. נסמן ב־b_n את מספר המילים החוקיות שמתחילות ב־C, וב־a_n את המילים החוקיות:

$$a_n \underbrace{\qquad}_{n} \begin{cases} A\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ B\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ C\underbrace{\qquad}_{n-1} b_n \end{cases} \implies (I)\ a_n = 2a_{n-1} + b_n \implies (III)\ a_{n-1} = 2a_{n-2} + b_{n-1}$$

ידוע גם:

$$b_n\, \underbrace{C\qquad}_{n} \begin{cases} CA\underbrace{\qquad}_{n-2} a_{n-2} \\ CC\underbrace{\qquad}_{n-2} b_{n-1} \end{cases} \implies (II)\ b_n = a_{n-2} + b_{n-1}$$

מטעמי קריאות, מומלץ לקרוא למשוואות משוואה 1 ושמוואה 2. נעשה זאת גם כאן. ממשוואה I נקבל $b_n = a_n - 2a_{n-1}$. נחסר בין III לבין II:

$$a_{n-1} - b_n = a_{n-2}$$

נציב את b_n:

$$a_{n-1} - (a_n - 2a_{n-1}) = a_{n-2}$$

וסה"כ $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$.

- הדרך המומלצת ביותר:

$$a_n \begin{cases} A\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ B\underbrace{\qquad}_{n-1} a_{n-1} \\ C?? \end{cases}$$

ננסה להבין כמה אפשרויות יש לאשר ב־$??$, הוא מילה חוקית באורך $n-1$ שלא מתחילה ב־B. מעקרון המשלים, מס' המילים החוקיות באורך $n-1$ שלא מתחילות ב־B הוא:

$$a_{n-1} - a_{n-2}$$

כי $\underbrace{B\underbrace{\qquad}}_{n-1}$. וסה"כ:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2}$$

כלומר $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ כדרוש.