אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 5

24 בנובמבר 2025

תזכורת: יהי $U < \mathbb{R}^n$. **השיקוף האורתוגונלי** ביחס ל־ U הוא $r_U(v) = p_U(v) - p_{U^\perp}(v)$ כאשר p_U ההטלה הא"ג על U ו־ $p_{U^\perp}$ ההטלה הא"ג על $U^\perp$. ראינו שזו העתקה אורתונורמלית (הכל ביחס למכפלה הסקלרית הסטנדרטית).

~~1.~~ יהי $U < \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$ ותהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה אורתונורמלית כך ש־ $T|_U = \mathrm{Id}$.

~~(א)~~ הוכיחו ש־ $T = \mathrm{Id}$ או ש־ $T = r_U$ (רמז: היעזרו בשאלה 6 מהתרגיל הקודם).

~~(ב)~~ הוכיחו שקיים בסיס $\mathcal{B}$ של $\mathbb{R}^3$ כך ש־ $[r_U]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

~~2.~~ אילו מהפונקציות הבאות הן מכפלות אוקלידיות על $\mathbb{R}^2$? הוכיחו זאת או תנו דוגמה נגדית.

~~(א)~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$

~~(ב)~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1y_2$

~~(ג)~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1x_2$

~~(ד)~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1^2x_2^2$

~~(ה)~~ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$

~~3.~~ יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ו־ $\cdot : V \times V \to F$ מכפלה אוקלידית.

~~(א)~~ נקבע $u \in V$ ונגדיר $T : V \to F$ על ידי $T(v) = v \cdot u$. האם T העתקה ליניארית (תזכורת: F הוא גם מרחב וקטורי מעל עצמו)? הוכיחו זאת או תנו דוגמה למרחב וקטורי עם מכפלה אוקלידית עבורם זה לא מתקיים.

~~(ב)~~ היזכרו ש־ $V \times V$ הוא גם מרחב וקטורי. האם $S : V \times V \to F$ המוגדרת על ידי $S(v, u) = v \cdot u$ העתקה ליניארית? הוכיחו זאת או תנו דוגמה למרחב וקטורי עם מכפלה אוקלידית עבורם זה לא מתקיים.

~~4.~~ יהי $(v_1, \ldots, v_n)$ בסיס למרחב וקטורי V מעל שדה F. נניח ש־ $B_1, B_2 : V \times V \to F$ שתי מכפלות אוקלידיות (כלומר המכפלה האוקלידית הראשונה של הוקטורים u ו־ v מסומנת ב־ $(B_1(v, u)$). נניח שעבור $1 \leq i, j \leq n$ עם $i \leq j$ מתקיים $B_1(v_i, v_j) = B_2(v_i, v_j)$. הוכיחו כי $B_1 = B_2$.

5. השלימו את התרגיל מתרגול 5: נביט ב־ $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה ויהי

$$V = \mathrm{span}(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) < \mathbb{R}^4.$$

היעזרו בתהליך גרם־שמידט כדי למצוא בסיס אורתונורמלי ל־ $V^\perp$.

~~6.~~ יהי V מרחב אוקלידי ויהי $v \in V$ כך שלכל $u \in V$ מתקיים $\langle v, u\rangle = 0$. הוכיחו ש־ $v = 0$.

~~7.~~ תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה. בהינתן $v, u \in \mathbb{R}^n$, נגדיר $\langle v, u\rangle_A = Av \cdot Au$ כאשר $\cdot$ היא המכפלה הסקלרית הסטנדרטית.

~~(א)~~ הוכיחו כי $\langle , \rangle_A$ היא מכפלה אוקלידית. איפה השתמשתם.ן בכך ש־ A הפיכה?

~~(ב)~~ תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. מיצאו את המרחב הניצב לוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ביחס ל־ $\langle , \rangle_A$)

~~(ג)~~ עבור A מהסעיף הקודם, מיצאו בסיס אורתונורמלי ל־ $\mathbb{R}^2$ (ביחס ל־ $\langle , \rangle_A$).

~~8.~~ יהי $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. זה תת־מרחב וקטורי ממימד 3 של $M_2(\mathbb{R})$. מיצאו בסיס אורתונורמלי ל־ V ביחס למכפלה האוקלידית $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$.

~~9.~~ יהי V מרחב אוקלידי ו־ $T : V \to V$ העתקה ליניארית. יהי $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס אורתונורמלי ל־ V. הוכיחו כי

$$\mathrm{tr}([T]_{\mathcal{B}}) = \sum_{j=1}^{n} \langle Tv_j, v_j\rangle.$$