אוניברסיטת ת"א
סמסטר ב', תשפ"ה
תאריך הגשה: 21/04/2025

תרגיל בית 1 במבני נתונים

על כל התשובות להיות מנומקות. בכל שאלה יש לבחור במימוש היעיל ביותר האפשרי מבחינת סיבוכיות זמן. יש לענות על השאלות במקומות המוגדרים לכך. **כל log הינו בבסיס 2.**

~~שאלה 1~~

נתבונן בטיפוס רשימה, כפי שנלמד בשיעור. נגדיר פעולה חדשה על מבנה הרשימה, Shift(L,i), המקבלת כקלט רשימה L ואינדקס i, ומשנה את הרשימה כך שהאיבר שהיה במקום הj הופך להיות במקום ה$\mathrm{j+i \ (mod\ n)}$. ניתן להניח כי $0 \le i < n$ כאשר אורך הרשימה הוא n והאינדקס של האיבר הראשון ברשימה הוא 0.

לדוגמה, אם הרשימה L מכילה את האיברים 5,7,3,9,2, לאחר הרצת הפעולה Shift (L,3) איברי L יהיו 3,9,2,5,7. אם הרשימה L מכילה את האיברים 5,7,3,9,2, לאחר הרצת הפעולה Shift (L,1) איברי L יהיו 2,5,7,3,9.

כתבו פסאודו-קוד עבור מימוש יעיל ככל האפשר של הפעולה עבור כל אחד מהמקרים הבאים. בסעיפים ב',ג' וד' נתחו את סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה כפונקציה של אורך הרשימה n והאינדקס i . בסעיף א', הסבירו מדוע לא ניתן לנתח את סיבוכיות זמן הריצה של הפעולה.

~~א.~~ כאלגוריתם שמשתמש ברשימה כללית (כלומר ב-List ADT כפי שהוגדר בכיתה).
~~ב.~~ כפעולה חדשה על רשימה במימוש מערך מעגלי.
~~ג.~~ כפעולה חדשה על רשימה במימוש רשימה מקושרת (חד כיוונית).

~~שאלה 2~~

נגדיר "מחסנית מינימום" כ-ADT התומך בפעולות הבאות:

- Init – אתחול מבנה הנתונים כאשר הוא ריק
- Insert(x) – הכנת המספר x למבנה.
- RemoveLast – הוצאת האיבר שהוכנס אחרון והחזרתו כפלט
- Min – החזרת ערך המספר הקטן ביותר במבנה.

ניתן להניח כי בכל זמן כל המספרים במחסנית שונים זה מזה.

א. הציעו מימוש ל"מחסנית מינימום", כאשר סיבוכיות הזמן הנדרשת לכל הפעולות היא $O(1)$.

ב. הוסיפו את הפעולה הבאה:

- Add(d) – הוספת d לכל המספרים במבנה. סיבוכיות זמן: $O(1)$. סיבוכיות שאר הפעולות לא תיפגע.

ג. הוסיפו את הפעולה הבאה:

- DeleteMin – מחיקת המספר הקטן ביותר מהמבנה. על הפעולה לרוץ בזמן $O(t)$ כאשר t הוא מספר האיברים במבנה שהוכנסו אחרי המינימום בעת ביצוע הפעולה.

שאלה 3

עבור זוגות הפונקציות הבאים, קבעו האם $f(n) = o(g(n))$, $f(n) = \Theta(g(n))$ או $f(n) = \omega(g(n))$.
ניתן להוכיח את התשובות על-פי ההגדרות שלמדנו, חישוב גבול המנה או כל דרך נכונה אחרת.

א. $f(n) = n^{15}\log^{12} n$; $g(n) = \frac{n^{17}}{log^{12} n}$

ב. $f(n) = \sum_{i=1}^{n}\log i^3$; $g(n) = \sum_{i=1}^{n}\log i^2$

ג. $f(n) = (\log n)^n$; $g(n) = \left(\sqrt{n}\right)^{\log n}$

ד. $f(n) = n^n$; $g(n) = n!$

ה. $f(n) = 1.6^{\log\log\log n}$; $g(n) = \log\log n$

שימו-לב: כל ה-log בשאלה בבסיס 2.

שאלה 4

יהיו f, g פונקציות מהטבעיים לטבעיים. הוכיחו/הפריכו:

א. אם $f \neq \Omega(g)$ אז $f = o(g)$.

ב. נניח שגבול המנה f/g קיים. אם $f \neq \Omega(g)$ אז $f = o(g)$.

ג. $f = O(g)$ או $g = O(f)$.

ד. נניח כי f, g מונוטוניות עולות. אז $f = O(g)$ או $g = O(f)$.

~~שאלה 5~~

~~א~~: הוכיחו באינדוקציה כי $T(n) = T(\lfloor \alpha n \rfloor) + T(\lfloor (1-\alpha)n \rfloor) + 1 = O(n)$ עבור $\alpha < 1$.
ניתן להניח כי $T(c) = 1$ עבור ערכי c קטנים (הנחוצים למקרה הבסיס).

~~ב~~: מצאו חסם עליון וחסם תחתון אסימפטוטיים פשוטים הדוקים ככל האפשר עבור $T(n)$ בנוסחאות הנסיגה הבאות והוכיחו תשובתכם. **אין להשתמש** במשפט המאסטר בשאלה זאת.

~~a~~. $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 + n^2 \cdot log^3\, n$

~~b~~. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}$

~~c~~. $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$ (רמז: $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = \Theta(\log k)$)

~~שאלה 6~~

פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות ע"פ שיטת המאסטר, אם אפשרי. אם לא אפשרי, ציינו זאת ונמקו.

א. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n\log^3 n$

ב. $T(n) = T\left(\frac{4n}{5}\right) + 8$

ג. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n$

ד. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log^3 n$