מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 6 - שחר פרץ

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

תאריך הגשה: 27.12.2023

~~~ תרגיל בית 6 (מתמטיקה בדידה) ~~~

1. (חימום) מציאת תחום וטווח בלי הוכחה [עמודות משמאל לימין]

סעיף (א)

נתון: $f_1 = \lambda x \in \mathbb{R}.\{x^2\}$

תחום: $dom(f_1) = \mathbb{R}$

טווח: $range(f_1) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כי $\forall x \in \mathbb{R}.x^2 \in \mathbb{R}$

סעיף (ב)

נתון: $f_2 = \lambda X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).X \cap \mathbb{N}$

תחום: $dom(f_2) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

טווח: $range(f_2) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כי לכל X קבוצה $X \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ כלומר $X \cap \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

סעיף (ג)

נתון: $f_3 = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.f^{-1}[\{1\}]$

תחום: $dom(f_3) = \mathbb{N}$

טווח: $range(f_3) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כי $Im(f_1) = \mathbb{N}$ ולכן לכל $x \in \mathbb{N}$ בפרט $x = 1$ מתקיים $f_3(x) \in \mathbb{N}$.

סעיף (ד)

נתון: $\mathrm{f}_4 = \lambda X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\begin{cases} \min(X) & 4 \in X \\ X & \text{else} \end{cases}$

תחום: $dom(f_4) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

טווח: $range(f_4) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$, כי לכל $x \in range(f_4).x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \vee x \in \mathbb{N}$ בהתאם לפירוק למקרים.

סעיף (ה)

נתון: $f_5 = \lambda X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\langle X \cap \mathbb{N}, X \cap \mathbb{Z}, X \cap \mathbb{Q} \rangle$

תחום: $dom(f_5) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$

טווח: $range(f_5) = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ כי לכל $\forall x.x \in X \cap Y \implies x \in X \wedge x \in Y$ בפרט עבור זוג סדור בהתאמה להגדרת כפל קרטזי.

סעיף (ו)

נתון: $f_6 = \lambda \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\lambda x \in \mathbb{R}.n + x \cdot m$

תחום: $dom(f_6) = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

טווח: $range(f_6) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כי λ מחזירה פונקציה וגם $n + xm \in \mathbb{R}$ לכל $b, x, m \in \mathbb{R}$.
~~~

סעיף (ז)

נתון: $f_7 = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda x \in \mathbb{R}.x + n$

תחום: $dom(f_7) = \mathbb{N}$

טווח: $range(f_7) = \lambda\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ בדומה לנימוק הקודם.

סעיף (ח)

נתון: $f_8 = \lambda X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{f \in |n\mathbb{N}\colon f[X] = \{0\}\}$

תחום: $dom(f_8) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ [המשך בעמודה הבאה]

טווח: $range(f_8) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ כי אנחנו לוקחים קבוצה של פונקציות מ־$\mathbb{N}$ ל־$\mathbb{N}$ ומפרידים ממנה, ולכן כל הפונקציות בה נלקחות מקבוצת החזקה.

סעיף (ט)

נתון: $f_9 = \lambda f \in \mathbb{R} \to \mathbb{N}.\lambda n \in \mathbb{N}.\lambda y \in \mathbb{R}.f(n + y)$

תחום: $dom(f_9) = \mathbb{R} \to \mathbb{N} = \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{N})$

טווח: $range(f_9) = \mathbb{N} \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}))$ מכיוון ש $range(\lambda n \in \mathbb{N}.\lambda \ldots)$ שווה ל־$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. (חימום) חישובים בלי הוכחות

סעיף (א)

$$f_1(5) = \{5^2\} = \mathbf{\{25\}}$$

סעיף (ב)

$$f_2((-\infty, 5)) = (-\infty, 5) \cap \mathbb{N} \quad = \mathbf{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$$
$$f_2(\{-1, 1, \pi\}) = \{-1, 1, \pi\} \cap \mathbb{N} = \mathbf{\{1\}}$$

סעיף (ג)

$$f_3(f := \lambda n \in \mathbb{N}.n + 1) = f^{-1}[\{1\}] = \{\iota n \in \mathbb{N}.n + 1 = 1\} = \mathbf{\{0\}}$$

$$f_3(g := \lambda n \in \mathbb{N}.n \bmod 2) = g^{-1}[\{1\}] = \{n \in \mathbb{N}.f(n) \in \{1\}\} = \{n \in \mathbb{N}.n \bmod 2 = 1\} = \mathbb{N}_{\mathbf{even}}$$

סעיף (ד)

$$f_4(\mathbb{N}_{\text{even}}\} = \min(\mathbb{N}_{\text{even}})\big(\text{as } 4 \in \mathbb{N}_{\text{even}}\big) = \mathbf{0}$$

$$f_4(A := \{n \in \mathbb{N} \mid\mid n^2 - 2n + 1 \leq 9\}) = \min(A)\big(4^2 - 2 * 4 + 1 \leq 9\big)$$

נרצה למצוא את המינימום של הפרבולה $n^2 - 2n + 1$. זו פרבולה שמחה, על כן נציב בנוסחה למציאת קודקוד פרבולה ונקבל $x = \frac{b}{2a} = \frac{-2}{1 \cdot 2} = \mathbf{-1}$.

סעיף (ה)

$$f_5([-1, 1]) = \langle [-1, 1] \cap \mathbb{N}, [-1, 1] \cap \mathbb{Z}, [-1, 1] \cap \mathbb{Q} \rangle = \langle \mathbf{\{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}, \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}.0 \leq \boldsymbol{q} \leq 1\}} \rangle$$

$$f_5(\mathbb{Z}) = \langle \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}, \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} \rangle = \langle \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \rangle$$

סעיף (ו)

$$f_6([A := \langle -1, 1 \rangle)(\tfrac{1}{2}) = (\lambda x \in \mathbb{R}.\pi_1(X) + x + \pi_2(X))(\tfrac{1}{2}) = -1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$$

סעיף (ז)

$$f_7(1)(1) = (\lambda x \in \mathbb{R}.x+1)(1) = 1+1 = \mathbf{2}$$

סעיף (ח)

$$f_8(\emptyset) = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f[\emptyset] = \{0\}\} = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid F\} = \boldsymbol{\emptyset}$$

$$f_8(\mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.f[\mathbb{N}] = \{0\}\} = \mathbb{N} \times \mathbf{\{0\}}$$

סעיף (ט)

$$f_9(f := \lambda x \in \mathbb{R}. \mid \lfloor x \rfloor)(3)(\pi) = (\lambda n \in \mathbb{N}.\lambda y \in R.f(n+y))(3)(\pi) = f(3+pi) = \lfloor 3+\pi \rfloor = \mathbf{6}$$

$$f_9(g := \lambda x \in R.1)(a)(b) = (\lambda n \in \mathbb{N}.\lambda y \in \mathbb{R}.g(n+y))(a)(b) = g(a+b) = \mathbf{1}$$

3. כתיבה בכתיב למדא, וכתיבת דומיין וטווחן בהתאם לתיאור פונקציה נתונה

סעיף (א)

$$f = \lambda n \in \mathbb{N}.\{q \in \mathbb{Q}.q \leq n\}$$
$$dom(f) = \mathbb{N}, range(f) = \mathbb{Q}$$

סעיף (ב)

$$f = \lambda n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).\{x \in n.x \notin [0,1]\}$$
$$dom(f) = \mathcal{P}(\mathbb{R}), range(f) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

סעיף (ג)

$$f = \lambda x \in \mathbb{Z}.\{\langle 0, z \rangle\}$$
$$dom(f) = \mathbb{Z}, range(f) = \{\{\langle 0, z \rangle\}\}$$

סעיף (ד)

$$g = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{N}.f(x)+1$$
$$dom(g) = \mathbb{N} \to \mathbb{R}, range(g) = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

סעיף (ה)

$$g = \lambda f \in \mathbb{R} \to \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.f^{-1}[n]$$
$$dom(g) = (\mathbb{R} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N}, range(g) = \mathbb{N}$$

סעיף (ו)

$$f = \lambda n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}.\tfrac{n_1+n_2+n_3}{3}$$
$$dom(f) = \mathbb{N}^3, range(f) = \mathbb{Q}$$

סעיף (ז)

$$f = \lambda\{n_0, n_1, \ldots, n_m\} \in \mathbb{N} \setminus \emptyset.\frac{\sum_{i=0}^{m} n_i}{m}$$
$$dom(f) = \mathbb{N} \setminus \emptyset, range(f) = \mathbb{Q}$$

סעיף (ח)

$$f = \lambda f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}.g := \lambda n \in \mathbb{N}.\sum_{i=0}^{n}.f(i)$$
$$dom(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}, range(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

4. הוכחת טענות בסיסיות על פונקציות אופייניות בכתיב למדא

סעיף (א)

צ.ל.:

$$\chi^{(E)}_{A\cup B}=\lambda y\in E.\max\left\{\chi^{(E)}_A(y),\chi^{(E)}_B(y)\right\}:=\chi'$$

הוכחה: תחומן זהה ע"פ הגדרת χ,λ. לפנות כל, נוכיח שבה"כ $\max\{a,b\}=1 \iff a=1\vee b=1$. נפלג למקרים, אם $a=1\wedge b=1$ אז המקסימום בהכרח 1, ואם רק אחד מהם שווה ל־1 אז בה"כ $a>b$ ולכן $\max\ldots=1$ כדרוש. מכאן ואילך, בעזרת הטענה ובעזרת זאת התחום כבר הוכח, נוכיח שוויון בין ערכי ההחזרה לכל $x\in E$ (זה חוקי כי פונקציות ח"ע). יהיו A,B,E קבוצות;

יהי $x\in E$, נוכיח $\chi^{(E)}_{A\cup B}(x)=\chi'(x)$. נתבונן בערכו של $b=\chi^{(E)}_{A\cup B}(x)$. ע"פ הגדרת המפוצלת של הפונקציה האופיינית, נפלג למקרים:

- אם $x\in A\cup B$ אז $x\in A\vee x\in B$ וגם $b=1$. נוכיח $\chi'(x)=b=1$. נניח בשלילה ש־$\chi'(x)\neq 1$. לפני הטענה לעיל, ולפי שלילה בעזרת חוקי דה־מורגן, נגרר $\chi^{(E)}_A(y),\chi^{(E)}_B(y)\neq 1$, וע"פ הגדרת פונקציה אופיינית נגרר $x\notin A\wedge x\notin B$ כלומר $\neg(x\in A\vee x\in B)$ בסתירה לטענת הפירוק למקרים, כלומר הנחת השלילה נשללה והוכחנו את הדרוש.
- אם $x\notin A\cup B$ אז באופן דומה $b=0$ ובצורה דומה נגרר ש־$\chi^{(E)}_A(y),\chi^{(E)}_B(y)=0$ ובעזרת הטענה $b=\chi'(x)=0$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

סעיף (ב)

צ.ל.:

$$\chi^{(E)}_{A\setminus B}=\lambda y\in E.\chi^{(E)}_A(y)\cdot\left(1-\chi^{(E)}_B(y)\right):=\chi'$$

הוכחה: ראשית כל, $dom(\chi^{(E)}_{A\setminus B})=dom(\chi')=E$ לפי ההגדרה של χ שניתנה בשיעור ולפי הגדרת פונקציות λ. יהי $y\in E$, נוכיח $\chi^{(E)}_{A\setminus B}(y)=\chi'(y)$. ידוע שבה"כ $a\cdot b=0\iff a=0\vee b=0$ ("טענה 1"). נתבונן ב־$\chi^{(E)}_{A\setminus B}(y):=b$. ע"פ הגדרתה המפולגת של הפונקציה האופיינית, נפלג למקרים:

- אם $y\in A\setminus B$ אז $y\in A\wedge y\notin B$, וכמו כן $b=1$. לפיכך, $\chi^{(E)}_A(y)=1\wedge\chi^{(E)}_B(y)=0$. נציב ב־$\chi'(y)$ ונקבל $\chi'(y)=1\cdot(0-1)=1=b$, כדרוש.
- אם $y\notin A\setminus B$ אז $y\notin A\vee y\in B$ (לפי חוקי דה־מורגן), וכמו כן $b=0$. לפיכך, $\chi^{(E)}_A(y)=0\vee\chi^{(E)}_B(y)=1$. נבחר $c=\chi^{(E)}_A(y),d=1-\chi^{(E)}_B(y)$. נציב ונקבל $c=0\vee d=1-0=0$. ע"פ הגדרת χ', נגרר $\chi'(y)=c\cdot d$ ולכן לפי הטענה 1 $\chi'(y)=0=b$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

סעיף (ג)

צ.ל.:

$$\chi^{(E)}_{A\triangle B}=\lambda y\in E.\max\left\{\chi^{(E)}_A(y),\chi^{(E)}_B(y)\right\}-\chi^{(E)}_A(y)\cdot\chi^{(E)}_B(y):=\chi'$$

לפי ההוכחה, נגדיר $a=\chi^{(E)}_A(y),b=\chi^{(E)}_B(y)$, כלומר מוגדר $\chi'=\lambda y\in E.\max\{a,b\}-ab$.

הוכחה: נשתמש בטענות קודמות ע"מ לקבוע ("טענה 1"):

$$\chi' = \chi^{(E)}_{A\cup B}(y) - ab$$

$dom(\chi^{(E)}_{A\triangle B}) = dom(\chi') = E$ לפי ההגדרה של χ שניתנה בשיעור ולפי הגדרת פונקציות λ. יהי $y \in E$, נוכיח $c := \chi^{(E)}_{A\triangle B}(y) = \chi'(y)$. לשם כך, נפלג למקרים ע"פ ההגדרה המפוצלת של χ;

- אם $y \in A\triangle B$, אז $c = 1$. לפי איחוד הגדרות $\triangle$ השוונות, גם נגרר $y \in A\cup B \wedge (y \in A \setminus B \vee y \in B \setminus A)$, כלומר בין היתר $y \in A \implies y \notin B \wedge y \in B \implies y \notin A$ (ע"פ הגדרת $\setminus$). לכן, בהתאם לטענות הקודמות, אפשר לקבוע $\chi^{(E)}_{A\cup B}(y) = 1$. משום ש־$y \in A\cup B$ אז $y \in A \vee y \in B$. נפלג למקרים:
  - אם $y \in A$ אז $y \notin B$, ומכאן נסיק $a = 1, b = 0$ כלומר $ab = 0$.
  - אם $y \in B$ אז $y \notin A$, ומכאן נסיק $a = 0, b = 1$ כלומר $ab = 0$.

  סה"כ לפי טענה 1 קיבלנו $\chi' = 1 - 0 = 1 = b$, כדרוש.
- אם $y \notin A\triangle B$ אז $b = 0$. לפי הגדרות $\triangle$ השורות, נגרר $\neg(x \in A\cup B \wedge x \notin A\cap B)$ כלומר ע"פ דה־מורגן $(x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$. נפלג למקרים:
  - אם $x \notin A \wedge x \notin B$ אז $a = b = 0$ ולכן $\max\{a, b\} = \max\{0, 0\} = 0$ ולכן לפי הגדרת χ' נקבל $\chi(y) = 0 - 0 = b$, כדרוש.
  - אם $x \in A \wedge x \in B$ אז $a = b = 1$ ולכן $\max\{a, b\} = \max\{1, 1\} = 1$ ולכן לפי הגדרת χ' נקבל $\chi'(y) = 1 - 1 = 0 = b$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

5. הוכחת טענות על תמונות

קשירה

יהיו קבוצות A, B. תהי $f : A \to B$ פונ', ויהיו $X \subseteq A, Y \subseteq B$.

סעיף (א) - סתירה

צ.ל.: לסתור $f^{-1}[f[X]] = X$

סתירה: נבחר $A = B = \{1, 2\}, f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, X = \{1\} \subseteq A$. נמצא:

$$f^{-1}[f[X]] = f^{-1}[\{1\}] = \{1, 2\} \neq \{1\} = X$$

משום שלא מתקיים שוויון, זו סתירה, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב) - הוכחה

צ.ל.: $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$

הוכחה: יהי $x \in X$, נוכיח $x \in f^{-1}[f[X]]$. נפתח את הצרנת הביטוי $x \in f^{-1}[f[X]]$:

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}[f[X]] \\ \iff & x \in A \wedge f(x) \in f[X] && \left(f^{-1}[X] \text{ definition}\right) \\ \iff & x \in A \wedge (\exists a \in X. f(a) = f(x)) && \left(f[X] \text{ definition}\right) \end{aligned}$$

כלומר, נתון $x \in X$, וצ.ל. שניים:

- ראשית, צ.ל. $x \in A$. זה נגרר ישירות מכך ש־$x \in X \wedge X \subseteq A$, ע"פ הגדרת $\subseteq$.
- שנית, צ.ל. $\exists a \in X. f(a) = f(x)$. נבחר $a = x$ (זה חוקי כי ההגבלה היחידה על a היא $a \in X$, והוכח $x \in A$). לכן, קיבלנו שצ.ל. $f(x) = f(x)$. נניח בשלילה שלא כן, לפיכך וזה אומר ש־$\exists t. f(x) = t \wedge t \neq f(x)$ וזה סותר עומד בסתירה את חד־הערכיות של הפונקציה, כלומר סה"כ גם זה הוכח כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג) - סתירה

צ.ל.: לסתור $f[f^{-1}[Y]] = Y$

הוכחה: נבחר:

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}, f = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}, Y = \{1\} \subseteq A$$

נסיק $f[f^{-1}[Y]] = f[\{1, 2\}] = \{1, 2\} \neq Y$ ואי־השוויון הזה מהווה סתירה.

סעיף (ד) - הוכחה

צ.ל.: $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

הוכחה: ע"פ הגדרת $\subseteq$, יהי $x \in f[f^{-1}[Y]]$, צ.ל. $x \in Y$. נפרק את הנתון ונראה גרירה למש"ל:

$$\begin{aligned} & x \in f[f^{-1}[Y]] \\ \iff & \exists a \in f^{-1}[Y]. f(a) = x && \left(f[X] \text{ definition}\right) \\ \iff & \exists a \in A \wedge f(a) \in Y. f(a) = x && \left(f^{-1}[X] \text{ definition}\right) \\ \iff & \exists a \in A. f(a) \in Y \wedge f(a) = x && \left(\exists \text{ syntax}\right) \\ \iff & \exists a \in A. x \in Y \wedge f(a) \text{ define} \\ \implies & x \in Y && \left(A \wedge B \longrightarrow C \implies A \longrightarrow C\right) \end{aligned}$$

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ה)

צ.ל.:

$$dom(f) = A = \bigcup_{b \in Im(f)} f^{-1}[\{b\}]$$

(הערה: מותר לנו להגדיר דומיין בצורה הזו כי f פונקציה, ופונקציות הן מלאות)

הוכחה: נתחיל בלפשט את הטענה בעזרת מעברים שקולים

$$\begin{aligned}
& dom(f) = \bigcup_{b \in Im(f)} f^{-1}[\{b\}] \\
\iff & x \in dom(f) \longleftrightarrow \exists b \in Im(f).x \in f^{-1}[b] && \big(=, \cup \text{ definition}\big) \\
\iff & x \in A \wedge (\exists b \in B.f(a) = b) \longleftrightarrow \\
& \exists b \in B \wedge (\exists a \in A.a = f(b)).x \in A \wedge f(x) \in b && \big(dom, Im, f^{-1}[X] \text{ definition}\big) \\
\iff & x \in A \wedge (\exists b \in B.f(a) = b) \longleftrightarrow \\
& x \in A \wedge \exists b.b \in B \wedge (\exists a \in A.a = f(b)) \wedge f(x) \in b && \big(\exists \text{ syntax}\big) \qquad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

6. הוכחת והפרכת טענות על פונקציות נתונות

סעיף (א) - סתירה

$$\begin{aligned}
& f_{\rightarrow}(f_{\leftarrow}(\{-2, 0, 1\})) \\
=& f_{\rightarrow}(\{0, -1, 1\}) \\
=& \{\{0, 1\} \\
\neq& \{-2, 0, 1\} \qquad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

סעיף (ב) - סתירה

$$\begin{aligned}
& f_{\leftarrow}(f_{\rightarrow}(\{-2, 0, 1\})) \\
=& f_{\leftarrow}(\{2, 0, 1\}) \\
=& \{-2, 2, 0, -1, 1\} \\
\neq& \{-2, 0, 1\} \qquad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}$$

סעיף (ג) - הוכחה (?)

נבחר:

$$\mathrm{f} = \lambda x \in X.[\min(x) + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$$

$$U = \mathcal{P}(X), X = \mathcal{P}(\mathbb{N}), f \in X \to X$$

צ.ל.: $\forall n \in \mathbb{N}.f_{\rightarrow}^{(n+1)}(U) \subsetneq f_{\rightarrow}^{(n)}(U)$

הוכחה: ראשית כל, נוכיח באינדוקציה שלכל A קבוצה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f^{(n)}(A) = [\min(A) + n, \infty) \cap \mathbb{N}$;

- בסיס $(n = 0)$: $f^{(0)} = id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}(A) = A$, כדרוש.
- צעד $(n > 0)$: נניח על n ונוכיח על $n + 1$, כלומר נוכיח שוויון $B := f^{(n+1)}(A) = [\min(A) + n + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$. ע"פ הגדרה, $f^{(n)}(f(A))$. נחשב ונקבל $f(A) = [\min(A) + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$, כלומר $B = [\min(f(A)) + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$ שזה $[\min(A) + n + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$ כדרוש.

עתה ניגש להוכחה עצמה. יהי $f_{\to}^{(n+1)}(U) \subseteq f_{\to}^{(n)}(U)$. לאחר מכן, נוכיח ש־$f_{\to}^{(n)}(U) \neq f_{\to}^{(n+1)}(U)$;

- הכלה: לפי תחשבי למדא צ.ל. $x \in f^{(n)}[U]$ צ.ל. $x \in f^{(n+1)}[U]$. לפי הגדרת התחום $\exists a \in [n, \infty) \cap \mathbb{N}.f(x) = a$, ולמעשה צ.ל. להוכיח אשר קיים b כזה גם עבור $f^{(n+1)}$. נבחר $a = b$. ידוע $[n, \infty) \subseteq [n+1, \infty) \wedge \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, ולכן $a \in [n+1, \infty) \cap \mathbb{N}$ ויתכן $a = b$ כדרוש.
- אי־שוויון: נניח בשלילה שמתקיים שוויון. נפרק לפי תחשב למדא, ונגיע לכך שאם $[n, \infty) \cap \mathbb{N} \in f^{(n)}[U]$ (וזה פסוק אמת כי $f^{(n)}([n+1, \infty) \cap \mathbb{N}) = [n, \infty) \cap \mathbb{N}$) אז כנ"ל על $f^{(n+1)}$ אבל זה פסוק שקר (בנחה ש־$[n+1, \infty) \subsetneq [n, \infty)$).

סעיף (ד) - הוכחה (?)

נבחר:

$$\mathrm{f} = \lambda x \in X.[\min(x) + 1, \infty) \cap \mathbb{N}$$

$$U = \mathcal{P}(X), X = \mathcal{P}(\mathbb{N}), f \in X \to X$$

צ.ל.: $\forall n \in \mathbb{N}.f_{\leftarrow}^{(n+1)}(U) \subsetneq f_{\leftarrow}^{(n)}(U)$

הוכחה: נסתמך על ההוכחה באינדוקציה שיש בסעיף (ג). נוכיח הכלה ואי שוויון:

- הכלה: לפי תחשיב למדא, יהי $y \in f^{(n+1)^{-1}}[U]$, נוכיח $y \in f^{(n)^{-1}}[U]$. לפי הגדרת תמונה, קיים מקור $x \in X$ ל־y. אותו המקור יעבוד גם ל־$f^{(n)^{-1}}[U]$, שכן $[n, \infty) \cap \mathbb{N} \subseteq [n+1, \infty) \cap \mathbb{N}$.
- אי־שוויון: באופן דומה לסעיף (ג).

7. דברים נוספים

נתון

יהיו A, B קבוצות. תחתן, נגדיר:

$$H = \lambda f \in A \to \mathcal{P}(B). \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times f(a))$$

סעיף (א) - תחום וטווח אפשרי

טענה:

$$dom(h) = A \to \mathcal{P}(B) \wedge range(H) = \mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))$$

סעיף (ב) - כתיבת פונקציה תחת תנאים

טענה:

$$K = \lambda t \in Im(H).t$$

ניסוח במילים: תחום $H(f)$ הוא פונקציה בתחום A אמ"מ $f(a)$ תמיד סינגילטון.

צ.ל.: $(\forall a \in A.|f(a)| = 1) \iff dom(H(f)) = A \land H(f) \text{ is a function}$ (כאשר לכל קבוצה A נבחר את $|A|$ להחזיר את כמות האיברים השונים הקיימים בקבוצה A).

הוכחה:

ראשית נוכיח שבה"כ עבור כל פונקציה f שמחזירה קבוצה לא ריקה מתקיים $dom(H(f)) = A$ ("התחום של $H(f)$"). נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.

- יהי $x \in A$. צ.ל. $x \in dom(H(f))$.ע"פ הגדרת דומיין ואיחוד מוכלל, צ.ל. $\exists a \in A.\exists b \in B.\langle a, b\rangle \in \{a\} \times f(a)$. נבחר $a = x, b \in f(x)$ ובהתאם לנתון $f(x) \neq \emptyset$ נסיק ש־b קיים. סה"כ מתקיים $a \in \{a\} \land b \in f(a)$ שזה מה שצריכים לפי הגדרת כפל קרטזי.
- יהי $x \in dom(H(f))$ נוכיח $x \in A$. נניח בשלילה ש־$x \notin A$, כלומר $\forall a \in A.\forall b \in B.\langle a, b\rangle \notin \{a\} \times f(a)$. נראה בניגוד לכך, הטענה תתקיים עבור $x = a, b = f(x) = f(a)$ (בהתאם להגדרת כפל קרטזי), ולכן הנחת השלילה נשללה, כדרוש.

עבור $A = \emptyset$, אז $H(f) = \cup_{a\in A}[...] = \emptyset$ כדרוש גם כן.

מכאן ואילך נוכיח את כל אחת משתי הגרירות שצריך להוכיח:

- נניח $\forall a \in A.|f(a)| = 1$, נוכיח ש־$H(f)$ פונקציה וגם $dom(H(f)) = A$. בעזרת הטענה שהוכחנו, אפשר לקבוע ש־$dom(H(f)) = A$ יחדיו עם הנתון. נניח בשלילה ש־$H(f)$ לא פונקציה, ומשום שהמליאות כבר הוכחה כחלק מהדומיין אז היחס לא ח"ע ולכן קיימים $b_1, b_2 \in B, a \in A$ כך ש־ $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in H(f) \land b_1 \neq b_2$. לפי הגדרת כפל קרטזי ואיחוד מוכלל, נגרר:

$$\exists \alpha \in A.a \in \{\alpha\} \land b_1, b_2 \in f(a) \land b_1 \neq b_2$$

זאת בסתירה להיות $f(a)$ קבוצה בעל איבר אחד בלבד (הנגרר מהנחת השלילה דורש קיום של שני איברים שונים בקבוצה הזו), כלומר סה"כ $H(f)$ פונ' כדרוש.

- תהיה פונקציה f, נניח $dom(H(f)) = A$ ונניח ש־$H(f)$ פונקציה גם היא. יהי $a \in A$, צ.ל. $|f(a)| = 1$. נניח בשלילה שלא כן. נפלג למקרים:
  - אם $|f(a)| = 0$ אז $f(a) = \emptyset$, אז $\forall a.\{a\} \times f(a) = \emptyset$ ולכן סה"כ ע"פ איחוד מוכלל $\forall a \in H(f).a \in \emptyset$ אמ"מ $dom(H(f)) = \emptyset$ וזו סתירה.
  - אם $|f(a)| > 1$ אז לפי ההנחה שלנו ש־$H(f)$ פונקציה, נסיק שהיא חד ערכית, כלומר: יהי $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$, תחת ההנחה $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in H(f)$, מתקיים $b_1 \neq b_2$, זאת בניגוד לכך שלפי המקרה הנוכחי (שמניח ש־$f(a)$ בעל לפחות שני איברים שונים) קיימים $b_1 \neq b_2$ שקיימים ב־$f(a)$, ולכן לפי כפל קרטזי קיים (בין היתר) $a \in A$ עבורו $\langle a, b_1\rangle \land \langle a, b_2\rangle \in \{a\} \times f(a)$, בפרט עבור המקרה הכללי יותר של איחוד מוכלל, כלומר סה"כ ישנה סתירה והנחת השלילה נשללה, כלומר $|f(a)| = 1$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

8. הוכחת טענה על פונקציה נתונה

נתון: $f\colon A\to B$, $X\subseteq A$, תחת התנאים הללו מוגדר $f|_X := f\cap(X\times B)=\{\langle a,b\rangle\in f\mid a\in X\}$

צ.ל.: $f|_X$ פונקציה מ־A ל־B, $\forall x\in X.f|_X(x)=f(x)$

הוכחה: נפלג את ההוכחה לשני חלקים

הוכחה ש־$f|_X$ פונקציה מ־A ל־B

היות $f|_X$ יחס בתוך $X\times B$: יהי $d\in f|_X$, נוכיח $d\in X\times B$. ע"פ הגדרתו, $d\in f\cap(X\times B)$, כלומר $d\in f\wedge d\in X\times B$, נגרר $d\in X\times B$, כדרוש.

ח"ע: נניח בשלילה שקיימים $\langle a,b_1\rangle,\langle a,b_2\rangle\in f|_X$. לפי הגדרתה בעקרון ההפרדה, $\langle a,b_1\rangle\in f\wedge\langle a,b_2\rangle\in f\wedge a\in X$ וזו תמיד סתירה להיות f פונקציה.

מליאות: שקול להיות הדומיין A.

דומיין A: נתון יחס $f|_x\in X\times B$, נוכיח יהי $x\in X$, נוכיח $dom(f_X)=X$. נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית (או גרירה דו כיוונית, או איך שלא רוצים לפרש את זה):

- יהי $x\in X$, נוכיח $x\in dom(f|_X)$ כלומר נוכיח $\exists b\in B.\langle x,b\rangle\in f|_X$. נבחר $b=f(x)$. לפי הטענה, באופן שקול צ.ל. $\langle x,b\rangle f\cap(X\times B)$ כלומר ע"פ הגדרת $\times$, $\cap$ באופן שקול צ.ל.: $\langle x,b\rangle\in f,\wedge x\in X\wedge b\in B$. נוכיח כל טענה בנפרד:
  - $\langle x,b\rangle\in f$: לפי הגדרת כתיב מקוצר לכתיבת פונקציה, $f(x)=b$, וזה פסוק אמת.
  - $x\in X$: נכון לפי הגדרה.
  - $b\in B$: הגדרנו $f(x)=b$, ונתון $range(f)=B$, לכן בפרט $b\in B$ כדרוש.
- יהי $x\in dom(f|_X)$, נוכיח $x\in X$. לפי הגדרת דומיין, נתון $\forall x\in X.\exists b\in B.\langle x,b\rangle\in f|_X$. מכך נגרר $\langle x,b\rangle\in f\cap(X\times B)$, כלומר לפי הגדרת $\times$, $\cap$ נגרר $x\in X$, כדרוש.

טווח B: טמוע בתוך הטענה שהוכחה $f|_X\in X\times B$.

סה"כ $f|_X$ פונקציה מ־A ל־B

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

הוכחה שוויון בין $f|_X(x)$ ל־$f(x)$

לפנות כל נוכיח ש־$f|_X\subseteq f$. ע"פ הגדרת הכלה, יהי $x\in f|_X$, נוכיח $x\in f$. לפי הנתון, $x\in f\cap(X\times B)$, כלומר נגרר $x\in f$, כדרוש.

[נסגור את הקשירות של המשפט הקודם, נפתח חדשה] יהי $x\in X$. נבחר $f|_X(x)=b$. ע"פ הגדרה, $\langle x,b\rangle\in f|_x$. לפי ההכלה $f|_X\subseteq f$ שהוכחה לעיל, וע"פ הגדרת הכלה, נגרר $\langle x,b\rangle\in f|_X$, וע"פ הגדרה נגרר $\langle x,b\rangle\in f$, משמע $f(x)=b$, ולפי טרנזיטיביות השוויון $f|_X(x)=f(x)$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (א)

$$\mathrm{f} = \lambda x \in A \cup B. \begin{cases} \{x, 0\} & \text{if } x \in A \\ \{x, 1\} & \text{if } x \in B \end{cases}$$

הוכחה ש־$range(f) = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) = X$: יהי $x \in A \cup B$, צ.ל. $f(x) \in range(f)$. נפלג למקרים:

- אם $x \in A$, אז $f(x) = \{x, 0\}$, ותחת אותו התנאי $f(x) \in A \times \{0\}$, כדרוש.
- אם $x \in B$, אז $f(x) = \{x, 0\}$, ותחת אותו התנאי $f(x) \in B \times \{0\}$, כדרוש.

סה"כ $f : A \cup B \to X$.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

טענה: $Im(f|_A) = A \times \{0\}$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.

- יהי $y \in A \times \{0\}$. נוכיח $y \in Im(f|_A)$. ע"פ הגדרת תמונה, צ.ל. $\exists x \in A \cup B.\langle x, y\rangle \in f|_A$. ע"פ הגדרת הצמצום של f על A, למעשה צריך להוכיח $\langle x, y\rangle \in f \wedge x \in A$. נבחר $x = \pi_1(y)$, ונוכיח את כל אחד משני התנאים ההכרחיים:
  - $\langle x, y\rangle \in f$: נסמן $y = \langle a, b\rangle$, כלומר ע"פ הגדרת y ידוע $a \in A, b = 0$, וע"פ הגדרת x ידוע $x = a$, כלומר סה"כ צ.ל. $\langle a, \langle a, 0\rangle\rangle \in f$, או במילים אחרות $f(a) = \langle a, 0\rangle$, ו־$\langle x, y\rangle \in f$ נכון באופן ישיר תחת הגדרת f המפוצלת.
  - כמו כן, $x = a \in A$ כלומר $x \in A$ כדרוש.
- יהי $y \in Im(f|_A)$, נוכיח $y \in A \times \{0\}$. למעשה, נתון $\exists x \in A \cup B.\langle x, y\rangle \in f|_A$. לפיכך, $\langle x, y\rangle \in f \wedge x \in A$, כלומר נגרר $x \in A$ וגם נגרר $f(x) = y$. לפי הגדרת f, $\forall x \in A.f(x) = \{x, 0\}$, כלומר לפי טרנזיטיביות השוויון $y = \{x, 0\}$, ומשום שידוע $x \in A$ אז $\{x, 0\} \subseteq A \times \{0\}$ וסה"כ $y \subseteq A \times \{0\}$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

טענה: $Im(f|_B) = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) = X$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.

- יהי $y \in X$. נוכיח $y \in Im(f|_A)$. ע"פ הגדרת תמונה, צ.ל. $\exists x \in A \cup B.\langle x, y\rangle \in f|_A$. ע"פ הגדרת הצמצום של f על B, למעשה צריך להוכיח $\langle x, y\rangle \in f \wedge x \in B$. נבחר $x = \pi_1(y)$, ונוכיח את כל אחד משני התנאים ההכרחיים על שני מקרים שיתכנו:
  - אם $x \in A$, אז $x \in A \cap B$ כלומר:

$f \ni \langle x, y\rangle$: נסמן $y = \langle a, b\rangle$, כלומר ע"פ הגדרת y ידוע $a \in A, b = 0$, וע"פ הגדרת x ידוע $x = a$, כלומר סה"כ צ.ל. $f \ni \langle a, \langle a, 0\rangle\rangle$, או במילים אחרות $f(a) = \langle a, 0\rangle$, ו־$\langle x, y\rangle \in f$ נכון באופן ישיר תחת הגדרת f המפוצלת. כמו כן, $A \ni a = x$ כלומר $x \in A$ ובפרט $x \in A \cup B$כדרוש.

- אם $x \notin A$, אז הראשון של f בהכרח לא תקף, וכבר ידוע אז $x \in B$, כלומר:
  - $f \ni \langle x, y\rangle$: נסמן $y = \langle a, b\rangle$, כלומר ע"פ הגדרת y ידוע $a \in B, b = 1$, וע"פ הגדרת x ידוע $x = a$, כלומר סה"כ צ.ל. $f \ni \langle a, \langle a, 1\rangle\rangle$, או במילים אחרות $f(a) = \langle a, 1\rangle$, ו־$\langle x, y\rangle \in f$ נכון באופן ישיר תחת הגדרת f המפוצלת. כמו כן, $B \ni a = x$ כלומר $x \in B$ ובפרט $x \in A \cup B$ כדרוש.

- יהי $y \in Im(f|_A)$, נוכיח $y \in X$. למעשה, נתון $\exists x \in A \cup B . \langle x, y\rangle \in f|_B$. לפיכך, $\langle x, y\rangle \in f \wedge x \in B$, כלומר נגרר $x \in B$ וגם נגרר $f(x) = y$. משום שידוע $x \in A \vee x \in B$, או במילים אחרות $x \in A \vee x \in B \setminus A$ (זה נכון כי $A \cup (A \setminus B) = A$), נפלג למקרים ונוכיח $y \in A \times \{0\} \vee y \in B \times \{1\}$ (שקול ל־$y \in X$):
  - אם $x \in A$, אז לפי הגדרת f, $\forall x \in A . f(x) = \{x, 0\}$, כלומר לפי טרנזיטיביות השוויון $y = \{x, 0\}$, ומשום שידוע $x \in A$ אז $\{x, 0\} \subseteq A \times \{0\}$ וסה"כ $y \subseteq A \times \{0\}$ כדרוש.
  - אם $x \in B \setminus A$, אז $x \in B$ וגם $x \notin A$ אז לפי הגדרת f, $\forall x \in B . f(x) = \{x, 1\}$, כלומר לפי טרנזיטיביות השוויון $y = \{x, 1\}$, ומשום שידוע $x \in B$ אז $\{x, 1\} \subseteq B \times \{1\}$ וסה"כ $y \subseteq B \times \{1\}$ כדרוש.

הוכחנו את ההכלה הדו כיוונית וההוכחה הושלמה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

10. הוכחת טענות על איחוד שרשרת הכלות

נתון

תהיה A קבוצה. ידוע $\forall f \in X . \mathrm{dom}(f) A$, ידוע $\forall f, g \in X . f \subseteq g \vee g \subseteq f$. נגדיר:

$$h = \bigcup_{g \in X} g$$

סעיף (א)

צ.ל.: $\mathrm{dom}(h) \subseteq A$

הוכחה: יהי $x \in \mathrm{dom}(h)$,צ.ל. $x \in A$. לפיכך $\exists y \in \mathrm{Im}(h) . h(y) = x$. לפי $h(y) = x$ וע"פ הגדרת איחוד מוכלל, $\exists g \in X . g(y) = x$. משום ש־$g \in X$ אז $\mathrm{dom}(g) \subseteq A$, אז $\forall z . g(z) \in A$, ובפרט y, כלומר $g(y) \in A$, ולפי טרנזיטיביות $x \in A$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

צ.ל.:

$$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{f \in X} \mathrm{dom}(f) := \mathfrak{A}$$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית

- יהי $x \in \mathrm{dom}(h)$, נוכיח קיים $f \in X$ כך ש־$\mathrm{dom}(f) = x$. לפי הנתון, קיים $y \in \mathrm{Im}(h)$ כך ש־$h(y) = x$, שזה שקול לקיום $\exists g \in X.g(y) = x$, כלומר נבחר $f = g$ ולפי הטענה הזו זה יעבוד.
- יהי $x \in \mathfrak{A}$, כלומר קיים $f \in X$ עבורו $\mathrm{dom}(f) = x$, וצ.ל. $x \in \mathrm{dom}(h)$. לפי הגדרת תחום, צ.ל. קיום $y \in Im(h)$ כך ש־$h(y) = x$, שזה שקול לקיום $\exists g \in X.g(y) = x$, כלומר נבחר $f = g$ ולפי הנתון הזו זה יעבוד.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ג)

צ.ל.: $\forall g \in X.h|_{\mathrm{dom}(g)} = g$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית. יהי $g \in X$;

- יהי $x \in g$, נוכיח $x \in h|_{\mathrm{dom}(g)}$. לפי הגדרת צמצום וחיתוך נובע $x \in h \wedge x \in (\mathrm{dom}(g) \times \mathrm{Im}(h))$. נוכיח:
  - $x \in h$: צ.ל. להוכיח קיום $f \in X.x \in f$, נבחר $f = g$ וזה יעבוד לפי הנתון $x \in g$.
  - $x \in (\mathrm{dom}(g) \times \mathrm{Im}(h))$: צ.ל. $\pi_1(x) \in \mathrm{dom}(g) \wedge \pi_2(x) \in \mathrm{Im}(h)$. הטענה הראשונה נכונה כי נתון $x \in g$, ואם נניח בשלילה ש־$\pi_1(x) \notin \mathrm{dom}(g)$ אז $x \notin g$ וזו סתירה, והטענה השנייה ($\pi_2(x) \in \mathrm{Im}(h)$) נכונה כי משום ש־$x \in g$ אז $\pi_2(x) = \mathrm{Im}(g)$. למטרה זאת, נוכיח בה"כ שלכל $\forall x \in \mathrm{Im}(g).x \in \mathrm{Im}(h)$.
    - יהי $g \in X$, ויהי $x \in \mathrm{Im}(g)$, כלומר קיים $y \in \mathrm{dom}(g)$ עבורו $f(y) = x$. משום שידוע $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(h)$ אז אפשר להתבונן ב־$y \in \mathrm{dom}(h)$ ולהסיק $h(y) = x$ ע"פ הגדרת איחוד מוכלל כדרוש.
- יהי $x \in h|_{\mathrm{dom}(g)}$, צ.ל. $x \in g$. ע"פ הנתון $x \in \mathrm{dom}(g) \wedge x \in h$. לפי הגדרת הצמצום $x \in h \wedge x \in \mathrm{dom}(g)$, באופן ישיר, שזה שקול לצ.ל. לפי קומוטטיביות ה־$\wedge$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■