הרחבות לבדידה 2

שחר פרץ

22 בינואר 2025

חוזרים להרצאה עם נטלי שלום.

GENERATING FUNCTIONS .... (1)

1.1 מבוא לפונ' יוצרות

בבערך חמש השנים האחרונות, לא לימדו פונ' יוצרות. אבל אבא של יהלי שאין להגיד את שמו לשווא החליט להכניס את החומר לבחינה. אין צביעת צמתים (אך יש צביעת קשתות). למרצה יש אתר עם רשימות מסודרות של החומר, והקלטות שלו. דלית העבירה לנו את זה.

"יש מועד ב', חברה" $\sim$ רתם

הגדרה. תהי $a_0, a_1, a_2, \cdots$ סדרת מספרים (ממשית). הפונ' היוצרת המתאימה לה היא:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

קוראים לזה פונ', וזה נראה כמו פונ', אך לא נכנסים לדברים כמו תחום הגדרה. מסתכלים על זה כמו על ביטוי פורמלי.

סימון. המקדם של x^n מסומן ע"י $\underbrace{[x^n]A(x)}_{a_n}$

דוגמה. עבור הסדרה $1, 1, \cdots$ הפונ' היוצרת היא $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (סכום סדרה הנדסית אינסופית). תזכורת:

$$(-1 < q < 1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

דוגמה. עבור הסדרה $1, 0, 1, 0$ מתאימה הפונ':

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

(נכון מהדוגמה הראשונה).

1.2 פעולות על פונ' יוצרות

1.2.1 כפל בקבוע

אם $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ אז:

$$\forall c \in \mathbb{R} \colon A(cx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כלומר $A(cx)$ יוצרת את הסדרה $b_n = c^n a_n$.

1.2.2 חיבור

חיבור פונ' יוצרות: אם $A(x), B(x)$ פונ' יוצרות של a_n, b_n בהתאמה, אז $A(x) + B(x)$ יוצרת את $(a_n + b_n)_{n=0}^{\infty}$.

דוגמה. מה הפונ' היוצרת של הסדרה $a_n = 2^n - 1$? **פתרון.**

$$\sum (2^n - 1)x^n = \sum \underbrace{2^n x^n}_{(2x)^n} - \sum x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$$

1.2.3 גזירה

גזירה של פונ' יוצרת:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$x(A'x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

כלומר, הפונ' $xA'(x)$ יוצרת את $(na_n)_{n=0}^{\infty}$

דוגמה.

$$A(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$
$$A'(x) = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$xA'(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

את הסדרה $1, 2, 3, 4, \cdots$ יוצרת $\frac{x}{(1-x)^2}$.

דוגמה. נגזור שוב, למען הכיף.

$$A''(x) = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$A''(x) \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
$$x^2 A''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$
$$x^2 A''(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$
$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$$
$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n$$

הערה (1): גזרנו את $\sum nx^{n-1}$ מהדוגמה הקודמת. סה"כ הפונ' היוצרת של $b_n = \binom{n}{2}$ היא $\frac{x^2}{(1-x)^3}$.

הערה: בגזירה הראשונה קיבלנו $\frac{n}{1}$, אפשר להמשיך לגזור, ובאופן כללי: **משפט.**

$$\forall m \geq 0\colon \text{generating func of } b_n = \binom{n}{m} \text{ is } \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

1.2.4 אינטגרל

אם $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, אז:

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

סה"כ $\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t$ יוצרת את הסדרה:

$$b_n = \begin{cases} \frac{a_n - 1}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

1.2.5 סדרת הסכומים החלקיים

(מקרה פרטי של 6) סדרה הסכומים החלקיים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}A(x) &= \sum x^n \sum a_n x^n \\ &= (1+x+x^2+\cdots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots) \\ &= a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n\end{aligned}$$

כלומר, סדרת הסכומים החלקיים של a היא $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, מתאימה לפונ' $\frac{1}{1-x}A(x)$.

1.2.6 כפל

מכפלה של פונ' יוצרות: נניח ש־$A(x), B(x)$ יוצרות את a_n, b_n בהתאמה.

$$\begin{aligned}A(x)\cdot B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \\ &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots) \\ &= a_0b_0+(a_1b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1a_2b_0)x^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{a*b}x^n\end{aligned}$$

כאשר $a*b$ קונבולוציה. **דוגמה.** מצאו את הסדרה שהפונ' $\ln(\frac{1}{1-x})$ יוצרת. **תשובה.** נגזור. יאי.

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) &= \frac{1}{1-x} \\ \left(\ln\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}\end{aligned}$$

וסה"כ:

$$\ln\frac{1}{1-x}\underbrace{-\ln 1}_{=0} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

סה"כ הפונ' $\ln\frac{1}{1-x}$ יוצרת את:

$$b_n = \begin{cases}\frac{1}{n} & n \geq 1 \\ 0 & n = 0\end{cases}$$

סיכום ביניים:

$$\begin{aligned}A(cx) &\longleftrightarrow c^n a_n \\ A(x)+B(x) &\longleftrightarrow a_n+b_n \\ xA'(x) &\longleftrightarrow na_n \\ \int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t &\longleftrightarrow \begin{cases}\frac{a_{n-1}}{n} & n\geq 1 \\ 0 & n=0\end{cases} \\ \frac{1}{1-x} &\longleftrightarrow 1 \\ \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} &\longleftrightarrow \binom{n}{m} \\ \ln\frac{1}{1-x} &\longleftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{n} & n\geq 1 \\ 0 & n=0\end{cases}\end{aligned}$$

1.3 איך מחלצים סדרה מתוך פונ' יוצרת נתונה?

1.3.1 תזכורות מקורס B

ניזכר במשפט טיילור (ספציפית לטור מ'קלורן)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

דוגמה. ידוע $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, לכן e^x יוצרת את הסדרה $a_n=\frac{1}{n!}$.

דוגמה. נתבונן בפונ' $f(x)=(1+x)^{א}$ (נניח $א\in\mathbb{R}$). אז:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\alpha(1+x0^{\alpha-1}) &&\implies f'(0)=\alpha\\
f''(x)&=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha--2} &&\implies f''(0)=\alpha(\alpha-1)\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x)&=\alpha(\alpha-1)\cdots\big(ag-(n-1)\big)^{\alpha-n} &&\implies f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(n-1)\big)
\end{aligned}$$

1.3.2 הכללת הבינום

$$\forall x\in\mathbb{R}\,\forall n\in\mathbb{N}\colon\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$

מוטיבציה:

$$\binom{m}{n}=\left(\frac{m!}{n!(m-n)!}\right)=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

לכן:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

זוהי הכללה לנוסחאת הבינום של ניוטון.

לפני הרבה זמן הוכחנו נוסחה מפורשת לקטלן. במצגת של המרצה יש הוכחה לשקילות באמצעות פונ' יוצרות, ולכן מומלץ לקרוא גם אותה.

1.4 שימוש בפונ' יוצרות ע"מ למצוא נוסחאות נסיגה

אפשר להשתמש בטכניקה הזו לכל סדרה מוגדרת רקורסיבית. **דוגמה.** פיבונצ'י:

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2} & n\geq 2\\ F_0=F_1=1\end{cases}$$

תזכורות: הגדרנו את הפולינום האופייני להיות $p(x)=x^2-c_1x-c_2$, ונעזרנו בשורשיו בשביל למצוא צורה כללית.

נתבונן בפונ' היוצרת של הסדרה F_n, נקראה $F(x)$:

$$\begin{aligned}
F(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\\
&=F_0+F_1x+\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n\\
&=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n\\
&=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n\\
&=1+x+x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n}_{F(x)-1}+x^2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n}_{F(x)}\\
&=1+x+x(F(x)-1)+x^2F(x)=1+x\cdot F(x)+x^2\cdot F(x)
\end{aligned}$$

נבודד את $F(x)$ מהמשוואה:

$$xF(x) + x^2F(x) - F(x) = -1 \implies F(x)\cdot(x^2+x-1) = -1 \implies F(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}$$

מצאנו את הפונ' היוצרת של פיבונאצ'י. נרצה מזה למצוא נוסחה לסדרה. עתה צריך לפרק לשברים חלקיים. ייתכן שנמצא משהו עם מרוכבים. יש גם במצגת דוגמה לפונ' יוצרת שהנוסחה הסגורה לה עם מספרים מרוכבים.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha - x} + \frac{1}{\varphi - x}\right) \qquad \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} - \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\varphi}}\right) \end{aligned}$$

כאשר φ הצמוד של α. ידוע ש־:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = \sum\frac{1}{\alpha^{n+1}}x^n$$

באופן דומה בעבור $\frac{1}{\varphi - x}$. סה"כ נשתמש בפעולות שלמדנו על חיסור פונ' יוצרות והכפלה בסקלר. נקבל:

$$F(x) = 5^{-0.5}\sum\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}\right)x^n \implies F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\varphi^{n+1}}\right)$$

כידוע. במצגת יש דוגמה נוספת עם מרוכבים.

RANDOM THING RELATED TO SPANNING TREES . . . . (2)

הרחבה למשפט קיילי נמצאת גם בקורס. משפט קירכהוף (לא למתחים).