

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 17

להגשה עד יום שלישי 26.3.2024 בשעה 23:59.

1. הוכיחו את הטענה הבאה: לכל עוצמה a ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ times}} = a^n$.

2. הוכיחו את הטענות הבאות שראינו בהרצאה:
לכל a, b, c, d עוצמות כך ש- $c \leq d$, $a \leq b$ מתקיים:

$$(א) \quad a + c \leq b + d$$

$$(ב) \quad a \cdot c \leq b \cdot d$$

$$(ג) \quad a^c \leq b^c$$

3. הוכיחו את חוקי החזקות הבאים: לכל a, b, c עוצמות -

$$(א) \quad (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$$

$$(ב) \quad a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

4. חשבו את העוצמות הבאות בעזרת חשבון עוצמות ופשטו את התשובה במידת האפשר:

$$(א) \quad |\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}|$$

$$(ב) \quad |P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}|$$

$$(ג) \quad |\mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})|$$

$$(ד) \quad |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$$

$$(ה) \quad |P(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})|$$

$$(ו) \quad |P(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R})|$$

$$(ז) \quad |P(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N})|$$

$$(ח) \quad |P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N}|$$

5. תהי A קבוצה ונניח כי $|A \times A| \leq |A|$ ו- $1 < |A|$. הוכיחו/הפריכו: $|A|^{\aleph_0} = |A|$.

6. הוכיחו:

$$(א) \quad \aleph_0^{(2^{\aleph_0})} > 2^{\aleph_0}$$

$$(ב) \quad \text{לכל קבוצה } A \text{ מתקיים } 2^{|A|} \neq \aleph_0.$$

7. הוכיחו/הפריכו:

$$(א) \quad \text{אם } a, b, c \text{ עוצמות כך ש-} a < b, \text{ אז } a^c < b^c$$

$$(ב) \quad \text{אם } a, b, c \text{ עוצמות כך ש-} b < c, \text{ אז } a^b < a^c$$

$$(ג) \quad \text{אם } a, b, c, d \text{ עוצמות כך ש-} a < b, c \leq d, \text{ אז } a + c < b + d$$

$$(ד) \quad \text{אם } a, b, c, d \text{ עוצמות כך ש-} a < b, c \leq d, \text{ אז } a \cdot c < b \cdot d$$

8. מצאו את העוצמות של הקבוצות הבאות:

$$(א) \quad \text{קבוצת כל היחסים הסימטריים מעל } \mathbb{N}.$$

$$(ב) \quad A = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} : |f^{-1}[\{0\}]| = f^{-1}[\{1\}]\}$$

$$(ג) \quad \text{קבוצת כל יחסי השקילות מעל } \mathbb{R}.$$

9. נגיד ששתי פונקציות $f, g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ הן "כמעט מסכימות" אם קיים i כך שלכל $j \geq i$ מתקיים $f(j) = g(j)$.
נגדיר:

$$R = \{ \langle f, g \rangle \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{כמעט מסכימות } f, g \}$$

(א) הוכיחו ש- R יחס שקילות.

(ב) מצאו את העוצמה של כל מחלקת שקילות. הוכיחו תשובתכם.

(ג) מצאו את העוצמה של קבוצת המנה. הוכיחו תשובתכם.

10. נגדיר

$$S = \{ \langle A, B \rangle \in P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) : |A| = |B| = |A \cup B| \}$$

S הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח).

(א) מצאו את $[\mathbb{N}]_S$ ואת $[\{2, 3\}]_S$ ואת עוצמתן. הוכיחו את תשובתכם.

(ב) מהי קבוצת המנה? מהי עוצמתה? הוכיחו.

11. צפו בסרטון על המלון של הילברט (מצורף קישור במודל) ותיהנו.
(ניתן להפעיל כתוביות בעברית)