

## תרגיל בית 3 - לינארית

1. יהיו  $(A \mid b)$  ו- $(B \mid c)$  מערכות משוואות מסדר  $m \times n$  ( $m$  משוואות ו- $n$  נעלמים) מעל  $\mathbb{R}$ . האם יתכן שיש **בדיוק** 10 פתרונות משותפים לשתי המשוואות יחד?

2. תהיי  $(A \mid 0)$  מערכת משוואות הומוגנית מסדר  $m \times n$  ( $m$  משוואות ו- $n$  נעלמים). הוכיחו כי אם  $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

ו- $\bar{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$  פתרונות של המערכת אז גם  $\begin{pmatrix} d_1 + c_1 \\ d_2 + c_2 \\ \vdots \\ d_n + c_n \end{pmatrix}$  פתרון.

3. נסמן  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 3-2s \\ 1-s-t \\ 2t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$ .

(א) האם קיימת מערכת משוואות הומוגנית ש- $A$  הינה קבוצת הפתרונות שלה?

(ב) האם קיימת מערכת משוואות הומוגנית ש- $A \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  הינה קבוצת הפתרונות שלה?

4. חזרו לתרגיל בית 2 שאלות 4 ו-5 וכתבו את קבוצות הפתרון המתאימות לכל מערכת משוואות (ניתן להשתמש בחישובים שלכם מהתרגילים הרלוונטים).

5. פתרו את המערכת הבאה מעל  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 4 \end{cases}$$

כתבו את קבוצת הפתרונות. כמה פתרונות יש למערכת?

6. האם קיימת מערכת משוואות לינארית שיש לה 36 פתרונות? 81 פתרונות? במידה וכן, תנו דוגמה. במידה ולא, נמקו. **השתמשו בעובדה הבאה שאולי נוכיח בהמשך:** מספר האיברים בשדה סופי הוא חזקה של מספר ראשוני, כלומר לא יכול להיות שדה סופי עם מספר איברים  $k$  כך של- $k$  יש שני מחלקים זרים.

7. יהי  $\mathbb{F}$  שדה סופי.

(א) הראו שקיים מספר  $m \in \mathbb{N}$  כך ש  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{m \text{ times}} = 0$ . (המספר הטבעי המינימלי  $m$  שגדול מאפס שמקיים את זה

נקרא המצוין של השדה).

(ב) הראו שהמצוין של  $\mathbb{F}$  חייב להיות מספר ראשוני.

(ג) הסיקו ש  $\mathbb{Z}_{20}$  אינו שדה.

תזכורת:  $\mathbb{Z}_{20}$  אלה המספרים  $0, \dots, 19$  עם חיבור וכפל mod 20.