מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 20

להגשה עד יום שלישי 4.6.24 ב־23:59.

1. ~~נסמן ב־a_n את מספר האפשרויות לרצף שביל באורך n (כלומר בגודל $1 \times n$) ע"י שימוש במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2 ומרצפות שחורות באורך 1.~~
   (א) ~~כתבו נוסחת נסיגה ל־a_n יחד עם תנאי התחלה.~~
   (ב) ~~מצאו ביטוי סגור לנוסחת הנסיגה שמצאתם.~~
2. ~~נסמן ב־a_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{a, b, c, d\}$ כך שכל מופעי a נמצאים לפני כל מופעי b.~~
   (א) ~~כתבו נוסחת נסיגה ל־a_n יחד עם תנאי התחלה.~~
   (ב) ~~מצאו ביטוי סגור לנוסחת הנסיגה שמצאתם.~~
3. ~~כמה סדרות טרינאריות (סדרות מעל $\{0, 1, 2\}$) באורך n קיימות כך שמתקיים:~~
   ~~(מספיק למצוא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה, אין צורך למצוא ביטוי סגור)~~
   (א) ~~לא מכילות את הרצף 00.~~
   (ב) ~~לא מכילות את הרצפים 01, 02.~~
   (ג) ~~לא מכילות את הרצף 01.~~
4. ~~(אתגר) נתון שביל במימדים $n \times 1$. יש לנו את סוגי המרצפות הבאים: מרצפת ירוקה במימדים 1×1, מרצפת כחולה במימדים 2×1, ומרצפת אדומה במימדים 3×1. מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר הריצופים האפשריים של השביל כך שאין מרצפות כחולות וירוקות סמוכות זו לזו.~~
   ~~רמז: סמנו ב־a_n את מספר הריצופים החוקיים, b_n את מספר הריצופים החוקיים בהם המשבצת הראשונה לא כחולה, c_n את מספר הריצופים החוקיים בהם המשבצת הראשונה לא ירוקה.~~
5. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות (כלומר מצאו נוסחה מפורשת לאיבר הכללי a_n):
   (א) ~~$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ (לכל $n \geq 2$) עם תנאי התחלה $a_0 = 3,\ a_1 = 5$.~~
   (ב) $a_n = \sum_{k=2}^{n} 2a_{n-k}$ (לכל $n \geq 2$) עם תנאי התחלה $a_0 = 0,\ a_1 = 6$.
6. ~~עבור הסעיפים הבאים, מצאו ביטויים סגורים:~~
   (א) ~~n אנשים יושבים על ספסל. בכמה אופנים ניתן לשנות את סדר ישיבתם כך שאף אחד לא יזוז יותר ממקום אחד?~~
   (ב) ~~n אנשים יושבים סביב שולחן עגול. בכמה אופנים ניתן לשנות את סדר ישיבתם כך שאף אחד לא יזוז יותר ממקום אחד?~~
7. בכמה דרכים ניתן לרצף רצועה בגודל $n \times 3$ ע"י שימוש במרצפות שגודלן 1×2 או 2×1? (מצאו ביטוי סגור)
8. ~~כמה סדרות באורך n המורכבות מ־$0, 1, 2$ ישנן, כך שבין כל שתי הופעות של הספרה 2 מופיעה הספרה 0? (מצאו ביטוי סגור)~~
9. **(רשות)** ניזכר בהגדרה הבאה שראינו בתרגיל בית 19: פונקציה $f \in [n] \to \mathcal{P}([k])$ היא מונוטונית עולה **חזק** ביחס להכלה אם $\forall i, j \in [n] .\ i \leq j \to f(i) \subsetneq f(j)$. נסמן ב־$a_{n,k}$ את מספר הפונקציות $f \in [n] \to \mathcal{P}([k])$ שהן מונוטוניות עולות חזק.
   (הערה: בשאלה זו אסור להשתמש בהכלה והדחה, ובביטוי ל־$a_{n,k}$ שמצאתם בתרגיל בית 19.)
   (א) מהו הערך של $a_{n,k}$ כאשר $n > k + 1$? נמקו בקצרה (רמז: עיקרון שובך היונים).
   (ב) מצאו ביטוי סגור ל־$a_{k+1,k}$. נמקו בקצרה את תשובתכם.
   (ג) מצאו ביטוי סגור ל־$a_{1,k}$. נמקו בקצרה את תשובתכם.

(ד) בהינתן פונקציה $f\in[n]\to\mathcal{P}([k])$ מונו' עולה חזק ביחס להכלה, נגדיר $f'\in[n]\to\mathcal{P}([k-1])$ ע"י

$$f'=\lambda j\in[n]\,.\,f(j)\setminus\{k\}$$

הוכיחו שמספר הפונקציות $f\in[n]\to\mathcal{P}([k])$ המונוטוניות עולות חזק כך שגם f' מונו' עולה חזק היא $(n+1)\,a_{n,k-1}$.

(ה) הוכיחו שמספר הפונקציות $f\in[n]\to\mathcal{P}([k])$ המונו' עולות חזק כך ש־f' **אינה** מונו' עולה חזק הינו $(n-1)\,a_{n-1,k-1}$.

(ו) היעזרו בסעיפים הקודמים ומצאו נוסחת נסיגה עבור $a_{n,k}$.
תארו בקצרה כיצד ניתן לחשב בעזרתה ובעזרת הסעיפים הקודמים את הערך של a_{n_0,k_0} בהינתן n_0,k_0 מסוימים.