חזרה על חומר ~ נטלי שלום ~ לא תרגול 1

שחר פרץ

1 ביולי 2024

QUESTIONS FROM THE LECTURE .... (1)

פתרונות לשאלה 3:

1. תהי a אינסופית

$$2^a + 2^a \geq 2^a + 0 = 2^a \tag{1}$$
$$2^a + 2^a = 2 \cdot 2^a = 2^{a+1} = 2^a \tag{2}$$

השתמשנו בטענת העזר שלכל a אינסופית, יתקיים $a + 1 = a$. נוכיח את טענת העזר:

$$a \leq a + 1 \leq a + \aleph_0 = a$$

על בסיס הטענה שידועה לנו כי לכל a אינסופית, $a + \aleph_0 = a$ – טענה שידועה לנו.

הערה: מותר לנו להשתמש בטענות הבאות בלי הוכחה:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph + \aleph = \aleph \cdot \aleph = \aleph$
- לכל a אינסופית, $a + \aleph_0 = a$
- לכל n טבעי, $\aleph_0 + n = \aleph_0$ ואם $n > 0$ אז $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$
- $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$

2. שאלה: עבור אילו עוצמות a יתקיים:

$$a^4 + 16^a = 16^a$$

הטענה תתקיים עבור $a = 0$ כי $0^4 + 16^0 = 1 = 16^0$. עבור $a > 0$ סופית לא מתקיימת הטענה מכיוון ש־:

$$\underbrace{a^4}_{\geq 1} + 16^a \geq 1 + 16^a > 16^a$$

ובעבור a אינסופית כלשהי:

$$16^a \leq a^4 + 16^a \underset{a<2^a,\, a^4 \leq (2^a)^4}{\leq} (2^a)^4 + 16^a = 2^{4a} + 16^a = (2^4) + 16^a = 16^a + 16^a = 2 \cdot 16^a \underset{\text{סעיף } 1}{=} 16^a \tag{3}$$

פתרון לשאלה 2א שאלה: תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ תיקרא סגורה לחיבור של 2 אם $\forall a \in \mathbb{N}. a \in A \implies a + 2 \in A$. מהי עוצמת קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$ הסגורות לחיבור?

נסמן את הקבוצה ב־X. נוכיח שעוצמתה היא $\aleph_0$. נגדיר:

$$f \colon X \to (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$$

נתבונן בפונקציה הבאה:

$$f = \lambda A \in X. \langle \min(\underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A\} \cup \{\infty\}}_{:= B_A}),\ \min(\{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in A\} \cup \{\infty\})$$

נוכיח ש־f זיווג ונקבל $|X| = \aleph_0$.

1. f חח"ע: תהינה $A_1, A_2 \in X$ שונות, אז בה"כ קיים איבר $a_1 \in A_1 \setminus A_2$. בה"כ נניח a_1 זוגי (אחרת, דומה). מתקיים:

$$\frac{a_1}{2} \in \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A_1\}$$

ולכן $\frac{a_1}{2} \geq \min\{\dots A_1\}$. מצד שני, מאחר ש־$a_1 \notin A_2$ אז $\frac{a_1}{2} \notin \{n \in \mathbb{N}2n \in A_2\}$. נטען, ש־$\frac{a_1}{2} < \min B_{A_2}$. נניח בשלילה שהמינימום של $B_{A_2} \leq \frac{a_2}{2}$. אז קיים $x \in B_{A_2}$ כך ש - $x \leq \frac{a_1}{2}$ כלומר $2x \in A_2$. נסמן $k = \frac{a_1 - 2x}{2} \in \mathbb{N}$. אז $a_1 = \underbrace{2x}_{\in A_2} + 2k \in A_2$.

סתירה. סה"כ $f(A_1) \neq f(A_2)$.

2. ואז זה ממשיך אבל נשארו שתי דקות לשיעור.

פונ' לכסון לשאלה 1ד: הוגדר:

$$H = \lambda f \in A, \sum_{n=1}^{\infty} f(n),\ \ R = \{\langle f, g \rangle \in A \times A \mid H(f) = H(g)\}$$

תנו דוגמה ל -$f \in A$ כך ש-$|[f]_R| > \aleph_0$. הוכיחו באמצעות לכסון.

פתרון: נבחר $f = \lambda n \in \mathbb{N}.1$. נניח בשלילה קיום $G: \ \mathbb{N} \to [f]_R$ זיווג, נתבונן ב־:

$$\hat{f} = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 1 - G\left(\frac{n}{2}\right)(n) & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 1 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

כי לכל $m \in \mathbb{N}$ נקבל $g(2m) = 1 - G(m)(2m) \neq G(m)(2m)$ (מניחים בשלילה שוויון ומראים סתירה).