מתמטיקה בדידה - תרגול מס' 10 - הבינום של ניוטון, זהות פסקל, הוכחות קומבינטוריות

1 הבינום של ניוטון

לכל x,y ולכל $n\in\mathbb{N}$ שלם מתקיים:

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

מקרה פרטי חשוב:

$$(x+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

תרגיל. כמה מחרוזות באורך n מעל $\{A,B\}$ מכילות מספר זוגי של A-ים ?

פתרון. נפריד למקרים זרים לפי k: מספר ה A-ים במחרוזת. בהינתן שידוע k, יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור מקומות ל A-ים, ובשאר המקומות יש B-ים. k הוא מספר זוגי כלשהו בין 0 ל n ולכן מספר המחרוזות הינו:

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ זוגי}}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1+(-1)^k}{2}\right)\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right)=\frac{1}{2}\left(2^n+0\right)=2^{n-1}$$

כאשר המעבר הלפני אחרון מנומק ע"י (ראינו בהרצאה):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=((-1)+1)^n=0\end{aligned}$$

פתרון נוסף, ללא שימוש בבינום: נבחר מחרוזת באורך $n-1$. יש 2^{n-1} אפשרויות. לכל מחרוזת כזו יש אפשרות אחת ויחידה להשלימה למחרוזת באורך n עם מספר זוגי של Aים.

תרגיל. חשבו:

$$2^2\binom{n}{1}+2^4\binom{n}{2}+2^6\binom{n}{3}+\cdots+2^{2n}\binom{n}{n}$$

פתרון. נשאף להמיר את הביטוי לכזה שניתן יהיה להשתמש עליו בבינום של ניוטון:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}2^{2i}\binom{n}{i} &= \sum_{i=1}^{n}\left(2^2\right)^i\binom{n}{i}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}4^i\binom{n}{i}\right)+4^0\binom{n}{0}-4^0\binom{n}{0}\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n}4^i\binom{n}{i}\right)-1\\ &= (4+1)^n-1\\ &= 5^n-1\end{aligned}$$

תרגיל. הוכיחו:

$$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$

פתרון. נשתמש בבינום:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}k=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\\ =n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\ =n\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}=n\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

כאשר בשביל השורה האחרונה הצבנו $k'=k-1$.

2 זהות פסקל

זהות פסקל:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

ובנוסף, חשוב לזכור, כי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (ה"סימטריות" של משולש פסקל).

תרגיל. הוכיחו:

1. לכל n, m טבעיים, $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{k} = \binom{m+n+1}{n}$
2. לכל n, m טבעיים, $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

פתרון.

1. נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k+m}{k} = \binom{0+m}{0} = 1 = \binom{m+0+1}{0}$$

נניח נכונות ל-n ונוכיח ל-$n+1$. מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+m}{k} &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{k}\right) + \binom{n+1+m}{n+1} \\ &= \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ &= \binom{m+n+2}{n+1} = \binom{m+(n+1)+1}{n+1}\end{aligned}$$

כאשר המעבר השני היה לפי הנחת האינדוקציה, והשלישי היה לפי זהות פסקל.

2. לכל $k < m$ מתקיים כי $\binom{k}{m} = 0$ ולכן:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$$

כאשר אם $n < m$ הכוונה פה היא ל"סכום ריק", ששווה ל 0. נציב $k' = k - m$. ואז:

$$= \sum_{k'=0}^{n-m} \binom{k'+m}{k'} = \sum_{k'=0}^{n-m} \binom{k'+m}{m}$$

כאשר השתמשני בזהות $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. כעת לפי הסעיף הראשון ושימוש נוסף בזהות זו:

$$= \binom{m+(n-m)+1}{n-m} = \binom{n+1}{n-m} = \binom{n+1}{m+1}$$

3 הוכחות קומבינטוריות

ראינו בעבר דוגמאות לבעיות קומבינטוריות, שלפי הדרך שבה אנו פותרים אותן, אנו מקבלים ביטוי שונה לפתרון. מכיוון שהפתרון לבעיה קומבינטורית הוא יחיד, נוכל "לנצל" עובדה זו כדי להוכיח שוויון בין ביטויים שונים.

תרגיל. הוכיחו קומבינטורית:

$$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$$

פתרון. נוכיח קומבינטורית:

- <u>הבעיה</u>: יש בממלכה n אנשים, כמה דרכים יש לבחור להם מלך ולבחור תת קבוצה של אנשים שנאמנים אליו, כאשר המלך תמיד נאמן לעצמו. (במילים אחרות, מספר הדרכים לבחור תת קבוצה של $[n]$ עם "ראש קבוצה".)
- <u>צד שמאל</u>: ראשית נבחר מלך (n אפשרויות), ולאחר מכך נבחר ל $n-1$ האנשים שנותרו האם הם נאמנים או לא (2^{n-1} אפשרויות). סה"כ מתקבל הביטוי משמאל.
- <u>צד ימין</u>: נפריד למקרים לפי k: מספר הנאמנים למלך. בהינתן שידוע k, יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור תת קבוצה של נאמנים ו- k דרכים לבחור מי מבין הנאמנים יהיה המלך. כלומר סה"כ $\binom{n}{k}k$ אפשרויות. לפי עיקרון החיבור נקבל את הביטוי מימין.

תרגיל. חשבו את הסכום הבא:

$$\sum_{k=0}^{200}\binom{k+15}{k}$$

פתרון. <u>הרעיון</u>: נחשוב על בעיה שהביטוי $\sum_{k=0}^{200}\binom{k+15}{k}$ פותר, ואז נפתור אותה בעוד דרך. נשים לב ש $\binom{k+15}{k}=S\left(16,k\right)$ מספר הדרכים לשים k כדורים זהים ב-16 תאים, עם חזרות. לכן כשנסכום עבור k מ 0 עד 200 נקבל את מספר הדרכים לשים לכל היותר 200 כדורים ב 16 תאים. ראינו כבר שזה שקול לבעיה של פיזור בדיוק 200 כדורים ב 17 תאים, כלומר $\binom{216}{200}=S\left(17,200\right)$.
סה"כ, נוכיח קומבינטורית את השוויון:

$$\sum_{k=0}^{200}\binom{k+15}{k}=\binom{216}{200}$$

- <u>הבעיה</u>: מספר הדרכים לפזר לכל היותר 200 כדורים זהים ב 16 תאים, עם חזרות.
- <u>צד שמאל</u>: נפריד למקרים לפי k: מספר הכדורים שפיזרנו לתאים. בהינתן k, יש $S\left(16,k\right)=\binom{k+16-1}{k}=\binom{k+15}{k}$ דרכים לסדר את הכדורים. מספר הכדורים שמפזרים מקיים $0\le k\le 200$ ולכן מעיקרון החיבור נקבל את הביטוי משמאל.

- <u>צד ימין</u>: נפזר בדיוק 200 כדורים ב 17 תאים, כאשר התא הנוסף הוא "תא זבל", ונקבל סידור של לכל היותר 200 כדורים ב 16 התאים ה"רגילים". סה"כ $S\left(17,200\right)=\binom{216}{200}$ אפשרויות.

פתרון נוסף: אם נציב $m=k+15$ נקבל $\sum_{m=15}^{215}\binom{m}{15}=\sum_{k=0}^{200}\binom{k+15}{15}$. נוכיח קומבינטורית:

$$\sum_{m=15}^{215}\binom{m}{15}=\binom{216}{16}$$

- <u>הבעיה</u>: מספר הדרכים לבחור 16 איברים (ללא חזרות) מתוך הקבוצה $\{0,....,215\}$.

- <u>צד ימין</u>: מיידי.

- <u>צד שמאל</u>: נפצל למקרים זרים לפי m: האיבר הכי גדול בקבוצה שנבחר. נשים לב ש $15\leq m\leq 215$. בהינתן m, ידוע ש m בקבוצה ונותר לבחור 15 איברים מבין $0,...,m-1$. יש $\binom{m}{15}$ דרכים לעשות את זה. סה"כ מעיקרון החיבור נקבל את הביטוי משמאל.

תרגיל. הוכיחו קומבינטורית:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(i-1\right)2^{n-i}=2^{n}-n-1$$

פתרון.

- <u>הבעיה</u>: מספר המילים הבינאריות באורך n בהן לפחות שני "1"-ים.

- <u>צד ימין</u>: מספר המילים הכולל הוא 2^{n}. מתוכן, נחסיר את המילה שהיא כולה אפס (אפשרות אחת) ומספר המילים עם בדיוק "1" אחד (n אפשרויות). סה"כ: $2^{n}-n-1$.

- <u>צד שמאל</u>: נסמן ב- i את המיקום של ה- "1" השני משמאל (בהכרח קיים כזה). לאחר שקבענו אותו, צריך לבחור את ה- "1" הראשון ($i-1$ אפשרויות) ולאחר מכן מימינו של ה- "1" נבחר ללא הגבלה (2^{n-i} אפשרויות).