הגדרה 1. הטבעיים יסומנו ב־$\mathbb{N}$ ויכללו את אפס.

(1)

שדות

הגדרה 2. תהי $\mathbb{F}$ קבוצה, ונניח קיום $a\colon \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ חיבור ו־$m\colon \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ כפל. $\mathbb{F}$ יקרה שדה אמ"מ:

סימון 1.

$$\forall x, y \in \mathbb{F}\colon m(x,y) := x \cdot y = xy,\ a(x,y) = x+y$$

1. קיום ניטרלי לחיבור: $\exists x \in \mathbb{F}\, \forall y \in \mathbb{F}\colon x + y = y$

סימון 2. איבר האפס יסומן ב־0 או $0_{\mathbb{F}}$, הוא x.

2. אסוציאטיביות חיבור: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}\colon (x+y)+z = x+(y+z)$
3. חילופיות חיבור: $\forall x, y \in \mathbb{F}\colon x+y = y+x$
4. קיום איבר נגדי: $\forall x \in \mathbb{F}\, \exists y \in \mathbb{F}\colon x+y = y+x = 0_{\mathbb{F}}$

סימון 3. האיבר הנגדי של x הוא $-x$, הוא y.

5. קיום ניטרלי לכפל: $\exists x \in \mathbb{F}\, \forall y \in \mathbb{F}\colon xy = y$

סימון 4. הניטרלי לכפל יסומן ב־$1_{\mathbb{F}}$ או ב־1

6. אסציאטיביות של כפל: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}\colon (xy)z = x(yz)$
7. קיום הופכי: $\forall 0 \neq x \in \mathbb{F}\, \exists y \in \mathbb{F}\colon xy = yx = 1$

סימון 5. ההופכי של x יהיה x^{-1} או $\frac{1}{x}$

8. חילופיות כפל: $\forall x, y \in \mathbb{F}\colon xy = yx$
9. דיסטריביוטיביות: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}\colon x(y+z) = xy + xz$
10. $1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$

משפט 1. הרציונליים $\mathbb{Q}$, הממשיים $\mathbb{R}$, והמרוכבים $\mathbb{C}$ הם שדות.

משפט 2. בעבור שדה כלשהו:

1. ניטרלי לחיבור הוא יחיד.
2. $\forall a \in \mathbb{F}\colon 0 \cdot a = 0$
3. ניטרלי לכפל הוא יחיד.
4. $\forall a \in \mathbb{F}\, (\exists! -a\colon\ -a + a = 0) \wedge (-a = (-1) \cdot a)$
5. לכל $0 \neq a \in \mathbb{F}$ הופכי יחיד.
6. $(b = 0 \vee a = 0) \iff ab = 0$
7. $b = c \iff a + b = a + c$
8. $a \neq 0 \implies b = c \iff ab = ac$
9. $\forall a \in \mathbb{F}\colon\ -(-a) = a$
10. $\forall a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\colon (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

הגדרה 3. לכל $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ טבעי, נגדיר יחס לכל $x, y \in \mathbb{Z}$ זוגות שלמים:

$$x \equiv y \mod n \iff \exists k \in \mathbb{N}\colon x - y = nk$$

למה 1. אם $n \geq 1$, אז $x \equiv y \mod n$ יחס שקילות.

הגדרה 4. יהיו $x \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \in \mathbb{Z}$. נגדיר:

$$[x]_n := \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \mod n\}$$

להיות מחלקת השקילות של x.

משפט 3. $[x]_n = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

משפט 4. כל שתי מחלקות שקילות שוות או זרות.

משפט 5. בעבור $[x]_n$, יש בדיוק אחד מבין $\{0, \ldots, n-1\}$.

משפט 6. $\mathbb{Z}_p$ שדה אפ"מ p ראשוני

משפט 7. בהינתן שדה מגודל סופי N, קיים p ראשוני כך ש־$\exists k \in \mathbb{N}\colon p^k = N$.

הגדרה 5. $\mathbb{Z}/_{nz} = \{[x]_n \mid x \in \mathbb{Z}\}$, כאשר הפעולות על השדה מוגדרות:

$$[x]_n + [y]_n = [x+y]_n,\ [x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$$

והם מוגדרים היטב, לא תלויים בנציגים. איבר האפס הוא $[0]$ ואיבר היחידה $[1]$.

הגדרה 6. יהי $\mathbb{F}$ שדה, המקדם (char) של השדה יהיה 0 אם $\forall n > 0\colon n \cdot 1_{\mathbb{F}} \neq 0$ אחרת:

$$\mathrm{char}(F) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0\}$$

כאשר $n \cdot 1_{\mathbb{F}} := 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}$, n פעמים.

משפט 8. יהי $\mathbb{F}$ שדה, ו־0 מקדם השדה. אז:

1. p ראשוני הוא $p = 0$
2. המקדם של שדה סופי הוא חיובי.

(2)

מערכת משוואות ליניארית

הגדרה 7. משוואה ליניארית מעל שדה $\mathbb{F}$ ב־n נעלמים $x_1 \ldots x_n$ עם מקדמים $a_1 \ldots a_n$ היא משוואה מהצורה:

$$ax_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

כאשר זהו הייצוג הסטנדרטי של המשוואה.

הגדרה 8. מערכת של m משוורות ב־n נעלפים מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא אוסף של m משוואות ב־n נעלמים, כאשר הייצוג הסטנדרטי:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} = b_n \end{cases}$$

הגדרה 9. תהי A קבוצה לא ריקה, $n \in \mathbb{N}$, ו־$a_1 \ldots a_n \in A$, נסמן את ה־n־יה שאיבריה לפי הסדר להיות $(a_1 \ldots a_n) \in A^n$.

הגדרה 10. פתרון למערכת משוואות הוא $(x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{F}^n$ כך שכל המשוואות מתקיימת לאחר הצבה.

הגדרה 11. שתי מערכות משוואות נקראות שקולות אם יש להן את אותה קבוצת הפתרונות.

הגדרה 12. תהי מערכת משוואות. פעולה אלמנטרית היא אחת מבין:

1. החלפת מיקום של שתי משוואות.
2. הכפלה של משוואה אחת בסקלר שונה מ־0.
3. הוספה לאחת משוואות משוואה אחרת מוכפלת בסקלר.

משפט 9. פעולה אלמנטרית על מערכת משוואות מעבירה למערכת שקולה.

הגדרה 13. מטריצה מסדר $m \times n$ הוא אוסף של mn סקלרים. יתקיים:

$$i \in \{1 \ldots m\},\ j \in \{1 \ldots n\}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

הגדרה 14. נגדיר את $0_{n \times m}$ או 0 להיות מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$(A)_{ij} = 0_{\mathbb{F}}$.

הגדרה 15. וקטור שורה הוא $R_i := (a_{i1} \ldots a_{in}) \in \mathbb{F}^n$.

הגדרה 16. וקטור עמודה הוא $C_j := (a_{1j} \ldots a_{mj}) \in \mathbb{F}^m$.

הגדרה 17. $M_{mn}(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות מסדר $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 18. $M_n(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות הריבועיות, הוא מטריצות מסדר $n \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$.

הגדרה 19. בהינתן מערכת משוואות עם מקדמים a_{ij}, המטריצה של מערכת המשוואות תהיה (a_{ij}), כאשר המטריצה המצומצמת שלה היא מטריצה בלי העמודה ה־$m+1$.

הגדרה 20. פעולות אלמנטריות על מטריצה הן:

1. החלפת מיקום שורות, תסומן $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. הכפלה של שורה בסקלר שונה מ־0, תסומן ב־$R_i \to \lambda R_i$.
3. הוספה לשורה אחרת מוכפלת בסקלר, לסומן $R_i \to R_i + \lambda R_j$ כאשר $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$.

הגדרה 21. יהיו $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ מטריצות. נאמר ש־A, B שקולות אם ניתן לקבל מ־B את A ע"י מספר סופי של פעולות אלמנטריות. נסמן $A \sim B$.

משפט 10. $\sim$ יחס שקילות.

הגדרה 22. שורה אפסים שורה בה כל הרכיבים 0.

הגדרה 23. שורה שאיננה אפסים היא שורה שאיננה אפסים.

הגדרה 24. איבר פותח הוא האיבר הכי שמאלי במטריצה שאינו 0.

הגדרה 25. מטריצה מדורגת אם:

1. כל שורות האפסים מתחת לשורות שאינן אפסים.
2. האיבר הפותח של שורה נמצא מימין לאיבר הפותח של השורה שמעליה.

הגדרה 26. תהי A מטריצה. A מדורגת קאנונית אם כל איבר פותח הוא 1 וגם שאר האיברים בעמודה הם 0, שאר האיברים בעמודה הם 0, ו־A מדורגת.

הגדרה 27. משתנה קשור (תלוי) אם בעמודה שלו, בצורה מדורגת קאנונית יש איבר פותח.

הגדרה 28. משתנה חופשי הוא משתנה לא תלוי.

משפט 11. על מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת קאנונית יחידה.

משפט 12. בהינתן מערכת משוואות שבה יותר נעלמים ממשוואות, אז אין פתרונות, או שמספר הפתרונות הוא לפחות $|\mathbb{F}|$.

משפט 13. בהינתן מערכת משוואות, אחד מהמקרים הבאים יתקיים:

1. אין פתרונות.
2. יש בדיוק פתרון אחד.
3. יש לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

הגדרה 29. מערכת משוואות שכל מקדמיה החופשיים הם 0 היא מערכת הומוגנית.

הגדרה 30. הפתרון $x_1 \dots x_n = 0$ הוא הפתרון הטרוויאלי.

משפט 14.

1. למערכת משוואות הומוגנית שבה מספר נעלמים גדול מהמשוואות, יש ממש יותר מ־$|\mathbb{F}|$ פתרונות.
2. למערכת משוואות הומוגנית יש רק פתרון טרוויאלי או לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.
3. הפרצה מספן מערכת משוואות הומוגנית בהומו!.

.... (3) ....

מרחבים וקטוריים

הגדרה 31. בהינתן $\mathbb{F}$ שדה, מרחב וקטורי (לעיתים קרוי גם מרחב ליניארי) הוא $\langle V, a\colon V^2 \to V, m\colon \mathbb{F} \times V \to V \rangle$ כאשר a נקרא חיבור ו־m כפל בסקלר, המקיים תכונות:

סימון 6.

$$\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{F}\colon \lambda v = \lambda \cdot v = m(\lambda, v),\ v + w = a(v, w)$$

1. חילופיות לחיבור.
2. אסוציאטיביות לחיבור.
3. קיום איבר אפס ניטרלי לחיבור.

סימון 7. האיבר הניטרלי לחיבור יסומן ב־0 או 0_V.

4. קיום נגדי לחיבור.

סימון 8. לכל v, נסמן ב־$-v$ את הנגדי לחיבור.

5. דיסטריביוטיביות מסוג ראשון: $\forall \lambda \in \mathbb{F},\ u, v \in V\colon \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
6. דיסטריבטיוביות מסוג שני: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V\colon (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$
7. אסוציאיטיביות של כפל: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}\colon (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
8. זהות באיבר היחידה: $\forall v \in V\colon 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$

משפט 15. $M_{n\times m}$ ו־$\mathbb{F}$ הם מרחבים וקטוריים.

הגדרה 32. יהי V מ"ו, תת־מרחב־וקטורי (תמ"ו) של V הוא $W \subseteq V$ אם:

1. W סגור לחיבור.
2. W סגור לכפל בסקלר.

משפט 16. תמ"ו הוא מ"ו.

משפט 17. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית היא תמ"ו ב־$\mathbb{F}^n$.

משפט 18.

א. $\forall \lambda \in \mathbb{F}\colon \lambda \cdot 0_V = 0_V$

ב. $\forall v \in V\colon 0 \cdot v = 0$

ג. $\lambda v = 0 \implies \lambda = 0 \vee v = 0_V$

ד. $\forall v \in V\colon -v = (-1)v$

משפט 19. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ויים של V. אז, $U \cap W$ ו־$U \cup W$ תמ"ו בנפרד, אמ"מ $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

הגדרה 33. יהי V מעל $\mathbb{F}$. יהיו $V, W \subseteq V$ תמ"וים. נגדיר $U + W = \{u + w \mid u \in V, w \in W\}$

הגדרה 34. אם $U \cap W = \{0\}$ תחת הקשירה לעיל, אז נסמן $U + W = U \oplus W$ ונקרא סכום זה סכום ישר.

משפט 20. יהי V מעל שדה $\mathbb{F}$, ו־$U, W \subseteq V$ תמ"ויים. אז $U + W$ תמ"ו של V.

משפט 21. יהי V מעל שדה $\mathbb{F}$, אז $U + W$ סכום ישר אמ"מ כל וקטור בסכום נין להגדיר בצורה חידה ע"י וקטור מ־U או וקטור מ־W.

.... (4) ....

ממדים

הגדרה 35. יהי $0 \le s \in \mathbb{Z}$, וקטורים $v_1 \dots v_s \in V$ וסקלרים $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{F}$. הצירוף הליניארי שלהם הוא:

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_s v_s$$

הגדרה 36. צירוף ליניארי עבור סקלרים $\lambda_i = 0$.

הגדרה 37. יהי $B = (v_1 \dots v_s) \in V^s$, ו־$V$ מ"ו. אז B בסיס אם לכל $v \in V$ קיים ויחיד צירוף ליניארי מהוקטורים ב־B, כלומר:

$$\forall v \in V \exists! (\lambda_i)_{i=1}^{|B|} \in \mathbb{F}\colon v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i$$

הגדרה 38. $e_i \in \mathbb{F}^n$ מוגדר להיות $e := (0 \dots 1 \dots 0)$ כאשר 1 בקודאינאטה ה־i.

הגדרה 39. $\{e_i\}_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה 40. בעבור V מ"ו עם בסיס B, $\dim V := |B|$ (מוגדר היטב ממשפט יחידות גודל הבסיס).

הגדרה 41. יהיו $v_1 \dots v_s \in V$ וקטורים, הם יקראו סדרה תלויה ליניארית אם קיימים $\lambda_1 \dots \lambda_s$ כך אחד מהם שונה מ־0 וגם $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i s_i = 0$.

הגדרה 42. סדרה בלתי תלויה ליניארית (בת"ל) היא סדרה לא תלוי ליניארית.

משפט 22. הוקטורים $v_1 \dots v_s \in V^s$ בת"ל אמ"מ $\sum \lambda_i v_i = 0$:$\forall (\lambda_i)_{i=1}^s$.

משפט 23. בהינתן $v_1 \dots v_n \in \mathbb{F}^n$ ו־A מטריצת העמודות שלה, הסדרה בת"ל אמ"מ בצורה הקאנונית ששקולה ל־A יש בכל שורה איבר פותח.

משפט 24. הבסיס הסטנדטי הוא בסיס.

משפט 25. בהינתן $U \subseteq V$ תמ"ו, ובהינתן $\{u_i\}_{i=1} \subseteq U$, אז כל צירוף ליניארית שלהם ב־U.

הגדרה 43. בהינתן $x = v_1 \dots v_s$ קבוצת וקטורים, אז

$$\text{span}(X) := \{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i \mid \{\lambda_i\}_{i=1}^s \in \mathbb{F}\}$$

משפט 26. יהיו V מ"ו, $X = (v_1 \dots v_s) \subseteq V$. אז $\text{span}(X)$ הוא התמ"ו המינימלי (ביחס ההכלה) שמכיל את X.

הגדרה 44. בהינתן V מ"ו, $X \subseteq V$, נאמר ש־X פורש את V אמ"מ $V = \text{span}(X)$. לעיתים יקרא X "קבוצת היוצרים" של V.

הגדרה 45. בהינתן V מ"ו, נאמר ש־V נוצר סופית אם קיים $X \subseteq V$ סופי כך ש־X פורש את Y.

משפט 27. יהי V נוצר סופית, $X \subseteq V$ פורשת סופית. כל סדרה בת"ל ב־V גדולה לכל היותר $|X|$.

למה 2. יהי X בת"ל ב־V מ"ו. $u \in V \setminus \text{span}(X)$ גורר $X \cup \{u\}$ בת"ל.

משפט 28. בהינתן V נוצר סופית, X פורש, $v_1 \dots v_m$ בת"ל, קיימים $v_{m+1} \dots v_n \in X$ כך ש־$v_1 \dots v_m, v_{m+1} \dots v_n$ פורשת ובת"ל (כל בת"ל אפשר להשלים לבסיס).

משפט 29. יהי $B = (v_1 \dots v_s) \in V$. אז B בסיס אמ"מ פורש ובת"ל.

משפט 30. בהינתן V מ"ו, X פורש:

1. כל שדה בת"ל ניתן להשלים ע"י וקטורים מ־X.
2. בעבור B_1, B_2 בסיסים של מ"ו V, יתקיים $|B_1| = |B_2|$.

הגדרה 46. יהי V מ"ו, B בסיס. אז $\dim V := |B|$ ("מימדו" של V).

משפט 31. בהינתן V מ"ו , $v_1 \dots v_s$ פורש, ניתן למצמצה לבסיס.

משפט 32. יהיו V מ"ו

1. סדרה בת"ל מגודל מקסימלי היא בסיס.
2. סדרה פורשת מגודל מינימלי היא בסיס.
3. סדרה בת"ל/פורשת עם $\dim V$ איברים, היא בסיס.

משפט 33. יהיו V מ"ו ו־$U \subseteq V$ תמ"ו:

1. $\dim U \leq \dim V$
2. $\dim U = \dim V \iff U = V$

משפט 34. יהי $V \subseteq \mathbb{F}^n$ מרחב הפתרונות של משוואה הומוגנית. אז $\dim V$ מספר המשתנים החופשיים במטריצה הקאנונית המתאימה.

משפט 35. (משפט הממדים) יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ויים נוצרים סופית. אז:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

. . . . (5) . . . .

טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 47. בהינתן V_1, V_s מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, נניח קיום $\varphi\colon V_1 \to V_2$. נקרא את φ "העתקה ליניארית" (לעיתים יקרא "טרנספורמציה ליניארית" או בקיצור 'ט"ל') אם:

1. $\forall u, v \in v_1\colon \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{F}\colon \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

משפט 36. φ העתקה ליניארית אמ"מ $\forall \lambda_1, \lambda_s \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V\colon \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1(\varphi(v_1)) + \lambda_2(\varphi(v_2))$.

הגדרה 48. פונקציה תיקרא שיכון אמ"מ היא חח"ע.

סימון 9. בהינתן $\varphi\colon V_1 \to V_2$ העתקה ליניארית, תמונה (Image) תהיה:

$$\text{Im}(\varphi) := \text{Im}(\varphi) := \{\varphi(v) \mid v \in V_1\} \subseteq V_2$$

סימון 10. בהינתן $v\colon V_1 \to V_2$ העתקה ליניארית, גרעין (קרנל) יהיה:

$$\ker \varphi := \ker(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0\}$$

סימון 11. הומומורפיזם יהיה:

$$\hom_{\mathbb{F}}(V_1, V_2) = \{\varphi\colon V_1 \to V_2 \mid \text{העתקה ליניארית } \varphi\}$$

סימון 12. $\hom(V) := \hom(V, V)$

משפט 37. $\dim \hom_{\mathbb{F}}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

משפט 38. יהי $\varphi\colon V \to U$, $\mathbb{F}$ שדה:

1. $\varphi(0_V) = 0_V$
2. φ Im תמ"ו של U.
3. $\ker \varphi$ תמ"ו של V.
4. φ על אמ"מ $\text{Im}\,\varphi = U$
5. φ חח"ע אמ"מ $\ker \varphi = \{0\}$.

סימון 13. φ העתקת האפס אמ"מ $\text{Im}\,\varphi = \{0\}$ אמ"מ $\ker \varphi = V$

הגדרה 49. $\varphi\colon V_1 \to V_2$ יקרא איזומורפיזם (איזו') אם קיימת ψ ט"ל כך ש־$\psi\colon V_2 \to V_1$ וגם:

$$\psi \circ \varphi = id_{V_1} \wedge \varphi \circ \psi = id_{V_2}$$

סימון 14. בקשירה בהגדרה לעיל, $\psi =: \varphi^{-1}$.

למה 3. תהי $\varphi\colon V_1 \to V_2$. אז:

1. φ איזו אמ"מ φ חח"ע ועל.
2. אם φ איזו, אז קיימת לה הופכית יחידה.

סימון 15. נאמר שקבוצה היא איזומורפית לקבוצה אחרת, אם קיים איזומורפיזם בינהם

משפט 39. נתבונן ב־$\hom(V_1, V_2)$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ בעבור הפעולות:

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v),\ (\lambda\varphi) := \lambda\varphi(v)$$

משפט 40. בעבור $\varphi\colon V_1 \to V_2,\ \psi\colon V_2 \to V_3$ העתקות ליניאריות, יתקיים $\psi \circ \varphi$ העתקה ליניארית.

משפט 41. הרכבת ט"לים, ביחס עם חיבור פונקציות, על $\hom(V_1, V_2)$ מקיים אסוציאטיביות בהרכבה, דיסטרביוטיביות משמאל ומימין, ותאימות עם כפל בסקלר.

משפט 42. יהיו $V_1 \dots V_2 \in V$ ו־$\varphi\colon V \to U$, $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{F}$. אז

$$\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(v_i)$$

משפט 43. יהי V מ"ו עם בסיס $(v_1 \dots v_n)$, אז לכל $(u_1 \dots u_n) \subseteq U$ קיימת ויחידה העתקה ליניארית $\varphi\colon V \to U$ כך ש־$\forall i \in [n]\colon \varphi(v_i) = u_i$.

סימון 16. יהיו $\varphi V \to U$ ט"ל ו־$B = (v_1 \dots v_s)$ וקטורים ב־V. נסמן $\varphi(B) := (\varphi(v_1) \dots \varphi(v_s))$ להיות סדרת התמונות.

משפט 44. בקשירה לעיל,

1. אם $\varphi(B)$ בת"ל, אז B בת"ל.
2. אם B פורשת, אז $\varphi(B)$ פורשת את $\text{Im}\,\varphi$.
3. אם $\ker \varphi = \{0\}$, אז (B בת"ל אמ"מ $\varphi(B)$ בת"ל).
4. אם φ איזו, (B בת"ל/פורשת/בסיס (בנפרד) גורר $\varphi(B)$ בת"ל/פורשת/בסיס).

משפט 45. $\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im}\,\varphi$

משפט 46. תהי $\varphi\colon V \to U$ ט"ל. אם $\dim V$ סופי, אז:

1. אם φ שיכון, אז $\dim V \leq \dim U$.
2. אם φ על, אז $\dim U \leq \dim V$.

3. אם φ איזו', אז $\dim V = \dim U$.
4. אם φ חח"ע ועל, וגם $\dim V = \dim U$, אז φ איזו'!.

הגדרה 50. $f: V \to V$ יקרא פעולה אונרית.

הגדרה 51. $f: V \times V \to V$ יקרא פעולה בינארית.

סימון 17. נסמן $V \simeq W$ אמ"מ קיים $f: V \to W$ איזו'. נאמר V איזומורפי ל-W.

.... (6) ....

ט"לים כמטריצות

משפט 47. יהיו U,V מ"ו ממימד n, $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס, אז ישנה ט"ל איזו' בין $\varphi: V \to U$ לבין בסיס של U. היא תוגדר באמצעות $\varphi(B)$ עבור φ איזו, ועבור C בסיס של U נתאים את $\varphi_C: V \to U$ כך ש-$\forall i \in [n]: \varphi_C(v_i) = u_i$.

סימון 18.

$$[v]_B = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{F}^n,\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

משפט 48. יהי V מ"ו עם בסיס $B = (v_1 \dots v_n)$, נסמן $f(B) = \varphi_B: \mathbb{F}^n \to V$ כך ש-$\varphi(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum \lambda_i v_i$. אז f איזו' וההופכית שלה $f^{-1} = \lambda v \in V.[v]_B$.

הגדרה 52. יהי $\varphi: V \to U$, $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס של V ו-C בסיס של U מגודל m. נסמן:

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [\varphi(v_1)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$$

ונקראה המטריצה המייצגת של φ לכסי בסיס B ו-C.

משפט 49. יהיו U,V מ"ויים מעל שדה $\mathbb{F}$ ממדים $n = \dim V,\ m = \dim U$. יהיו $C = (u_i) \subseteq U,\ B = (v_i) \subseteq V$ בסיסים. אז:

$$\sum_{i,j \in [m]\times[n]} x_j a_{ij} u_j = \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \operatorname{Col}_i$$

.... (7) ....

כפל מטריצות

משפט 50. יהיו ψ, φ העתקות ליניאריות, מבסיסים B ל-C. אז:

$$[\psi + \varphi]_C^B = [\varphi]_C^B + [\psi]_C^B,\ [\lambda\varphi]_C^B = \lambda[\varphi]_C^B$$

משפט 51. יהיו U,V מ"ויים, B,C בסיסים ממדים m,n, בהתאמה פעמיים. אז $T: \hom(V, U0 \to M_{m\times n}(\mathbb{F}))$ המוגדרת לפי $T(\varphi) = [\varphi]_C^B$, היא איזומורפיזם.

הגדרה 53. יהיו $A = (a_{ij}) \in M_{m\times s},\ B = (b_{ij}) \in M_{s\times n}$ מטריצות. נגדיר:

$$AB := A \cdot B = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} \in M_{m\times n}$$

משפט 52. יהיו $\varphi: V \to U,\ \psi: U \to W$ ט"לים. B_v, B_u, B_w בסיסיהן בהתאמה. אז:

$$[\psi \circ \varphi]_{B_w}^{B_v} = [\psi]_{B_w}^{B_u} \cdot [\varphi]_{B_u}^{B_w v}$$

משפט 53. יהיו A,B,C מטריצות, אז:

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC$

הגדרה 54.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 54. עבור V מ"ו, אם $\dim V = n$ אז $[id_V]_B^B = I_n$

משפט 55. תהי $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה. יהי $x = (x_i) \in \mathbb{F}^m$ ו-$b = (b_i) \in \mathbb{F}^m$. אז $Ax = b$ אמ"מ x פתרון למערכת המשוואות ש-$(A \mid b)$ מייצגת.

משפט 56. תחת הקשירה של הטענה הקודמת, מרחב הפתרונות של $Ax = 0$ הוא מ"ו.

משפט 57. תחת הקשירה של הטענה הקודמת, לכל φ ט"ל מ-V ל-U עם בסיסים B,C בהתאמה, כך ש-$[\varphi]_C^B = A$, יתקיים שמרחב הפתרונות של $(A \mid 0)$ יהיה $\ker\varphi$.

.... (8) ....

מטריצות הפיכות ואלמנטריות

הגדרה 55. בהינתן מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, המטריצה המשוחלפת שלה תהיה $A^T = (a_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$.

משפט 58. תהי A מטריצה:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

משפט 59. יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, $\varphi: \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ העתקה' tz:

$$\varphi_A := (\lambda_1 \dots \lambda_m) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \cdot A,\ [\varphi_A]_E^E = A^T$$

???

הגדרה 56. A הפיכה מימין אם קיימת $\exists B \in M_n(\mathbb{F}): AB = I_n$.

הגדרה 57. A הפיכה משמאל אם קיימת $\exists B \in M_n(\mathbb{F}): BA = I_n$.

הגדרה 58. A הפיכה אם קיימת $\exists B \in M_n(\mathbb{F}): AB = BA = I_n$.

משפט 60. בהינתן $A \in M_n(\mathbb{F})$, אז A הפיכה אמ"מ היא מייצגת איזומורפיזם אמ"מ כל ההעתקות שהיא מייצגת הן איזומורפיזם.

הגדרה 59. ההופכית למטריצה היא יחידה.

סימון 19. בהינתן מטריצה הפיכה A, את ההופכית שלה נסמן ב-A^{-1} (מוגדר היטב מיחידות).

משפט 61. A הפיכה מימין אמ"מ A הפיכה משמאל אמ"מ A הפיכה מימין.

משפט 62. תהי $Ax = b$ מערכת משוואות עם n נעלמים, $A \in M_n(\mathbb{F}),\ x = (x_i)_{i=1}^n$, ווקטור משתנים $b = (b_i)_{i=1}^n$. אז A הפיכה גורר $A^{-1}b = x$ פתרון יחיד.

משפט 63. יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, אז:

1. A^{-1} הפיכה.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. A^T הפיכה.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. AB הפיכה, ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

משפט 64. $(A_1 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_1^{-1}$

הגדרה 60. מטריצה אלמנטרית היא מטריצה שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י פעולה אלמנטרית אחת.

משפט 65. תהי φ פעולה אלמנטרית, $E := \varphi(I_n)$, אז $\varphi(A) = E \cdot A$.

משפט 66. תהי A מטריצה אלמנטרית, אזי A הפיכה וההופכית שלה אלמנטרית.

משפט 67. מכפלה של אלמנטרית היא הפיכה.

משפט 68. יהי $B \in M_{m\times n}$, אז קיימת $A \in M_m(\mathbb{F})$ מכפלת אלמנטריות, ו־$B' \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קאנונית, כך ש־$B = AB'$.

משפט 69. תהי $B \in M_n(\mathbb{F})$ מדורגת קאנונית, אז $B = I_n$ אמ"מ B הפיכה.

משפט 70. יהיו $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, ונניח $A = CB$. אם C הפיכה, אז B הפיכה אמ"מ A הפיכה.

משפט 71. יהיו $A, B \in M_n$ מטריצות מדורגות קאנונית כך ש־$B = E_s \cdots E_1 A$ עבור E_i מטריצה אלמנטרית. אז:

1. A הפיכה אמ"מ $B = I$
2. אם A הפיכה, אז $A^{-1} = E_s \cdots E_1$.

הגדרה 61. A תקרא סימטרית אם $A^T = A$ (ובפרט A ריבועית).

הגדרה 62. A אנטי־סימטרית אם $A^T = -A$.

הגדרה 63. עבור מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, נגדיר $A^* \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ ע"י $(A^*)ij = \overline{A_{ij}}$ להיות המטריצה הצמודה של A.

משפט 72. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. $\forall v \in \mathbb{F}^n$ למערכת המשוואות $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
3. $\forall b \in \mathbb{F}^n$ למערכת המוושאות $Ax = b$ קיים פתרון.
4. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
5. למערכת $Ax = 0$ פתרון יחיד.
6. A שקולת שורות ל־I.
7. עמודות A בת"ל.
8. שורות A בת"ל.
9. עמודות A פורשות את $\mathbb{F}^n$.
10. שורות A פורשות את $\mathbb{F}^n$.

(9)

שינוי בסיס

משפט 73. יהי $B = \{\theta_1 \dots \theta_n\}$ בסיס ל־V וגם $B' = \{u_1 \dots u_n\}$ כך ש־$\forall i \in [n] \colon u_i = \sum \alpha_{ji}\theta_j$, אז:

$$M := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

היא הפיכה אמ"מ B' בסיס ל־V.

הגדרה 64. יהיו B, B' בסיסים של V מ"ו. אז $M = [id]_B^{B'}$ היא מטריצת המעבר מבסיס B' ל־B.

משפט 74. יהי V מ"ו ונסמן $\dim V = n$, ו־$B,\ B'$ בסיסים ל־V, אז מטריצת המעבר M מ־B' ל־B תקיים $\forall \theta \in V \colon [\theta]_B = M[\theta]_{B'}$.

סימון 20. תהי $T \colon V \to V$ ט"ל ו־V מ"ו. נסמן $[T]_B^B = [T]_B$.

משפט 75. תהי $T \colon V \to W$ איזו', ו־B, C בסיסים של V ו־W בהתאמה. אז $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.

משפט 76. יהיו $T \colon V \to V$ ט"ל, נסמן $\dim V = n$, ויהיו B, B' בסיסים של V, ו־M מטריצת מעבר בסיס מ־B' ל־B. אז $[T]_{B'} = M^{-1}[T]_B M$.

הגדרה 65. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש־A, B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$A = P^{-1}BP$.

משפט 77. תהי $T \colon V \to V$ ט"ל ויהיו B, C בסיסים של V. אז $[T]_B^B, [T]_C^C$ דומות.

משפט 78. יהיו A, B מטריצות דומות. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B \wedge \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

הגדרה 66. יהיו מטריצות $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נאמר כי הן מטריצות מתאימות אם קיימות מטריצות הופכיות $P \in M_n(\mathbb{F}),\ Q \in M_m(\mathbb{F})$ כך ש־$A = Q^{-1}BP$.

משפט 79. יהיו V, W מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T \colon V \to W$ ט"ל. כמו כן, יהיו B, B' ביסיס של V ו־C, C' בסיסים של W. אז $[T]_C^B,\ [T]_{C'}^{B'}$ מטריצות מתאימות.

משפט 80. מטריצות $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתאימות אמ"מ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

(10)

דרגת מטריצה

הגדרה 67. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נגדיר את דרגת A להיות הממד של התמ"ו של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י שורות A.

סימון 21. עבור $v_1 \dots v_m$ שורות של A נסמן $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Row} A$.

למה 4. בהינתן m שורות מעל $\mathbb{F}^n$, נדע $\operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$

משפט 81. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו־$B \in M_{n\times s}(\mathbb{F})$. אז

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

ואם A ריבועית והפיכה, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$

משפט 82. עבור מטריצה מדורגת, מספר השורות השונות מ־0 הוא $\operatorname{rank} A$.

משפט 83. $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$

משפט 84. $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Row} A = \dim \operatorname{Col} A$

משפט 85. בעבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax = 0$ הוא $n - \operatorname{rank} A$.

משפט 86. $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

(11)

דיטרמיננטות

הגדרה 68. פונ' $\det \colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ תקרא דיטרמיננטה אמ"מ:

- $\det$ מולטילינארית (לינארית בשורה).
- בעבור $M \in M_n(\mathbb{F})$ ו־M' מטריצה שהוחלפו בה שתי שורות כלשהן, $\det M = -\det M'$.
- $\det I_n = 1$.

משפט 87. תהי $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$ ו־$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. אז $\det A = ad - bc$.

משפט 88. בהינתן φ פעולה אלמנטרית ו־$\det$ דיטרמיננטה, אז:

- אם φ החלפת שורות, $\det \varphi(A) = -\det A$.
- אם φ הכפלה בסקלר λ, אז $\det \varphi(A) = \lambda \det A$.
- אם φ הוספת שורה מוכפלת בסקלר לאחרת, אז $\det \varphi(A) = \det A$.

משפט 89. הדיטרמיננטה קיימת ויחידה.

הערה 1. אם אתם שונאים את עצמכם, תוכיחו את משפט 89.

משפט 90. $\det A = \det A^T$

למה 5. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם שורת אפסים. אז $\det A = 0$.

סימון 22. $|A| := \det A$

הערה 2. סימון 22 מוגדר היטב לכל A כי הדיטרמיננטה קיימת ויחידה.

משפט 91. יהיו $\det \colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, A, B \in M_n(\mathbb{F})$ דיטרמיננטות. אז $\det AB = \det A \cdot \det B$.

משפט 92. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

משפט 93. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$.

הגדרה 69. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i, j \in [n]$. אז המינור A_{ij} היא המטריצה המתקבלת מ־A ע"י מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

משפט 94. **(פיתוח לפי עמודה)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F}) = (a_{ij})$. אז

$$\forall i \in [n] \colon |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ij} |A_{ij}|$$

משפט 95. **(פיתוח לפי שורה)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F}) = (a_{ij})$. אז

$$\forall j \in [n] \colon |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ij} |A_{ij}|$$

הגדרה 70. תמורה היא פרמוטציה

סימון 23. נסמן ב־S_n את קבוצת כל התמורות על $[n]$.

הגדרה 71. תהי $\sigma \in S_n$, נגדיר את $\operatorname{sgn}\sigma$ להיות מספר ההחלפות ש־σ מבצעת ב־$\langle n \rangle$.

משפט 96. **(פיתוח לפי תמורות)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,\sigma(i)} \right)$$

(12)

אחר

הגדרה 72. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר את המטריצה המוצמדת (עיתים קרויה גם "מצורפת") להיות מוגדרת ע"י:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

משפט 97. תהי מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז $A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = |A| I$. בפרט, בעבור A הפיכה, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$.

הגדרה 73. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר את העקבה של A להיות $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} (A)_i i$.

משפט 98. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F}) \colon \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

משפט 99. $\operatorname{tr} \colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא ט"ל.

הגדרה 74. מטריצת בלוקים תהיה כזה בלוקים ששים במטריצה (אין לי כוח להגדיר פורמלית).

משפט 100. בהינתן a_{ij}, b_{ij} מטריצות, מטריצות הבלוקים $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ יקיימו:

$$(AB)_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ji}$$

כאשר $(AB)_{ij}$ יסומן כבלוק ה־ij ב־AB.

(כלומר: אפשר לכפול בלוקים כמו והיו איברי מטריצה רגילים)

משפט 101. תהיינה $A \in M_n(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), D \in M_m(\mathbb{F})$ מטריצות. אז $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.

משפט 102. **(כלל קרמר)** תהי $Ax = b$ מערכת משוואות ליניארית כאשר $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו־$b \in \mathbb{F}^n$. אז אם $\det A \neq 0$, הפתרון היחיד של המערכת $Ax = b$ נתון ע"י:

$$x = \left(\frac{\det A_i}{\det A} \right)_{i=1}^{n}$$

כאשר A_i המטריצה המתקבלת ע"י החלפת עמודה ה־i של A ב־b.

הגדרה 75. יהיו $(\alpha)_{i=1}^{n-1}$ סקלרים ב־$\mathbb{F}$, אזי מטריצת ונרדמונדה מוגדרת לפי

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

משפט 103. מטריצת ונדרמונדה ריבועית והדטרמיננטה שלה:

$$\det V = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

Shit Cheat Sheet ~ Linear Algebra 1A ~ TAU

Shahar Perets

14.2.2025