מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 10

ניתן בתאריך 17.1.24. להגשה עד יום שלישי 23.1.24.

1. יהי R יחס מעל A. הוכיחו:
   (א) R רפלקסיבי אם ורק אם $Id_A \subseteq R$.
   (ב) R סימטרי אם ורק אם $R^{-1} = R$.
   (ג) R טרנזיטיבי אם ורק אם $R \circ R \subseteq R$.

2. יהי R יחס מעל קבוצה A. תת קבוצה $B \subseteq A$ נקראת **סגורה ביחס ל-**R אם מתקיים $\forall x \in B. \forall a \in A. \left(xRa \to a \in B\right)$.
   עבור קבוצה $X \subseteq A$ נגדיר את הקבוצה $X' = \{b \in A \,|\, \exists x \in X. xRb\}$.
   הוכיחו כי אם R יחס טרנזיטיבי אז לכל קבוצה $X \subseteq A$ מתקיים ש- $X \cup X'$ סגורה ביחס ל-R.

3. עבור כל אחד מהיחסים הבאים, הוכיחו שמדובר ביחס שקילות.
   (א) היחס Res על המספרים הממשיים, המוגדר באופן הבא: עבור $a, b \in \mathbb{R}$,
   $$\langle a, b\rangle \in Res \iff b - a \in \mathbb{Z}$$
   (כלומר $Res = \left\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \,|\, b - a \in \mathbb{Z}\right\}$)
   (ב) בהינתן קבוצה $X \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ ומספר שלם $k \in \mathbb{Z}$, נגדיר את הקבוצה הבאה: $X + k \coloneqq \{x + k \,|\, x \in X\}$. נגדיר יחס $\sim$ על $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ באופן הבא:
   $$A \sim B \iff \left\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2 \,|\, \exists k \in \mathbb{Z}. A = B + k\right\}$$
   (ג) עבור $E \subseteq \mathbb{N}$ קבועה, היחס $R_1 = \left\{\langle C, D\rangle \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2 \,|\, C \cap E = D \cap E\right\}$ מעל $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$.
   (ד) נגדיר $A = \left\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \,|\, b > 0\right\}$. היחס $R_2 = \left\{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in A^2 \,|\, ad = cb\right\}$ מעל A.
   (ה) היחס $R_3 = \left\{\langle f, g\rangle \in \left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}\right)^2 \,|\, \exists \delta > 0. \forall x \in \left(-\delta, \delta\right). f\left(x\right) = g\left(x\right)\right\}$ מעל $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. בדקו עבור היחסים הבאים האם הם רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים והוכיחו תשובתכם:
   (א) $R_1 = \left\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2 \,|\, \exists n \in \mathbb{N}. A \Delta B = \{n\}\right\}$ מעל $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$
   (ב) $R_2 = \left\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2 \,|\, A \subseteq B\right\}$ מעל $\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$
   (ג) $R_3 = \left\{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a + b = 100\right\}$ מעל $\mathbb{Z}$
   (ד) $R_4 = \left\{\langle f, g\rangle \in \left(\mathbb{N} \to \mathbb{N}\right)^2 \,|\, f \circ g = id_{\mathbb{N}}\right\}$ מעל $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) אם R, S יחסי שקילות על קבוצה A אז $R \cap S$ יחס שקילות.
   (ב) אם R, S יחסי שקילות על קבוצה A אז $R \cup S$ יחס שקילות.
   (ג) אם R, S יחסים טרנזיטיביים על קבוצה A אז $R \circ S$ יחס טרנזיטיבי.

6. יהי R יחס שקילות מעל קבוצה A, ויהיו $a, b \in A$.
   (א) הוכיחו שמתקיים $\left([a]_R \cap [b]_R = \emptyset\right) \vee \left([a]_R = [b]_R\right)$. (הערה: כדי להוכיח פסוק מהצורה $p \vee q$, מספיק להראות שאם מתקיים $\neg p$ אז מתקיים q).

(ב) הוכיחו שהטענות הבאות שקולות:

i. aRb

ii. $a \in [b]_R$

iii. $[a]_R = [b]_R$

7. יהי R יחס על קבוצה A, המקיים את התנאי הבא: $\exists x \in A. \forall y \in A. xRy$.

(א) הוכיחו שאם R יחס שקילות, אז $R = A \times A$.

(ב) הוכיחו שאם T יחס שקילות על A ו-$R \subseteq T$ אז $T = A \times A$.

(ג) ניקח $A = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ויהי -

$$R = \{(R_1, R_2) \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \;:\; R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1\}$$

הראו ש-R מקיים את התנאי $\exists x \in A. \forall y \in A. xRy$. האם R יחס שקילות?

8. תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה כלשהי, ויהי R יחס מעל A.

(א) נגדיר $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$. הוכיחו כי היחס R^* טרנזיטיבי.
<u>הערה:</u> תוכלו להשתמש בטענה הבאה ללא הוכחה: $\forall m, n \in \mathbb{N}. R^{(m)} \circ R^{(n)} = R^{(m+n)}$.

(ב) הוכיחו כי R^* הוא היחס הטרנזיטיבי המינימלי שמכיל את R, כלומר הוכיחו ש-$R \subseteq R^*$ ושלכל יחס טרנזיטיבי S מעל A המקיים $R \subseteq S$ מתקיים $R^* \subseteq S$.
<u>הערה:</u> R^* הנ"ל נקרא <u>הסגור הטרנזיטיבי</u> של R וראיתם אותו לראשונה בתרגיל בית 5.

(ג) מהו R^* עבור היחס

$$R = \left\{ \langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \,|\, a = c \vee b = d \right\}$$

מעל $\mathbb{R}^2$? הוכיחו את תשובתכם.

9. יהי R יחס מעל קבוצה A. נגדיר $Sym(R) = R \cup R^{-1}$.

(א) הוכיחו ש-$Sym(R)$ יחס סימטרי.

(ב) הוכיחו ש-$Sym(R)$ הוא היחס הסימטרי המינימלי שמכיל את R, כלומר הוכיחו ש-$R \subseteq Sym(R)$ ושלכל יחס סימטרי S מעל A המקיים $R \subseteq S$ מתקיים $Sym(R) \subseteq S$.

(ג) נניח ש-$A \neq \emptyset$. הוכיחו/הפריכו: $Sym(R^* \cup Id_A)$ יחס שקילות.