מתמטיקה B ~עברי נגר ~ טיילור סוויפט ובית חולים

שחר פרץ

10 ביולי 2024

THE HOSPITAL RULE .... (1)

תזכורת: f,g גזירות בסביבה נקובה של t, ומתקיים:

1. $\lim_{x\to t} f(x)=0$
2. $\lim_{x\to t} g(x)=0$
3. $g'(x)\neq 0$ בסביבה נקובה של t.
4. $\lim_{x\to t}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L'$

או שבמקום $1,2$ מתקיים $\lim_{x\to t} g(x)=\pm\infty$, אז $\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{g(x)}=L'$.

1.1 דוגמאות

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\overset{\cancel{LH}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{1}\in\emptyset$$

הגבול לא קיים ולכן לא נוכל להשתמש בלופיטל. אבל לא תהיה בעיה להגיד שזה הולך ל־0 כי $\sin x$ חסום ע"י x. נוכל להשתמש בכלל בית החולים גם עבור פונקציות אחרות:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$$

תרגיל:

$$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}=e^1=1$$

נוכל להעביר את הגבול לתוך האקספוננט, או באופן כללי לתוך הפונקציה, אם הפונקציה רציפה באותה הנקודה (במקרה הזה, e^x רציף ב־0).

1.2 עוד כמה דברים אקראיים

טענה: אם הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x)=c\in\mathbb{R}$ קבוע, (ו־$f(x)$ גזירה), אז $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ (כי לכאורה הפונקציה לא משתנה מספיק מהר, אחרת לא יהיה גבול).

הוכחה. זה לא נכון. ■

היה איזה הסבר בכיתה שלא העתקתי. תבדקו בסיכומים אחרים.

טענה (נכונה): תחת אותם התנאים, $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ קיים, אז $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} f(x)=c\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow&\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\\ \overset{LH}{=}&\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{1}\end{aligned}$$

קיים הגבול מההנחה

■

נוכל לקרב באמצעות פולינומים פונקציות רציפות – תחילה, הפונקציה תראה כמו קו ישר, וכאשר נתרחק נראה אט־אט שיפוע, וכו'. תהי פונקציה $f(x)$, נתבונן בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. נרצה סביב x_0 לקרב את הפונקציה כמה שנוכל, באמצעות פולינומים ממעלות שונות:

1. פולינום ממעלה 0: $f(x) \approxeq p_0(x) = a_0$. נבחר $a_0 = f(x_0) = p_0$
2. מעלה 1: $f(x) \approxeq p_1(x) = ax + b$. נדרוש $f'(x_0) = p'(x_0) = a$ $f(x_0) = p_1(x_0) = ax_0 + b,$. סה"כ נפתור את המשוואות ונקבל $a = f'(x_0),\ b = f(x_0) - ax_0$ וסה"כ $p_1(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)}$.
3. מעלה 2: $f(x) \approxeq p_2(x) = ax62 + bx + c$. נדרוש $f''(x_0) = p''(x_0) = 2a$ $f'(x_0) = p'(x_0) = 2ax + b,$. נפתור עבור a, b, c ונקבל $a = \frac{1}{2}f''(x_0),\ f'(x_0) = f'(x_0) - f''(x_0)x_2,\ c = f(x_0) - (f'(x_0) - f''(x_0)x_0)\, x_0 - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2$. נציב ונקבל

$$p_2(x) = \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + (f'(x_0) - f''(x_0)x_0)x + f(x_0) - (f'(x_0) - f''(x_0)x_0) - \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2$$

נשלים לריבוע:

$$p_2(x) = \underbrace{\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}f''(x_0)xx_0 - \frac{1}{2}f''(x)}_{\frac{1}{2}f''(x_0)x^2} + \dots$$

נשים לב שההשלמה לריבוע מתבטלת ביחס למקדמים אחרים שבשאר הפונקציה. הביטויים יצטמצם וניוותר עם:

$$p_2(x) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = \frac{1}{2}f'(x_0)(x - x_0)^2 + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}_{p_1(x)}$$

נשים לב שהקירובים קשורים זה לזה. נרחיב למקרה ה־n־י. אנחנו לא רוצים לפתור מערכות משוואות מגעילות, ולכן נמרכז סביב x_0.

$$f(x) \approxeq p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k,\ f^{(m)}(x_0) = p_n^{(m)}(x_0)$$

לפי הנוסחא לחישוב נגזרת, כאשר נגזור מונום מדרגה k, m פעמים, הדרגה תהפוך להיות $k - m$, ונוריד k, ואז $k - 1$, ואז $k - 2$, עד $k - m + 1$.

$$\begin{aligned} p_n^{(m)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)(x - x_0)^{k-m} \\ &= \sum_{k=m}^{n} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1)(x - x_0)^{k-m} \end{aligned}$$

כאשר $x = x_0$ (או לפחות שואף לו), הכל מתאפס פרט ל־$k = m$, משום שחזרות חיוביות של 0 הן 0, וחזקות שליליות יתאפסו במקדם. נקבל:

$$p_n^{(m)}(x_0) = a_m \cdot m(m-1)\dots 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{(k - m + 1)}_{=1} \cdot \underbrace{(x - x_0)^{k-m}}_{=1} = a_m m!$$

ולכן $a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$. נחזור לפונקציה למעלה.

$$f(x) \approxeq p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)!}}{k!}(x - x_0)^k$$

זהו פולינום טיילור. אז מה זה הקירוב הזה? נצפה שככל שנתקרב ל־x_0, פולינום טיילור ישאף אליו. גם נצפה שככל שניקח $n \to \infty$ נקבל קירוב יותר טוב של הפונקציה ואכן יש לנו את השוויונות הבאים:

$$x \to x_0: \quad f(x) = p_n(x) + O((x - x_0)^{n+1})$$

זה נכון תחת ההנחה ש־f גזירה $n + 1$ פעמים בקטע סביב x_0. "אתם יודעים מה זה O גדול, הגדירו לכן אותו" (אותו הדבר כמו שהגדירו רק $x \to 0$ במקום $x \to \infty$). (נושף למיקרופון כי אנחנו עושים רעש) "אהאהאהאה לול".

וכאשר $n \to \infty$ הקירוב משתפר. (באיזשהו תחום). אפשר לשאול מה הוא הטור: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ (זהו טור טיילור).

טענה: טור טיילור מקיים שוויון ל־$f(x)$ עבור "הרבה פונקציות".

2.1 דוגמאות

2.1.1 ניתוח סינוסים

כאשר עושים טור טיילור עבור $x_0 = 0$ (טור טיילור סביב 0), קוראים לזה טור מק'לרון. נעשה טור מק'לרון עבור $\sin x$:

$$f(x) = \sin x,\ \ f^{(m)}(x) = \begin{cases} \sin x & m \equiv 0 \\ \cos x & m \equiv 1 \\ -\sin x & m \equiv 2 \\ -\cos x & m \equiv 3 \end{cases} \bmod 4,\ \ f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0 & m \equiv 0 \\ 1 & m \equiv 1 \\ 0 & m \equiv 2 \\ -1 & m \equiv 3 \end{cases} \bmod 4$$

באופן כללי, $f^{\overbrace{2k+1}^{m}} = (-1)^k$. לסיכום:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\underbrace{2k+1}_{m})!} x^{2k+1}$$

(הנחנו שכל הזוגיים מתאפסים, וסכמנו את האי־זוגיים).

2.1.2 e^x

עבור e^x: ידוע $f^{(m)}(x) = e^x$. נעשה לזה טור מק'לורן. $f^{(m)}(0) = 1$. נקבל:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

2.1.3 תרגיל

אותו הדבר עבור $\cos x$. ידוע:

$$f(x) = \cos x,\ \ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n \equiv 0 \\ -\sin x & n \equiv 1 \\ -\cos x & n \equiv 2 \\ \sin x & n \equiv 3 \end{cases},\ \ f^{(n)}(0) = 1, 0, -1, 0$$

באופן כללי $f^{(2k)} = (-1)^k$ וסה"כ:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

דרך נוספת היא:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{3j+3})$$

נגזור את השוויון:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} + O(x^{2n+2})$$

שזהו הפולינום טיילור שקיבלנו עבור $\cos x$.

2.1.4 $\frac{1}{x}, \ln x$

נבחר $x_0 = -1$ (הפעם לא מק'לורן).

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \implies f^{(m)}(x) = (-1)(-2)\dots(-n) \cdot x^{-m-1} = (-1)^m m! x^{-m-1},\ \ f^{(m)}(x_0) = -m!$$

סה"כ (ואכן נראה שוויון לטור גיאומטרי):

$$\frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} -(x+1)^m = -\frac{1}{1-(x+1)} = \frac{1}{x}$$

במקרה הזה זה יעבוד רק עבור $-2 \leq x \leq 0$. זה הגיוני כי הטור הגיאומטרי מתכנס עבור $|x+1| < 1$. תזכורת:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$$

כאשר $|a| < 1$ (אחרת זה פשוט אינסוף). מכאן, נוציא אינטגרל ונקבל:

$$\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{x^k}{k}$$

2.2 הערות

1. לפונקציות זוגיות/אי־זוגיות, יש רק איברים זוגיים/אי־זוגיים (בהתאמה) בטור מק'לורן (לדוגמה, $\sin x$ אי־זוגית ויש לה רק איברים זוגיים).
2. כך אפשר להגדיר $\sin x, \cos x$, ופונקציות נוספות, במקום באמצעות גיאומטריה מפוקפקת. אפשר להוכיח מתוך הטור תכונות אלגבריות כמו $\sin(x+y) = \dots$.
3. צריך לדעת בע"פ את הטורים שראינו כאן היום.

ידוע גם:

$$f(x) = p_n(x) + O((x-x_0)^{n+1})$$

דוגמה:

$$e^x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1|}), \implies e^{x^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + O(x^{2k+2})$$

ומליניאריות הנגזרת, כאשר $\approxeq$ מסמן את טור הטיילור של הפונקציה:

$$f(x) \approxeq p_n, \tilde{f}(x) \approxeq \tilde{p}_n, \implies f(x) + \tilde{f}(x) = p_n + \tilde{p}_n$$

2.3 חישוב טורי טיילור נוספים

2.4 דוג'

פולינום טיילור סביב 0 מסדר 3 של $f(x) = e^x \cos x$. אפשר ללכת לנוסחא ולגזור 3 פעמים. אבל אפשר להשתמש בטורי הטיילור שאנו יודעים:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4), \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

סה"כ:

$$e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) - 1 + x - \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$

2.5 דוג' 2

פולינום טיילור סביב 0 מסדר 4 של $f(x) = e^{\cos x}$.

$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}_{y}, \implies f(x) = e^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6)} = e \cdot e^y$$

$$= e\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + O(y^3)\right) = \frac{1}{e}f(x) = 1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) + \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)_O\left(\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)^3\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + O(x^6) + \frac{x^4}{4} + O(x^6) + O(x^6) = \mathbf{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}}$$