אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 2

1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $v, u, w \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $v \cdot w = u \cdot w$ ובנוסף כל הרכיבים של w אינם 0, אז $v = u$.

(ב) אם $v, u \in \mathbb{R}^n$ ומתקיים ש- $v \cdot w = u \cdot w$ לכל $w \in \mathbb{R}^n$, אז $v = u$.

2. תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה.

(א) הוכיחו שלכל $u, v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $u \cdot (Av) = (A^t u) \cdot v$.

(ב) נניח בנוסף שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $v \perp Av$.

i. הוכיחו שאם n אי-זוגי אז A אינה הפיכה (<u>רמז:</u> הראו ש-A אנטי-סימטרית).

ii. מצאו דוגמה ל-n זוגי ו-A הפיכה שמקיימת את הנתון.

3. הוכיחו שלכל $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$|ab + ac + bc| \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

4. יהי $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו שקיים $u \in \mathbb{R}^n$ **יחיד** כך ש:

(א) v, u תלויים ליניארית,

(ב) $\|u\| = 1$,

(ג) $u \cdot v > 0$. (u כזה נקרא **הנירמול/התקנון** של v).

5. הוכיחו את כלל המקבילית למכפלה סקלרית שראינו בתרגול: לכל $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

6. תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ תת-קבוצה. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $0^\perp = \mathbb{R}^n$ ו- $(\mathbb{R}^n)^\perp = 0$ (תזכורת: אנחנו כותבים לפעמים 0 עבור תת-המרחב הוקטורי שמכיל רק את וקטור האפס במקום לכתוב $\{0\}$).

(ב) $\mathrm{span}(A) \cap A^\perp = 0$.

(ג) $A^\perp = (\mathrm{span}(A))^\perp$.

7. נגדיר את הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס ל- $(v_1, v_2, v_3, v_4)^\perp$.

8. תהי $B = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 2\}$.

(א) הוכיחו כי אם $v, u \in B$ תלויים ליניארית אז $u = \pm v$.

(ב) יהי $v \in B$. הוכיחו כי קיים וקטור **יחיד** $u \in B$ כך ש- $v \cdot u = 4$.