אוניברסיטת ת"א
סמסטר ב', תשפ"ה
**תאריך הגשה:** 21/04/2025

# תרגיל בית 2 במבני נתונים

על כל התשובות להיות מנומקות. בכל שאלה יש לבחור במימוש היעיל ביותר האפשרי מבחינת סיבוכיות זמן. יש לענות על השאלות במקומות המוגדרים לכך.

<u>שאלה 1</u>
בהרצאה ראינו מימוש של מחסנית על-ידי מערך עם הכפלות, שמאפשר זמן amortized קבוע לפעולה.

א. נשנה את המימוש, כך שכשהמערך מתמלא נכפיל את גודלו פי $(1+\alpha)$ עבור $\alpha > 0$ במקום להכפיל פי 2. הראו שזמן הריצה amortized לפעולה הוא כעת $O(\frac{1+\alpha}{\alpha}+1)$.
***<u>חשוב</u>**: חובה להוכיח סעיף זה **<u>בשיטת הפוטנציאל</u>**. (רמז: השתמשו בפונקציית פוטנציאל דומה לזו שהייתה בשיעור)*

ב. נשנה את המימוש, כך שכשהמערך שגודלו $k$ מתמלא, נקצה מערך גדול ב- $\sqrt{k}$ תאים, ונעתיק אליו את תוכן המערך. כלומר, במקום להגדיל כפלית פי 2, אנחנו מגדילים חיבורית על-ידי יצירת מערך חדש בגודל $k+\sqrt{k}$ והעתקת $k$ התאים המלאים אליו. שימו לב ש- $k$ אינו קבוע לאורך הריצה. הראו שזמן הריצה amortized לפעולה הוא $\Theta(\sqrt{n})$. במילים אחרות, הראו שזמן הריצה הכולל הדרוש לסדרה של $n$ פעולות הוא $\Theta(n\sqrt{n})$.
***<u>חשוב</u>**: נזכיר שכדי להוכיח $\Theta(f(n))$ יש להוכיח $\Omega(f(n))$ **<u>וגם</u>** $O(f(n))$.*
*עבור $\Omega(f(n))$ צריך לתאר ולנתח סדרה "קשה" לטיפול, חישבו מה קורה (למשל) לאחר $\frac{n}{2}$ הכנסות. את החסם העליון ניתן להוכיח בסעיף זה בכל דרך שתרצו, מומלץ להשתמש בשיטת ה-accounting.*

## <u>שאלה 2</u>

בתרגול ניתחנו את זמן הריצה amortized של מונה בינארי אינסופי עם פעולת Increment.
שלושת הסעיפים הבאים **<u>לא</u>** קשורים זה לזה והם בלתי תלויים זה בזה.

א. הראו שלא ניתן לממש מונה בינארי אינסופי, שתומך גם בפעולת Increment וגם בפעולת Decrement (הפחתה של 1 מערך המונה), בזמן amortized קבוע לפעולה. רמז: הראו שלכל N קיים רצף של N פעולות שזמן הריצה שלו $\omega(N)$. הניחו שלא מגיעים לערכים שליליים.

ב. כדי לשפר את יעילות המונה נשתמש בספרות $0, +1, -1$ (במקום רק ב-0 ו-1, מכונה בספרות "signed-bits representation"). ערכו של מספר המיוצג ע"י סדרת הספרות $t_{k-1}, \dots, t_0$ מוגדר להיות:

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i t_i$$

*למשל* $-1$ *,* $1, 0$ *הוא הייצוג של* $3$ $2^2 - 2^0 = 3$.

פעולת increment של מספר בייצוג כזה מתבצעת באופן דומה לביצועה במערכת המספרים הרגילה. מוסיפים 1 לספרה הימנית ביותר. אם ערכה הפך ל-2, הוא משתנה ל-0 וגוררים את העודף לספרה הבאה משמאל. Decrement מתבצע בצורה דומה: מורידים 1 מהספרה הימנית ביותר, אם ערכה הפך ל-(2-), הופכים אותו ל-0, וגוררים את החוסר (1-) לספרה שמשמאל. דוגמא: המספר $1, 0, -1$ פחות 1, נקבל $1, 0, -1$. כעת נוסיף לו 1 ונקבל $1, -1, 1$. שימו-לב שקיבלנו שתי צורות שונות לייצוג של 3: $1, 0, -1$, ו- $1, -1, 1$. נגדיר את עלות הפעולה להיות **מספר הספרות המשתנות** כאשר מבצעים את הפעולה. הוכיחו, כי בייצוג שכזה העלות של סדרה של $n$ פעולות increment ו-decrement כאשר מתחילים ממונה שערכו $0$ היא $O(n)$.

ג. בסעיף זה נרחיב את מבנה הנתונים. נוסיף פעולת RESET, אשר מאפסת את כל הביטים שמייצגים את המספר שמראה המונה.
המונה כעת שומר את המיקום של הביט הכי שמאלי במונה במשתנה עזר(מחוץ למונה), הפעולה RESET מאפסת את כל הביטים עד הביט הכי שמאלי (כולל ביטים עם ערך 0). שימו לב שלאחר פעולת RESET הערך שמראה המונה הוא 0 והביט הכי שמאלי שבשימוש הוא 1.
הראו שזמן הריצה AMORTIZED לפעולה נשאר O(1). שימו לב –סדרת פעולות על מבנה הנתונים כוללת כעת גם פעולות increment וגם פעולות RESET, ואין שום אילוץ על סדר הפעלתן. בנוסף שימו לב שגם מעבר על המערך (אפילו בלי לשנות ביטים) צריך להילקח בחשבון בניתוח זמן הריצה.

**הערה: אנו ממליצים לכם להתחיל לפתור את שאלות 3-5 לאחר תרגול 3 שיעסוק בעצי חיפוש בינאריים.**

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה ע"י דוגמה נגדית, הוכחה באמצעות נימוק קצר).

א. פעולת המחיקה מעץ חיפוש בינארי היא חלופית. כלומר, העץ המתקבל ממחיקת $x$ ואחריו $y$ זהה לעץ המתקבל ממחיקת $y$ ואחריו $x$, לכל $x, y$ בעץ.

ב. יהיו $u, v$ שני צמתים בעץ חיפוש בינארי כך ש- $u < v$, אזי הצמתים במסלול מ-$u$ אל $v$ בעץ (בהתעלם מכיווני הקשתות) ממוינים לפי מפתחות בסדר עולה.

ג. יהיו $T_1, T_2$ שני עצי חיפוש בינאריים בגודל $n$ כך שסדרת המפתחות בשני העצים זהה. אזי, קיימת סדרה של $O(n)$ גלגולים (סיבובי קשתות) אשר הופכת את $T_1$ ל- $T_2$. (רמז: נסו להגיע משני העצים לאותו עץ $T_3$ ע"י סדרה של $O(n)$ גלגולים).

## שאלה 4

**עץ *d*-ארי** הוא עץ שבו לכל צומת יש לכל היותר $d$ בנים. אומרים כי העץ הוא **עץ *d*-ארי נחמד** אם לכל צומת שאינו עלה יש *בדיוק* $d$ בנים.

א. מהו מספר העלים בעץ $d$-ארי נחמד בעל $n$ צמתים? עליכם לכתוב ביטוי מדוייק (ולא "אסימפטוטי") ולהוכיח את נכונותו.

ב. בהינתן **עץ *d*-ארי נחמד** בגובה $h$ עם $L$ עלים הוכיחו שמתקיים $L \leq d^h$.

שאלה 5

א. כתבו פסאודו קוד לפונקציה המקבלת שורש של עץ בינארי ומחזירה האם הוא עץ **חיפוש**.

ב. כתבו פסאודו קוד **לא רקורסיבי** המקבל שורש של עץ בינארי ומדפיס את מפתחות העץ in-order.

הערה: על זמני הריצה להיות **לינאריים**. בסעיף ב' אין להניח שלצומת יש מצביע לאביו.