מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 3

להגשה עד יום רביעי 29.11.23.

1. קבעו האם הטענות הבאות נכונות ונמקו את קביעתכם:
   (א) $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{even}}\right)$
   (ב) $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right) \setminus \mathcal{P}\left(\mathbb{N}_{\text{even}}\right)$
2. יהיו A, B, C קבוצות. הוכיחו את התכונות הבאות של פעולות על קבוצות:
   (א) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
   (ב) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (ג) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   (ד) $A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C$
   (ה) $C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B$
3. יהיו A, B, C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) אם $A \subseteq C$ אז $B \setminus C \subseteq B \setminus A$.
   (ב) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   (ג) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
   (ד) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
4. הוכיחו כי שתי ההגדרות של הפרש סימטרי הן שקולות. כלומר, הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

5. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו כי $A = B$ אם ורק אם לכל קבוצה C מתקיים $A \cup C = B \cup C$.
6. ניזכר בטענה שראינו בשיעור:
   לכל A, B קבוצות, הטענות הבאות שקולות:
   (א) $A \subseteq B$
   (ב) $A \cap B = A$
   (ג) $A \setminus B = \emptyset$
   (ד) $A \cup B = B$

   בשיעור הוכחנו כי א' גורר את ב', ו־ב' גורר את ג'. השלימו את ההוכחה של הטענה.
7. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) לכל A, B, C, D קבוצות, מתקיים $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap B) \cup (C \cap D)$.
   (ב) לכל שתי קבוצות A, B, מתקיים $\mathcal{P}\left(A \cap B\right) = \mathcal{P}\left(A\right) \cap \mathcal{P}\left(B\right)$.
   (ג) לכל שתי קבוצות A, B, אם $A \cap B \neq \emptyset$ אז $\mathcal{P}\left(A \setminus B\right) \subseteq \mathcal{P}\left(A\right) \setminus \mathcal{P}\left(B\right)$.
   (ד) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $\mathcal{P}\left(A \triangle B\right) = \mathcal{P}\left(A\right) \triangle \mathcal{P}\left(B\right)$.

8. בכל סעיף בנפרד, מצאו תנאי הכרחי ומספיק (פשוט ככל הניתן) על הקבוצות A, B כך שהטענה תתקיים.
הוכיחו שהתנאי שמצאתם הוא הכרחי ומספיק (כלומר, הוכיחו גרירה דו־כיוונית בין התנאי לבין הטענה בסעיף).

(א) $A \triangle B = \emptyset$

(ב) $A \cup B = A \setminus B$

(ג) $A \cap B = A \setminus B$

(ד) $\mathcal{P}(A \triangle B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

9. בהינתן קבוצה A, מסמנים ב־$|A|$ את כמות האיברים שיש ב־A. לדוגמה, $|\{-1, 5, 17\}| = 3$.
הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה על n: לכל n טבעי, ולכל קבוצה A כך ש־$|A| = n$, מתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.