מתמטיקה בדידה ~ שיעורי בית 20 ~ נוסחאות נסיגה

שחר פרץ

7 ביוני 2024

1

נסמן $a_n =$ מספר האפשרויות לרצף שביל באורך n ע"י שימוש במרצפות אדומות באורך 2, ירוקות באורך 2 ושחורות באורך 1.

א) **שאלה:** כיתבו נוסחת נסיגה ל־a_n.

פתרון: נפלג למקרים, לפי האריח הראשון.

- אם נתחיל לרצף במשבצות אדומות, אז ישארו $n-2$ משבצות לבחור, ולכך יהיו a_{n-2} אפשרויות.
- אם נתחיל לרצף במשבצות ירוקות, אז ישארו $n-2$ משבצות לבחור, ולכך יהיו a_{n-2} אפשרויות.
- אם נתחיל לרצף במשבצות לבנות, אז ישארו $n-1$ משבצות לבחור, ולכך יהיו a_{n-1} אפשרויות.

כאשר מקרי הבסיס שלנו $a_0 = 1, a_1 = 1$. סה"כ, נחבר את המקרים הזרים ונקבל:

$$\boldsymbol{\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}}$$

ב) הפולינום האופייני יהי $f(x) = x^2 - 1x - 2$, ושורשיו $x_{1,2} = 2, -1$. נציב הקומבינציות הליניאריות:

$$a_n = 2^n A (-1)^n \cdot B,\ \begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2A = 2 - 2B \\ 2A = 1 + B \end{cases} \implies 1 + B = 2 - 2B \implies B = \frac{1}{3},\ A = \frac{2}{3}$$

סה"כ, התשובה היא:

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n}$$

2

נסמן ב־a_n את מספר המחרוזות באורך n מעל $\{a, b, c, d\}$ כך שכל מופעי a נמצאים לפני כל מופעי b.

1. **שאלה:** כתבו נוסחת נסידה ל־a_n יחד עם תנאי התחלה.

תשובה: נפלג למקרים, לפי התו הראשון:

(א) אם הוא a, c, d: אין הגבלה, ועבור $n-1$ התווים הנותרים, יהיו a_{n-1} אפשרויות.

(ב) אם הוא b, אז לא יכול להופיע יותר a, ולכן אין חשיבות להגבלה כי a יופיע לפני b, כלומר יהיו 3^{n-1} אפשרויות (כמות התווים האשריים בכל מיקום, כפול כמות המיקומים).

כאשר מקרי הבסיס $a_0 = 1, a_1 = 4$. סה"כ, נקבל את הנוסחה הבאה:

$$\boldsymbol{\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}}$$

2. נוכיח באינדוקציה $\boldsymbol{a_n = 3^n + n3^{n-1}}$.

הוכחה. בסיס: $a_0 = (0+1) \cdot 3^0 = 1$ כדרוש. צעד: נניח על a_n ונוכיח על a_{n+1}:

$$a_{n+1} = 3a_n + 3^n = 3(\underbrace{3^n + n3^{n-1}}_{\text{Induction}}) + 3^n = 3^{n+1} + n3^n + 3^n = 3^{n+1} + (n+1)3^n$$

כדרוש. לכן, נצמצם את אשר הוכחנו באינדוקציה ונקבל:

$$\boldsymbol{Ans. = \left(1 + \frac{n}{3}\right) 3^n}$$

■

3

1. **שאלה:** כמה סדרות טנאריות לא מכילות את הרצף 00?

תשובה: נפלג למקרים לפי התו הראשון.

- אם נבחרו להיות 0, אז הכרח הוא שהתו הבא יהיה 1 או 2, ועבור $n-2$ התווים הנותרים יהיו a_{n-2} אפשרויות.
- אם נבחרו להיות 1 או 2, אז עבור $n-1$ התווים הנותרים יהיו a_{n-1} אפשרויות

מקרי הבסיס יהיו $a_0 = 1, a_1 = 3$ וסה"כ:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}} \\ \boldsymbol{a_0 = 1,\ a_1 = 3} \end{cases}$$

2. **שאלה:** כמה סדרות טנאריות לא מכילות את הרצפים 01 או 02?

תשובה: נפלג למקרים לפי התו הראשון.

- אם הוא מתחיל ב־0, אז התו הבא לא יכול להיות 1 או 2 כלומר הוא 0, וכן הלאה; כלומר כל התווים שלאחריו הם 0, ובהכרח תהיה רק אפשרות אחת.
- אם הוא מתחיל ב־1 או 2 אז אין שום הגבלה ול־$n-1$ התווים הנותרים יהיו a_{n-1} אפשרויות.

סה"כ מקרי בסיס $a_0 = 1$, ונקבל:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = 1 + 2a_{n-1}} \\ \boldsymbol{a_0 = 1} \end{cases}$$

3. **שאלה:** כמה סדרות טנאריות לא מכילות את הרצף 01?

תשובה: נפלג למקרים לפי התו הראשון.

- אם הוא מתחיל ב־0, אז יהיו a_{n-1} אפשרויות להמשך, אך מעקרון המשלים נרצה לחסר את כל הלא־תקינות – אלו שמתחילות ב־1 – ולהן, יהיו a_{n-2} אפשרויות, כלומר סה"כ $a_{n-1} - a_{n-2}$.
- אם הוא מתחיל ב־2 או 1, אז אין שום הגבלה ולכן ל־$n-1$ התווים הנותרים יהיו a_{n-1} אפשרויות.

מקרי בסיס $a_0 = 1, a_1 = 3$. לכן נקבל:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \boldsymbol{a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}} \\ \boldsymbol{a_0 = 1, a_1 = 3} \end{cases}$$

4

שאלה: נתון שביל באורך n. יהיו משבצות ירוקות בממדים 1×1, כחולות בממדים 2×1, ואדומות בממדים 3×1. כמה ריצופים אפשריים יש בלי מרצפות כחולות וירוקות סמוכות?

פתרון: $a_n =$ מספרים הריצופים החוקיים, $b_n =$ הריצופים בלי משבצת ראשונה כחולה, $c_n =$ מספר הריצופים בלי משבצת ראשונה ירוקה.

נמצא ביטוי לכל אחד מהם. עבור a_n:

- אם נתחיל במשבצת ירוקה, אז יוותרו $n-1$ משבצות ולא נוכל להתחיל בכחולה ולכן יהיו b_{n-1} אפשרויות.
- אם נתחיל במשבצת כחולה, אז נרצה את כמות האפשרויות ל־$n-2$ משבצות בלי שלא מתחילות במשבצת ירוקה, וזה c_{n-2}.
- אם נתחיל במשבצת אדומה, אז באופן דומה יהיו a_{n-3} אפשרויות כי אין שום הגבלה.

עבור b_n:

- בכחולה, לא נתחיל.
- בירוקה, אם נתחיל אז יוותרו $n-1$ ולא נוכל להתחיל מכחולה b_{n-1} אפשרויות.
- באדומה, אם נתחיל אז יוותרו $n-3$ משבצות בלי הגבלה כלומר a_{n-3}.

עבור c_n:

- בירוקה, לא נתחיל.
- באדומה, אז יוותרו $n-3$ משבצות בלי הגבלה כלומר a_{n-3} אפשרויות.
- בכחולה, אז יוותרו $n-2$ משבצות שלא יתחילו בירוקה כלומר c_{n-2} אפשרויות.

סה"כ, קיבלנו:

$$\begin{cases} (\mathrm{I}) \qquad a_n = a_{n-3} + b_{n-1} + c_{n-2} \\ (\mathrm{II}) \qquad b_n = b_{n-1} + a_{n-3} \\ (\mathrm{III}) \qquad c_n = c_{n-2} + a_{n-3} \end{cases}$$

ממערכת המשוואות, נסיק:

$$\begin{aligned} &\mathrm{II}-\mathrm{I} \implies \\ &b_n - a_n = -c_{n-2} \\ &\quad b_n = a_n - c_{n-2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{III}-\mathrm{I} \implies \\ &c_n - a_n = -b_{n-1} \\ &\quad c_n = a_n - b_{n-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{I} \implies \\ a_n &= a_{n-3} + b_{n-1} + c_{n-2} \\ a_n &= a_{n-3} + b_{n-2} + a_{n-4} + c_{n-2} \quad \text{(eq. II)} \\ -b_{n-2} - c_{n-2} &= a_{n-3} + a_{n-4} - a_n \\ -b_{n-3} - c_{n-3} &= a_{n-4} + a_{n-5} - a_{n-1} \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \implies a_n &= a_{n-3} + b_{n-1} + c_{n-2} \\ a_n &= a_{n-3} + \underbrace{a_{n-1} - c_{n-3}}_{=b_{n-1}} + \underbrace{a_{n-2} - b_{n-3}}_{=c_{n-2}} \\ a_n &= a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{a_{n-4} + a_{n-5} - a_{n-1}}_{=-b_{n-3}-c_{n-3}} \\ a_n &= a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} \end{aligned}$$

סה"כ, יחדיו עם תנאי ההתחלה, התשובה תהיה:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n = a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5}} \\ \boldsymbol{a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4} \end{cases}$$

5

נפתור את נוסחאות הנסיגה הבאות:

1. **הנוסחה:**

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 3,\ a_1 = 5 \end{cases}$$

ניעזר בשיטת הפולינום האופייני. הפולינום האופייני יהיה $x^2 - 2x - 3$ ושורשיו $x_{1,2} = 3, -1$. לכן, הצורה הכללית של נוסחת הנסיגה תהיה $a_n = 3^n A + (-1)^n B$, וממקרי הבסיס נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} a_0 = 3^0 A + (-1)^0 B & = A + B = 3 \implies B = 3 - A \\ a_1 = 3^1 A(-1)^1 B & = 3A - (3 - A) = 5 \end{cases} \implies 4A - 3 = 5 \implies 4A = 8 \implies A = 2, B = 1$$

נציב ונקבל שערך נוסחת הנסיגה:

$$\boldsymbol{a_n} = 2 \cdot 3^n + 1 \cdot (-1)^n = \boldsymbol{2 \cdot 3^n + (-1)^n}$$

2. **הנוסחה:**

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=2}^{n} 2a_{n-k} \\ a_0 = 0,\ a_1 = 6 \end{cases}$$

תשובה: נטען, שהביטוי הוא $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, לכל $n \geq 3$. נוכיח באינדוקציה.

בסיס:

$$a_3 = 2a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 6 = 2a_2 + a_1$$

צעד: יהי $n \in \mathbb{N}$. נניח את נכונות הטענה בעבור a_n, ונוכיח עבור a_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} 2a_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2a_k \\ &= 2a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k \\ &= 2a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} a_{n-k} = 2a_{n-1} + a_n \\ &= 2a_{(n+1)-2} + a_{(n+1)-1} \end{aligned}$$

כדרוש. הפולינום האופייני יהיה $x^2 - 1x - 2$ ושורשיו $x_{1,2} = 2, -1$. לכן, הפתרון הכללי יהיה $a_n = A2^n + B(-1)^n$. עתה, נפתור את מערכת המשוואות ביחס למקרי הבסיס:

$$\begin{cases} a_0 = 0 = A \cdot 2^0 + B \cdot (-1)^0 \implies A = -B \\ a_1 = 6 = 2A - B \implies 6 = 2A + A \implies A = 2, B = -2 \end{cases}$$

סה"כ, נקבל שהתשובה הסופית תהיה:

$$\boldsymbol{a_n} = 2 \cdot 2^n - 2(-1)^n = \mathbf{2^{n+1} - 2(-1)^n}$$

.... 6 ....

1. **שאלה:** n אנשים יושבים על ספסל. בכמה אופנים נוכל לשנות את סדר ישיבתם כך שאף אחד לא יזוז יותר ממקום אחד?

תשובה: נפלג למקרים לפי האדם הראשון בספסל:

- אם הוא יזוז ימינה, אז הוא והאדם שיחליף איתו לא יכולו עוד לזוז, לכן נותרו $n-2$ אנשים צמודים אם יכולת תזוזה, להם יהיו a_{n-2} אפשרויות.
- אם הוא לא יזוז, אז יוותרו a_{n-1} אנשים שלא נקבע אם יזוזו או לא צמודים, להם יהיו a_{n-1} אפשרויות תזוזה.

עבור מקרי בסיס $a_0 = 1, a_1 = 1$ סה"כ, נקבל שכמות האפשרויות היא:

$$\boldsymbol{a_n} = a_{n-1} + a_{n-2} = \boldsymbol{F_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

כאשר ההזחה קדימה את F_n נובעת ממקרי בסיס שונים כמעה.

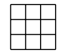
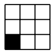
2. **שאלה:** n אנשים יושבים במקומם סביב שולחן עגול. בכמה אופנים אפשר לשנות את סדר ישיבתם כך שאף אחד לא יזוז יותר ממקום אחד? בה"כ נבחר אדם "ראשון", ונפלג למקרים לפי אופי התזוזה שלו:

- אם הוא לא יזוז ממקומו, ניוותר עם $n-1$ אנשים, כאשר שני האנשים בקצוות לא יכלו לשנות את מקומם אם אחד מהאנשים שצמודים להם (הוא האגם שבחרנו שלא יזוז ממקומו); כלומר, התשובה תהיה זהה לזו של השאלה עם הספסל, כלומר F_{n-1}.
- אם הוא יזוז ימינה, אז באופן דומה יקבעו מקומות של שני אנשים, ויוותרו $n-2$ אנשים ביישוב דומה לזה של ספסל, כלומר F_{n-2} אפשרויות.
- אם יזוז שמאלה, אז באופן זהה לתזוזה ימינה יהיו F_{n-2} אפשרויות.
- אם אף אחד לא יתחלף עם אף אחד, אז או שכולם יזוזו ימינה או שכולם יזוזו שמאלה – סה"כ 2 אפשרויות.

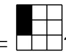
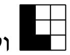
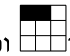
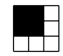
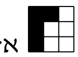
למען נוחות, נגדיר $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. סה"כ, שכמות האפשרויות היא:

$$\begin{aligned} Ans. &= a_{n-1} + a_{n-2} + 2 = F_n + 2F_{n-1} + 2 \\ &= 5^{-0.5}\phi^n - 5^{-0.5}(\phi - \sqrt{5})^n + \frac{2}{\sqrt{5}}\phi^{n-1} - \frac{2}{\sqrt{5}}(\phi - \sqrt{5})^{n-1} + 2 \\ &= 5^{-0.5}(\phi^n - (\phi - \sqrt{5})^n + 2\phi^{n-1} - 2(\phi - \sqrt{5})^{n-1}) + 2 \\ &= \mathbf{5^{-0.5}}\boldsymbol{\left(\phi^n\left(1 + 2n^{-1}\right) + (\phi - \sqrt{5})^n\left(1 + 2n^{-1}\right)\right) + 2} \end{aligned}$$

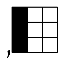
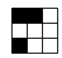
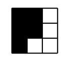
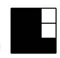
המשך בעמוד הבא

נגדיר a_n כמות הפתרונות למרצפות המתחילות ב־  ואת b_n ככמות הפתרונות המרצפות המתחילות ב-  עד לכדי סיבוב. נסמן ב־... $\Longrightarrow$ ... כדי לציין סידור לוח שהכחי בהתאם למה שהיה קודם.

כדי לכמת את a_n, כתלות ב־n בנוסחת נסיגה, נפלג למקרים כתלות באיבר במיקום העליון־שמאלה ביותר;

- נניח התחלה ב־ $\Longleftarrow$  וסה"כ הגענו ל־b_{n-1}.
- נניח התחלה ב־ ונפלג ממנה, לשני מקרים.
  - אם  $\Longleftarrow$  והגענו ל־a_{n-2}.
  - אם  אז הגענו ל־b_{n-1}.

סה"כ קיבלנו $a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}$. עתה, באופן דומה נרצה למצוא את b_n:

- נניח התחלה ב־ , אז קיבלנו a_{n-1}.
- נניח התחלה ב־  $\Longleftarrow$  $\Longleftarrow$  ולכן קיבלנו במקרה הזה b_{n-2}.

סה"כ קיבלנו $b_n = a_{n-1} + b_{n-2}$. נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} b_n = a_{n-1} + b_{n-2} \\ a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{I} & 2b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-2} \\ \mathrm{II} & a_{n-1} = 2b_{n-2} + a_{n-3} \end{cases}$$

נחסר $\mathrm{I} - \mathrm{II}$ ונקבל:

$$2b_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-3} \Longrightarrow 2b_n = 3a_{n-1} - a_{n-3} \Longrightarrow 2b_{n-1} = 3a_{n-2} - a_{n-4}$$

נציב חזרה ונמצא:

$$a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2} = 4a_{n-2} - a_{n-4}$$

נגדיר מקרי בסיס, ונגיע לנוסחת נסיגה סופית:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-2} - a_{n-4} \\ a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0, a_4 = 10 \end{cases}$$

נשים לב, שאפשר לרצף אך ורק עבור $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר לכל $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ יתקיים $a_n = 0$. לכן, נוכל להגדיר $m = 2n$ ולקבל:

$$\begin{cases} a_m = 4a_{m-1} - a_{m-2} \\ a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 10 \end{cases}$$

ניעזר בשיטת הפולינום האופייני כדי למצוא לזה ערך. הפולינום האופייני, יהיה $x^2 - 4x + 1$, ושורשיו $2 \pm \sqrt{3}$. לכן:

$$a_m = A(2+\sqrt{3})^m + B(2-\sqrt{3})^m \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = A + B = 1 \Longrightarrow B = 1 - A \\ a_1 = (2+\sqrt{3})A + (2-\sqrt{3})B = 3 \end{cases}$$

נציב ונקבל:

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})A - (2-\sqrt{3})A - \sqrt{3} + 2 &= 3 \quad \Big) + \sqrt{3} - 2 \\ A(2+\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}) &= 1 + \sqrt{3} \quad \Big) \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \\ A &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

ולכן $B = 1 - A = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. נציב חזרה כדי לקבל תוצאה סופית:

$$a_m = \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^m + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^m$$

ועבור n כללי, נדע $n = 0.5m$, כלומר:

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})^{0.5n} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}(2-\sqrt{3})^{0.5n} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}}$$

. . . . 8 . . . .

שאלה: כמה מחרוזות באורך n ישנן, על $\{0,1,2\}$, כך שבין כל שתי הופעות של המספר 2 תופיעה הספרה 0?

תשובה: נסמן ב־a_n את כמות האפשרויות, וב־b_n את אותו הדבר בעבור מחרוזת שכבר הופיע בה 2.

נפצל למקרים לפי התו הראשון במחרוזת:

- אם הוא יתחיל ב־0: אז לא ישתנה דבר, ויהיו a_{n-1} אפשרויות.
- אם הוא יתחיל ב־1, אז באופן דומה יהיו a_{n-1} אפשרויות.
- אם הוא יתחיל ב־2, אז לפי הגדרה יהיו b_{n-1} אפשרויות.

ועבור התו הראשון במחרוזת, שתתנהג כאילו כבר הופיע בה 2:

- היא לא תוכל להתחיל ב־2, כי לא הופיע 0 לפני כן.
- אם היא תתחיל ב־1, דבר לא ישתנה ונקבל b_{n-1} אפשרויות.
- אם היא תתחיל ב־0, אז יוכל להופיע המספר 2 כלומר יהיו a_{n-1} אפשרויות.

סה"כ נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}$$

נחסר את המשוואות:

$$b_n - a_n = a_{n-1} - 2a_{n-1} = -a_{n-1} \implies b_n = a_n - a_{n-1} \implies b_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

נציב:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} = 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

ומקרי בסיס $a_0 = 1, a_1 = 3$. הפולינום האופייני של נוסחאת הנסיגה יהיה $x^2 - 3x + 1$, ושורשיו $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. לכן, באופן כללי נוסחת הנסיגה תהיה $a_n = A\frac{3+\sqrt{5}}{2}^n + B\frac{3-\sqrt{5}}{2}^n$. נשווה למקרי הבסיס בשביל למצוא את ערך A, B:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A\frac{3+\sqrt{5}}{2}^0 + B\frac{3-\sqrt{5}}{2}^0 = A + B \implies A = 1 - B \\ a_1 = 3 = A\frac{3+\sqrt{5}}{2}^1 + B\frac{3-\sqrt{5}}{2}^1 \end{cases}$$

$$\implies \quad 3 \stackrel{!}{=} A\frac{3+\sqrt{5}}{2} + (1-A)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3A + \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\implies \quad 3A \stackrel{!}{=} \frac{3-6-\sqrt{5}}{2} \implies A = -\frac{\sqrt{5}}{6} - 0.5 \implies B = \frac{\sqrt{5}}{6} + 0.5$$

$$\implies \quad \boldsymbol{a_n} = -\left(\frac{\sqrt{5}}{6} + 0.5\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}}{6} + 0.5\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{5}}{6} + 0.5\right)\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

. . . .

שחר פרץ, 2024