

חדו"א 1א ~ תרגיל בית 9

שחר פרץ

17 בינואר 2026

..... (1)

נתבונן בפונקציה הבאה עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ כלשהם:

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) & x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נמצא עבור אילו α, β הפונקציה רציפה, גזירה, גזירה ברציפות, או גזירה פעמיים ב-0.

הוכחה. • **רציפה:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_+$, נוכיח:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot (-1) < \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}_{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} < \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot 1 = 0$$

• **גזירה:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

- $\beta = 1$ לא גזיר: נתבונן ב- $\varepsilon = \frac{1}{2}$. יהי $\varepsilon > 0$. בסביבת δ נקובה של 0 נוכל לבחור נוכל לבחור $y = \sqrt[\alpha]{\frac{2}{k\pi}}, x = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{2k\pi}}$ ומארכימדיאניות קיים k גדול דיו כך ש- x, y בסביבה. ואז:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} \right| = \left| \frac{x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{x} - \frac{y^\beta \sin\left(\frac{1}{y^\alpha}\right)}{y} \right| = \left| \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \sin(\pi k) \right| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

סתירה לקריטריון קושי.

- $\beta \geq 2$ גזיר:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = 0$$

כאשר השוויון האחרון נובע מרציפות שכבר הוכחנו.

• **גזירה ברציפות:** לכל $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, שכן הנגזרת ב-0 $f'(0) = 0$ הוכחנו, ומחוקי גזירה לכל $x \neq 0$:

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) - \alpha \cos\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) x^{\beta-\alpha-1}$$

נוכל להפעיל את אותם הנימוקים לרציפות שהראינו קודם לכן כאשר המעריכים יהיו לפחות 1. כלומר - נדרוש $\beta - \alpha - 1 \geq 1$ וגם $\beta - 1 \geq 1$. סה"כ $\beta \geq 2 \wedge \alpha \leq \beta - 2$.

• **גזירה פעמיים:** נשאף לגזור את הפונקציה הרציפה שקיבלנו לעיל. נדרוש $\beta > \alpha + 1 \wedge \alpha > 2$. זאת כי זה שקול לכך ש- $\beta - 1 \in \mathbb{N}_2$. תנאי הכרחי ומספיק להיות הפונקציה לעיל גזירה ב-0 בעבור הוכחה דומה להוכחה הקודמת של גזירות. ■

..... (2)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה. נוכיח מספר טענות.

(א) נניח f מחזורית על מחזור T . נוכיח f' מחזורית עם מחזור T .

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $k \in \mathbb{Z}$. ממחזוריות $f(x) = f(x + kT)$ $\forall x \in \mathbb{R}$: לכן:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + kT) - f(x + kT)}{x_0 + kT - (x + kT)} = \lim_{x \rightarrow x_0 + kT} \frac{f(x_0 + kT) - f(x)}{(x_0 + kT) - x} = f'(x_0 + kT)$$

(אין מניעה להחליף משתנה בגבול, זה כמו הרכבה, ו- f גזירה ולכן רציפה ב- x_0 כלומר מותר להרכיב). סה"כ מהגדרה f' בעלת מחזור T

(ב) אם f זוגית אז f' אי-זוגית.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(-x_0) - f(-x)}{x_0 - x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{x_0 + x} = - \lim_{x \rightarrow -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{(-x_0) - x} = -f'(-x_0)$$

■

..... (3)

נוכיח את הטענה הבאה:

$$(x^n \log x)^{(n)} = n! \left(\log x + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}_0$.

- **בסיס:** עבור $n = 0$ נקבל שהסכום ריק כלומר $\log x = (x^0 \log x)^{(0)}$ כנדרש.
- **צעד:**

$$(x^{n+1} \log x)^{(n+1)} = \left((x^{n+1} \log x)^{(n)} \right)'$$

$$\frac{n!}{x}$$

■

..... (4)

נפריך את הטענה הבאה: אם $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה, אז f' רציפה ב- (a, b) .

הפרכה. נתבונן בדוגמה הנגדית הבאה: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ המוגדרת להיות $f(0) = 0$ בתחום $(-1, 1)$. היא גזירה ב-0 ולא רציפה בו מנימוקים שהועלו בשאלה 1, וכן גזירה ורציפה ב- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ מהרכבת אלמנטריות.

..... (5)

נוכיח של- $\cos x = x$ יש פתרון ממשי אחד בדיוק.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(x) = x - \cos x$.

- **קיום:** נוכיח ש- $f(x)$ מתאפסת איפשהו. אפשר לחשב ולמצוא $f(0) = -1$ וכן $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. סה"כ משום ש- f רציפה (חיבור אלמנטריות) ממשפט ערך הביניים קיים x כך ש- $f(x) = 0$.

- **יחידות:** נראה ש- $f(x)$ מונוטונית עולה. נגזור ונקבל $f'(x) = 1 - \sin x$. משום ש- $\sin x \in [-1, 1]$ בהכרח $1 - \sin x \in [0, 2]$ דהיינו $f'(x) \geq 0$. סה"כ f עולה. היא גם עולה חזק שכן יש הנגזרת מתאפסת רק ב- x_0 נקודות. סה"כ אם $f(x) = f(y) = 0$ אז $x = y$ כדרוש.

■

(6)

נתונה $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ כלשהי. נוכיח ונפריך מספר טענות:

(א) נניח $|f(x)| \leq |\tan x|$ עבור כל $x \in [-1, 1]$ כלשהו. אז f גזירה ב-0.

הפרכה. נתבונן ב- $f(x) = |x|$. ראשית כל, נוכיח $x < \tan x$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. נתבונן בפונקציה $f(x) = x - \tan x$ ונוכיח שהיא שלילית בתחום המדובר. היא מונוטונית יורדת שכן $f' = 1 - \sec^2 x$ ומשום שב- $(1, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $\cos x \in (0, 1)$ אז $\sec x = \frac{1}{\cos x} \in (1, \infty)$ וסה"כ $\sec^2 x > 1$ ומכאן $f'(x) = 1 - \sec^2 x < 0$. סה"כ f יורדת בתחום, וכשנציב נקבל $f(x) = 0$ (כי $\sec x = 1$ ב- $x = 0$) וסה"כ באותו התחום $f(x) < 0$ (מתחילה ב-0 ויורדת משם). מכאן $x - \tan x < 0$ כלומר $x < \tan x$ לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. נסיק שלכל x בסביבת $\frac{\pi}{2}$ נקובה של 0 מתקיים $|x| < |\tan x|$. ספציפית עבור $x = 0$ נציב ונקבל שוויון. נגדיר $g(x) = |x|$. משום ש- $\frac{\pi}{2} > 1$ נקבל $\frac{\pi}{2} \in [-1, 1]$: $\forall x \in [-1, 1]: |g(x)| \leq |\tan x|$. עם זאת, הוכחנו בהרצאה ש- $|x|$ לא גזירה ב-0, וסיימנו. ■

(ב) נניח $|f(x)| \leq |1 - \cos x|$ עבור כל $x \in [-1, 1]$. אז f גזירה ב-0.

הוכחה. אפשר לדעת ש- $f(0) = 0$ כי אחרת $0 < |f(x)| < 0$ וסתירה. נראה שהגבול קיים ע"י כך שנמצא את ערכו (ספויילר: 0)

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{x}}_0 = \dots$$

נטפל בגבול שנשאר בנפרד. ניעזר בכך ש- $\cos x \in (-1, 1)$ כלומר $\cos^2 x < |\cos x|$

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{|1 - \cos x|}{|x|} < \frac{1 - \cos^2 x}{|x|} = \frac{\sin^2 x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = 1 \cdot 0 = 0$$

סה"כ ממשפט הסנדוויץ', בגלל ש- $\frac{f(x)}{x}$ חסום משני צידיו בגבול השואף ל-0 (משני צידיו כי ביצענו את החישובים לעיל בערך מוחלט), נקבל ש- $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$. נחזור אל הנגזרת בהתחלה, קיבלנו:

$$\dots = 0 + 0 = 0$$

כלומר $f'(0)$ מוגדר וערכו 0. ■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב-L^AT_EX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד