מתמטיקה בדידה – תרגיל בית 5 (חנוכה) – שחר פרץ

תוכן העניינים

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

ת.ז.: 334558962

מוגש למרצה: נטלי שלום

תאריך הגשה: 20.12.2023

~~~ תרגיל בית 5 (בדידה) ~~~

הערות כלליות וסימונים שאשתמש בהם

- אשתמש בסימון $|A|$ לסימון כמות האיברים בקבוצה או בזוג סדור.
- אשתמש בסימון T כדי לייצג פסוק אמת וב־F בשביל פסוק שקר.
- אשתמש בקיצור ח"ע במקום "חד־ערכי", חח"ע במקום "חד־חד־ערכי", ובקיצור פונ׳ במקום פונקציה.

1. הוכחת התכונה המרכזית של n־יות סדורות

נתון:

- הגדרת n־יה סדורה;

$$\begin{cases} n = 2: & \langle a_1, a_2 \rangle = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} \\ n > 2: & \langle a_1, \dots, a_n \rangle := \langle a_1, \langle a_2, \dots, a_n \rangle \rangle \end{cases}$$

- התכונה המרכזית של זוג סדור:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle \iff a_1 = a_2 \land b_1 = b_2$$

צ.ל.: התכונה המרכזית של n־יה סדורה:

$$\forall n \in \mathbb{N} \land n \geq 2. \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \iff a_1 = b_1 \land a_2 = b_2 \land \dots \land a_n = b_n$$

הוכחה: נוכיח באידנקוציה ל־n־יה באורך $n \geq 2$;

- בסיס (נבחר $n = 2$): נכון לפי התכונה המרכזית של זוג סדור.
- צעד (יהי $n \geq 2$):
  - נניח באינדוקציה שלכל n־יה באורך $n - 1$ הטענה שצ.ל. מתקיימת. נוכיח עבור n, בפירוק לשתי גרירות;
    - יהי n־יות סדורות שוות באורך n, אשר לפי ההגדרה של n־יה סדורה מוגדרות לפי $\langle a_1, \langle a_2, \dots, a_n \rangle \rangle = \langle b_1, \langle b_2, \dots, b_n \rangle \rangle$. לפי התכונה המרכזית של זוג סדור, נתון שיוויון שיוויון ה־n־יות הקטנות יותר (אשר לפי ה.א. משמעו $a_2 = b_2 \land \dots \land a_n = b_n$) והשיוויון $a_1 = b_1$, כלומר סה"כ $a_1 = b_1 \land a_2 = b_2 \land \dots \land a_n = b_n$, כדרוש.
~~~

- יהיו $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$, ונוכיח את שיוויון ה־$n$־יות אשר לפי הגדרת n־יה סדורה משמעה $\langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle = \langle b_1, \langle b_2, \ldots, b_n \rangle\rangle$. לפי ה.א., בהינתן $a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$ (מה שמהווה חלק מהנתון שלנו) ניתן לדעת $\langle a_2, \ldots a_n\rangle = \langle b_2, \ldots b_n \rangle$, ובשילוב עם הנתון $a_1 = b_2$ ועם הגדרת זוג סדור נוכל להסיק את אשר צ.ל., כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

2. הוכחת טענות בסיסיות עבור יחס מעל קבוצה כללית

נתון

R יחס מעל A, כלומר $x \in R \implies x \in A^2$.

סעיף (א)

צ.ל.:

$$A := \left(R^{-1}\right)^{-1} = R$$

הוכחה: יהי $\langle a, b\rangle \in A$ בעזרת מעברי אמ"מ:

$$\begin{aligned} & \langle a, b\rangle \in \left(R^{-1}\right)^{-1} & \\ \iff & \langle b, a\rangle \in (R^{-1}) & \left(R^{-1} \text{ definition}\right) \\ \iff & \langle a, b\rangle \in R & \left(R^{-1} \text{ definition}\right) \quad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare \end{aligned}$$

סעיף (ב)

צ.ל.:

$$dom(R^{-1}) = Im(R)$$

הוכחה: יהיו $x \in dom(R^{-1})$, נוכיח $x \in Im(R)$:

$$\begin{aligned} & x \in dom(R^{-1}) & \\ \iff & \forall A. x \in A \wedge \exists a \in A. \langle a, a\rangle \in R^{-1} & \left(dom \text{ definition}\right) \\ \iff & \forall A. x \in A \wedge \exists a \in A. \langle a, a\rangle \in R & \left(R^{-1} \text{ definition}\right) \\ \iff & x \in Im(R) & \left(Im \text{ definition}\right) \quad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare \end{aligned}$$

סעיף (ג)

צ.ל.:

$$R \circ id_A = id_A \circ R = R$$

הוכחה: מתוך טרנזיטביות שיווין, נוכיח במקום להוכיח 3 שיווינות נוכיח 2.

שיוויון 1

- נוכיח $R \circ id_A = R$, לפי הגדרת שיוויון ומעברי אמ"מ.
- יהי $x \in R \circ id_A$, נוכיח $x \in R$.

$$\begin{aligned} & \langle a, b\rangle \in R \circ id_A \\ \iff & \langle a, c\rangle \in A^2 \wedge \exists b \in A.\langle a, b\rangle \in id_a \wedge \langle b, c\rangle \in R && (\circ \text{ definition}) \end{aligned}$$

- לפי הגדרת קבוצת הזהות של A, $a = b \iff \langle a, b\rangle \in id_A$. נציב:

$$\langle a, b\rangle \in A^2 \wedge \exists b \in A.\langle a, b\rangle \in R$$

- כך שנוכל להיפטר מהכמת $\exists b$. מתוך הגדרת יחס $\langle a, b\rangle \in R \to \langle a, b\rangle \in A^2$, כלומר אפשר לצמצם את הביטוי שקיבלנו למעלה ל־$\langle a, b\rangle \in R$, כדרוש.

שיוויון 2

- נוכיח $id_A \circ R = R$, לפי הגדרת שיוויון ומעברי אמ"מ.
- יהי $x \in R \circ id_A$, נוכיח $x \in R$.

$$\begin{aligned} & \langle a, b\rangle \in id_A \circ R \\ \iff & \langle a, c\rangle \in A^2 \wedge \exists b \in A.\langle a, b\rangle \in id_a \wedge \langle b, c\rangle \in R && (\circ \text{ definition}) \end{aligned}$$

- לפי הגדרת קבוצת הזהות של A, $a = b \iff \langle a, b\rangle \in id_A$. נציב:

$$\langle a, b\rangle \in A^2 \wedge \exists b \in A.\langle a, b\rangle \in R$$

- כך שנוכל להיפטר מהכמת $\exists b$. מתוך הגדרת יחס $\langle a, b\rangle \in R \to \langle a, b\rangle \in A^2$, כלומר אפשר לצמצם את הביטוי שקיבלנו למעלה ל־$\langle a, b\rangle \in R$, כדרוש.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

3. הוכחת טענות בסיסיות עבור יחסים מעל קבוצה כללית

נתון

יהי R, S יחסים מעל A, כלומר $x \in A^2 \implies x \in R \vee x \in S$. כמו כן, נתון $R \subseteq S$.

סעיף (א)

צ.ל.: $\forall Q \subseteq A^2 . R \circ Q \subseteq S \circ Q$

הוכחה: יהי $x \in R \circ Q$. נוכיח בעזרת שרשרת יחסי גרירה.

$$
\begin{aligned}
&\langle a,b\rangle \in R\circ Q \\
\iff &\langle a,b\rangle \in A^2 \wedge \exists c\in A.\langle a,c\rangle \in Q \wedge \langle b,c\rangle \in R && (\circ \text{ definition}) \\
\implies &\langle a,b\rangle \in A^2 \wedge \exists c\in A.\langle a,c\rangle \in Q \wedge \langle b,c\rangle \in S && (\text{given } \langle a,b\rangle \in R \implies \langle a,b\rangle \in S) \\
\iff &\langle a,b\rangle \in S\circ Q && (\circ \text{ definition}) \quad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

סעיף (ב)

צ.ל.: $\forall n\in\mathbb{N}.R^{(n)}\subseteq S^{(n)}$

הוכחה: יהי $x\in R^n$ (נשתמש בהגדרה הרקורסיבית). נוכיח באינדוקציה.

- בסיס ($n=0$): צ.ל. $R^{(0)}=S^{(0)}$, אמ"מ $id_A=id_A$ שנכון כי כל גודל שווה לעצמו.
- צעד ($n>0$): נניח באינדוקציה ש-$R^{(n-1)}\subseteq S^{(n-1)}$, ונוכיח על n.
  - לפי הגדרת הרכבת $R^{(n)}$, צ.ל. $R^{(n-1)}\circ R\subseteq S^{(n-1)}\circ S$. נשלים בעזרת מעברי גרירה:

$$
\begin{aligned}
&\langle a,c\rangle \in R^{(n-1)}\circ R \\
\iff &\langle a,c\rangle \in A^2 \wedge \exists b\in B.\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in R^{(n-1)} && (\circ \text{ definition}) \\
\implies &\langle a,c\rangle \in A^2 \wedge \exists b\in B.\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in R^{(n-1)} && (\text{given } x\in R \implies x\in S) \\
\implies &\langle a,c\rangle \in A^2 \wedge \exists b\in B.\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S^{(n-1)} && (\text{given } x\in R^{(n-1)}\subseteq x\in S^{(n-1)}, \subseteq \text{ definition}) \\
\iff &\langle a,c\rangle \in S^{(n-1)}\circ S
\end{aligned}
$$

  - לפי הגדרת הכלה, גרירות אלו מוכיחות $R^{(n-1)}\subseteq S^{(n-1)}$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

4. הוכחת טענות בדבר יחסים מעל 3 קבוצות

נתון

תהיינה X,Y,Z קבוצות. יהיו $S,T\subseteq Y\times Z$, ויהי $R\subseteq X\times Y$.

סעיף (א)

צ.ל.: $(S\cap T)\circ R\subseteq (S\circ R)\cap(T\circ R)$

הוכחה: יהי $\langle a,c\rangle\in(S\cap R)\circ R$, נוכיח שנגרר $\langle a,c\rangle\in(S\circ R)\cap(T\circ R)$, דבר שיוכיח את ההכלה (לפי הגדרת הכלה). נוכיח בעזרת שרשרת גרירות:

$$
\begin{aligned}
& \langle a,c\rangle \in (S\cap T)\circ R \\
\iff & \langle a,c\rangle \in X\times Z \wedge \exists b.(\langle a,b\rangle \in R)\wedge(\langle b,c\rangle\in S\wedge\langle b,c\rangle\in T) && (\circ,\subseteq \text{ definition}) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in X\times Z \wedge \exists b.(\langle a,b\rangle \in R\wedge\langle b,c\rangle\in S) \\
& \qquad \wedge(\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T) && (\text{given } A\wedge B\wedge C \iff (A\wedge B)\wedge(A\wedge C)) \\
\implies & \langle a,c\rangle \in X\times Z \wedge \exists b.(\langle a,b\rangle \in R\wedge\langle b,c\rangle\in S) \\
& \qquad \vee(\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T) && (A\wedge B \implies A\vee B) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in X\times Z \wedge (\exists b.(\langle a,b\rangle \in R\wedge\langle b,c\rangle\in S)\vee \\
& \qquad (\exists b.\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in T) && (\text{given } \exists x.A\vee B \iff (\exists x.A)\vee(\exists x.B)) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in (S\circ R)\wedge\langle a,c\rangle\in(T\circ R) && (A\wedge(B\vee C)\iff(A\wedge B)\vee(A\wedge C), \circ \text{ definition}) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in (S\circ R)\cap(T\circ R) && (\cap \text{ definition}) \qquad \mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

סעיף (ב)

ניתן דוגמה עבורה השיוויון מקיים הכלה ממש ($\subsetneq$).

נציב:

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}, S=\{\langle 1,3\rangle\}, T=\{\langle 2,3\rangle\}$$

נציב ונראה שזה עובד:

$$
\begin{aligned}
& (S\cap T)\circ R \subsetneq (S\circ R)\cap(T\circ R) \\
\implies & \emptyset\circ R \subsetneq \{\langle 1,3\rangle\}\cap\{\langle 1,3\rangle\} \\
\implies & \emptyset \subsetneq \{\langle 1,3\rangle\} \\
\implies & T && \mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

סעיף (ג)

צ.ל.: $((S\cup T)\circ R)^{-1}=(R^{-1}\circ S^{-1})\cup(R^{-1}\circ T^{-1})$

הוכחה: נוכיח בעזרת מעברים שקולים, כלומר, לפי הגדרת שיוויון בין קבוצות: יהי $\langle a,c\rangle\in((S\cup T)\circ R)^{-1}$, נוכיח שקילות ל-$x\in(R^{-1}\circ S^{-1})\cup(R^{-1}\circ T^{-1})$;

[הוכחה בעמוד הבא]

$$
\begin{aligned}
& \langle a,c\rangle \in ((S\cup T)\circ R)^{-1} \\
\iff & \langle c,a\rangle \in (S\cup T)\circ R && (R^{-1} \text{ definition}) \\
\iff & \langle c,a\rangle \in X\times Z \wedge \exists b\in Y.\langle c,b\rangle \in R \wedge \langle b,a\rangle \in S\cup T && (\circ \text{ definition}) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in Z\times X \wedge \exists b\in Y.\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge (\langle a,b\rangle \in S^{-1} \vee \langle a,b\rangle \in T^{-1}) && (R^{-1},\cup \text{ definition}) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in Z\times X \wedge \exists b\in Y.(\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in T^{-1}) \\
& \vee(\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in S^{-1}) && (\text{distributive}) \\
\iff & \langle a,c\rangle \in Z\times X \wedge (\exists b\in Y.\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in T^{-1}) \\
& \vee(\exists b\in Y.\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in S^{-1}) && (\exists x.A\vee B \iff (\exists x.A)\vee(\exists x.B)) \\
\iff & (\langle a,c\rangle \in Z\times X \wedge \exists b\in Y.\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in T^{-1}) \\
& \vee(\langle a,c\rangle \in Z\times X \wedge \wedge\exists b\in Y.\langle b,c\rangle \in R^{-1} \wedge \langle a,b\rangle \in S^{-1}) && (\text{distributive}) \\
\iff & x\in R^{-1}\circ S^{-1} \vee x\in R^{-1} \vee x\in S^{-1} && (\circ \text{ definition}) \\
\iff & x\in R^{-1}\circ S^{-1} \cup \in R^{-1} \vee x\in S^{-1} && (\cup \text{ definition}) \quad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

5. הוכחות בדבר העלאה בחזקת n

נתון

נתונה ההגדרה הרקורסיבית $R^{(n)}$, ונתון $R^{(n)} \subseteq A^2$.

סעיף (א)

צ.ל.: $R^{(n+m)} = R^{(n)} \circ R^{(m)}$

הוכחה: יהי $n\in\mathbb{N}$, ונוכיח את הטענה באינדוקציה.

- בסיס $(m=0)$: נוכיח בעזרת זהויות:

$$R^{(n)}\circ R^{(m)} = R^{(n)}\circ id_A = R^{(n)} = R^{(n+m)}$$

- צעד: $(m>0)$: נניח באינדוקציה על m (כלומר $R^{(n+m)} = R^{(n)}\circ R^{(m)}$), ונוכיח על $m+1$:

נתבונן ב-$R^{(n+m+1)}$, אשר לפי ההגדרה הרקורסיבית של $R^{(a)}$ הוא שווה ל-$R^{(n+m)} \circ R$. נכניס את ה.א., ונסיק שזה שווה ל-$R^{(n)}\circ R^{(m)}\circ R$. בהינתן ההגדרה של $R^{(a)}$, ניתן להגיד ש-$R^{(m+1)} = R^m\circ R$. נציב ונקבל שיוויון ל-$R^{(n)}\circ R^{(m+1)}$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

סעיף (ב)

צ.ל.:

$$R := \{\langle n,n+1\rangle | n\in\mathbb{N}\} \implies R^* := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_+} R^{(i)} = \{\langle n,m\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid n>m\} := A$$

הוכחה:

דבר ראשון, נוכיח באינדוקציה שבלי הגבלת הכלליות $\forall i \in \mathbb{N}.R^{(i)} = \{\langle n, n+i\rangle | n \in \mathbb{N}\}$.

- בסיס ($i = 0$): נוכיח בעזרת זהויות:

$$R^{(0)} = id_A = \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\langle n, n+i\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- צעד ($i > 0$): נניח באינדוקציה על i, ונוכיח עבור $i+1$.

נתבונן ב־$R^{(i)}$. לפי הגדרת $R^{(a)}$, ניתן להגיד $R^{(i+1)} = R^{(i)} \circ R$. לפי הנחת האינדוקציה, למעשה זה שווה ל־$\{\langle n, n+i\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \circ R$, אשר שווה ל־$\{\langle n, n+i+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$, כדרוש.

עתה, נשתמש במה שעתה הוכחנו ונוכיח את השיוויון הדרוש בעזרת הכלה דו־כיוונית.

- יהי $\langle n, m\rangle \in A$, ונבחר $\Delta = n - m$. משום שידוע $n > m \wedge n, m \in \mathbb{N}$ ניתן לדעת $\Delta \in \mathbb{N}$. לפי הגדרת איחוד מוכלל, צריך להוכיח קיום i עבורו $\langle n, n+\Delta\rangle \in R^{(i)}$. נבחר $i = \Delta$, ולפי ה.א. נקבל $R^{(i)} = \{\langle n, n+\Delta\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. לפיכך, $\langle n, m\rangle \in R^{(i)}$ כי $n + \Delta = m$.
- יהי $x \in R^*$, ונסמן $\pi_1(x) = n, \pi_2(x) = m$. ולפי הגדרת איחוד כללי ועקרון ההפרדה אמ"מ $\exists i \in \mathbb{N}_+.n \in \mathbb{N} \wedge m = n + i$. משום שבלי הגבלת הכלליות $\forall a \in \mathbb{N}.\forall b \in \mathbb{N}_+.a + b > a$, אפשר להגיד $n > m$. כמו כן, $m \in \mathbb{N}$ כי חיבור טבעיים הוא טבעי. נסיק שלסיכום $n, m \in \mathbb{N} \wedge n > m$, כלומר לפי עקרון ההפרדה $\langle n, m\rangle \in \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n > m\}$, כדרוש.

הוכחנו את השיוויון שצ.ל., כדרוש.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

6. הוכחות טענות של יחסים מעל השלמים

נתון

R יחס מעל $\mathbb{Z}$ (כלומר $R \subseteq \mathbb{Z}^2$).

הערה: לפי הגדרת כפל קרטזי, $A^2 = A \times A$ וגם $a \in A \wedge b \in A \iff \langle a, b\rangle \in A^2$. אני לא אוכיח את זה שוב במהלך ההוכחה.

סעיף (א)

נתון: $R_1 = \{\langle m, m+5\rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$

צ.ל.: $A := \{\langle z_1, z_2\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{N}.z_1 + 5a = z_2\} = R_1^*$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על i כי $R_1^{(i)} = \{\langle m, m+5i\rangle \in \mathbb{Z}^2 | m \in \mathbb{Z}\}$.

- בסיס ($i = 0$): צ.ל. $R_1^{(0)} = \{\langle m, m\rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$, כלומר לפי הגדרת יחס הזהות על השלמים צ.ל. $R_1^{(0)} = id_{\mathbb{Z}}$, וזה פסוק אמת לפי הגדרת $R^{(0)}$.

- צעד ($i>0$): נניח באינדוקציה על i (כלומר נניח $R_1^{(i)} = \{\langle m, m+5i\rangle | m \in \mathbb{Z}\}$) ונוכיח על $i+1$.

לפי הגדרת $R^{(a)}$, אפשר להגיד $R^{(i+1)} = R^{(i)} \circ R$. בשילוב עם הנחת האינדוקציה עם עקרון ההחלפה, לכל $x \in R^{(i)}$ אפשר להגיד $\pi_2(x) = \pi_1(x) + 5i$. לפיכך, בהתבוננות על איבר כללי $x := \langle a, b\rangle \in R^{(i+1)}$, אפשר להגיד $b = a + 5(i+1) = a + 5i + 5$, כלומר $x = \langle a, a+5(i+1)\rangle$, ומשום שכפל חיבור שלמים הוא שלם אפשר להגיד $x \in \mathbb{Z}^2$, כלומר לפי עקרון ההחלפה הוכחנו את צעד האינדוקציה.

עתה, נוכיח את השוויון לאיחוד המוכלל באמצעות שרשרת אמ"מים:

$$\begin{aligned}
& x := \langle z_1, z_2\rangle \in A && && (1)\\
\iff & \langle z_1, z_2\rangle \in \mathbb{Z}^2 \land \exists a \in \mathbb{N}. z_1 + 5a = z_2 && \big(A \text{ definition}\big) && (2)\\
\iff & \exists a \in \mathbb{N}. \langle z_a, z_1 + 5a\rangle \in \mathbb{Z}^2 && && (3)\\
\iff & \exists a. x \in \{\langle m, m+5i\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\} && && (4)\\
\iff & \exists a. x \in R^{(a)} && \big(R^{(a)} \text{ definition}\big) && (5)\\
\iff & x \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} R^{(i)} && \big(\cup \text{ definition}\big) && (6)
\end{aligned}$$

הערה: טענה (4) נכונה לפי עקרון ההפרדה, טענה (3) נכונה כי פשוט הצבתי את הטענה שהוכחתי באינדוקציה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$

סעיף (ב)

נתון: $R_2 = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon |m-n| = 1\}$

צ.ל.: $R_2^* = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

הוכחה:

ראשית כל, נבהיר כי $|m-n| = 1 \iff m - n = \pm 1 \iff m = n \pm 1$, זאת לפי הגדרת ערך מוחלט ורשותנו לחסר/לחבר איברים לשני האגפים. אשתמש בשקילות הזו במהלך ההוכחה.

נוכיח באינדוקציה על i שלכל $R_2^{(i)} = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon m \in [n-i, n+i]\}$

- בסיס ($i=0$): צ.ל. $R_2^{(i)} = \{\langle m, n\rangle \in \mathbb{Z}^2 \colon m \in [n, n]\}$. לפי הנתון, נציב ונקבל $R_2^{(0)} = \{\langle m, m\rangle \colon m \in \mathbb{Z}^2\}$, ולפי ההגדרת שיש לנו הגענו לכך ש־$id_{\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$ שזה פסוק אמת כי כל גודל שווה לעצמו.
- צעד ($i>0$): נניח על i נוכיח על $i+1$.
  - לפי הגדרת $R^{(a)}$ אפשר לדעת אשר $R_2^{(i+1)} = R_2^{(i)} \circ R_2$. יהי $x \in R_2^{(i+1)} =: \langle a, b\rangle$. לפי ה.א., אפשר לסכם:

$$x = \langle a, b\rangle \in \{\langle t, b\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon b \in [t-i, t+i]\} \circ \{\langle a, t\rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon b = t \pm 1\} := A$$

  - לפי הגדרת הרכבה t הוא האיבר המשותף, כלומר נציב ב־$R_2^{(i)}$ ונקבל:

$$R_2^{(i+1)} = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \colon [t - i \pm 1, t + i \pm 1]\}$$

  - כמו כן, בלי הגבלת הכלליות $a < t < b \implies a \pm b < t < a \pm b$ מסיבות ברורות ולכן אפשר להגיד ש־:

$$R_2^{(i+1)} = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \colon [t-i-1, t+i+1]\}$$

- כדרוש.

עתה, נוכיח את השיוויון עצמו. נמצא שקילות לקיום x כאיבר באגף הימני ונוכחי שהוא איבר באגף השמאלי, לפי הגדרת שיוויון:

$$\begin{aligned} & x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_2^{(i)} \\ \iff & \exists i \in \mathbb{N}. x \in R_2^{(i)} && (\cup \text{ definition}) \\ \iff & \exists i. x \in \{\langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \colon m \in [n-i, n+i]\} := B \end{aligned}$$

עתה, כדי להשלים את ההוכחה, נוכיח שהטענה לעיל אמ"מ $x \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. יהי $x := \langle a,b\rangle$. נפלג לשתי גרירות:

- נניח $x \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. לפיכך, $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}$. אם $b > 0$ נבחר $i = a+b$, כלומר $b = a-i \le b \le a+i = 2a+b$, ואם $b < 0$ נבחר $i = -a-b$ שיהיה נכון באופן דומה. לפיכך קיים i עבורו $a \in [b-i, b+i]$, ומשום שחיבור/חיסור שלמים הוא שלם אז $a,b \in \mathbb{Z}$, כלומר הוכחנו את הגרירה, כדרוש.
- נניח $x \in B$ ונוכיח $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. לפי הגדרת $x \in B$, אפשר להגיד $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \wedge b \in [t,m]$ (עקרון ההפרדה), כלומר נגרר $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ כדרוש.

לסיכום, השיוויון הוכח, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: $R_3 = \{\langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \colon |m-n| \in \{2,3\}\}$

צ.ל.: $R_3^* = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

- הכלה ראשונה: $R_3^* \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. יהי $\langle m,n\rangle \in R_3^*$. לפיכך, $\langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \wedge P$ כאשר P תנאי שתלוי ב־i. מזה נגרר $\langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, כדרוש.
- הכלה שניה: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subseteq R_3^*$. יהי $m \in \mathbb{Z}$. צ.ל. $\exists i \in \mathbb{N}$, המקיים $\langle m,n\rangle \in R_3^{(i)}$ עבור כל n. נתבונן בתנאי $|m-n| \in \{2,3\}$. נפרק למקרים ע"פ הגדרת ערך מוחלט וקיום איבר בקבוצה:

$$|m-n| \in \{2,3\} \implies \begin{cases} m-n=2 \\ m-n=-2 \\ m-n=3 \\ m-n=-3 \end{cases} \implies \begin{cases} n=m-2 \\ n=m+2 \\ n=m-3 \\ n=m+3 \end{cases}$$

- נפלג למקרים:
  - אם $n = m\pm 1$, אז נרכיב פעם נוספת כדי לקבל בין היתר $n = (m\mp 2)\pm 3$ כלומר $n = m\pm 1$ כדרוש.

- אם $m-n$ זוגי אז נרכיב עוד $i=\frac{m-n}{2}$ פעמים נקבל $n=m\pm|m-n|i$ וזה יעבוד (אפשר להוכיח באינדוקציה אבל זה נראה לי מיותר).
- אם $m-n$ אי זוגי אז נעשה זאת על $t=\frac{m-n-1}{2}$ וזה יעבוד באופן דומה.

סה"כ כיסינו את כל המקרים האפשריים והוכחנו את שתי ההכלות, כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד)

נתון: $R_4=\{\langle m-n,m+n\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\colon\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}$

צ.ל.: $R_4^*=\{\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}^2\colon m-n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\}:=A$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית

- הכלה ראשונה:
  - נוכיח באינדוקציה ש־$R_4^{(i)}\subseteq A$.
    - בסיס $(i=0)$: צ.ל. $R_4\subseteq A$. יהי $\langle m,n\rangle\in R_4$, נניח בשלילה שהוא לא ב־$A$ כלומר $m-n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}$. בסתירה לכך, לפי הגדרת R_4, נגרר קיום של $\langle a,b\rangle\in\mathbb{Z}^2$ כך ש־$\langle a+b,a-b\rangle\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, אך ידוע שחיסורם (ובפרט, חיבורם) אינו זוגי ולכן הוא אינו מתחלק בשניים, ולכן הממוצע a אינו שלם וזו סתירה.
    - צעד $(i>0)$: נניח על $R_4^{(i)}$ ונוכיח על $R_4^{(i+1)}$. לפי הגדרת $R^{(n)}\wedge n>0$, אפשר להגיד $R^{(i+1)}=R_4^{(i)}\circ R_4$ כך שנוכל להחיל את ה.א. כדי להסיק ש־$R_4^{(i)}\subseteq A$ ולכן $A\circ R_4\subseteq A$ יגרור את הצ.ל.. משום שחיבור/חיסור שלמים זוגיים זוגי ושלם גם הוא, הטענה מתקיימת, כדרוש.
  - עתה, צ.ל. $R_4^*\subseteq A$. משום שע"פ הגדרה $R_4^*=\cup_{i\in\mathbb{N}}A_4^{(i)}$, וכמו הוכחנו כי $R_4^{(i)}$, ובה"כ ידוע ש־ $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\implies A\cup B\subseteq C$ (בפרט על איחוד מוכלל), אז לסיכום $R_4^*\subseteq A$, כדרוש.
- הכלה שנייה: צ.ל. $R_4^{(i)}\subseteq A$. יהי $x\in A$, נוכיח $x\in R_4^*$. כלומר, נתון $\langle m,n\rangle\in\mathbb{Z}^2\wedge m-n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}$, נוכיח $\exists i.R_4^{(i)}$, ע"פ הגדרת איחוד מוכלל. נבחר $i=1$, כלומר, קיבלנו את היחס R_4, ונוכיח $x\in R_4$, כלומר לפי עקרון ההחלפה צ.ל. $\exists\langle a,b\rangle\in\mathbb{Z}^2.\langle a-b,a+b\rangle=\langle m,n\rangle$. נבחר $b=m-n$, $a=\frac{m+n}{2}$. עלינו להוכיח שניים: ראשית, $a,b\in\mathbb{Z}$ (דרוש לפי כפל קרטזי), ושנית, $\langle a-b,a+b\rangle=\langle m,n\rangle$:
  - נתבונן ב־a. ידוע $m-n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}$ לכן $m+n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}$ (נבחר $n_2=-n$ וזה יעבוד), ומשום שמספר זוגי מתחלק ב־2 ללא שארית, אז $a\in\mathbb{Z}$. כמו כן, חיסור/חיבור שלמים הוא שלם, ולכן $b\in\mathbb{Z}$.
  - החלק השני עובד כשמתמצמים אלגברית.

לסיכום, הוכחנו את שתי ההכלות – הראשונה, באמצעות אינדוקציה, והשנייה – באמצעות הצבה באיחוד המוכלל.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

7. הוכחת טענות בנוגע למליאות/חד־ערכיות של יחסים בהתבסס על מליאות/חד־ערכיות נתונה

נתון

יהיו $R \subseteq B \times C, S \subseteq A \times B$ יחסים.

סעיף (א)

נתון: $(\forall a \in A.\exists b \in B.\langle a, b\rangle \in S)$ ("נתון 1"), $(\forall b \in B.\exists c \in C.\langle b, c\rangle \in R)$ ("נתון 2")

צ.ל.: $\forall a \in A.\exists c \in C.\langle a, c\rangle \in R \circ S$

הוכחה:

נפרק את מה שצ.ל. בעזרת כמה מעברים שקולים:

$$\begin{aligned} & \forall a \in A.\langle a, c\rangle \in R \circ S \\ \iff & \forall a \in A.\langle a, c\rangle \in A \times C \wedge (\exists b \in B.\langle a, b\rangle \in S \wedge \langle b, c\rangle \in R) \quad (\circ \text{ definition}) \end{aligned}$$

כבר ידוע $T \iff a \in A, c \in C$, אמ"מ $\langle a, c\rangle \in A \times C$. נשלב את זה ונמשיך לפרק:

$$\begin{aligned} \iff & (\forall a \in A.T) \wedge (\forall a \in A.\exists b \in B.\langle a, b\rangle \in S \wedge \langle b, c\rangle \in R) \qquad ((\forall x.A \wedge B \iff (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)) \\ \iff & (\forall a \in A.\exists b \in B.\langle a, b\rangle \in S \wedge \langle b, c\rangle \in R) \qquad (T \wedge A \iff A) \end{aligned}$$

עתה ניגש להוכחה עצמה. יהי $a \in A$. מתוך נתון 1 אפשר לדעת שקיים איזשהו b עבורו $\langle a, b\rangle \in S$. מתוך נתון 2, אפשר לדעת **שלאותו ה־b** קיים איזשהו c כך ש־$\langle b, c\rangle \in R$. סה"כ, מצאנו של־$a$ כללי קיים איזשהו c כך שהצ.ל. מתקיים, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: R, S ח"ע

צ.ל.: $R \circ S$ ח"ע

הוכחה:

יהי $a \in R \circ S$. נניח בשלילה ש־$R \circ S$ לא ח"ע, כלומר נתון:

$$\exists a \in A.\exists c_1, c_2 \in C.(\langle a, c_1\rangle \in R \circ S \wedge \langle a, c_2\rangle \in R \circ S) \wedge c_1 \neq c_2.$$

נתבונן במה שהגדרת ההרכבה אומרת.

בלי הגבלת הכלליות, לכל $\langle a, c\rangle$ בתוך ההרכבה של R ו־S, אפשר בין היתר להגיד שקיים b כך ש־$\langle a, b\rangle \in S \wedge \langle b, c\rangle \in R$. משום שנתון S ח"ע, אפשר להגיד שעבור a קיים רק b אחד המקיים $\langle a, b\rangle \in S$. מכיוון שנתון R ח"ע, אפשר להגיד שעבור ה־b היחיד שלנו קיים גם רק c יחיד המקיים $\langle b, c\rangle \in R$.

עם הגבלת הכלליות, לפי הטרנזיטיביות, נסיק שעבור a קיים ערך c יחיד המקיים את הגדרת ההרכבה (אמ"מ $\langle a,c\rangle \in R\circ S$), בסתירה להנחת השלילה שטוענת כי קיים a כך שקיים יותר מערך אחד המקיים את הגדרת ההרכבהף וזו סתירה.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: $g\colon B\to C, f\colon A\to B$ פונקציות. כמו כן, מסעיפים קודמים אפשר להסיק ש־$g\circ f\colon A\to C$ פונ'.

צ.ל.: $\forall x\in A.(g\circ f)(x)=g(f(x))$, כלומר $\langle x,y\rangle\in g\circ f \iff \forall x\in A.y=g(f(x))$

הוכחה:

נפרק כל אחת מההגדרות. לפי הגדרות הסימונים, צריך להוכיח שקילות של $\langle x,y\rangle\in g\circ f \iff \langle f(x),y\rangle\in g$. נגיע לכך במעברים שקולים.

יהי $x\in A$. נתבונן בביטוי $\langle f(x),y\rangle\in g$. $f(x)$ שקול לכל ערכי ה־z עבורם $\langle x,z\rangle\in f$, וזה נכון לפי הגדרתו. נשים לב ש־f ח"ע קיים רק אחד כזה. נסכם: הביטוי שקול ל־$\langle x,z\rangle\in f\wedge\langle z,y\rangle\in g$. כמו כן, משום שידוע $\langle z,y\rangle\in g$ אפשר להגיד שתמיד $\langle z,y\rangle\in B\times C$ כלומר $y\in C$. משום שזה תמיד נכון, נוכל להוסיף את זה לביטוי בלי לשנות את משמעותו. נעשה זאת, ונמצא את שקילות הביטוי שהתחלנו ממנו לביטוי $x\in A\wedge y\in C\wedge\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle x,z\rangle\in f$, שבשילוב עם הגדרת הרכבת ביטויים והגדרת כפל קרטזי שקול לביטוי $\langle x,y\rangle\in f\circ g$, כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

8. קבעה והוכחה של חד ערכיות ומליאות של יחס

סעיף (א)

נתון:

$$R=\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}\mid y=\frac{20x^{2023}+7}{42}\right\}$$

צ.ל.: R פונ'

יהי $x\in\mathbb{N}$, נסיק $y\in\mathbb{Q}\wedge y=\frac{20x^{2023}+7}{42}$ (לפי עקרון ההפרדה). נוכיח קיום y כזה לכל x (מליאות) ונוכיח שלכל x קיים y אחד כזה (חד ערכיות).

בלי הגבלת הכלליות, מתוך האקסיומות של הרציונלים (מותר להשתמש בהן כי $x\in\mathbb{N}\implies x\in\mathbb{Q}$) חיבור, חיסור וכפל של רציונלים, כפונקציות נפרדות, הן פעולות חח"ע ומלאות על $\mathbb{Q}$, בעוד חילוק לא מוגדר למחלק 0 אך זה לא משנה כי המחלק הוא היקום, החיים וכל השאר (42). מזה נסיק, שהגדרה של y היא הרכבה של פונקציות אלו (חילוק, כפל, חיסור וחיבור) ומשום שכבר הוכח שהרכבת פונקציות היא פונקציה, כלומר אפשר להגיד שמה שקיבלנו הוא פונקציה (אמ"מ הוא גם מלא וגם חד ערכי, כדרוש).

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: $R = \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 = y^2\right\}$

הוכחה:

בלי הגבלת הכלליות, אם $x^2 = y^2$ אמ"מ $x = \pm\sqrt{y^2} = \pm y$.

כמו כן, לפי עקרון ההפרדה בשילוב עם הגדרת כפל קרטזי והטענה לעיל אפשר להגיד אשר:

$$\langle x, y\rangle \in R \iff x \in \mathbb{Q} \land y \in \mathbb{Q} \land x = \pm y$$

אשתמש בשתי טענות אלו במהלך ההוכחה מספר פעמים, בלי לציין אותן מפורשות.

מליאות (הוכחה)

נניח בשלילה שהיחס לא מלא, כלומר קיים $x \in \mathbb{Q}$ כך ש־$\nexists y \in \mathbb{Q}.\langle x, y\rangle \in R$ (או במילים אחרות, לכל y נגרר $\langle x, y\rangle \notin R$). יהי $x \in \mathbb{Q}$. נוכיח $\exists y.\langle x, y\rangle \in R$. נבחר $y = x$, כלומר אפשר להגיד $x = \pm y \land y \in \mathbb{Q}$, שהן ההגבלות היחידות על y. מכיוון שמצאנו $\langle x, y\rangle \in R$, סתרנו את הנחת השלילה, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

חד־ערכיות (שלילה)

נניח בשלילה שהיחס ח"ע, כלומר לכל $x \in \mathbb{Q}$ אפשר להגיד שקיים רק y אחד כך ש־$\langle x, y\rangle \in R$.

נביא דוגמה ניגדית. נבחר $x = 1 \in \mathbb{Q}$, ונבחר $y_1, y_2 \in \mathbb{Q} \land y_1 = 1, y_2 = -1$. אפשר להגיד $x = y_1$ וגם $x = -y_2$, כלומר $x = \pm y$ גורר לפחות שני ערכי y אפשריים, בסתירה להנחת השלילה.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ג)

נתון: $R = \{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid B \subsetneq A\}$

הוכחה:

מתוך הנתון, $\langle A, B\rangle \in R$ אמ"מ $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land B \subsetneq A$ (לפי הגדרת כפל קרטזי ועקרון ההפרדה). נתייחס לטענה זו כ"הכלה ב־R".

מליאות (סתירה)

נניח בשלילה את קיום המליאות ב־R, ונביא דוגמא ניגדית.

נתבונן ב־$A = \emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונוכיח $B = \emptyset \implies B \subseteq A$. נניח ש־$B \subseteq A$ ונוכיח $B = \emptyset$, כלומר $x \in A \implies x \in B$, אמ"מ $F \implies x \in B$ אמ"מ $x \notin B$ אמ"מ $B = \emptyset$, זאת בסתירה להנחת השלילה שאומרת שלכל $\langle A, B\rangle$ המקיימים את ההלכה ב־R מתקיים $B \subsetneq A$ אשר שקולה ל־$B \subseteq \emptyset \land B \neq \emptyset$.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

חד־ערכיות (סתירה)

נניח בשלילה את קיום חד־הערכיות ב־R ונביא דוגמא ניגדית.

לפי הגדרת חד־ערכיות, נתון שלכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ קיים רק B יחיד כך ש־$\langle A, B\rangle \in R$.

נתבונן ב־$A = \{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נשים לב ש־$B_1 = \{1\}, B_2 = \emptyset$ מקיימים $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge B_1, B_2 \subsetneq A$ לכן לפי ההכלה ב־R נגרר ש־$\langle A, B_1\rangle, \langle A, B_2\rangle \in R \wedge B_1 \neq B_2$, בסתירה להנחת השלילה.

$\mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare$

סעיף (ד)

סימון: אסמן $\mathfrak{A} = \{1, 2, ..., 2023\}, \mathfrak{B} = \{7, 500, 1000\}$.

נתון: $R = \left\{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})^2 \mid A \triangle B = \mathfrak{B}\right\}$

הוכחה:

לפי עקרון ההפרדה וכפל קרטזי, $\langle A, B\rangle \in R$ אמ"מ $A, B \in \mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, 2023\} \wedge A \triangle B = A$. אשתמש בטענה הזו מספר פעמים במהלך ההוכחה מבלי לציין אותה ישירות.

מליאות (הוכחה)

יהי $A \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$. נוכיח שקיים $B \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ המקיים $A \triangle B = \mathfrak{B}$. נפלג למקרים:

- עבור $A = \mathfrak{A}$, נציב $B = \emptyset$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \emptyset$, נציב $B = \mathfrak{A}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{7, 500, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{1000, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{500, 1000, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{7, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{7, 1000, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{500, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{500, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{1000, 7, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{1000, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{500, 7, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור $A = \{7, a_1, a_2, \ldots\}$, נציב $B = \{500, 1000, a_1, a_2, \ldots\}$ וזה יעבוד.
- עבור כל מקרה אחר, אפשר לדעת $x \in A \implies x \notin \mathfrak{B}$ (כי כבר כיסינו את כל המקרים האפשריים של $A \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$) אפשר להציב $B = A \cup \mathfrak{A}$, כך ש־$A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$: זאת כי $A \cup (A \cup \mathfrak{B}) = A \cup \mathfrak{B}$, וכמו כן $A \cap (A \cup \mathfrak{B}) = A$ (לפי הנתון $\mathfrak{B} \not\subseteq A$) כלומר סה"כ $A \triangle B = A \cup \mathfrak{B} \setminus A = \mathfrak{B}$ כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}\ \blacksquare$

נוכיח חד ערכיות: כלומר, יהי $A \in \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ כלומר $A \subseteq \mathfrak{A}$. יהי $B_1, B_2 \subseteq \mathfrak{A}$, ונתון עליהם $\langle A, B_1\rangle, \langle A, B_2\rangle \in R$. נוכיח $B_1 = B_2$. מהנתון, נסיק ש־$A \triangle B_1 = \mathfrak{B} = A \triangle B_2$. נניח בשלילה $B_1 \neq B_2$, וזה סותר את היות $\triangle$ ח"ע (זה נכון כי הפעולה $\triangle$ מוגדר לפי $\cap, \cup$ שמחזירים קבוצה אחת בלבד).

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

9. הוכחה או הפרכה של יחס על כפל קרטזי של קבוצת החזקה של הטבעיים

נתון

נתון: $R = \{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid B = A \cup \{1\}\}$.

"ההכלה ב־R": לפי עקרון ההפרדה, $\langle A, B\rangle \in R \iff A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land B = A \cup \{1\}$.

סעיף (א) - הוכחה

נוכיח שהיחס R חד ערכי, או באופן שקול (לפי הגדרת ח"ע), יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח שקיים $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ אחד המקיים $\langle A, B\rangle \in R$.

הטענה $\langle A, B\rangle \in R$ לפי עקרון ההפרדה היא אמ"מ $\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \land B = A \cup \{1\}$. לפי כפל קרטזי, $\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ כבר פסוק אמת לפי ההגדרה של A, B, כלומר נותר להוכיח שתחת ההגבלות שניתנו קיים רק B יחיד כך ש־$B = A \cup \{1\}$. נניח בשלילה שלא כך הדבר – כלומר קיימים B_1, B_2 המקיימים זאת, זאת בסתירה לאקסיומה של איחוד (שמגדירה קבוצה יחידה). לסיכום, הוכחנו כי קיים רק B אחד כזה – כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ב) - הוכחה

נוכיח שהיחס R מלא (ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$). או במילים אחרות, ע"פ הגדרת יחס מלא: יהי $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח ש־$\exists b. \langle a, b\rangle \in R$.

נוכיח שבלי הגבלת הכלליות, אם $A, B \in \mathcal{P}(C)$ אמ"מ $A \cup B \in \mathcal{P}(C)$. נצרין ונוכיח לוגית:

$$
\begin{aligned}
& A \cup B \in \mathcal{P}(C) & \\
\iff & x \in A \lor x \in B \implies x \in C & (\mathcal{P}\text{ definition}, \cup\text{ definition}) \\
\iff & (x \in A \implies x \in C) \land (x \in B \implies x \in C) & (A \lor B \to C \iff A \to C \land B \to C) \\
\iff & (A \subseteq C) \land (B \subseteq C) & (\subseteq\text{ definition}) \\
\iff & A \in \mathcal{P}(C) \land B \in \mathcal{P}(C) & (\mathcal{P}\text{ definition})
\end{aligned}
$$

נבחר $b = a \cup \{1\}$. זה חוקי לפי אקסיומת האיחוד, שאומרת שקיים איבר כזה. כמו כן, $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. כלומר, ידוע $b \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי הטענה שהוכחה, המידע הזה שקול לכך ש־$b \cup \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נתבונן בזוג הסדור $\langle a, b\rangle$. נסכם: $b = a \cup \{1\} \land b \cup \{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי עקרון ההפרדה זה שקול לכך ש־$\langle a, b\rangle \in R$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ג) - שלילה

נניח בשלילה שהיחס R^{-1} חד־ערכי.

נתבונן ביחס R^{-1}, שלפי הגדרת יחס הופכי אומר $R^{-1} = \{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A = B \cup \{1\}\}$ (החלפתי את השמות של המשתנים, לצורך הנוחות).

נבחר $B_1 = \emptyset, B_2 = \{1\}, A = \{1\}$. נציב ונראה ש־$B_1, B_2, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ וכמו כן $B_1 \cup \{1\} = A \wedge B_2 \cup \{1\} = A$, כלומר $\langle A, B_1\rangle \wedge \langle A, B_2\rangle \in R^{-1}$, בסתירה להנחת השלילה שלנו.

סעיף (ד) - שלילה

נניח בשלילה שהיחס R^{-1} מלא.

נתבונן ביחס R^{-1}, שלפי הגדרת יחס הופכי אומר $R^{-1} = \{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A = B \cup \{1\}\}$.

לפי הנחת השלילה, עבור כל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ קיים $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ שמתקיים $\langle A, B\rangle \in R^{-1}$. נבחר $A = \emptyset$, שלפי הנחת השלילה גם עבורו קיים $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך ש־$B \cup \{1\} = A$. נֲפַתח את זה:

$$\begin{aligned}
& B \cup \{1\} = A & \\
\iff & x \in B \cup \{1\} \longleftrightarrow x \in A & (= \text{definition}) \\
\iff & x \in B \vee x \in \{1\} \longleftrightarrow x \in \emptyset & (\cup, A \text{ definition}) \\
\implies & x \in \{1\} \longrightarrow x \in \emptyset & (\longleftrightarrow \text{definition}, A \vee B \longrightarrow C \implies B \to C)
\end{aligned}$$

וזו סתירה כי לא יכול להיות שאיבר גם שווה ל־1 וגם לא קיים, כלומר הנחת השלילה נשללה ואפשר להגיד ש־R^{-1} לא מלא (ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ה) - שלילה

נניח בשלילה $S \circ S^{-1} \subseteq id_A$ (עבור S יחס מעל A), ונביא דוגמא ניגדית:

$$\begin{aligned}
S &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\} \\
S^{-1} &= \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \\
\langle 2, 1\rangle &\in S \circ S^{-1} \not\subseteq id_{\mathbb{N}} \qquad \mathscr{Q.E.D.} \ \blacksquare
\end{aligned}$$

סעיף (ו) -הוכחה

נתון: S ח"ע מעל A.

הוכחה:

יהי $\langle a, c\rangle \in S \circ S^{-1}$, נוכיח $a = c \wedge \langle a, c\rangle \in A^2$ (שזה שקול ל־$\langle a, c\rangle \in id_A$). נפרק את הגדרת ההרכבה:

$$\begin{aligned} &\langle a,c\rangle \in S\circ S^{-1} \\ \iff &\langle a,c\rangle \in A^2 \wedge \exists b\in A.\langle a,b\rangle \in S^{-1} \wedge \langle b,c\rangle \in S \\ \iff &\langle a,c\rangle \in A^2 \wedge \exists b.\in A.\langle b,a\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S \end{aligned}$$

כבר בשלב זה הוכחנו ש־$\langle a,c\rangle \in A^2$. אתמקד בלהראות ש־$a=c$. בהתאם למה שכתבנו לעיל, קיים איזשהו $b\in B$ כך ש־$\langle b,a\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S$. נניח בשלילה ש־$a\neq c$. מזה נגרר ש־$\exists b.\langle b,c\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S \wedge a\neq c$, סתירה ישירה בנוגע להיות S ח"ע. נסיק ש־$a=c$. נסכם: $a=c\wedge \langle a,c\rangle \in A^2$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

10. הוכחת/סתירת חד ערכיות/מליאות של פעולות על יחסים מעל A

נתון

יהי $A\neq\emptyset$ (כלומר $x\notin\emptyset \iff x\in A$), וכמו כן R,S יחסים מעל A (כלומר $R,S\subseteq A^2$), שלפי כפל קרטזי שוקל לכך ש־$(\forall a,b.\langle a,b\rangle \in R\cup S \implies a,b\in A)$.

סעיף (א) - הוכחה

נתון: R,S ח"ע

צ.ל.: $R\cap S$ ח"ע

הוכחה:

כדי להוכיח ש־$R\cap S$ ח"ע, יהי $a\in A$, נוכיח שאם $\langle a,b_1\rangle \in R\cap S$ וגם $\langle a,b_2\rangle \in R\cap S$ אז $b_1=b_2$ – כלומר נוכיח שקיים b יחיד המקיים $\langle a,b\rangle \in R\cap S$.

טענה 1: ידוע R ח"ע, כלומר לכל $c\in A$ קיים רק d יחיד המקיים $\langle c,d\rangle \in A$.

טענה 2: אם $x\in R\cap S$, אז ע"פ חיתוך $x\in R\wedge x\in S$.

נתבונן ב־$\langle a,b\rangle \in R\cap S$. לפי טענה 2, $\langle a,b\rangle \in R$. לפי טענה 1, נסיק שקיים b יחיד המקיים זאת, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב) - שלילה

נניח בשלילה שעבור R,S ח"ע, $R\triangle S$ ח"ע. נביא דוגמא ניגדית.

נבחר $R=\{\langle 1,1\rangle\}, S=\{\langle 1,2\rangle\}$, שניהם מעל $\mathbb{N}$. שני היחסים מקיימים חד־ערכיות. לפי הנחת השלילה, $R\triangle S$ ח"ע. נחשבו:

$$R\triangle S = R\cup S\setminus (R\cap S) = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}\setminus\emptyset = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$

כלומר, לפי הנחת השלילה שלנו, $\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$ ח"ע, זאת בסתירה לכך שקיימים שני ערכי b עבורם מתקיים $\langle 1,b\rangle \in R\cap S$.

סעיף (ג) - שלילה

נניח בשלילה שלכל R, S יחסים ח"ע ומלאים אז $R \times S$ חד ערכי־ומלא מעל $A \times A$. נראה דוגמא ניגדית.

נבחר $A = \{1, 2\}$. נציב $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}, S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

נתבונן במכפלה הקטרזית $R \times S$. לפי הגדרת מכפלה קטרזית, אפשר להגיד $\langle\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\rangle \in R \times S$ וכמו כן אפשר להגיד $\langle\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\rangle \in R \times S$, זאת בסתירה להנחת השלילה ש־$R \times S$ ח"ע כי עבור $\langle 1, 1\rangle$ הוכח קיימים שני ערכי b עבור $\langle\langle 1, 1\rangle, b\rangle \in R \times S$.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ד) - הוכחה

נתון: R, S ח"ע ומלאים מעל A, כמו כן $T = \{\langle\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle\rangle \mid \langle r_1, r_2\rangle \in R \wedge \langle s_1, s_2\rangle \in S\}$.

צ.ל.: T ח"ע ומלא מעל A^2.

חד־ערכיות

לפי הגדרת חד ערכיות, לכל $x \in A^2$ קיים $y \in A^2$ יחיד המקיים $\langle x, y\rangle \in T$. יהי $\langle a, b\rangle := x \in A^2$, נוכיח את קיום y יחיד כזה. נניח בשלילה שקיימים שני ערכי y **שונים** כאלו, נסמנם y_1, y_2 (כלומר $y_1 \neq y_2$) . מכיוון ש־y איבר בכפל קרטזי, אפשר לבטא אותו כזוג סדור - נסמן $\langle c_1, d_1\rangle := y_1, \langle c_2, d_2\rangle := y_2$. לפי הנחת השלילה, $\langle\langle a, b\rangle, \langle c_1, d_1\rangle\rangle \in T$ וגם $\langle\langle a, b\rangle, \langle c_2, d_2\rangle\rangle \in T$. מתוך עקרון ההפרדה וע"פ הגדרת T, נגרר ש־$\langle a, c_1\rangle \in R \wedge \langle a, c_2\rangle \in R$ ובנוסף על כך $\langle b, d_1\rangle \in S \wedge \langle b, d_2\rangle \in S$. לפיכך, משום ש־$R, S$ ח"ע, אפשר להגיד ש־$c_1 = c_2 \wedge d_1 = d_2$ (אחרת קיימים שני ערכי c עבורם $\langle a, c\rangle \in R$, וכנ"ל עבור S, בסתירה להיותם ח"ע). לפי התכונה המרכזית של זוג סדור, אמ"מ $\langle c_1, d_1\rangle = \langle c_2, d_2\rangle$. לפי הגדרת y_1, y_2, נגרר $y_1 = y_2$ בסתירה להנחת השלילה - כלומר נסיק שתחת הנתונים T ח"ע.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

מליאות

נוכיח מליאות, כלומר לכל $x \in A^2$ קיים $y \in A^2$ כך ש־$\langle x, y\rangle \in T$. יהי $x \in A^2$. מכיוון ש־x ו־y בתוך מכפלה קרטזית, אפשר להגיד שהם זוג סדור. נסמן עבורם $\langle a, b\rangle := x$, וגם $\langle c, d\rangle := y$. לפי עקרון ההפרדה, צריך להוכיח קיום $y \in A^2$ כך ש־$\langle a, c\rangle \in R \wedge \langle b, d\rangle \in S$. לפי הגדרת R, S כיחסים מלאים, לכל איבר q בהם (בפרט a, b) קיים איבר כלשהו p כך ש־$\langle q, p\rangle \in R, S$ ("טענה 1"). נבחר את הערך של c להיות אותו ה־q עבור a ביחס R, ואת ערך d עבור b ביחס S - ולפי טענה 1 הערכים האלו קיימים. לסיכום, $\langle c, d\rangle$ קיים כי c, d קיימים, כדרוש.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

11. הוכחת/שלילת טענות על איחוד פונקציות

סעיף (א)

נניח בשלילה את הטענה ונביא דוגמא ניגדית.

נסמן $A=\{1\}, B=C=\{1,2\}, f=\{\langle 1,1\rangle\}, g=\{\langle 1,2\rangle\}$, כלומר f,g אכן פונ׳ כך ש־$f\colon A\to C, g\colon B\to C$.
נתבונן ביחס $f\cup g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$, אשר מקיים $f\cup g\in A\cup B\to C$, אך בסתירה להנחת השלילה הוא **אינו** פונ׳ כי הוא לא מקיים חד־ערכיות – עבור $\langle 1,a\rangle$ ישנו יותר מערך a אחד כך ש־$\langle 1,a\rangle\in f\cup g$.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.\ \blacksquare$

סעיף (ב)

נתון: $f\colon A\to C, g\colon B\to C$, A,B פונ׳ זרות (כלומר $\forall x\in A.x\notin B$ ולהיפך).

צ.ל.: $f\cup g\colon A\cup B\to C$, $f\cup g$ פונ׳.

הוכחה:

לצורך הנוחות, אסמן $h=f\cup g$.

טענה ראשונה - h מלאה

לפי הגדרת יחס מלא, יהי $a\in A\cup B$, צ.ל. $\exists b.\langle a,b\rangle\in h=f\cup g$. נפצל למקרים: אם $a\in A$, אז לפי המליאות של f אפשר להגיד שקיים b כזה ב־$\langle a,b\rangle\in f$. באופן דומה קיים b כזה המקיים $\langle a,b\rangle\in g$ במקרה ו־$a\in B$. נסכם: $\exists b\in C.\langle a,b\rangle\in f\vee\langle a,b\rangle\in g$. לפי הגדרת איחוד, ישנה שקילות לביטוי $\exists b\in C.\langle a,b\rangle\in f\cup g:=h$, כדרוש.

טענה שנייה - h ח״ע

יהי $a\in A$. יהי $b_1,b_2\in C$. צ.ל. $\langle a,b_1\rangle\in h\wedge\langle a,b_2\rangle\in h\implies b_1=b_2$.

נתבונן ב־$\langle a,b_1\rangle$, ונפלג למקרים:

- אם $\langle a,b_1\rangle\notin h$, אז הצ.ל. מתקיים באופן ריק.
- אם $\langle a,b_1\rangle\in h$, אז לפי הגדרת איחוד יתכנו שני מקרים: $\langle a,b_1\rangle\in f\vee\langle a,b_1\rangle\in g$.

נתבונן ב־$\langle a,b_2\rangle$, ונפלג למקרים:

- אם $\langle a,b_1\rangle\notin h$, אז הצ.ל. מתקיים באופן ריק.
- אם $\langle a,b_2\rangle\in h$, אז לפי הגדרת איחוד יתכנו שני מקרים: $\langle a,b_2\rangle\in f\vee\langle a,b_2\rangle\in g$

נסכם: ידוע $(\langle a,b_1\rangle\in f\vee\langle a,b_1\rangle\in g)\wedge(\langle a,b_2\rangle\in f\vee\langle a,b_2\rangle\in g)$. נפלג ל־4 מקרים:

- אם $\langle a,b_1\rangle\in f$, אז $\langle a,b_1\rangle\in A\times C$ כלומר $a\in A$. נפלג למקרים:
  - אם $\langle a,b_2\rangle\in f$ אז לפי היות f ח"ע נגרר $b_1=b_2$, כדרוש.
  - אם $\langle a,b_2\rangle\in g$ אז $\langle a,b_2\rangle\in B\times C$ כלומר $a\in B$, ומזה נסיק $a\in A\wedge a\in B$ בניגוד להיות A,B זרות, כלומר הצ.ל. מתקיים באופן ריק.
- אם $\langle a,b_1\rangle\in g$, אז $\langle a,b_1\rangle\in B\times C$ כלומר $a\in B$. נפלג למקרים:
  - אם $\langle a,b_2\rangle\in g$ אז לפי היות g ח"ע נגרר $b_1=b_2$, כדרוש.
  - אם $\langle a,b_2\rangle\in f$ אז $\langle a,b_2\rangle\in A\times C$ כלומר $a\in A$, ומזה נסיק $a\in A\wedge a\in B$ בניגוד להיות A,B זרות, כלומר הצ.ל. מתקיים באופן ריק.

פיצלנו למקרים ומצאנו בכל אחד מהם מתקיים $b_1 = b_2$, כדרוש.

טענה רביעית - $dom(h) = A \cup B$

כבר הוכחנו שהפונקציה מלאה ב־$A \cup B$. נשתמש בעובדה זו. נפרק לפי הגדרת דומיין:

$$\begin{aligned} &\iff x \in dom(h) && \\ &\iff x \in P \land \exists b.\langle a,b\rangle \in h && (dom \text{ definition}) \\ &\iff x \in A \cup B && (\text{given } h \text{ full in } A \cup B) \end{aligned}$$

כדרוש. שלפי הגדרת שיוויון גורר $dom(h) = A \cup B$, כדרוש.

טענה שלישית - $Im(h) = C$

יהי $x \in Im(h)$, ונוכיח שאמ"מ $x \in C$ (חוקי ע"פ הגדרת שיוויון):

$$\begin{aligned} &x \in Im(h) && \\ \iff &y \in C \land \exists x \in A \cup B.\langle x,y\rangle \in h && (Im \text{ definition}) \end{aligned}$$

נוכיח חכל אחת מהגרירות בנפרד.

- גרירה ראשונה: נניח $y \in C$, צ.ל. $y \in C \land \exists x \in A \cup B.\langle x,y\rangle \in h$. התנאי הראשון $y \in C$ מתקיים באופן ישיר לפי ההנחה, ובשביל להוכיח את התנאי השני נניח בשלילה שיהי $x \in A \cup B$, נגרר $\langle x,y\rangle \notin h$. נחלק למקרים:
  - אם $x \in A$, אז לפי הגדרת f כפונ' $A \to C$ בהכרח קיים x המקיים $\langle x,y\rangle \in f$, שלפי איחוד גורר $\langle x,y\rangle \in h$ בסתירה להנחת השלילה.
  - אם $x \in B$, אז לפי הגדרת g כפונ' $B \to C$ בהכרח קיים x המקיים $\langle x,y\rangle \in g$, שלפי איחוד גורר $\langle x,y\rangle \in h$ בסתירה להנחת השלילה.
- גרירה שניה: נניח $y \in C \land \exists x \in A \cup B.\langle x,y\rangle \in h$ ונוכיח $y \in C$, אבל הטענה שצריכה להוכיח נגרר ישירות מתוך ההנחה מכיוון ש־$A \land B \longrightarrow C \implies A \longrightarrow C$.

שתי הגרירות הוכחו, כלומר $Im(h) = C$.

סיכום וקשירה למש"ל

נסכם: הוכח ש־h מלאה ב־$A \cup B$ וגם ש־h ח"ע, כלומר h **פונ'** ב־$A \cup B$, וכמו כן הוכח ש־ $dom(h) = A \cup B \land Im(h) = C$, כלומר $\boldsymbol{f : A \cup B \to C}$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

12. מציאה והוכחה של תחום ותמונה של יחס נתון והוכחתו כפונקציה

נתון: $g = \{\langle A,a\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid a \in A \land \forall b \in A.b\}$

צ.ל.: $dom(g) = \mathbb{N} \setminus \emptyset, Im(g) = \mathbb{N}, g \text{ is a function}$.

הוכחת תמונה

צ.ל.: $Im(g) = \mathbb{N}$

הוכחה: נוכיח לפי הכלה דו כיוונית. יהי x:

- נניח $x \in Im(g)$, נוכיח $x \in \mathbb{N}$. לפי ההנחה (בשילוב עם הגדרת Im והגדרת g):

$$x \in Im(g) \iff x \in \mathbb{N} \land \exists a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\langle a, b\rangle \in g$$

כלומר, בפרט נתון $x \in \mathbb{N}$, כדרוש.

- נניח $x \in \mathbb{N}$, נוכיח $x \in Im(g)$. לפי הגדרת תמונה, צריך להוכיח $x \in \mathbb{N} \land \exists a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\langle a, x\rangle \in g$. הדבר הראשון שצ.ל. מתקיים לפי ההנחה שלנו. עבור בחירת a, נבחר את סינגילטון x. לפי הגדרת $\exists$, צריך להוכיח שניים: $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land \langle a, x\rangle \in g$.
    - נוכיח $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ בעזרת מעברי אמ"מ:

$$a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \iff \{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \iff \{x\} \subseteq \mathbb{N} \iff x \in \mathbb{N}$$

    זה נכון לפי הגדרות a, $\mathcal{P}$, $\subseteq$ בהתאמה. הטענה האחרונה נכונה כי היא הנתון.
    - נוכיח $\langle a, x\rangle \in g$. לפי הגדרת g ולפי עקרון ההפרדה, צ.ל. $\langle a, x\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \land a \in A \land \forall b \in A.a \le b$. נפרק את זה למספר דברים שצ.ל.:
        - $\langle a, x\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$: הצ.ל. שקול לכך ש־$a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land x \in \mathbb{N}$. הראשון מתקיים לפי ההנחה, והשני הוכח כבר.
        - $a \in A$: לפי הגדרת A; $a \in \{a\} = A$ וזה פסוק אמת.
        - $\forall b \in A.a \le b$: יהי $b \in A$, נוכיח $a \le b$. לפי הגדרת b, $b \in \{a\}$ כלומר $b = a$. נציב ונקבל $a \le a$, פסוק אמת לפי הגדרת היחס $\le$.

הוכחנו את כל ההכלות, כדרוש.

הוכחת דומיין

צ.ל.: $dom(g) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$

הוכחה:

לפנות כל, בעזרת מעברי אמ"מ, נפרק את הטענה $x \in dom(g)$:

$$\begin{aligned}
& x \in dom(g) & \\
\iff & x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land \exists b.\langle x, b\rangle \in g & (dom \text{ definition}) \\
\iff & x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land \exists b \in \mathbb{N}.b \in x \land \forall a.a \le b \land \langle x, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} & (g \text{ definition}) \\
\iff & x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \land (\exists b \in \mathbb{N}.b \in x \land \forall a.a \le b) & (\times \text{ definition})
\end{aligned}$$

המעבר האחרון חוקי כי הטענה האחרונה תמיד פסוק אמת אם הטענות האחרות נכונות.

עתה נוכיח בעזרת הכלה דו־כיוונית. יהי x;

- נניח $x \in dom(g)$, ונוכיח $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$.

- עלינו להוכיח $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, כלומר צ.ל. $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge x \notin \emptyset$. נפרק לשתי הוכחות:
  - ראשית, נוכיח $x \notin \emptyset$. נניח בשלילה ש־$x \in \emptyset$, ונקבל שלפיכך $\exists b \in \mathbb{N}.b \in \emptyset \wedge \forall b.a \leq b$, ומזה נגרר שקיים b עבורו $b \in x = \emptyset$, וזאת סתירה כי $b \in \emptyset$ פסוק שקר ע"פ הגדרת $\emptyset$.
  - עתה, נוכיח $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נניח בשלילה ש־$x \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$, זאת בסתירה לנתון שטוען כי $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

- נניח $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, ונוכיח $x \in dom(g)$. לפי הטענה לעיל, עלינו להוכיח שניים:
  - ראשית, צ.ל. $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, אבל זה נגרר ישירות מהנתון $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge x \notin \emptyset$.
  - שנית, צ.ל. $\exists b.b \in x \wedge \forall a.a \leq b$. נניח בשלילה שהטענה הזו לא מתקיימת, נשלול לוגית ונקבל שנניח בשלילה ש־$\forall b.(b \notin x) \vee (\exists a.a > b)$. נפרק למקרים
    - יהי $b \in x$, נוכיח שהוא קיים. נפרק את מה שידוע לנו על b בעזרת מעברים שקולים:

$$x \in (\mathbb{N}) \wedge x \notin \emptyset \iff x \subseteq \mathbb{N} \wedge x\neg(\forall b \in x.F) \iff (\forall b \in x.b \in \mathbb{N}) \wedge (\exists b.b \in x)$$
$$b \in x \iff b \in \mathbb{N} \wedge b \text{ exists}$$

    - משום שהתנאי הראשון תמיד פסוק שקר, אז הנחת השלילה מתקיימת אם ורק אם $\exists a.a > b$, זאת בשלילה לכך שלא קיים מקסימום לטבעיים (אם נבחר $x = \mathbb{N}$; הרי כל אשר אנחנו עושים מתקיים בקשירה ל־"יהי x"), כלומר אמ"מ טענת השלילה לא נכונה, כדרוש.

הוכחת מליאות (ב־$\mathbb{N} \setminus \emptyset$)

בהתבסס על הטענה $A := \mathbb{N} \setminus \emptyset = dom(g)$, נוכיח בעזרת מספר גרירות אשר המליאות מתקיימת:

$$\begin{aligned}
& dom(g) = A && (\text{known}) \\
\iff & \forall x.x \in dom(g) \longleftrightarrow x \in A && (= \text{definition}) \\
\iff & \forall x.x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge \exists a.\langle x, a\rangle \in g \longleftrightarrow x \in A && (dom \text{ definition}) \\
\implies & \forall x.x \in A \longrightarrow \forall x.x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge \exists a.\langle x, a\rangle \in g && (\iff \text{definition}) \\
\iff & x \in A.x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge \exists a.\langle x, a\rangle \in g && (\forall \text{ definition}) \\
\iff & x \in \mathbb{N} \setminus \emptyset.\exists a.\langle x, a\rangle \in g && (A \text{ definition}, A \wedge \forall x.A \iff \forall x.A)
\end{aligned}$$

והטענה האחרונה שקולה למליאות ב־$\mathbb{N} \setminus \emptyset$, כדרוש.

הוכחת חד־ערכיות

צ.ל.: $\forall a \in A.\forall b_1, b_2 \in B.(\langle a, b_1\rangle \in g \wedge \langle a, b_2\rangle \in g) \implies b_1 = b_2$ (חד־ערכיות)

הוכחה: יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. יהי $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. נניח $\langle A, n_1\rangle, \langle A, n_2\rangle \in g$ ונוכיח ש־$n_1 = n_2$.

בלי הגבלת הכלליות, $\langle A, n\rangle \in g$ אמ"מ $\langle A, n\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \wedge n \in A \wedge \forall b \in A.n \leq b$, ע"פ עקרון ההפרדה ולפי הגדרת g.

בפרט, זה נכון על $\langle A, n_1\rangle, \langle A, n_2\rangle$. משום ש־$\langle A, n_1\rangle, \langle A, n_2\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ פסוק אמת לפי הגדרת כפל קרטזי, נשארנו עם הנתון $n_1, n_2 \in A$ וגם $\forall b \in A.n_1 \leq b \wedge n_2 \leq b$ (נכון לפי חוק קיבוץ כמתי $\forall$).

נניח בשלילה ש־$n_1 \neq n_2$, כלומר $n_1 > n_2 \vee n_2 < n_1$. נפלג למקרים, כלומר נוכיח שבלי הגבלת הכלליות $n_1 > n_2$ סותר את הטענה (זה יהיה שקול לסתירת שני המקרים שלנו):

יהי $b \in A$ (מזה נגרר ש־b קיים וגם $b \in \mathbb{N}$ לפי הגדרת A). לפי הנתון $n_1 \leq b \wedge n_2 \leq b \wedge n_1 > n_2$. משום שהטענה מתקיימת תחת כמת "לכל", אז הטענה מתקיימת בפרט עבור $b = n_2$ (מותר להציב כך כי ידוע ש־b, n_2 מאותה הקבוצה – A). כלומר, נגרר ש־$n_1 \leq n_2 \wedge n_1 > n_2$, וזו סתירה.

מכיוון שסתרנו את הנחת השלילה, קיבלנו ש־$n_1 = n_2$, כדרוש.

סיכום

הוכחנו אשר היחס g מלא (ב־$dom(g)$) וחד ערכי, כלומר **g היא פונקציה**. כמו כן מצאנו את $dom(g)$ ואת $Im(g)$, כדרוש.
או לסיכום – $g \text{ definition} \implies dom(g) = \mathbb{N} \setminus \emptyset \wedge Im(g) = \mathbb{N} \wedge g \text{ is function}$ – מש"ל.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

13. מציאת $f \circ f \circ f$ עבור f נתון

הבהרה

אני אשתמש בסימון $f^{(3)}$ו־$f^{(2)}$ כסימונים מקוצרים ל־$f \circ f \circ f$ ו־$f \circ f$ בהתאמה. זה גם מסתדר עם ההגדרת הרקורסיבית של הרכבת $R^{(n)}$, ככה שזה אמור להיות יחסית ברור.

סעיף (א)

נתון: $f = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

נראה דרך למציאת $f^{(3)}$:

$$f = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,4\rangle\} \tag{1}$$
$$f^{(2)} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\} \tag{2}$$
$$f^{(3)} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,2\rangle\} \tag{3}$$

סעיף (ב)

נתון: $f(A) = A \cup \mathbb{N}, f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R})^2$

נראה דרך למציאת $f^{(3)}$:

נתבונן ב־$f(A)$, לפי איך שיחסים ופונקציות מוגדרים, $f = \{A \cup \mathbb{N}\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. נתבונן באיזשהו איבר כללי $x \in f$, ו"נעביר" אותו עוד פעם דרך f כדי לקבל את $f^{(2)}$. מה שנקבל זה את $\langle x, x \cup \mathbb{N}\rangle$ ומשום ש־$\mathbb{N}$ כבר מוכל ב־x אז נקבל את $\langle x, x\rangle$ – כלומר העברנו את f ביחס הזהות של $id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, ומכיוון ש־$f \circ id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ זה f אז בעצם לא שנינו כלום. כנ"ל על $f^{(3)}$ – כלומר קיבלנו ש־$f^{(3)} = f = \{A \cup \mathbb{N}\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.

סעיף (ג)

נתון: $f(\langle x,y\rangle = \langle x+y, x\rangle, f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

נראה דרך למציאת $f^{(3)}$:

יהי איזשהו איבר $\langle x,y\rangle \in R^2$, ומשום שפונקציות הן מלאות קיים איזשהו $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2$ ככה ש־$\langle\langle x,y\rangle,\langle a,b\rangle\rangle \in f$. לפי הגדרת הפונקציה f, אפשר להגיד $\langle a,b\rangle = \langle x+y,x\rangle$. נעביר שוב פעם דרך הפונקציה כדי למצוא את $f^{(2)}$, ונקבל $\langle a,b\rangle = \langle x+2y,x\rangle$. בפעם האחרונה נעשה זאת ונקבל $\langle a,b\rangle = \langle x+3y,x\rangle$. נהפוך את מה שקיבלנו לפונקציה, כלומר $f^{(3)}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \wedge f^{(3)}(\langle x,y\rangle = \langle x+3y,x\rangle$ או לפי הגדרת פונקציה :

$$f^{(3)}\colon \mathbb{R}^2, f^{(3)}(x) = 3x$$

14. מציאת ההרכבה $g \circ f$ עבור פונקציות נתונות

נתון:

$$\begin{aligned} f(n) &= \{n, n+1\} & f&\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ g(A) &= \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \min A & \text{else} \end{cases} & g&\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \end{aligned}$$

צ.ל.: $g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \wedge (g \circ f)(n) = n$ או במילים אחרות $g \circ f = id_{\mathbb{N}} = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid a = b\}$.

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.

נפרק את ההגדרות של f, g לתוך עקרון ההפרדה, לפי הגדרת הסימון של פונקציות:

$$\begin{aligned} f &= \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid b = \{a, a+1\}\} \\ g &= \{\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid (A = \emptyset \to b = 0) \wedge (A \neq \emptyset \to b = \min A)\} \end{aligned}$$

הכלה ראשונה

נתבונן באיבר כלשהו $\langle a,c\rangle \in g \circ f$, נוכיח הכלה ב־$id_{\mathbb{N}}$.

לפי הגדרת הרכבה ועקרון ההפרדה, $\langle n,m\rangle \in g \circ f$ אמ"מ $\langle a,c\rangle \in \mathbb{N}^2 \wedge \exists b.\langle a,b\rangle \in f \wedge \langle b,c\rangle \in g$. נפרק זאת לשלוש הגבלות (כל אחת ב־$\wedge$ משלה), ונמצא מה נגרר מכל אחת מהן:

- $\langle a,c\rangle \in \mathbb{N}^2$:
  - לפי כפל קרטזי אמ"מ $n \in \mathbb{N} \wedge m \in \mathbb{N}$.
- $\langle a,b\rangle \in f$:
  - לפי הצורה בה f מוגדרת (עקרון ההפרדה), $\langle a,b\rangle \in f$ אמ"מ $\langle a,b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge b = \{a, a+1\}$, כלומר b ביחס ל־a הוא $\{a, a+1\}$, זאת בהנחה ש־$\langle a,b\rangle \in \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נוכיח שההנחה הזו פסוק אמת:
  - לפי כפל קרטזי, צ.ל. $a \in \mathbb{N} \wedge \{a, a+1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ אחרת b לא מוגדר. הטענה הזו שקולה לכך ש־$a \in \mathbb{N} \wedge a+1 \in \mathbb{N}$ וזה פסוק אמת כי כבר נתון מהגדרת a ש־$a \in \mathbb{N}$ וגם חיבור טבעיים טבעי לכן גם כן $a+1 \in \mathbb{N}$, כדרוש. כלומר, קבענו אמ"מ $b = \{a, a+1\}$.
- $\langle b,c\rangle \in g$:
  - לפי הצורה בה g מוגדרת (עקרון ההפרדה), $\langle b,c\rangle \in g$ אמ"מ $\langle b,c\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ וגם אם $b = \emptyset$ אז $c = 0$ ובכל מקרה אחר $c = \min b$. התנאי הראשון אמ"מ $b \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge c \in \mathbb{N}$, שתואם את ההגבלות הנוכחיות שלנו ל־b ו־c. את התנאי השני נפלג למקרים:

- במקרה הראשון $c=0 \implies b=\emptyset$. זו סתירה להגדרת b כ־$\{a,a+1\}$ כי a קיים, כלומר הטענה מתקיימת באופן ריק, מהווה פסוק אמת, ובכך לא סותרת את ההוכחה אך גם לא אומרת דבר.
- בכל מקרה אחר, $b=\{a,a+1\}$, וידוע $c=\min b$. נניח בשלילה ש־$\min b \neq a$. לפי הגדרת מינימום, הנחת השלילה גוררת $\min b = a+1$ (כי הוא לא יכול להיות a לפי הנחת השלילה וכמו כן מינימום חייב להיות חלק מהקבוצה). כמו כן, לפי הגדרת מינימום, $a+1$ קטן מכל האיברים בסדרה (בפרט a). בסתירה לכך, ידוע שבלי הגבלת הכלליות $a<a+1$ לפי הגדרת הסדר על הממשיים, כלומר הנחת השלילה נשללה ו־$\min b = a$. לפי טרנזיטיביות, $c=\min b \wedge \min b = a$ גורר $a=c$.
   - משום שהמקרה הראשון תמיד פסוק אמת, וידוע ש־$A \iff A \wedge T$, אז ההגבלה היחידה שיש לנו על c היא $a=c$.

כיסינו את כל ההגבלות שנובעות מתוך היות $\langle a,c\rangle \in g\circ f$, ומצאנו שנגרר ש־$a\in\mathbb{N}\wedge c\in\mathbb{N}\wedge a=c$. לפי כפל קרטזי, הטענה הזו שקולה לכך ש־$\langle a,c\rangle\in\mathbb{N}^2\wedge a=c$, ולפי עקרון ההפרדה זה שקול ל־$\{\langle a,c\rangle\in\mathbb{N}^2 \mid a=c\}$ אשר שקול ל־$id_{\mathbb{N}}$ לפי הגדרתו.

הכלה שנייה

יהי $x\in id_n$, ונוכיח $x\in g\circ f$. משום שהוא נמצא בהרכבת פונקציות, שהוכח שהיא בעצמה פונקציה, אז אפשר לסמן $\langle a,c\rangle := x \in id_{\mathbb{N}}$ ולהוכיח $\langle a,c\rangle\in g\circ f$. לפי הגדרת הרכבת יחסים נתון $\langle a,c\rangle\in\mathbb{N}^2\wedge\exists b.\langle a,b\rangle\in f\wedge\langle b,c\rangle\in g$. לפי הגדרת יחס הזהות על הטבעיים צ.ל. $a=c\wedge\langle a,c\rangle\in\mathbb{N}^2$. נשים לב שהתנאי $\langle a,c\rangle\in\mathbb{N}^2$ כבר ידוע לנו מהנתון, כלומר צ.ל $a=c$. נניח בשלילה $a\neq c$, כלומר $a>c\vee c>a$. נוכיח שבלי הגבלת הכלליות זו סתירה אם $a>c$, כך ששני המקרים יתקיימו באופן דומה. ונוכיח שקיים $b\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ שעבורו $\langle a,b\rangle\in f$ וגם $\langle b,c\rangle\in g$.

נבחר $b=\{a,a+1\}$. משום ש־$a\in\mathbb{N}$, אזי $a+1\in\mathbb{N}$ ולכן $b\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי הגדרת f, $\langle a,b\rangle\in f$. כמו כן, ידוע $a=c$. נתבונן ב־$\min b$, ומשום ש־$a+1>a$ אז $b=a$. כלומר, לפי הגדרת g, $\langle b,c\rangle\in g$. נסכם: $\langle a,b\rangle\in f\wedge\langle b,c\rangle\in g$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

15. הוכחה או הפרכה של גרירת הגדרה אחת את אחרת

נתון

נתונה קבוצה A, ונתון $f\colon A\to A$.

(ג) ל־(א) - הוכחת גרירה

נתון: f פונ' קבועה, כלומר $\forall x\in A.f(x)=n$.

צ.ל.: $f\circ f=f$

נחשב את ההרכבה. יהי $x\in A$. כאשר נעביר את x ב־f, נקבל n, וכאשר נעביר את n ב־f נקבל את n גם כן, כלומר סה"כ $\langle x,n\rangle\in f$ או במילים אחרות $f(x)=n$.

$\mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$

(א) ל־(ג) - סתירת גרירה

נתון: f אידמפוטנטית, כלומר $f \circ f = f$.

צ.ל.: לסתור שבהכרח $\exists a \in A. \forall x. f(x) = a$.

נבחר $f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. לכן, $f \circ f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} = f$, כלומר היא מקיימת את הנתון, אך אינה פונקציה קבועה, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

(ב) ל־(א) - סתירת גרירה

נתון: f פונ' עקשנית על A, כלומר לכל $x \in Im(f)$ מתקיים $f(x) = x$.

צ.ל.: $f \circ f = f$

לפנות כל, נוכיח ש־$f = id_A$. נשתמש בהכלה דו כיוונית:

- יהי $\langle a,b\rangle \in id_A$, כלומר $a = b$, נוכיח $\langle a,b\rangle \in Im(f)$. נתבונן ב־$b$; משום ש־$f$ פונ' ועל A, אז כל $x \in A$ מקיים $x \in Im(f)$, כלומר צ.ל. $f(b) = b$ כלומר $\langle b,b\rangle \in id_A$ וזה פסוק אמת.
- יהי $\langle a,b\rangle \in f$. נתבונן באיבר $\langle b,c\rangle \in f$ (קיומו של איבר כזה מובטח כי נתון ש־f פונ' על A – כלומר שהן הדומיין והן התמונה של הפונקציה הם A). משום שידוע $b \in Im(f)$ (אחרת ההכלה אינה מתקיימת), אז ע"פ היות f עקשנית ידוע $f(b) = b$ ולכן $\langle b,b\rangle \in f$. סה"כ, $\langle a,b\rangle \in f \wedge \langle b,b\rangle \in f$ ומכיוון שפונ' היא חד־ערכית אז $a = b$ ולכן $\langle a,b\rangle \in id_A$, כדרוש.

עתה, נוכיח שיחס הזהות על A הוא אידמפוטנטי, כלומר $f \circ f = f$. יהי $x \in A = Im(f)$. לאחר מעבר ב־f נקבל $f(x) = x$ (כי הרי זה יחס הזהות), וכנ"ל על מעבר נוסף, כלומר סה"כ $\langle x,x\rangle \in f \circ f$ ולכן f אידמפוטנטית, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

(א) ל־(ב) - סתירת גרירה

נתון: $f \circ f = f$

צ.ל.: לסתור שבהכרח $f(x) = x$

נבחר $f(x) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ לכן, $f \circ f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} = f$, כלומר היא מקיימת את הנתון, אך $f(1) \neq 1$ בניגוד לצ.ל., כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

(ג) ל־(ב) - הוכחה גרירה

נתון: $\exists a. \forall x \in A. f(x) = a$

צ.ל.: $\forall x \in Im(f). f(x) = x$.

יהי $x \in Im(f)$. נניח בשלילה ש־$x \neq a$. משום ש־x בתמונה אז $\exists b \in A. \langle b,x\rangle \in f$ וזה סותר את הנתון. נסיק ש־$\forall x \in Im(f). x = a$. לפי הנתון והטענה הזו $f(x) = a = x$ שמהווה מש"ל לפי טרנזיטיביות.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

(ב) ל־(ג) - סתירה גרירה

נתון: $\forall x \in Im(f).f(x) = x$.

צ.ל.: לסתור שבהכרח $\exists a \in A.\forall x \in A.\langle x, a\rangle \in f$

נבחר $f = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. הפונ' מקיימת $\forall x \in \{1,2\}.f(x) = x$ כי $f(1) = 1 \wedge f(2) = f$, כלומר היא מקיימת את הנתון, אך בניגוד לכך נניח בשלילה שקיים a המתאים להגדרת פונקציה קבועה, לפיכך $a \in \{1,2\}$. נפלג למקרים: אם $a = 1$ אז $\langle 2,2\rangle$ מהווה דוגמא ניגדית ואם $a = 2$ אז $\langle 1,1\rangle$ מהווה דוגמא ניגדית, כלומר הנחת השלילה נסתרה וסה"כ לא קיים a מתאים כלומר הפונקציה אינה קבועה, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

16. מציאה והוכחה של תמונה של פונקציה

סעיף (א)

נתון: $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{R})^2, f(X) = X \cap \mathbb{N}$

צ.ל.: $Im(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.

הכלה ראשונה

יהי $y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח $x \in Im(f)$ (כלומר צ.ל. $\exists x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).f(x) = y$, ע"פ עקרון ההחלפה). נבחר $x = y$ (זה חוקי כי $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כי $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$). נתבונן ב־$f(x) = f(y)$, ונוכיח שזה שווה ל־$y$. לפי הגדרת הפונקציה, $f(y) = y \cap \mathbb{N}$. נניח בשלילה ש־$f(y) \neq y$. יהי $x \in y$. לפי הנחת השלילה, $x \notin f(y)$ כלומר $\neg(x \in y \wedge x \in \mathbb{N})$ אמ"מ $x \notin y \vee x \notin \mathbb{N}$. בניגוד לכך, ידוע $x \in y$ – כלומר בהכרח $x \notin \mathbb{N}$. לעומת זאת, אם $x \in y$ אז בגלל ש־$y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ אז $x \in \mathbb{N}$, וזאת בסתירה להנחת השלילה. בכך, הוכחנו את השלילה להנחת השלילה ($f(y) = y$) ומצאנו x מתאים, כדרוש.

הכלה שנייה

יהי $y \in Im(f)$, נוכיח $y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי הגדרת תמונה, נתון $\exists x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).f(x) = y$. כמו כן, ידוע ש־$f(x) = x \cap \mathbb{N}$, ומשום שפעולת ה־$\cap$ מורידה איברים מקבוצה קיימת, אז בלי הגבלת הכלליות $x \cap B \in A \implies x \in A$, בפרט $x \cap \mathbb{N} = y \in \mathcal{P}(N)$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: $f\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, f(\langle n, m\rangle) = n + m$

צ.ל.: $Im(f) = \mathbb{Z}$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית;

הכלה ראשונה

יהי $x \in Im(f)$, נוכיח $x \in \mathbb{Z}$. לפי הגדרת תמונה, קיים $\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}^2$ עבורו $\langle\langle a,b\rangle,x\rangle \in f$ או במילים אחרות $f(\langle a,b\rangle) = x$. לפיכך, $x = a + b$. כמו כן ידוע $a, b \in \mathbb{Z}$ ע"פ כפל קרטזי. משום שחיבור שלמים הוא שלם, אפשר לדעת אשר $x \in \mathbb{Z}$, כדרוש.

הכלה שנייה

יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח $x \in Im(f)$, כלומר צ.ל. $\exists\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}^2.f(\langle a,b\rangle \in f)$. לפי הגדרת f, צ.ל. $\exists a,b \in \mathbb{Z}.a + b = x$. נבחר $a = -1, b = 1 + x$, כלומר נקבל ש־$a + b = -1 + 1 + x = x$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}), f(\langle X,Y\rangle) = X \cap Y$

צ.ל.: $Im(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית;

הכלה ראשונה

יהי $x \in Im(f)$, נוכיח $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי ההנחה, קיים איזשהו $\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (או במילים אחרות, קיימים $a \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) כך ש־$f(\langle a,b\rangle) = x$. נציב ונקבל ש־$a \cap b = x$. נניח בשלילה ש־$x \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$. לפי הכלה דו כיוונית, ידוע $x \subseteq a \cap b$, כלומר יהי $A \in a \cap b$ גורר $A \in x$. לפי הנחת השלילה, $\forall A \in x.\neg(A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. בניגוד לכך, ידוע $A \in a \cap b$ כלומר $A \in a \wedge A \in b$ אך $b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כלומר $\forall A \in b.A \in \mathbb{N}$ – ומשום ש־$A \in b \wedge A \in x$ אז זו סתירה להנחת השלילה.

הכלה שנייה

יהי $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונוכיח $x \in Im(f)$. כלומר, צ.ל. שקיים איזשהו $\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (או במילים אחרות, קיימים $a \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$) כך ש־$f(\langle a,b\rangle) = x$. נבחר $a, b = x$ (זה חוקי כי $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$), כך ש־$a \cap b = x$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד)

נתון: $f\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f(g) = g(0)$

צ.ל.: $Im(f) = \mathbb{R}$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית; יהי x.

הכלה ראשונה

נניח $x \in Im(f)$, נוכיח $x \in \mathbb{R}$. לפי ההנחה, $x \in \mathbb{R}$ וגם קיים b המקיים תנאים מסויימים – לא משנה לנו אילו תנאים אילו כי כבר ידוע לנו $x \in \mathbb{R}$, כדרוש.

הכלה שנייה

נניח $x \in \mathbb{R}$, ונוכיח $x \in Im(f)$. ע"פ הגדרת Im, צריך להוכיח $x \in \mathbb{R} \wedge \exists g \in (\mathbb{N} \to \mathbb{R}).\langle g, x\rangle \in f$. נבחר $g(x) = x$, ככה ש־$f(g) = g(0) = 1$, ולכן $\langle g, x\rangle \in f$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ∎

סעיף (ה)

נתון: $f\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(\langle g, n\rangle) = g(n)$

צ.ל.: $Im(f) = \mathbb{R}$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית;

הכלה ראשונה

נניח $x \in Im(f)$, נוכיח $x \in \mathbb{R}$. לפי ההנחה, $x \in \mathbb{R}$ וגם קיים b המקיים תנאים מסויימים – לא משנה לנו אילו תנאים אילו כי כבר ידוע לנו $x \in \mathbb{R}$, כדרוש.

הכלה שנייה

נניח $x \in \mathbb{R}$, ונוכיח $x \in Im(f)$. ע"פ הגדרת Im, צריך להוכיח $x \in \mathbb{R} \wedge \exists\langle g, n\rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{N}.\langle g, x\rangle \in f$. נבחר $g(x) = x$ ו־$n = x$, ככה ש־$f(\langle g, n\rangle) = g(n) = n$, ולכן $\langle\langle g, n\rangle, x\rangle \in f$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ∎

17. הוכחת קיום של סדרת קבוצות המקיים טענות לכל n טבעי

בחירה

בסיס $A_0 = \emptyset$, ובאופן רקורסיבי נבחר $A_n = \mathcal{P}(A_{n-1})$ לכל $n > 0$.

סעיף (א)

צ.ל.: $|A_{n+1}| = 2^{|A_n|}$

הוכחה: נתבונן ב־$|A_{n+1}|$, צ.ל. שיוויון ל־$2^{|A_n|}$. ידוע $\forall n \in \mathbb{N}.n + 1 > 0$ ולכן A_{n+1} מוגדר באופן רקורסיבי. מסיבה זאת A_{n+1} שווה ל־$\mathcal{P}(A_n)$. כמו כן בשיעור הראשון ניתן אשר־$|\mathcal{P}(A)| = 2^{A}$ (וכמו כן זה גם הוכח בתרגיל בית 3), לכן $|A_{n+1}| = |\mathcal{P}(A_n)| = 2^{|A_n|}$, כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ∎

סעיף (ב)

צ.ל.: $A_n \in A_{n+1}$

הוכחה: נתבונן ב־A_{n+1}, צריך להוכיח ש־A_n נמצא בו. ידוע $\forall n \in \mathbb{N}.n+1>0$ ולכן A_{n+1} מוגדר באופן רקורסיבי. מסיבה זאת $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n)$, משמע צ.ל. $A_n \in \mathcal{P}(A_n)$, שלפי הגדרת קבוצת חזקה צריך להוכיח $A_n \subseteq A_n$ וזה פסוק אמת כי כל גודל שווה לעצמו.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

צ.ל.: $A_n \subseteq A_{n+1}$

הוכחה: נוכיח אינדוקציה

- בסיס $(n=0)$: כלומר $A_0 \subseteq A_1$, נציב בהגדרה ונקבל $\emptyset \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ וזה פסוק אמת.
- צעד: $(n>0)$: לפי הנתון $n>0$ נוכל להשתמש בהגדרה הרקורסיבית של A_n. נניח $A_{n-1} \subseteq A_n$, ונוכיח $A_n \subseteq A_{n+1}$. במילים אחרות, הנחנו $A_{n-1} \subseteq \mathcal{P}(A_{n-1})$, וצ.ל. $A_n \subseteq \mathcal{P}(A_n)$. נתבונן ב־$A_n$. ע"פ הגדרתו הרקורסיבית $A_n = \mathcal{P}(A_{n-1})$, כלומר צ.ל. $\mathcal{P}(A_{n-1}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_{n-1}))$. נוכיח בעזרת מעברי גרירה:

$$\begin{align}
&\iff \mathcal{P}(A_{n-1} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A_{n-1})) \tag{1}\\
&\iff \forall x.x \in \mathcal{P}(A_{n-1}) \implies x \in \mathcal{P}(A_{n-1}) \tag{2}\\
&\iff \forall x.x \in b \wedge (b \in \mathcal{P}(A_{n-1})) \implies x \in \mathcal{P}(A_{n-1}) \tag{3}
\end{align}$$

וזה נגרר מהנחת האינדוקציה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

18. הוכחה או הפרכה של קיום סדרה של קבוצות המקיימת שלוש דרישות נתונות

בחירה

נבחר $A_n = \mathbb{N} \setminus n$.

סעיף א'

צ.ל.: $\forall i \in \mathbb{N}.A_i \subseteq \mathbb{N}$

הוכחה: יהי A_i נוכיח A_i מוכל בטבעיים. לפי הגדרת A_i והגדרת $\setminus$, $A_i \in \mathbb{N} \wedge i \notin A_i$, כלומר נגרר $A_i \subseteq \mathbb{N}$, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב'

צ.ל.:

$$\forall S \subsetneq \mathbb{N} \wedge S \neq \emptyset. \bigcap_{i\in S} A_i \neq \emptyset$$

הוכחה:

יהי $S \subsetneq \mathbb{N} \wedge S \neq \emptyset$ ("הגדרת S"). נוכיח $\cap_{i\in S} A_i \neq \emptyset$, כלומר $\forall i \in S.\neg(x \in A_i \iff x \in \emptyset)$. נניח בשלילה ש־$x \in A_i \iff x \in \emptyset$, ונוכיח באמצעות שזו סתירה. יהי $i \in S$;

יהי $x \in A_i$, או בשקילות: $x \in \mathbb{N} \wedge x \neq i \iff x \in \mathbb{N} \wedge x \notin \{i\} \iff x \in A_i$. לפי הנחת השלילה, $x \in \emptyset$. לסיכום, לפי הנחת השלילה $\forall x \in \mathbb{N}.x \neq i \iff x \in \emptyset$. בניגוד לכך, אם $\forall x \in \mathbb{N}.x \neq i$ אז $x \notin S$ כלומר $x \in \mathbb{N} \setminus S$ וידוע לפי הגדרת S ש־$\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset \implies S \subsetneq \mathbb{N}$, כלומר x בקבוצה לא־ריקה בסתירה להנחת השלילה. לא התייחסנו למקרה בו $i \in \emptyset$ אבל $i \in S$ וזה נוגד את הגדרת S.

סה"כ קיבלנו ש־$A_i \neq \emptyset$, תחת הכמתים המתאימים, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ג׳

צ.ל.:

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.

- הכלה ראשונה: $\mathfrak{A} \subseteq \emptyset$. ע"פ הגדרת הכלה, צ.ל. $x \in \mathfrak{A} \implies x \in \emptyset$ וזה מתקיים באופן ריק.
- הכלה שנייה: $\emptyset \subseteq \mathfrak{A}$. יהי $x \in \mathfrak{A}$, נוכיח ש־$x \in \emptyset$. נניח בשלילה ש־$x \notin \emptyset$. לפי ההנחות והגדרת חיתוך מוכלל $\forall i \in \mathbb{N}.x \in A_i$, כלומר: יהי $i \in \mathbb{N}$, נתון $x \in A_i$. ע"פ הגדרת A_i, $x \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$ כלומר $x \in \mathbb{N} \wedge x \neq i$. הטענה אמורה להתקיים עבור כל i, בניגוד לכך שהיא לא מתקיימת עבור $x = i$, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סוף

*עבודה זו נעשתה בלי שום שימוש בתוכנות מגעילות ובאגיות של חברות מגעילות, בפרט ווינדווס, וורד, או דרייברים חצי שמישים של Nvidia.