לינארית 2א 20

שחר פרץ

22 ביוני 2025

תזכורת: $A\in M_n(\mathbb{C})$ נקראית סימטרית אממ $A=A^T$ והרמיטית אם $A=A^*$, ונורמלית אממ $AA^*=A^*A$.

משפט 1. תהי $T\colon V\to V$ ט"ל, ו־V ממ"פ מעל $\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, ויהי B בסיס א"נ של V. אזי אם $A=[T]_B$:

$$[T^*]_B = A = ([T]_B)^*$$

הוכחה. נזכר ש־:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [Te_1]_B & \cdots & [Te_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נסמן $B=\{e_i\}_{i=1}^n$ בסיס. נבחין ש־:

$$Te_j = \sum_{i=0}^n a_{ij}e_i,\ \ a_{ij} = \langle Te_j \,|\, e_i\rangle$$

נסמן ב־C את המטריצה המייצגת $[T^*]_B$:

$$c_{ij} = \langle T^*e_j \,|\, e_i\rangle$$

ונחשב:

$$c_ij = \langle T^*e_j \,|\, e_i\rangle = \langle e_j \,|\, Te_i\rangle = \overline{\langle Te_i \,|\, e_j\rangle} = a_{ij}$$

■

מסקנה: אם A נורמלית אז T_A נורמלית מעל $\mathbb{F}^n$ אם הסטנדרטית. בפרט מתקיים עליה המשפט הספקטרלי. גם אם A ממשית, הע"ע עלולים להמצא מעל $\mathbb{C}$ (אלא אם היא צמודה לעצמה, ואז הם מעל $\mathbb{R}$).

משהו על אינטרפולציות:

משפט 2. יהיו $x_1\dots x_n, y_1\dots y_n\in\mathbb{R}$. נניח $\forall i,j\in[n]\colon i\neq j \implies x_i\neq x_j$. אז $\exists! p\in\mathbb{R}_{\le n-1}[x]\colon \forall i\in[n]\colon p(x_i)=y_i$ עד לכדי חברות (באופן שקול: נניח p מתוקן)

(הערה מהידע הכללי שלי: זהו פולינום לגראנג' והוא בונה אינטרפולציה די נחמדה).

הוכחה. ידוע שהפולינום מהצורה $p(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k = (1,x,x^2,\dots x^{n-1})(a_0\dots a_{n-1})^T$. למעשה, נקבל את מטריצת ונדרמונד:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

וידוע שהדטרמיננטה של ונדרמונד היא $\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ וזה איכשהו אמור לגמור את ההוכחה.

אם $x_i=y_i$ בפולינום <u>לעיל</u>, אז $f\in\mathbb{R}[x] \implies \forall a\in\mathbb{C}\colon f(\bar{a})=\overline{f(a)}$. הוכחה: נניח בשלילה, אז $\exists\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\colon f(\alpha)=0$ כך ש־$f(\bar{\alpha})=0$. אזי $0\neq f(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)}=0$ וזו סתירה. ■

משפט 3. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ נורמלית, אז קיים פולינום $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ כך ש־$A^*=f(A)$.

הערה: באופן כללי **לא** נכון שאם A,B מתחלפות אז $\exists f(x)\in\mathbb{F}[x]\colon f(A)=B$.

הוכחה. נוכיח מעל $\mathbb{C}$ ובפרט נכונות ל־$\mathbb{R}$. מהמשפט הספקטרלי קיימת P הפיכה (מעבר לבסיס אורתונורמלי) כך ש־$P^{-1}AP =$ $\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ הוא הבסיס המלכסן. מהיות המלכסן א"נ נקבל:

$$P^{-1}A^*P = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

ולכן מפולינום האינטרפולציה עבור הקבוצות $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ ו־$\{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n\}$ קיים ויחיד עד לכדי חברות $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־$f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$. נותר להראות ש־$A^* = f(A)$, זאת כי:

$$P^{-1}A^*P = f(\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n) \implies f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

נכפול ב־P מצד אחד וב־P^{-1} מהצד השני ונקבל את הדרוש ■

. . . .