ליניארית 1א, תרגיל בית 5

שחר פרץ

21 בדצמבר 2024

.... (1) ....

בכל אחד מהסיעפים הבאים, נקבע האם קיימת T העתקה ליניארית המקיימת את הנתון, נקבע האם היא יחידה. במידה והיא יחידה נמצא את תמונתה, גרעינה, ונקבע האם היא חח"ע, על או איזומורפיזם.

נסמן ב־E, בכל סעיף בנפרד, להיות הבסיס הטרוויאלי של טווח הפונקציה אותה נרצה למצוא.

א) מעל $\mathbb{Z}_3$ נמצא העתקה $T\colon (\mathbb{Z}_3)^3 \to M_2(\mathbb{Z}_3)$ המקיימת:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

ננסה לבנות מטריצה שתייצג את ההעתקה. לשם כך, תחילה נוכיח שהוקטורים הבאים בת"ל ופורשים. נתבונן במרחב השורות של הוקטורים.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_1\to R_1+R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

כל משתנה קשור באיבר פותח, ולכן הקבוצה פורשת. מרחב הפתרונות למטריצה ההומגנית טרוויאלי בלבד, ולכן הקבוצה בת"ל. סה"כ הוקטורים הללו בסיס ל־$\mathbb{R}^3$, נסמנו B.

נתבונן באיזומורפיזם הבאה:

$$\varphi \to M_2(\mathbb{Z}_3) \to \mathbb{Z}_3^4,\ \varphi\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

זוהי איזומטריה שכן תחת הגדרות הקורס, אבסטרקטית, φ היא הזהות מעל $\mathbb{Z}_3^4$. אזי לכל T נוכל למצוא $f\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^4$ כך ש־$\varphi\circ f = T$ (שוב, אבסטרקטית $f = T$).

עתה נוכל לבנות את $[T]_E^B$.

$$C_1 = \left[\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \left[\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = C_2,\ C_3 = \left[\varphi\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\right]_E = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

נמצא את הקרנל:

$$v \in \ker T \iff T(v) = 0 \iff [T]_E^B[v]_B$$

נקבל:

$$\ell et\ [v]_B = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \implies [T]_E^B[v]_B = 0 \iff \big(a+b+2c, 0, -c, a+b+c\big) = (0,0,0,0)$$

בכך למעשה הראינו שהקרנל לפי בסיס B יהיה דירוג המטריצה המייצגת. ב־$R_n \to \top$ נסמן שנוכל להתעלם משורה מכיוון שמהווה טאוטולוגיה.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to\top]{R_4\to R_4-R_1} \begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_3\to\top} \begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

סה"כ נקבל שקבוצת הפתרונות לפי הבסיס B תהיה:

$$\left\{\left[\begin{pmatrix}-s\\s\\0\end{pmatrix}\right]_B \mid s\in\mathbb{Z}_3\right\} \xrightarrow{E} -s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-s\\0\end{pmatrix}$$

סה"כ קיבלנו $\ker T = ((0,-s,0) \mid s\in\mathbb{Z}_3)$. עתה נחפש את התמונה. נתבונן בוקטור $[v]_B = (a,b,c)$ בתחום, ונקבל את התמונה להיות:

$$\operatorname{Im} T = \left\{\begin{pmatrix}a+b+2c\\0\\-c\\a+b+c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$$

אין זה משנה שאת v ייצגנו באמצעות a,b,c קומבינציתו ליניאריות מ־B, שכן B בסיס ובפרט פורש את $\mathbb{Z}_3^3$. לכן זוהי התמונה.

בגלל שעבור $s=1$ נקבל $(0,-1,0)\neq(0,0,0) \ni \ker T$, אז T אינה חח"ע. בגלל ש־$(1,1,1,1)\in\operatorname{Im}T$ גורר $0=1$ וזו סתירה, מצאנו וקטור מ־$\mathbb{Z}_3^4$ (שקול עד לכדי הרכבה באיזומורפיזם φ ל־$M_2(\mathbb{Z}_3)$) ולכן גם T איננה על. בפרט אינה איזומורפיזם.

ב) העתקה $T\colon (\mathbb{Z}_5)^3 \to M_s(\mathbb{Z}_5)$ המקיימת:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ראשית כל, נבדוק האם הוקטורים בתחום שנתון ערכם הינם בסיס:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_2} \begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\end{pmatrix}$$

מצאנו שהם בת"ל, שכן קיים פתרון לא טרוויאלי, אבל הם לא פורשים; נותר משתנה בלתי תלוי. נוכל למלא את החסר ב־e_3. סה"כ השלמנו לבסיס:

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

עתה נבנה את $[T]_E^B$.

$$C_1 = \left[T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right]_E = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \left[T\left(\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right)\right] = C_2,\ C_3 = \left[T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right]_E := \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

כאשר למעשה $a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3$ אך לא צוינה כל הגבלה נוספת. סה"כ נקבל את המטריצה המייצגת:

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix}1&1&a\\0&0&b\\0&0&c\\1&1&d\end{pmatrix}$$

נבחין כי היא איננה יחידה – בעבור המטריצה המייצגת נוכל לבחור בכל a,b,c,d ב־$\mathbb{Z}_5$, ומשום שקיים איזומורפיזם בין מרחב המטריצות המייצגות לבין מרחב ההעתקות הליניאריות – כל שינוי ב־a,b,c,d יגרור שהמטריצה תייצג העתקה ליניארית אחרת. בגלל ש־$|\mathbb{Z}_5|>1$ אז בפרט ייתכן יותר מ־a יחיד וסה"כ קיימת יותר מהעתקה ליניארית יחידה.

ג) מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T(1+2x+x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ T(1+x^2) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

נגדיר העתקה:

$$\varphi\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3,\ \varphi = id$$

היא למעשה id מהצורה שבה מגדירים בקורס את מרחב הפולינומים. נעבוד בתרגיל זה תחת הרכבת כל פולינום ב־φ. בדומה לסעיפים קודמים, נבדוק האם הנתונים בסיס:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&2&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to -2R_2, R_3\to -R_3]{R_1\to R_1+R_2+R_3} = 1$$

אכן כל המשתנים קשורים ולכן פורש, ובת"ל כי דירגנו

ד) מעל השדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת:

$$\operatorname{Im} T = \ker T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

לא תיתכן העתקה כזו, שכן אם זהו $\operatorname{Im} T$ אז $0 \notin \operatorname{Im} T$ (כי כפל ב־$0 \in \mathbb{R}$ בכל וקטור יביא אותנו ל־$(0,0,0) \notin \operatorname{Im} T$) אך $\operatorname{Im} T$ מ"ו ובפרט קיים בו את איבר ה־0 וזו סתירה.

ה) מעל שדה $\mathbb{R}$, העתקה $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ המקיימת:

$$\operatorname{Im} T = \ker T = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

לא קיימת העתקה כזו באופן זהה לסעיף הקודם.

(2)

בסעיפים הבאים, נמצא את $[v]_B$ בהינתן V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־B בסיס של V.

א)

$$\mathbb{F} = \mathbb{R},\ V = M_2(\mathbb{R}), v = \begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \right) := (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

בדומה לסעיפים קודמים, נרכיב כל מטריצה בזיווג $\varphi\colon M_2(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^4$ באמצעות:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

נחפש a,b,c,d מתאימים כך ש־:

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + dp_4 = v \iff a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$$

נכניס את מערכת המשוואות לתוך מטירצות:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&2\\0&0&0&1&1\\1&0&1&0&3\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&2\\1&0&1&0&3\\0&0&0&1&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_4} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

סה"כ:

$$[v]_B = (a,b,c,d) = (1,1,2,1)$$

ב)

$$\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5, V=(\mathbb{Z}_5)^5, v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, B=\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\0\\4\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

באופן דומה לסעיף הקודם, נחפש קבועים מתאימים:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\4&0&0&1&0&2\\0&1&0&0&0&3\\4&1&0&0&1&4\\4&1&0&0&0&5\end{array}\right)\xrightarrow{\forall n\in\{2,4,5\}:\ R_n\to R_n+R_1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0&3\\0&1&0&0&0&4\\0&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\forall n\in[4,5]:\ R_n\to R_n-R_3]{R_2\to R_2+R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&1&0&1&2\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_5\to R_5-R_3]{R_4\to R_4-R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&4&1&4\\0&0&0&4&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_5-R_4]{R_4\to 4R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&1&4&1\\0&0&0&0&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_4\to R_4-R_5]{R_5\to 4R_5}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&1&0&3\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_4}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&4\\0&1&0&0&0&4\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&4\end{array}\right)$$

סה"כ מדירוג המטריצה, באופן דומה לסעיף הקודם, מצאנו:

$$[v]_B=(4,4,3,1,4)$$

ג)

$$\mathbb{F}=\mathbb{R},\ V=\mathbb{R}_4[x],\ v=2+4x-5x^3+x^5,\ B=(1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3,1+x^2+x^3+x^4)$$

באופן דומה לסעיף א', נייצג את הפולינומים באמצעות וקטורים מ־$\mathbb{R}_5$ במהלך השאלה. נרצה למצוא $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ כך ש־:

$$a\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\4\\2\end{pmatrix}$$

נעביר את מערכת המשוואות למטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&-5\\0&0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&4\\1&1&1&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_n\to R_n-R_1]{\forall\mathbb{N}\ni n<5}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&1&0&-1\\0&1&1&1&0&3\\1&1&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_n\to R_n-R_2]{\forall\mathbb{N}\ni n<4}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&1&0&0&9\\1&1&1&0&0&7\end{array}\right)\xrightarrow[R_5\to R_5-R_3]{R_4\to R_4-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&0&0&0&4\\1&1&0&0&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_5\to R_5-R_4}\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&-6\\0&0&1&0&0&5\\0&1&0&0&0&4\\1&0&0&0&0&-2\end{array}\right)$$

וסה"כ, בדומה לסעיפים קודמים:

$$[v]_B=(a,b,c,d,e)=(-2,4,5,-6,1)$$

בסעיפים הבאים נחשב את $[T]_C^B$ בהינתן העתקה ליניארית T ובסיסים B,C.

א)

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \end{pmatrix},\ B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$C_1 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix} 0.\bar{3} \\ 0.\bar{3} \end{pmatrix},\ C_2 = \left[T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -0.\bar{3} \\ -0.\bar{3} \end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ב)

$$T(ax^2+bx+c) = T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c-a & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c-a \\ a-b \end{pmatrix},\ B = (1, 1+x, 1+x^2),\ C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$C_1 = [arg1]$$