אלגברה לינארית 2א ~ תרגיל בית 5

שחר פרץ

5 בדצמבר 2025

. . . . (1) . . . .

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ונניח $\dim U = 2$. תהי $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה אורתונורמלית כך ש־$T|_U = I$.

למה: קיים בסיס u_1, u_2, v_3 כך ש־$T(u_1) = u_1, T(u_2) = u_2$ ו־$T(v_3) = \pm v_3$, כך ש־$u_1, u_2 \in U \wedge v_3 \in U^\perp$.

הוכחת הלמה. לכל $u \in U$ מתקיים $r_U(u) = u$. זאת כי $r_U(u) = p_U(u) - p_{U^\perp}(u) = u - 0 = u$ (היטל של $u \in U$ על $U^\perp$ בהכרח שווה ל־0 כי $p_{U^\perp}(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot 0 = 0$ בעבור $v_1 \dots v_n$ בסיס של $U^\perp$.)

נתבונן בבסיס אורתונורמלי u_2, u_1 של U. אזי נתון $T(u_1) = u_1$ ו־$T(u_2) = u_2$. נרחיב אותו לבסיס אורתונורמלי u_1, u_2, v_3 של $\mathbb{R}^3$. בגלל ש־T אורתונורמלית, אזי היא משמרת בסיס ומכאן ש־$T(u_1) \perp T(v_3) \wedge T(u_2) \perp T(v_3)$, דהיינו $u_1 \perp T(v_3) \wedge u_2 \perp T(v_3)$. סה"כ $T(v_3) \in (v_1, v_2)^\perp = \operatorname{span}(v_1, v_2)^\perp = U^\perp$. משום ש־$U^\perp$ חד־ממדי וכן $v_3 \in U^\perp$, אזי v_3 (בגלל שאיננו וקטור האפס, מהיותו חלק מבסיס (u_1, u_2, v_3) בהכרח בסיס ל־$U^\perp$, ו־$T(v_3)$ קומבינציה לינארית של v_3, כלומר $T(v_3) = \lambda v_3$. בגלל ש־T אורתונורמלית, היא משמרת נורמה, ואז:

$$|\lambda| \, ||v_3|| = ||\lambda v_3|| = ||T(v_3)|| = ||v_3||$$

בגלל ש־$||v_3|| \neq 0$ נוכל לחלק בנורמה ולקבל $|\lambda| = 1$. סה"כ $\lambda = \pm 1$. סה"כ מצאנו בסיס מתאים. ■

(א) נוכיח ש־$T = I \vee T = r_U$.

הוכחה. ביחס לבסיס (u_1, u_2, v_3) שמצאנו בלמה שהוכחנו, נבחין שכל $v \in \mathbb{R}^3$ קומבינציה לינארית $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ של וקטורי הבסיס הללו. יהי $v \in V$. נקבל:

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_3 \quad T(v) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \lambda_3 T(u_3) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 T(v_3)$$

נפרק למקרים.

- אם $T(v_3) = v_3$ אז:

$$T(v) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_3 = v = Iv$$

כלומר $T = I$ וסיימנו.

- אם $T(v_3) = -v_3$ אז מהגדרה $p_U(v_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ וגם $p_{U^\perp}(v_3) = \lambda_3 v_3$, כי אלו שני וקטורים, אחד ב־U והשני ב־$U^\perp$, שחיבורם נותן את u. סה"כ:

$$T(v) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 - \lambda_3 v_3 = p_U(v) - p_{U^\perp}(v) = r_U(v)$$

כלומר $T = r_U$ וסיימנו.

סה"כ או ש־$T = I$ או ש־$T = r_U$ כדרוש. ■

(ב) נוכיח שקיים בסיס $\mathcal{B}$ כך ש־$[r_U]_\mathcal{B} = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$.

הוכחה. נטען שזהו הבסיס הסדור $\mathcal{B} =: (u_1, u_2, v_3)$ שנתון לנו מהלמה (במקרה בו $T = r_u$) עובד.

יש לציין שבהכרח נתון בסיס כזה, שכן $(r_U)|_U = I$ כפי שהוכחנו (בפסקה הראשונה בהוכחת הלמה), התנאי היחיד על T, כלומר נוכל פשוט לבחור $T = r_U$ מקרה פרטי. אכן נבחין שמהגדרת ייצוג לפי בסיס, $[u_1]_\mathcal{B} = e_1, \ [u_2]_\mathcal{B} = e_2, \ [v_3]_\mathcal{B} = e_3$. עוד נבחין שבהכרח המקרה $T(v_3) = -v_3$ הוא התקף, אחרת $I = r_U$ וזו סתירה. סה"כ:

$$[r_U]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [Tu_1]_\mathcal{B} & [Tu_2]_\mathcal{B} & [Tv_3]_\mathcal{B} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [u_1]_\mathcal{B} & [u_2]_\mathcal{B} & [-u_3]_\mathcal{B} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & -e_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(0, 0, -1)$$

■

$(\mathbf{2})$

נמצא אילו מהפונקציות הבאות מכפלות אוקלידיות על $\mathbb{R}^2$.

(א) נתבונן בפונקציה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$$

הפרכה. עבור $v = (1, 0)$

$$-1 = -(v \cdot v) = v \cdot (-v) = 1 - 1 = 0$$

סתירה. ■

(ב) נתבונן בפונקציה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1y_2$$

הפרכה. נבחין שבעבור $v = (1, 1)$ מחיוביות $v \cdot v > 0$, אך:

$$v \cdot v = -7 \cdot 1 \cdot 1 = -7 < 0$$

סתירה. ■

(ג) נתבונן בפונקציה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1x_2$$

הפרכה. נבחין שבעבור $v = (1, 1)$ מחיוביות $v \cdot v > 0$, אך:

$$v \cdot v = -7 \cdot 1 \cdot 1 = -7 < 0$$

סתירה. ■

(ד) נתבונן בפונקציה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -7x_1^2x_2^2$$

הפרכה. נבחין שבעבור $v = (1, 1)$ מחיוביות $v \cdot v > 0$, אך:

$$v \cdot v = -7(1)^2(1)^2 = -7$$

(נ.ב. זה גם לא בילינארי כי $-7 \cdot 2 = -14 \neq (2v) \cdot v = -112$). ■

(ה) נתבונן בפונקציה:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$$

הפרכה. נבחין שעבור $v = (1, 1)$ ו־$\lambda = 2$ מתקיים:

$$8 = 9 - 1 = (2+1)^2 - (2-1)^2 = (2v) \cdot v = 2(v \cdot v) = 2 \cdot (2^2 - 2^2) = 0$$

■

$(\mathbf{3})$

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{F}$ מכפלה פנימית.

(א) נקבע $u \in V$ כלשהו ונגדיר $T \colon V \to \mathbb{F}$ ע"י $T(v) = \langle v, u \rangle$. נראה ש־$T$ לינארית.

הוכחה. יהיו $v,w\in V$ וכן $\lambda\in\mathbb{F}$. נראה ש־T לינארית.

$$T(\lambda v+w)=\langle\lambda v+w,\,u\rangle=\langle\lambda v,\,u\rangle+\langle w,\,u\rangle=\lambda\langle v,\,u\rangle+\langle w,\,u\rangle=\lambda T(v)+T(w)$$

כנדרש. ■

(ב) נוכיח ש־$S(v,u)=v\cdot u$ כאשר $S\colon V\times V$ איננה העתקה לינארית (למעשה, היא העתקה בי־לינארית).

הפרכה. נתבונן ב־$V=\mathbb{R}$ כלומר $V\times V=\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית. נסמן $v=(1,1)$ ו־$\lambda=2$. נניח בשלילה לינאריות, ואז:

$$2=2\langle 1,\,1\rangle=\lambda T(v)=T(\lambda v)=\langle(2,2),\,(2,2)\rangle=2^2\cdot 2=8$$

אך $2\neq 8$ ב־$\mathbb{R}$ וזו סתירה. ■

(4)

יהי $(v_1\ldots v_n)$ בסיס למ"ו V מעל $\mathbb{F}$. נניח ש־$B_1,B_2\colon V\times V\to\mathbb{F}$ שתיהן מ"פים כך ש־$\forall i\leq j\in[n]\colon B(v_i,v_j)=B(v_i,v_j)$. נוכיח ש־$B_1=B_2$.

הוכחה. מסימטריה של B_1,B_2, בהכרח לכל $i,j\in[n]$ מתקיים $B_1(v_i,v_j)=B_2(v_i,v_j)$. יהיו $u,w\in V$ ומהיות $v_1\ldots v_n$ בסיס בהכרח קיימים $\lambda_1\ldots\lambda_n,\mu_1\ldots\mu_n$ כך ש־$u=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i$ ו־$w=\sum_{i=1}^n\mu_iv_i$. נקבל, מבי־ליניאריות של B_1,B_2, ש־:

$$B_1(u,w)=B_1\left(\sum_{i=1}^n v_i\lambda_i,\ \sum_{k=1}^n v_k\mu_k\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_iB_1\left(v_i,\ \sum_{k=1}^n\mu_kv_k\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\lambda_i\mu_kB_1(v_i,w_i)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n\lambda_i\mu_iB_2(v_i,v_k)$$
$$=\sum_{i=1}^n\lambda_iB_2\left(v_i,\ \sum_{k=1}^n\mu_kv_k\right)=B_2\left(\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i,\ \sum_{k=1}^n\mu_kv_k\right)=B_2(u,w)$$

כלומר $\forall u,w\in V\colon B_1(u,w)=B_2(u,w)$ וסיימנו. ■

(5)

נשלים את התרגיל מתרגול 5: נביט ב־$\mathbb{R}^4$ עם המ"פ הסקלרית, ונגדיר:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\quad V=\operatorname{span}(v_1,v_2)\subseteq\mathbb{R}^4$$

ראשית כל, נמצא בסיס ל־$V^\perp$. ידוע $(x,y,z,w)\in V^\perp$ אמ"מ:

$$v_1\cdot v=0\wedge v_2\cdot v=0\to v\in\mathcal{N}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-2&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-2w-z\\2w-z\\z\\w\end{pmatrix}\mid z,w\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=:\operatorname{span}(w_1,w_2)$$

סה"כ מצאנו בסיס ל־$V^\perp$. נפעיל עליו גרם שמידט (בלי לנרמל, נדרשנו רק בסיס אורתוגונלי):

$$||w_1||=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}\quad\langle w_1,\,w_2\rangle=2-2+0+0=0$$

סה"כ w_1,w_2 אורתוגונליים אחד לשני בכל מקרה, ואין צורך לבצע גרם־שמידט (הוא יביא לאותה התוצאה). נסכם שהוקטורים הבאים הם בסיס אורתוגונלי של $V^\perp$:

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\quad\in\quad V^\perp$$

(6)

יהי V ממ"פ ויהי $v \in V$ כך ש־$\forall u \in V: \ \langle v, u \rangle = 0$. נוכיח ש־$v = 0$.

הוכחה. בפרט ידוע $\langle v, v \rangle = 0$. נניח בשלילה $v \neq 0$, ואז מאקסיומות ממ"פ נקבל $\langle v, v \rangle > 0$ כלומר $0 \neq 0$ וסתירה בכל שדה. ∎

(7)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה. בהינתן $vu \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\langle v, u \rangle_A = Av \cdot Au$, כאשר $\cdot$ המ"פ הסטנדרטית.

(א) נראה ש־$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ מ"פ אוקלידית.

הוכחה.

- נראה לינאריות ברכיב הראשון. יהיו $v, u, w \in V$ וכן $\lambda \in \mathbb{R}$. נקבל:

$$\langle \lambda v + u, w \rangle_A = A(\lambda v + u) \cdot Aw = (\lambda Av + Au) \cdot Aw = \lambda(Av \cdot Aw) + (Au \cdot Aw) = \lambda \langle v, w \rangle_A + \langle u, w \rangle_A$$

כנדרש.

- נראה סימטריות. יהיו $v, u \in V$:

$$\langle v, u \rangle_A = Av \cdot Au = Au \cdot Av = \langle u, v \rangle_A$$

- נראה חיוביות. יהי $v \neq 0$. נבחין ש־$Av \neq 0$ בגלל ש־A הפיכה. מכאן ש־$Av \cdot Av > 0$ כי $\cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ מ"פ. כלומר:

$$\langle v, v \rangle_A = Av \cdot Av > 0$$

כנדרש.

∎

(ב) נתבונן ב־$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. נגדיר $v = (1, 0)$. נמצא את $v^\perp$ ביחס ל־$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

מציאה. יהי $u \in \operatorname{span}(v)^\perp$. נדרוש $\langle v, u \rangle_A = 0$. כלומר:

$$Av \cdot Au = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

כלומר $v \perp u$ אמ"מ $u = (x, x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$, דהיינו:

$$\operatorname{span}(v)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

∎

(ג) עבור ה־A מהסעיף הקודם, נמצא בסיס אורתונורמלי ל־$\mathbb{R}^2$.

מציאה. נעשה גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי e_1, e_2. נבחין ש־:

$$Ae_1 \cdot Ae_1 = e_1 \cdot e_1 = 1$$

כלומר אין צורך לנרמל את e_1. נסמן $v_1 = e_1$. נקבל:

$$v_2 = e_2 - \langle v_1, e_2 \rangle_A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבחין ש־:

$$\langle v_2, v_2 \rangle_A = Av_2 \cdot Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

כלומר גם את v_2 אין צורך לנרמל. סה"כ $v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2$ בסיס אורתונורמלי ביחס ל־$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. ∎

(8)

יהי $V=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid \operatorname{tr}A=0\}$ מ"ו ממימד 2 של $M_2(\mathbb{R})$ (נתון בתרגיל). נמצא בסיס אורתונורמלי ל־V ביחס למכפלה האוקלידית $\langle A,\,B\rangle=\operatorname{tr}(A^TB)$.

מציאה. נבחין ש־$v_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), v_2=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), v_3=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ קבוצה בת"ל מגודל 3 של V ולכן בסיס. נבצע עליה גרם־שמידט.

נבחין ש־$v_1^Tv_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ כלומר $||v_1||=\sqrt{\langle v_1,\,v_1\rangle}=\sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{1}=1$. כלומר v_1 מנורמל ונוכל להגדיר $u_1=v_1$.

נפנה למצוא את u_2. ידוע, שעד לכדי נרמול:

$$u_2=v_2-\langle v_1,\,v_2\rangle\,v_1=v_2\qquad \langle v_1,\,v_2\rangle=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}(0)=0$$

ובגלל ש־$v_2^Tv_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, מנימוקים דומים לאלו של v_1 נקבל ש־$||v_2||=1$ ואז נוכל להגדיר $u_2=v_2$ כך ש־u_1,u_2 אורתונורמליים. נפנה למצוא את u_3.

$$\langle v_1,\,v_3\rangle=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)=0\qquad \langle v_2,\,v_3\rangle=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=0$$

$$u_3'=v_3-\langle v_1,\,v_3\rangle\,v_1-\langle v_2,\,v_3\rangle\,v_2=v_3$$

נבדוק צורך לנרמל:

$$\langle u_3',\,u_3'\rangle=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}(I)=2$$

נצטרך לנרמל:

$$u_3=\frac{u_3'}{||u_3||}=\frac{u_3'}{\sqrt{\langle u_3',\,u_3'\rangle}}=\frac{u_3'}{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

בסיס אורתונורמלי של V ביחס ל־$\langle\cdot,\,\cdot\rangle$. ■

(9)

יהי V מ"פ ו־$T\colon V\to V$ העתקה לינארית. יהי $\mathcal{B}=(v_1\dots v_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. נוכיח ש־:

$$\operatorname{tr}\left([T]_{\mathcal{B}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\langle Tv_i,\,v_i\rangle$$

הוכחה. נבחין שהפירוק של Tv_i ביחס לבסיס v_i, מטענה שהוכחנו בתרגיל הקודם (נוסחה כללית של היטל, שהפעם משתמשים בה על כל המרחב) הוא:

$$Tv_i=\sum_{j=1}^{n}\langle Tv_i,\,v_j\rangle\,v_j$$

כלומר, מהגדרת ייצוג לפי בסיס:

$$[Tv_i]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\langle Tv_i,\,v_1\rangle\\ \vdots\\ \langle Tv_i,\,v_n\rangle\end{pmatrix}$$

בפרט הקורדינאטה ה־i של $[Tv_i]_{\mathcal{B}}$, אותה נסמן ב־$([Tv_i]_{\mathcal{B}})_i$, היא $\langle Tv_i,\, v_i\rangle$. אזי, קיבלנו:

$$\operatorname{tr}\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = \sum_{i=1}^{n}([T]_{\mathcal{B}})_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}([T(v_i)]_{\mathcal{B}})_i = \sum_{i=1}^{n}\langle Tv_i,\, v_i\rangle$$

כנדרש. [כאשר השוויון האמצעי מהגדרת מטריצה מייצגת] ■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד