ליניארית 10

שחר פרץ

8 בינואר 2025

. . . . (1)

משפט. קריטריונים שקולים להפכיות מטריצה $A \in M_n(F)$:

1. A הפיכה
2. $\forall v \in F^n$ למערכת המשוואות $Ax = b$ קיים פתרון יחיד
3. $\forall b \in \mathbb{F}^n$ למערכת המשוואות $Ax = b$ קיים פתרון.
4. קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
5. למערכת $Ax = 0$ פתרון יחיד.
6. A שקולת שורות ל־I

הערה שלי: עוד כמה טענות ראינו בשיעור הקודם.

הערה 2: קצת נרדמתי אז מתישהו ההוכחה הבאה תהפוך לקצת מעורפלת

הוכחה.

$1 \Longleftarrow 2$: יהי $b \in \mathbb{F}^n$, נראה שלמערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד, בהינתן A הפיכה. אם $Ax = b$ אז באופן שקול $x = A^{-1}b$ ו־A^{-1}

$2 \Longleftarrow 3$: אם קיים פתרון והוא יחיד, בפרט קיים פתרון.

$3 \Longleftarrow 4$: נסמן $\varphi\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, $\varphi_A(x) = Ax$. אז φ_A היא על כי לכל b קיים x כך ש־$Ax = b \iff \varphi(x) = b$. גם φ_A חח"ע כלומר $\ker \varphi_A = \{0\}$. אז בעבור $b = 0$ קיים ויחיד מקור ל־0 $\varphi_A(x) = 0$, כלומר $Ax = 0$ פתרון קיים ויחידי. נניח שx, y פתרונות ל־x_1, x_2. בה"כ $A \neq q0$. נתבונן ב־α פתרון ל־Axb. ז $A(\alpha{+}_1) = b$. לכן $A(\alpha + x_1) = b$ ובפרט $\alpha \neq \alpha + x_1$ וגם פתרון בסתירה.

$4 \Longleftarrow 5$: ל־$Ax = 0$ אם יש פתרון הוא יחיד וסא לא הוא תמיד פ]==?? תמש פתרון

$1 \Longleftarrow 6$: נסמן ב־MB את המט' המדורת הקאנונית ששקולה ל־A ונראה שהיא I. אם לא, אז ל־B יש משתנה חופשי ()... הסבר, אחרת ל־B משתנה חושפי כלומר ל־B משפר פתרונות ולא אחד, ובפרט סתירה.

$6 \Longleftarrow 1$: נסתכל על $A' = B \cdot A$ עבור B הוא מכפלת המטריצות האלמנטריות ו־A' הדירוג הקאוניני. נתון שיש A שקולת שורות ל־i. אז $A' = I$. לכן A הפיכה מהטענה על הפירוק בשיערו הקודם. ■

משפט. הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה
2. עמודות A בת"ל
3. שורות A בת"ל
4. עמודות A פורשות את $\mathbb{F}^n$
5. שורות A פורשות את $\mathbb{F}^n$

הוכחה.

$1 \Longleftarrow 2$: נסמן את עמודות A ב־$A_1 \dots A - n$. נניח שקיימים $\lambda \dot{s} \lambda_n$ לא כולם אפס כך ש־$\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = 0$. אז:

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ A_1 & \cdots & A_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

מהטענה הקודמת עבור A הפיכה ל־$Ax = 0$ פתרון יחיד ו־$\lambda_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$ סתירה.

$1 \Longleftarrow 3$: נשים לב שאם A הפיכה אז A^T הפיכה, ולכן מהגרירה הקודמת נובע שעמושות A^T בת"ל.

$2 \Longleftarrow 1$: ראינו עמודות A בת"ל אמ"מ $Ax = 0$ פתרון יחיד אמ"מ A הפיכה.

$1 \Longleftarrow 3$: שורות A בת"ל, אז A^T הפיכה, ולכן A הפיכה. זאת כי שוקות בת"ל גורר עמודות בת"ל כבר הוכח, ומהסעיף הקודם.

1 $\Longleftarrow$ 4 : נסמן עמודות $A = A_1 \dots A_n$. נראה שלכל $y \in \mathbb{F}^n$ קיימים $\lambda_1 \dots \lambda_n$ כך ש־$\sum \lambda_i A_i = y$. באופן שקול $Ax = y$, קיים פתרון לכל y אמ"מ A הפיכה.

1 $\Longleftrightarrow$ 5 : A הפיכה $\Longleftrightarrow$ A^T הפיכה $\Longleftrightarrow$ עמודות A^T פורשות $\Longleftrightarrow$ שורות A^T פורשות.

■

RANK . . . . (2)

הגדרה. בהינתן $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר את דרגת השורות של A להיות הממד של התמ"ו של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י השורות של A. **הגדרה.** נגדיר את דרגת העמודות של A כתת המרחב שנפרש עמודות A.

סימון. עבור $v_1 \dots v_m$ שורות של A נסמן $\mathrm{rk}(A) := \dim(v_1 \dots v_m)$.

הערה: עבור $0 \le \mathrm{rk}(A) \le \min(m,n)$ כי:

- $\mathrm{rk}(A) \le m$ כי מרחב שנפרש מ־m וקטורים.
- $\mathrm{rk}(A) \le n$ כי ת"ו של $\mathbb{F}^n$.

משפט. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו־$B \in M_{n\times s}(\mathbb{F})$. אז:

1. $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$
2. אם A קיבועית והפיכה, אז $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B)$.

הוכחה.

1. נסמן ב־a_{ij} את האיבר ה־i,j ב־A. נסמן ב־$B_1 \dots B_n$ שורות B. נתסכל על שורות AB. נראה כי שורות AB מוכלות ב־$\mathrm{span}(B_1 \dots B_n)$ ואכן השורה ה־j של AB היא: $\sum_{i=1}^n B_i a_{ji}$

   הסבר: השורה הראשונה היא "אוף אני מסתבך בחישוב"

$$((a_1 \dots a_n)B)_1 = a_{1k}b_{k1} \dots ((a_1 \dots a_n)B)_j = \sum a_{1k}b_{kj} \implies (a1 \dots a_n)B = \sum a_{1k}k1 + \cdots$$

   הערה לעצמי: לעשות קורדינאטות ידנית אם אני מסתבך עם שורות/עמודות בהתאם הששורה ה־i:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}B_j$$

   ובפרט השורה שייכת ל־$\mathrm{span}(B_1 \dots B_s)$. לכן $\mathrm{span}(colB) \subseteq \mathrm{span}(colAB)$ כלומר $\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$.

2. ידוע ש־$\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$. נראה ש־$\mathrm{rk}(B) \le \mathrm{rk}(AB)$. נסתכל על: $A^{-1}(AB) \Longleftarrow \mathrm{rk}(A^{-1}(AB)) = \mathrm{rk}(AB)$ (משהו לא ברור)

■

משפט. עבור מטריצה מדורגת, מספר השורות השונות מ־0 הוא $\mathrm{rk}(A)$

הוכחה. כל השורות ששונות מ־0 בת"ל כי יש להן איבר פותח שהעמודה שלו אפסים, וכל השוכות ששות ל־0 תלויות. בגלל שהשורות ששונות מאפס בסיס, אז $\mathrm{rk}(A)$ שיהיה $\dim(\mathrm{span}(ColA))$ שהוא מספר השורות השונות. ■

משפט. יהי $A \in M_{n\times m}(F)$. אז $\mathrm{rk}(A^T) = \mathrm{rk}(A)$.

הוכחה. נראה שעבור B הפיכה, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(AB)$. נשים לב שהשורה ה־$i$ של AB היא בדיוק A_iB. נרצה להראות ש־$\dim(|Sp(A_i)) = \dim(\mathrm{span}(A_iB))$. נסמן ב־$v$ להיות $\mathrm{span}(\{A_i\})$ ונגדיר ת $\varphi_v \colon V \to \mathbb{F}^n$ להיות $\varphi_v(x) = xB$. אז

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim\ker\varphi_V + \dim \mathrm{Im}\varphi_V \\ &= \dim \mathrm{Im}\varphi_v = \dim\mathrm{span}(\varphi_v(A_i)) \\ &= \dim\mathrm{span}(\{A_iB\}) \\ &= \mathrm{rk}(AB)\end{aligned}$$

השוויון העליון מתקיים כי ראינו שהעתה ליניארית מעבירה סדרה פורשת לסדרה שפורשת את ה־Im ו־$\{A_i\}$ פורשת. נראה ש־φ_v חח"ע וכך נקבל ש־$\ker\varphi_v = \{0\}$. חח"ע כי $\varphi_v(x) = \varphi_v(y) \implies xB = yB \implies x = y$ כי B הפיכה. ■

נראה שעבורה A' מדורגת קאנונית $\mathrm{rk}(A') = \mathrm{rk}((A')^T)$. נסתכל על A'. ממד מרחב השורות = כמות השוכות שאינן 0 = כמות האיברים הפותחים. נראה שהעמודות עם איברים פותחים פורשות את מרחב העמודות, ושהן בתל. כך נקבל שכמות העמודות עם המרחבים הפותחים הוא ממד מרחב העמודות. "נראה לי שאני אשאיר לכם את זה לבית". בסה"כ נקבל ש־$\mathrm{rk}((A')^T) = \mathrm{rk}(A^T)$.

מסקנה. $\mathrm{rk}(AB) \le \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$

הוכחה. ראינו כבר ש־$\mathrm{rk}(AB) \le \mathrm{rk}(B)$. נראה צד שני:

$$\mathrm{rk}\, AB = \mathrm{rk}(B^T A^T) \le \mathrm{rk}\, A^T = \mathrm{rk}\, A$$

■

סימון. (מה) $\mathrm{rk}(A)$ בעבור A מטריצה, יהיה דרגת מרחב העמודות או השורות.

טענה. בעבור $A \in M_n$. מערכת משוואות $Ax = 0$. אז מימד מרחב הפתרונות הוא $n - \mathrm{rk}\, A$. אז:

$$\varphi_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n,\ \varphi_A(x) = Ax,\ \implies\ n = \dim \mathbb{F}^n = \underbrace{\dim\ker\varphi_A}_{\text{מרחב הפתרונות}} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}\varphi_A}_{n}$$

נוכיח שזה באמת שווה ל־n:

$$\mathrm{Im}\varphi_A = \mathrm{span}(\{\varphi(e_i)\}) = \mathrm{span}(\{Ae_i\}) = \mathrm{span}(Ae_i) = \mathrm{span}(A_i) = \mathrm{Col}\, A$$

הסבר: φ_n ליניארית ו־$\{e_i\}$ בסיס סטנדרטי ולכן פורש, אז $\mathrm{span}(e_i)$ פורשת את $\mathrm{Im}\varphi_A$, מטענה על ט"ל שמעבירה בין סדרות פורשות.

תרגיל. לא בהכרח אפשר להשתמש במבחן.

$$\mathrm{rk}(A+B) \le \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$$

DETERMINANTS . . . . (3)

1. רוצים "למדוד" כמה וקטורים תלויים ליניארית.
2. לחשב נפח/שטח (נפח זה שטח ממד שלישי)

הגדרה. $\det \colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא דיטרפיננטה אם מקיימת:

1. $\det I = 1$
2. אם ל־A שורות שוות, אז $\det(A) = 0$
3. $\det$ ליניארית בכל שורה, "מולטי ליניאריות":

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & A_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \alpha A_i + \beta B_i & & \\ & \vdots & \\ \cdots & A_n & \cdots \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} \cdots & A_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & A_i & \cdots \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} \cdots & A_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & A_i & \cdots \end{pmatrix}$$

משפט. לכל $n \ge 1$ יש פונ' דט' והיא יחידה: **דוגמה.**

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

נראה ש־$\det A \ne 0$ אמ"מ ל־$A\binom{x}{y} = \binom{\alpha}{\beta}$ יש פתרון לכל (α, β).

צד שמאל מתקיים אמ"מ $A \sim I$ (שקולות שורה).

אם $a \ne q0$, אז

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix} \implies A \sim I \iff d - \frac{c}{a}b \ne 0 \iff ad - cb \ne 0$$

ואם $a = 0$:

$$A \sim I \iff b \ne 0 \wedge c \ne 0 \iff ad - bc = 0 \iff bc \ne 0$$

למה. φ פעולה אלמנטרית, $\det$ דיטרמיננטה. אז:

1. φ אם החלפת שורות גורר $\det \varphi A = -\det A$
2. אם φ הכפלה בסקלר λ אז $\det(\varphi(A)) = \lambda \det(A)$
3. אם φ הוספה לשורה אחרת מוכפלת בסקלר אז $\det \varphi A = \det A$

הוכחה.

2. נובע ישירות ממולעי ליניאריות הדיטרמיננטה.
1. נסמן $A = [R_1 \dots R_n]$ שורות של A. עבור החלפת שורות R_i, R_j:

$$\begin{aligned} 0 &= \det[R_i, \dots, \underbrace{R_i + R_j}_{i}, \cdots, \underbrace{R_i + R_j}_{j}, \cdots] \\ &= \det[R_i \dots R_i, \dots R_i + R_j, \dots] + \underbrace{\det[R_i \dots R_j]}_{=0} = \det[R_i \dots R_i \dots] \end{aligned}$$

פיצול שורה i

3.

■

אוקי זה הרבה בלגן ואני לא ממש מבין מה הוא רוצה. ביי.