אלגברה לינארית 1א ~ סמסטר ב' 2025 ~ תרגיל בית 5

שחר פרץ

5 במאי 2025

$$\ldots\ldots\ldots (1) \ldots\ldots\ldots$$

(א) נתבונן בקבוצה ובוקטור הבא:

$$v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix},\ S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} =: \{v_1, v_2, v_3\}$$

מעל $\mathbb{R}$. נבחין ש־:

$$2v_3 + 3v_2 + 0.5v_1 = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = v$$

ולכן $v \in \operatorname{span} S$ וכן v קומבינציה לינארית של S בעבור $(0.5, 3, 2)$.

(ב) נתבונן בוקטור ובקבוצה הבאה:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =: \{v_1, v_2\}$$

מעל $\mathbb{R}$. נבחין ש־:

$$2v_1 + 3v_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = v$$

כלומר $v \in \operatorname{span} S$ וכן קומבינציה לינארית של S בעבור בסקלרים $\{2, 3\}$.

(ג) נתבונן במ"ו הפוקציות ב־$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. אזי $\operatorname{span}(\sin x, \cos x)$ תמ"ו. נראה ש־$\forall a \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+a) = \operatorname{span}(\sin x, \cos x)$

הוכחה. ידוע מנוסחה שראינו בתיכון:

$$\sin(x+a) = \sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a$$

נבחין ש־$\sin a,\ \cos a$ סקלרים קבועים, ולכן $\sin(x+a)$ קומבינציה לינארית של $\sin x, \cos x$. סה"כ $\sin(x+a) \in \operatorname{span}\{\sin x, \cos x\}$ כדרוש. ■

$$\ldots\ldots\ldots (2) \ldots\ldots\ldots$$

נבדוק אם הקבוצות הבאות פורשות את $\mathbb{R}^3$.

(א) נתבונן בקבוצה הבאה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

במטריצה:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ידוע שהקבוצה הנ"ל פורשת את $\mathbb{R}^3$ אמ"מ $\operatorname{rank} A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ ממשפט. אז מצאנו ש־$\operatorname{rank} A = 2$, כלומר היא אינה פורשת את המרחב.

(ב) נתבונן בקבוצה הבאה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

במטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2 \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_3]{R_2 \to R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ומטיעונים דומים לסעיף קודם הקבוצה פורשת את המרחב.

.... (3) ....

יהיו $p_1 \dots p_k \in \mathbb{N}$ ראשוניים. נוכיח ש־$\{\ln p_1 \dots \ln p_k\} \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה בת"ל במ"ו $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$.

הוכחה. נניח בשלילה שהקבוצה לעיל ת"ל. אזי קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{Q}$ סקלרים כך ש־$\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(p_i) = 0$. נסמן $\alpha_i = \frac{a_i}{b_i}$, כאשר $a_i \in \mathbb{N} \wedge b_i \in \mathbb{Z}$. נעלה בחזקת e את אגפי המשוואה, ונקבל:

$$e^{\sum_{i=1}^k \alpha_i \ln(p_i)} = e^0$$

$$\prod_{i=1}^k e^{\alpha_i \ln(p_i)} = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i} = \prod_{i=1}^k p^{\frac{a_i}{b_i}} = 1 \quad \xrightarrow{\times \sum_{i=1}^k p_i^{a_i}} \quad \prod_{i=1}^k p^{a_i} = \prod_{i=1}^k p^{b_i}$$

בה"כ $(p_i)_{i=0}^k$ וקטורים שונים אחרת נקבצם יחדיו בביטוי לעיל. אזי מהמשפט היסודי, משום הצירוף לעיל לא טרוויאלי אזי קיים $\alpha_i \neq 0$ ולכן $a_i \neq 0$, כך שהשוויון בשני אגפיו אינו שווה ל1 מה שמאפשר להפעיל את המשפט היסודי.

אזי בהכרח $a_i = b_i$ מהמשפט היסודי, ולכן $\alpha_i = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_i}{a_i} = 1$. לכן $e^k = 1$, כאשר k טבעי, ולכן סתירה. ■

.... (4) ....

תהי קבוצה סופית $S \subseteq V$ כאשר $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. נראה ש־$\operatorname{span} S \subsetneq V$.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$\operatorname{span} S = V$. אז $|\operatorname{span} S| = |V|$. ידוע קיום $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$|S| = k$ כי S סופי. נחשב את עוצמת $\operatorname{span} S$:

$$|\operatorname{span} S| = \left| \left\{ \sum_{i=0}^k S_i \alpha_i \;\middle|\; (\alpha_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k \right\} \right| \overset{(1)}{\leq} |\mathbb{R}^k| = 2^{\aleph_0} \cdot k = 2^{\aleph_0} < 2^{\left(2^{\aleph_0}\right)} = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right| = |V|$$

בסתירה לכך ש־$\operatorname{span} S = V$, כי אם זה היה נכון $|\operatorname{span} S| = |V|$. השוויון המסומן ב־(1) נכון כי קיימת פונקציה $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על, המוגדרת לפי $g = \lambda(\alpha_i)_{i=0}^k\colon \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i$.

ממשפט $\operatorname{span} S \subseteq V$ והראינו $\operatorname{span} S \neq V$ וסה"כ $\operatorname{span} S \subsetneq V$.

(הערה: הנחתי את אקסיומת הבחירה לעוצמת הרצף) ■

נבדוק האם הקבוצות הבאות בת"ל מעל כל מני שדות. בכל סעיף יהיה רצף של $\{v_1, v_2, v_3\}$ וקטורים ונחפש אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ לא טרוויאלים כך ש־$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. נבחין שזו מערכת משוואות הומוגנית לינארית המיוצגת ע"י המטריצה:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

לכן נדרש לדרג מערכת זו, ולמצוא אם יש פתרונות לא טרוויאלים בעבורה.

(א) נתבונן בקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

אז הדירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -0.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{13}{2} \cdot R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - 1R_2 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3}]{R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא כולל פתרונות שאינם טרוויאלים, ולכן הוקטורים הנ"ל **בת"ל**.

(ב) נתבונן בקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עבורה הדירוג:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} =_{\mathbb{Z}_5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 4R_3]{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

סה"כ יש שורת אפסים ולכן ישנו יותר מפתרון אחד אפשרי פרט לפתרון הטרוויאלי (שקיים לכל מערכת הומוגנית). סה"כ ישנו פתרון לא טרוויאלי ולכן הוקטורים **תלויים לינארית**.

(ג) נתבונן בקבוצה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

עבורה הדירוג:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2 \cdot R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_3]{R_2 \to R_2 - 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

סה"כ יש שורת אפסים ולכן ישנו יותר מפתרון אחד אפשרי פרט לפתרון הטרוויאלי (שקיים לכל מערכת הומוגנית). סה"כ ישנו פתרון לא טרוויאלי ולכן הוקטורים **תלויים לינארית**.

. . . . (6) . . . .

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $\{u,v,w\} \subseteq V$ סקלרים. נסמן $v=(v_a,v_b,v_c)$ וכו' עבור u,w ונוכיח בת"ליות באופן דומה לשאלה 6. נבחין את הקבוצות הבאות ת"ל או לא:

(א) נוכיח כי הקבוצה הבאה בת"ל:

$$\{u+v+w,\ 3u-w,\ \ u-v\}$$

זאת כי בעבור הקומבינציה הלינארית רצף הסקלרים הלא־טרוויאלי הבא:

$$\begin{aligned}&\alpha(u+v+w)+\beta(3u-w)+\gamma(w-v)\\ =\ &\alpha u+\alpha v+\alpha w+3\beta u-\beta w+\gamma w-\gamma v\\ =\ &(\alpha-\gamma)v+(\alpha+3\beta)u+(\alpha-\beta-\gamma)w\end{aligned}$$

וכי $\{u,v,w\}$ בת"ל, הביטוי לעיל שווה ל־0 אמ"מ:

$$\begin{cases}\alpha-\gamma=0\\ \alpha+3\beta=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&3&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצה מדורגת בלי שורות אפסים, ולכן קיים לה פתרון טרוויאלי בלבד ו־$\alpha=\beta=\gamma=0$, כדרוש.

(ב) הקבוצה הבאה בת"ל. זאת כי:

$$\begin{aligned}&\iff \alpha(v+u)+\beta(v+w)+\gamma(w+u)=0\\ &\iff \ \ \alpha v+\alpha u+\beta v+\beta w+\gamma w+\gamma u=0\\ &\iff (\alpha+\beta)v+(\gamma+\alpha)u+(\beta+\gamma)w=0\end{aligned}$$

כי $\{v,w,u\}$ בת"ל:

$$\iff\ \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \gamma+\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to Id_3\to\alpha=\beta=\gamma=0$$

כדרוש.

(ג) נראה שהקבוצה הבאה ת"ל:

$$\{2u+v+2w,\ \ v-2w,\ \ 2u+3v-2w\}:=\{a,b,c\}$$

זאת כי:

$$\begin{aligned}(1,2,-1)\to a+2b-c&=(2u+v+2w)+2(v-2w)-(2u+3v-2w)\\ &=2u+v+2w+2v-4w+2u-3v+2w\\ &=\cancel{(2-2)}u+\cancel{(1+2-3)}v+\cancel{(2-4+2)}w\\ &=0v+0u+0w=0\end{aligned}$$

סה"כ מצאנו צירוף שאינו טרוויאלי (הוא $(1,2,-1)$) כך שהקומבינציה הלינארית עם קבוצת הוקטורים (a,b,c) היא טרוויאלית.

. . . . (7) . . . .

נבחין אם הקבוצות הבאות תלויות או בת"ליות ב־$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$.

(א) נסתכל בקבוצה $\{\cos x,\ \sin x,\ e^x,\ x\}$. נוכיח שהיא בת"ל.

הוכחה. נניח בשלילה שהיא בת"ל. אז קיימים $\alpha\ldots\delta$ סקלרים כך ש־:

$$\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma_3 e^x+\delta x=0$$

$$x=\frac{\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma e^x}{\delta}$$

$$x=\Theta\left(\alpha\cos x+\beta\sin x+\gamma e^x\right)=\Theta\left(e^x\right)$$

בסתירה לכך ש־x לא נחסם מלמטה איסמפטוטית ע"י e^x. ■

(ב) נוכיח שהקבוצה הבאה ת"ל: $\{\cos^2 x,\ 1+\sin^2 x,\ 1+x+x^2,\ x+x^2\}$.

$$1\cdot(\cos^2 x)+1\cdot(1+\sin^2 x)+2\cdot(1+x+x^2)-2(x+x^2)=1+\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{=1}+2+\cancel{2x-2x}+\cancel{2x^2-2x^2}=1+1-2=0$$

על אף שרצף הסקלרים $\{1,1,2,-2\}$ אינו טרוויאלי.

(ג) נוכיח כי $\{e^x,e^{2x},e^{3x}\}$ בת"ל: נניח בשלילה שהיא ת"ל. (I הפונ' הקבועה ב־1). לכן קיימים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ קבועים כך ש־ $\alpha e^x+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}=0$. אז בפרט מתקיים שוויון פונקציות על $x=0,1,2$.

$$\begin{cases}\alpha e^0+\beta e^0+\gamma e^0=0\\ \alpha e^{1\cdot 1}+\beta e^{1\cdot 2}+\gamma e^{1\cdot 3}=0\\ \alpha e^{2\cdot 1}+\beta e^{2\cdot 2}+\gamma e^{3\cdot 3}=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha e+\beta e^2+\gamma e^3=0\\ \alpha e^2+\beta e^4+\gamma e^9=0\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\ e&e^2&e^3\\ e^2&e^4&e^9\end{pmatrix}:=A$$

דרגת המטריצה לעיל שווה לדרגת המטריצה המשוחלפת שלה:

$$\begin{pmatrix}1&e&e^2\\1&e^2&e^4\\1&e^3&e^9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&e&e^2\\0&e^2-e&e^4\\0&e^3-e&e^9-e^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{e^2-e}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{e^4}{e^2-e}\\0&e^3-e&e^9-e^2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-(e^2-e)R^2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{e^4}{e^2-e}\\0&0&*\end{pmatrix}$$

מהיות הצורה מדורגת (אם כי לא קאנונית), מכאן ניתן כבר להבחין כי דרגת המטריצה היא 3, ועל כן גם $\operatorname{rank}A=3$ זו צורת המטריצה ועל כן קיימת לה צורה מדורגת קאנונית עם 3 איברים פותחים, במילים אחרות, $\alpha=\beta=\gamma=0$ ואכן רצף הסקלרים טרוויאלי בהכרח.

(ד) נסתור בעבור בת"ליות $k\geq 3$

הוכחה. נתבונן בוקטורים הבאים:

$$\begin{aligned}&-2(x^2+x-1)+4(x^2+x-2)+-2(x^2+x-3)+\sum_{i=4}^{k}0(x^2+x-i)\\ =&-2x^2-2x+2+4x^2+4x-8-2x^2-2x+6\\ =&\cancel{(-2+4-2)}x^2+\cancel{(-2+4-2)}x+\cancel{(2-8+6)}\\ =&\,0\end{aligned}$$

בהכרח לכל $k\geq 3$ הראינו שהקבוצה ת"ל. עבור $k=1$ הקבוצה בת"ל באופן מידי ועבור $k=2$ נכון כי הוקטורים אינם נבדלים בסקלר. סה"כ עבור $k=1,2$ הוקטור בת"ל ו־$k\geq 3$ הקבוצה ת"ל. ■

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד