לינארית 1א ~ תרגיל בית 7 ~ סמסטר ב' 2025

שחר פרץ

19 במאי 2025

.... (1) ....

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נוכיח $\operatorname{rank}(A+B+AB) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

הוכחה. יהיו $A, B \in M_n(F)$. נוכיח שתי למות.

- **למה 1: $\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.** נוכיח את הלמה. נבחין ש־$v \in \operatorname{Col}(A+B)$ אמ"מ $\exists x\colon (A+B)x = v$ כלומר $Ax + Bx = v$, ובפרט $v \in \operatorname{Col} A + \operatorname{Col} B$. לכן $\operatorname{Col}(A+B) \subseteq \operatorname{Col} A + \operatorname{Col} B$. ממשפט הממדים:

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B) &= \dim \operatorname{Col}(A+B) \le \dim(\operatorname{Col} A + \operatorname{Col} B)\\ &= \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Col} B - \dim \operatorname{Col}(A \cap B)\\ &\le \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Col} B\\ &= \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B\end{aligned}$$

  כדרוש.

- **למה 2: $\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$.** לשם כך נוכיח קודם כל $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank}(AB)$. ידוע $\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Col}(AB)$, ולכן קיים B בסיס מגודל $\dim \operatorname{Col}(AB)$ כך ש־$\operatorname{span} B = \operatorname{Col}(AB)$. נסמן $B = (v_i)_{i=1}^k$, אזי $(ABv_i)_{i=1}^k$ בת"ל באופן שקול. נניח בשלילה $(Av_i)_{i=1}^k$ איננו בת"ל, אזי קיימת קומבינציה לינארית $(\lambda_i)_{i=1}^k$ כך ש־$\sum \alpha_i A v_i = 0$. נכפיל ב־B ונקבל מדיסטרבוטיביות $\sum \alpha_i ABv_i = 0 = 0B$, כלומר $(ABv_i)_{i=1}^k$ ת"ל וזו סתירה. סה"כ $(Av_i)_{i=1}^k$ בת"ל, ומהגדרת כפל מטריצה בוקטור זהו בסיס ל־$\operatorname{Col} A$ ולכן $\dim \operatorname{Col} A \ge \dim \operatorname{Col}(AB)$. סה"כ מהגדרת rank נסיק $\operatorname{rank} A \ge \operatorname{rank}(AB)$. מהמשפט שעתה הוכחנו:

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}((AB)^T) = \operatorname{rank}(B^T A^T) \le \operatorname{rank}(B^T) = \operatorname{rank} B$$

  ולכן $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} A \wedge \operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank} B$, כלומר $\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$ כדרוש.

למען האמת אני לא בטוח שאני צריך את שתי הלמות אבל כבר הוכחתי אותן. נבחין ש־:

$$B =: \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & \cdots & | \end{pmatrix} \implies AB + A = \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ A(v_1+1) & \cdots & A(v_n+1) \\ | & \cdots & | \end{pmatrix}$$

משום ש־$\forall v\colon Av \in \operatorname{Col} A$ אז $\operatorname{Col}(AB+A) = \operatorname{Col}(A)$. אזי:

$$\operatorname{rank}(A+B+AB) = \dim \operatorname{Col}(A+B+AB)) \le \dim \operatorname{Col}(A+AB) + \dim \operatorname{Col} B = \dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Col} B = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

(בסוף השתמשתי רק בלמה 1) כדרוש. ■

.... (2) ....

נמצא בסיס למרחב השורות ולמרחב העמודות של המטריצות הנתונות מעל הממשיים:

.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **מרחב שורות.** נרצה למצוא בסיס:

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Row}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \operatorname{Row}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

  סה"כ מצאנו בסיס $\{(0,1,2),(0,0,1)\}$.

- **מרחב העמודות.** נבחין כי מרחב העמודות חסום בגודל 2, וכן שהוקטורים $\left\{\binom{1}{0},\binom{1}{1}\right\}$ בת"ל, הם בסיס ל־$\operatorname{span}\left\{\binom{1}{0},\binom{1}{1}\right\} = \operatorname{span}\left\{\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{2}{2}\right\} = \operatorname{Col}\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\0&1&2\end{smallmatrix}\right)$ (כי $\binom{1}{1}$ ו־$\binom{2}{2}$ ת"ל עבור פקטור של 2), כדרוש.

.2

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$$

בזמן דירוג מרחב השורות לא ישתנה.

- **מרחב השורות:**

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -2 & \lambda-3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & \lambda-3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

נפריד למקרים.

  - אם $\lambda - 1 = 0$, אז זוהי צורה מדורגת ולכן:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\\lambda-1\end{pmatrix}\right\}$$

  - אחרת, $\lambda - 1 = 0$, כלומר:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

בגלל ש־$\binom{2}{1}$ תלוי לינארית ב־$\binom{1}{0},\binom{0}{1}$, אז:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

פורש את המרחב.

- **מרחב העמודות:** באופן דומה, נדרג את הטרנספוז:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -2\\ 0 & -3 & \lambda-3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & -3 & \lambda-3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+3R_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

כמו פעם קודמת, נפריד למקרים.

  - אם $\lambda - 1 = 0$, אז המטריצה מדורגת ולכן הקבוצה הבאה פורשת את מרחב השורות:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\\\lambda-1\end{pmatrix}\right\}$$

  - אחרת, הקבוצה לעיל תלויה לינארית, ולכן ממד מרחב השורות הוא 2. בגלל ששני הוקטורים הבאים נמצאים בו, והם בת"לים:

$$\left\{\{100\},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

הם פורשים את המרחב, כדרוש.

המשך בעמוד הבא

(3)

נניח ש־$v_1 \dots v_n \in \mathbb{F}^n$ וקטורי עמודה בת"ל. נוכיח $A := \sum_{i=1}^n v_i \cdot v_i^T$ מקיימת $\operatorname{rank} A = n$.

הוכחה. תהי $(v_1 \dots v_k)$ בת"ל. נמצא את דרגת A $A = v_1 v_1^T + \dots + v_k v_k^T$. נסמן ב־$B_i$ להיות השורה ה־i במטריצה כלשהי B.

למה 1. $\forall i \in [n]\, \forall k \in [n]\, \exists a_{ik} \colon (v_i v_i^T)_k = a_i v_i$. נוכיחה:

$$(v_i v_i^T)_{ik} = \sum_{j=1}^n v_{ik} v_{ji} \implies (v_i v_i^T)_k = (v_k v_i)_{i=1}^n = v_i \cdot \underbrace{(v_i)_k}_{:=a_{ik}} = v_i a_{ik}$$

ניעזר בסימון $\alpha_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}$. נבחין

נניח בשלילה ששורות A ת"ל. אזי קיימת קומבינציה לינארית $\lambda_1 \dots \lambda_n$ כך ש־:

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \left(\sum_{k=1}^n v_i v_i^T \right)_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \left(\sum_{k=1}^n v_i a_{ki} \right)_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i v_i \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i \alpha_i}_{:=m_i} v_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i$$

זוהי קומבינציה לינארית לא טרוויאלית של וקטורים בת"לים ולכן אינה שווה ל־0, וסתירה כדרוש. ∎

(4)

נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & m-1 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

נמצא עבור אילו ערכים $v := (1,1,m) \in \operatorname{Col} A$. נבחין ש־$\exists x \colon Ax = v$ אמ"מ $v \in \operatorname{Col} A$. לכן, יהיה $x \in \mathbb{R}^3$, נמצא מתי $Ax = v$:

$$Ax = v \to \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & 2 & m \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - mR_1]{R_2 \to R_2 - mR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & 0 & 1 \\ 0 & -m^2+m & 1 & 1-m \\ 0 & -m^2+m & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & 0 & 1 \\ 0 & -m^2+m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-m^2+m}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{-m^2+m} & \frac{1-m}{-m^2+m} \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \end{array}\right)$$

וזוהי מטריצה מדורגת, כלומר קיימת צורה מדורגת קאנונית כך שמצאנו ערכים מתאימים ל־x. אך, הנחנו הנחות כדי להגיע לכך. נראה מה קורה אם הנחות אילו לא מתקיימות:

- אם $m = 0$, אז:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר $\exists \alpha \colon 1\alpha = 1 \wedge 2\alpha = 0$. מהמשוואה הראשונה $\alpha = 1$ ולכן $2 = 2\alpha = 0$. נחלק ב־2 ונקבל $1 = 0$ וזו סתירה.

- אם $-m^2 + m \neq 0$, או באופן שקול $m = 0 \vee m = 1$ (כבר הנחנו $m = 0$, לכן נבדוק מקרה בו $m = 1$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

מערכת משוואות עם הפתרון $x = (1, \alpha, 0)$.

סה"כ מצאנו ש־$v \in \operatorname{Col} A$ אמ"מ $m \neq 0$.

המשך בעמוד הבא

בכל סעיף נקבע האם ההעתקה המתתוארת היא לינארית.

(1) נוכיח ש־$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המתוארת ע"י $T\binom{x}{y} = \binom{x}{|y|}$ איננה לינארית. נוכיח סתירה להומוגניות חיבור. אם היא הייתה לינארית, אז:

$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\|1|\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\|-1|\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1+1\\-1+1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\|0|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

מהמשפט היסודי של זוג סדור $2 = 0$, נחלק ב־2 ונקבל $1 = 0$ וזו סתירה.

(2) נוכיח שההעתקה הבאה לינארית:

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_{n-1}\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\ \vdots \\ x_{n-1}+x_n\\ x_n+x_1\end{pmatrix}$$

נוכיח זאת באמצעות כך שנראה שהיא מיוצגת ע"י מטריצה. נסמן ב־E את הבסיס הסטנדרטי ל־$\mathbb{R}^n$. אזי:

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

מקיימת מהגדרת כפל מטריצה בוקטור ש־$A = [T]_E^E$ (כלומר, שלכל x מתקיים $Ax = T(x)$, וכך נדע ש־T לינארית – כי חיבור וכפל מטריצות הוא לינארי). נראה שהמטריצה הפיכה:

$$\det A \xrightarrow[R_{i-1}\to R_{i-1}-R_i]{\forall i\in\{n\ldots 2\}} \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = 2(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} = 2\cdot\det I = 2$$

סה"כ $\det A \neq 0$ ולכן המטריצה הפיכה, כלומר $\operatorname{rank} A = n$. קל לראות ש־$\operatorname{rank} A = \dim\operatorname{Col} A = \dim\operatorname{Col}\operatorname{Im} T$ כי $\operatorname{Col} A = \Im T$, ולכן ממשפט הממדים להעתקות לינארית:

$$\dim\operatorname{Im} T + \dim\ker T = n \implies n + \dim\ker T = n \implies \dim\ker T = 0$$

וסה"כ $\ker T = \{0\}$ מרחב האפס, ו־$\operatorname{Im} T = V = \mathbb{R}^n$ המרחב.

(3) נוכיח שההעתקה $T\colon \mathbb{R}_{\le n}[x] \to \mathbb{R}_{\le n}[x]$ המוגדרת ע"פ $T = p(x) + x^2 - x$ איננה העתקה לינארית. נסתור הומוגניות לכפל בסקלר, בעבור $n = 3$. נניח בשלילה שהיא לינארית:

$$2x^3 + x^2 - x = T(2x^3) = T(2\cdot x^3) = 2T(x^3) = 2(x^3 + x^2 - x) = 2x^2 + 2x^2 - 2x$$

נחסר אגפים ונקבל $x^2 - x = 0$, אך זהו איננו פולינום האפס וסתירה.

(4) נוכיח שההעתקה $T\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}),\ T\colon A + A^T$ לינארית:

- **הומוגניות כפל בסקלר.** $\forall\lambda\in\mathbb{R}\,\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, מתקיים: $\lambda A + \lambda A^T = T(\lambda A) = \lambda T(A) = \lambda(A + A^T) = \lambda A + \lambda A^T$
- **הומוגניות חיבור.** $\forall A, B\in M_n(\mathbb{R})$, מתקיים: $A + A^T + B + B^T = A + B + A^T + B^T = (A+B) + (A+B)^T =$ $T(A+B) = T(A) + T(B) = A + A^T + B + B^T$

עתה נראה ש־$\ker T = \operatorname{ASym}_n(\mathbb{R})$ ו־$\operatorname{Im} T = \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$. לכל $M \in \operatorname{ASym}(\mathbb{R})$ מתקיים קיום $A \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש־M החלק האנטי־סימטרי של A, כלומר:

$$T(M) = T\left(\frac{A - A^T}{2}\right) = \frac{A - A^T}{2} + \left(\frac{A - A^T}{2}\right)^T = \frac{A - A^T - A + A^T}{2} = 0$$

כלומר $\ker T \supseteq \operatorname{ASym}_n(\mathbb{R})$. עתה נראה $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$. לכל $M \in M_n(\mathbb{R})$, מתקיים:

$$T\left(\frac{M}{2}\right) = \frac{M}{2} + \left(\frac{M}{2}\right)^T = \frac{M + M^2}{2} \in \operatorname{Sym}_n(\mathbb{R})$$

נניח בשלילה $\dim\ker T \neq \frac{n^2-n}{2} \land \dim\operatorname{Im}T \neq \frac{n^2+n}{2}$: ידוע $\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) \subseteq \ker T$ ולכן $\frac{n^2-n}{2} = \dim\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) < \dim\ker T$ (אי־שוויון חזק מהנחת השלילה), ובאופן דומה $\frac{n^2+n}{2} < \operatorname{Im}T$:

$$n = \dim\mathbb{R}^n = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im}T < \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^2+n}{2} = n \implies n < n \implies 0 < 0$$

וזו סתירה. לכן:

- אם $\dim\ker T = \frac{n^2-n}{2}$, אז $\dim\operatorname{Im}T + \dim\ker T = n \implies \dim\operatorname{Im}T = n - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \dim\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.
- אם $\dim\operatorname{Im}T = \frac{n^2+n}{2}$, אז $\dim\ker T + \dim\operatorname{Im}T = n \implies \dim\ker T = n - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \dim\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$.

לכן סה"כ:

$$\begin{aligned}
\dim\ker T = \dim\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) \land \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) \subseteq \ker T &\implies \boldsymbol{\ker T = \mathrm{ASym}_n}(\mathbb{R}) \\
\dim\operatorname{Im}T = \dim\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \quad \land \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subseteq \operatorname{Im}T &\implies \boldsymbol{\operatorname{Im}T = \mathrm{Sym}_n}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

כדרוש.

.... (6) ....

יהיו U,V מ"ים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T\colon V \to U$ לינארית. נוכיח מספר טענות.

- אם $(v_i)_{i=1}^n \subset V$ קבוצת וקטורים ו־$(T(v_i))_{i=1}^n$ בת"ל, נראה $(v_i)_{i=1}^n$ בת"ל.

הוכחה. יהיו וקטורים והעתקה כמתואר לעיל. נניח בשלילה $(v_i)_{i=1}^n$ ת"ל, אזי קיימת קומבינציה לינארית $(\lambda_i)_{i=1}^n$ כך ש־$\sum \lambda_i v_i = 0$ לא טרוויאלית. לכן, (חוקי משום ששני המרחבים מעל אותו השדה, אז הכפל בסקלר מוגדר היטב) מלינאריות:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = T(0) = 0$$

ובכך מצאנו קומבינציה לינארית לא טרוויאלית של $(T(v_i))_{i=1}^n$ כך ש־$\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = 0$, לכן $(T(v_i))_{i=1}^n$ ת"ל, אך נתון שהיא בת"ל וסתירה. לכן $(v_i)_{i=1}^n$ בת"ל כדרוש. ■

- נוכיח שאם $v_1 \dots v_n$ בת"ל ו־T חח"ע, אז $Tv_1 \dots Tv_n$ בת"ל.

הוכחה. נניח בשלילה $Tv_1 \dots Tv_n$ ת"ל. אזי קיימת קומבינציה לינארית $\lambda_1 \dots \lambda_n$ כך ש־$\sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = 0$. לכן, מלינאריות:

$$\ker T = \{0\} \land \sum_{i=1}^n \lambda_i T v_i = 0 \implies T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$$

כאשר $\ker T = \{0\}$ כי T חח"ע. משמע, סה"כ מצאנו קומבינציה לינארית $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ל־$v_1 \dots v_n$. דהיינו $v_1 \dots v_n$ ת"ל וכן נתון להיות בת"ל כלומר סתירה, ו־$Tv_1 \dots Tv_n$ בת"ל כדרוש. ■

.... (7) ....

תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונסמן $\operatorname{rank} A = r$. נוכיח את הטענות הבאות:

- נוכיח קיום מטריצות $A_1 \dots A_r \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ כך ש־$\operatorname{rank} A_i = 1$ לכל i ומתקיים $A = \sum_{i=1}^r A_i$.

הוכחה. ידוע $\dim\mathrm{Row}\,A = r$, ולכן קיימת קבוצה של r שורות כך ש־$\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_r$ יוצרות את $\mathrm{Row}\,A$ (כאשר A_i מטריצה בעלת שורה של A כלשהי, והשאר אפסים, ותקרא "מטריצה שורה"), ונבחין כי $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_r$ בסיס ל־$\mathrm{Row}\,A$ כך ש־$\operatorname{rank} A_i = 1$ (כי ישנה רק שורה אחת בכל מטריצה שאיננה אפסים). בפרט, כל מטריצת שורה אחרת כלשהי $\tilde{A}_{i>r}$ תקיים $\tilde{A}_{i>r} \in \mathrm{Row}\,A$ ולכן נוצרת ע"י $\tilde{A}_1 \dots \tilde{A}_r$, מהקומבינציה הלינארית $\lambda_{i1} \dots \lambda_{in}$. נסמן $\forall i \in [r]\colon A_i = (\sum_{k=1}^n \lambda_{ik})\tilde{A}_i$. אזי:

$$\sum_{i=1}^r A_i = \sum_{i=1}^r \left(\tilde{A}_i \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}\right) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^r \lambda_{ik}\tilde{A}_i}_{\tilde{A}_i} = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_i = A$$

(כאשר $\sum_{k=1}^n \tilde{A}_i = A$ כי אלו כל n שורות A)וכן בכלל ש־$\operatorname{rank}\tilde{A}_i = 1$ ו־A_i תלויה לינארית בעבור הקבוע $\sum_{k=1}^n \lambda_{ik}$ ב־־$\tilde{A}_i$, אז $\operatorname{rank} A_i = 1$. סה"כ מצאנו רצף של $A_1 \dots A_r$ מטריצות כך ש־$\sum_{i=1}^r A_i = A$ וכן $\operatorname{rank} A_i = 1$ כדרוש. ■

- נניח $k < r$ ונוכיח שלא קיימות מטריצות $A_1 \dots A_k \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ כך ש־$\sum_{i=1}^k A_i = A \land \operatorname{rank} A_i = 1$.

הוכחה. נניח בשלילה שקיימות מטריצות כאלו. עבור מטריצה כלשהי A_i משום ש־$\operatorname{rank} A_i = 1$, קיים וקטור $v_i \in \mathbb{R}^m$ כך ש־$\operatorname{Row} A_i = \operatorname{span} v_i$. ובפרט, כל וקטור שורה $(A_i)_j = \lambda_{ij} v_i$ השורה ה־j ב־A_i שכן $(A_i)_j \in \operatorname{Row} A_i$.

עתה נראה $\operatorname{Row} A \subseteq \operatorname{span}\{v_i \ldots v_k\}$: לכל $w \in \operatorname{Row} A$, מתקיים:

$$w \in \operatorname{span}\left\{(A_i)_j \mid i,j \in [k] \times [n]\right\} = \operatorname{span}\{\lambda_{vi} v_i \mid i,j \in [k] \times [n]\} = \operatorname{span}\{v_i \mid i \in [k]\}$$

כדרוש. מכלה $\operatorname{span}\{v_i \mid i \in [k]\} \subseteq \operatorname{Row} A$ ולכן $k \leq \dim \operatorname{Row} A$, אך $k \leq r \land r < k$ סתירה כדרוש. סה"כ לא קיימות מטריצות כמתואורות לעיל כדרוש. ■

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד