

חדו"א 1 ו' 5

שחר פרץ

23 בנובמבר 2025

טורים

כל סדרה ניתנת לייצוג כטור. זו דרך אחרת להציג סדרות. הגדרה 1. תהא a_n סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של a_n להיות:

$$\forall n \in \mathbb{N}: S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הבחנה: כל סדרה היא סדרת סכומים חלקיים של איזושהי סדרה.

הוכחה. תהא a_n סדרה, נגדיר את:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_{n+1} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

נקבל שהסכום הטלסקופי:

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_n$$

از מעשה אין שום דבר חשוב בסכום עצמו. מה שחשיבות זה הקשר בין הסדרה עצמה לבין סדרת הסכומים החלקיים שלה. סימן 1. תהא a_n סדרה. תהי ב- S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n . אז אם S_n מתכנסת לגבול $\ell \in \mathbb{R}$ נאמר כי הטור מתכנס, ונסמן:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

הבחנה חשובה: הסימן הזה של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ משמש אותנו להגיד שהטור לא מתכנס, כלומר נאמר "לא מתכנס" גם אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. זאת ביגוד לגבולות, שם אנחנו לא ממש יכולים לכתוב " $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ " לא $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

• דוגמה: יהיו $q \in \mathbb{R}$ כך $q \neq 1$ ונגדיר $a_n = q^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נסמן ב- S_n את סדרת הסכומים החלקיים. אז:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+: S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

לכן הטור מתכנס אם ויחד $|q| < 1$ (הוכחנו את זה בתרגיל הבית) ואז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{q-1}$$

• דוגמה 2: נגדיר $a_n := \frac{1}{n(n+1)}$ ונסמן ב- S_n את סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל- a_n . נבחן שמדובר בשותף:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ואז (סכום טלסקופי):

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{לכל } k \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

$$\text{מכאן אפשר להוכיח ש- } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ מתכנס (עשינו את זה גם בתרגול).}$$

אלו לפחות או יותר הדוגמאות היחידות (גיאומטרי וטילסקופי) שנראה בקורס הזה לגבי משחו שאשכלה מתכנס. בד"כ נרצה לדעת האם טור מסוימים הוא מתכנס או לא. כשייהו לנו אינטגרלים (בחדו"א 2) יהיה לנו קצת יותר כוח להוכיח טורים. אבל כמו הרבה דברים בחדו"א, גם זה לא תמיד יספיק.

קריטריון קושי להתכנסות טורים

תהא a_n סדרה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם"מ:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \forall N \leq n \leq m: \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

$$|S_n - S_{m+1}|$$

זה לא מעניין בכלל. זה פשוט קריטריון קושי לסדרות, אבל על סדרת הסוכמים החלקיים.

מסקנה 1. תהא a_n סדרה. אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ מתקנס, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

הערה 1. הצד השני לא מתקיים, לדוגמה עבור $a_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n \rightarrow \infty$ למרות ש- $0 \rightarrow n^{-1}$. בדומה לגבולות של סדרות, שינוי של מספר סופי של איברים (בסדרה המקורי) אולי ישנה את הגבול (כי סוכמים כאלה), אבל לא עומדת לשנות את התכנסות.

משפט 1. הטור הוא לינארי, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים.

זה נובע ישירות מריתמטיקה של גבולות, על סדרת הסוכמים החלקיים.

התכנסות בהחלה

כאן יש שאכלה הגדירה חדשה.

הגדרה 2. תהא a_n סדרה. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כהחלט כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט 2. אם טור מתכנס בהחלה, אז הוא בפרט מתכנס.

אין לנו שום דבר חכם להגיד על הקשר בין הגבולות של שניים. עם ננסת להוכיח עם סנדוויץ' (תנשו), נכשל במהרה. יש כאן צורך בקסם, שיפלו לנו גבול מהשניים, וזה בדיקת מה שקשירות השלומות מספקת לנו. ספציפית, השתמש בקריטריון קושי שתלי בפה.

הוכחה. תהא a_n סדרה, ונניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלה. מקריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-:

$$\forall n \geq m \geq N: \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$$

נתבונן ב- N . יהיו $n \geq m \geq N$. מא"ש המשולש המוכלל:

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \varepsilon$$

ס"ה ב- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתקנס. ס"ה מושגנו ב- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.



טורים א"ש-ילידיים

יש פרק שלם בטורים שעוסק בטורים שומרי סימן (איברים גדולים ממש מואפס או קטנים ממש מואפס. לצורך הנוחות מתעסק במקרה הראשון). יש להה שתי סיבות:

- בغالל הנושא של התכנסות בהחלה.
- זה מקרה נפוץ שקורה הרבה בעולם האמתי.
- יש משפטיים מועילים על זה.

בהרבה מהמקרים נדרש א"ש-ילידיים בכל N גם אם זה נכון רק החל מ- N ממשיים.

"אפס הוא חיובי יחסית"

משפט 3. תהא a_n סדרה, ונניח ש- $0 \in \mathbb{N}$: $a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. אז אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה. זה דורש את אקסימות השלומות) אין כאן אשבירה הוכחה. אם $0 \geq a_n$ אז סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה, ומשפט (ויראשטרהס 1) כל הסיפור הזה מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

נתעסק קצת בקריטריוני השווהה.

1. תהינה a_n, b_n סדרות אי-שליליות. נניח כי $a_n \leq b_n$, לא צריך לכל \mathbb{N} , מספיק כמעט תמיד. ההוכחה קצת שונה אבל כמעט תמיד יותר חזק). אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מותכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מותכנס.

הוכחה. נניח ש- b_n מותכנס ל- ℓ . ידוע b_n מונוטונית וכך מוכנסת לספרום שלה, ונסיק:

$$\sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n b_k \leq \ell$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מונוטונית עולה וחסומה ולכן מותכנסת (יש כאן שימוש באקסימות השלומות).

2. נניח $0 > b_n > \forall n \in \mathbb{N}$: (b_n חיובית ממש!) ונניח $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \ell$. כמו כן $0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מותכנס. הוכחה. נוכחים רק כיון אחד, והכיון שהשני יגרר מאריתמטיקה של גבולות (נهاוף את $\frac{a_n}{b_n}$ וזה חוקי כי a_n ממוקם מסוים לא נוגע ב-0 כי $0 \neq \ell$). קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2\ell}$$

(הריאנו שזה נכון באופן כללי לפחות שגדל מ- ℓ + התנו אי-שליליות). לעומת כן $a_n < \frac{3\ell}{2\ell} b_n$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ell}{2} b_n$ מותכנס.

3. **מבחן השורש:** תהא a_n סדרה אי-שלילית. נניח כי קיים $q \in (0, 1)$ כך $\sqrt[q]{a_n} \leq q$ $\forall n \in \mathbb{N}$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מותכנס.

הוכחה. לכל $\mathbb{N} \in n$ נבחן ש- $a_n \leq q^n$, ומבחן השווהה עם הטור הגיאומטרי (שמותכנס) סיימנו.

4. **מבחן השורש הגבולי:** תהא a_n סדרה אי-שלילית. נניח ש- $\sqrt[q]{a_n} < q \in [0, 1]$: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{a_n} < q$ אז מותכנס.

הערה 2. זה משפט קצת יותר חזק מהקודם.

הערה 3. שני מבחני השורש כיוון אחר – אם $1 < q$ אז הטור מתבדר.

הוכחה. ידוע $1 < q < 1$ אז $\sqrt[q]{a_n} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{a_n} + \frac{1-q}{2}$ כמעט תמיד. לכן $\sqrt[q]{a_n} < \frac{1+q}{2}$ כמעט תמיד. אז $a_n < \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ כמעט תמיד, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ מותכנס.

5. **מבחן המנה:** נניח $0 > a_n$ (כמעט תמיד) וכי $q \in (0, 1)$, ונניח $q \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (כמעט תמיד) אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מותכנס.

הוכחה. השורה התחתונה של ההוכחה היא:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq q^n \cdot a_1$$

ואז מבחן השווהה.

6. **מבחן המנה הגבולי:** יהיו $0 < m < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell < 1$. נסמן $a_n > 0$ אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מותכנס, ואם $1 > m > \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אז מבחן המנה לא מתקיים.

הוכחה. לבית.

דוגמה: האם הטור $a_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$ מותכנס? נסמן ב- ℓ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} n!}{n^{\frac{n}{2}} (n+1)!} = \frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}} \rightarrow \sqrt{e \cdot 0} = 0$$

לכן $1 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. ממשפט המנה הגבולי נקבל שהוא מותכנס.

קירוב סטרליינג

קירוב סטרליינג אומר ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{e\pi n}} = 1$$

איןטואיטיבית, זה אומר ש- n עצרת בגבול מתנהג כמו החזקה $\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$. לא נוכחים אותו – המריצה לא מודעת אף להוכחה שמשתמשת בכלים שלמדנו.

עתה נפטרור את התתרגיל ממקודם, של $b_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}}$, באמצעות קירוב סטירלינג ובחן השורש הגבולי. נגידר נקבע:

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\underbrace{\frac{n}{e} \cdot (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}_1} \rightarrow 0$$

כמו כן לפי סטרליינג:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{n/2}}{n!}}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

לכן לפי משפט ההשוואה הגבולי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!}$ מתכנס.

למעשה יש עודבחן לטורים איז-שליליים שלא הזכרנו.

9. תהא a_n סדרה מונוטונית יורדת ואיז-שלילית אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ מתכנסת. הוכחה. \Rightarrow נניח שהטור מתכנס. יהי $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n 2^k a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{2^k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^{2^k-1} a_{2^{k-1}+\ell} = 2 \sum_{k=2}^{2^n} a_k \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

וכזה מהבחן הראשון סיימנו שוב.

\Leftarrow נניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n}$ מתכנס. נוכיח ש-

$$\sum_{k=1}^n \leq \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} a_{2^k+\ell} \leq \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}$$

כאן, נחליף באיבר הראשון.



אז למה אנחנו צריכים אתבחן העיבוי?

• עבור $1 \leq \alpha$ הראינו ש- $\sum \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ ולכן $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מותבדר.

• עבור $2 \geq \alpha$ הראינו ש- $\sum \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ ולכן $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס.

מה לגבי כל מה שבין 1 ל-2?

משפט 4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אם $\alpha > 1$.

הוכחה. יהי $0 < \alpha$. אז $\frac{1}{n^\alpha}$ מונוטונית יורדת וחובייה. נסמן $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. אז:

$$b_n = 2^n a_{2n} = \frac{2^n}{n^{\alpha n}} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})^n$$

נבחן ש- b_n גיאומטרי. הוא מתכנס אם $1 < 2^{1-\alpha} < 1$. עוד ידוע ש- b_n מותכנס אם a_n מותכנס מבבחן העיבוי, ושה"כ מותכנס אם $\alpha > 1$.



נעשה עוד תרגיל, אולי קצת פחות מעיל.

תרגיל 1. האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס? (בסיס הלוגורייתם לא משנה)

הוכחה. נגידר $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. ניעזר בבחן העיבוי:

$$2^n a_{2n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = (n \ln 2)^{-1} \rightarrow \inf$$

לכן גם $\sum 2^n a_{2n}$ מותבדר שכן a_n מותבדר.



טורים משני סימן

כל מה שאמרנו על שומר סימן נכון על מי שומר סימן כמעט תמיד. ככלומר אלו שלא נופלים לקטגוריה זו, הטורים משני הסימן, מחליפים סימן באופן שכיח. הטורים הראשונים שנדבר עליהם הם כאלה שלא רק משנים סימן באופן שכיח, אלא ממש כל מעבר.

משפט 5 (משפט ליבניץ). תהא a_n סדרה חיובית ומונוטונית יורדת שגבולה 0. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

מתכנס.

התובנה החשובה בהוכחה היא שאפשר לדעת את המרחק מהגבול, בכל נקודה בסכום, גם אם קשה לחשב אותו. "אבל המבחןים לא עובדים לי. [תשובה: אויויו]."

אנחנו לא יודעים מה הגבול, אנחנו לא רוצים לדעת מה הגבול, המבחןים עובדים רק לדברים משמרי סימן... נשארנו עם כושי. הוכחה. יהיו $\varepsilon > 0$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$. נתבונן ב- N . יהיו $m \geq n \geq N$. השטיק יהיה שהזוגות $(a_k - a_{k-1}) < 0$:

• אם $m - n$ זוגי נקבל:

$$\begin{aligned} & a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\ & = a_m + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+3}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) < a_m < \varepsilon \end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} & a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\ & = (a_m - a_{m+1}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_1 \geq a_n > 0 > -\varepsilon \end{aligned}$$

לכן:

$$\left| \sum_{k=m}^n (-1)^k a_k \right| = \left| \sum_{k=m}^n (-1)^{k-m} a_k \right| < \varepsilon$$

• אם $m - n$ אי-זוגי נקבל הוכחה דומה.



מההוכחה, ניתן להסיק:

$$\ell := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \implies \forall n \in \mathbb{N}: \left| \ell - \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

מכאן, ש- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס, ולא בהחלטת. על טור זהה, אומרם שהוא מתכנס בתנאי.

למאלנו, לאור הcin לunganנו עוד קритריונים מרתקים לשיעור, והם הכללה של קритריון ליבניץ. האחד קритריון דיריכלה והשני אבל.

קriterion אבל

תהיינה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. b_n מונוטונית (יורדת) (אבל לא בהכרח גבול 0).

2. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

לבית – יש להוכיח שקriterion אבל נובע מkritterion דיריכלה.

0.0.1 קriterion דיריכלה

1. b_n מונוטונית (יורדת) וגבול 0.

2. סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל- a_n חסומה (אבל לא בהכרח מתכנסת).

תהיינה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ שואפת ל-0 אז $\exists M > 0. \forall n \in \mathbb{N}: |A_n| \leq M$ כי היא חסומה. בגלל ש- $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: |b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^k a_k b_k &= \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} - A_{m-1} b_m = \sum_{k=m}^{n-1} (A_k(b_k - b_{k+1})) + A_n b_n - A_{m-1} b_m \end{aligned}$$

לכן (ניעזר בהזה ש- b_n מונוטונית יורדת):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| &\leq \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \right| + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \leq \sum_{k=m}^n (|A_k| (b_k - b_{k+1})) + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \\ &\leq M(b_m - b_{n+1}) + Mb_n + Mb_m < 2 \cdot M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \end{aligned}$$

לסכום זהה קוראים סכום אבל. אולי קוראים לזה דיריכלה אבל אבל הראשון שעשה את זה.

תרגיל 2. האם הטוֹר $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ מתכנס בהחלט, בתנאי, או מותבדר? רמז שאפשר להוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=1}^n \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{b\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

נסמן $a_n = \sin n$ ו- $b_n = \frac{1}{n}$. אפשר לדעת ש- b_n מונוטונית יורדת שגבוהה 0, ו-:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$$

"יש כאן אולי טעות בנוסחה. בתרגיל בית תקבלו את זה כמו שצרכיך". ואז זה מהתכנס לפי דיריכלה. יש כאן שאלה, האם זה מהתכנס בהחלט?

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{מתכנס מדים (בsecos)}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\text{мотבדר (בsecos)}}$$

מאריתמטיקה של גבולות, סיימנו.

שחור פרץ, 2025

שופfil כ-TEX ווצר באמצעות תוכנה חופשית כלכ