לינארית 2א 16

שחר פרץ

4 ביוני 2025

לגבי תרגלי הבית:

- מי שלא יעשה תרגיל בית לא יוכל להכנס להרצאות.
- מי שלא עושה שיעורי בית לא יוכל לגשת למבחן.

תזכורת: הגדרת מכפלה פנימית. וכן:

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge ||v|| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$$

ראינו:

$$\forall t \in \mathbb{F}\colon\ ||t \cdot v|| = |t| \cdot ||v||$$

הגדרה 1. (נרמול של וקטור): וקטור בממ"ס V יקרא וקטור יחידה אם $||v|| = 1$. $0 \neq v \in V$.

משפט 1.

$$v'' := \frac{v}{||v||}$$

הוא וקטור יחידה

הוכחה.

$$|v''| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \frac{1}{|\,||v||\,|} \cdot ||v||$$

וכן:

$$||v|| > 0 \implies |\,||v||\,| = ||v|| \implies ||v''|| = \frac{||v||}{||v||} = 1$$

■

הגדרה 2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו־$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, אז $(V, ||\cdot||)$ יקרא מרחב נורמי.

משפט 2. ("נוסחאת הפולריזציה")בהינתן $(V, ||\cdot||)$ מרחב נורמי; **גרסה מעל $\mathbb{R}$:**

$$\forall v, u \in V\colon\ \langle v \,|\, u \rangle = \frac{1}{4}(||u+v||^2 + ||u-v||^2)$$

גרסה מעל $\mathbb{C}$:

$$\langle u \,|\, v \rangle = \frac{1}{4}\Big(\, ||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i\,||u+iv|| - i\,||u+iv||\,\Big)$$

הוכחה (ל־$\mathbb{C}$).

$$\begin{aligned}
\langle u+v \,|\, u+v \rangle &= ||u||^2 + \langle u \,|\, v \rangle + \langle v \,|\, u \rangle + ||v||^2 \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re(\langle v \,|\, u \rangle) \\
\langle v-u \,|\, v-u \rangle &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2\Re(\langle v \,|\, u \rangle) \\
\langle u+iv \,|\, u+iv \rangle &= ||u||^2 + ||v||^2 + \langle u \,|\, iv \rangle + \langle iv \,|\, u \rangle \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 - i\,\langle u \,|\, v \rangle + i\overline{\langle u \,|\, v \rangle} \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 - i(2\Im\,\langle u \,|\, v \rangle) \\
||u-iv|| &= ||u|| + ||v|| - \langle u \,|\, iv \rangle - \langle iv \,|\, u \rangle \\
&= ||u|| + ||v|| - 2\Im(\langle v \,|\, u \rangle)
\end{aligned}$$

וסה"כ אם נציב בנוסחה, אחרי שחישבנו את כל אבירה, הכל יצטמצם וש־$\langle u \,|\, v \rangle$ אכן שווה לדרוש. ■

מנוסחאת הפולריזציה, נוכל לשחזר באמצעות נורמה את המכפלה הפנימית.

הגדרה 3. בהינתן $(v,\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ ממ"פ, לכל $v\in V$ נאמר ש־u מאונך ל־v ונסמן $v\perp u$ אם $\langle u\,|\,v\rangle=0$.

הערה. אם $v\perp u$ אז $u\perp v$. (כי צמוד של 0 הוא 0).

משפט 3. (משפט פיתגורס) (מאוד מועיל) יהי V ממ"פ כך ש-$v\in V$ אז $||v+u||^2=||v||^2+||u||^2$

הוכחה. משום שהם מאונכים מתקיים $\langle v\,|\,u\rangle=0$. נפתח אלגברה:

$$||v+u||^2=\langle v+u\,|\,v+u\rangle=||v||^2+\cancel{\langle v\,|\,u\rangle}+\cancel{\langle u\,|\,v\rangle}+\left|\left|u^2\right|\right|=||v||^2+||u||^2\quad\top$$

■

הערה: בעבור $v=\mathbb{R}^n$ מ"פ סטנדרטית אז $||v||$ מזדהה עם מושג הגודל של וקטור בגיואמטריה רגילה.

הערה מועילה. בתוך $\mathbb{R}^n$ הוקטורים הסטנדרטיים מאונכים אחד לשני (במכפלה הפנימית הסטנדרטית) ולכן $\langle e_i\,|\,e_j\rangle=\delta_{ij}$ כאשר δ_{ij} הדלתא של כרוניקר. באינדוקציה על משפט פיתגורס נקבל ש־:

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^i\implies ||v||=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

שזה בדיוק מושג הגודל בגיאומטריה אוקלידית.

הערה. מעל $\mathbb{R}$ מקבלים אמ"מ למשפט פיתגורש, מעל $\mathbb{C}$ לאו דווקא. מאונכים - בעברית. בלעז, אורתוגונלים. ואכן וקטורים יקראו אורתוגונליים אם הם מאונכים אחד לשני.

זה מטוס? זה ציפור? לא, זה מתמטיקה B!

משפט 4. (אי שוויון קושי־שוורץ)

$$\forall v,u\in V:|\,\langle u\,|\,v\rangle\,|\leq||u||\cdot||v||$$

ושוויון אמ"מ u,v ת"ל.

הערה. זה בפרט נכון בגיאומטריה סטנדרטית ממשפט הקוסינוסים.

הוכחה. אם v או u הם 0, אז מתקקבל שוויון. טענת עזר: קיים איזשהו $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש־$v\perp u-\alpha v$. נסמן $v_u=\alpha v$ כאשר נמצא אותו. הוכחת טענת העזר. נחפש כזה:

$$\langle u-\alpha v\,|\,v\rangle=0\iff\langle v\,|\,u\rangle-\alpha\,||v||^2=0\iff\alpha=\frac{\langle v\,|\,u\rangle}{||v||^2}$$

כדרוש. (מותר לחלק בנורמה כי הם לא 0). ניעזר בפיתגורס:

$$\begin{cases}u-\alpha v\perp v\\ u-\alpha v\perp v\end{cases}\implies||u||^2=||(u-\alpha v+\alpha v)||^2=\underbrace{||u-\alpha v||^2}_{\geq 0}+|\alpha|^2\,||v||^2\geq|\alpha|\cdot||v||^2=\frac{|\,\langle v\,|\,u\rangle\,|^2}{(||v||^2)^2}=||v||^2=\frac{|\,\langle u\,|\,v\rangle\,|^2}{||v||^2}$$

$$\implies|\,\langle v\,|\,u\rangle\,|^2\leq||v||\cdot||u||$$

בפרט $||u-\alpha v||^2=0$ אמ"מ הם תלויים לינארית ומכאן הכיוון השני של המשפט. ■

דוגמאות. ממכפלה פנימית סטנדרטית:

.1

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\right|^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)$$

2. נניח $f,g[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפות אז:

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\leq\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

כאשר $f^2=f\cdot f$ (לא הרכבה).

3. אי־שוויון המשולש:

$$\forall u, v \in V: \ ||u+v|| \le ||u|| + ||v||$$

ושוויון אמ"מ אחד מהם הוא 0 או אם הם כפולה חיובית אחד של השני (לא שקול לתלויים לינארית - יכולה להיות כפולה שלילית).

הוכחה. (לאי שוויון המשולש). תזכורת עבור $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\mathcal{Z}|^2 = (\Re \mathcal{Z})^2 + (\Im \mathcal{Z})^2$

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re(\langle u \mid v \rangle) \le ||u||^2 + ||v||^2 + 2\left|\langle u \mid v \rangle\right|$$

ושוויון אמ"מ u הוא אפס או כפולה חיובית של v. מקושי־שוורץ:

$$\le ||u||^2 + 2\,||u||\,||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2$$

■

ORTHOGONALITY . . . . (1)

הגדרה 4. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. יהיו $S, T \subseteq V$. נכתוב:

א. $u \in V : u \perp S \iff (\forall v \in S : u \perp v)$

ב. $S \perp T \iff \forall v \in \S \forall u \in T : v \perp u$

ג. $S^{\perp} := \{v \in V \mid v \perp S\}$

למה 1. תהי $S \subseteq V$. אז:

א. $v \perp S$ אמ"מ $v \perp \operatorname{span}(S)$

ב. $S^{\perp} \subseteq V$ תמ"ו

ג. אם $\subseteq T$ אז $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$

הוכחה (לג').

$$\forall v \perp T : c \perp S \implies v \in S^{\perp}$$

■

הערה: שוויון בג' מתקיים אמ"מ $\operatorname{span} S = \operatorname{span} T$.

הגדרה 5. משפחה של וקטורים $A \subseteq V$ נקראת אורתוגונלית אם $\forall u \neq v \in V : u \perp v$

הערה. אם A משפחה אורתוגונלית וגם $0 \notin A$ אז ניתן לייצור ממנה משפחה של וקטורים אורתוגונלים שהם גם וקטורי יחידה, ע"י נרמול.

הגדרה 6. משפחה של וקטורים $A \subseteq V$, אם היא אורתוגונלית ובנוסף כל הוקטורים הם וקטורי יחידה.

הגדרה 7. יהי $U \subseteq V$ תמ"ו. יהא $v \in V$. אז ההטלה האורתוגונלית של V על U היא $p_U(v)$ הוא וקטור המקיים:

- $p_U(v) \in U$
- $v - p_U(v) \in U^{\perp}$

משפט 5. בסימונים לעיל, $\forall u \in U : \ ||v-u|| \ge ||v - p_U(v)||$ ושוויון אמ"מ $u = p_U(v)$.

הוכחה. יהי $u \in U$. ידוע $p_U(v) \in U$. אזי $u - P_u(v) \in U$. כמו כן ידוע $u \perp p_U(v) - v$. אזי בפרט $\langle u - p_U(v) \mid p_U(v) - v \rangle$. נתבונן ב־:

$$||u-v||^2 = ||(u - p_U(v)) + (p_U(v) - v)||^2 \overset{\text{פית'}}{=} ||u - p_U(v)||^2 + ||v - p_U(v)||^2$$

וסה"כ $||v - p_U(v)||^2 \ge ||v-u||^2$. ושוויון אמ"מ $||u - p_U(v)|| = 0$ אמ"מ $u = p_U(v)$. ■

משפט 6. ההטלה הניצבת (אם קיימת), היא יחידה.

הוכחה. יהיו $p_U(v)$ וכן $p'_U(v)$ הטלות של v על U. מהטענה:

$$||v - p_U(v)|| \le ||v - p'_U(v)||$$

אבל בהחלפת תפקידים מקבלים את אי־השוויון ההפוך. לכן יש שוויון נורמות. מהמשפט לעיל $p_U(v) = p'_U(v)$. ■

משפט 7. תהי $A \subseteq V$ משפחה אורתוגונלית ללא 0. אז היא בת"ל.

הוכחה. יהיו $v_1 \dots v_n \in A$ וכן $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$, כך ש־$\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i = 0$. יהי $i \in [n]$. אז:

$$0 = \langle 0 \,|\, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle v_i \,|\, v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{||v_j||^2}_{\neq 0} \implies \alpha_j = 0$$

כאשר השוויון האחרון מהיות הקבוצה אורוגונלית. ■

משפט 8. נניח ש־$u \subseteq V$ תמ"ו. נניח U נ"ס וכן $B = (e_1 \dots e_n)$ בסיס אורתונורמלי של U (כלשהם, לא בהכרח סטנדרטיים כי גם לא בהכרח $\mathbb{F}^n$). אז

$$\forall v \in V \colon p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v \,|\, e_i \rangle e_i$$

הוכחה. צ.ל. $p_U(v) \in U$ וגם $\forall u \in U \colon \langle v - p_U(v) \,|\, u \rangle = 0$ אך לגבי התנאי האחרון די להוכיח $\forall j \in [n] \colon \langle v_i p_U(v) \,|\, e_j \rangle = 0$. החלק הראשון ברור, נותר להוכיח:

$$\langle v - p_U(v) \,|\, e_j \rangle = \langle v \,|\, e_j \rangle - \langle p_u(v) \,|\, e_j \rangle =: *$$

ידוע:

$$\langle p_U(v) \,|\, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \langle v_i \,|\, e_i \rangle e_i \,\middle|\, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i \,|\, e_i \rangle \cdot \langle e_i \,|\, e_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v \,|\, e_i \rangle \delta_{ij} = \langle v \,|\, e_j \rangle$$

נחזור לשוויון לעיל:

$$* = \langle v \,|\, e_j \rangle - \langle v \,|\, e_j \rangle = 0$$

כדרוש. ■

(בכך הוכחנו את קיום $p_U(v)$ לכל מ"ו נ"ס, אם נשלב את זה עם המשפט הבא)

משפט 9. (אלגוריתם גרהם־שמידט) תהי $(b_1 \dots b_k)$ קבוצה סדורה בת"ל של וקטורים בממ"ס V. אז בכל משפחה א"נ $(u_1 \dots u_k)$ כך ש־$\operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = \operatorname{span}(u_1 \dots u_k)$.

מסקנות מהמשפט. לכל ממ"ס נ"ס קיים בסיס א"נ (=אורתונורמלי). יתרה מזאת, בהינתן בסיס $B = (b_1 \dots b_n)$ ניתן להופכו לבסיס א"נ $(u_1 \dots u_n)$ המקיים $\forall k \in [n] \colon \operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = \operatorname{span}(u_1 \dots u_k)$.

הוכחה. בנייה באינדוקציה. נגדיר עבור $k = 1$ את $u_1 = b_1''$. מתקיים $\operatorname{span} u_1 = \operatorname{span} b_1$ וכן $\{u_1\}$ קבוצה א"נ. נניח שבנינו את k האיברים הראשונים, נבנה את האיבר ה־$k+1$ (כלומר את u_{k+1}). במילים אחרות, הנחנו $u_1 \dots u_k$ אורתונורמלית וגם $\operatorname{span}(u_1 \dots u_k) = \operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = U$.

מהסעיף הקודם $p_U(b_{k+1})$ קיים, וגם $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \neq 0$ מהבנייה. נגדיר $u_{k+1} = (b_{k+1} - p_U(b_{k+1}))$. בצורה מפורשת:

$$u_{k+1} = \frac{b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} \,|\, u_i \rangle u_i}{\left|\left| b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} \,|\, u_i \rangle u_i \right|\right|}$$

מהגדרת $p_U(b_{k+1})$, מתקיים $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \in U^\perp$ ולכן גם $u_{k+1} \in U^\perp$ ולכן $(u_1 \dots u_{k+1})$ משפחה א"נ.

$$b_1 \dots b_k = \overbrace{\operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})}^{\text{בת"ל}}$$

נשאר להוכיח ש־$b_{k+1} \in \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. זה מספיק משום שאז נקבל $\operatorname{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. אבל הם שווי ממד ולכן שווים. סה"כ:

$$b_{k+1} = ||b_{k+1} - p_U(b_{b+1})|| \cdot u_{k+1} + \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} \,|\, u_i \rangle u_i \implies b_{k+1} \in \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$$

מש"ל. ■

משפט 10. יהי V מ"ו $U \subseteq V$. נניח שלכל $v \in V$ מוגדר $p_U(v)$ (בפרט כל מ"ו נ"ס). אז $p_U \colon V \to V$ המוגדרת לפי $v \mapsto p_U(v)$ העתקה לינארית.

הוכחה. יהיו $v, v' \in V, \alpha \in \mathbb{F}$. ידוע $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^{\perp}$ ועל כן:

$$(v - p_U(v)) + \alpha(v' - p_u(v')) \in U^T \implies (v + \alpha v') - (p_U(v) + \alpha p_U(v')) \in U^T \implies (v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v') \in U^T$$

מה מקיים היטל וקטור? ראשית ההיטל ב־U, ושנית v פחות ההיטל מאונך. הוכחנו שבהינתן היטל, הוא יחיד. והראינו ש־$(v + \alpha v') -$ $p_U(v + \alpha v')$ מקיים את זה, ולכן אם יש וקטור אחד אז הוא יחיד, וסה"כ שווים וליניארית. ■

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד