ליניארית 1א – תרגיל בית 2

שחר פרץ

1 בדצמבר 2024

(1)

יהי $|\mathbb{F}|$ שדה סופי. צ.ל. $\text{char}(F) \mid |\mathbb{F}|$

הוכחה. בדומה להוכחה מההרצאה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי. אזי מקדמו ראשוני הוא p, כי אינו 0, ולכן מוכל בו שדה $\mathbb{Z}_p$ (עד לכדי הומומורפיזם). לפי טענה נתונה $\mathbb{F}$ שדה וקטורי מעל כל השדות שמוכללים בו, ובפרט $\mathbb{F}'$. לכל מרחב וקטורי ידוע קיום בסיס, ולכן קיים בסיס ל־$\mathbb{F}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_p$, נסמנו B. מהיות B פורש:

$$|\mathbb{F}| = \left|\left\{\sum_{i=0}^{|B|} B_i\lambda_i \middle| \lambda_i \in \mathbb{Z}_p,\ B_i \in B\right\}\right| = |\mathbb{Z}_p|^{|B|} = p^{|B|} = \text{char}(\mathbb{F})^{|B|}$$

בפרט, $\text{char}(\mathbb{F})$ הוא גורם ראשוני של $|\mathbb{F}|$ ולכן מחלק אותו, כדרוש. $\blacksquare$

(2)

נפתור את מערכות המשוואות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

1. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=3 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=10 \\ 7x_1+9x_2+3x_3=1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & -6.5 & -10 & 5.5 \\ 0 & -1.5 & -11 & -9.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{2}{13}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & -1.5 & -11 & -9.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{113}{13} & -\frac{107}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to-\frac{13}{113}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & \frac{20}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-\frac{20}{13}R_3]{R_1\to R_1-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.5 & 0 & \frac{751}{226} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{69}{113} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{479}{113} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{69}{113} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{107}{113} \end{array}\right) \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{479}{113} \\ -\frac{69}{113} \\ -\frac{107}{113} \end{pmatrix}$$

2. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{\substack{R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-R_1}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4\to R_4-2R_2]{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to-\frac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+2R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_4\to-\frac{3}{5}R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1\to R_1+R_4]{\substack{R_3\to R_3-\frac{2}{3}R_4 \\ R_2\to R_2-2R_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\to R-2-2R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&-\frac{2}{5}\\0&1&0&0&\frac{4}{5}\\0&0&1&0&\frac{4}{5}\\0&0&0&1&\frac{4}{5}\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{4}{5}\\0&1&0&0&\frac{4}{5}\\0&0&1&0&\frac{4}{5}\\0&0&0&1&\frac{4}{5}\end{array}\right)\implies\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8\\0.8\\0.8\\0.8\end{pmatrix}$$

(3)

נפתור את מערכות המשוואות הבאות:

1. (מעל $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases}ix+(1-i)y=0\\2x-(1-i)y=0\end{cases}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}i&(1-i)&0\\2&(i-1)&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to\frac{R_1}{i}}\left(\begin{array}{cc|c}1&(-1-i)&0\\2&(i-1)&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&(-1-i)&0\\0&(1+3i)&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{1+3i}}\left(\begin{array}{cc|c}1&(-1-i)&0\\0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to(i+1)R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right)\implies(x_1,x_2)=(0,0)$$

(כלומר, הראינו שהפתרון היחיד למערכת ההומגנית להלן הוא הפתרון הטרוויאלי)

2. (מעל $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases}x-(2-i)y=3-2i\\(2i-1)x+5iy=1+8i\end{cases}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&(-2+i)&(3-2i)\\(2i-1)&5i&(1+8i)\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+(1+2i)R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&(-2+i)&(3-2i)\\0&(-4+2i)&(8+12i)\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{R_2}{-4+2i}}\left(\begin{array}{cc|c}1&(-2+i)&(3-2i)\\0&1&(-0.4-3.2i)\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+(2-i)R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&(-1-8i)\\0&1&(-0.4-3.2i)\end{array}\right)\implies(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-1-8i\\-0.4-3.2i\end{pmatrix}$$

3. (מעל $\mathbb{Z}_{13}$)

$$\begin{cases}-x+2y=1\\2x+y=3\end{cases}\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&1\\2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&12&12\\2&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&12&12\\0&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to 9R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&12&12\\0&1&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-12R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&5&6\\0&1&&\end{array}\right)\implies\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$$

(4)

בוצעו הפעולות האלמנטריות הבאות על מטריצה $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. ננסה להופכן כדי לקבל את המטריצה המקורית. לשם כך, נהפוך את סדרן ונבצע את הפעולות ההופכיות.

$$id_{3\times3}\begin{pmatrix}R_2\to R_2-3R_1\\R_2\leftrightarrow R_3\\R_3\to R_3+R_2\\R_1\to 2R_1-R_2\\R_2\to R_2+R_3\\R_1\to R_1-0.5R_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_1\to R_1+0.5R_3\\R_2\to R_2-R_3\\R_1\to 0.5R_1+0.5R_2\\R_3\to R_3-R_2\\R_3\leftrightarrow R_2\\R_2\to R_2+3R_3\end{pmatrix}$$

נפעיל את הפעולות על מטריצת היחידה:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+0.5R_3}\begin{pmatrix}1&0&0.5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&0&0.5\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&1&-0.5\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to 0.5R_2}\begin{pmatrix}0.5&0.5&-0.25\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}0.5&0.5&-0.25\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}0.5&0.5&-0.25\\0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_3}\begin{pmatrix}0.5&0.5&-0.25\\0&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\text{.................................. (5) ....}$$

נגדיר:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & \cdots & 2n+1\\ 2n+1 & 2n+3 & \cdots & 4n+1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2(n-1)n+1 & 2(n-1)n+3 & \cdots & 2n(n-1)n+2n+1\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$$

נפתור את מערכת המשוואות $(A\mid b)$. נעשה את הפעולות האלמנטריות הבאות:

$$(A\mid b)\xrightarrow{\forall 0<i<n:\ R_i\to R_i-R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & \cdots & 2n+1 & 0\\ 2n & 2n & \cdots & 2n & 1\\ 4n & 4n & \cdots & 4n & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2(n-1)n & 2(n-1)n & \cdots & 2(n-1)n & n-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\forall 0<i<n:\ R_i\to \frac{R_i}{n}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & \cdots & 2n+1 & 0\\ 2 & 2 & \cdots & 2 & \frac{1}{n}\\ 4 & 4 & \cdots & 4 & \frac{2}{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 2(n-1) & 2(n-1) & \cdots & 2(n-1) & \frac{n-1}{n}\end{array}\right)\xrightarrow{\forall 0\le i<n:\ R_i\to R_i-2n}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & \cdots & 2n+1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{n}-2(n-1)\end{array}\right)$$

בחילוק ב־n הנחנו $n\neq 0$. אם $n=0$, אז המטריצה בגודל 0, וכל פתרון נכון באופן ריק. אחרת, מצאנו איבר תלוי יחיד, וסה"כ קבוצת הפתרונות:

$$\mathscr{A}nswer=\{x+3x+5x+\cdots+(2n+1)x\mid x\in\mathbb{R}\}=\left\{\sum_{i=0}^{n}(2i+1)x\mid x\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\text{.................................. (6) ....}$$

תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. יהי $b\in\mathbb{R}^m$. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות:

א. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ פתרונות של מערכת $(A\mid b)$, אז $x+y$ הוא פתרון של $(A\mid b)$

הפרכה. נניח בשלילה שהטענה נכונה, כלומר $A(x+y)=b$ בהכרח. אזי, מדיסטרבוטביות של שדה המטריצות מגודל $m\times n$ (נאמר בתרגול שאפשר להגדיר שדה כזה ואני מסתמך על ההגדרה מגוגל)

$$Ax=b\wedge Ay=b\implies b+b=Ax+Ay=A(x+y)=b\implies b=2b$$

נבחר $b=1$ ונקבל $1=2$, וזו סתירה. ■

ב. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ פתרונות של המערכת $(A\mid b)$, אזי $x-y$ הוא פתרון של המערכת $(A\mid 0)$.

הוכחה. מהנתון $Ax=b, Ay=b$. צ.ל. $A(x-y)=0$. באופן דומה לסעיף הקודם:

$$b-b=Ax-Ay=A(x-y)$$

כדרוש. ■

ג. נניח ש־$z\in\mathbb{C}^n=:(z_1,\dots,z_n)$ פתרון של מערכת מהשוואות. אז $\Im(z):=(\Im(z_1),\Im(z_2),\dots,\Im(z_n))$ הוא פתרון של $(A\mid b)$. באופן דומה נגדיר $\Re(z)$.

הוכחה.

$$b=Az=\begin{pmatrix}a_{11}z_1+a_{12}z_2+\cdots+a_{1n}z_n\\ \vdots\\ a_{m1}z_1+a_{m2}z_2+\cdots+a_{mn}z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(\Im z_1+\Re z_1)+a_{12}(\Im z_2+\Re z_2)+\cdots+a_{1n}(\Im z_n+\Re z_n)\\ \vdots\\ a_{m1}(\Im z_1+\Re z_1)+a_{m2}(\Im z_2+\Re z_2)+\cdots+a_{mn}(\Im z_n+\Re z_n)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\Im(z_1)+\cdots+a_{1n}\Im(z_n)+a_{11}\Re(z_1)+\cdots+a_{1n}\Re(z_n)\\ \vdots\\ a_{m1}\Im(z_1)+\cdots+a_{mn}\Im(z_n)+a_{m1}\Re(z_1)+\cdots+a_{mn}\Re(z_n)\end{pmatrix}$$

$$\implies\forall i\in[n]\colon b_i=a_{i1}\Im(z_1)+\cdots+a_{in}\Im(z_n)+a_{i1}\Re(z_1)+\cdots+a_{in}\Re(z_n)=R_i\Re(b)+R_i\Im(b)$$

נפתור כמו מערכת משוואות מרוכבת רגילה; את האיבר המרוכב בנפרד לאיבר הממשי (נבחין כי $R_i \in \mathbb{R}$ ולכן לא ישנה את הבסיס עליו האיבר רץ).

$$\forall i \in [n].\Re(b_i) = R_i\Re(b) \;\wedge\; \Im(b_i) = R_i\Im(b) \implies \Im(b)A = b \wedge \Re(b)A = b$$

וסה"כ $\Re(b), \Im(b)$ הם פתרונות חוקיים למטריצה $(A \mid b)$, כדרוש. ■

ד. באופן דומה, בעבור $\Re(b)$. הוכח כחלק מסעיף קודם.

ה. אם לכל $x \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון של המערכת $(A \mid 0)$, אז $A = 0$.

הוכחה. עבור כל שורה $i \in [m]$:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + a_{in}x_n = 0$$

נציב את הוקטורים $e_1 \ldots e_n$:

$$\begin{cases} R_ie_1 = a_{i1}1 + a_{i2}0 + \cdots + a_{ij}0 + a_{i(j+1)}0 + \cdots + a_{in}0 = a_1 = 0 \\ \vdots \\ R_ie_j = a_{i1}0 + a_{i2}0 + \cdots + a_{ij}1 + a_{i(j+1)}0 + \cdots + a_{in}0 = a_j = 0 \\ \vdots \\ R_ie_n = a_{i1}0 + a_{i2}0 + \cdots + a_{ij}0 + a_{i(j+1)}0 + \cdots + a_{in}1 = a_n = 0 \end{cases}$$

סה"כ קיבלנו $\forall i \in [m].\forall j \in [n].a_{ij} = 0$, כלומר $A = 0$ כדרוש. ■

(7)

צ.ל. כל מטריצה שקולה למטריצה מדורגת קאונינית יחידה.

הוכחה. תהי מטריצה $A \in M_{m\times n}$. הוכח בהרצאה קיום מטריצה מדורגת קאנונית אליה היא שקולה, נסמנה A_1. נניח בשלילה קיום מטריצה מדורגת קאנונית אחרת, נסמנה A_2. במטריצה מדרוגת קאנונית, בכל שורה שאינה אפסים יש מימין ומשמאל לאיבר היחידה התלוי אפסים (פרט לשורה האחרונה). כלומר, נוכל לייצג את שורות צמצום המטריצות הללו ע"י האינדקס בו איבר היחידה נמצא (כאשר 1 האינדקס הראשון ו־0 אם השורה אפסים). בצורה זו נגדיר פונקציה חח"ע $f\colon R_i \to [0, n] \cap \mathbb{N}$ (חח"ע כי אחרת יש איבר יחידה תחת שורה אחרת וזו סתירה לזה שנמצא משמאל לשורה שמעליו ולכן באינדוקציה לכל השורות שמעליו). (נגדיר את הפונקציה כך שמקבלת שורה על $\mathbb{R}^n$, מתוך מטרציה מדורגת קאנונית כלשהי).

מכיוון ש־$A_1 \neq A_2$, אז קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש־$R_i^{A_1} \neq R_i^{A_2}$ ולכן $\ell_1 := f(R_i^{A_1}) \neq f(R_i^{A_2}) =: \ell_2$. משום שפלט הפונקציה הוא איבר היחידה בשורה, אז $x_{\ell_1} = b_{\ell_1}^{A_1}$ וגם $x_{\ell_2} = b_{\ell_2}^{A_2}$. בה"כ $\ell_1 > \ell_2$. ידוע ש־x_{ℓ_1} קשור ב־A_2 כי יש להן קבוצת פתרונות שווה משקילות. גם ידוע x_{ℓ_2} קשור כי יש לו ערך קבוע בשורה R_{ℓ_2}. ב־A_1, יהיו p משתנים קשורים הקטנים באינדקסם מ־ℓ_1, ומשקילות גם ב־A_2. אך, ב־A_1 אף לא אחד מהם x_{ℓ_2}, אבל x_{ℓ_2} קשור ב־A_2 וקטן מ־ℓ_1 ולכן $p+1$ משתנים הקטנים מ־ℓ_1 ב־A_2, וסה"כ $p = p+1$. נחסר אגפים ונקבל $0 = 1$ וזו סתירה. ■