תרגיל בית 8 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. יהיו $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. נגדיר את המטריצה

$$C=\begin{pmatrix}A & A\\ A & B\end{pmatrix}_{2n\times2n}$$

באופן מפורש:

$$(C)_{ij}=\begin{cases}(A)_{ij} & 1\le i,j\le n\\ (A)_{i,j-n} & 1\le i\le n,n+1\le j\le 2n\\ (A)_{i-n,j} & n+1\le i\le 2n,1\le j\le n\\ (B)_{i-n,j-n} & n+1\le i,j\le 2n\end{cases}$$

הוכיחו כי $\mathrm{rank}\left(C\right)\le 2\mathrm{rank}\left(A\right)+\mathrm{rank}\left(B\right)$

2. א) נגדיר

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

חשבו את דרגת המטריצה $A=v_1v_1^T+v_2v_2^T+v_3v_3^T$

ב) תהי $\left(v_1,\ldots,v_k\right)\in\mathbb{R}^k$ סדרה בת"ל. מצאו את דרגת המטריצה $v_1v_1^T+\ldots+v_kv_k^T$

3. תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה כך ש־$\mathrm{rank}\left(A\right)=r$.

א) הוכיחו כי קיימות מטריצות $B_1,\ldots,B_r\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש־$\mathrm{rank}\left(B_i\right)=1$ לכל $1\le i\le r$ וגם מתקיים $A=B_1+\ldots+B_r$

ב) הוכיחו כי לא קיימות מטריצות $B_1,\ldots,B_{r-1}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך ש־$\mathrm{rank}\left(B_i\right)=1$ לכל $1\le i\le r-1$ וגם מתקיים $A=B_1+\ldots+B_{r-1}$

4. עבור שלושה וקטורים $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, נסמן ב־$\det\left(u,v,w\right)$ את $\det\begin{pmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{pmatrix}$. בטאו את $\det\left(u+v,v,w\right)$ ואת $\det\left(u+v,v+w,w+u\right)$ באמצעות $\det\left(u,v,w\right)$.