חדו"א ואו 9

שחר פרץ

28 בדצמבר 2025

המשך רציפות

אריתמטיקה של רציפות מייבא אוטומאטית הכל מאריתמטיקה של גבולות פונקציות.

משפט 1. תהאנה $f, g \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$. נניח כי f רציפה ב־x_0 וכן g רציפה ב־x_0. אז:

- $f \pm g$ רציפה ב־x_0
- $f \cdot g$ רציפה ב־x_0.
- אם $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0.

משפט 2. תהאנה $f \colon A \to B$ ו־$g \colon B \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in A$. נניח כי f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$f(x_0)$. אז $g \circ f$ רציפה ב־x_0.

דוגמאות לפונקציות רציפות:

- פולינומים (מראים שהזהות והקבועה רציפות, ואז מאריתמטיקה סיימנו).
- הפונקציות הטריגונומטריות רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות.
- הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות.
- הפונקציות המעריכיות רציפות ב־$\mathbb{R}$ (מהיינה וממשפט קודם שהגדיר היטב חזקה).
- לכל $0 < a \neq 1$ הפונקציה $\log_a x$ רציפה ב־$(0, \infty)$.
- הפונקציה $|x|$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

גבולות חשובים

משפט 3.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

הוכחה אבל חצי כח. לא באמת אני יכול להעתיק כי יש כאן מעגל היחידה ודברים שאין לי כח להעתיק. ההוכחה לא פורמלית בכל מקרה. זו הוכחה מאוד סטנדרטית שיצא לי לראות בעבר ואני משוכנע שתוכלו למצוא הוכחות באינטרנט. שימו לב שלופיטל זה טיעון מעגלי. עקרונית מראים על מעגל היחידה באמצעות טיעונים גיאומטריים לא מוגדרים היטב על משולש עם זווית x_{rad} על המעגל, ש־$\sin x \leq x \leq \tan x$ ומכאן $\frac{1}{\cos x} \leq \frac{x}{\sin x} \leq 1$ וידוע מרציפות $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\cos x} = 1$ ומסנדוויץ' סיימנו. ■

משפט 4.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

הוכחה. די בקלות. לכל $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ נקבל:

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln\left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

מסדרות + היינה:

$$\lim_{x \to 0} \left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right) = e$$

הסלנג הוא "להכניס את הגבול פנימה", אבל זה רציפות והרכבה:

$$\lim_{x \to 0} \ln\left((1 + x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

■

משפט 5.
$$\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

הוכחה. נעשה מעברים אלגברים:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{\ln(e^x-1+1)}$$

נציב $t=e^x-1$ (בפועל, משמעו הרכבה שחוקית רק מרציפות $\ln$):

$$=\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

תוך שימוש בסעיף הקודם. ■

לבית חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

תכונות גלובליות של פונקציות רציפות

הגדרה 1. פונקציה f היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

משפט 6. תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$. אז f רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}$ קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}$ כך ש־$f^{-1}(V)=U\cap A$.

הוכחה. $\Longrightarrow$ תהא $V\subseteq\mathbb{R}$. תהא $x\in f^{-1}(V)$. אחרת $f(x)\in V$ לכן לא קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$f(x)-\varepsilon, f(x)+eg$. ידוע f רציפה ב־ x (מהנתון). לכן קיים $\delta_x>0$ כך שלכל $y\in(x-\delta_x),d+\delta_x$ מתקיים $f(y)\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ לכן $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap A\subseteq f^{-1}(V)$.
נגדיר:

$$U=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$

נבחין ש־U פתוחה שכן היא איחוד של קבוצות מבסיס הטופולוגיה. כמו כן לכל $x\in f^{-1}(V)$ מתקיים $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ לכן $U\cap A\subseteq f^{-1}(V)$. בנוסף מהגדרת האיחוד, $UA\cap A\subseteq f^{-1}(V)$. לכן $U\cap A=f^{-1}(V)$.

$\Longleftarrow$ נניח שלכל V פתוחה קיימת $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה כך ש־$f^{-1}(A)(V)=U\cap A$. יהי $x\in A$. יהי $\varepsilon>0$. $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ולכן קיימת $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה כך ש־$f^{-1}((f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon))=U\cap A$. יהי $x\in U\cap A$ לכן $x\in U$ ולכן לא קיים $\delta>0$ כך ש־$(x-\delta,x+\delta)\subseteq U$. לכל $y\in A$ אם $|y-x|<\delta$ אז $||y|-|x||<\varepsilon$. לכן f רציפה וסיימנו.

■

הגדרה 2. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ כאשר I קטע. נאמר כי f מקיימת תכונת דרבו כאשר לכל $a,b\in R$ כך ש־$a<b$, לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ בין $f(a)\le\lambda\le f(b)$. קיים $c\in[a,b]$ כך ש־$f(x)=\lambda$.

משפט 7 (משפט ערך הביניים)**.** פונקציה רציפה מקיימת את תכונת דרבו.

הוכחה. יהיו $a,b\in I$ ונניח ש־$a<b$. יהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש־$f(a)\le\lambda\le f(b)$. נבנה סדרת קטעים ברקורסיה: $a_1=a,b_1=b$ ואז צעד:

$$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=b_n & f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\le\lambda\\ a_{n+1}=a_n\wedge b_n=\frac{a_n+b_n}{2} & f\left(\frac{a_n+b_n}{22}\right)>\lambda\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, נקבל $|b_n-a_n|=\frac{b-a}{2^{n-1}}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל $f(a_n)\le\lambda\le f(b_n)$ (אינדוקציה). ידוע $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$. לפי קנטור קיימת $\mathbb{R}\ni c$ כך ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$. לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=c$. מרציפות הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n=c$ ומרציפות $\lim_{n\to\infty}I\lim f(a))$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $f(a)\le\lambda$ ולכן $f(x)\le\lambda$. באופן דומה $f(c)\ge\lambda$ ולכן $f(x)=\lambda$. ■

הוכחה נוספת. אחרי יהיו יהי תהיינה, אם $f(a)=\lambda$ סיימנו. אחרת $f(a)<\lambda$. נגדיר $A=\{x\in[a,b]\colon f(x)<\lambda\}$. אז A לא ריקה כי $f(a)<\lambda$ כלומר $\sup A$ קיים מאקסימות השלמות. נניח בשלילה ש־$f(\alpha)<\lambda$. מרציפות f קיים $\delta>0$ כך שלכל $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\text{n}x$, מתקיים $|f(x)-f(\alpha)|<\frac{num}{\lambda f(x2)}$ נובע $f(x)<\lambda$ בסתירה למינימליות הסופרמום. מהצד השני נוכל להפעיל ותו הטיעון ההפוך. לכן $f(\alpha)=\lambda$. ■

הערה 1. זה לא אמ"מ. להלן דוגמאות לפונקציות לא רציפות שמקיימות את תכונת ערך הביניים:

- **פונקציית צימרמן:** בהינתן r, נגדיר שהיא תחזיר את הגבול של הממוצע החשבוני של הספרות במידה והוא קיים, אחרת 0.
- **פונקציה סימפטית מספיק:** $\sin\frac{1}{x}$ (שמחזירה 0 ב־0 בשביל נוחות). היא מקיימת דרבו אך אינה רציפה כי אין לה גבול ב־0.

משפט 8 (משפט ווירשטראס (עוד אחד))**.** תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$ רציפה. אם A קומפקטית (סגורה וחסומה) אז f חסומה ומשיגה את חסמיה (יש לה מינימום ומקסימום).

חלק ראשון. נניח בשלילה ש־f אינה חסומה. אז לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in A$ כך ש־$|f(x_n)|>n$. A [הערה: x_n מוגדרת היטב כי קיים יחס סדר טוב על הטבעיים] חסומה ולכן x_n חסומה. יש לה ת"ס x_{n_k} מתכנסת. נסמן את גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0\in A$ (סגירות סדרתית). לכן $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in A$ ומרציפות $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)\in\mathbb{R}$ בסתירה לכך ש־$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$. לכן f חסומה. ■

חלק שני. ידוע f חסומה ולכן ניתן לסמן $f=\sup f(A)$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $y_n\in f(A)$ כך ש־$M-\frac{1}{n}\le y_n\le M$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in A$ כך ש־$f(x_n)=y_n$. A חסומה ולכן x_n חסומה ומכאן שקיימת x_{n_k} מ־BW שמתכנסת. נסמן גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0\in A$. מכאן ש־$M=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$. בדומה בעבור $\inf(f(A))$. ■

הערה 2. בד"כ יציינו את זה על קטע סגור, שזה מקרה פרטי של קבוצה קומפקטית. צריך רק קומפקטיות – השתמשנו גם בכל התכונות, הסגירות והחסימות.

משפט 9. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת תכונת דרבו. אז ל־f אין נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג ראשון.

הוכחה. תהא $x_0\in I$. נניח שקיים $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ וסופי. נסמנו ℓ. נוכיח ש־$f(x_0)=\ell$. נניח בשלילה ש־$f(x)>\ell$ (כנ"ל לגבי גדול, בה"כ). קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in I$ אם $x_0-\ell<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\frac{f(x_0)-\ell}{2}$. בקטע $[x_0-\frac{\delta}{2},x_0]$, מתקיים:

$$f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)<\frac{\ell+f(x_0)}{2}<f(x_0)$$

מתכונת דרבו קיים $x_0-\frac{\delta}{2}<y<x_0$ כך ש־$\frac{\ell+f(x_0)}{2}=f(y)$. כלומר $|f(y)-\ell|\ge\frac{f(x_0)-\ell}{2}$ בסתירה. לכן $f(x_0)\le\ell$. באופן דומה $f(x_0)\ge\ell$. לכן $f(x_)=\ell$. באופן דומה, אם קיים וסופי הגבול $m=:\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ אז $f(x)=m$.

מכאן שלא קיימות נקודות אי־רציפות סליקות ומסוג ראשון. ■

מסקנה 1. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$. אם f מקיימת תכונת דרבו ומונוטונית, היא בהכרח רציפה.

הוכחה. תהא f מונוטונית המקיימת את תכונת דרבו, מהמשפט הקודם אין לא נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג ראשון. משום ש־f מונוטונית, אין לה נקודות אי־רציפות מסוג שני (משפט קודם). מכאן של־f אין נקודות אי־רציפות ולכן היא רציפה. ■

הערה 3. עקרונית אפשר להגדיר את תכונת דרבו בעבור A פתוחה ולהגדירה כך שכל קטע פתוח $A\subseteq I$ מקיים את דרבו כפי שהגדרנו אותה.

אם ננסה להוכיח את הרציפות של $\frac{1}{x}$, נצטרך לבחור $\delta=\min\{\frac{x_0}{2},\frac{\varepsilon x_0^2}{2}\}$

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{x_0x}<\frac{\delta}{xx_0}<\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)}<\frac{2\delta}{x_0^2}=\varepsilon$$

מאוד ברור שה־δ תלוי באיזה x_0 אנחנו בוחרים. זה גם ניכר מההגדרה של רציפות: "לכל $x\in A$, ולכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $y\in A$ אם לכל $|y-x|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$".

כאשר אנו אומרים "במידה שווה", הכוונה היא שה־δ לא תלוי בנקודה. דהיינו:

הגדרה 3. f רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in A$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

"$\frac{1}{x}$ היא לא סימפטית" – המרצה (לא פיזיקאי מוסמך).

משפט 10. אם f רציפה במידה שווה ב־A אז f רציפה ב־A.

הוכחה. כאילו דה ■

אינטואציה: נדבר על זה בהמשך, אבל נגזרת חסומה אומר שהפונקציה רציפה במידה שווה.

לדוגמה, נראה ש־$f(x)=x^2$ אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$, אך רציפה במידה שווה לכל קטע חסום ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $M>0$. נגדיר $f\colon[-M,M]\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=x^2$ לכל $x\in[-M,M]$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$. יהיו $x,y\in[-M,M]$ ונניח $|x-y|<\delta$. אז:

$$\left|x^2-y^2\right|=|x-y|\,|x+y|\le 2M\,|x-y|<2M\delta=\varepsilon$$

■

לא סתם בחרנו δ להיות ε כפול נקודת המקסימום של הנגזרת, אבל לא מדברים על זה.

הוכחה. עתה נראה ש־x^2 אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$. נבחר $\varepsilon=1$ ויהי $\delta>0$. נבחר $y=x+\frac{\delta}{2}$. נבחר $x=\frac{1}{\delta}$. מכאן $|x-y|<\delta$.

$$\left|x^2-y^2\right|=|x-y|\,|x+y|=\frac{\delta}{2}\left(2x+\frac{\delta}{2}\right)>\frac{\delta}{2}\cdot 2x=1=\varepsilon$$

■

תרגיל טוב הוא להוכיח ש־$\sin x^2$ אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

משפט 11. תהאנה $f,g\colon A\to\mathbb{R}$. נניח כי f רציפה במידה שווה ב־A וגם g רציפה במידה שווה ב־A. אז:

- $f\pm g$ רציהפ במידה שווה ב־A.
- אם f ו־g חסומות ב־A, אז fg רציפה במידה שווה.

משפט 12 (משפט קנטור (עוד אחד)). תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$. אם f רציפה ב־A וגם A קומפקטית, אז f רציפה במידה שווה ב־A.

הוכחה. נניח בשלילה ש־f אינה רציפה במידה שווה ב־A. אז קיים $\varepsilon_0>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימים $x_n,y_n\in A$ כך ש־$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ וגם $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$. אז $\lim_{n\to\infty}x_n-y_n=0$. A חסומה ולכן x_n חסומה. לכן מ־BW קיימת לה ת"ס מתכנסת x_{n_k}. נסמן גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0\in A$. ידוע ש־$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}-y_{n_k}=0$ שכן כל ת"ס של סדרה מתכנסת מתכנסת לאותו הגבול. לכן מאריתמטיקה $\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=x_0$. מהרציפות $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(x_0)$ בסתירה לכך ש־$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon_0$ לכל $k\in\mathbb{N}$. לכן f רציפה במידה שווה ב־A. ■

משפט 13. יהיו $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. נניח $a<b$. יהי $a<c<b$. תהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה במידה שווה ב־(a,c) וכן f רציפה במידה שווה ב־$[c,b)$, אז f רציפה במידה שווה ב־(a,b).

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. ידוע ש־f רב"ש ב־$(a,c]$ ולכן קיים $\delta_1>0$ כך ש־$\forall x,y\in(a,c]$ אם $|x-y|<\delta_1$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. f רציפה במ"ש ב־$[c,b)$ לכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x,y\in[c,b)$, אם $|x-y|$ אז $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהיו $x,y\in(a,b)$. נניח $|x-y|<\delta$. נפרק למקרים.

- אם $x,y\geq c$ אז מכיוון ש־$|x-y|<\delta\leq\delta_2$ נובע ב־$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- אם $x,y\leq c$ אז מכיוון ש־$|x-y|<\delta\leq\delta_1$ נובע ב־$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- אם $x\leq c\leq y$ אז $|c-x|<|y-x|<\delta_1$ ולכן $|f(c)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. אז $|y-c|<|y-x|<\delta_2$ ולכן $|f(c)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. ניעזר בא"ש במשולש:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(c)|+|f(c)-f(y)|=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

- נניח $y\leq c\leq x$. בדומה. ■

"אתה לא רוצה לשדר זלזול. מקרה 4 בדומה".

תרגיל 1. נניח ש־f רציפה במידה שווה ב־(a,c) ו־(b,c), ורציפה ב־c (כאשר $a<c<b$). נוכיח ש־f רציפה במידה שווה ב־(a,b).

משפט 14. הפונקציה $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[0,\infty)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$.

- יהיו $x,y\in[1,\infty)$. נניח $|x-y|<\delta$ עבור $\delta=\varepsilon$ ונקבל:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}<\frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\delta=\varepsilon$$

- בקטע $[0,1]$ נקבל ש־$\sqrt{x}$ רציפה ומשום שהקטע חסום היא רציפה במידה שווה לפי קנטור.

משום ש־$\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב־$[0,1]$ ו־$(1,\infty)$ סה"כ מהמשפט הקודם היא רציפה במ"ש. ■

משפט 15. תהא $f\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח f רציפה וגם קיים וסופי $\lim_{x\to\infty}f(x)$. הראו כי f רציפה במ"ש ב־$[a,\infty)$.

הוכחה. ויהי $\varepsilon>0$. אז קיים $M>0$ כך שלכל $x,y>M$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (קושי). הקטע $[a,M]$ הוא קטע קומפקטי, ומשום ש־f רציפה בו ולפי קנטור f רציפה בו במידה שווה. לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,M]$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f()|<\frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$\delta$. יהיו $x,y\in[a,\infty)$. נניח בה"כ $x\leq y$. נפרק למקרים.

- נניח $M\leq x\leq y$, מכיוון ש־$|x-y|<\delta$ נובע ש־$|(|f(x)-f(y))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- נניח $x\leq y\leq M$, נובע ש־$|(|f(x)-f(y))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- אם $x\leq M\leq y$ מא"ש המשולש:

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(M)|+|f(M)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן f רציפה במידה שווה ב־$[a,\infty)$.

■

הערה 4. לא היה עובד להשתמש במשפט של האיחוד קטעים כאן - כי M תלוי ב־ε.

הערה 5. זה לא אמ"מ. לדוגמה $\sqrt{x}$ או x.

משפט 16. יהי $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח $a < b$. תהא $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ רציפה. אז f רציפה במידה שווה ב־(a,b) אמ"מ קיימים ל־f הגבולות ב־a וב־b והסם סופיים.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נסמן $\ell = \lim_{x\to a^+} f(x)$ ו־ $m = \lim_{x\to b^-}$. נגדיר:

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \ell & x = a \\ f(x) & x \in (a,b) \\ m & x = b \end{cases}$$

נבחין ש־F רציפה ב־$[a,b]$ ולפי קנטור, F רציפה במידה שווה ב־$[a,b]$. לכן $f = F|_{(a,b)}$ רציפה במידה שווה ב־(a,b).

$\Longleftarrow$ רוצים להוכיח שקיים גבול סופי ואין לנו מושג מה הוא. כלומר זה כנראה קושי. נניח כי f רציפה במ"ש ב־(a,b). יהי $\varepsilon > 0$ וידוע קיום $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in (a,b)$ אם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. נתבונן ב$\delta$. יהיו $x, y \in (a, a+\delta)$. אז $|x-y| < \delta$ ולכן $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. לפי קריטריון קושי יש ל־f גבול סופי ב־a מימין. באופן דומה יש ל־f גבול סופי משמאל ב־b. ■