

# מתמטיקה בדידה – תרגיל בית 14 – שחר פרץ

## מידע כללי

ניתן בתאריך:  
21.2.2024

תאריך הגשה:  
27.2.2024

מאת:  
שחר פרץ

ת.ז.:  
תחפשו בקומיטים הקודמים

## תרגיל בית 14 – עוצמות

### שאלה 1

יהיו  $A, A', B, B'$  קבוצות. נניח  $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ . לכן קיימים זיווגים  $h_A: A \rightarrow A', h_B: B \rightarrow B'$ .

#### סעיף (א)

נוכיח  $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$ . נבחר זיווג  $h = \lambda \mathcal{A} \in \mathcal{P}(A). \{h_A(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$ . נוכיח שהוא זיווג:

על: תהי קבוצה  $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(A)$ . נבחר  $\mathcal{A}' = \{h_A^{-1}(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$  (כאשר ידוע  $h_A$  הפיכה כי  $h_A$  זיווג), נחשב:

$$h(\mathcal{A}') = \{h_A(a) \mid a \in \{h_A^{-1}(a) \mid a \in \mathcal{A}\}\} = \{h_A(h_A^{-1}(a)) \mid a \in \mathcal{A}\} = \{a \mid a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

חח"ע: נניח  $h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{B})$ , לכן  $\{h_A(a) \mid a \in \mathcal{A}\} = \{h_A(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$  וסה"כ משוויון קבוצות:

$$b \in \mathcal{B} \wedge c = h_A(b) \iff a \in \mathcal{A} \wedge c = h_A(a)$$

ומטרנזיטיביות  $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}. h_A(a) = h_A(b) \implies a = b$  ומשום ש- $h_A$  זיווג חח"ע אז  $\forall a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}. a = b$  כלומר  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  כדרוש ■

#### סעיף (ב)

נניח  $A, B$  זרות ונניח  $A', B'$  זרות. נוכיח  $|A \uplus B| = |A' \uplus B'|$ .

$$h = \lambda x \in A \uplus B. \begin{cases} h_A(x) & \text{if } x \in A \\ h_B(x) & \text{if } x \in B \end{cases}, h: A \uplus B \rightarrow A' \uplus B'$$

נוכיח שהוא זיווג.

על: תהי  $\mathcal{A} \in A \uplus B$ . נבחר  $\mathcal{A}' = \left\{ \begin{cases} h_A^{-1}(x) & \text{if } x \in A' \\ h_B^{-1}(x) & \text{if } x \in B' \end{cases} \mid x \in \mathcal{A} \right\}$ . נתבונן ב- $h(\mathcal{A}')$  ומפילוג למקרים (אם  $x \in A' \wedge x \notin B'$  או אם  $x \in A' \wedge x \notin B'$ ) נמצא  $h(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$  כדרוש.

חח"ע: נניח  $h(A') = h(B')$  מתקיים באופן מידי מתוך שוויון פונקציות.

## שאלה 2

יהיו  $A, A', B$  קבוצות. נניח  $|A| \leq |A'|$ , כלומר קיימת  $h_A: A \rightarrow A'$  חח"ע

### סעיף (א)

נוכיח  $|B \rightarrow A| \leq |B \rightarrow A'|$ . נמצא פונקציה  $h: (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A')$  חח"ע. נבחר  $h = \lambda f \in B \rightarrow A. h_A \circ f$ .  
 נוכיח ש- $h$  חח"ע. נניח  $h(f) = h(g)$  ונניח  $f, g: B \rightarrow A$ . לכן  $h_A \circ f = h_A \circ g$  כלומר  
 $\forall x \in B. h_A(f(x)) = h_A(g(x))$  ומכיון ש- $h_A$  חח"ע אז  $f(x) = g(x) \forall x \in B$ . ומשוויון פונקציות  $f = g$  כדרוש ■

### סעיף (ב)

נוכיח  $|A \rightarrow B| \leq |A' \rightarrow B|$ . נמצא פונקציה  $h: (A \rightarrow B) \rightarrow (A' \rightarrow B)$  חח"ע. נבחר  $h = \lambda f \in B \rightarrow A. f \circ h_A$ .  
 נוכיח ש- $h$  חח"ע. נניח  $h(f) = h(g)$  ונניח  $f, g: B \rightarrow A'$ . לכן  $f \circ h_A = g \circ h_A$  כלומר  
 $\forall x \in A. f(h_A(x)) = g(h_A(x))$  ומכיון ש- $h_A$  חח"ע אז  $f(x) = g(x) \forall x \in B$ . ומשוויון פונקציות  $f = g$  כדרוש ■

## שאלה 3

### סעיף (א)

נוכיח  $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}|$ . נבחר פונקציה  $h: \mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}), h = \lambda n \in \mathbb{N}. (\lambda m \in \mathbb{N}. n)$ .  
 נוכיח  $h$  חח"ע. נניח  $h(n) = h(m)$  ונניח  $n, m \in \mathbb{N}$ . לכן  $n = \lambda x \in \mathbb{N}. n = \lambda x \in \mathbb{N}. m$  ומכלל  $\eta$  סה"כ  $\forall x \in \mathbb{N}. n = m$  כלומר  $n = m$  כדרוש ■

### סעיף (ב)

נוכיח  $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}|$ . נבחר פונקציה:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}), h = \lambda r \in \mathbb{R}. \left( \lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 1 & \text{if } x = r \\ 0 & \text{else} \end{cases} \right)$$

נוכיח  $h$  חח"ע. נניח  $h(r_1) = h(r_2)$  ונניח  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ . נסמן  $f_1 = h(r_1), f_2 = h(r_2)$ . מכלל  $\eta$ , יהי  $x \in \mathbb{R}$  נקבל  
 $f_1(x) = f_2(x)$ . נניח בשלילה  $r_1 \neq r_2$  ונתבונן ב- $x = r_1$ . נקבל  $f_1(x) = 1 \wedge f_2(x) = 0$  ולכן  $f_1(x) \neq f_2(x)$  וזו סתירה.  
 על-כן  $x_1 = x_2$  כדרוש ■

### סעיף (ג)

נוכיח  $|\mathbb{Z}| = |\{0, 1\} \times \mathbb{N}|$  משום ש- $|\{0, 1\}| = |\{-1, 1\}|$  נוכל להוכיח באופן שקול  $|\mathbb{Z}| = |\{-1, 1\} \times \mathbb{N}|$ . נבחר פונקציה  
 $h: \mathbb{Z} \rightarrow (\{0, 1\} \times \mathbb{N}), h = \lambda z \in \mathbb{Z}. \langle \frac{z}{|z|}, |z| \rangle$  ונוכיח  $h$  חח"ע ועל.

**חח"ע:** יהיו  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ , נניח  $h(z_1) = h(z_2)$  ונוכיח  $z_1 = z_2$ . מההנחה  $\langle \frac{z_1}{|z_1|}, |z_1| \rangle = \langle \frac{z_2}{|z_2|}, |z_2| \rangle$  ומהתכונה המרכזית של זוג סדור  $\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{z_2}{|z_2|} \wedge |z_1| = |z_2|$  נכפיל את המשוואות ונקבל  $\frac{z_1}{|z_1|} |z_1| = \frac{z_2}{|z_2|} |z_2|$ , נחשב ונקבל  $z_1 = z_2$  כדרוש.

**על:** יהי  $\langle b, n \rangle \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$ , כלומר  $b = -1 \vee b = 1 \wedge n \in \mathbb{N}$ . נבחר  $z = bn$  ונוכיח  $h(z) = \langle b, n \rangle$ . נחשב ונקבל שצריך להוכיח  $\langle \frac{bn}{|bn|}, |bn| \rangle = \langle b, n \rangle$ . ידוע  $n = |n|$  ומפיצול למקרים  $|b| = 1$ , לכן,  $\frac{bn}{|bn|} = \frac{bn}{n} = b$  וגם  $|bn| = 1n = n$  כדרוש מהתכונה המרכזית של זוג סדור ■

## שאלה 4

### סעיף (א)

צ.ל.  $[0, 1] \sim [2, 7]$ . נבחר זיווג  $\frac{x-1}{6}$ .  $h = \lambda x \in [2, 7]$ . נוכיח ש- $h$  זיווג.  
**חח"ע:** נניח  $h(x) = h(y)$ , כלומר  $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{6}$ . נכפיל את האגפים ב-6 ונוסיף 1. סה"כ  $x = y$  כדרוש.  
**על:** יהי  $x \in [0, 1]$ , נבחר  $y = 6x + 1$ .  $h(y) = \frac{6x+1-1}{6} = x$ .  $h$  כדרוש. ■

### סעיף (ב)

צ.ל.  $[0, 1] \times [0, 1] \sim [2, 7] \times [2, 7]$ . בהתאם לטענה נתונה, תנאי מספיק לכך הוא ש- $[0, 1] \sim [2, 7]$ , שהוכחנו בסעיף (א) בלי תלות בסעיף זה ■

### סעיף (ג)

צ.ל.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}} \sim \mathbb{N} \rightarrow \{5, 6\}$ . נבחר זיווג  
 $h: (\{5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}), h = \lambda f \in \{5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}. \langle f(5), 2f(6) \rangle$

נוכיח ש- $h$  זיווג.

**חח"ע:** יהי  $f, g \in \{5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}$ . נניח  $h(f) = h(g)$ . לכן,  $\langle f(5), 2f(6) \rangle = \langle g(5), 2g(6) \rangle$  ובאופן שקול  $f(5) = g(5) \wedge 2f(6) = 2g(6)$ . נחסר 1 ונחלק את האגפים ב-2, נקבל  $f(5) = g(5) \wedge f(6) = g(6)$  כלומר  $f = g$  כדרוש.

**על:** יהי  $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}$ , כלומר  $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ . לכן, קיים  $k$  טבעי כך ש- $b = 2k$ . נעביר אגפים ונקבל  $k = \frac{b}{2}$ . נבחר  $f = \{ \langle 5, a \rangle, \langle 6, k \rangle \}$  ונוכיח  $h(f) = \langle a, b \rangle$ . נסיק,  $h(f) = \langle f(5), 2f(6) \rangle = \langle a, 2 \cdot \frac{b}{2} \rangle = \langle a, b \rangle$  כדרוש ■

### סעיף (ד)

צ.ל.  $\mathbb{Z} \times [0, 7) \sim \mathbb{R}$ . נבחר בזיווג  $\frac{r}{7}$ .  $h = \lambda \langle z, r \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7)$ . נוכיח  $h$  זיווג.

**חח"ע:** יהי  $\langle z_1, r_1 \rangle, \langle z_2, r_2 \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7)$ . נניח  $h(x_1) = h(x_2)$ . לפיכך,  $z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7}$ . יהי  $r \in [0, 7)$ , נסיק  $0 \leq r \wedge r > 7$ . נחלק אגפים ב-7 ונקבל  $0 \leq \frac{r}{7} < 1$  כלומר  $\frac{r_1}{7}, \frac{r_2}{7} \in [0, 1)$ . נניח בשלילה  $z_1 \neq z_2$  ונקבל  $z_1 \leq z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7} < z_2 + 1$  וגם  $z_1 + 1 > z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7} \geq z_2$  כלומר  $z_1 < z_2 + 1$  ובאופן דומה

**על:** יהי  $x \in \mathbb{R}$ . נבחר  $x' = \langle [x], 7(x - [x]) \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7)$  לכך  $x' = \langle [x], 7(x - [x]) \rangle$  נכון.  $h(x') = [x] + \frac{7(x - [x])}{7} = [x] + x - [x] = x$

צ.ל.  $\{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_+$ . נבחר זיווג  $\sqrt{a} + 4b$ .  $h: (\{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ .  $h = \langle a, b \rangle \in \{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N}$ . נוכיח  $h$  זיווג.

**על:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  נתבונן ב- $a = (n - 4b)^2$ ,  $b = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ . נקבל  $n - 4b + 4b = n$ .  
 $h(\langle a, b \rangle) = \sqrt{(n - 4b)^2} + 4b = n - 4b + 4b = n$  נקבל  $b = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ ,  $a = (n - 4b)^2$ .  
 נוכיח:  $a \in \{1, 4, 9, 16\}$  או באופן שקול  $n - 4b = \sqrt{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$ .  
 ידוע  $n - 4b = n - 4 \lceil \frac{n}{4} \rceil = n \bmod 4$ .  
 את תחום ההגדרה המתאים כדרוש. ■

צ.ל.  $\mathbb{R} \sim (3, 4) \cup (5, 7]$ . נבחר זיווג:

בוכיח ש- $f$  זיווג.

- אם  $x < 0$ : נמצא  $r \in (3, 4)$  מתאים, כלומר:

כאשר  $\frac{4x-3}{x-1}$  מוגדר לכל  $x \neq 1$  ו- $x \neq 4$ , כששניהם פסוקי אמת תחת ההנחות. נוכיח ש- $r$  בתחום המתאים. נניח בשלילה שהוא אינו, ונגיע לסתירה בכל אחד מהמקרים:

IV

[הערה: הסימן הוחלף כי לכל  $x$  בתחום ההגדרה  $x - 1 < 0$ ]. סה"כ הגענו לשקילות לפסוקי אמת כדרוש.

• באופן דומה (רק על מספרים אחרים), אם  $x \geq 0$  אז נבחר  $r = \frac{5x+7}{x+1}$ .

**חח"ע:** יהי  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ונניח  $f(x_1) = f(x_2)$ . נפלג למקרים:

• אם  $x_1 \in (3, 4) \wedge x_2 \in (5, 7]$  אז:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1 - 4} + 1 &= \frac{2}{x_2 - 5} - 1 \\ 1 + x_2 - 5 &= 2 - x_1 + 4 \\ -5 &= x_2 - x_1\end{aligned}$$

זאת בסתירה לכך ש- $-2 = 3 - 7 = x_2 - x_1$ .

• באופן דומה, אם  $x_1 \in (5, 7] \wedge x_2 \in (3, 4)$  נגיע לסתירה גם כן.

• אם  $x_1 \in (3, 4) \wedge x_2 \in (3, 4)$  אז  $\frac{1}{x_1 - 4} = \frac{1}{x_2 - 4}$  ולכן  $x_1 = x_2$  כדרוש.

• אם  $x_1 \in (5, 7] \wedge x_2 \in (5, 7]$  אז  $\frac{1}{x_1 - 5} = \frac{1}{x_2 - 5}$  ולכן  $x_1 = x_2$  כדרוש.

סה"כ כיסינו את כל המקרים ■

## סעיף (ז)

נוכיח  $[0, 1] \sim [0, 1] \cup \{2\}$ . נמצא זיווג מתאים. נבחר את הזיווג להלן:

$$f : [0, 1] \cup \{2\} \rightarrow [0, 1], f = \lambda x \in \mathbb{R}. \begin{cases} 1 & \text{if } x = 2 \\ \frac{1}{n+1} & \exists n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n} = x \\ x & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח ש- $f$  זיווג. [הערה: הפונקציה מוגדרת היטב כי  $\frac{1}{n} = x$  מתאים  $n$  באופן חח"ע [מצמצום] לכל  $x$  שונה]

**חח"ע:** יהי  $x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R}$ . נניח  $h(x_1) = h(x_2)$ . בה"כ, נפלג למקרים (לא אציין מקרים שנכונים באופן ריק).

• אם  $x_1 = 2 \wedge \exists n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n} = x_2$ , נציב בהגדרת הפונקציה לעיל, נסיק  $h(x_2) := \frac{1}{n+1} = 1 = h(x_1)$ . לאחר מעבר אגפים  $1 = n + 1$  כלומר  $n = 0$ , ולכן  $x_2 = \frac{1}{0} \in \emptyset$  וזו סתירה כי  $x_2$  מוגדר.

• אם  $x_1 = 2 \wedge \forall n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n} \neq x_1$ , אז  $h(x_1) := 2 = x_2 = h(x_2)$  ומטרנזיטיביות  $x_2 = x_1$  כדרוש.

• אם  $x_1 = \frac{1}{n} \wedge \forall n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n} \neq x_1$ , ידוע  $h(x_2) := \frac{1}{n+1} = x_2 := h(x_1)$ , כלומר קיים  $n' = n + 1 \in \mathbb{N}$  כך ש- $x = \frac{1}{n'}$  וזו סתירה.

**על:** יהי  $x \in [0, 1]$ . נניח בשלילה שלא קיים  $r \in [0, 1] \cup \{2\}$  כך ש- $h(r) = x$ . נסיק, שכל המקרים אינם תקפים ובפרט המקרה אחרון, כלומר  $x \neq r$ , בסתירה לכך שזה עובד בעבור  $r = x$  (ההנחה בשלילה כאן מאפשרת להתעלם משאר המקרים), כדרוש ■

## סעיף (ח)

נוכיח  $\mathbb{R} \sim [0, 1] \cup \mathbb{N}$ . נמצא  $f : [0, 1] \cup \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  זיווג מתאים.

$$f = \lambda x \in [0, 1] \cup \mathbb{N}. \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{if } x \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2n+1} & \text{if } \exists n \in \mathbb{N}. a = \frac{1}{n} \\ x & \text{else} \end{cases}$$

נוכיה ש- $f$  זיווג. [הערה: הפונקציה מוגדרת היטב כי  $\frac{1}{2n+1} = x$  מתאים  $n$  באופן חח"ע [מצמצום] לכל  $x$  שונה]

**חח"ע:** יהי  $x_1, x_2 \in [0, 1] \cup \mathbb{N}$ , נניח  $h(x_1) = h(x_2)$ . נוכיח  $x_1 = x_2$ . נפלג למקרים (אתעלם ממקרים הנכונים מסימטריה, וממקרים בעבורם  $x_1, x_2$  מקיימים את אותו התנאי כך שניתן להוכיח בעזרת פישוט אלגברי פשוט):

- אם  $x_1 \in \mathbb{N} \wedge \exists n \in \mathbb{N}. x_2 = \frac{1}{n} \wedge x_2 \notin \mathbb{N}$  נציב:  $h(x_2) := \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2x_1} := h(x_1)$ . נעלה את המשוואה ב- $()^{-1}$ . נקבל  $2x_1 = 2n + 1$ . ידוע  $n = \frac{1}{x_2}$  וסה"כ  $x_1 = \frac{1}{x_2} + 0.5$ . משום ש- $x_2 \notin \mathbb{N}$  אז  $\frac{1}{x_2}$  לא מתחלק ב-0.5 ולכן הסכום אינו שלם, בסתירה לכך ש- $x_1$  טבעי.

- אם  $\exists n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n} = x_1 \wedge \forall n' \in \mathbb{N}. \frac{1}{2n'+1} \neq x_2 \wedge x_2, x_1 \notin \mathbb{N}$  אז  $h(x_1) := \frac{1}{2n+1} = x_2 := h(x_2)$ . נעביר אגפים, נקבל  $2x_2n + x_2 = 1$  ומכאן  $2x_2n = -x_2$  מההנחות לעיל  $x_2 \neq 0$  ולכן נוכל לחלק ב- $2x_2n$ , ונקבל  $1 = \frac{-x_2}{2x_2n} = -\frac{1}{2n}$ . נציב ונקבל  $-x_1 = 1$  כלומר  $x_1 = -1$  ולכן  $x_2 = \frac{1}{-2+1} = -1$  וסה"כ  $x_1 = x_2$  כדרוש. [וזו גם סתירה אבל זה לא גורע מההוכחה]

- אם  $\forall n' \in \mathbb{N}. \frac{1}{2n'+1} \neq x_2 \wedge x_2 \notin \mathbb{N} \wedge x_1 \in \mathbb{N}$  אז  $h(x_1) := \frac{1}{2x_1} = x_2 := h(x_2)$ . משום ש- $2x_1 \in \mathbb{N}$  אזי קיים  $n' \in \mathbb{N}$  מתאים וזו סתירה.

סה"כ כיסינו את כל המקרים הלא-טרוויאליים, והגענו לסתירה/פסוק אמת, כדרוש

**על:** באופן דומה לסעיף (ז) ■

## שאלה 5

### סעיף (א)

נגדיר:

$$R = \{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2 + 2 \}$$

נבחר  $h: \mathbb{R}^2/R \rightarrow \mathbb{R}, h = \lambda[\langle x, y \rangle]_R \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/R. x + y$  נוכיח זאת:

**מוגדרת היטב:** יהי  $\langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  ונניח  $\neg \langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle$  כלומר  $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$ . נחשב ונמצא  $h(\langle x_1, y_1 \rangle) = x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2 = h(\langle x_2, y_2 \rangle)$  כדרוש.

**חח"ע:** יהי  $[\langle x_1, y_1 \rangle]_R, [\langle x_2, y_2 \rangle]_R \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/R$ . נניח אי שקילות, כלומר  $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$ . נסיק  $h([\langle x_1, y_1 \rangle]) = x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2 = h([\langle x_2, y_2 \rangle])$  כדרוש.

**על:** יהי  $x \in \mathbb{R}$ . נבחר  $[\langle 0, r \rangle]$ , נסיק  $h([\langle 0, r \rangle]) = 0 + r = r$  כדרוש. ■

### סעיף (ב)

תהי  $f: \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ . נניח  $f = \lambda A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}). A \cup \mathbb{N}$ . נגדיר:

$$S = \{\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \min(f(A)) = \min(f(B))\}$$

נבחר  $h: \mathcal{P}(\mathbb{Z})/S \rightarrow \mathbb{N}, h = \lambda[A]_S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}). \min(f(A))$  כי  $\text{range}(f) = \mathbb{N}$  וכי  $\text{range}(\min(x)) = x$  ולכן  $\min(f(A)) = \mathbb{N}$  זיווג מוגדר היטב. נוכיח זאת:

**מוגדר היטב:** יהי  $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ , נניח  $\neg ASB$  כלומר  $\min(f(A)) \neq \min(f(B))$ . נחשב ונמצא  $h(A) = \min(f(A)) \neq \min(f(B)) = h(B)$  כדרוש.

**חח"ע:** יהי  $[A]_S, [B]_S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})/S$ , נניח  $h([A]_S) = h([B]_S)$  כלומר  $\min(f(A)) = \min(f(B))$ . לכן,  $ASB$  ובאופן שקול  $[A]_S = [B]_S$  כדרוש.

**על:** יהי  $n \in \mathbb{N}$ , נבחר  $A = [\{n\}]_S$ , נסיק  $h(A) = h([\{n\}]_S) = \min(f(\{n\})) = \min(\{n\} \cap \mathbb{N}) = \min(\{n\}) = n$  כדרוש ■

## סעיף (ג)

נגדיר:  $T = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) = \sin(y)\}$ . נוכיח  $h: \mathbb{R}/T \rightarrow [0, 1], h = \lambda[x]_T \in \mathbb{R}^2/T. \sin(x)$  מוגדר היטב.

**מוגדר היטב:** יהי  $[x]_T, [y]_T \in \mathbb{R}^2/T$ , נניח  $[x]_T \neq [y]_T$  כלומר  $\neg xTy$ .  $h(x) = \sin(x) \neq \sin(y) = h(y)$  כדרוש.

**חח"ע:** יהי  $[x]_T, [y]_T \in \mathbb{R}^2/T$ , נניח  $h([x]_T) = h([y]_T)$  ונוכיח  $[x]_T = [y]_T$ . מההנחה  $\sin(x) = \sin(y)$  ובאופן שקול  $xTy$  כלומר  $[x]_T = [y]_T$  כדרוש.

**על:** יהי  $x \in [0, 1]$ . נבחר  $y = \arcsin(x)$ , נקבל  $h(y) = \sin(\arcsin(x)) = x$  כדרוש ■

## סעיף (ד)

נגדיר:  $R = \{\langle f, g \rangle \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})^2 \mid \text{Im}(f) = \text{Im}(g)\}$ . נבחר זיווג:

$$h: (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/R \rightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset), h = \lambda[f]_R \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/R. \text{Im}(f)$$

**מוגדר היטב:** יהי  $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/R$ , נניח  $[f]_R \neq [g]_R$  כלומר  $\neg fRg$ , נוכיח  $h(f) \neq h(g)$ . מההנחה  $\text{Im}(f) \neq \text{Im}(g)$ . נסיק:  $h([f]_R) = \text{Im}(f) \neq \text{Im}(g) = h([g]_R)$  כדרוש.

**חח"ע:** יהי  $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/R$ , נניח  $h([f]_R) = h([g]_R)$  ונוכיח  $[f]_R = [g]_R$ . מההנחה נקבל  $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$  ובאופן שקול  $fRg$  כלומר  $[f]_R = [g]_R$  כדרוש.

**על:** יהי  $N \in \mathbb{N} \setminus \emptyset$ . משום ש- $N$  לא ריקה, קיים בה לפחות איבר יחיד, נסמנו  $c$ . נבחר את הפונקציה:

$$f = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} n & \text{if } n \in N \\ c & \text{else} \end{cases}$$

ונוכיח  $h([f]_R) = N$  באמצעות הכלה דו כיוונית.

- $N \subseteq h([f]_R)$ : יהי  $n \in N$ , ידוע  $f(n) = n$  (כי  $n \in N$ ) ולכן  $n \in \text{Im}(f)$ , נציב ונקבל  $n \in h([f]_R)$  כדרוש.
- $h([f]_R) \subseteq N$ : יהי  $n \in h([f]_R)$ , נסיק  $n \in \text{Im}(f)$ , ולכן קיים  $a \in \mathbb{N}$  כך ש- $f(a) = n$ . נניח בשלילה  $n \notin N$ . נפצל למקרים: אם  $a \in N$  אז  $h(a) = a = n$  כלומר  $n \in N$  וזו סתירה. אם  $a \notin N$  אז  $n = h(a) = c \in N$  וזו סתירה. סה"כ  $n \in N$  כדרוש ■

## שאלה 6

יהיו  $A, B$  קבוצות ונניח  $A \sim B$ , ולכן קיימת זיווג  $h: A \rightarrow B$ . נוכיח  $H(A) \sim H(B)$ . נבחר את הזיווג  $\varphi: (A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B)$  המוגדר לפי  $\varphi = \lambda f \in A \rightarrow A. h \circ f \circ h^{-1}$ . נוכיח שהוא זיווג ע"י כך שנוכיח שהוא הופכי משני הצדדים. נבחר את הפונקציה  $h^{-1} \circ f \circ h: (B \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A)$ . ונוכיח שהיא הופכית.

• הופכי מימין: נוכיח  $\varphi \circ \psi = id_{B \rightarrow B}$ :

$$\forall f \in B \rightarrow B. (\varphi \circ \psi)(f) = \varphi(\psi(f)) = \varphi(h^{-1} \circ f \circ h) = \underbrace{h \circ h^{-1}}_{id_B} \circ f \circ \underbrace{h \circ h^{-1}}_{id_B} = f$$

• הופכי משמאל: נוכיח  $\varphi \circ \psi = id_{A \rightarrow A}$ :

$$\forall f \in A \rightarrow A. (\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varphi(f)) = \psi(h \circ f \circ h^{-1}) = \underbrace{h^{-1} \circ h}_{id_A} \circ f \circ \underbrace{h^{-1} \circ h}_{id_A} = f$$

סה"כ  $\varphi$  הופכית, ולכן זיווג ■

## שאלה 7

תהי קבוצה  $A$ . נסמן  $S(A)$  כקבוצת כל יחסי הסדר החזקים על  $A$  וב- $W(A)$  את כל יחסי הסדר החלשים. נוכיח  $S(A) \sim W(A)$ . נבחר זיווג  $F: S(A) \rightarrow W(A)$  המוגדר לפי  $F = \lambda s \in S(A). id_A \cup s$ . נוכיח ש- $F$  זיווג.

חח"ע: יהי  $s_1, s_2 \in S(A)$ , נניח  $F(s_1) = F(s_2)$ , ונוכיח  $s_1 = s_2$ . נשתמש בטענות עזר:

• [1]  $id_A$  ו- $s \in S(A)$  קבוצות זרות: נניח בשלילה שקיים  $x \in s \wedge x \in id_A$ , לפיכך קיים  $a \in A$  (אם  $A \neq \emptyset$ ), ובמידה ו- $A = \emptyset$  אזי  $A = \{\emptyset\} \neq \emptyset = A$  (כדורש)  $S(A) = \{\emptyset\}$  כך ש- $x = \langle a, a \rangle \in s$ , ולכן  $\langle a, a \rangle \in s$  משום ש- $s$  יחס סדר חזק ובפרט אנטי-סימטרי חזק, אזי  $\langle a, a \rangle \in S$ .  $\langle b, a \rangle \in S$ , ובפרט עבור  $\langle a, a \rangle$  כלומר נגרר  $\langle a, a \rangle \notin S$  וזו סתירה. סה"כ  $s \cap id_A = \emptyset$  כדורש.

• [2]  $A \cup B = C \cup B$  ונניח  $A, B$  ו- $A, C$  זרות זרות [2], נוכיח  $A = C$ . נשתמש בהכלה דו-כיוונית. נוכיח  $A \subseteq C$  ו- $C \subseteq A$  יתקיים באופן דומה. יהי  $a \in A$ , כלומר  $a \in A \cup B$ , נגרר  $a \in C \cup B$  [1], אם  $a \in C$  אז גמרנו, אם  $a \in B$  אז  $a \in B \wedge a \in A$  כלומר  $a \in B \cap A$  ובפרט  $a \in B, A$  אינן זרות וזו סתירה [2], לכן סה"כ  $A \subseteq C$  ובאופן דומה  $C \subseteq A$  כלומר  $A = C$  כדורש.

ידוע  $id_A \cup s_1 = id_A \cup s_2$  משום ש- $s_1, s_2 \in S$  אז מ- [1] נקבל  $s_1 \cap id_A = \emptyset \wedge s_2 \cap id_A = \emptyset$ . סה"כ מטענה (2) נקבל  $s_1 = s_2$  כדורש.

על: יהי  $w \in W(A)$ , ונבחר  $s = w \setminus id_A$ . מההנחה  $w$  יחס סדר חלש ומטענה נתונה נקבל  $s$  יחס סדר חזק. נותר להוכיח  $F(s) = w$ . נקבל:  $F(s) = (w \setminus id_A) \cup id_A$ . נוכיח  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ : יהי  $x \in (A \setminus B) \cup B$ , נמצא שקילות:



$$x \in (A \setminus B) \cup B \quad (1)$$

$$\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B \quad (2)$$

$$\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \notin B) \quad (3)$$

$$\iff \neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee \underline{(x \in B \wedge x \notin B)}) \quad (4)$$

$$\iff \neg(x \notin A \wedge x \notin B) \quad (5)$$

$$\iff x \in A \vee x \in B \quad (6)$$

$$\iff x \in A \cup B \quad (7)$$

וסה"כ  $F(s) = (w \setminus id_A) \cup id_A = w \cup id_A$  מההנחה  $w \in W(A)$  נסיק  $w$  יחס סדר חלש ובפרט רפלקסיבי, ולכן  
 ■ באופן שקול  $w \cup id_A = w$  מטרנזיטיביות  $F(s) = w$  כדרוש

~ סוף ~

**X**