חדו"א 1א - תרגיל 8

1. חשבו 10 מהגבולות הבאים לבחירתכם:

א. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1983}-(1+1983x)}{x^2+x^{1983}}$

ג. $\lim_{x\to\infty}(e^x-1)^{1/x}$

ד. $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

ה. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

ו. $\lim_{x\to 0} x\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2}$

ז. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

ח. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$

ט. $\lim_{x\to 0}\ \frac{a^x-1}{x}\ \ a>0$

י. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right],\ a,b>0$

י"א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)},\ \alpha,\beta\neq 0$

י"ב. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$

י"ג. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$

י"ד. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

ט"ו. $\lim_{x\to\infty}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}$

ט"ז. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot\sin 2x}$

י"ז. $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

י"ח. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ עבור $a>0$

י"ט. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(\alpha x))}{\log(\cos(\beta x))}$ עבור $\alpha,\beta\neq 0$

כ. $\lim_{x\to\infty}\left(\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2+\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ ★

כ"א. $\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ ★

2. תהיינה $x_0\neq x_1$ שתי נקודות כלשהן. מצאו דוגמא לפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בדיוק ב־x_0 ו־x_1.

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f,g לא רציפות בנק' x_0 אזי $f+g$, $f\cdot g$ אינן רציפות ב x_0.

(ב) אם f רציפה בנק' x_0 ו g אינה רציפה בנק' x_0 אזי $f+g, f\cdot g$ אינן רציפות ב x_0.

(ג) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז היא משיגה ערך מקסימלי ו/או ערך מינימלי ב־$\mathbb{R}$.

4. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ המקיימת $f(x)>x$ לכל $x\in[0,1]$. הוכיחו כי קיים $h>0$ כך ש $f(x)>x+h$ לכל $x\in[0,1]$.

5. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) מצאו דוגמה לפונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקבלת כל ערך ב $\mathbb{R}$ בדיוק 3 פעמים.

(ב) האם קיימת פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקבלת כל ערך בדיוק פעמיים?

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה עם $f(0)=f(1)$. הוכיחו כי למשוואה $f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ יש פתרון $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(ב) יהיו $a_1,a_2,a_3>0$ ו $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ מספרים כלשהן. הראו כי למשוואה הבאה יש בדיוק שני פתרונות:

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

7. נתונה פונקציה רציפה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ הוכיחו כי לכל n נק': $x_1,\ldots,x_n\in(a,b)$ קיימת נק' $x\in(a,b)$ כך ש:

$$f(x)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$$

8. הוכיחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון:
   (א) $(1-x)\cos x=\sin x$ בקטע $(0,1)$.
   (ב) לכל $\alpha>0$, המשוואה $\cot x=\alpha x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.
9. הוכיחו כי למשוואה $|P(x)|=e^x$, כאשר $P(x)$ פולינום (שאינו 0) , יש לפחות פתרון ממשי אחד.
10. הוכיחו כי פונקציה מחזורית ורציפה ב־$\mathbb{R}$ מקבלת מקסימום ומינימום.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. הוכיחו כי אם f חסומה בסביבת נקודה x_0 , וכן $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$, אז $\lim_{x\to x_0}g(x)f(x)=0$
   (א) על פי הגדרת הגבול לפי היינה.
   (ב) על פי הגדרת הגבול לפי קושי.
2. נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\ln(5x+1)} & x>0\\ \frac{2x+\alpha}{x+3} & x\le 0\end{cases}$$

   עבור אילו ערכי α קיים ל־f גבול בנקודה $x_0=0$?
3. הוכיחו את קיום הגבולות הבאים לפי קושי והיינה. אם הגבול אינו קיים, הוכיחו זאת.
   (א) $\lim_{x\to\infty}x\sin x$ אינו קיים.
   (ב) $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$, עבור $a>1$.
4. עבור הפונקציות הבאות, הוכיחו/הפריכו את קיום הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$.
   (א) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ \sin|x| & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$, עבור:
      i. $x_0\in\{\pi n,\, n\in\mathbb{Z}\}$
      ii. $x_0\in\mathbb{R}\backslash\{\pi n,\, n\in\mathbb{Z}\}$
   (ב) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$, עבור:
      i. $x_0\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
      ii. $x_0\in\{-1,1\}$
5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=1$$

   רמז: השתמשו באי שוויון ברנולי.

6. חשבו את $f \circ g$ ואת $g \circ f$ עבור f, g הבאות:

(א) $f\left(x\right)=x^{2}, g\left(x\right)=\frac{1}{x+1}$

(ב) $f\left(x\right)=e^{x}, g\left(x\right)=\frac{1}{x}$

7. נתון $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^{2}$, לכל $x\neq-1$. מצאו בצורה מפורשת את $f(x)$, לכל $x\neq1$.

8. חשבו את הגבולות הבאים: