אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 12

בכל השאלות ניתן להשתמש במשפט ז'ורדן.

.1

(א) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, $T:V\to V$ העתקה ליניארית ונגדיר $S=T-\mathrm{Id}$. הוכיחו כי $\deg m_T=\deg m_S$ כאשר m_T,m_S הם הפולינומים המינימליים של T,S (רמז: נסמן $m_T=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i$ ($a_k=1$). מיצאו ביטוי מפורש ל־ m_S באמצעות $a_0,\dots,a_k$).

(ב) יהי $V=M_n(\mathbb{C})$ ונגדיר $T:V\to V$ על ידי $T(A)=A^t$. מיצאו את הפולינום המינימלי של T.

(ג) עבור V מהסעיף הקודם, נגדיר $S(A)=A^t-A$. מיצאו את הפולינום המינימלי של S.

(ד) מיצאו את הפולינום האופייני של S (תזכורת: אוסף המטריצות הסימטריות הוא תת־מרחב של V ממימד $\frac{n(n+1)}{2}$ ואוסף המטריצות האנטי־סימטריות (מטריצות שמקיימות $A^t=-A$) הוא תת־מרחב ממימד $\frac{n(n-1)}{2}$).

2. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצות הבאות (כמו תמיד, עד כדי שינוי סדר הבלוקים):

(א) $$A=\begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1\\ 0 & n & & 3 & 2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & & n & n-1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}.$$

(ב) $$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 2 & 3 & & 0\\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

(ג) $$C=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & & 0\\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \alpha & 0 & & 0\\ & \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha\end{pmatrix}$$ כלומר, $$C_{ij}=\begin{cases}\alpha & i=j\\ 1 & j=i+2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$ (α סקלר כלשהו).

3. בסעיפים הבאים נתונים הפולינום האופייני והמינימלי של מטריצה ריבועית A. מיצאו את כל האפשרויות לצורת ז'ורדן של A

(א) $p_A(x)=(x+10)^7$, $m_A(x)=(x+10)^3$

(ב) $p_A(x)=(x-3)^4(x-5)^4$, $m_A(x)=(x-3)^2(x-5)^3$.

4. בכל סעיף מיצאו $n\in\mathbb{N}$ ושתי מטריצות ז'ורדן $J_1,J_2\in M_n(\mathbb{R})$ המקיימות:

(א) ל־ J_1,J_2 יש אותו פולינום אופייני אבל פולינום מינימלי שונה.

(ב) ל־ J_1,J_2 יש אותו פולינום מינימלי אבל פולינום אופייני שונה.

(ג) ל־ J_1,J_2 יש אותו פולינום אופייני ומינימלי, אבל יש ערך עצמי עם ריבוי גיאומטרי שונה ביחס לכל אחת.

~~(ד)~~ ל־ J_1, J_2 יש אותו פולינום אופייני ומינימלי, ולכל ערך עצמי יש את אותו הריבוי הגיאומטרי ביחס ל־ J_1, J_2, אבל **לא ניתן** לקבל את J_2 על ידי שינוי סדר הבלוקים ב־ J_1.

5. יהי F שדה.

~~(א)~~ יהי $J_n(\lambda) \in M_n(F)$ בלוק ז'ורדן ($\lambda \in F$). לכל $k \in \mathbb{N}$ (כולל $k = 0$) חשבו את

$$\dim \mathcal{Z}_r((J_n(\lambda) - \lambda I)^{k+1}) - \dim \mathcal{Z}_r((J_n(\lambda) - \lambda I)^k)$$

~~(ב)~~ יהי $\mu \in F$, $\lambda \neq \mu$. לכל $k \in \mathbb{N}$ (כולל $k = 0$) הוכיחו כי $(J_n(\lambda) - \mu I)^k$ הפיכה וחשבו את

$$\dim \mathcal{Z}_r((J_n(\lambda) - \mu I)^{k+1}) - \dim \mathcal{Z}_r((J_n(\lambda) - \mu I)^k)$$

(ג) תהי $J \in M_n(F)$ מטריצת ז'ורדן ויהי λ ע"ע שלה. לכל $k \in \mathbb{N}$ (כולל $k = 0$) חשבו את

$$\dim \mathcal{Z}_r((J - \lambda I)^{k+1}) - \dim \mathcal{Z}_r((J - \lambda I)^k)$$

~~(ד)~~ נניח ש־ $A \in M_8(\mathbb{C})$ מקיימת

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Z}_r(A + 6I) = 3, &\qquad \dim \mathcal{Z}_r((A + 6I)^2) = 6 \\ \dim \mathcal{Z}_r((A + 6I)^3) = 7, &\qquad \dim \mathcal{Z}_r((A + 6I)^4) = 8 \end{aligned}$$

מיצאו את צורת ז'ורדן של A.

~~6.~~ תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ עם פולינום מינימלי $x(x-1)^k$ עבור $k \geq 0$ כלשהו. הראו כי A דומה ל־ A^2.