

תרגיל בית 2

1. חשבו את הגבולות

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin(x))}{x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(5x+3)}{\sec(\sqrt{x}+2)} \sin(\cos(x)) \right)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ (עבור $a, b > 0$)

2. הוכיחו את הזהויות הבאות עבור הפונקציות הטריגונומטריות ההיפרבוליות.

a. $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

b. $\sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \frac{x \pm y}{2} \cosh \frac{x \mp y}{2}$

c. מה תהיה הנוסחה המקבילה עבור חובור וחסור \cosh ? נחשו, ובדקו

(למשל בויקיפדיה) שהניחוש נכון.

d. $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

3. גזרו את הפונקציות הבאות לפי ההגדרה (כלומר, מצאו את הנגזרת מתוך הגדרתה כגבול).

a. \sqrt{x}

b. $\cos x$

4. גזרו את הפונקציות

a. $\ln(\tan(x))$

b. $\sin(e^{\cos(x^2)})$

5. נגזרת של פונקציה הופכית:

a. נניח כי $f: I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ גזירה והפיכה בקטע $I \subseteq \mathbb{R}$. העזרו בהרכבת פונקציות או בגזירה סתומה להראות כי הנגזרת של הפונקציה ההופכית

בנקודה $y \in J$ שבה $f(f^{-1}(y)) \neq 0$ נתונה על ידי

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

b. חשבו את הנגזרת של הפונקציות ההופכיות \arcsin , \arccos , \arctan ,

$\operatorname{arcsinh}$, $\operatorname{arccosh}$, $\operatorname{arctanh}$. עבור המקרים הלא היפרבולים, יש

להשתמש בנוסחא לנגזרת של פונקציה הופכית או גזירה סתומה. במקרים
ההיפרבולים ניתן במקום זאת לעשות שימוש בנוסחאות המפורשות שלהן
במונחי לוגריתמים.

6. העזרו בגזירה סתומה כדי למצוא את הנגזרת $y'(x)$, כאשר $y(x)$ מקיימת

$$x^2 \tan y + y^{10} \sec x = 2x$$