לינארית 2א ~ תרגיל בית 11

שחר פרץ

14 בינואר 2026

(1)

נמצא את הפירוק הפולארי של המטריצות הבאות:

(א)

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & 17 \\ -23 & 19 \end{pmatrix}$$

נתחיל מלמצוא את AA^* כדי לפרק אותה ספקטרלית.

$$AA^* = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 410 & 70 \\ 70 & 890 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 82 & 14 \\ 14 & 178 \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני כדי ללכסן אורתוגונלית:

$$\det(Ix - AA^*) = \begin{vmatrix} x - \frac{82}{5} & -\frac{14}{5} \\ -\frac{14}{5} & x - \frac{178}{5} \end{vmatrix} = \left(x - \frac{82}{5}\right)\left(x - \frac{178}{5}\right) - \frac{14^2}{5} = x^2 - 52x + 576 = (x-36)(x-16)$$

נוציא שורש לע"עים של AA^* כדי למצוא את הערכים הסינגולריים ונקבל $\sigma_1 = 6, \sigma_2 = 4$. נמצא את מטריצות המעבר באמצעות מציאת המ"עים של הע"עים של AA^*:

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} \frac{82}{5} - 36 & \frac{14}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{178}{5} - 36 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -19.6 & 2.8 \\ 2.8 & -0.4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{7}R_1} \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2.8 & -0.4 \\ 2.8 & -0.4 \end{pmatrix} \to \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2.8 & -0.4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} \frac{82}{5} - 16 & \frac{14}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{178}{5} - 16 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0.4 & 2.8 \\ 2.8 & 19.6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 7R_1} \begin{pmatrix} 2.8 & 19.6 \\ 2.8 & 19.6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2.8 & 19.6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 2.8 \\ -19.6 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 7 \\ -49 \end{pmatrix}$$

שני הוקטורים בהכרח אורתוגונליים ממשפט הפירוק הספקטרלי. ננרמל אותם ונקבל:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{||v_1||} & \frac{v_2}{||v_2||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{2450}} & \frac{7}{\sqrt{50}} \\ -\frac{49}{\sqrt{2450}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & \frac{7}{\sqrt{50}} \\ -\frac{7}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

עתה נסמן $P = Q\operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)Q^T$. סה"כ נגדיר $U = AP^{-1}$ כלומר $A = UP$. נחשב אותם:

$$P = Q\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2)Q^T = \begin{pmatrix} 4.04 & -0.28 \\ -0.28 & 5.96 \end{pmatrix} \quad P^{-1} \approx \begin{pmatrix} 0.248 & 0.012 \\ 0.112 & 0.168 \end{pmatrix} \quad U = AP^{-1} = \begin{pmatrix} 2.93 & 2.99 \\ -5.49 & 2.93 \end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$A = UP = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.93 & 2.99 \\ -5.49 & 2.93 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 4.04 & -0.28 \\ -0.28 & 5.96 \end{pmatrix}}_{P}$$

(ב)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$

נתחיל מלמצוא את AA^*:

$$AA^* = \begin{pmatrix} 28 & 16\sqrt{3} \\ 16\sqrt{3} & 76 \end{pmatrix} \quad \det(Ix - AA^*) = (x-28)(x-76) - 16^2\sqrt{3} = (x\underbrace{-52-8\sqrt{21}}_{-\alpha})(x\underbrace{-52+8\sqrt{21}}_{-\beta})$$

נמצא להנאתנו את המ"וים:

$$\mathcal{N}(AA^* - \alpha I) \approx \mathcal{N}\begin{pmatrix} 60.66 & 27.71 \\ 21.71 & -12.66.66 \end{pmatrix} \implies V_\alpha \approx \operatorname{span}\begin{pmatrix} 60.66 \\ 27.71 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(AA^* - \beta I) \approx \mathcal{N}\begin{pmatrix} 12.66 & 27.71 \\ 27.71 & 60.66 \end{pmatrix} \implies V_\beta \approx \operatorname{span}\begin{pmatrix} 12.66 \\ -27.71 \end{pmatrix}$$

ממשפט הפירוק הספקטרלי (אפשר גם לוודא ידנית ולראות שהמכפלה הפנימית יוצאת בערך 0.1115) המ"ים העצמיים אורתוגונליים, ומכאן מטריצת המעבר:

$$Q = \begin{pmatrix} 60.66 & 12.66 \\ -27.71 & -27.71 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normalization}} \begin{pmatrix} 0.42 & 0.91 \\ 0.91 & -0.41 \end{pmatrix}$$

נתבונן בערכים הסינגולריים $\sigma_1 = \sqrt{\alpha} \approx 9.36$ וכן $\sigma_2 = \sqrt{\beta} \approx 3.77$. נגדיר $P = Q\operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)Q^T$ וכן $U = AP^{-1}$. נחשב:

$$P = \begin{pmatrix} 3.945 & 2.54 \\ 2.54 & 8.22 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.32 & -0.01 \\ -0.01 & 0.15 \end{pmatrix} \quad U = AP^{-1} = \begin{pmatrix} -1, & 5.12 \\ 8.6 & 7 \end{pmatrix}$$

נסכם:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1, & 5.12 \\ 8.6 & 7 \end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix} 3.945 & 2.54 \\ 2.54 & 8.22 \end{pmatrix}}_{P}$$

.... (2) ....

תהי $N \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ נורמאלית, הפיכה וממשית. בהינתן לכסון אוניטרי של N באמצעות מטריצת מעבר Q אוניטרית וע"עים $\lambda_1 \dots \lambda_n$ מרוכבים, נמצא את הפירוק הפולארי של N.

הוכחה. נגדיר $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. ידוע $N = Q^*NQ$. עבור λ_i נוכל לפרק פולארית $\lambda_i = r_i e^{i\theta_i}$ עבור $\theta_i, r_i \in \mathbb{R}$ כלשהם. נגדיר $U = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_n})$, ונבחין ש־$U$ אוניטרית. עוד נגדיר $|\Lambda| = \operatorname{diag}(|\lambda|_1 \dots |\lambda|_n)$. כפל אוניטריות מתחלף ובפרט $UQ^* = Q^*U$. מכאן:

$$N = Q^*\Lambda Q = Q^*\operatorname{diag}(r_1 e^{i\theta_1} \dots r_n e^{i\theta_n})Q = Q^*U\,|\Lambda|\,Q = U(Q^*\,|\Lambda|\,Q)$$

משום ש־$Q^*\,|\Lambda|\,Q$ מטריצה צמודה לעצמה ומוגדרת חיובית (הע"עים חיוביים), ו־U אוניטרית, מצאנו את הפירוק הדרוש. ■

.... (3) ....

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $A = UP$ פירוק פולארי. נוכיח ש־$A^2 = U^2P^2$ פירוק פולארי של A^2 אמ"מ A נורמאלית.

הוכחה.
- אם A נורמאלית, ו־$A = UP$ פירוק פולארי, נסמן $AA^* = Q^TDQ$ וכן $P = Q^T\sqrt{D}Q$, והראינו בתרגול ש־$U = AP^{-1}$. בהכרח $A^2(A^2)^* = AAA^*A^* = AA^*AA^* = Q^*DQQ^*DQ = Q^*D^2Q$. מתקיים:

$$Q^*\sqrt{D^2}Q = Q^*DQ = Q^*\sqrt{D}QQ^*\sqrt{D}Q = (Q^*\sqrt{D}Q)^2 = P^2$$

ומכאן הפירוק הפולארי $A^2 = U'P'$ מקיים $P' = P^2$. עוד נבחין:

$$U' = A^2P'^{-1} = A^2(P^2)^{-1} = A^2(P^{-1})^2 = (AP^{-1})^2 = U^2$$

כלומר סה"כ $A^2 = U^2P^2$.

- אם $A^2 = U^2P^2$ פירוק פולארי, נוכיח A נוראמלית. מכיוון זה כל השוויונות לעיל נכונים, בכיוון ההפוך.

■

(4)

נזכר בהגדרת A_f.

(א) יהי $B=\{v_1\dots v_n\}$ בסיס וכן $T\colon V\to V$ כך ש־$[T]_B=A_f$. נוכיח ש־$T^i(v_1)=v_{i+1}$.

הוכחה. ראשית נוכיח ש־$A_f^i e_1=e_{i+1}$. לשם כך, נראה ש־$A_f e_i=e_{i+1}$. זה מתקבל ישירות מהגדרת כפל וקטור במטריצה, שכן לכל $i\neq n$ (ובשאלה הניחו $i<n$) נקבל ש־$A_f e_i$ היא השורה ה־i ב־A_f, וערכה הוא e_{i+1}. נבחין ש־:

$$[T^i v_1]_B=[T^i]_B[v_1]_B=[T]_B^i e_1=A_f^i e_1=A_f^{i-1}e_2\overbrace{=\cdots=}^{\text{induction}}A_f^0 e_{i+1}=e_{i+1}\implies T^i v_i=[e_{i+1}]_B^{-1}=v_{i+1}$$

מכאן קיבלנו את הדרוש. ■

(ב) נראה ש־$f(T)=0$.

הוכחה. נסמן ב־f^i את הפולינום $f_i:=x_n+\sum_{j=i}^{n-1}a_jx^{j-i}$ (בפרט $f^0=f$). באמצעות דטרמיננטה לפי השורה העליונה:

$$p_{A_{f^0}}=\det(Ix-A_f)=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0\\ 1 & x & \ddots & \vdots & a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & x & a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+a_{n-1}\end{vmatrix}=a_0\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 1 & x & \ddots & \vdots & a_2\\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & x & a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x+a_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=a_0+xp_{A_{f^1}}=a_0+x(a_1+p_{A_{f^2}})=\cdots=a_0+x(a_1+x(a_2+\cdots x(\left|x+a_{n-1}\right|)))$$

$$=a_0+xa_1+x^2a_2+\cdots+x^{n-2}a_{n-2}+x^{n-1}(x+a_{n-1})=a_0+xa_1+\cdots+x^{n-1}a_{n-1}+x^n=f$$

מכאן שהפולינום האופייני של A_f הוא f. ואז ממשפט קיילי המילטון $f(T)=f(A)=0$ כנדרש. ■

(ג) יהי $g(x)$ פולינום וכן $\deg g<n$. נשתמש בסעיף א' כדי להראות ש־$g(T)v_1\neq 0$ ומכאן ש־$g(T)\neq 0$.

הוכחה. נסמן $g=:\sum_{i=1}^m a_i$. אם $g\neq 0$ לא פולינום האפס (הנחה שלא מניחים בשאלה אבל בבירור צריך להניח אותה), אז $a_1,\dots,a_n$ סקלארים לא טרוויאלים, אזי מסעיף א':

$$g(T)v_1=\left(\sum_{i=0}^m a_iT^i\right)v_1=\sum_{i=0}^m\left(a_i\cdot T^iv_1\right)=\sum_{i=0}^m a_iv_{i+1}$$

הביטוי האחרון הוא קומבינציה לינארית לא־טרוויאלית של איברי הבסיס $v_1\dots v_m$ ומכאן שהיא איננה 0 (בסיס הוא בת"ל). סה"כ $f(T)v_1\neq 0$, כלומר $v_1\neq\ker g(T)$ וסה"כ $\ker g(T)\neq V$ כלומר $g(T)\neq 0$ כנדרש. ■

הערה: מכאן ש־f גם הפולינום המינימלי של A_f.

(5)

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהי $T\colon V\to V$ ניל'.

(א) תהי $I\colon V\to V$ העתקת הזהות. יהי $0\neq\alpha\in\mathbb{F}$. נוכיח ש־$\alpha I+T$ הפיכה.

הוכחה. ידוע קיום $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$A^k=0$. נתבונן ב־$B=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{k-1}(-\alpha)^iA^i$. נקבל:

$$(T+\alpha I)B=(T+\alpha I)\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{k-1}(-\alpha)^iT^i=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{k}\left(\alpha I\cdot(-\alpha)^iT^i+(-\alpha)^{i+1}T^{i+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{k}\left((-1)^i\alpha^{i+1}T^i-(-1)^i\alpha^{i+1}T^{i+1}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\alpha I+\cancel{\alpha T^k}\right)=\cancel{\alpha}\frac{1}{\cancel{\alpha}}I=I$$

מכאן שבהכרח $A+\alpha I$ הפיכה, שכן B ההופכית שלה. ■

(ב) יהי $f\in\mathbb{F}[x]$. נוכיח ש־$f(T)$ הפיך אמ"מ $f(0)\neq 0$.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח $f(0)\neq 0$ ונוכיח $f(T)$ הפיך. משום ש־0 אינו שורש של f, נסיק שקיים איבר חופשי a_0 כלשהו. נתבונן ב־$f(T)$, כלומר, ניתן לבטא את f כ־$f=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ כאשר $a_0\neq 0$. נבחין שמשום שמרחב הפונקציות הנילפוטנטיות הוא מ"ו, וכן כפל נילפוטנטיות הוא נילפוטנטי, ש־$T'=:\sum_{i=1}^n a_iT^i$ ניל'. סה"כ $f(T)=T'+a_0I$ וכן $a_0\neq 0$ כלומר $f(T)$ הפיכה מסעיף קודם.

$\Longleftarrow$ (נוכיח קונטראפוסיטיב) נניח ש־$f(0)=0$ ונוכיח ש־$f(T)$ איננה הפיכה. במקרה זה, $f(T)=x\cdot g$ עבור $g\in\mathbb{F}[x]$ כלשהו, כלומר $f(T)=T\cdot g(T)$. משום ש־T ניל' היא איננה הפיכה, וממשפט הדרגה $\operatorname{rank} f(T)\le\min\{\operatorname{rank} f(T),\operatorname{rank} T\}<n$ כלומר $f(T)$ איננה הפיכה.

■

(ג) נניח ש־$f(0)\neq 0$ (כלומר $f(T)$ הפיכה). נוכיח קיום $g\in\mathbb{F}[x]$ כך ש־$I=f(T)g(T)$.

הוכחה. ניעזר בסימוני הסעיפים הקודמים. בהינתן $f\in\mathbb{F}[x]$ שמקדמיו $a_0\dots a_n$. ידוע $f(T)=T'+a_0I$ כאשר T' ניל' (מסעיף ב', בכיוון הראשון). עוד ידוע שלמטריצה מצורה זו, ההופכית ניתנת על ידי $\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{k-1}(-a_0)^iT'^i$ (כפי שמצאנו בסעיף א'). מכאן שבעבור $g'=\sum_{i=0}^{n}(-a_0)^iT'^i$ מתקיים $I=(T'+a_0I)g'(T')=f(T)g'(T')$. משום ש־$T'$ נתון ע"י הפולינום $h(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i$ (כלומר $h(T)=T'$) הגדרת $g=g'\circ h$ (פולינומים סגורים להרכבה) תותיר אותנו עם:

$$I=f(T)g'(T')=f(T)g'(h(T))=f(T)(g'\circ h)(T)=f(T)g(T)$$

כנדרש. ■

....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־$\LaTeX$ ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד