לינארית 1א 10

שחר פרץ

12 במאי 2025

מרצה: בן בסקין תזכורת: שיעור שעבר עצרנו בהוכחת המשפט הבא.

משפט 1. תהי A מטריצת בלוקים ריבועיים על האלכסון $A = \operatorname{diag}(A_1 \dots A_n)$, אז מתקיים $m_A(x) = \ell\text{cm}(m_{A_1} \dots m_{A_k})$

משפט 2. V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו־$T\colon V \to V$ ט"ל, יהי $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$f(T) = 0$. נניח ש־$f = g \cdot h$, כאשר $\gcd(g, h) = 1$, אז:

1. $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$
2. אם $f(x) = m_T(x)$ אז בפירוק לעיל g, h הם הפולינום המינימליים של צמצום T לתתי־המרחבים (הקרנלים) בהתאמה.

נחזור על מה שהתחלנו להוכיח ונסיים את אשר נותר:

הוכחה. ידוע $h = g \cdot h$ ולכן $\exists a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$a(x)g(x) + b(x)h(x) = 1$, כך ש־:

$$\underbrace{(a(T) \circ g(T))(v)}_{\in \ker h(T)} + \underbrace{(b(T) \circ h(T))(v)}_{\in \ker g(T)} = V$$

ולכן $V = \ker h(T) + \ker g(T)$. וכן הראינו שזהו סכום ישר. עתה, נסמן:

$$W_2 = \ker h(T) W_1 = \ker g(T)$$
$$T_2 = T_{|W_2} T_1 = T_{|W_1}$$

וכן B_1 בסיס ל־W_1, B_2 ל־W_2. לכן $B = B_1 \uplus B_2$ בסיס ל־V. משום שהראינו ש־W_1, W_2 הם T־אינוו' בשיעור קודם:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

מהמשפט שראינו, $m_T = \ell\text{cm}(m_{T_1}, m_{T_2})$. ברור ש־$m_{T_1} \mid g$ וגם $m_{T_2} \mid h$. אז:

$$\deg m_{T_1} = \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} = \deg(m_{T_1} \cdot m_{T_2}) \geq \deg(\ell\text{cm}(m_{T_1}, m_{T_2})) = \deg m_T$$

ולכן כל ה"אשים לעיל הדוקים ושוויון בכל מקום.

$$\deg m_{T_1} \leq \deg g \wedge \deg m_{T_2} \leq \deg h$$

אם אחד מהשווינות לא הדוקים, אז:

$$\deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} < \deg g + \deg h$$

וסתירה למה שהראינו. לכן:

$$m_{T_1} \mid g \wedge \deg m_{T_1} = \deg g \implies m_{T_1} \sim g$$

אבל שניהם מתוקנים ולכן שווים. כנ"ל עבור $m_{T_2} = h$. ■

דוגמה. נסמן $f(x) = x^2(x-1)^3$, $f(T) = 0$. החלק הראשון של המשפט אומר $V = \ker T^2 \oplus \ker(T - I)^3$. החלק השני אומר שאם $f = m_T$ אז x^2 הוא הפולינום המינימלי של $T_{|\ker T^2}$ וכן $(x-1)^3$ המינילי של $T_{|^3_{T-I}}$.

משפט 3. (משפט הפירוק הפרימרי): יהיו $T\colon V \to V$, m_T הפולינום המינימלי של T, ונניח ש־:

$$m_T = g_1 \cdots g_s \quad \forall i \neq j\colon\ \gcd(g_i, g_j) = 1$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$$

ובנוסף g_i הוא הפולינום המינימלי של $T_{|\ker g_i(T)}$. זה פשוט אינדוקציה על המשפט הקודם.

המרצה גם מוכיח את זה על הלוח אבל לא מתחשק לי לכתוב את זה. טוב, אני אכתוב את זה. "יש לו שם מפוצץ אז הוא כנראה חשוב"

הוכחה. באינדוקציה על s

בסיס: עבור $s=2$ המשפט שהוכחנו.

צעד: נסמן:

$$h(x)=g_s(x),\ \ g(x)=\prod_{i=1}^{s-1} g_i(x)$$

ואז:

$$\forall i\neq j:\ \gcd(g_i,g_j)=1 \implies \gcd(h,h)=1$$

מהמשפט שקיבלנו:

$$V=\ker g(T)\oplus\ker h(T)\overset{\text{אינדוקציה}}{\Longrightarrow}\bigoplus_{i=1}^{s}\ker g_i(T)$$

והמשך דומה עבור $m_{T|_{\ker g_i}}=g_i$:

$$\ker h(T)=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker g_i(T|_{\ker h(T)})=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker g_i(T)$$

■

מסקנה 1. (מקרה פרטי חשוב): נניח כי m_T מפרק לגורמים לינאריים שונים זה מזה. כלומר:

$$m_T=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)$$

ו־$\lambda_i\neq\lambda_j$ לכל $i\neq j$, אז T לכסינה.

הוכחה. לפי המשפט:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker(T-\lambda_i I)$$

V סכום ישר של מ"ע $\lambda_2\dots\lambda_1$ הם כולם ע"ע שונים, אז יש ל־V בסיס של ו"א ולכן T לכסינה. ■

בעיה. נתונה $A\in M_5(\mathbb{Z})$. יש לקבוע אם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

- נחשב עת f_A
- נמצא שורשים ל־f_A, אלו הם הע"ע של A.
- לכל ע"ע λ נחשב את V_λ – המרחב העצמי ואת הממד שלו.
- אם סכום הממדים שווה ל־5 אז A לכסינה אחרת לא.

הבעיה: לא קיימת נוסחאת שורשים לפולינום כללי מעל 5.

סימון 1. את $f(x)=\prod_{\lambda_i}(x-\lambda_i)^{r_i}$ בהנחה ש־$\lambda_i\neq\lambda_j$ אז $f^{\text{red}}(x)=\prod_i(x-\lambda_i)$

משפט 4. $f^{\text{red}}=\frac{f}{\gcd(f,f')}$

(כאשר f' הנגזרת של f)

משפט 5. A לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}}(A)=0$

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד