מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 17

להגשה עד יום שלישי 26.3.2024 בשעה 23:59.

1. הוכיחו את הטענה הבאה: לכל עוצמה a ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ times}} = a^n$.

2. הוכיחו את הטענות הבאות שראינו בהרצאה:
לכל a, b, c, d עוצמות כך ש-$a \leq b \ , \ c \leq d$ מתקיים:
   (א) $a + c \leq b + d$
   (ב) $a \cdot c \leq b \cdot d$
   (ג) $a^c \leq b^c$

3. הוכיחו את חוקי החזקות הבאים: לכל a, b, c עוצמות -
   (א) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
   (ב) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

4. חשבו את העוצמות הבאות בעזרת חשבון עוצמות ופשטו את התשובה במידת האפשר:
   (א) $|\mathbb{R} \to \mathbb{R}|$
   (ב) $|P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}|$
   (ג) $|\mathbb{N} \to P(\mathbb{N})|$
   (ד) $|P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})|$
   (ה) $|P(\mathbb{N} \to \mathbb{N})|$
   (ו) $|P(\mathbb{N} \to \mathbb{R})|$
   (ז) $|P(\mathbb{R} \to \mathbb{N})|$
   (ח) $|P(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}|$

5. תהי A קבוצה ונניח כי $1 < |A \times A| \leq |A|$. הוכיחו/הפריכו: $|A|^{\aleph_0} = |A|$.

6. הוכיחו:
   (א) $\aleph_0^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$
   (ב) לכל קבוצה A מתקיים $2^{|A|} \neq \aleph_0$.

7. הוכיחו/הפריכו:
   (א) אם a, b, c עוצמות כך ש-$a < b$, אז $a^c < b^c$
   (ב) אם a, b, c עוצמות כך ש-$b < c$, אז $a^b < a^c$
   (ג) אם a, b, c, d עוצמות כך ש-$a < b \ , \ c \leq d$ אז $a + c < b + d$
   (ד) אם a, b, c, d עוצמות כך ש-$a < b \ , \ c \leq d$ אז $a \cdot c < b \cdot d$

8. מצאו את העוצמות של הקבוצות הבאות:
   (א) קבוצת כל היחסים הסימטריים מעל $\mathbb{N}$.
   (ב) $A = \left\{ f \in \mathbb{N} \to \{0,1\} \ : \ \left|f^{-1}[\{0\}]\right| = \left|f^{-1}[\{1\}]\right| \right\}$.
   (ג) קבוצת כל יחסי השקילות מעל $\mathbb{R}$.

9. נגיד ששתי פונקציות $f,g\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ הן "כמעט מסכימות" אם קיים i כך שלכל $j\geq i$ מתקיים ש־$f(j)=g(j)$.
נגדיר:

$$R=\left\{\langle f,g\rangle\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid f,g\text{ כמעט מסכימות}\right\}$$

(א) הוכיחו ש־R יחס שקילות.
(ב) מצאו את העוצמה של כל מחלקת שקילות. הוכיחו תשובתכם.
(ג) מצאו את העוצמה של קבוצת המנה. הוכיחו תשובתכם.

10. נגדיר

$$S=\{\langle A,B\rangle\in P(\mathbb{Z})\times P(\mathbb{Z})\,:\,|A|=|B|=|A\cup B|\}$$

S הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח).

(א) מצאו את $[\mathbb{N}]_S$ ואת $[\{2,3\}]_S$ ואת עוצמתן. הוכיחו את תשובתכם.
(ב) מהי קבוצת המנה? מהי עוצמתה? הוכיחו.

11. צפו בסרטון על המלון של הילברט (מצורף קישור במודל) ותיהנו.
(ניתן להפעיל כתוביות בעברית)