אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 4

16 בנובמבר 2025

.1

(א) מיצאו בסיס א"נ לתת המרחב $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x+y=z+w \right\}$.

(ב) השתמשו בטענה מהתרגול על הקשר בין מטריצות א"נ והטלה כדי לחשב את ההטלה של הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ על תת-המרחב הנ"ל.

2. השלימו את ההוכחה מהתרגול: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ונניח שקיים בסיס א"נ $v_1, \ldots, v_n$ של $\mathbb{R}^n$, כך שגם $Av_1, \ldots, Av_n$ בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$. הוכיחו שלכל $v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\|Av\| = \|v\|$.

3. מיצאו את כל המטריצות האורתונורמליות האלכסוניות ב- $M_n(\mathbb{R})$ (תזכורת: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ היא אלכסונית אם לכל $i \neq j$, $A_{ij} = 0$).

4. תהי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ העתקה אורתונורמלית. הוכיחו כי T הפיכה.

5. יהי $U < \mathbb{R}^n$ ותהי $p_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ההטלה הא"ג על U. נניח בנוסף ש- p_U העתקה אורתונורמלית. הוכיחו כי $U = \mathbb{R}^n$.

6. תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה אורתונורמלית, ויהי $U<\mathbb{R}^n$ כך ש- $T(U)\subset U$.

(א) הוכיחו כי $T|_U:U\to U$ העתקה הפיכה.

(ב) הוכיחו כי $T(U^\perp)\subset U^\perp$

(ג) מיצאו דוגמה ל- $n\in\mathbb{N}$, העתקה ליניארית $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ותת-מרחב $V<\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $S(V)\subset V$ אבל $S(V^\perp)\not\subset V^\perp$.

7. תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה אורתונורמלית. הוכיחו כי $\mathrm{Id}+\frac{1}{2}T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה הפיכה.