

הגדרה 1. הטבעיים יסומנו ב- \mathbb{N} ויכללו את אפס.

הגדרה 5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[x]_n \mid x \in \mathbb{Z}\}$, כאשר הפעולות על השדה מוגדרות:

$$[x]_n + [y]_n = [x + y]_n, [x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$$

והם מוגדרים היטב, לא תלויים בנציגים. איבר האפס הוא $[0]$ ואיבר היחידה $[1]$.

הגדרה 6. יהי \mathbb{F} שדה, המקדם (char) של השדה יהיה 0 אם $n \cdot 1_{\mathbb{F}} \neq 0$ ו- $n > 0$ אחרת:

$$\text{char}(\mathbb{F}) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0\}$$

כאשר $n \cdot 1_{\mathbb{F}} := 1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}}$ פעמים n .

משפט 8. יהי \mathbb{F} שדה, ו-0 מקדם השדה. אז:

1. p ראשוני הוא $p = 0$

2. המקדם של שדה סופי הוא חיובי.

..... (2)

מערכת משוואות ליניארית

הגדרה 7. משוואה ליניארית מעל שדה \mathbb{F} ב- n נעלמים $x_1 \dots x_n$ עם מקדמים $a_1 \dots a_n$ היא משוואה מהצורה:

$$ax_1 + \dots + a_n x_n = b$$

כאשר זהו הייצוג הסטנדרטי של המשוואה.

הגדרה 8. מערכת של m משוואות ב- n נעלמים מעל שדה \mathbb{F} הוא אוסף של m משוואות ב- n נעלמים, כאשר הייצוג הסטנדרטי:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

הגדרה 9. תהי A קבוצה לא ריקה, $n \in \mathbb{N}$ ו- $a_1 \dots a_n \in A$ נסמן את ה- n יה שאיבריה לפי הסדר להיות $(a_1 \dots a_n) \in A^n$.

הגדרה 10. פתרון למערכת משוואות הוא $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{F}^n$ כך שכל המשוואות מתקיימת לאחר הצבה.

הגדרה 11. שתי מערכות משוואות נקראות שקולות אם יש להן את אותה קבוצת הפתרונות.

הגדרה 12. תהי מערכת משוואות. פעולה אלמנטרית היא אחת מבין:

1. החלפת מיקום של שתי משוואות.

2. הכפלה של משוואה אחת בסקלר שונה מ-0.

3. הוספה לאחת משוואות משוואה אחרת מוכפלת בסקלר.

משפט 9. פעולה אלמנטרית על מערכת משוואות מעבירה למערכת שקולה.

הגדרה 13. מטריצה מסדר $m \times n$ הוא אוסף של mn סקלרים. יתקיים:

$$i \in \{1 \dots m\}, j \in \{1 \dots n\}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

הגדרה 14. נגדיר את $0_{n \times m}$ או 0 להיות מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $(A)_{ij} = 0_{\mathbb{F}}$.

הגדרה 15. וקטור שורה הוא $R_i := (a_{i1} \dots a_{in}) \in \mathbb{F}^n$

הגדרה 16. וקטור עמודה הוא $C_j := (a_{1j} \dots a_{mj}) \in \mathbb{F}^m$

הגדרה 17. $M_{mn}(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות מסדר $m \times n$ מעל השדה \mathbb{F} .

הגדרה 18. $M_n(\mathbb{F})$ הוא מרחב המטריצות הריבועיות, הוא מטריצות מסדר $n \times n$ מעל השדה \mathbb{F} .

הגדרה 19. בהינתן מערכת משוואות עם מקדמים a_{ij} , המטריצה של מערכת המשוואות תהיה (a_{ij}) , כאשר המטריצה המצומצמת שלה היא מטריצה בלי העמודה ה-1. m .

..... (1)

שדות

הגדרה 2. תהי \mathbb{F} קבוצה, ונניח קיום $a: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ חיבור ו- $m: \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}$ כפל. \mathbb{F} יקרה שדה אם"מ:

סימון 1.

$$\forall x, y \in \mathbb{F}: m(x, y) := x \cdot y = xy, a(x, y) = x + y$$

1. קיום ניטרלי לחיבור:

סימון 2. איבר האפס יסומן ב-0 או $0_{\mathbb{F}}$, הוא x .

2. אסוציאטיביות חיבור: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}: (x + y) + z = x + (y + z)$

3. חילופיות חיבור: $\forall x, y \in \mathbb{F}: x + y = y + x$

4. קיום איבר נגדי: $\forall x \in \mathbb{F} \exists y \in \mathbb{F}: x + y = y + x = 0_{\mathbb{F}}$

סימון 3. האיבר הנגדי של x הוא $-x$, הוא y .

5. קיום ניטרלי לכפל:

סימון 4. הניטרלי לכפל יסומן ב-1 או $1_{\mathbb{F}}$

6. אסוציאטיביות של כפל: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}: (xy)z = x(yz)$

7. קיום הופכי: $\forall 0 \neq x \in \mathbb{F} \exists y \in \mathbb{F}: xy = yx = 1$

סימון 5. ההופכי של x יהיה x^{-1} או $\frac{1}{x}$

8. חילופיות כפל: $\forall x, y \in \mathbb{F}: xy = yx$

9. דיסטריביוטיביות: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}: x(y + z) = xy + xz$

10. $1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$

משפט 1. הרציונליים \mathbb{Q} , הממשיים \mathbb{R} , והמרוכבים \mathbb{C} הם שדות.

משפט 2. בעבור שדה כלשהו:

1. ניטרלי לחיבור הוא יחיד.

2. $\forall a \in \mathbb{F}: 0 \cdot a = 0$

3. ניטרלי לכפל הוא יחיד.

4. $\forall a \in \mathbb{F} (\exists! -a: -a + a = 0) \wedge (-a = (-1) \cdot a)$

5. לכל $a \in \mathbb{F} 0 \neq a$ הופכי יחיד.

6. $(b = 0 \vee a = 0) \iff ab = 0$

7. $b = c \iff a + b = a + c$

8. $a \neq 0 \implies b = c \iff ab = ac$

9. $\forall a \in \mathbb{F}: -(-a) = a$

10. $\forall a, b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}: (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

הגדרה 3. לכל $n \geq 1$ טבעי, נגדיר יחס לכל $x, y \in \mathbb{Z}$ זוגות שלמים:

$$x \equiv y \pmod{n} \iff \exists k \in \mathbb{N}: x - y = nk$$

למה 1. אם $n \geq 1$ אז $x \equiv y \pmod{n}$ יחס שקילות.

הגדרה 4. יהיו $x \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ נגדיר:

$$[x]_n := \{y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod{n}\}$$

להיות מחלקת השקילות של x .

משפט 3. $[x]_n = \{x + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

משפט 4. כל שתי מחלקות שקילות שוות או זרות.

משפט 5. בעבור $[x]_n$, יש בדיוק אחד מבין $\{0, \dots, n-1\}$.

משפט 6. \mathbb{Z}_p שדה אם"מ p ראשוני

משפט 7. בהינתן שדה מגודל סופי N , קיים p ראשוני כך ש- $p^k = N$ $\exists k \in \mathbb{N}$.

הגדרה 20. פעולות אלמנטריות על מטריצה הן:

1. החלפת מיקום שורות, תסומן $R_i \leftrightarrow R_j$.

2. הכפלה של שורה בסקלר שונה מ-0, תסומן ב- $\lambda R_i \rightarrow R_i$.

3. הוספה לשורה אחרת מוכפלת בסקלר, לסומן $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$, כאשר $\lambda \in \mathbb{F}, \lambda \neq 0$.

הגדרה 21. יהיו $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ מטריצות. נאמר ש- A, B שקולות אם ניתן לקבל מ- B את A ע"י מספר סופי של פעולות אלמנטריות. נסמן $A \sim B$.

משפט 10. \sim יחס שקילות.

הגדרה 22. שורה אפסים שורה בה כל הרכיבים 0.

הגדרה 23. שורה שאיננה אפסים היא שורה שאיננה אפסים.

הגדרה 24. איבר פותח הוא האיבר הכי שמאלי במטריצה שאינו 0.

הגדרה 25. מטריצה מדורגת אם:

1. כל שורות האפסים מתחת לשורות שאינן אפסים.

2. האיבר הפותח של שורה נמצא מימין לאיבר הפותח של השורה שמעליה.

הגדרה 26. תהי A מטריצה. A מדורגת קאנונית אם כל איבר פותח הוא 1 וגם שאר האיברים בעמודה הם 0, שאר האיברים בעמודה הם 0, ו- A מדורגת.

הגדרה 27. משתנה קשור (תלוי) אם בעמודה שלו, בצורה מדורגת קאנונית יש איבר פותח.

הגדרה 28. משתנה חופשי הוא משתנה לא תלוי.

משפט 11. על מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת קאנונית יחידה.

משפט 12. בהינתן מערכת משוואות שבה יותר נעלמים ממשוואות, אז אין פתרונות, או שמספר הפתרונות הוא לפחות $|\mathbb{F}|$.

משפט 13. בהינתן מערכת משוואות, אחד מהעקרים הבאים יתקיים:

1. אין פתרונות.

2. יש בדיוק פתרון אחד.

3. יש לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

הגדרה 29. מערכת משוואות שכל מקדמיה החופשיים הם 0 היא מערכת הומוגנית.

הגדרה 30. הפתרון $x_1 \dots x_n = 0$ הוא הפתרון הטרוויאלי.

משפט 14.

1. למערכת משוואות הומוגנית שבה מספר נעלמים גדול מהמשוואות, יש ממש יותר מ- $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

2. למערכת משוואות הומוגנית יש רק פתרון טרוויאלי או לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

3. המרצה מסמן מערכת משוואות הומוגנית בהפוך!

..... (3)

מרחבים וקטוריים

הגדרה 31. בהינתן \mathbb{F} שדה, מרחב וקטורי (לעיתים קרוי גם מרחב ליניארי) הוא $\langle V, a: V^2 \rightarrow V, m: \mathbb{F} \times V \rightarrow V \rangle$ כאשר a נקרא חיבור ו- m כפל בסקלר, המקיים תכונות:

סימון 6.

$$\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{F}: \lambda v = \lambda \cdot v = m(\lambda, v), \quad v + w = a(v, w)$$

1. חילופיות לחיבור.

2. אסוציאטיביות לחיבור.

3. קיום איבר אפס ניטרלי לחיבור.

סימון 7. האיבר הניטרלי לחיבור יסומן ב-0 או 0_V .

4. קיום נגדי לחיבור.

סימון 8. לכל v , נסמן ב- $-v$ את הנגדי לחיבור.

5. דיסטריביוטיביות מסוג ראשון: $\forall \lambda \in \mathbb{F}, u, v \in V: \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

6. דיסטריביוטיביות מסוג שני: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V: (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$

7. אסוציאטיביות של כפל: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}: (\lambda \mu)v = \lambda(\mu v)$

8. זהות באיבר היחידה: $\forall v \in V: 1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$

משפט 15. $M_{n \times m}$ ו- \mathbb{F} הם מרחבים וקטוריים.

הגדרה 32. יהי V מ"ו, תת-מרחב וקטורי (תמ"ו) של V הוא $W \subseteq V$ אם:

1. W סגור לחיבור.

2. W סגור לכפל בסקלר.

משפט 16. תמ"ו הוא מ"ו.

משפט 17. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית היא תמ"ו ב- \mathbb{F}^n .

משפט 18.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{F}: \lambda \cdot 0_V = 0_V$

2. $\forall v \in V: 0 \cdot v = 0$

3. $\lambda v = 0 \implies \lambda = 0 \vee v = 0_V$

4. $\forall v \in V: -v = (-1)v$

משפט 19. יהי V מעל שדה \mathbb{F} , ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"וים של V . אז, $U \subseteq W \vee W \subseteq U$ ו- $U \cup W$ תמ"ו בנפרד, אמ"מ $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

הגדרה 33. יהי V מעל \mathbb{F} . יהיו $V, W \subseteq V$ תמ"וים. נגדיר $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

הגדרה 34. אם $U \cap W = \{0\}$ תחת הקשירה לעיל, אז נסמן $U + W = U \oplus W$ ונקרא סכום זה סכום ישר.

משפט 20. יהי V מעל שדה \mathbb{F} , $U, W \subseteq V$ תמ"וים. אז $U + W$ תמ"ו של V .

משפט 21. יהי V מעל שדה \mathbb{F} , אז $U + W$ סכום ישר אמ"מ כל וקטור בסכום נין להגדיר בצורה חידה ע"י וקטור מ- U או וקטור מ- W .

..... (4)

ממדים

הגדרה 35. יהי $0 \leq s \in \mathbb{Z}$ וקטורים $v_1 \dots v_s \in V$ וסקלרים $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{F}$ הצירוף הליניארי שלהם הוא:

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$$

הגדרה 36. צירוף ליניארי עבור סקלרים $\lambda_i = 0$.

הגדרה 37. יהי $B = (v_1 \dots v_s) \in V^s$ ו- V מ"ו. אז B בסיס אם לכל $v \in V$ קיים יחיד צירוף ליניארי מהוקטורים ב- B , כלומר:

$$\forall v \in V \exists! (\lambda_i)_{i=1}^{|B|} \in \mathbb{F}: v = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$$

הגדרה 38. $e_i \in \mathbb{F}^n$ מוגדר להיות $(0 \dots 1 \dots 0) := e$ כאשר 1 בקודאינאטה ה- i .

הגדרה 39. $\{e_i\}_n$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה 40. בעבור V מ"ו עם בסיס B , $\dim V := |B|$ (מוגדר היטב ממשפט יחידות גודל הבסיס).

הגדרה 41. יהיו $v_1 \dots v_s \in V$ וקטורים, הם יקראו סדרה תלויה ליניארית אם קיימים $\lambda_1 \dots \lambda_s$ כך אחד מהם שונה מ-0 וגם $\sum_{i=1}^s \lambda_i s_i = 0$.

הגדרה 48. פונקציה תיקרא שיכון אמ"מ היא חח"ע.

סימון 9. בהינתן $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ העתקה ליניארית, תמונה (Image) תהיה:

$$\mathrm{Im}(\varphi) := \mathrm{Im}(\varphi) := \{\varphi(v) \mid v \in V_1\} \subseteq V_2$$

סימון 10. בהינתן $v: V_1 \rightarrow V_2$ העתקה ליניארית, גרעין (קרנל) יהיה:

$$\ker \varphi := \ker(\varphi) = \{v \in V_1 \mid \varphi(v) = 0\}$$

סימון 11. הומומורפיזם יהיה:

$$\text{hom}_{\mathbb{F}}(V_1, V_2) = \{\varphi: V_1 \rightarrow V_2 \mid \varphi \text{ העתקה ליניארית}\}$$
$$\text{hom}(V) := \text{hom}(V, V) \quad \text{סימון 12.}$$
$$\dim \operatorname{hom}_{\mathbb{F}}(V, W) = \dim V \cdot \dim W \quad \textbf{משפט 3.7}$$

משפט 3.8. יהי $\varphi: V \rightarrow U$, \mathbb{F} שדה:

$$\varphi(0_V) = 0_V \quad .1$$

2. $\operatorname{Im} \varphi$ תמ"ו של U .

3. $\ker \varphi$ תמ"ו של V .

4. $\text{Im } \varphi = U$ על אמצ"מ

5. $\ker \varphi = \{0\}$ חח"ע אמ"מ φ .

סימון 13. φ העתקת האפס אמ"מ $\text{Im } \varphi = \{0\}$ אמ"מ $\ker \varphi = V$

הגדרה 49. $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ יקרא איזומורפיזם (איזו') אם קיימת ψ ט"ל כך ש- $\psi: V_2 \rightarrow V_1$ וגם:

$$\psi \circ \varphi = id_{V_1} \wedge \varphi \circ \psi = id_{V_2}$$

סימון 14. בקשירה בהגדרה לעיל, $\psi =: \varphi^{-1}$.

למה 3. תהי $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$. אז:

1. φ איזו אמ"מ φ חח"ע ועל.

2. אם φ איזו, אז קיימת לה הופכית יחידה.

סימון 15. נאמר שקבוצה היא איזומורפית לקבוצה אחרת, אם קיים איזומורפיזם ביניהם

משפט 39. נתבונן ב- $\text{hom}(V_1, V_2)$ מ"ו מעל \mathbb{F} בעבור הפעולות:

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\varphi) := \lambda\varphi(v)$$

משפט 40. בעבור $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, $\psi: V_2 \rightarrow V_3$ העתקות ליניאריות, יתקיים $\psi \circ \varphi$ העתקה ליניארית.

משפט 41. הרכבת ט"לים, ביחס עם חיבור פונקציות, על $\text{hom}(V_1, V_2)$ מקיים אסוציאטיביות בהרכבה, דיסטרביוטיביות משמאל ומימין, ותאימות עם כפל בסקלר.

משפט 42. יהיו $\varphi: V \rightarrow U$, $V_1 \dots V_2 \in V$ ו- $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{F}$.

$$\varphi(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i \varphi(v_i)$$

משפט 4.3. יהי V מ"ו עם בסיס $(v_1 \dots v_n)$, אז לכל $(u_1 \dots u_n) \subseteq U$ קיימת ויחידה העתקה ליניארית $\varphi: V \rightarrow U$ כך ש- $\varphi(v_i) = u_i \forall i \in [n]$.

סימון 16. יהיו $\varphi: V \rightarrow U$ ט"ל ו- $B = (v_1 \dots v_s)$ וקטורים ב- V . נסמן $\varphi(B) := (\varphi(v_1) \dots \varphi(v_s))$ להיות סדרת התמונות.

משפט 44. בקשירה לעיל,

1. אם $\varphi(B)$ בת"ל, אז B בת"ל.

2. אם B פורשת, אז $\varphi(B)$ פורשת את $\text{Im } \varphi$.

3. אם $\ker \varphi = \{0\}$ אז B בת"ל אמ"מ $\varphi(B)$ בת"ל).

4. אם φ איזו, B בת"ל/פורשת/בסיס (בגפרד) גורר $\varphi(B)$ בת"ל/פורשת/בסיס).

$$\dim V = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi \quad \text{משפט 4.5}$$

משפט 4.6. תהי $\varphi: V \rightarrow U$ ט"ל. אם $\dim V$ סופי, אז:

1. אם φ שיכון, אז $\dim V < \dim U$.

2. $\dim U < \dim V$ אז φ איז נאך א

3. אם φ איזו, אז $\dim V = \dim U$.

4. אם φ חח"ע ועל, וגם $\dim V = \dim U$, אז φ איזו.

הגדרה 50. $f: V \rightarrow V$ יקרא פעולה אוניט.

הגדרה 51. $f: V \times V \rightarrow V$ יקרא פעולה בינארית.

סימון 17. נסמן $V \simeq W$ אמ"מ קיים $f: V \rightarrow W$ איזו. נאמר V איזומורפי ל- W .

הגדרה 54.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

משפט 54. עבור V מ"י, אם $\dim V = n$ אז $[id_V]_B^B = I_n$

משפט 55. תהי $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה. יהי $x = (x_i) \in \mathbb{F}^m$ ו- $b = (b_i) \in \mathbb{F}^n$. אז $Ax = b$ אם"פ x פתרון למערכת המשוואות $(A | b)$ מייצגת.

משפט 56. תחת הקשירה של הטענה הקודמת, מרחב הפתרונות של $Ax = 0$ הוא מ"י.

משפט 57. תחת הקשירה של הטענה הקודמת, לכל φ ט"ל מ- V ל- U עם בסיסים B, C בהתאמה, כך ש- $[\varphi]_C^B = A$, יתקיים שמרחב הפתרונות של $(A | 0)$ יהיה $\ker \varphi$.

..... (8)

מטריצות הפיכות ואלמנטריות

הגדרה 55. בהינתן מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, המטריצה המשוכללת שלה תהיה $A^T = (a_{ji}) \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$.

משפט 58. תהי A מטריצה:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

משפט 59. יהיו $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, $\varphi: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ העתקה 'tz:

$$\varphi_A := (\lambda_1 \dots \lambda_m) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \cdot A, [\varphi_A]_E^E = A^T$$

???

הגדרה 56. $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה מיימין אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $AB = I_n$.

הגדרה 57. $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה משמאל אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $BA = I_n$.

הגדרה 58. $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $AB = BA = I_n$.

משפט 60. בהינתן $A \in M_n(\mathbb{F})$, אז A הפיכה אם"פ היא מייצגת איזומורפיזם אמ"פ כל ההעתקות שהיא מייצגת הן איזומורפיזם.

הגדרה 59. ההופכית למטריצה היא יחידה.

סימון 19. בהינתן מטריצה הפיכה A , את ההופכית שלה נסמן ב- A^{-1} (מוגדר היטב מיחידות).

משפט 61. $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה מיימין אם"פ A הפיכה משמאל אם"פ A הפיכה מיימין.

משפט 62. תהי $Ax = b$ מערכת משוואות עם n נעלמים, $x = (x_i)_{i=1}^n$, ווקטור משתנים $b = (b_i)_{i=1}^n$. אז A הפיכה גורר $A^{-1}b = x$ פתרון יחיד.

משפט 63. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, אז:

1. A^{-1} הפיכה.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. A^T הפיכה.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. AB הפיכה, ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

משפט 64. $(A_1 \dots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \dots A_1^{-1}$

הגדרה 60. מטריצה אלמנטרית היא מטריצה שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י פעולה אלמנטרית אחת.

משפט 65. תהי φ פעולה אלמנטרית, $E := \varphi(I_n)$, אז $\varphi(A) = E \cdot A$.

ט"לים כמטריצות

משפט 47. יהיו U, V מ"י ממימד n , $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס, אז ישנה ט"ל איזו בין $\varphi: V \rightarrow U$ לבין בסיס של U . היא תוגדר באמצעות $\varphi(B)$ עבור φ איזו, ועבור C בסיס של U נתאים את $\varphi_C: V \rightarrow U$ כך ש- $\varphi_C(v_i) = u_i$ $\forall i \in [n]$.

סימון 18.

$$[v]_B = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{F}^n, v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

משפט 48. יהי V מ"י עם בסיס $B = (v_1 \dots v_n)$, נסמן $f(B) = \varphi_B: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ כך ש- $\varphi_B(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum \lambda_i v_i$. אז f איזו וההופכית שלה $f^{-1} = \lambda v \in V, [v]_B$.

הגדרה 52. יהי $\varphi: V \rightarrow U$, $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס של V ו- C בסיס של U מגודל m . נסמן:

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ [\varphi(v_1)]_C & \dots & [\varphi(v_n)]_C \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

ונקראה המטריצה המייצגת של φ לבסיס B ו- C .

משפט 49. יהיו U, V מ"י מעל שדה \mathbb{F} ממדים $n = \dim V$, $m = \dim U$. יהיו $C = (u_i) \subseteq U$, $B = (v_i) \subseteq V$ בסיסים. אז:

$$\sum_{i,j \in [m] \times [n]} x_j a_{ij} u_j = \sum_{i=1}^m u_i \left(\sum_{j=1}^n x_j a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m u_i x_i \text{Col}_i$$

..... (7)

כפל מטריצות

משפט 50. יהיו φ, ψ העתקות ליניאריות, מבסיסים B ל- C . אז:

$$[\psi + \varphi]_C^B = [\varphi]_C^B + [\psi]_C^B, [\lambda \varphi]_C^B = \lambda [\varphi]_C^B$$

משפט 51. יהיו U, V מ"י, B, C בסיסים ממדים m, n בהתאמה פעמיים. אז $T: \text{hom}(V, U) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F})$ המוגדרת לפי $T(\varphi) = [\varphi]_C^B$ היא איזומורפיזם.

הגדרה 53. יהיו $A = (a_{ij}) \in M_{m \times s}$, $B = (b_{ij}) \in M_{s \times n}$ מטריצות. נגדיר:

$$AB := A \cdot B = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} \in M_{m \times n}$$

משפט 52. יהיו $\varphi: V \rightarrow U$, $\psi: U \rightarrow W$ בסיסיהן B_v, B_u, B_w . בהתאמה. אז:

$$[\psi \circ \varphi]_{B_w}^{B_v} = [\psi]_{B_w}^{B_u} \cdot [\varphi]_{B_u}^{B_v}$$

משפט 53. יהיו A, B, C מטריצות, אז:

$$(AB)C = A(BC) \quad 1.$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad 2.$$

משפט 66. תהי A מטריצה אלמנטרית, אזי A הפיכה וההופכית שלה אלמנטרית.

משפט 67. מכפלה של אלמנטריות היא הפיכה.

משפט 68. יהי $B \in M_{m \times n}$, אז קיימת $A \in M_m(\mathbb{F})$ מכפלת אלמנטריות, ו- $B' \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מזווגת קאנונית, כך ש- $B = AB'$.

משפט 69. תהי $B \in M_n(\mathbb{F})$ מזווגת קאנונית, אז $B = I_n$ אם"מ B הפיכה.

משפט 70. יהיו $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, וניח $A = CB$. אם C הפיכה, אז B הפיכה אם"מ A הפיכה.

משפט 71. יהיו $A, B \in M_n$ מטריצות מזווגות קאנונית כך ש- $B = -A$.

משפט 72. $E_1 A \cdots E_s$ עבור E_i מטריצה אלמנטרית. אז:

..... (10)

דרגת מטריצה

הגדרה 67. תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. נגדיר את דרגת A להיות הממד של התמו"ו של \mathbb{F}^n הנפרש ע"י שורות A .

סימון 21. עבור $v_1 \dots v_m$ שורות של A נסמן $\text{rank } A = \dim \text{Row } A$.

למה 4. בהינתן m שורות מעל \mathbb{F}^n , נדע $\text{rank } A \leq \min(m, n)$.

משפט 81. תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ו- $B \in M_{n \times s}(\mathbb{F})$. אז $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$ ואם A ריבועית והפיכה, $\text{rank } AB = \text{rank } B$.

משפט 82. עבור מטריצה מזווגת, מספר השורות השונות מ-0 הוא $\text{rank } A$.

משפט 83. $\text{rank } A^T = \text{rank } A$.

משפט 84. $\text{rank } A = \dim \text{Row } A = \dim \text{Col } A$.

משפט 85. בעבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ מרחב הפתרונות של מערכת המשוואות $Ax = 0$ הוא $n - \text{rank } A$.

משפט 86. $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank } A + \text{rank } B$.

..... (11)

דיטרמיננטות

הגדרה 68. פונ' $\det: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ תקרא דיטרמיננטה אם"מ:

- \det מולטיליניארית (לינארית בשורה).
- בעבור $M \in M_n(\mathbb{F})$ ו- M' מטריצה שהוחלפו בה שתי שורות כלשהן, $\det M' = -\det M$.
- $\det I_n = 1$.

משפט 87. תהי $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{F})$ ו- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אז $\det A = ad - bc$.

משפט 88. בהינתן φ פעולה אלמנטרית ו- \det דיטרמיננטה, אז:

- אם φ החלפת שורות, $\det \varphi(A) = -\det A$.
- אם φ הכפלה בסקלר λ , אז $\det \varphi(A) = \lambda \det A$.
- אם φ הוספת שורה מוכפלת בסקלר לאחרת, אז $\det \varphi(A) = \det A$.

משפט 89. הדיטרמיננטה קיימת ויחידה.

הערה 1. אם אתם שונאים את עצמכם, תוכיחו את משפט 89.

משפט 90. $\det A = \det A^T$.

למה 5. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם שורת אפסים. אז $\det A = 0$.

סימון 22. $|A| := \det A$.

הערה 2. סימון 22 מוגדר היטב לכל A כי הדיטרמיננטה קיימת ויחידה.

משפט 91. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. אז $\det: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ דיטרמיננטה. אז $\det AB = \det A \cdot \det B$.

משפט 92. $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

משפט 93. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A הפיכה אם"מ $|A| \neq 0$.

משפט 66. תהי A מטריצה אלמנטרית, אזי A הפיכה וההופכית שלה אלמנטרית.

משפט 67. מכפלה של אלמנטריות היא הפיכה.

משפט 68. יהי $B \in M_{m \times n}$, אז קיימת $A \in M_m(\mathbb{F})$ מכפלת אלמנטריות, ו- $B' \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מזווגת קאנונית, כך ש- $B = AB'$.

משפט 69. תהי $B \in M_n(\mathbb{F})$ מזווגת קאנונית, אז $B = I_n$ אם"מ B הפיכה.

משפט 70. יהיו $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$, וניח $A = CB$. אם C הפיכה, אז B הפיכה אם"מ A הפיכה.

משפט 71. יהיו $A, B \in M_n$ מטריצות מזווגות קאנונית כך ש- $B = -A$.

משפט 72. $E_1 A \cdots E_s$ עבור E_i מטריצה אלמנטרית. אז:

- A הפיכה אם"מ $B = I$.
- אם A הפיכה, אז $A^{-1} = E_s \cdots E_1$.

הגדרה 61. A תקרא סימטרית אם $A^T = A$ (ובפרט A ריבועית).

הגדרה 62. A אנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

הגדרה 63. עבור מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, נגדיר $A^* \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ ע"י $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ להיות המטריצה הצמודה של A .

משפט 72. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, התנאים הבאים שקולים:

- A הפיכה
- $\forall v \in \mathbb{F}^n, Ax = b$ למערכת המשוואות קיים פתרון יחיד.
- $\forall b \in \mathbb{F}^n, Ax = b$ למערכת המשוואות קיים פתרון.
- קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ פתרון יחיד.
- למערכת $Ax = 0$ פתרון יחיד.
- A שקולת שורות ל- I .
- עמודות A בת"ל.
- שורות A בת"ל.
- עמודות A פורשות את \mathbb{F}^n .
- שורות A פורשות את \mathbb{F}^n .

..... (9)

שינוי בסיס

משפט 73. יהי $B = \{\theta_1 \dots \theta_n\}$ בסיס ל- V וגם $B' = \{u_1 \dots u_n\}$ כך ש- $\forall i \in [n]: u_i = \sum \alpha_{ji} \theta_j$, אז:

$$M := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

היא הפיכה אם"מ B' בסיס ל- V .

הגדרה 64. יהיו B, B' בסיסים של V מ"ו. אז $M = [id]_B^{B'}$ היא מטריצת המעבר מבסיס B' ל- B .

משפט 74. יהי V מ"ו ונסמן $\dim V = n$, ו- B, B' בסיסים ל- V , אז מטריצת המעבר M מ- B' ל- B תקיים $B' = M[\theta]_B$. $\forall \theta \in V$.

סימון 20. תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל ו- V מ"ו. נסמן $[T]_B^B = [T]_B$.

משפט 75. תהי $T: V \rightarrow W$ איזו', ו- B, C בסיסים של V ו- W בהתאמה. אז $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.

משפט 76. יהיו $T: V \rightarrow V$ ט"ל, נסמן $\dim V = n$, ויהיו B, B' בסיסים של V , ו- M מטריצת מעבר בסיס מ- B' ל- B . אז $[T]_{B'}^B = M^{-1}[T]_B M$.

הגדרה 65. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש- A, B דומות אם קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $A = P^{-1}BP$.

משפט 77. תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל ויהיו בסיסים B, C של V . אז $[T]_B^B, [T]_C^C$ דומות.

- הגדרה 69.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i, j \in [n]$. אז הפינור A_{ij} היא המטריצה המתקבלת מ- A ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j .
- משפט 94. (פיתוח לפי עמודה)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז
- $$\forall i \in [n]: |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$
- משפט 95. (פיתוח לפי שורה)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז
- $$\forall j \in [n]: |A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$
- הגדרה 70.** תמורה היא פרמוטציה
- סימון 23.** נסמן ב- S_n את קבוצת כל התמורות על $[n]$.
- הגדרה 71.** תהי $\sigma \in S_n$, נגדיר את $\text{sgn } \sigma$ להיות מספר ההחלפות ש- σ מבצעת ב- $\langle n \rangle$.
- משפט 96. (פיתוח לפי תמורות)** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז:
- $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$
- (12)
אחר
- הגדרה 72.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר את המטריצה המוצמדת (עיתים קרויה גם "מצורפת") להיות מוגדרת ע"י:
- $$(\text{adj } A)_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$
- משפט 97.** תהי מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז $A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = |A| I$.
כפרט, בעבור A הפיכה, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$.
- הגדרה 73.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר את העקבה של A להיות $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n (A)_{ii}$.
- משפט 98.** $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F}): \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- משפט 99.** $\text{tr}: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ היא ט"ל.
- הגדרה 74.** מטריצת בלוקים תהיה כזה בלוקים ששים במטריצה (אין לי כוח להגדיר פורמלית).
- משפט 100.** בהינתן a_{ij}, b_{ij} מטריצות, מטריצות הבלוקים $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ יקיימו:
- $$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$$
- כאשר $(AB)_{ij}$ יסומן כבלוק ה- ij ב- AB .
(כלומר: אפשר לכפול בלוקים כמו והיו איברי מטריצה רגילים)
- משפט 101.** תהינה $A \in M_n(\mathbb{F}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), D \in M_m(\mathbb{F})$. אז $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.
- משפט 102. (כלל קרמר)** תהי $Ax = b$ מערכת משוואות ליניאריות כאשר $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו- $b \in \mathbb{F}^n$. אז אם $\det A \neq 0$, הפתרון היחיד של המערכת $Ax = b$ נתון ע"י:
- $$x = \left(\frac{\det A_i}{\det A} \right)_{i=1}^n$$
- כאשר A_i המטריצה המתקבלת ע"י החלפת עמודה ה- i של A ב- b .

Shit Cheat Sheet ~ Linear Algebra 1A ~ TAU

Shahar Perets

14.2.2025