חדו"א 1א ~ תרגיל בית 3

שחר פרץ

23 בנובמבר 2025

(1)

נוכיח לפי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

(א) טענה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$$

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. לכל $n\geq 2$ מתקיים $3n^3+2n-4>3n^2>0$ (נחסר אגפים ונקבל שקילות ל־$2n-4\geq 0$ ששקול ל־$n\geq 2$) ובאופן דומה לכל $n\geq 2$ מתקיים $n-2>0$, $6n-12>0$, ו־$5n-10>0$. בהרצאה ראינו שלגבול מהצורה $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\to 0$ ולכן קיים N_1 עבורו $\forall n\geq N_1\colon \frac{10}{9n}<\varepsilon$. נבחר $N=\max\{N_1,2\}$. נקבל:

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|=\frac{5\left|n-2\right|}{3\left|3n^2+2n-4\right|}\overset{n\geq 2}{=}\frac{5n-10}{9n^2+6n-12}\overset{n\geq 2}{<}\frac{5n-10}{9n^2}\overset{n\geq 2}{<}\frac{10n}{9n^2}=\frac{10}{9n}\overset{n\geq N_1}{<}\varepsilon$$

וסיימנו. ■

(ב) טענה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\neq 1$$

הוכחה. נבחר $\varepsilon=0.5$. נוכיח שלכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\left|\frac{1}{n}-1\right|>\varepsilon$. ואכן, יהי $N\in\mathbb{N}$, ואז עבור $n=N+4$ מתקיים $n\geq 4$ כלומר:

$$\left|\frac{1}{n}-1\right|=1-\frac{1}{n}\geq 1-\frac{1}{4}=0.75>0.5$$

וסיימנו. ■

(ג) טענה:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{n^2+\cos n}-n}_{a_n}=0$$

הוכחה. נוכיח לפי הגדרת הגבול את הטענה לעיל. יהי $\varepsilon>0$. צ.ל. $|a_n|<\varepsilon$ לכל $n\geq N$ עבור $N\in\mathbb{N}$ כלשהו שנבחר. נבחר $N=\max\left\{\frac{1-\varepsilon^2}{\pm 2\varepsilon}\right\}$. נבחין ש־:

$$n>\frac{-1-\varepsilon^2}{\pm 2\varepsilon}\implies \pm 2n\varepsilon>-1-\varepsilon^2\implies n^2-1<n^2\pm 2n\varepsilon+\varepsilon^2\implies\sqrt{n^2\pm 1}<\varepsilon+n$$

ואז מתקיים:

$$\begin{gathered}-a_n=-\sqrt{n^2+\cos n}-n\leq-\sqrt{n^2-1}-n<\varepsilon\\ a_n=\sqrt{n^2+\cos n}-n\leq\sqrt{n^2+1}-n<\varepsilon\end{gathered}$$

כנדרש. ■

(2)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה מלעיל שאינה ריקה. נוכיח קיום סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$\forall a \in A\colon a_n \in A$, וכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

הוכחה. אם A ריקה, אז היא איננה חסומה, וסתירה, ולכן קיים בה איבר $x \in A$ כלשהו. אם A בעלת מקסימום, אז נבחר $a_i = \max A$ סדרה קבוע ב־$\max A$ ולכן שואפת ל־$\max A = \sup A$ וסיימנו. אחרת, מאקסיומת החסם העליון, בגלל ש־A חסומה מלעיל קיים לה סופרמום $\sup A$. נגדיר את אוסף הקטעים הפתוחים חיתוך A כך ש־$n \mapsto A \cap (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A)$ לכל $n \in A$. נסמן פונקציה זו ב־$F\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(A)$. נבחין שהם לא ריקים שכן מהגדרת $\sup A$, עבור $\varepsilon = \frac{1}{n}$ בהכרח $\exists b \in A\colon \sup A > b > \sup A - \varepsilon > a$.

הגדרנו $F\colon \mathbb{N} \to F(A)$ כלשהי, ולכן קיימת $f\colon \mathbb{N} \to A$ פונקציית בחירה ביחס ל־F, כך ש־$\forall a \in A\colon f(a) \in F(A)$ (מאקסיומת הבחירה הרציפה). נסמן את פונקציית הבחירה f בסדרה $a_n = f(n)$.

עתה נראה ש־$\lim_{n\to\infty} a_i = \sup A$. יהי $\varepsilon > 0$. הוכחנו $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ולכן קיים N עבורו $\forall n \geq N\colon \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. נתבונן ב־$f(n)$, ונבחין שהוא מקיים:

$$f(n) \in F(n) \implies \sup A - \frac{1}{n} < f(n) < \sup A < \sup A + \frac{1}{n} \implies \forall n \geq N\colon |\sup A - a_n| = |\sup A - f(n)| < \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

כלומר מהגדרה $a_n \to \sup A$. משום ש־:

$$a_n = f(n) \in F(n) = A \cap \left(\sup A - \frac{1}{n},\ \sup A\right) \subseteq A$$

אז $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in A$. סה"כ מצאנו a_n מתאימה, וסיימנו. ■

(3)

נוכיח שלכל $q \in Q$ קיימת a_n כך ש־$\forall i \in [n]\colon a_i \in \mathbb{Q}$ וקיימת b_n כך ש־$\forall i \in [n]\colon b_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, כך ש־$a_n, b_n \to q$.

הוכחה. נגדיר את שתי הקבוצות הבאות:

$$A_q = \{p < q \mid p \in \mathbb{Q}\} \quad B_q = \{p < q \mid p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

צפיפות הרציונלים והאי־רציונליים בממשיים, A_q, B_q אינן ריקות.

נראה ש־$q = \sup A_q = \sup B_q$. אכן q חסם מלעיל מהגדרה, וסופרמום משום שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\exists p \in \mathbb{Q}\colon q - \varepsilon < p < q$ ואכן $\exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\colon q - \varepsilon < p < q$, בגלל הצפיפות של הרציונליים והאי־רציונליים. מכאן ש־$p = \sup A_q = \sup B_q$. עתה ניעזר בתרגיל 2 שהוכח ללא תלות בסעיף זה. נקבל קיום a_n כך ש־$a_i \in A_q$ ובפרט $a_i \in \mathbb{Q}$ כך ש־$a_n \to \sup A_q = q$ ובאופן דומה $\exists b_n$ כך ש־$b_i \in B_q$ ובפרט $b_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ כך ש־$b_n \to \sup B_q = q$ וסה"כ מצאנו b_n, a_n מתאימות וסיימנו. ■

(4)

נניח כי $a_n \to a, b_n \to b$ מתכנסות, כאשר a, b גבולות במובן הרחב.

(א) נניח $a = \pm\infty$ ו־b סופי או $\pm\infty$. נוכיח $a_n + b_n \to \pm\infty$

הוכחה. נפצל לשתי הוכחות.

- נניח b גבול סופי. מכאן שקיים N_1 עבורו $\forall n \geq N_1\colon |b_i - b| < 1$ ובפרט $\forall n \geq N - 1\colon b_i > \mp(1 + b)$. יהי $M \in \mathbb{R}$. נוכיח ש־N > $a_i + b_i > n$ לכל $n \geq N$ בעבור N שנבחר. בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} a_i = \pm\infty$ אזי קיים N_2 כך ש־$a_i > \pm(M + 1 + b)$ לכל $i \geq N_2$. סה"כ בעבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל:

$$\forall n \geq N\colon a_i + b_i \overset{n \geq N_2}{=} \pm(M + 1 + b) + b_i \overset{n \geq N_1}{>} \pm M$$

כדרוש.

- עתה נניח ש־$b \to \pm\infty$. יהי $M > 0$. ידוע קיום N_1, N_2 כך ש־$\forall i \geq N_1\colon a_i \geq \pm M \wedge \forall i \geq N_2\colon b_i \geq \pm M$. בפרט בעבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים $\forall i \geq N\colon a_i + b_i > \pm 2M > \pm M$. וסיימנו. ■

(ב) עתה נתעסק במקרה בו $a = \pm\infty$ ו־$b > 0 \vee b = \infty$. נראהש־$a_n b_n \to \pm\infty$.

הוכחה. • אם $b = \infty$, אז קיים N_1 כך שלכל $i \geq N_1$ מתקיים $b_i > 1$ (ישירות מהגדרה). יהי $M \in \mathbb{R}$. בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} a_i = \pm\infty$, ידוע קיום N_2 כך ש־$a_i > \pm(M$, ואז:

$$\forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\} \colon a_i b_i > \pm M b_i > \pm M$$

כדרוש.

• אחרת $b > 0$ ולכן ממשפט, קיים N_1 שהחל ממנו $\forall i \geq N_1 \colon b_i > \frac{b}{2}$ כלומר

יהי $M \in \mathbb{R}$. בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} a_i = \pm\infty$, ידוע קיום N_2 כך ש־$a_i > \pm\left(\frac{2M}{b}\right)$, ואז:

$$\forall i \in N := \max\{N_1, N_2\} \colon a_i b_i > \pm\frac{2M}{b} \cdot \frac{2}{b} = \pm M$$

וסיימנו. ■

(ג) מסעיף ב' נובע באופן מיידי מאריתמטיקה של גבולות, שאם $b = -\infty \vee b < 0$ אז $a_n b_n \to \mp\infty$ שכן:

$$a_i \overbrace{(-b_i)}^{(-b)\to|b|\vee(-b)\to+\infty} \xrightarrow{\text{סעיף ב'}} \pm\infty \overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{\Longrightarrow} a_i b_i \to \mp\infty$$

(ד) סעיף זה מחולק לשני חלקים:

1. אם $a = b = \pm\infty$, נוכיח ש־$a_n b_n \to +\infty$.

הוכחה. יהי $M \in \mathbb{R}$. נגדיר $M' = \max\{M, 1\}$ ונבחין ש־$M'^2 > M$ (אם $M < 1$ אז $M^2 < 1 = M'^2$ אחרת $M'^2 = M^2 > M$). ידוע קיום $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־:

$$\forall i \geq N_1 \colon a_i > \pm M' \quad \forall i \geq N_2 \colon a_i > \pm M'$$

עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ נקבל:

$$\forall i \geq N \colon a_i b_i > (\pm M')^2 = \overbrace{(\pm 1)^2}^{1} M'^2 = M'^2 > M$$

ומהגדרה $a_n b_n \to \infty$ וסיימנו. ■

2. אם $a = \pm\infty, b = \mp\infty$, אז מאריתמטיקה של גבולות נקבל:

$$a_i \overbrace{(-b_i)}^{(-b)\to|b|\vee(-b)\to+\infty} \xrightarrow{\text{חלק 1}} \infty \overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{\Longrightarrow} a_i b_i \to -\infty$$

וסיימנו.

הערה: רק עכשיו ראיתי את ההוראה להוכיח רק מקרה אחד מכל סעיף. מאוחר מדי.

(5)

תהי a_n סדרה של מספרים אי־שליליים כלומר $a_n \geq 0$ המתכנסת לגבול $a \geq 0$. נוכיח ש־$\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

הוכחה. מהיות $a_n \to a$ בהכרח קיים N החל ממנו $|\sqrt{a}_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$ $\forall n \geq N \colon$. נקבל:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| \cdot \left|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right| = |a_n - a| \implies \forall n \geq N \colon \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|\sqrt{a}_n - a|}{\left|\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right|} < \frac{|\sqrt{a}_n - a|}{|\sqrt{a}|} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$$

וסיימנו. נבחין שהשתמשנו בכך ש־$a \geq 0$, וכן ששום דבר לא מוגדר היטב אם $a_n \not\geq 0$ (כלומר, אכן השתמשנו בנתונים). ■

(6)

נחשב בעזרת משפט הסנוויץ את הגבולות הבאים:

(א) ידוע ש־$\frac{i}{n+i} \leq \frac{n}{2n}$ $\forall i \in [n] \colon$. אזי:

$$0 \leq \underbrace{\frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}}_{S(n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n}(n+i)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{(n+i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2^n}$$

ומשום שגבול הסדרה הקבועה $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ והראינו ש־$\frac{1}{2^n} \to 0$ גם כן, אז ממשפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} S(n) = 0$ וסיימנו.

(ב) ידוע $-1 \le \sin x \le 1$. לכן:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i\sin(i)}{n^3} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} i\cdot 1}{n^3} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{n}{n^2}}{\frac{2n^3}{n^2}} \overset{!}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{0}{2n} = 0$$

מהכיוון השני:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i\sin(i)}{n^3} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} -i}{n^3} = \frac{\frac{-n(n-1)}{2}}{n^3} = \frac{n-n^2}{2n^3} = \frac{\frac{n}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}}{\frac{2n^3}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty}\frac{0}{2n} = 0$$

סה"כ בהכרח הגבול הוא 0 וסיימנו.

(ג) יהיו $a > b > 0$ ממשיים.

$$a\cdot\sqrt[n]{1-\frac{b^n}{a^n}} = \sqrt[n]{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \sqrt[n]{a^n-b^n} < \sqrt[n]{a^n} \xrightarrow{n\to\infty} a = a$$

נותר להוכיח ש־$a\cdot\sqrt[n]{1-\frac{b^n}{a^n}} \to 1$. בגלל ש־$a > b$ אז $\frac{a}{b} < 1$ כלומר $\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{a^n} = 0$. נקבל ש־:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a\cdot\sqrt[n]{1-\frac{b^n}{a^n}}\right) = a\cdot\sqrt[n]{1-\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{a^n}} = a\sqrt[n]{1} = a$$

סה"כ ממשפט הסנדוויץ' קיבלנו את הדרוש.

(ד)

$$0 = \frac{0}{\infty} = \frac{\lim\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} n+\frac{1}{n}} \leftarrow \frac{n}{n^2+1} \le \left(\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right) \le \frac{n}{n^2+n} \to \frac{\lim\frac{n}{n}}{\lim_{n\to\infty} n+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

סנדוויץ' וסיימנו.

(7)

יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהיו $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות כך ש־$a_n, b_n \in \mathbb{Z}$. נסמן $c_n = a_n\alpha + b_n$ ונניח ש־$c_n \to 0$ וגם $|c_n| > 0$ (כלומר $c_n \neq 0$). נוכיח $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$\alpha \in \mathbb{Q}$, ומכאן שקיימים $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ כך ש־$\alpha = \frac{n}{m}$. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2m}$. ידוע שקיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \ge N$ ובפרט עבור $n \ge \mathbb{N}$ כלשהו שנבחר, נקבל מהגדרת הגבול:

$$\begin{aligned} 0 &< |a_n\cdot\alpha + b_n| &&< \varepsilon = \frac{1}{2m} \\ 0\cdot m = 0 &< \underbrace{|n\cdot a_n + m\cdot b_n|}_{z} &&< \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cancel{m}}\cdot\cancel{m} \end{aligned}$$

ידוע $m \ge 0$ ולכן נוכל להכפיל בו

נבחין ש־$n\cdot a_n + m\cdot b_n \in \mathbb{Z}$ מסגירות החוג שלמים לחיבור וכפל. סה"כ מצאנו שלם $z \in \mathbb{Z}$ המקיים $0 < z < 0.5$, וזו סתירה. ■

(8)

יהי $\beta \ge 0$ ויהי $s \in (0,1)$. נוכיח כי הסדרה הבאה מתכנסת:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\beta} s^{n-k} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-s}$$

הוכחה. הראינו ש־$\limsup, \liminf$ מוגדרים היטב. ניעזר בווריאציה על משפט הסנדוויץ' (ולכן נעשה זאת לפי הגדרה) שיש גבול חלקי יחיד. מכיוון אחד (טרוויאלי) בגלל ש־$\left(\frac{n}{k}\right)^{\beta} \ge 1$ (כי $k < n$) נקבל:

$$\sum_{k=0}^{n-1} s^k = \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^{\beta} s^{n-k}}_{S(n)}$$

מצאנו חסם תחתון לסדרה, ולכן הוא חוסם מלמטה את $\limsup_{n\to\infty} S(n)$. קיבלנו:

$$\limsup_{n\to\infty} S(n) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} s^k = \frac{1}{s-1}$$

מכיוון שני, אינטואיטיבית, הביטוי $\left(\frac{n}{k}\right)^\beta$ נותן יותר משמעותית משקל לערכים הראשונים, שגדולים יותר בכל מקרה, ולכן מה שבא אחרי נקודה מסויימת לא משפיע על התנהגות הגבול. ננסח את זה פורמלית.

לכל $c > 1$ מתקיים $\frac{n}{n-k} \leq 1 < \sqrt[\beta]{c}$ (כי $k < n$ ושבר של מספר במספר קטן ממנו קטן מ־1, ושורש של מספר גדול מ־1 גדול מ־1 גם הוא). מכאן:

$$n-k \geq \frac{n}{\sqrt[\beta]{c}} \implies -k \geq \frac{n}{\sqrt[\beta]{c}} - n = n\left(\frac{1-\sqrt[\beta]{c}}{\sqrt[\beta]{c}}\right) \implies k \leq \underbrace{\left(\frac{\sqrt[\beta]{c}-1}{\sqrt[\beta]{c}}\right)}_{N_c} n$$

בגלל ש־$k \leq N_c \cdot n$, נקבל:

$$\forall k \leq N_c \cdot n\colon \left(\frac{n}{n-k}\right)^\beta \leq \left(\frac{n}{n-Cn}\right)^\beta = \left(\frac{n\sqrt[\beta]{c}}{\cancel{n\sqrt[\beta]{c}-n\sqrt[\beta]{c}}+n}\right)^\beta = \left(\sqrt[\beta]{c}\right)^\beta = c$$

כלומר, לכל $n > N_c$, נוכל לפצל את סדר הסכימה ולהפוך את סדר הסכימה באופן הבא:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^\beta s^k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{k}\right)^\beta s^k = \sum_{k=0}^{\lfloor N\rfloor}\underbrace{\left(\frac{n}{k}\right)^\beta}_{\leq c} s^k + \sum_{k=\lceil N_c\rceil+1}^{n-1}\overbrace{\left(\frac{n}{k}\right)^\beta}^{\leq n} s^k \leq \sum_{k=0}^{\lfloor N_c\rfloor}(c\cdot s^k) + \overbrace{\sum_{k=\lceil N\rceil+1}^{n-1}\left(n\cdot s^k\right)}^{P(n)} \leq c\cdot\frac{s^n-1}{s-1} + P(n)$$

כאשר $P(n)\to 0$ כלשהי. הא"ש האחרון נכון כי דבר ראשון:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor N_c\rfloor}(c\cdot s^k) = c\cdot\frac{s^{\lfloor N_c\rfloor}-1}{s-1} \leq c\cdot\frac{s^n-1}{s-1}$$

ודבר שני $P(n) \leq n\cdot\frac{s^n-1}{s-1}$ וממבחן השורש נקבל ש־$\sqrt[n]{\xi n s^n} = \sqrt[n]{\xi n}\cdot s$ ומשום ש־$s < 1$ ו־ξ איזשהו קבוע שאפשר לבטא אלגברית אבל הוא לא משנה בכלל כי $\sqrt[n]{n}\to 0$, אז קיבלנו גבול קטן מ־1 $s<$ כלומר $P(n)\to 0$.

לחסם עליון קיבלנו מאריתמטיקה של גבולות:

$$\forall c > 1\colon \limsup_{n\to\infty} S(n) \leq \lim_{n\to\infty} c\cdot\frac{s^n-1}{s-1} + P(n) = c\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s^n-1}{s-1}\right) + \lim_{n\to\infty}P(n) = c\cdot\frac{1}{1-s} + 0$$

וממשפט שהוכחנו בגלל ש־$\forall c > 1\colon \limsup S(n) \leq c\cdot\frac{1}{1-s}$, בהכרח $\limsup S(n) \leq \frac{1}{1-s}$.

סה"כ בשעה טובה:

$$\frac{1}{1-s} \leq \limsup_{n\to\infty} S(n) \leq \limsup_{n\to\infty} S(n) \leq \frac{1}{1-s}$$

כלומר $\liminf S(n) = \frac{1}{1-s} = \limsup S(n)$ ומכאן שיש גבול חלקי יחיד ל־$S(n)$, כלומר היא מתכנסת לאותו הגבול, ונוכל לסכם:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^\beta s^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^\beta s^{n-k} = \lim_{n\to\infty}S(n) = \frac{1}{1-s}$$

כדרוש. ■

(9)

נוכיח את משפט צ'זארו לממוצעים משוקללים. תהי $x_n \to x$ סדרה וכן $\lambda_n > 0$ סדרה כך ש־$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \to \infty$. נוכיח ש־:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k} \xrightarrow{n\to\infty} x$$

יהיה ממש מצחיק להוכיח את זה עם משפט שטולץ כי זו הוכחה מעגלית. נעשה כאן הוכחה נורמלית:

הוכחה. ידוע שהסדרה a_n מתכנסת, לכן $a \in \mathbb{R}$.

- אם $a = 0$: יהי $\varepsilon > 0$. בגלל ש־$a_i \to x$ מהגדרת הגבול קיים $\exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n \geq N_1 \colon\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. נבחין ש־$|a_1 + \cdots + a_{N_1}| =: s$ קבוע, ובגלל ש־$\lambda_k \to \infty$ אז $\frac{s}{\lambda_k} \to 0$ (אריתמטיקה של גבולות אינסופיים) דהיינו מהגדרת הגבול קיים N_2 עבורו $\forall n \geq N_2 \colon\ \frac{s}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. נסמן $N = \max\{N_1, N_2\}$ ונקבל:

$$-\varepsilon < 0 < \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} a_i \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} + \frac{\overbrace{\sum_{k=N_1+1}^{n} \lambda_k a_k}^{< \sum_{k=N_1+1}^{n} \lambda_k a_n}}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} \lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \overbrace{\frac{a_n \cancel{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}}{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}}}^{< \frac{\varepsilon}{2}} < +\varepsilon$$

כלומר מהגדרת ערך מוחלט קיבלנו $\left| \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \right| < \varepsilon$ וסיימנו.

- אם $a \neq 0$, נתבונן בסדרה $b_n = a_n - a$. מאריתמטיקה של גבולות $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a = a - a = 0$. לכן המקרה הקודם מתקיים בעבורה. ואכן:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} - a = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k a_k) - a \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - a)}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ומאריתמטיקה של גבולות, סיימנו. ■

נשאל את עצמנו האם הטענה מחזיקה עבור λ_n שאינן מקיימות $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \infty$. נבחין שלא – עבור $a_i = 1$ נקבל $a_n \to 1$ (שכן הסדרה קבועה), ונתבונן בסדרת המשקלים $\lambda_k = \frac{1}{k^2}$. עבור $\lambda_k = 0.5^k$ ו־$a_n = 0.5^k$ נקבל:

$$a_n \to \frac{0.5}{1 - 0.5} = 1 \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} 0.5^k 0.5^k}{\sum_{k=1}^{n} 0.5^k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} 0.25^k}{\sum_{k=1}^{n} 0.5^k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\frac{0.25}{1-0.25}}{0.5} = \frac{2}{3} \neq 1$$

וסיימנו.

(10)

נפריך את היות סדרה חיובית השואפת ל־0 מונוטונית ממקום מסויים. נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{1}{n-2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחין ש־$a_{2n} = \frac{1}{n} \to 0$ ו־$a_{2n+1} = \frac{1}{n-2} \to 0$ ולכן ממשפט הכיסוי $a_n \to 0$. נניח בשלילה שהיא מונוטונית החל מ־$N \in \mathbb{N}$ כלשהו.

- קיים $\mathbb{N}_{\text{even}} \ni n \geq N$. נבחין ש־:

$$a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} = \frac{1}{(n+1)-2} = a_{n+1}$$

כלומר, הכיוון שלה הוא מונוטוני עולה בהכרח.

- קיים $\mathbb{N}_{\text{odd}} \ni n \geq N$. נבחין ש־:

$$a_n = \frac{1}{n-2} > \frac{1}{n-1} = a_{n+1}$$

כלומר, הכיוון שלה הוא מונוטוני יורד בהכרח.

סה"כ, a_n מונוטונית עולה חזק ומונוטונית יורדת חזק לכל $n \geq \mathbb{N}$, וזו סתירה, כלומר לא קיים N כזה.

סה"כ הפרכנו את המשפט.

שחר פרץ, 2025