חדו"א ו-1

שחר פרץ

26 באוקטובר 2025

שם מרצה: ליאור קמה

אימייל: liorkammma@tauex.tau.ac.il

ניוטון פיתח לראשונה את החדו"א ככלי לנתח כוכבי לכת וקליעים. תוך כדי כך לייבניץ פיתח את החדו"א. ההגדרות לא היו פורמליות בכלל. זה השתנה לאחר פרדוקס ראסל, ולאחרי שזרם הפורמליזם של הילברט בגטינגן השתלט על הכל.

INTRO .... (1)

1.1 שדות סדורים שלם

דיברנו על מערכת המספרים הממשיים בלינארית. נדבר על הקבוצה $\mathbb{R}$. הקבוצה היחידה שניתנת לנו מהמשיים היא $\mathbb{N}$ (מהאקסיומות של תקבצ). מהטבעיים בונים את הקבוצות האחרות, כמו השלמים והרציונליים. לבנות את הממשיים זה יותר בלגן, זה לא קשה, בעיקר לוקח זמן.

אופציה אחרת, היא במקום לבנות את $\mathbb{R}$, ניגש בקבוצה האקסיומטית, כמו שראינו בתורת החוגים. נניח כל מני דברים על הקבוצה הזו, נקווה שהיא קיימת, ונוכיח כל מני טענות על גבי זה.

אינטואיטיבית נחשוב על זה כעל כל מספר שיכול להתבטא באורך של קטע.

יש לנו שתי פעולות, $+ \colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו־$\cdot \colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. עקרונית $+(3,5)$ כיתוב חוקי, אבל כתיב פולני של $3+5$ מקובל מספיק. הקבוצה $\mathbb{R}$ היא חבורה בחיבור, חבורה בכפל, ודיסטרבוטיבית. כלומר לכל x,y,z מתקיים:

1. קומטטיביות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x+y=y+x$
2. אסוציאטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x+(y+z)=(x+y)+z$
3. קיום איבר 0 (יחידת חיבור): $\exists 0\in\mathbb{R}\colon \forall x\in\mathbb{R} x+0=x$
4. קיום נגדי (הופכי לחיבור): $\forall x\in\mathbb{R}\colon \exists y\in\mathbb{R}\colon x+y=0$

כבר בעזרת ההנחות האלו אפשר לעשות דברים.

משפט 1. לכל $x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x+y=z+y)\implies x=z$

הוכחה. יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$. נניח $x+y=z+y$. מ־4 קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש־$y+t=0$. נרכיב את $+$ עם t על שני האגפים ונקבל $(x+y)+t=(z+y)+t$ מח"ע הפונקציה. מ־2 נקבל $x+(y+t)=z+(y+t)$ כלומר $x+0=t+0$ ולכן מ־3 $x=z$ כדרוש. ∎

מסקנה 1. לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש־$x+y=0$.

סימון 1. יהי $x\in\mathbb{R}$. את המספר y המקיים $x+y=0$ נכנה הנגדי של x ונסמן $-x$.

נמשיך עתה עם אקסיומות כפל.

5. קומוטטיביות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x\cdot y=y\cdot x$
6. אסוציאטיביות: $\forall x,y,z,\in\mathbb{R}\colon (xy)z=x(yz)$
7. קיום ניטרלי לחיבור (קיום יחידה בכפל): $x\cdot 1=x$
8. קיום הופכי בכפל: $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon \exists y\in\mathbb{R}\colon xy=1$

משפט 2. לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$, אם $y\neq 0\wedge xy=zy$ אז $x=z$.

שימו לב לדרישה $y\neq 0$.

הוכחה. תרגיל לבית ∎

מסקנה 2. לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ קיים $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ יחיד, כך ש־$xy=1$.

סימון 2. יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, את המספר המקיים $xy=1\wedge y\neq 0$ נכנה ההופכי של x ונסמן x^{-1}.

עתה נוסיף את התכונה האחרונה שנדרשה מאיתנו:

9. דיסטרבוטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x(y+z)=xy+xz$

תשעת האקסיומות הללו מגדירות על $(\mathbb{R},+,\cdot)$ מבנה הקרוי שדה. הוא למעשה חוג עם הופכי בכפל, ומקיים כל מני תכונות נחמדות שראינו באלגברה לינארית 1א.

משפט 3. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x\cdot 0=0$.

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{R}$. לפי 3 $0+0=0$ כלומר $x\cdot(0+0)=x\cdot 0$ מהיות כפל פונקציה ולכן חד־ערכי. לפי 9 $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0$. לפי 3 $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0+0$. מהטענה הראשונה שהוכחנו $x\cdot 0=0$. ■

משפט 4. $\forall x\in\mathbb{R}\colon(-1)\cdot x=-x$.

הוכחה. יהי x. מטענה קודמת, $x\cdot 0=0$. מההגדרה, $1+(-1)=0$. לכן $x(1+(-1))=0$. לפי 9, $x\cdot 1+x\cdot(-1)=0$. לפי 7 ו־5 $x+(-1)x=0$. הוכחנו את יחידות הנגדי ולכן $(-1)\cdot x=-x$. ■

עתה, נגדיר יחס סדר (כמו שעשינו בבדידה 1). קבוצה R קרויה יחס אם $R\subseteq A\times A$ עבור A כלשהו. ואכן, טוענים $<\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. במקום לכתוב $(2,3)\in<$ נכתוב $2>3$.

10. אנטי־סימטריות חזקה: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y\implies x\not<y$
11. טרנזטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\land y<z)\implies x<z$
12. מליאות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y\lor x=y\lor y<x$
13. אדטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x<y\implies x+z<y+z$
14. ססקווי־כפליות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\land 0<z)\implies xz<yz$

הקבוצה $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ נקראת שדה סגור.

משפט 5. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אם $x<y$ אז $-y<-x$.

הוכחה. נניח $x<y$. לפי 13 $x+(-y)<y+(-y)$, כלומר $x+(-y)<0$. לפי 1, 13 מתקיים $-x+(x+(-y))<-x+0$. לפי $2,3$ מתקיים $(-x+x)+(-y)<-x$ וסה"כ $0+(-y)<-x$ ומ־3 נקבל $-y<-x$ כדרוש. ■

משפט 6. לכל $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, אם $x<y\land z<w$ אז $x+z<y+w$.

שימו לב שזה לא עובד בכפל, אלא אם מניחים שהכל חיובי (לבית).

יש לציין שגם $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ הוא יחס סדר סדור.

אז מה מיוחד ב־$\mathbb{R}$? תמתינו, אבל הרעיון הוא שהוא יותר "רציף". המהות של החשבון הדיפרנציאלי הוא הרצף הזה. את ה"נעילה" הזו של האקסיומות כך שרק $\mathbb{R}$ יקיימן (עד לכדי איזו') יתבצע ע"י הוספת אקסיומת השלמות.

1.2 קבוצות חסומות וחסמים

הגדרה 1. תהא $A\subset\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלעיל של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\le\alpha$.

הגדרה 2. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלרע של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $\alpha\le a$.

הגדרה 3. A תקרא חסומה מלעיל כאשר קיים לה חסם מלעיל.

הגדרה 4. A תקרא חסומה מלרע אם קיים לה חסם מלרע.

הגדרה 5. A תקרא חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

הגדרה 6. α ייקרא חסם עליון (סופרמום) כאשר:

1. α חסם מלעיל, כלומר $\forall a\in A\colon a\le\alpha$
2. החסימה הדוקה, כלומר $\forall\varepsilon>0\,\exists a\in A\colon a>\alpha-\epsilon$

נבחין ש־2 לא שקול ל"קיים $a\in A$ כך ש־$a=\alpha$". לדוגמה, $A=\{x\in\mathbb{R}\colon x<1\}$. מטרנזטיביות כל $\alpha>1$ הוא חסם עליון, אך רק אחד הוא סופרמום, על אף ש־$1\notin A$. עם זאת, הכיוון השני עובד: אם $\alpha\in A$ חסם עליון של A (קוראים למספר כזה מקסימום), אז α סופרמום. כלומר, מקסימום הוא סופרמום, אבל סופרמום לא בהכרח מקסימום.

האינטואציה ל־2 – לא משנה כמה מעט נוריד (כמה ה־ε קטן), ברגע שנוריד משהו מ־α, נקבל משהו שהוא כבר לא חסם מלעיל. כלומר, החסם העליון הוא "החסם המלעיל הקטן ביותר". כמו שנראה בהמשך, האינטואציה הזו אולי עוזרת להבין את ההגדרה, אבל היא אינטואציה מטעה מאוד.

למה 1. 1 חסם עליון של הקבוצה לעיל

הוכחה. יהי $\alpha \in A$. אז $a < 1$ ולכן $a \le 1$ ומכאן הוא חסם מלעיל. נותר להוכיח שהחסימה הדוקה. יהי $\varepsilon > 0$. אז $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. לכן $1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$. לכן $1 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, וגם $1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$. לכן 1 חסם עליון. ■

משפט 7. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. אם יש ל־A חסם עליון, יש לה חסם עליון יחיד.

הוכחה. נניח α חסם עליון של A וגם β חסם עליון של A. נניח בשלילה $\alpha < \beta$. נסמן $\varepsilon = \beta - \alpha$ ומההנחה $\epsilon > 0$. נקבל קיום $a \in A$ כך ש־$a > \beta - (\beta - \alpha)$ ולכן $a > \alpha$, בסתירה לכך ש־α חסם מלעיל של A חסם מלעיל של A. ■

סימון 3. תהר $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נסמן את החסם העליון של A ב־$\sup A$.

לבית – תגדירו באופן דומה חסם תחתון.

סימון 4. חסם תחתון (שהגדרתם בבית) יקרא אינפימום ויסומן ב־$\inf A$.

עתה, נוכל להגדיר את האקסיומה ה־15 של הממשיים.

15. אקסיומת השלמות (או אקסיומת החסם העליון): לכל $A \subseteq \mathbb{R}$. אם $A \neq \varnothing$ וגם A חסומה מלעיל, אז ל־A קיים חסם עליון.

למה 2. לכל $x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$.

(כלומר, $\sqrt{2}$ מספר אי־רציונלי)

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{Q}$. נניח בשלילה $x^2 = 2$. קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש־$n \neq 0$ וגם $x = \frac{m}{n}$. ללא הגבלת הכלליות, m אי־זוגי או n אי־זוגי (לבית: לסגור את הפינה הזו באינדוקציה). לכן $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, כלומר $\frac{m^2}{n^2} = 2$. מכאן $m^2 = 2n^2$. לכן m^2 זוגי ולכן m זוגי (כי ריבוע לא משנה גורמים ראשוניים). סה"כ קיים k כך ש־$m = 2k$ כלומר $4k^2 = 2n^2$ ומכאן $n^2 = 2k^2$ ואז n זוגי וסתירה. לכן $x^2 \neq 2$. ■

למה 3. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$, אם $x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 < y^2$ אז $x < y$.

משפט 8. $(\mathbb{Q}, \cdot, +, <)$ אינה מקיימת את אקסיומת השלמות.

הוכחה. נתבונן בקבוצה $A = \{\mathbb{Q} \ni x > 0 \colon x^2 < 2\}$. נתבונן ב־1. $1 \in \mathbb{Q}$ וכמו כן $1 > 0$ וגם $1^2 < 2$ כלומר $1 \in A$ ו־$A \neq \varnothing$. נתבונן ב־2. נראה ש־2 חסם מלעיל. יהי $a \in A$. ידוע $a^2 < 2$. נפצל למקרים. מקרה 1, נניח $a \ge 1$ ואז $a \le a^2 < 2$. מקרה 2, נניח $a < 1$. אז $a < 2$ וסיימנו. לכן 2 חסם מלעיל של A כלומר A חסומה מלעיל.

נותר להוכיח שאין ל־A חסם עליון. יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$. נראה ש־α לא חסם עליון. ידוע ממשפט קודם $\alpha^2 \neq 2$. לכן, $\alpha^2 < 2 \vee \alpha^2 > 2$.

- אם $\alpha^2 < 2$. [טיוטה: היינו רוצים לקחת ממוצע חשבוני, עם $\sqrt{2}$. אבל $\sqrt{2}$ לא מוגדר. כלומר היינו רוצים למצוא δ כך ש־$(\alpha+\delta)^2 > 2$. זה יוצא $(\alpha + \delta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2 < 2$. מכאן $2\alpha\delta + \delta^2 < 2 - \alpha^2$. בגלל ש־$2 - \alpha^2$ קבוע חיובי יש לנו תקווה שזה אפשרי. נקווה $\delta < 1$ ואז $2\alpha\delta + \delta^2 \le 2\alpha\delta + \delta < 2 - \alpha^2$ ואז $\delta < \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}$, וברגע שנדע שזה לא 0 בהכרח קיים $\delta > 0$ מתאים. ניקח את המינימום בין זה לבין 1 ונגמור עניין – סוף טיוטה].
  - אם $\alpha < 0$ אז α אינו חסם עליון, אחרת נסמן $\delta = \frac{1}{2}\min\left[1, \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}\right]$. אז $\delta \in \mathbb{Q}$ ו־$\delta > 0$, שכן מההנחה $2 - \alpha^2 > 0$ ולכן $\delta \neq 0$. לכן $\alpha + \delta \in \mathbb{Q}$ וגם $\alpha + \delta > \alpha > 0$. כמו כן, $(\alpha + \delta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2$. ידוע $\delta \le \frac{1}{2}$ דהיינו $\delta^2 < \delta$. לכן:

  $$(\alpha+\delta)^2 < \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta = \alpha^2 + \delta(2\alpha+1) < \alpha^2 + \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}(2\alpha+1) = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2$$

  לכן $\alpha + \delta \in A$ כלומר α אינו חסם מלעיל של A ולכן איננו חסם עליון.
  - בדומה למקרה הקודם, אם $\alpha \le 0$ אז α אינו חסם עליון של A. נניח $\alpha > 0$. [טיוטה: הפעם נעשה הפוך, נרצה למצוא $\delta > 0$ כך ש־$(\alpha-\delta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 > 2$ ומכאן $2\alpha\delta - \delta^2 < \alpha^2 - 2$ צ.ל. חייבים להניח $\delta < \alpha$, בלי קשר $2\alpha\delta - \delta^2 < 2\alpha\delta < \alpha^2 - 2$ וסה"כ $\delta < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$. – סוף טיוטה]

  נפנה לאשכרה הוכחה. נבחר $\delta = \frac{1}{2}\min\left[\alpha, \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}\right]$. נראה ש־$\alpha - \delta$ גם חסם מלעיל. אז $\delta < \alpha$ ולכן $\alpha - \delta > 0$. כמו כן:

  $$(\alpha-\delta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\delta = \cdots$$

  ידוע $\delta < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$ כלומר $2\alpha\delta < \alpha^2 - 2$ וגם $-2\alpha\delta > 2 - \alpha^2$.

  $$\cdots > \alpha^2 + (2 - \alpha^2) = 2$$

  נותר להראות ש־$\alpha - \delta$ אשכרה חסם עליון. יהי $a \in A$. אז $a^2 < 2 < (\alpha - \delta)^2$. מהיות $\alpha - \delta > 0$ כי בחרנו את δ כך ש־$\delta < \alpha$, ידוע $\alpha < \alpha - \delta$ (מהלמה השנייה שהוכחנו). לכן $\alpha - \delta$ חסם מלעיל של A, ו־α אינו חסם עליון של A.

■

לסיכום – אקסיומת השלמות היא ההבדל המשמעותי בין $\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{Q}$. לבינתיים, נניח ש־$\mathbb{R}$ שדה סדור מלא שמקיים את אקסיומת החסם העליון, ואפשר להראות קיום, ואף להראות שכל השדות המתאימים איזומורפים אחד לשני.

משפט 9. לכל $x \in \mathbb{R}$, אם $x > 0$ אז קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y > 0$ וגם $y^2 = x$.

הוכחה. לא נוכיח במדויק, נוכיח רק בערך. נגדיר את $A = \{A \colon a^2 < x\}$. ממש כמו שהוכחנו קודם, אפשר להראות ש־A חסומה מלעיל, וב־$\mathbb{R}$ יש לה חסם עליון. צ.ל. שריבוע החסם העליון הזה, הוא x. ■

יש הכללה למשפט הזה:

משפט 10. לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכל $n \in \mathbb{N}_+$, אם $x > 0$ אז קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y > 0$ וגם $y^n = x$.

ההכלה הזו יותר מסובכת, וצריך בשביל זה את הבינום של ניוטון. זה הרבה עבודה ידנית.

סימון 5. נסמן את ה־y היחיד שמקיים את המשפט לעיל ב־$\sqrt[n]{x}$.

כמה מילים לגבי חזקות. חזקות שלמות אפשר להגדיר רקורסיבית. חזקות רציונליות אפשר להגדיר בפחות או יותר באופן הבא:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^m$$

שקיים מהמשפטים שלנו. בשביל ההגדרה הזו, צריך להראות שזה לא תלוי בייצוג של הרציונלי – לא איכפת לנו בעבור אילו n, m אנו מגדירים את זה, כלומר $\forall m, n, k, \ell \colon \frac{m}{n} = \frac{k}{\ell} \implies \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\ell]{a^k}$.

. . . .

שחר פרץ, 2025