מתמטיקה בדידה ~ תרגיל בית 21 ~ מספרי קטלן

שחר פרץ

18 ביוני 2024

1

(א) נרצה להוכיח קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

הוכחה. נוכיח קומביטורית.

סיפור: תמורות ללא נקודות שבת עבור מחרוזת באורך n.

אגף שמאל: לפי הגדרה.

אגף ימין: נבחר מתוך n התווים k ערכים בהם בלבד לא תהיה נקודת שבת, כלומר $f(x) = x$. עבור כל השאר, יהיו D_{n-k} אפשרויות. לבחירה, ייתכנו $\binom{n}{k}$ אפשרויות. מכלל החיבור, הביטוי $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$ יבטא את כמות האפשרויות עבור מחרוזות בהן יש מספר כלשהו k של נקודות שבת בלבד; ועקרון המשלים, מקיום $n!$ זיווגים, נקבל שהאגף מתאר את מספר התמורות ללא נקודות שבת. ■

(ב) נרצה להוכיח קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

הוכחה. נוכיח קומבינטורית.

סיפור: תמורות ללא נקודות שבת עבור מחרוזת באורך n.

אגף שמאל: לפי הגדרה.

אגף ימין: נתבונן בסדרה בעלת n איברים. נבחר את האיבר הראשון בה, נסמנו a_1. יהיו $n-1$ אפשרויות לבחור מספר שהיא תפנה אליו (כמות האפשרויות, פחות היא עצמה), נסמנו a_j. אם a_j מפנה אליה, אז סה"כ ידועות לנו שתי הפניות ויהיו D_{n-2} אפשרויות – כמות האפשרויות לסדר את כל השאר. אם לא, אז נתבונן בכמות האפשרויות לסדר את $n-1$ האיברים כולל a_j, שהיא D_{n-1}, אך על כל סידור נגדיר הרכבה ב־$1 \to j$, כי כבר ידוע ש־j מופנה ע"י 1. סה"כ שני הביטויים קשורים בבחירת j, כלומר נקבל $(n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ כדרוש. ■

2

שאלה: חשבו את מספר ההילוכים מ־$(0,0)$ ל־$(2n,0)$ שצעדיהם הם $(+1,+1)$ או $(+1,-1)$ בלבד, שלעולם לא עוברים מתחת לציר ה־x?

טענה: $C_n =$ כמות האפשרויות

הוכחה. נגדיר התאמה $(+1,-1) \mapsto -1,\ (+1,+1) \mapsto +1$. נסמן את ההילוך במיקום ה־i ע"י $a_i \in \{-1,1\}$, ונסמן $\Sigma_j =: \sum_{i=0}^{j} a_i$. נספק כל אחת מההגבלות;

1. נדע, שמשום שלעולם לא נרד מתחת לציר ה־x, כמות הפעמים שירדנו גדולה או שווה לזו שעלינו: כלומר, הסכום חיובי סה"כ $\forall j. \Sigma_j \geq 0$
2. על הרצף להיגמר ב־$(2n,0)$. הכרח הוא, שלציר ה־x במיקום ה־$2n$ נגיע לאחר $2n$ צעדים בלבד, כי כל צעד באורך 1 בהכרח. אם ערך ה־y הוא 0, כדרוש, נדרש כי $\Sigma_n = 0$.

סה"כ, קיבלנו במדויק את התנאים של כמות האפשרויות למציאת מבנה סוגריים מאוזן, כלומר כמות האפשרויות היא C_n. ■

3

נסמן $G_n =$ אוסף הסדרות הטובות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ מהקיימות $\sum_{i=0}^{2n} a_i = 0 \land a_i \in \{-1,1\}$, שייקראו סדרות טובות.

(א) **שאלה:** כמה סדרות טובות יש?

טענה: $|G_n| = \binom{2n}{n}$

הוכחה. לפני התנאי אודות שוויון הסכום ל־0, מן ההכרח שקיימים n מספרים שיקיימו את התנאי $a_i = -1$ ו־n מספרים שייקמו את התנאי $a_i = 1$. מתוך $2n$ המיקומים בסדרה, נבחר n מיקומים לערכים עבורם $a_i = 1$, ומכאן שכל שאר n המיקומים בסדרה יהיו של ערכים עבורם $a_i = -1$. סה"כ, כמות האפשרויות היא $\binom{2n}{n}$ כדרוש. ■

(ב) **שאלה:** נסמן ב־$P_n \subseteq G_n$ את הסדרות הטובות באורך $2n$ המקיימות $\sum_{i=1}^{2k} a_i > 0 \wedge 1 \le k < 2n$. מצאו את $|P_n|$.

טענה:

$$|P_n| = C_{n-1}$$

הוכחה. נוכיח קומבינטורית.

סיפור: כמה דרכים יש להגיע מ־$(0,0)$ ל־$(2n,1)$ בלי לדעת בציר ה־x או לרדת תחתיו לאורך הדרך (פרט לנקודות ההתחלה והסיום), באמצעות הילוכים של $(+1,+1)$ ו־$(+1,-1)$?

אגף ימין: ראשית כל נהיה מחוייבים בהילוך הראשון לעלות $(+1,+1)$ אחרת נרד מתחת לציר ה־x, ובסיום נהיה מחוייבים לעשות הילוך של $(+1,-1)$ אחרת נגיע מנקודה שנמצאת מתחת לציר ה־x. נשאר לתהות מה קרה על $2n-2$ ההילוכים באמצע. תחת ההנחה שהלכנו את שני ההילוכים שהוכח כי עלינו לבצע, נרצה למצוא את כמות הדרכים ללכת מ־$(1,1)$ ל־$(n-1,1)$ בלי לרדת מתחת לישר $y=1$, כי אם נרד מתחתיו ניגע בציר ה־x. לאחר טרנספורמציה $x \mapsto x-1,\ y \mapsto y-1$ נגיע לשיקולות לשאלה כמה דרכים יש להגיע מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2n-2,0)$ בלי לדעת בישר $y=0$, הלוא הוא ציר ה־x. זה שקול ל־C_{n-2} לפי שאלה (2). סה"כ, משום שאת המהלך הראשון והאחרון ניאלץ לבצע כמתואר, יהיו C_{n-1} אפשרויות למהלכים.

אגף שמאל: באופן דומה לשאלה 2, נתאים $a_i = 1 \mapsto (+1,+1),\ a_i = -1 \mapsto (+1,-1)$. נספק כל הגבלה. יאסר עלינו שלכל $1 \le i < 2n$ יתקיים שסכום על האיברים שקדמו יהיה גדול ממש מ־0. באופן שקול, כמות ההילוכים מעלה גדולה ממש מכמות ההילוכים מטה. אם היא הייתה שווה אזי היינו פוגשים בישר $y=0$, ואם היא הייתה קטנה היינו יורדים תחתיו, כלומר באופן שקול נקבל שבהכרח לא נרד מתחת לישר $y=1$. נוסף על כך, נרצה שהסכום עד $2n$ יהיה 0, ואכן גם כאן לאחר $2n$ הילוכים נגיע לנקודה $(2n,0)$, כלומר ביצענו כמות שווה של הילוכים מעלה ומטה השקולים ל־$+1,1$ הבתאמה כלומר הסכום 0 כדרוש. ■

(ג) **שאלה:** לכל $1 \le k \le n$, נסמן ב־$Q_{n,k} \subseteq G_n$ את אוסף הסדרות הטובות $\{a_i\}_{i=1}^{2n}$ עבורן k הינו המינימלי עבורו $\sum_{i=1}^{2k} a_i = 0$. מצאו את $|Q_{n,k}|$

טענה:

$$|Q_{n-k}| = \binom{2n-2k}{n-k} \cdot \left(\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} - \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} \right)$$

הוכחה. כדי לפתור את השאלה, נשאל כמה אפשרויות יש ל־$S_n \subseteq G_n$ כך שלכל $j < n$ יתקיים כך ש־$\sum_{i=1}^{2j} a_i < 0$. נמצא ש־$|S_n| = |G_n| - C_n$, כי עבור G_n עולם דיון C_n יהיה המשלים לפי הגדרה. עתה, נקבל ש־$P_k \uplus S_k$ הוא המשלים ל־k האיברים הראשונים ב־$Q_{n,k}$ מתוך G_k, כי בו, מתוך מונוטוניות המספרים הטבעיים, לכל $j < k$ יתקיים $\sum_{2j}^{i} a_i \neq 0$. סה"כ כמות האפשרויות לבחירת k האיברים הראשונים מתוך $Q_{n,k}$ תהיה $|G_k| - |P_k| - |S_k|$. עבור $n-k$ האיברים הנותרים, נוכל לבוחרם ללא הגבלה פרט לעבודה שבסופו של דבר סכומם יהיה 0, כלומר יהיו G_{n-k} כאלו. מכלל הכפל נקבל:

$$|Q_{n-k}| = |G_{n-k}| + |G_k| - |P_k| - |S_k| = |G_{n-k}| \cdot \big(|G_k| \underbrace{-C_{k-1}}_{-|P_k|} \underbrace{-|G_k| + C_k}_{|S_k|}\big) = |G_{n-k}| \cdot (C_k - C_{k-1})$$

נציב בערך הסגור של הביטויים לעיל, ונקבל את טענתנו. ■

4

שאלה: חשב את מספר הסדרות $a_1, \ldots a_{2017}$ כך ש־:

$$\forall i \in [2017]. a_i \in \{-1,1\} \ \wedge \ \sum_{i=1}^{2017} a_i = 7 \ \wedge \ \forall 1 \le j \le 2017. \sum_{i=1}^{j} a_i > 0$$

טענה:

$$Ans. = C_{1004} \cdot 1006^7$$

הוכחה. כדי לפתור את הבעיה הזו, ננסה ראשית כל לפתור בעיה פשוטה יותר – כמה אפשרויות יש לסדרות $a' := a'_1, \ldots a'_{2010} \in \{-1,1\}$ עבורן יתקיימו התנאים של P_n (מסעיף 3(ב)). התשובה, תהיה $|P_n|$ לפי הגדרה, כאשר $n = \frac{2010}{2} = 1005$. נשתמש בסדרה זו כבסיס לסדרה a_i – נרצה להוסיף עוד 7 ערכי a_i "באמצע" (ונסמן $i \in I$ לכל a_i שנוסיף) b_i, אך ששני התנאים ש־a' לא קיימה כמו הסדרה שאנו מנסים למצוא: $\sum_{i=1}^{2017} = 7$, $|a'| \neq 2017$. מכאן, בהכרח $\forall i \in I. a_i = 1$ על מנת להגיע לסכום הדרוש (כי הסכום של P_n במיקום ה־n הוא 0, לא 7). הוספה בכל מיקום לא תפגעה בתנאי $\forall i \in [2017]. \sum_{i=1}^{j} > 0$ כי הוספת ערכים רק תגדיל את סכום האיברים שלאחריה, והם ממילא

מקיימים את התנאי הזה לפי הגדרת P_n. נרצה לדעת את כמות האפשרויות לסדר ערכים אלו. נטען, שזוהי 1006^7. נוכיח; לכל iI, בה"כ לראשון, יהיו לכאורה 2017 מיקומים, אך משום שהסדרות $-1,-1$ ו־$-1,-1$ הן זהות (כלומר, אין משמעות לסדר הפנימי של ה־-1־ים) אז מה שיקבע את השוני בין הסדרות הוא בין אלו ערכי $a_i = 1$ הם נמצאים. המספר לאפשרויות למקם דברים בין ערכי ה־a_i השונים הוא $1006 = \frac{2010}{2} + 1$, ($+1$ עבור הערך האחרון, ו־$\frac{2010}{2}$ בהתאם להגדרה של P_n), ואין המספר ישתנה אם נוסיף עוד -1, כלומר סה"כ מכלל הכפל נקבל $1006^{|I|} = 1006^7$ אפשרויות. מכלל הכפל סה"כ נקבל $1006^7 \cdot |P_{1005}|$, כך שנציב ונקבל את הדרוש לעיל. ■

5

(א) **צ.ל.:**

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \overset{!}{=} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \overset{!}{=} \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$$

הוכחה.

זהות ראשונה: נרצה להוכיח $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. נשתמש בהגדרת הבינום:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \quad &= \frac{(2n)!}{2n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{2n!} - \frac{(2n)!}{n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^{-1}} \\ = \frac{(2n)!}{2n!} - \frac{(2n)!}{2n!} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(2n)!}{2n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad &= \frac{n+1-n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \quad = \boldsymbol{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

זהות שנייה: נרצה להוכיח $C_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} &= (n+1)^{-1} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\left(\prod_{k=1}^{2n} k\right)^2} \quad = (n+1)^{-1} \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} k} \\ &= (n+1)^{-1} \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=n+1}^{2n} k-n} = (n+1)^{-1} \prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k-n} \\ &= (n+1)^{-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k} \quad = \cancel{(n+1)^{-1} \cdot \frac{n+1}{1}} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} = \boldsymbol{\prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}} \end{aligned}$$

■

(ב) **צ.ל.** (קומבינטורית):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2n+1}{n}$$

הוכחה. נוכיח קומבינטורית. **סיפור:** כמה אפשרויות יש להגיע מ־$(0,0)$ ל־$(2n+1,-1)$, באמצעות מהלכים של ימינה־למעלה או ימינה־למטה?

אגף ימין: ראשית כל, נדע $\frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k} = C_k$ מסעיף 5(א). נגדיר את $2k$ בה ההילוך פוגש את ציר ה־x ויורד מיד מתחתיו. בחירה כזו של $k \in \mathbb{N}$ לא תאבד מידע כי המיקום חייב להיות זוגי (כי על כל הילוך למעלה נרצה לעשות הילוך למטה). כמות הדרכים לבחור את הדרך עד $2k$, שהיא באורך $2k$, בלי לרדת תחת ציר ה־x היא C_k לפי סעיף שאלה 2. לאחר מכן, יוותרו $2n-2k+1$ מהלכים, אך נדע שהמהלך מיד לאחר k הוא ימינה־למטה לפי הבחירה שלנו, כלומר יוותרו לנו $2n-2k$ מהלכים לבחור חופשי. משום שנרצה להגיע מנקודה בשיעור $(2k+1,-1)$ לנקודה בשיעור $(2n+1,-1)$, אז בהכרח כמות ההילוכים ימינה־למעלה תהיה שווה לכמות ההילוכים ימינה־מטה, כלומר נרצה לבחור מתוך $2n-2k$ ההילוכים שנותרו את מחציתם מטה ומחציתם מעלה – לכך יהיו $\binom{2n-2k}{n-k}$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל נקבל $C_k \cdot \binom{2n-2k}{n-k}$ אפשרויות, ומכלל החיבור לכל $0 \leq k \leq n$ אפשרי נקבל את הדרוש, יחדיו עם הצבה הזהות אותה הזכרנו בתחילת הפסקה.

אגף שמאל: הכרח שנרד למטה $n+1$ פעמים ונעלה n, כי רק כך יתקיים שההפרש יהיה -1 ואכן שיעור ה־y לאחר $n+1$ מהלכים יהיה -1. נבחר את n ההילוכים ימינה־למעלה, והשאר בהכרח יהיו ימינה־למטה. סה"כ הבחירה תהיה $\binom{2n+1}{n}$ כדרוש. ■

6

שאלה: מה מספר הסדרות $x_1, x_2, \ldots, x_{4n}$ שבהן מתקיים:

$$\forall i \in [4n]. x_i \in \{-1,1\}, \ \sum_{i=1}^{2n} x_i = \sum_{i=1}^{4n} x_i = 0, \ \forall 1 \leq j < 2n. \sum_{i=1}^{j} x_i > 0, \ \forall 2n \leq j \leq 4n. \sum_{i=1}^{j} x_i \geq 0$$

טענה:

$$Ans. = C_n \cdot C_{n-1} = \frac{1}{n^2+n}\binom{2n}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

הוכחה. לבחירת $2n$ המספרים הראשונים, נרצה שהם יקיימו במדויק את התנאים שהוצבו בסעיף 3(ב) והגדירו את P_n, ונקבל $|P_n| = C_{n+1}$ אפשרויות. עבור $2n$ המספרים האחרונים, שיבורו לאחריהם, נרצה שייקמו במדויק את התנאים של מבנה סוגריים מאוזן (שזה, C_n). סה"כ נקבל את הדרוש מכלל הכפל בשילוב עם הצבה בביטוי הסגור ל־C_n ופישוטה. ■

7

שאלה: כלב ישן בבנין מקומות $-2,\dots,50$, מתחיל לישון בקומה 0 וכל יום בהמשך החודש (31 ימים) נסמן ב־s_i את המיקום בו הוא ישן, ונתון $\forall i\in[30].s_{i+1} = \{s_i-1, s_i+1\}$. מהו מספר הסדרות האפשריות $(s_1,\dots s_{31})$ כך ש־$s_{31} = 6$

טענה:

$$Ans. = \frac{C_{11}}{3}\cdot 12^8$$

הוכחה. למען הנוחות, נעבוד עם הפרשי המרחקים בין הקומות, כלומר אם הוא ירד קומה נבחר $b_n = 1$, ואם הוא ירד, $b_n = -1$. פורמלית: $n\in[30],\ b_n = s'_n - s'_{n+1}$, כאשר $s'_i = s_i + 1$ (כלומר $s'_i \in$). משום שידוע ש־$s'_{31} = s_{31} + 2 = 8$, אזי הוא צריך לעלות 6 קומות, כלומר $\sum_{i=1}^{30} b_n = 8$ (נזכור כי b_{30} כולל את המעבר ל־s'_{31}). נוסף על כך, נדע שלכל $i\in[30]$, בהכרח $0\le s'_i\le 52$ (כי הגדלנו את מספר הקומות ב־2 בהגדרת s'), כלומר $0\le\sum_{i=1}^{i} b_n\le 52$. החסם העליון לא רלוונטי לגבינו, כי $\sum_{i=1}^{j} b_n\le 30b_n\le 30 \implies b_n\le 1$ בכל מקרה, כי $j\le 30$ בהנחה שהביטוי מוגדר. מתוך כל סדרה אפשרית נוציא 8 איברים עבורם $b_n = 1$, כך שיוותרו $52-8=44$ איברים שסכומם הכולל הוא $8-8=0$ ובכל מיקום הוא גדול שווה ל־0. נמצא שזה כמעט שקול לקטלן, פרט לכך שנתחיל בקומה $s'_1 = 0+2 = 2$. בשיעור, הגדרנו זיווג של $+1\mapsto$ תזוזה ימינה, $-1\mapsto$ תזוזה למעלה, כאשר המטרה היא להגיע ל־$(0.5n, 0.5n)$ (כאשר $n = 22$ לאחר שהחרגנו את 8 התזוזות $+1$ שאנו יודעים שנרצה להוסיף בסוף מתוך 30 הלילות) בלי לדעת בישר $y = x$. כלומר, נתחיל מהמיקום $(0,2)$ במקום $(0,0)$ בקטלן רגיל. נשאל, כמה אפשרויות תזוזה יש מ־$(0,0)$ למשהו על הישר $x=2$, כדי להבין על כמה אפשרויות ויתרנו. בשביל להגיע ל־$(2,1)$ בלי לעבור ב־$(2,0)$ תהיה אפשרות אחת, כדי להגיע ל־$(2,2)$ בלי לעבור ב־$(2,0)$ תהיה גם אפשרות אחת, ולהגיע ל־$(2,0)$ הוא המקרי החוקי אותנו אנו בודקים, וסה"כ יש 3 אפשרויות מתוכן אחת תקינה כלומר מכלל החילוק נקבל שכמות ההילוכים התקינים היא $\frac{C_{22}}{3}$. נותר להוסיף את 8 ההילוכים של $+1$ שהורדנו בהתחלה, שבאופן דומה לשאלה 4, ידרוש מאיתנו לכל אחד $\frac{22}{2}+1 = 12$ מקומות כלומר 12^8 אפשרויות. נכפיל את האפשרויות להוסיף את 8 ההילוכים האחרונים בכמות הדרכים לעשות את כל השאר, ונקבל את הדרוש. ■

שחר פרץ, 2024