מתמטיקה בדידה - שיעורי בית 4

מידע כללי

מגיש: פרץ שחר

מוגש עבור: שלום נטלי

תאריך הגשה: 6.12.2023

~~~ שיעורי בית 4 ~~~

שאלה 1 - הוכחת טענות כלליות של הכלה

נתון

נתון שקיים אוסף של קבוצות $\{A_i \mid i \in I\}$. תהי קבוצה B.

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$(\forall i \in I.A_i \subseteq B) \implies \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$$
$$\iff (\forall i \in I.A_i \subseteq B) \implies \exists i \in I.A_i B$$

- האמ"מ נכון לפי הגדרת הכלה.
- נניח את הרישא, ונוכיח את הנגרר.
- אם I קבוצה ריקה, אז הטענה נכונה באופן ריק מתוך הגדרת קבוצה ריקה. אחרת, קיים $i \in I$, צ.ל. $A_i \subseteq B$. נשים לב שזה נגרר מהנתון שלנו (שטוען טענה זו לכל i), כלומר הטענה נכונה. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$(\forall i \in I.B \subseteq A_i) \implies \left(B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

- נפשט:
~~~

$$\begin{aligned} & \left(\forall i \in I . B \subseteq A_i\right) \implies \left(B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i\right) & \\ \iff \quad & \left(\forall i \in I . \forall x \in B . x \in A_i\right) \implies \left(\forall x \in B . x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right) & (\subseteq \text{ definition}) \\ \iff \quad & \left(\forall i \in I . \forall x \in B . x \in A_i\right) \implies \left(\forall x . \in B . \forall i \in I . x \in A_i\right) & (F, \cup \text{ definitions}) \end{aligned}$$

- מתוך העובדה שניתן להחליף את סדר כמתי ה"לכל", שתי הטענות שקולות, בפרט הגרירה בין אגף שמאל לימין. **מש"ל** ■

שאלה 2 - פישוט קבוצות והוכחה של הפישוט

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$A := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (m, m+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

- לפי הגדרת חיסור קבוצות, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \iff x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z}$.
- נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:
  - יהי $x \in A$, כלומר, קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש־$x \in (m, m+1)$ (מתוך הגדרת איחוד מוכלל). לפי הגדרת קטע פתוח, $x \in \mathbb{R} \wedge m < x < m+1$. משום שבין שני שלמים בהפרש 1 אין שום מספר שלם נוסף, אז $x \notin \mathbb{Z}$. לסיכום, הוכח ש־$x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{Z}$, כדרוש.
  - יהי $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. נוכיח $x \in A$.
    - נבחר $m = \lfloor x \rfloor$, כלומר $x \in [m, m+1]$.
    - נניח בשלילה ש־$x = m$. לפי זאת, אמ"מ $x = \lfloor x \rfloor$ כלומר אמ"מ $x \in \mathbb{Z}$, בסתירה להגדרתו. לפי זאת ש־$x \notin \mathbb{Z}$, גם כן $x + 1 \notin \mathbb{Z}$.
    - נסיק, $x \in (m, m+1)$. לסיכום, קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש־$x \in (m, m+1)$, כדרוש.
- **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$A := \bigcup_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right] = (0, 1)$$

- נשים לב ש־$x \in (0,1) = x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1$, ולהיפך, לפי הגדרת קטע פתוח. אשתמש בזהות הזו במהלך ההוכחה.

- נבחין כי משום ש־$k > 2$ אמ"מ $0 < \frac{1}{k} \leq 0.5$ (זאת ומכיוון ש־$f(x) = \frac{1}{x}$ חח"ע עבור $x > 0$). שורה זו תוגדר כטענה (1).
- נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:
  - נניח $x \in A$ ונוכיח $x \in (0,1)$;
    - לפי הגדרת איחוד מוכלל, קיים $k > 2$ כך ש־$x \in [\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$. נניח בשלילה ש־$x \notin (0,1)$.
    - נפלג למקרים:
      - אם $x < 0$, נתבונן ב־$n = |x|$. לכן $\frac{1}{k} \leq -n$, בניגוד לטענה (1).
      - אם $x > 1$, אז $1 - \frac{1}{k} > x > 1$. זאת בניגוד לטענה (1).
      - אם $x = 0$ אז $\frac{1}{k} = 0$, וזה עומד בניגוד לטענה (1).
      - אם $x = 1$ אז $1 - \frac{1}{k} > 1$, כלומר $1 + \frac{1}{k} < 1$, נחסר 1 משני האגפים. נקבל $\frac{1}{k} < 0$, זאת בניגוד לטענה (1).
  - נניח $x \in (0,1)$, ונוכיח $x \in A$;
    - נבחר $k = \frac{1}{x}$. משום ש־$x > 0$, אז $x < \frac{1}{k}$. נניח בשלילה $x > 1 - \frac{1}{k}$;
      - מתוך ההנחה בשלילה:

$$\begin{aligned} x &> 1 - \tfrac{1}{k} \\ x + \tfrac{1}{k} &> 1 \\ x + x &> 1 \end{aligned}$$

      - אשר לא נכון לכל $x \in (0,1)$, כי הוא לא מתקיים עבור $x = 0.75$.
    - נסכם: קיים k כך ש־$\frac{1}{k} \leq x \leq 1 - \frac{1}{k}$. לפי טענה (1) $k > 2$, כדרוש.
- **מש"ל ■**

סעיף (ג)

- צ.ל.:

$$\forall \varepsilon > 0. A := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q - \varepsilon, q + \varepsilon) = \mathbb{R}$$

- נוכיח. יהי $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:
  - יהי $x \in \mathbb{R}$. נוכיח $x \in A$. נבחר $q = x$. $q - \varepsilon < x < q + \varepsilon$, משום ש־$\varepsilon > 0$, כדרוש.
  - יהי $x \in A$. נוכיח $x \in \mathbb{R}$. מתוך הגדרת איחוד מוכלל, קיים q כך ש־$x \in (q - \varepsilon, q + \varepsilon)$. משום ש־$\varepsilon > 0$, אזי $q - \varepsilon < q + \varepsilon$. משום ש־$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ אז $q \in \mathbb{R}$. כמו כן, נתון $\varepsilon \in \mathbb{R}$. ידוע שחיבור ממשיים ממשי, וכמו כן ידוע שההופכי למספר ממשי הוא ממשי, כלומר חיסור ממשיים או ממשי גם כן, לכן $q - \varepsilon, q + \in \mathbb{R}$. עכשיו

נוכל להכיל את צפיפות הממשיים על הקטע $(q-, q+\varepsilon)$, ולטעון כי אם איבר בקטע הזה אמ"מ הוא ממשי (בכך הוכחנו כי קיים איבר בקטע הזה, וכי אין זה קטע ריק). משום שצ.ל. $x \in \mathbb{R}$ ונתון ש־x בקטע זה, הדבר אשר צ.ל. פסוק אמת, כדרוש.

סעיף (ד)

- צ.ל.:

$$A := \bigcap_{x \in (1,10^3)} [1, x] = \{1\}$$

- בכל קונטקסט, נכנה את הקטע $[1, x]$ בתור B.
- נוכיח בהכלה דו כיוונית;
  - יהי $t = 1$. נוכיח $t \in A$. יהי $x > 1$. נתבונן בקטע הסגור B. לפי הגדרת קטע סגור, 1 נמצא בו (כל עוד הקטע הסגור מוגדר, והוא מוגדר לכל $t > 1$), כדרוש.
  - יהי $t \in A$. נוכיח $t = 1$. מתוך הנתון, לכל $x \in (1, 10^3)$ ידוע $t \in B$.נוכיח ש־$t = 1$ הוא היחיד שייתכן:
    - קיום: אם $t = 1$, אז הכל מתקיים לפי ההכלה הקודמת שהוכחה, כדרוש.
    - יחידות: נניח בשלילה $t \neq 1$. מכך, נגרר אשר $t < 1 \vee t > 1$. נפרק למקרים:
      - אם $t < 1$, אז הקטע B הוא $\emptyset$, בסתירה לכך ש־t קיים בו.
      - אם $t > 1$ אז מתוך ההנחה שלנו $t \in B = [1, x]$ אז נניח בשלילה שזה נכון: מתוך ההנחה בשלילה, $x > 1$ (נגדיר "הטענה") $1 < t < x$. נתבונן ב־x המקים $1 < x < t$, אשר קיים מתוך צפיפות הממשיים. קיומו עומד בסתירה לכך שהטענה מתקיימת לכל $x \in (1, 10^3)$, משמע $\neg(t > 1)$.
- **משל** ■

סעיף (ה)

- צ.ל.:

$$A := \bigcap_{x \in [0,1]} [x, x+1] = \{1\}$$

- בכל קונטקסט, נסמן $B := [x, x+1]$.
- נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית.
  - יהי $t = 1 \iff t \in \{1\}$. נוכיח $t \in A$. יהי $x \in [0, 1]$. נוכיח $t \in [x, x+1]$, אמ"מ צ.ל. $x \leq 1 \leq x+1$. ידוע אשר $0 \leq x \leq 1$, לפיכך $x \leq 1$ וכמו כן $x \geq 0$. נוסיף 1 לאי־שיוויון השני מביניהם, ונקבל $x + 1 \geq 1$. סה"כ קיבלנו $x \leq 1 \leq x+1$, כדרוש.
  - יהי $t \in A$. נוכיח $t = 1$. ניקח את שני מקרה הקצה של $[0, 1]$ (זה חוקי כי $f(x) = x, g(x) = x+1$ ליניארים) עבור $x = 0$, $t \in [0, 1]$ כלומר $t \leq 1$. עבור $x = 1$, מתקיים $t \in [1, 0]$ משמע $t \geq 1$. לפי חסמים אלו, $t = 1$, כדרוש.

סעיף (ו)

- צ.ל.:

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}\left(q-\tfrac{2}{n},q+\tfrac{2}{n}\right)\right)=\mathbb{Q}$$

- ראשית, נוכיח:

$$\forall q\in\mathbb{Q}.A:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}\left(q-\tfrac{2}{n},q+\tfrac{2}{n}\right)=\{q\}$$

  - יהי $q\in\mathbb{Q}$. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית שהחיתוך המוכלל הפנימי שווה לקבוצה $\{q\}$.
    - יהי $x\in\{q\}$ (נעבוד עם q לצורך הנוחות). יהי $n\in\mathbb{N}_+$. צ.ל. $q\in(q-\frac{2}{n},q+\frac{2}{n})$.
      - נוכיח אשר $\frac{2}{n}>0$:
        - חילוק שני מספרים גדולים מ־0 (כדוגמת 2 ו־n) הוא גדול מ־0, ומכך נגרר $\frac{2}{n}\geq 0$.
        - נוכיח $\frac{2}{n}\neq 0$. לצורך מטרה זו, נניח בשלילה $\frac{2}{n}=0$. נכפיל את המשוואה ב־n, ונקבל $2=0$, וזו סתירה.
      - נוכיח את החסמים על q:
        - אם $q>q-\frac{2}{n}$, אשר פסוק אמת כי $\forall r_1.\forall r_2>0.r_1-r_2<r_1$.
        - אם $q<q+\frac{2}{n}$, אשר מהווה פסוק אמת באופן דומה.
    - יהי $n\in\mathbb{N}_+$, ויהי $x\in(q-\frac{2}{n},q+\frac{2}{n})$, נוכיח $x\in\{q\}$. לשם כך, נניח בשלילה שקיים מספר r, שאינו q, שנמצא בטווח הזה, כלומר $q-\frac{2}{n}<r<q+\frac{2}{n}\land r\neq q$. נפלג לשני מקרים: $q>r$ ו־$r>q$;
      - נניח $q>r$. לפני ההנחה, לכל $n\in\mathbb{N}_+$ מתקיים $q-\frac{2}{n}<r<q$. נעביר אגפים ונקבל $0<q-r$. נוכל להחיל את תכונת ארכימדס על $q-r$, ולקבל שקיים $m\in\mathbb{N}_+$ המקיים $\frac{2}{m}<q-r$ (נכון לאחר הרחבת השבר ב־2). נעביר אגפים ונקבל $r<q-\frac{2}{m}$, סתירה להנחה שלנו שטוענת שלכל n טבעי (בפרט m) $r>q-\frac{2}{n}$.
      - נניח $r<q$, ונוכיח באופן דומה כאשר ההבדל היחידי הוא כיוון האי־שיוויון.
  - קיבלנו את האיחוד המוכלל הבא:

$$A:=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{q\})=\mathbb{Q}$$

  - נוכיח בהכלה דו־כיוונית.
    - יהי $x\in\mathbb{Q}$. צ.ל. קיים $x=q.q\in\mathbb{Q}$. נבחר $x=q$, ומשום שנתון $x\in\mathbb{Q}$ אז $x=q\land q\in\mathbb{Q}$, כדרוש.
    - יהי $x\in A$, כלומר קיים $q\in\mathbb{Q}$ המקיים $x=q$. מזה נסיק $x\in\mathbb{Q}$, כדרוש.
  - הוכחנו את כל אשר דרוש. **מש"ל** ∎

סעיף (ז)

- צ.ל.:

$$\bigcup_{z\in\mathbb{Q}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}\left(z,z+\frac{2}{n}\right)\right)=\emptyset$$

- דבר ראשון, נוכיח את הטענה הבאה עבור כל z:

$$A:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}\left(z,z+\frac{2}{n}\right)=\emptyset$$

- נוכיח בהכלה דו־כיוונית;
  - נניח $x\in A$, נוכיח $x\in\emptyset$ (כלומר, שזה סתירה לפי הגדרת קבוצה ריקה, משמע x אינו קיים). מתוך הנתון, יהי $n\in\mathbb{N}_+$, $z<x<z+\frac{2}{n}$. נניח בשלילה שזה נכון (כלומר, x קיים) ונוכיח שהוא לא קיים:

    נעביר אגפים. נקבל $x-z>0$. נסיק, שלפי תכונת ארכימדס, קיים מספר טבעי m_1 כך ש־$\frac{1}{m_1}<x-z$. נעביר אגפים ונקבל $x<\frac{1}{m_1}+z$. נסמן $m_2=2m_1$. ידוע $m_2\in\mathbb{N}_+$, כי כפל טבעיים טבעי גם הוא. נרחיב את השבר ונקבל $x<\frac{2}{m_2}+z$. זו סתירה להנחת השלילה, כי נתון שלכל $n\in\mathbb{N}_+$ (בפרט m_2) $x>z+\frac{2}{n}$.
  - עתה, נרצה להוכיח $A\ni x\ni x\implies\emptyset\ni\forall x.x$. זה נכון באופן ריק לפי הגדרת קבוצה ריקה $F\iff x\in\emptyset$.
- עתה, נציב את אשר פישטנו בטענה שצ.ל.:

$$B:=\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}(\emptyset)=\emptyset$$

- נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית:
  - נניח $x\in\emptyset$. ונוכיח משהו כללי. זה נכון באופן ריק לפי הגדרת קבוצה ריקה.
  - נניח $x\in B$. ונוכיח משהו כללי. לפיכך, $\exists z.x\in\emptyset$. מכיוון ששום דבר לא קשור ב־z אפשר להיפתר מהכמת, וקיבלנו $x\in\emptyset$ ולכן הטענה נונה באופן ריק גם כן.
- הוכחנו את השיוויון, כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ח)

- צ.ל.:

$$A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{m\in\mathbb{N}\mid m\leq n\}=\mathbb{N}$$

- עם תלות בכמת בקונטקסט המתאים, $B:=\{m\in\mathbb{N}\mid m\leq n\}$.
- נוכיח בעזרת הכלה דו־כיוונית;

- יהי $x \in \mathbb{N}$. נוכיח שקיים n עבורו $x \in B$. מתוך עקרון ההפרדה, צ.ל. קיים n עבורו $x \in \mathbb{N} \land x \leq n$. נתבונן ב־$n = x + 1$. $n \in \mathbb{N}$ כי חיבור ממשיים ממשי. לפיכך, $x < n$ ומכאן נגרר $x \leq n$, כדרוש.
- יהי $x \in A$. נוכיח $x \in \mathbb{N}$. מתוך הגדרת x וע"פ הגדרת איחוד מוכלל ועקרון ההפרדה, ידוע שקיים n עבורו $x \in \mathbb{N} \land x \leq n$. משום ש־$x \in \mathbb{N}$ לא קשור ב־n, ולפי תכונות ארכימדס על המספרים הממשיים, קיום n תמיד נכון, כלומר $x \leq n$ פסוק אמת.

שאלה 3 - רשימה מפורשת של קבוצה, והוכחת השוויון

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$A := [0,5] \triangle \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \left[1 - \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}\right] = [0,5)$$

- נקרא לקבוצה המייצגת את האיחוד ב־B.
  - נתבונן בשבר $\frac{1}{n}$, בהתייחסות ל־$n \in \mathbb{N}_+$. אפשר לדעת $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ כי עבור $n = 1$ זה 1 ועבור $\lim\limits_{n \to \infty}$ זה 0 (אך אינסוף לא חלק מהשדה לכן זה קטן ממש ולא קטן, בשילוב עם ההנחה ש־$f(x) = \frac{1}{x}$ בעל שיפוע קבוע עבור $x > 0$ אבל נראה לי מיותר להוכיח את זה כאן).
  - נוכיח בהכלה דו־כיוונית ש־$B = [0,5)$:
    - נניח $x \in B$, נוכיח $x \in [0,5)$. מתוך ההנחה, ידוע שקיים $n \in \mathbb{N}_+$, כך ש־$x \in [1 - \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}]$. לפי החסמים של $\frac{1}{n}$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ וגם $4 \leq 5 - \frac{1}{n} < 5$. משום שידוע ש־$x$ נמצא בטווח בין מספרים אלו, אז $0 \leq x < 5$
    - נניח $x \in [0,5)$, נוכיח $x \in B$. כלומר, צריך להוכיח שקיים $n \in \mathbb{N}_+$, כך ש־$x \in [1 - \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}]$. נחלק למקרים:
      - אם $0 \leq x < 4$, אז נבחר $n = 1$ נציב וזה יעבוד.
      - אם $4 \leq x < 5$. נעביר אגפים ונקבל $5 - x > 0$. לפיכך, ידוע שלפי תכונת ארכימדס קיים מספר n טבעי המקיים $5 - x > \frac{1}{n}$. נעביר עוד פעם אגפים ונקבל $x < 5 - \frac{1}{n}$. נוסף על כך, $1 - \frac{1}{n} \leq 1$, ולכן מתחום ההגדרה של x, לכן $1 - \frac{1}{n} \leq x$, כדרוש.
  - נציב חזרה ב־A, ונראה שקיבלנו כי $A = [0,5] \triangle [0,5)$, כלומר $A = \big([0,5] \cup [0,5)\big) \setminus \big([0,5] \cap [0,5)\big)$. נקצר כמעה (אני מניח שבשלב הזה אין כבר צורך להוכיח דברים כגון אלו), ונקבל $A = [0,5] \setminus \{5\}$, כלומר $A = [0,5)$, כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$\{0\} \triangle \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} \{k \cdot n \colon n \in \mathbb{N}_+\} = \{0\}$$

- את החלק של החיתוך המוכלל נסמן ב־B.
- נוכיח ש־$B = \emptyset$.
  - ראשית, נוכיח שבלי הגבלת הכלליות $\forall k \in \mathbb{N}_+ . \forall x . x \in \{k \cdot n \colon n \in \mathbb{N}_+\} \implies k \mid x = 0$. נניח את הרישא ונוכיח את הנגרר. מתוך הגדרת עקרון ההחלפה, ידוע ש־$\exists n \in \mathbb{N}_+ . k \cdot n = x$. לכן, משום ש־$k, n \in \mathbb{N}_+$, k מחלק את x אמ"מ $k \mid x = 0$.
  - מכאן נסיק שכל האיברים בקבוצה $\{k \cdot n \colon n \in \mathbb{N}_+\}$ מחלקים את k.
  - מכאן, שהאיחוד המוכלל יקיים $\forall x \in B . \forall k \in \mathbb{N}_+ . k \mid x = 0$. נוכיח שלא קיים מספר טבעי המחלק את כל הטבעיים (הוכחה כזו תגרור שלא קיים שום x המקיים את הטענה לעיל אמ"מ $B = \emptyset$);
  - נניח בשלילה שקיים מספר $n \in \mathbb{N}$ המחלק את כל הטבעיים. נתבונן במספר $n+1$. לפי ההנחה שלנו, $n+1 \mid n = 0$. אך לפי הגדרת מחלק מספר לא יכול לחלק מספר גדול ממנו, וזו סתירה, כדרוש.
- כלומר, צ.ל. $\{0\} \triangle \emptyset = \{0\}$, וזה פסוק אמת כי ידוע שבלי הגבלת הכלליות $A \triangle \emptyset = A$. **מש"ל** ■

שאלה 4 - הוכחת/שלילת אלטרנטיבות להגדרת זוג סדור

התכונה המרכזית של זוג סדור: $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff (a = c \land b = d)$

סעיף (א)

- נוכיח כי ההגדרה הבאה היא הגדרה טובה לזוג סדור:

$$\langle a, b \rangle = \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$$

- נוכיח כל אחת מהגרירות של התכונה המרכזית של זוג סדור בנפרד.
  - נניח $a = c \land b = d$, ונוכיח $\{\{0, a\}, \{1, b\}\} = \{\{0, c\}, \{1, d\}\}$. מההנחה, ולפי הגדרת שיוויון קבוצות, נובע כי $\{0, a\} = \{0, c\} \land \{1, b\} = \{1, d\}$. לכן הצ.ל. נכון.
  - נניח $\{\{0, a\}, \{1, b\}\} = \{\{0, c\}, \{1, d\}\}$, ונוכיח $a = c \land b = d$. נפלג למקרים:
    - אם $\{0, c\} = \{0, a\}$, אז $a = c$. נפלג למקרים:
      - אם $\{1, b\} = \{1, d\}$ אז $b = d$ וסיימנו.
      - אם $\{1, b\} = \{0, c\}$ אז $a = c = 1$ וגם $b = 0$, כלומר קיבלנו שנתון אשר $\{\{1, 0\}\} = \{\{1, 0\}, \{1, d\}\}$ לכן $d = 0$ ולפי טרנזיטיביות $d = b = 0$ וסיימנו.
    - אם $\{0, c\} = \{1, b\}$, אז $c = 1 \land b = 0$. נפלג למקרים:
      - אם $\{0, a\} = \{1, d\}$ אז $a = 1, d = 0$ ולפי טרנזיטיביות $a = c, b = d$, ולכן סיימנו.
      - אם $\{0, a\} = \{0, c\}$ אז $a = c = 1$ כלומר קיבלנו שנתון אשר $\{\{1, 0\}\} = \{\{1, 0\}, \{1, d\}\}$ לכן $d = 0$ ולפי טרנזיטיביות $d = b = 0$, על־כן סיימנו.
- כל המקרים האפשרים הוכחו, לכן ההגדרה מקיימת את התכונה המרכזית של זוג סדור. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- נראה דוגמה נגדית לכך שההגדרה $\langle a,b\rangle = \{a,\{b\}\}$ היא הגדרה טובה לזוג סדור.
- התכונה המרכזית של זוג סדור טוענת כי $\forall a,b,c,d.\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff (a=c\wedge b=d)$. נציב:

$$\begin{aligned} a &= \{1\}, b=2 \\ c &= \{2\}, d=1 \\ \implies \{\{1\},\{2\}\} &= \{\{2\},\{1\}\} \\ \implies \langle a,b\rangle &= \langle c,d\rangle \end{aligned}$$

- וזו סתירה. **מש"ל** ∎

סעיף (ג)

- נראה דוגמה נגדית לכך שההגדרה $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{\{b\}\}\}$ היא הגדרה טובה לזוג סדור.
- התכונה המרכזית של זוג סדור טוענת כי $\forall a,b,c,d.\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff (a=c\wedge b=d)$. נציב:

$$\begin{aligned} a &= \{1\}, b=2 \\ c &= \{2\}, d=1 \\ \implies \{\{\{1\}\},\{\{2\}\}\} &= \{\{\{2\},\{1\}\}\} \\ \implies \langle a,b\rangle &= \langle c,d\rangle \end{aligned}$$

- וזו סתירה. **מש"ל** ∎

סעיף (ד)

- נוכיח שההגדרה הבאה לזוג סדור היא טובה:

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,\{b\}\}\}$$

- נוכיח כל אחת מהגרירות של התכונה המרכזית של זוג סדור בנפרד:
  - נניח $a=c\wedge b=d$ לפיכך $\{b\}=\{d\}\wedge\{a\}=\{c\}$, לכן $\{a,\{b\}\}=\{c,\{d\}\}$, ומכאן אפשר להגיע לצ.ל., כדרוש.
  - נניח $\{\{a\},\{a,\{b\}\}\} = \{\{c\},\{c,\{d\}\}\}$. נפרק למקרים:
    - אם $\{a\}=\{c\}$, אז $a=c$. נפריד למקרים:
      - אם $\{a,\{b\}\}=\{c,\{d\}\}$, נפלג לשני מקרים:
        - אם $\{b\}=\{d\}$ אז $b=d$, וסיימנו.
        - אם $\{b\}=c$ אז נתבונן בשיוויון $\{\{b\},\{d\}\}=\{c,\{d\}\}=\{a,\{b\}\}$ כלומר $\{b\}=c=a=\{d\}$ או ש־$\{b\}=\{d\}$. בשני המקרים הגענו ל־$\{b\}=\{d\}$ כלומר $d=b$, כדרוש ("מקרה 1")

- אם $\{c\} = \{a, \{b\}\}$ אז $c = \{b\}$ וזה עובד באופן דומה למקרה 1.

- אם $\{a, \{b\}\} = \{c\}$ אז $c = a$ וגם $c = \{b\}$, כלומר $a = c = \{b\}$.
  - נחזור לטענה שצ.ל., ונציב בה. נקבל:

$$\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, \{d\}\}\}$$

  - מזה נסיק $\{a\} = \{a, \{d\}\}$ כלומר $a = \{d\}$. נציב בשיוויונות לעיל ונקבל $\{b\} = c = a = \{d\}$, כלומר $b = d$, כדרוש.

- הוכחנו את כל המקרים האפשריים, כדרוש, ולכן ההגדרה הזו היא הגדרה טובה. **מש"ל** ■

שאלה 5 - הוכחה או הפרכה של טענות עם כפל קרטזי

סעיף (א)

- ניתן דוגמה ניגדית לטענה:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

- נציב:

$$\begin{aligned} A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\} \\ A \times B = \{\langle 1, 2\rangle\} \\ B \times C = \{\langle 2, 3\rangle\} \\ A \times (B \times C) = \{\langle 1, \langle 2, 3\rangle\rangle\} \\ (A \times B) \times C = \{\langle\langle 1, 2\rangle, 3\rangle\} \end{aligned}$$

- שגורר סתירה לפי המשפט המרכזי של זוג סדור. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- נוכיח את הטענה:

$$A = \emptyset \iff A \times A = \emptyset$$

- נוכיח כל גרירה בנפרד.
  - ראשית, נניח $A = \emptyset$, ונוכיח $A \times A = \emptyset$. נניח בשלילה ש־$A \times A \neq \emptyset$, כלומר, קיים איזשהו איבר במכפלה הקרטזית של A בעצמו. לפיכך, נתבונן באותו איבר, שלפי מכפלה קרטזית הוא זוג סדור שכל אחד מאיבריו נמצא ב־A, סתירה לעובדה ש־A קבוצה ריקה.
  - שנית, נניח $A \times A = \emptyset$ ונוכיח $A = \emptyset$. מתוך המכפלה הקרטזית, לכל $B \in A \times A$, ניתן לדעת אשר $\exists a \in A . \exists b \in A . B = \langle a, b\rangle$, ומשום שאיבר כזה ($a \in \emptyset$) לא קיים $A = \emptyset$.

- **מש"ל** ■

סעיף (ג)

- נביא דוגמא ניגדית לטענה:

$$A \times (B \cup C) = A \cup (B \times C)$$

- נניח אותה בשלילה, ונציב:

$$\begin{aligned} A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\} \\ A \times (B \cup C) = A \cup (B \times C) \\ A \times \{2,3\} = A \cup \{\langle 2,3\rangle\} \\ \{\langle 1,\{2,3\}\rangle\} = \{1,\{\langle 2,3\rangle\}\} \end{aligned}$$

- אשר מהווה סתירה מתוך הגדרת שיוויון קבוצות. **מש"ל** ■

סעיף (ד)

- צ.ל.:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

- נוכיח באמצעות רצף אמ"מים:

$$\begin{aligned} & x \in A \times (B \cap C) \quad = \quad (A \times B) \cap (A \times C) \\ \iff \quad & \pi_1(x) \in A \wedge \pi_2(x) \in (B \cap C) \longleftrightarrow x \in (A \times B) \wedge (x \in A \times C) \\ \iff \quad & \pi_1(x) \in A \wedge \big(\pi_2(x) \in B \wedge \pi_2(x) \in C\big) \longleftrightarrow \big(\pi_1(x) \in A \wedge \pi_2 \in B\big) \wedge \big(\pi_1(x) \in A \wedge \pi_2(x) \in C\big) \\ \iff \quad & \pi_1(x) \in A \wedge \pi_2(x) \in B \wedge \pi_2(x) \in C \longleftrightarrow \pi_1(x) \in A \wedge \pi_2(x) \in B \wedge \pi_2(x) \in C \end{aligned}$$

- המעברים הראשונים והשניים הם לפי הגדרת כפל קרטזי והגדרת הכלה. המעבר האחרון נכון לפי קומוטוטיביות ואסוציאטיביות של $\wedge$. משום שהטענות שקולות לוגית, **מש"ל** ■

סעיף (ה)

- נראה דוגמה ניגדית לטענה הבאה:

$$(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$$

- נציב:

$$\begin{aligned} & \mathrm{A} = \{1, 2\}, \mathrm{B} = \{2, 3\}, \mathrm{C} = \{3, 4\}, \mathrm{D} = \{4, 5\} \\ & (\mathrm{A} \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \setminus D) \\ & \{1,3\} \times \{3,5\} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle\} \setminus \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 2,5\rangle\} \\ & \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,5\rangle\} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle\} \end{aligned}$$

- המהווה סתירה. **מש"ל** ■

סעיף (ו)

- נניח בשלילה את הטענה:

$$\big(A\times B\subseteq C\times D\big)\longleftrightarrow\big(A\subseteq C\wedge B\subseteq D\big)$$

- נציב:

$$\begin{aligned}A=\emptyset,B=\{1\}\\C=\{2\},D=\{3\}\\A\times C=\subseteq C\times D=\{\langle 2,3\rangle\}\\A\subseteq C\wedge B\not\subseteq D\end{aligned}$$

- שתי הטענות האחרונות מהוות סתירה להנחת השלילה, כדרוש, אמ"מ הטענה לא נכונה, כדרוש. **מש"ל** ■

סעיף (ז)

- צ.ל.:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

- נוכיח באמצעות רצף אמ"מים:

$$\begin{aligned}&x\in A\times(B\cup C)\quad=\quad(A\times B)\cup(A\times C)\\ \Longleftrightarrow\quad&\pi_1(x)\in A\wedge\pi_2(x)\in(B\cup C)\longleftrightarrow x\in(A\times B)\vee(x\in A\times C)\\ \Longleftrightarrow\quad&\pi_1(x)\in A\wedge\big(\pi_2(x)\in B\vee\pi_2(x)\in C\big)\longleftrightarrow\big(\pi_1(x)\in A\wedge\pi_2\in B\big)\vee\big(\pi_1(x)\in A\wedge\pi_2(x)\in C\big):=q\\ \Longleftrightarrow\quad&q\longleftrightarrow q\end{aligned}$$

- המעברים הראשונים והשניים הם לפי הגדרת כפל קרטזי והגדרת הכלה. המעבר האחרון נכון לפי דיסטורטיביות של טענות לוגיות. משום ששני האגפים של האמ"מ שקולים לוגית, **מש"ל** ■

שאלה 6 - מציאת תנאי הכרחי ומספיק על מכפלות קרטזיות והוכחה שלו

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$A\times B=B\times A\iff A=B\vee A=\emptyset\vee B=\emptyset$$

- יהי $x\in A\times B$. נפשט, על מנת להקל על העבודה:

$$\begin{aligned}x\in A\times B\longleftrightarrow x\in B\times A\\ \pi_1(x)\in A\wedge\pi_2(x)\in B\longleftrightarrow\pi_1(x)\in B\wedge\pi_2(x)\in A\end{aligned}$$

- נסמן $\pi_1(x)=a,\pi_2(x)=b$, לצורך הנוחות.
- עתה, נוכיח שהטענה להלן ("טענה 1") אמ"מ $A=B$ ("טענה 2"), באמצעות פיצול לשתי גרירות.
  - נניח את טענה 1, ונוכיח את טענה 2. נתבונן באיבר $y\in B\times A$. ידוע עליו $\pi_1(y)\in B\wedge\pi_2(y)\in A$, ומכאן נסיק שנגרר אשר $\pi_1(y)\in A\wedge\pi_2(y)\in B$, כלומר $(a\in A\to a\in B)\wedge(b\in B\to b\in A)$. מזה נסיק $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$, ולפי הכלה דו כיוונית $A=B$, כדרוש.

- נניח את טענה 2, ונוכיח את טענה 1. ידוע $A=B$, כלומר $\forall x.x\in A \longleftrightarrow x\in B$, בפרט a ו־b. יהי $x=\langle a,b\rangle$ המקיים $a\in A\wedge b\in B$. לפי מה שעתה כתבנו, הטענה שקולה לטענה $a\in B\wedge b\in A$, כדרוש.

- נשים לב שהנחנו בהוכחה $B\neq\emptyset$ או ש־$A=\emptyset$. נוסיף מקרים אלו להוכחה. ניתן לנו בשיעור אשר בלי הגבלת הכלליות $A=\emptyset$ ניתן להגיד $A\times B=\emptyset\wedge B\times A=\emptyset \implies A=\emptyset$, כלומר במקרה שבלי הגבלת הכלליות $A\times B=B\times A$. בכך השלמנו את ההוכחה. **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$C^2=A^2\cup B^2 \iff (A=C\wedge B\subseteq C)\vee(B=C\wedge A\subseteq C)$$

- נוכיח שזה תנאי הכרחי ומספיק.
  - הכרחי:
    - נניח $C^2=A^2\cup B^2$, נוכיח את התנאי.
    - לפי ההנחה, לכל $\langle a,b\rangle\in C^2$ ידוע $\langle a,b\rangle\in A^2\vee\langle a,b\rangle\in B^2$. ע"פ הגדרת מכפלה קרטזית, נתון $a,b\in A\vee a,b\in B \iff a,b\in C$. נתבונן באותם a,b, אשר יתקיימו באופן דומה.
      - במקרה הראשון, צ.ל. $(a,b\in A \iff a,b\in C)\implies(A=C\wedge B\subseteq C)$. אם $a,b\in A \iff a,b\in C$, אז לפי הגדרת שיוויון $A=C$. נציב בהנחה המקורית ונקבל $A^2=A^2\cup B^2$. נתון מהשיעור אשר אם בלי הגבלת הכלליות $B\subseteq A \iff A=A\cup B$, כלומר אפשר להגיד $B^2\subseteq C^2$, שגורר $a,b\in B \implies a,b\in C$ כלומר $B\subseteq C$, כדרוש.
      - במקרה השני יתקיים באופן דומה.
  - מספיק:
    - נניח את התנאי, ונוכיח $C^2=A^2\cup B^2$. נוכיח ש־$A=C\wedge B\subseteq C \implies C^2=A^2\cup B^2$, תחת הנתון שכבר יש לנו, והמקרה השני יתקיים באופן דומה.
    - ידוע $A=C$, כלומר צ.ל. $C^2=C^2\cup B^2$. כמו כן ידוע ש־$B\subseteq C$, אמ"מ $C=C\cup B$ (טענה זו ניתנה לנו בשיעור). מכך, נסיק ש־$x\in C\vee x\in B \iff x\in C$, בפרט עבור a,b, כלומר נגרר $a,b\in C\vee a,b\in B \iff a,b\in C$. לפי הגדרת כפל קרטזי, הטענה הזו שקולה לטענה $\langle a,b\rangle\in C^2\vee\langle a,b\rangle\in B^2 \iff \langle a,b\rangle\in C^2$, שזה הצ.ל. לפי הגדרת שיוויון.
    - משום ששני המקרים מתקיים באופן זהה (פרט להחלפה של A ב־B ולהיפך), די בהוכחה הזו כדי להוכיח את קיום התנאי כתנאי מספיק.

- משום שהן התנאי המספיק והן התנאי ההכרחי הוכחו, אזי הטענה היא תנאי הכרחי ומספיק, כדרוש. **מש"ל** ■

סוף