ליניארית 1א ~ תרגיל בית 7

שחר פרץ

9 בינואר 2025

(1)

תהא A מטריצה ריבועית, נניח $(A+2I)^2=0$. צ.ל. $A+\lambda I$ הפיכה אמ"מ $\lambda \neq 2$.

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח $\lambda \neq 2$. אז נתון $(A+2I)^2=0$, נסמן $B=A+2I$ ונוכיח ש־B לא הפיכה. נתבונן ב־$\varphi=[B]_E^E$ כאשר E הוא הבסיס הסטנדטי. וידוע $B^2=0$ ולכן $\varphi\circ\varphi=0$. סה"כ:

$$\forall v\in V\colon (\varphi\circ\varphi)(v)=0 \implies \varphi(\varphi(v))=0 \implies \varphi(v)\in\ker\varphi$$

באופן שקול, $\operatorname{Im}\varphi=\ker\varphi$ משוויון קבוצות. נפלג למקרים:

(a) אם $\operatorname{Im}\varphi=0$ אז φ לא על (אלא אם המ"ו ממימד 0 ואני מאוד מקווה שהוא לא) ובפרט לא איזומורפיזם.

(b) אחרת $\operatorname{Im}\varphi>0$ כלומר $\ker\varphi>0$, ולכן $\ker\varphi\neq 0$ באופן שקול φ לא חח"ע, ולכן φ איננה איזומורפיזם.

סה"כ φ אינה איזומורפיזם, ואם B הייתה הפיכה אז היא מייצגת איזומורפיזמים ו־φ איזומורפיזם, סתירה.

$\Longleftarrow$ יהי $\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{2\}$ (כאשר $2=1_{\mathbb{F}}+1_{\mathbb{F}}$, ו־$2\neq 0_{\mathbb{F}}$ בהנחה שהשדה מגודל 3 או יותר, הנחה שהמתבצעת בשאלה בעת השימוש ב־2).

$$(A+\lambda I)\frac{(A+4I-\lambda I)}{-(\lambda-2)^2} = \frac{A^2+4IA-\lambda IA+\lambda IA+4I\lambda-\lambda^2 I}{-(\lambda-2)^2} \overset{BI=B}{=} \frac{\overbrace{A^2+4A+4}^{=0}+\lambda 4I-4I-\lambda^2 I}{-(\lambda-2)^2} = I\frac{-(\lambda-2)^2}{-(\lambda-2)^2}=I$$

כאשר השוויון המצוין ל־0 מתקיים בגלל ש־:

$$0=(A+2I)^2=A^2+A2I+2IA+4I^2=A^2+4A+4I$$

והחילוק מוגדר כי:

$$-(\lambda-2)^2\neq 0 \overset{(-1)}{=} (\lambda-2)^2\neq 0 \overset{\sqrt{}}{=} \lambda-2\neq 0 \overset{+2}{=} \lambda\neq 2$$

שנתון. סה"כ מצאנו הופכית כדרוש.

■

(2)

תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. צ.ל. קיו ם$p\in\mathbb{F}_{n^2}[x]$ כך ש־$A^{-1}=p(A)$, כאשר $p(A)=\sum_{i=0}^m a_iA^i$.

הוכחה. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. נבחר $\mathbb{F}_{n^2-1}(\mathbb{F})\ni p=\lambda_0x^0+\dots+\lambda_{n^2}x^{n^2}$. נתבונן ב־$p(A)$:

$$p(A)=\lambda_0 I+\lambda_1 A+\dots+\lambda_{n^2-1}A^{n^2}$$

נבחין שיש כאן חיבור של n^2+1 וקטורים, בעבור מ"ו ממימד n^2 ולכן, ממשפט, ת"ל, ולכן קיים צירוף ליניארי לא טרוויאלי בעבורו יתקיים $p(A)=0$. נסמן את λ_i להיות האיבר שאינו אפס בעבור i מינימלי, שקיים כי אם לא הצירוף הליניארי היה טרוויאלי. אז $\forall\lambda_j<\lambda_i\colon \lambda_j=0$.

לכן:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{n^2} \lambda_j A^j \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j A^j}_{=0} + \sum_{j=i}^{n^2} \lambda_j A^j && \cdot -\left(\tfrac{1}{\lambda_i}\right) \\
&= -A_i - \sum_{j=i+1}^{n^2} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} A^j && (\cdot A^i)^{-1} \\
&= -I + \sum_{j=i+1}^{n^2} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} A^{j-i}
\end{aligned}
$$

נחבר I לשני האגפים ונקבל גרירה לכך שאגף ימין הוא הזהות. מכיוון ש־$j-i \in [n]$, סה"כ מצאנו פולינום ממעלה לכל היותר n^2 (ובפרט ממעלה n^2 בעבור מקדמים טרוויאלים לאחר מעלה לא 0 מקסימלית), נסמנו ב־$p(x)$, שמקיים $p(A) = I$, כדרוש. ■

. . . . (3) . . . .

תהי A מטריצה כך ש־$A^m = 0$. נוכיח $I + A$ ו־$I - A$ הפיכות.

הוכחה. נתון קיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$A^m = 0$. אז:

$$
\begin{aligned}
(I+A)\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i A^i\right)}^{\tilde{B}} &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(I(-1)^i A^i\right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left((-1)^i A^{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \left((-1)^i A^i\right) + \sum_{i=1}^{m} \left((-1)^{i-1} A^i\right) \\
&= I + \sum_{i=1}^{m-1} \left((-1)^i A^i\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \left((-1)^{i-1} A^i\right) + A^m = I + A^m + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \underbrace{A^i + (-1)^{i-1} A^i}_{=0} \\
&= I + A^m = I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(I-A)\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} A^i\right)}^{=:\bar{B}} &= \sum_{i=0}^{m-1} \left(IA^i\right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left(-A^{i+1}\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(A^i\right) + \sum_{i=1}^{m} \left(-A^i\right) \\
&= I + \sum_{i=1}^{m-1} \left(A^i\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \left(-A^i\right) + A^m = I + A^m + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \underbrace{A^i - A^i}_{=0} \\
&= I + A^m = I
\end{aligned}
$$

וסה"כ $(I-A)\bar{B} = I = (I+A)\tilde{B}$, ולכן הן הפיכות מימין, וממשפט הפיכות. ■

. . . . (4) . . . .

יהיו $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. נניח AB הפיכה ו־BC לא הפיכה.

1. נוכיח $AC + BC$ לא הפיכה.

הוכחה. ממשפט, $\operatorname{rk}(AC+BC) \le \operatorname{rk} BC$. ידוע $\operatorname{rk} BC = n$ אמ"מ BC הפיכה אך היא איננה הפיכה, וגם ידוע $\operatorname{rk} BC \le n$, וסה"כ $\operatorname{rk} BC < n$, ומטרנזיטיביות $\operatorname{rk}(AC+BC) < n$ ובפרט אי־שוויון ל־n, כלומר $AC + BC$ איננה הפיכה. ■

2. נוכיח שלא בהכרח $A + B$ הפיכה.

הוכחה. נניח בשלילה לכל A, B, C בתנאים לעיל, $A + B$ הפיכה. בפרט, בעבור $A = I, B = -I$ שתיהן הפיכות וכפל הפיכות הוא הופכי, כלומר AB הפיכה, יתקיים $A + B = I - I = 0$ שהיא העתקה בעבורה $\operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} 0 = 0 \neq n$, לכן $A + B$ איננה הפיכה בסתירה לטענה. ■

$$\text{(5)}$$

hvhu $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות, ונניח $A=I+AB$. אז:

א. נוכיח A הפיכה.

הוכחה. מהנתון:

$$A=I+AB \overset{-AB}{\Longrightarrow} A-AB=I \implies A(I-B)=I$$

וסה"כ A הפיכה מימין ע"י $I-B$ ולכן A הפיכה. ■

ב. נוכיח A,B מתחלפות.

הוכחה.

$$A(I-B)=I \overset{(*)}{\iff} (I-B)A=I \implies A-BA=I \implies A-AB=I=A-BA \overset{-A,\cdot(-1)}{\iff} BA=AB \quad \top$$

■

ג. נניח A סימטרית, כלומר $A=A^T$. אז:

$$A(I-B)=I \xrightarrow{\text{transpose}} (I-B)^TA^T=I^T=I, A=A^T \overset{\cdot A^{-1}}{\iff} I=A^T\underbrace{(I-B)}_{A^{-1}} \overset{(*)}{\iff} (I-B)^T=(I-B)$$

$$\iff I-B^T=I^T-B^T=I-B \overset{-I}{\iff} -B^T=-B \overset{\cdot(-1)}{\iff} B=B^T$$

ולכן B סימטרית. $(*)$ נכון מיחידות ההופכית ל־A^T, ומטרניזטיביות. משקילות בפרט B סימטרית גורר A סימטרית, כדרוש.

ד.

$$1+B+B^2=A \overset{1+B+B^2}{\iff} (1-B)(1+B+B^2)=A(I-B) \iff 1-B+B+B^2-B^2+B^3=I \iff I+B^3=I \iff B^3=0$$

(שקילות כי כפל במטריצה הופכית, והיא מטריצה הופכית כי הראינו בפרט שההופכית שלה היא $(I-B)$, וזה אינו טיעון מעגלי כי הגרירה ימינה נכונה גם כאשר אין היא הופכית)

$$\text{(6)}$$

המטריצות האלמנטריות ב־$M_2(\mathbb{Z}_3)$:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\text{(7)}$$

א. נרצה למצוא P הפיכה כך ש־:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}}_{:=B}=P\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&2&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{:=A}$$

נדרג

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&0&1&1&0&0\\3&2&0&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&0&1&1&0&0\\2&0&0&0&-1&1&0\\1&1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to 0.5R_2}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&-0.5&0.5&0\\1&1&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{cccc|ccc}0&2&0&1&1.5&-0.5&0\\1&0&0&0&-0.5&0.5&0\\0&1&1&1&0.5&-0.5&1\end{array}\right)\overset{(*)}{=}(B\mid P)$$

$(*)$ מתקיים ממשפטים מההרצאה. P אכן הפיכה כי היא הרכבה של מטריצות אלמנטריות.

ב. נמצא מטריצה הפיכה Q עבורה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{:=B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} Q$$

ידוע $Q^T A^T = B^T \iff AQ = B$. לכן, באופן שקול, יתקיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג כדי למצוא סדרה של פעולות אלמנטריות שתביא אותנו למטריצה הדרושה, כמו בסעיף הקודם:

$$(A^T \mid I) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3} R_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \overset{(*)}{=} (B^T \mid Q^T)$$

$(*)$ מתקיים ממשפטים מההרצאה. Q^T אכן הפיכה כי היא הרכבה של פעולות אלמנטריות, וכן Q הפיכה כי Q^T הפיכה (ע"פ משפט).
סה"כ:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

....

שחר פרץ, 2024

נוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד