לינארית 2א ~ תרגיל בית 8

שחר פרץ

20 בדצמבר 2025

(1)

ניעזר במשפט היסודי של האלגברה כדי להראות שכל פולינום אי־פריק $f \in \mathbb{C}[x]$ הוא ממעלה 1.

הוכחה. נעבוד מעל $\mathbb{F}[x]$ סגור אלגברית כללי. יהי $p \in \mathbb{F}[x]$, ונניח שהוא אי פריק. משום ש־$\mathbb{F}$ סגור אלגברית (כך הנחנו), קיים ל־p שורש α כלשהו, כלומר $(x-\alpha) \mid p$ ממשפט בזו. מהגדרת חלוקה, קיים f כך ש־$p = (x-\alpha)f$. משום ש־p אי־פריק, f בהכרח איבר הפיך בחוג, כלומר $f \sim (x-a)$ כאשר $\sim$ יחס החברות. האיברים ההפיכים בחוג הפולינומים פולינומים קבועים לכן $\deg f = 1$ כנדרש. בפרט בעבור $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ משום ש־$\mathbb{C}$ סגור אלגברית מהמשפט היסודי של האלגברה. ■

(2)

(א) יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ פולינום ללא שורשים ממעלה 2 או i. נראה שהוא אי־פריק.

הוכחה. נניח בשלילה ש־p פריק. אזי קיימים $f, g \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$p = fg$, וכן f, g אינם איברים הפיכים. מכאן ש־$\deg f, g \geq 1$ והוכחנו בתרגיל בית קודם $\deg g + \deg f = \deg fg = \deg p = 3$ כאשר $i \in \{2, 3\}$. אם $i = 2$ בהכרח $\deg f = \deg g = 1$, אחרת $\deg f = 1 \land \deg g = 2 \land \deg f = 2 \land \deg g = 1$. בה"כ $\deg f = 1$ בשני המקרים. נקבל שקיים α כך ש־$f = (x-\alpha)$ (עד לכדי חברות) ומכאן ש־$(x-\alpha) \mid p$ וממשפט בזו α שורש של p וסתירה. ■

(ב) נוכיח ש־$x^2 + x + 1$ אי־פריק מעל $\mathbb{Z}_2$.

הוכחה. נסמן $p = x^2 + x + 1$. נניח בשלילה של־p יש שורשים מעל $\mathbb{Z}_2$ (יש לציין את השדה שכן הוא אובייקט פורמלי ולא פונקציה). נוכיח שאין לו שורשים ב־$\mathbb{Z}_2$ ע"י הצבה כל מגוון המספרים השונים בשדה.

$$p(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$$
$$p(1) = 1^1 + 1 + 1 = 3 \equiv 1 \neq 0$$

סה"כ ל־p אין שורשים ב־$\mathbb{Z}_2$. ■

(3)

(א) נמצא מטריצה הפיכה ולכסינה. נתבונן במטריצה המרתקת I, הזהות היא $\operatorname{diag}(1,1)$. ידוע שהזהות הפיכה, והיא דומה לעצמה, מטריצה אלכסונית. (מעל $\mathbb{R}^2$, לדוגמה).

(ב) נמצא מטריצה הפיכה שאינה לכסינה. נתבונן במטריצה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ מעל $\mathbb{R}^2$. היא הפיכה כי $\det A = 1 \neq 0$, אך היא איננה לכסינה משאלה 8 בתרגיל בית זה.

(ג) נמצא מטריצה לכסינה שאינה הפיכה. נתבונן במטריצה $A = \operatorname{diag}(1, 0)$ מעל $\mathbb{R}^2$. היא איננה הפיכה כי יש בה שורת אפסים ומכאן ש־$\det A = 0$. היא לכסינה כי היא זהה ובפרט דומה לעצמה, מטריצה אלכסונית.

(4)

יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$ ו־$T \colon V \to V$ לינארית, כאשר $\mathcal{B}$ בסיס של V. נוכיח ש־v ו"ע של T שמתאים לע"ע λ אמ"מ $[v]_{\mathcal{B}}$ ו"ע של $[T]_B^{\mathcal{B}}$ שמתאים לע"ע λ.

הוכחה. $\Longleftarrow$ אם $[v]_{\mathcal{B}}$ ע"ע של המטריצה $[T]_{\mathcal{B}}$ אז $[Tv]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}}$. משום ש־$[\cdot]_{\mathcal{B}} \colon V \to \mathbb{R}^n$ איזו', אז היא הפיכה ואז בהכרח $Tv = \lambda v$ וסיימנו.

$\Leftarrow$ אם v ע"ע של העתקה T, אז $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [Tv]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$ כלומר $[v]_{\mathcal{B}}$ ע"ע של $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ כדרוש.

■

(5)

נניח ש־0 ע"ע של $A \in M_n(\mathbb{F})$ אמ"מ A איננה הפיכה.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח A איננה הפיכה. מכאן שקיים $v \neq 0$ כך ש־$v \in \mathcal{N}(A)$. דהיינו $Av = 0 = 0 \cdot v$ ומהגדרה v ו"ע של A (בעבור הע"ע 0) כלומר 0 ע"ע כדרוש.

$\Leftarrow$ נניח 0 ע"ע של A. מכאן ש־$\exists 0 \neq v \in V: Av = 0$ מהגדרה. נסיק ש־$v \in \mathcal{N}(A)$ כלומר A איננה הפיכה (אופרטור לינארי עם קרנל לא ריק לא הפיך).

■

(6)

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ משולשית. נמצא את הע"ע של A.

הוכחה. נסמן ב־$\lambda_1 \dots \lambda_n$ את האיברים על האלכסון של A. אזי:

$$p_A(x) = \det(A - Ix) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - x)$$

נבחין ש־x ע"ע של A אמ"מ $p_A(x) = 0$, שכן:

$$p_A(x) = 0 \iff \det(A - Ix) = 0 \iff \mathcal{N}(A - Ix) \neq \varnothing \iff \exists 0 \neq v \in V: (A - Ix)v = 0 \iff \exists 0 \neq v \in V: Av = xv$$

הטענה הימנית ביותר שקולה לכך ש־x ע"ע של A. ממשפט בזו וכל מיני דברים כאלו, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ השורשים היחידים של $p_A(x)$ מעל $\mathbb{F}$, ומכאן שהם הע"ע של A.

■

(7)

יהי $V \subseteq M_2(\mathbb{F})$ תמ"ו המטריצות האלכסוניות. נגדיר $T: V \to V$ על־ידי:

$$T\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$$

(א) נבדוק האם T לכסינה ב־$\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ וב־$\mathbb{F} = \mathbb{R}$. קל לראות ש־$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ו־$e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ בסיס, נסמנו $\mathcal{E}$. אז:

$$[T]_{\mathcal{E}} = \left([Te_1]_{\mathcal{E}} \quad [Te_2]_{\mathcal{E}}\right) = \left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}} \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{E}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נמצא פ"א של T (שלא תלוי בנציג/בסיס)

$$p_{[T]_{\mathcal{E}}}(x) = \det\left([T]_{\mathcal{E}} - Ix\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1-x) - 1 = x^2 - x + x - 1 - 1 = x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

נבחין שהשוויון האחרון קיים מעל $\mathbb{R}$ בלבד, ולצערנו מעל $\mathbb{Q}$ הפולינום $x^2 - 2$ אי פריק. מכאן שאין לו שורשים רציונליים (בזו), ולכן אין שום ע"עים למטריצה ובפרט ההעתקה כולה אינה לכסינה. מעל $\mathbb{R}$, נקבל שני ע"עים שונים – $\sqrt{2}$ ו־$-\sqrt{2}$, ולכן היא לכסינה.

(ב) בסעיף זה החליטו לסמן $\mathcal{B} := \mathcal{E}$. נלכסן את $[T]_{\mathcal{B}}$ ב־$\mathbb{R}$ (כלומר נמצא בסיס ו"עים).

נבחין שהמרחב העצמי:

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

נעביר חזרה ב־$[\cdot]_{\mathcal{E}}^{-1}$ ונקבל:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אז v_1 ע"ע בעבור $\sqrt{2}$ ו־v_2 ע"ע בעבור $-\sqrt{2}$. המרחב ממומד 2 ולכן סה"כ לכסנו את ההעתקה T.

(8)

יהיו $a, b \in \mathbb{F}$. נראה שהמטריצה $A := \left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{F})$ לכסינה אמ"מ $a \neq b$, ונמצא בסיס של ו"ע.

הוכחה. נמצא את הפ"א של המטריצה:

$$\det(A - Ix) = \det \begin{pmatrix} a-x & 1 \\ 0 & b-x \end{pmatrix} = (a-x)(b-x)$$

נבחין ש־a, b ע"עים. נפרק למקרים.

- אם $a \neq b$, אז ממשפט המטריצה לכסינה. נמצא ו"עים. נתבונן במרחבים העצמיים:

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N}\begin{pmatrix} a-b & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ a-b \end{pmatrix}$$

בסיס למרחבים שנוצרים ע"י וקטור יחיד ניתן ע"י אותו הוקטור. סה"כ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ a-b \end{smallmatrix}\right)$ ו־$\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ בסיס של ו"עים למטריצה.

- אם $a = b$, נבחין שהמרחב העצמי:

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \dim V_a = 1$$

סה"כ סכום הממדים של המרחבים העצמיים (יש רק אחד כזה) הוא $2 \neq 1$, ומכאן שהמטריצה אינה לכסינה. ■

(9)

תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח ש־λ^2 הוא ע"ע של A^2. נוכיח של־A יש ע"ע $\pm\lambda$.

הוכחה. משום ש־λ^2 ע"ע של A^2, אזי הוא שורש של p_{A^2}. ממשפט בזו $p_{A^2} \mid (x - \lambda^2)$. נסיק:

$$\det(A - Ix)\det(A + Ix) = \det\left(A^2 - Ix\right) = p_{A^2} = f \cdot (x - \lambda^2) = f(x-\lambda)(x+\lambda)$$

בגלל שבחוג הפולינומים הוא תחום ראשי, הפירוק לראשוניים (גורמים לינאריים) קיים ויחיד, בהכרח $(x+\lambda)$ ו־$(x-\lambda)$, כל אחד בנפרד, מחלקים את $\det(A - Ix)$ או את $\det(A + Ix)$. נפרק למקרים.

- אם $(x - \lambda)$ מחלק את $\det(A + Ix)$ אז $\det(A+Ix)(\lambda) = 0$ כלומר $\det(A + \lambda I) = 0$ ומכאן ש־$\dim V_{-\lambda} > 0$ כלומר $-\lambda$ ע"ע.
- אם $(x - \lambda)$ מחלק את $\det(A - Ix)$ אז $\det(A-Ix)(\lambda) = 0$ כלומר $\det(A - \lambda I) = 0$ ומכאן ש־$\dim V_{\lambda} > 0$ כלומר λ ע"ע.

(אפשר להגיד אותם הדברים על $(x+\lambda)$, אבל אין צורך). מכאן ש־$-\lambda$ ע"ע או ש־λ ע"ע. ■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד