חדו"א ו1א 11

שחר פרץ

14 בינואר 2026

לא הייתי בהרצאה אז השלמתי מצילומי לוח של נגה. אז לא יהיה את כל הראנט הרגיל בעפ שאני מעתיק לסיכום.

המשך נגזרות ולופיטל

משפט 1 (משפט דרבו)**.** תהא $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה ב־(a,b). אז $f'\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ מקיימת את תכונת דרבו.

הוכחה. יהיו $a<x_0<y_0<b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda\in(f'(y_0),f'(x_0))\uplus(f'(x_0),f'(y_0))$. נוכיח תחילה בעבור $\lambda=0$. בה"כ $f'(x_0)<0<f'(y_0)$. ידוע f רציפה ב־$[x_0,y_0]$ (ממשפט) ולכן לפי וויראשטראס מקבלת מינימום בקטע, דהיינו $\exists c\in[x_0,y_0]\colon \forall x\in[x_0,y_0]\colon x(c)\le f(x)$. מהגדרת נגזרת (המטרה היא להראות באופן טרחני ש־c לא מינימום קיצון, אלא מינימום מקומי):

$$0>f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_)}{x-x_0}$$

כלומר קיים $\delta>0$, כל שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<|f'(x_0)|$$

בפרט:

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f(x_0)}{x+\frac{\delta}{2}-x_0}<f'(x_0)+|f'(x_0)|=0$$

(חוקי כי $0<\frac{\delta}{2}<\delta$) כלומר נובע $f(x_0+\frac{\delta}{2})<f(x_0)$ ולכן $c\neq x_0$. באופן דומה $c\neq y_0$. מכאן $c\in(x_0,y_0)$ וממשפט פרמה $f'(c)=0$.

המקרה בו $\lambda\neq 0$ נובע באופן טרוויאלי ע"י הזזה אנכית של הפונקציה וחזרה למקרה בו $\lambda=0$. המרצה עושה את זה פורמלית אבל אין לי הרבה זמן עד ההרצאה ואני צריך להשלים הכל. ■

משפט 2 (משפט קושי)**.** יאי עוד משפט קושי. תהאנה $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי שתיהן רציפות ב־$[a,b]$, שתיהן גזירות ב־(a,b), ולכל $x\in(a,b)$, מתקיים $g'(x)\neq 0$. אז $g(b)\neq g(a)$ וגם קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$\frac{f'(c)}{f'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הוכחה. לפי רול מכיוון ש־g רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), וגם $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$, נובע ש־$g(a)\neq g(b)$.

עתה נגדיר:

$$g\colon[a,b]\to\mathbb{R}\quad h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

אז h רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) שכן היא צירוף לינארי של פונקציות גזירות ורציפות. נבחין ש־$h(a)=0=h(b)$. לכן ממשפט רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$h'(c)=0$. לפי כללי גזירה:

$$h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(c)}\cdot g'(c)$$

ומכאן

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

כנדרש. כמובן שממש לא עשינו אינטגרל וסתם הפלצנו את h משום מקום. ■

תרגיל 1. יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה. נניח ש־$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. הראו כי f' על $\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $\lambda \in \mathbb{R}$. מתקיים $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש־:

$$\forall x \in (b-\delta, b) \colon f(x) > \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |\lambda| (b-a)$$

אינטואיטיבית λ צריך ליפול בין $b - \frac{\delta}{2}$ לבין $\frac{a+b}{2}$, ולכן הדרישה לעיל. ממנה נסיק בפרט:

$$f\left(b - \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > (b-a)\lambda$$

נחלק אגפים ונקבל:

$$\frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{\delta}{2} - \frac{a+b}{2}} > \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} > \lambda$$

בקטע $\left[\frac{a+b}{2}, b - \frac{\delta}{2}\right]$ f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' ולכן קיימת c בקטע המדובר כך ש־:

$$f'(c) = \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{\delta}{2} - \frac{a+b}{2}} > \lambda$$

באופן דומה קיימת $d \in (a,b)$ כך ש־$f'(d) < \lambda$ (אותו הדבר הפוך), ואז ממשפט דרבו ישנה $\alpha \in (a,b)$ כך ש־$f'(\alpha) = \lambda$. לכן f' על $\mathbb{R}$. ■

משפט 3 (משפט לופיטל 1). תהאנה $f,g \colon T \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. נניח ש־$a$ נקודת הצטברות של $I \setminus \{a\}$. עוד נניח ש־f,g רציפות ב־$I \setminus \{a\}$ וכן f,g גזירות ב־$I \setminus \{a\}$. נניח ש־$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (במקרים האחרים אפשר פשוט להשתמש בכללי גבולות כרגיל), וכן קיים הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. תחת כל התנאים הללו $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (כאשר a ו־ℓ מוגדרים במובן הרחב).

הערה 1. לופיטל גנב את המשפט ממישהו אחר בלה בלה בלה

הוכחה. בהרצאה נוכיח רק את המקרה בו $a \in I$ ו־$\ell \in \mathbb{R}$ (באופן כללי, צריך לפצל ל־4 מקרים, בהתאם להיותם של a,ℓ מוגדרים במובן הרחב או לאו). בה"כ f,g מוגדרות ב־a ומתקיים $f(a) = g(a) = 0$ (פורמלית, נגדיר $\tilde{f}, \tilde{g}$ חדשות שמוגדרות ב־a). נוכיח $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, והגבול מימין באופן דומה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $a - \delta < x < a$ מתקיים $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $a - \delta < x < a$. בקטע $[x,a]$ מתקיימים תנאי משפט קושי: f,g רציפות, גזירות, ו־$\forall \alpha \in (x,a) \colon g'(\alpha) \neq 0$. מכאן קיימת $a - \delta < x < c < a$ כך ש־$frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, וסה"כ:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

וסיימנו את הוכחת הגבול לפי הגדרה. ■

למה 1 (הלמה של שטולץ). תהאנה a_n, b_n סדרות ונניח ש־b_n מונוטונית ממש ו־$b_n \to +\infty$. אם קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ אז קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ וגבולותיהם שווים (לופיטל 2 בדיד).

משפט 4 (משפט לופיטל 2). תהאנה $f,g \colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ כאשר I קטע ו־a נקודת הצטברות. נניח ש־f,g גזירות ב־$I \setminus \{a\}$ ו־$\forall x \in I \setminus \{a\} \colon g'(x) \neq 0$. עוד נניח $\lim_{x\to a} |g(x)| \to \infty$ (המקרה היחיד שבאמת מעניין אותנו זה כשגם f שואף לאינסוף בנקודה) וקיים $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. אז $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וערכו ℓ.

הוכחה. נוכיח ש־$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, והכיוון השני באופן דומה. גם כאן, נתעסק רק במקרה בו a סופי והגבול סופי (של חלוקת הנגזרות), ועקרונית צריך לפרק למקרים. תהא x_n סדרה המקיימת $x_n < x_{n+1} \in I \setminus \{a\}$ וכן גבולה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. לכל $x \in I \setminus \{a\}$, מתקיים $g'(x) \neq 0$ ולכן מדרבו g' דומת סימן בקטע. ללא הגבלת הכלליות, $g'(x) > 0$ (במובן הרחב) ולכן היא מונוטונית עולה ומתקיים $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. נסיק ש־$g(x_n)$ סדרה מונוטונית עולה ממש וגבולה $+\infty$. יהי $n \in \mathbb{N}$. בקטע $[x_n, x_{n+1}]$ הפונקציות f,g מקיימות את תנאי משפט קושי. לכן קיים $z_n \in (x_n, x_{n+1})$ כך ש־:

$$\frac{f(x_{n+1} - f(x_n))}{g(x_{n+1} - g(x_n))} = \frac{g'(z_n)}{g'(z_n)}$$

ומסנדוויץ', בהכרח $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. כמו כן לכל $n \in \mathbb{N}$ בהכרח $z_n \neq a$. לפי היינה $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1} - g(x_n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} = \ell$ לפי הלמה של שטולץ קיבלנו $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$ ומהיינה קיבלנו את הדרוש. ■

תרגיל 2. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

נגדיר $f,g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\cos x-1$ ו־$g(x)=x^2$. שתיהן רציפות וגזירות ב־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ וב־0 גבולן 0. מלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

סימנו את השוויון שנובע מלופיטל ב־$\overset{\text{LH}}{=}$ כדי להבהיר שהוא נכון בתנאי שהגבול מימין אכן מוגדר (אחרת – אי אפשר להגיד שום דבר על הגבול לפי לופיטל!).

תרגיל 3. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

פתרון. נגדיר $f(x)=e^{\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}}$ לכל $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. נבחין ש־$\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$ וכן $\lim_{x\to 0}\tan^2 x=0$ מרציפות וכן שתיהן גזירות, וערכן $(\ln\cos x)'=\frac{-\sin x}{\cos x}$ וכן $0\neq\frac{2\tan x}{\cos x}=(\tan^2 x)$. הגבול של החלוקה קיים וערכו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\tan^2)x'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{\tan x}}{2\cancel{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{-1}{2}$$

מהרציפות. סה"כ מלופיטל $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=-\frac{1}{2}$ ולכן $\lim_{x\to 0}f(x)=e^{-0.5}$ וסיימנו. ■

תרגיל 4. נתבונן בגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

מלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

מהגבול הקודם (כלומר תיאורטית היינו צריכים להפעיל לופיטל פעמיים)

1 נגזרות מסדר גבוה ופולינום טיילור

הגדרה 1. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. ניתן להגדיר רקורסיבית את $f^{(n+1)}(x_0):=(f^{(n)}(x_0))'$ כאשר $f^{(0)}=f$ בסיס. נבחין שלשם כך נדרוש ש־$f^{(n)}$ מוגדרת בסביבה של x_0.

סימון 1. לעיתים $f^{(n)}$ תסומן גם ב־$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$.

דוגמה: נבחין שהפונקציה $f(x)=x^m$ עבור $m\in\mathbb{N}^+$ קבוע מתקיים:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & n\le m\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x & f^{(n)}(x)&=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x)&=\cos x & f^{(n)}(x)&=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x)&=e^x & f^{(n)}(x)&=e^x\end{aligned}$$

הגדרה 2. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. נגדיר את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0 ע"י:

$$T_n(x):=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

ואת השארית להיות:

$$R_n(x):=f(x)-T_n(x)$$

למה 2. 1. T_n גזירה מכל סדר

2. R_n גזירה n פעמים ב־x_0

3. לכל $i \in [n] \cup \{0\}$ בהכרח $R_n(x_0) = 0$ וכן $T_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

משפט 5. מתקיים:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

מסקנה 1. תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$. יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. אז קיימת $\omega\colon I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\omega(x_0) = 0$ ו־ω רציפה בנקודה x_0, וגם:

$$R_n(x) = \omega(x)(x-x_0)^n$$

הוכחה. ההוכחה בעיקרה נשארה לבית, אבל ω מוגדרת ע"י:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} & x \neq x_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ואנחנו אמורים והמשיך מכאן/ ■

למה 3. בהינתן $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ וכן x_0 נקודת הצטברות של A, אם $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ וגם $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ אז מתקיים $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \ell^m$.

תרגיל 5. נגדיר $f(x) = \ln(1+x)$ בתחום $(-1, \infty)$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

תרגיל 6. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל אלא באמצעות טיילור.

פתרון.

$$\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x} = \underbrace{\cos^2 x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{\to 1} + \cdots$$

כנראה מה שמחברים בסוף זניח כי משהו משהו ω משהו R_n ואני מקווה שירחיבו יותר בתרגול. ■

תרגיל 7. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל ולא באמצעות טיילור אלא באמצעות כלים אלמטריים שכבר ראינו לפני ההרצאה.

פתרון.

$$(\cos x)^{\tan^{-2} x} = \underbrace{\left((1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)}_{\to e}^{\overbrace{\frac{\cos x - 1}{\tan^2 x}}^{\to -\frac{1}{2}}} = e^{-0.5}$$

■