עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

שחר פרץ

5 באוקטובר 2024

Combinatorics

(1)

(א) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים, אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: ראשית כל, נתבונן ב־$52!$ הסידורים האפשריים של החפיסה כולה. עתה נתבונן בקבוצת המשלים – כמות האפשרויות לחפיסות בהן ישנם 4 אסים רצופים. נתייחס לרצף כמו קלף גדול יחודי בפני עצמו, ולכן, מכיוון שארבעת האסים יחשבו כאחד, יהיו $49!$ אפשרויות לסדר חלק זה. לסדר הפנימי של האסים עצמם יהיה $4!$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $58 \cdot 48!$ אפשרויות בקבוצת המשלים. סה"כ:

$$\mathscr{Answer} = \mathbf{52 - 49!\,4!}$$

(ב) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש בהן כל 4 קלפים מאותו הסוג (13 סוגים שונים) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

תשובה: נגדיר $a_i =$ כמות האפשרויות לסידור בו i רצפים של 4 תווים. מובן כי $0 \le i \le \frac{52}{4} = 13$ (לא ייתכנו רצפים בסדר גודל הארוך יותר מהחפיסה כולה).

כדי למצוא את a_i, נבחר את הרצף הראשון מבין 13 האפשרויות. ואת השני מבין 12 האפשרויות שנותרו, ונמשיך הלאה. באופן דומה לסעיף הקודם, לכל אחד מהסדרות האלו נתייחס קקלף "גדול" יחודי אחד, לכל אחת מ־i הסדרות סדר פנימי של $4!$, וסה"כ סדר כולל של $(52 - 4i + i)!$ אפשרויות ($-4i$ על הקלפים שנוציא החוצה, ו־$+i$ ל"קלף גדול" כמוהו לסדרה עצמה). סה"כ:

$$a_i = i(52 - 3i)!\,4!$$

בכלליות:

ומעקרון ההכלה וההדחה, אם $A_i =$ קבוצת כל הרצפים באורך 4 מסוג נתון, ומשום שאין הגבלה על הכלליות בבחירת קלף מסויים, $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ זהה בערכו לכל $I \in [n]$ כך ש־$|I|$ קבוע בגודל k, ובפרט שווה ל־a_k (המקרה הסמטרי של העקרון), ובשילוב עם עקרון המשלים (על קבוצת על הקומבינציות שגודלה $52!$), נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Answer} &= 52! - \sum_{\emptyset \neq I \in [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} a_k \\
&= \boldsymbol{52! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} k\,(52 - 3k)!\,4!}
\end{aligned}$$

(2)

יהי סריג דו ממדי, ונגדיר מסלול חוקי אמ"מ בכל צעד מ־$\langle x, y\rangle$ ננוע אך ורק לנקודה $\langle x+1, y+r\rangle$ לכל $r \in \mathbb{N}$.

(א) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0, 0\rangle$ ל־$\langle n, k\rangle$?

תשובה: יהי מסלול $a := \{a_i\}_{i=0}^{n}$ מ־$\langle 0, 0\rangle$ ל־$\langle n, k\rangle$ כאשר $\forall i \in [n].\exists x, y \in \mathbb{N}.a_i = \langle x, y\rangle$. נניח שהמסלול חוקי; אזי:

$$\forall i \in [n-1].\pi_1(a_i) - \pi_1(a_{i+1}) = 1 \land \exists r \in \mathbb{N}.\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) = r$$

ולכן נוכל להגדיר מיפוי:

$$\forall i \in [n-1].a_k \mapsto \pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i) =: r_i \in \mathbb{N}$$

חח"ע ועל לקבוצת המסלולים החוקיים. תמונת המיפוי תהיה $\mathbb{N}^{n-1}$. מהגדרת המסלול, $a_n = \langle n,k\rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} r_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \\
&= \pi_2(a_1) \cancel{-\pi_2(a_2) + \pi_2(a_2)} \cancel{-\pi_2(a_3) + \pi_2(a_3)} - \cdots \cancel{+\pi_2(a_i) - \pi_2(a_i)} + \cdots + \pi_2(a_n) \\
&= \pi_2(a_1) + \pi_2(a_n) = 0 + k = k
\end{aligned}$$

בכך, התייחסנו לכל ההגבלות – חוקיות המסלול באורך n (מובעת בהיותה חח"ע ועל לקבוצה המאפשרת זאת), והיותו נגמר ב־$\pi_2(a_n) = k$ (הכרחי ומספיק להיות סכום $\sum r_i = k$). נקבע את גודל הסדרות התמונה המקיימות זאת. ידוע שכמות האפשרויות לסכום מספרים יהיה $S(n-1,k)$, ולכן סה"כ זהו פתרון הבעיה. נסכם:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k, n-1)}$$

(ב) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$, כך שאף צעד בהם אינו מסתיים בנקודה $\langle n,k\rangle$?

תשובה: באופן דומה לסעיף הקודם, כמות הצעדים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle 2n,2k\rangle$ תהיה $S(2k,2n-1)$. נחפש את קבוצת המשלים. בהינתן מסלול שעובר בין הראשית ל־$\langle 2n,2k\rangle$ הוא יכלל בקבוצת המשלים אמ"מ הוא עבור ב־$\langle n,k\rangle$, כלומר הוא למעשה מסלול $\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$ ואז עוד מסלול $\langle n,k\rangle \to \langle 2n,2k\rangle$. המסלול האחרון שקול לבעיה הראשונה בעבור טרנספורמציה איזומטרית של $\langle x,y\rangle \mapsto \langle x-n, y-k\rangle$ שלמעשה תבהיר כי פתרון שתי הבעיות הוא $S(k,n-1)$, וכאשר נחבר אותם יחדיו, מכלל הכפל, גודל קבוצת המשלים הוא סה"כ $S(k,n-1)^2$. אזי:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(2k, 2n-1) - S(k, n-1)^2}$$

(ג) **שאלה:** כמה מסלולים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$ כך שכל צעד $\langle x_1,y_1\rangle \to \langle x_2,y_2\rangle$ מקיים $y_1 + 2 \le y_2$?

תשובה: נבחין שקילות לאחד הנתונים:

$$y_1 + 2 \le y_2 \iff \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \le -2 \iff \underbrace{\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i)}_{=r_i} \ge 2$$

ואכן ננסה למצוא את כמות הסדרות $\{r_i\}_{i=1}^{n-1}$ כך ש־$r_i \ge 2$, כך ש־$\sum r_i = k$, לפי השקילות שהוכחה בסעיף (א). לבעיה זו קיימת בעיה שקולה ידועה, היא חלוקת k כדורים ל־$n-1$ תאים, כשבכל תא לפחות 2 כדורים. אזי, ניאלץ להתחיל מלשים שני כדורים בכל תא, וסה"כ נבזבז $2n-2$ כדורים. את $k-2n-2$ הכדורים נותרים נחלק בין התאים. סה"כ, קיבלנו:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(k-2n-2, n-1)}$$

(3)

יהיו n כדורים ממוספרים. יש לסדרם ב־n תאים ממוספרים, כאשר בכל תא יימצא בדיוק כדור אחד. לכל $1 \le i \le n-1$ עסור להכניס את הכדור ה־i לתא ה־i, בעוד אין מגבלה על הכדור ה־i. כמות האפשרויות לסידורים כאלו תהיה $F(n)$.

(א) **שאלה:** הביעו את $F(n)$ בעזרת D_m.

תשובה: נפלג למקרים.

- אם הכדור ה־i נמצא בתא ה־i, אז יש עוד $n-1$ תאים נותרים בהם אי־אפשר שכדור יהיה בתא המתאים לו מבחינת מספר. כלומר, יהיו D_{n-1} אפשרויות.
- אם הכדור ה־i לא נמצא בתא ה־i, אז כל n הכדורים לא נמצאים בתא המתאים להם, כלומר יש D_n אפשרויות.

סה"כ מכלל החיבור:

$$\mathscr{A}nswer = D_n + D_{n-1}$$

(ב)

(4)

(א) הוכיחו באופן קומבינרטורי:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$$

אין לי מושג...

(ב) מצאו ביטוי ללא סכימה לאגף שמאל של המשוואה:

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

סיפור: מתוך $n-1$ איברים, קבוצה של לפחות שני איברים, ומתוכה נבחר שניים שונים ונסמנם בכחול ובירוק. כמה אפשרויות יש לכך?

אגף ימין: נבחר כדור כחול (n אופציות) ולאחריו ירוק ($n-1$ אופציות). עתה, בעבור $n-2$ האיברים הנותרים, נשייך להם את המספר 1 אם נרצה להכניסם לקבוצה ו־0 אם לאו - לכך, יהיו $|\{0,1\}|^{n-2}$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $n(n-1)2^{n-2}$ אפשרויות.

אגף שמאל: נניח שגודל הקבוצה הוא $2 \leq k \leq n$ (בהכרח גודל הקבוצה גדול מ־2 כי קיים מה כדור כחול וירוק) - לבחירה מתוך קבוצה $\binom{n}{k}$ אופציות. לכן, מתוך n האיברים שיש לנו, נבחר k איברים לשים בקבוצה. מאילו, נבחר אחד כחול (k אפשרויות) ואחד ירוק ($k-1$ אפשרויות) וסה"כ מכלל הכפל $\binom{n}{k}k(k-1)$ בעבור k נתון, ומכלל החיבור $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ אופציות.

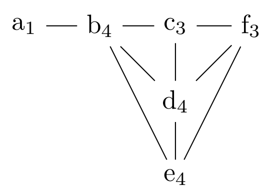
. . . . (5) . . . .

Graph Theory

. . . . (1) . . . .

נוכיח או נפריך קיום גרף מתאים:

1. 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,5$
2. 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,5,5$
3. 6 צמתים מדרגות $1,3,3,3,4,4$. נוכיח קיום:



. . . . (2) . . . .

. . . . (3) . . . .

. . . . (4) . . . .

. . . . (5) . . . .

. . . . (6) . . . .

. . . . (7) . . . .

. . . . (8) . . . .

. . . . (9) . . . .

. . . . (10) . . . .