מבני נתונים 12

שחר פרץ

19 במאי 2025

מרצה: עמית ווינשטיין

ניעזר בטבלה מהשיעור הקודם:

P. Queue	**Insert**	**Minimum**	**Delete-Min**	**Dec.-Key**	**Delete**	**Meld**	**Init**
AVL tree	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$		$O(n \log n)$
Binary Stack	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n)$
W.C Binomial Stack	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	
*Amort. Binomial Stack**	$O(1)$	$O(1)_{W.C.}$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$	
Lazy Amortized Binomial Stack	$O(1)_{W.C.}$	$O(1)_{W.C.}$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	
Amort. Fib. Stack:	$O(1)_{W.C.}$	$O(1)_{W.C.}$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$	

$*$ – סיבוכיות amortized פר פעולה, כלומר **לא** בעבור רצף פעולות של כל הפעולות במבנה.

תזכורת: ערימה בינומית היא (בדכ) רשימה מקושרת המורכבת ממתי־ערימות, הם העצים הבינומים.

הערה: לדעת המרצה (לא בדקן) זה Init ב־$O(n)$ בעבור ערימה בינומית.

FIBONACCI STACK .... (1)

מאת Fvedman Tarjan, 1987. למה dec-key יקר? כי צריך לפעפע קודקוד כלפי מעלה. עוד פחות פרקטי ומסורבל מבינומית. לטענת עמית הוא יפתע אם נבין את זה עד סוף ההרצאה.

מטרה: רוצים להקטין את הסיבוכיות amortized של Decrease-Key,

רעיון: במקום לפעפע למעלה, נוציא את תת־העץ להיות עץ חדש.]

הבעיה: אם נוריד מ־B_k דברים, נאבד את התכונה שכמות הצמתים היא אקספוננציאלית ביחס למספר של (2^k צמתים), ויכול להיות שנקבל "סרוך".

הצעה: נגביל מחיקת בנים ישירים: אם מוחקים בן שני לאותו הקודקוד, ננתק גם את האבא לשורש חדש (רקורסיבית). התהליך הזה נקרא cascading cuts.

משפט 1. קודקוד מדרגה k בעל לפחות ϕ^k קודקודים בעץ.

למה 1. נניח x קודקוד מדרגה k עם בנים $y_1 \dots y_k$, לפי סדר הצטרפותם ל־x. הדרגה של y_i היא פחות $i-2$.

הוכחה. כאשר y_i הצטרף לכבן של x, אז $y_1 \dots y_k$ היו כבר בנים של x ולכן הדרגה של x הייתה לפחות $i-1$ וכגם הדרגה של y_i הייתה לפחות $i-1$. מכיוון ש־y_i עדיין בן של x, הורידו לו לכל היותר בן אחד, כלומר הדרגה הנוכחית של y_i היא לפחות $i-1$. ■

הוכחת הטענה. נסמן ב־$S-k$ את כמות הקודקודים המינימלית בעץ מדרגה k. אז $S_0 = S_1 = 1$ וכן:

$$S_k \geq 2 + \sum_{i=0}^{k-2} S_i \geq 2 + \sum_{i=0}^{k-2} f_{i+2} = F_{k+2} \geq \phi^k$$

הערה 1: זהו א"ש ולא שוויון הדוק כי זה לכל היותר $i-2$

הערה 2: סכום איברי סדרת פיבונאצ'י יואצ איבר בסדרת פיבונאצ'י עד לכדי הוספת 1 ולכן החרא מלמעלה חוקי ■

מסקנה. דרגה מקסימלית של קודקוד בערימת פיבונאצ'י חסום ע"י $O(\log n)$

עתה נראה ש־Decrease-Key הוא $O(1)$ amort. **הצעה:** נבחר פונקציית פוטנציאל Φ הוא מספר העצים + מספר הקודקודים המסומנים (קודקוד יקרא מסומן אממ מחקו לו כבר בן).

נאמר שהיו לנו c פעמים carscading-cuts ובפעולת ה־dec. key. אז מספר העים הוא c ומספר הקודקודים המסומנים הוא $-(c-1)$. העלות היא c, וסה"כ

$$\text{amort} = [c][-(c-1)][+c] = c+1$$

שזה רע, אז במקום זאת נעשה את הפוטנציאל להיות מספר העצים + 2 כפול מספר הקודקודים המסומנים, ואז:

$$\text{amort} = +c - 2(c+1) + c = O(1)$$

בניגוד לערימה בינארית, זהו מבנה מאוד מסורבל עם קבועים מטורפים והמון IO ואיפשהו בקורס אלגוריתמים משתמשים בזה בשביל למצוא מספר משהו משהו בגרף ואז יוצא שהסיבוכיות שלהם יותר טובה. "יותר בתיאוריה ופחות בפרקטיקה" – עמית.

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד