ערעור ~ אלגברה ליניארית 1א ~ מועד ב'

26 במרץ 2025

שאלה 1

בשאלה 1, נכתב "למה" מעל הטקסט במקרה שבו A עם שורת אפסים אחת. נכתב בשלוש השורות האלו: "משום ש־A קאנונית שורת האפסים היא השורה הרביעית והאחרונה, ולכן לכל $i \neq 4$ ו־$j, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ יתקיים ש־A_{ij} שורת אפסים ואז $|A_{ij}| = 0$.".

אולי לא הסברתי טוב את דברי.

- הטענה שאם A קאנונית אז שורת האפסים היא האחרונה, נובעת מהעובדה שקיימת שורת אפסים מהגדרת המקרה (זהו המקרה שלישי בפירוק למקרים שעשיתי בשאלה) ובגלל שהיא קאנונית כל שורות האפסים נמצאות בתחתית המטריצה.
- הטענה שבתנאים המוזכרים לעיל $|A_{ij}| = 0$ נכונה, שכן משום ש־$A \in M_{4\times 4}(\mathbb{F})$ ולכן השורה האחרונה היא השורה ה־4. על כן, כל מינור שלא יסיר את השורה ה־4, יכלול בתוכו שורת אפסים. בפרט, בכל מקרה ב־$i \neq 4$ נקבל ש־A_{ij} שורת אפסים, ובגלל שדטרמיננטה של מטריצה בה ישנה שורת אפסים היא 0, נסכם שבמקרה זה $|A_{ij}| = 0$.

אני לא חושב שיש בעיה בהמשך, בגלל שלא עליו הבודק סימן את סימני השאלה. ליתר בטיחון, הנה הסבר קצר של המשך הפתרון שלי, והבעיות שעלולות להופיע בקריאתו; בהמשך, כתבתי את $\operatorname{adj} A$ מפורשות לפי הגדרה כתלות בדטרמיננטה של מינורים מ־A, והראיתי סתירה לכך שהגענו למצב בו כל השורה הימנית של $\operatorname{adj} A$ איברים פותחים. יש לציין שבפסקה זו אני משתמש בסימון A_{ij} כדי לציין את האיבר ה־ij ב־A ולא את המינור, בניגוד לפסקה הראשונה באותו העמוד בה אני משתמש בסימון זה בשביל המינור, דבר שאולי יכל לגרום לבלבול. דבר אחר שיכל לגרום לבלבול הוא צמד המילים "איברים פותחים" שנכתבה בכתב לא ברור.

שאלה 3

בשאלה 3 כתבתי פתרון נכון ברובו, אך לא ברור ומבולגן. הבודק התקשה להבין את הפתרון המסורבל שלי ("לא מצליח להבין את זה", "אני לא מבין את המעבר הזה" וכו'). על כן, אספק כאן שני דברים – ראשית, הוכחה מסודרת לנכונות הבניה שלי מהמבחן, ושנית, תמלול מוקלד ומלא של ההוכחה שלי מהמבחן. אני מקווה, שקריאה של פתרון דומה אך מסודר יותר, יחד עם הקלדת הפתרון המקורי מהמבחן, יאפשר לכם להבין יותר בקלות את מה שכתבתי. אני מתנצל על הבלגן של הפתרון, ועל אורך הערעור, בלחץ המבחן התקשתי לכתוב יותר מסודר מזה, ועתה אצטרך להבהיר את נכונותו של פתרון ארוך. גם הפתרון שלי מהמבחן נכון ברובו – אך ההוכחה המסודרת שמצורפת להלן ברורה בהרבה, ועל כן אני ממליץ לכם לקרוא אותה קודם לקריאת תמלול המבחן.

הוכחה מסודרת לבניית הבסיס שלי בשאלה 3

יהיו V מ"ו על $\mathbb{F}$ שדה, $v \in V$ וקטור לא 0, ו־$(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ קבוצת סקלרים. נבנה בסיס $w_1 \dots w_n$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$.

נגדיר כמה סימונים – ראשית כל:

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \alpha_j \neq 0 \\ 0 & \alpha_j = 0 \end{cases},\ \ \delta_j \colon \{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \to \{0, 1\}$$

נגדיר את i להיות המספר המינימלי כך ש־$\delta_j = 1$ (i קיים משום שנתון ש־α_i לא טרוויאלי), ומעתה ואילך כל סכום $\sum_{i=k}^{m} f(k)$ יוגדר להיות 0 במידה ו־$k = m$. נגדיר $\alpha^1 = (i \in \{1 \dots n\} \mid \delta_i = 1)$ סדור בסדר עולה, ואת m_j להיות האיבר הבא אחרי j ב־α^1 (כלומר, ה־$k > j$ המינימלי כך ש־$\alpha_k = 1$). אם לא קיים כזה (כלומר, אם j מקסימלי ב־α^1), נגדיר $m_j = n$.

עתה, ידוע לנו קיום בסיס $v_1 \dots v_n$ של V, ולכן קיימות $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{F}$ סקלרים כך ש־$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$. ניעזר בו בשביל לבנות את w_j.

עתה, נגדיר לכל $j \in \alpha^1$:

$$w'_j = \frac{\lambda_j}{\alpha_j} v_j + \sum_{k=j+1}^{m_j - 1} \left(v_k \cdot \frac{\lambda_k}{\alpha_j} \right)$$

ולכל $j \notin \alpha^1$ נגדיר $w_j = v_j$. (עולם הדיון הוא $j \in [n]$). ה"אינטואציה" היא שכל $j \in \alpha^1$ מטפל בכל הוקטורים ממנו ועד $m_j - 1$, ודואג שהם יתווספו לסכום הסופי (הוכחה פורמלית של האינטואציה הזו תבוא בהמשך).

ניזכר בהגדרה של הקבוע i מלמעלה. נגדיר:

$$w_i = w_i' + \sum_{j=1}^{i-1}\left(v_j \cdot \frac{\lambda_j}{\alpha_i}\right)$$

ובכל שאר המקרים בהם $i \neq j$, נגדיר $w_i = w_j$ [הטיפול שלי ב־w_i בהוכחה המקורית שגוי במעט, בניית שאר $n-1$ הוקטורים נכונה]. ההגיון מאחורי המהלך הוא ש־i הוא האיבר הראשון ב־α^1 ולכן צריך לטפל גם ב־v_i־ים שקודמים לו.

נבחין כי החלוקה ב־α_j מתבצעת תמיד באופן חוקי, שכן מתבצעת אם ורק אם $j \in \alpha^1$ (כלומר $\alpha_j \neq 0$).

עתה יש להראות ש־$(w_i)_{i=1}^n$ בסיס. קל לראות שעבור רצף כלשהו של $(\beta_i)_{i=1}^n$ סקלרים, נוכל לכנס את המקדמים של וקטורי v_i, ולראות שהביטוי בת"ל מזה ש־v_i בסיס. [הסבר יותר מפורט בהוכחה המקורית מהמבחן]. משום שזוהי סדרת וקטורים מגודל n, ונתון $\dim V = n$, אז $(w_i)_{i=1}^n$ בסיס.

נבחין כי לכל $j \notin \alpha^1$, מהגדרה $\delta_j = 0$ כלומר $\alpha_j = 0$, ונקבל $\alpha_j w_j = 0 \cdot v_j = 0$. אשתמש בכך מספר פעמים, ונראה כי הבודק לא הבין זאת בגלל ריבוי הסימונים ("איפה כל יתר האלפות ששונות מאפס?").

עתה ניגש להראות את השוויון $\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j = v$. בהוכחה ניאלץ לטפל בשלושה מקרים: אם $j = i$, אם $i \neq j \in \alpha^1$, ואם $j \notin \alpha^1$, זאת כי הגדרת w_j מפוצלת בין שלושת מקרים אלו.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j &= \alpha_i w_i + \sum_{i \neq j \in \alpha^1} \alpha_j w_j + \sum_{j \notin \alpha^1} \alpha_j w_j \\
&= \alpha_i \underbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} v_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_i} v_j\right) + \sum_{j=i+1}^{m_i-1}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_i} v_j\right)\right)}_{=w_i} + \sum_{i \neq j \in \alpha^1}\left(\alpha_j\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j} v_j + \sum_{k=j+1}^{m_k-1} \frac{\lambda_k}{\alpha_j} v_k\right)\right) + \underbrace{\sum_{j \notin \alpha^1} \alpha_j v_j}_{=0} \\
&= \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{i-1}(\lambda_j v_j) + \sum_{j=i+1}^{m_i-1}(\lambda_j v_j) + \sum_{i \neq j \in \alpha^1}\left(\lambda_j v_j + \sum_{k=j+1}^{m_k-1} \lambda_k v_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \alpha^1}\left(\sum_{k=j}^{m_k-1} \lambda_k v_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = v
\end{aligned}$$

השוויון האחרון נכון כי אנחנו "מרצפים" את n המספרים – ראשית כל מ־1 עד $i-1$, משום ש־i, האיבר הראשון ב־α^1, ואז משם נסכום מ־i ל־$m_i - 1$, ואז מ־m_i ל־$m_{m_i} - 1$ וכו' עד שנגיע ל־$m_j = n$ (מהגדרת m_j, כאשר j מקסימלי ב־α^1 אז $m_j = n$). בכך הראינו את הדרוש. הערה: בפתרון המקורי מהמבחן במצורף לעיל, הראתי את השוויון הארוך שהוכחתי עכשיו באמצעות מספר שוויונות ששילבתי לשוויון אחד בסוף.

תמלול שאלה 3

להלן מצורף תמלול מדויק של מה שכתבתי במבחן.

הוכחה. יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ שדה, ויהי $v \in V$ וקטור לא 0. יהיו $(\alpha_i)_{i=1}^n$ קבוצת סקלרים $\alpha_i \in \mathbb{F}$. ידוע קיים $\alpha_x \neq 0$ כלשהו. נראה קיום בסיס $\{w_1 \dots w_n\}$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.

משום ש־$v = 0$ ו־$v \in V$ אז עבור בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ כלשהו של V יתקיים $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ קיום $(\lambda_i)_{i=1}^n$ כלשהן צירוף לא טריוואלי.

נגדיר:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \alpha_i \neq 0 \\ 0 & \alpha_i = 0 \end{cases}, \ \delta_i \colon \{\alpha_i\}_{i=1}^n \to \{0,1\}$$

פונ'.

נפעל לפי האלגוריתם הבא: עבור i מינימלי כך שמתקיים ש־$\delta_i = 1$ (קיים לפי הנתון כזה), נגדיר:

$$v_i' = \frac{\lambda_i}{\alpha_i} v_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left(v_j \cdot \frac{1}{\alpha_i}\right)$$

(אם סכום ריק אז סכום 0). ולכל $j \neq i$ נגדיר $v_j' = v_j$.

מעתה ואילך, תהי $\alpha^1 = (i \mid \delta_i = 1)$ לא ריקה מהנתון, וסדורה בסדר עולה. אז לכל $j \in \alpha^1$:

$$w_j = \frac{\lambda_j}{\alpha_j} v'_j + \sum_{k=j+1}^{m-1} \left(v'_k \cdot \frac{1}{\alpha_j} \right)$$

כאשר m הוא המספר הקטן הבא אחרי j ב־α^1, אם קיים, אחרת n. אם $m-1 \geq j+1$ נגדיר את הסכום להיות 0. לכל $j \notin \alpha^1$ נגדיר $w_j = v_j$.

(עד כה חלוקה ב־α_j חוקית כי תמיד $\delta_j = 1$)

ראשית, נראה ש־$(w_i)_{i=1}^n$ בסיס; יהיו $\mathbb{F} \ni (\beta_i)_{i=1}^n$ סקלרים:

$$\sum \beta_k w_k = \left(\sum v_j \cdot \frac{1}{\alpha_i} \right) \cdot \beta_i + \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} \beta_k v_k}_{\text{כי } \alpha_k = 0} + \sum_{k \in \alpha^1} \left(\frac{\lambda_k}{\alpha_k} + \sum_{x=k+1}^{m_k - 1} \frac{1}{\alpha_k} v_x \right) \cdot \beta_k$$

[חץ מצביע לכיתוב ־ $x = k+1$ בביטוי לעיל] כי עבור $k = i$ טיפלנו, אחרת $v'_k = v_k$

(m_k המספר שבא אחרי k ב־α^1, אם קיים אחרת n)

נבחין כי נוכל לכנס איברים ולקבל קומבינציה ליניארית של $(v_k)_{k=1}^n$ שכן לכל איבר כופל באחד מאיברי (v_k). אזי זהו צירוף ליניארי לא טריוואלי של בסיס ולכן 0, כדרוש.

סה"כ $(w_i)_{i=1}^n$ בת"ל, וגם $|(w_i)_{i=1}^n| = n = \dim V$ ולכן $|(w_i)_{i=1}^n|$ בסיס ל־V.

עתה נראה את השוויון שנדרשנו להראות בתחילת השאלה.

תחילה, נראה כי $\sum_{k=1}^{i} \alpha_k w_k = \sum_{k=1}^{m_i - 1} \lambda_k v_k$; (גם כאן m_i מוגדר כמו לעיל)

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_k w_k = \alpha_i w_i + \sum_{i \neq k=1}^{m_i - 1} \underbrace{\alpha_k}_{\substack{0 \\ \text{כי } \delta_k = 0}} w_k = \alpha_i w_i = \alpha_i w_i = \alpha_i \frac{\lambda_i}{\alpha_i} v_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\cancel{\alpha_i}} \cancel{\alpha_i} v_k + \sum_{k=i+1}^{m_i - 1} \frac{\lambda_k}{\cancel{\alpha_i}} \cancel{\alpha_i} v_k = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k v_k$$

כדרוש.

עתה, נראה שלכל $\alpha^1 \ni j \neq 1$ מתקיים $\alpha_j w_j = \sum_{m_j - 1}^{k=j} v_k \lambda_k$:

$$\begin{aligned} w_j \alpha_j &= \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j} v_j + \sum_{k=j+1}^{m_j - 1} v_k \cdot \frac{\lambda_k}{\alpha_j} \right) \\ &= \lambda_j v_j + \sum_{k=j+1}^{m_j - 1} v_k \lambda_k \\ &= \sum_{k=j}^{m_j - 1} v_k \lambda_k \end{aligned}$$

סה"כ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j &= \sum_{j \notin \alpha^1} \underbrace{\alpha_j}_{\substack{\alpha_j = 0 \\ \text{כי } \delta_j = 0}} w_j + \sum_{j \in \alpha^1} \alpha_j w_j = \sum_{j \in \alpha^1} \alpha_j w_j \\ &= \sum_{j \in \alpha^1} \left(\sum_{k=j}^{m_j - 1} v_k \lambda_k \right) = \sum_{k=1}^{n} v_k \lambda_k = v \end{aligned}$$

השוויון האחרון נכון כי ישנו ריצוף כזה:

$$(\alpha^1)_1 \underbrace{.....}_{\notin \alpha^1} \overbrace{(\alpha^1)_2}^{m(\alpha^1)_1} .... (\alpha^1)_{(|\alpha^1| - 1)} ..... \underbrace{\overbrace{*}^{n}}_{m_{|\alpha^1| - 1}}$$

וסה"כ $(w_i)_{i=1}^n$ בסיס וגם $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$ כדרוש. ■

למען הספר ספק, הוכחה שהבסיס אכן בת"ל

בשתי ההוכחות דילגתי על שלבים הוכחת הבת"ליות, משום שזה נראה לי כקטע לא רלוונטי ולא עיקרי, שמעמיס על הוכחה ארוכה ממילא. למען הספר ספק, כחלק מערעור זה אני מצרף גם הוכחה שהבסיס שבניתי אכן בת"ל. אם זה ברור לקרוא, אין טעם לקרוא את ההוכחה האלגברית המצורפת.

הוכחה. נעבוד עם בסיס תחת הסימונים של ההוכחה המסודרת המופיעה לעיל. יהיו $(\beta_i)_{i=1}^n \in \mathbb{F}$ סקלרים. נדרוש שוויון של הקומבינציה הלינארית של $(w_i)_{i=1}^n$ איתם ל-0. אז:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \beta_i w_i &= \beta_i \underbrace{\left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i}v_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_i}v_j\right) + \sum_{j=i+1}^{m_i-1}\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_i}v_j\right)\right)}_{=w_i} + \sum_{i\neq j\in\alpha^1}\left(\beta_j\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j}v_j + \sum_{k=j+1}^{m_k-1}\frac{\lambda_k}{\alpha_j}v_k\right)\right) + \sum_{j\notin\alpha^1}\beta_j v_j \\ &= \sum_{j\notin\alpha^1}\left(\left(\beta_j + \beta_*\frac{\lambda_j}{\alpha_*}\right)v_j\right) + \sum_{j\in\alpha^1}\left(\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j}\beta_j\right)v_j\right) = 0\end{aligned}$$

כאשר β_* איזשהו β_j כלשהו כך ש-$j\in\alpha^1$ (ליתר דיוק – הוא ה-$*$ המקסימלי ב-α^1 כך ש-$j<*$, אך אין זה משנה להוכחת הבת"ליות). השוויון האמצעי נכון מנימוקים שכבר הובאו מספר פעמים לעיל (ראה/י סוף ההוכחה המסודרת) ועל כן אחסוך לכתוב אותם גם כאן.

סה"כ הגענו לקומבינציה ליניארית של $(v_i)_{i=1}^n$ שהוא בסיס, כלומר הקבועים בהם כפלנו טרוויאלים. נתבונן בקבועים, ונסיק שלכל $j\in\alpha^1$ יתקיים $\frac{\lambda_j}{\alpha_j}\beta_j = 0$ ולכן $\beta_j = 0$. באופן דומה:

$$\forall j\in\alpha^1\ \exists *\notin\alpha^1 : \beta_j + \underbrace{\beta_k\frac{\lambda_j}{\alpha_k}}_{k\in\alpha^1 \implies \beta_k=0} = \beta_j = 0$$

וסה"כ בין אם $j\in\alpha^1$ ובאין אם לאו, מתקיים $\beta_j = 0$ כלומר $(\beta_i)_{i=1}^n$ טרוויאלי, כדרוש. ■

. . . .

אני מעריך מאוד את הזמן שהושקע בקריאת ערעור זה.