ליניארית 11

שחר פרץ

15 בינואר 2025

CHANGING BASE .... (1)

משפט. יהי $B = \{\theta_1 \dots \theta_n\}$ בסיס ל־V וגם $B, = \{u_1 \dots u_n\}$ כך ש־$u_i = \sum \alpha_{ji}\theta j$ לכל $i \in [n]$, אז

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

אז M הפיכה אמ"מ B' בסיס ל־V.

הוכחה.

$$B' \text{ בסיס} \iff B' \text{ בת"ל} \iff \{[u_i]_B\} \text{ בת"ל} \iff \text{העמודות בת"ל} \iff \operatorname{rk} M = n \iff M \text{ הפיכה}$$ ■

הגדרה. B, B' בסיסים של V מ"ו. אז $M = [id]_B^{B'}$ היא מטריצת המעבר מבסיס B' ל־B.

דוגמה. בעבור P_2 (סימון של הפרצה ל־$\mathbb{R}_s[x]$) אז בעבור הבסיסים $B = (1+x, 1-x, 1+x^2)$ ו־$B' = (1, x+x^2, 2x+3x^2)$, נסמן $B = (b_1, b_2, b_3)$, אז:

$$1 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_3 + 0b_3 \implies [1]_B = (0.5, 0.5, 0)$$

ולכן השורה הראשונה:

$$[M]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0.5 & \cdots \\ 0.5 & \cdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

אז איך נעביר בין בסיסים? כדי לעשות את המעבר $[T(x)]_B \to [T(x)]_{B'}$, נבצע כפולה מימין.

משפט. יהי V מ"ו, כך ש־$\dim V = n$ ו־$B = \{\theta_1 \dots \theta_n\}$, $B' = \{u_1 \dots u_n\}$ בסיסים ל־V, אז מטריצת המעבר M מ־B' ל־B תקיים $\forall \theta \in V \colon [\theta]_B = M[\theta]_B$

הוכחה. ראינו עבור U, V מ"וים עם B, C בסיסים בהתאמה, ו־$\varphi \colon V \to U$, שמתקיים ש־$\forall v \in V \colon [\varphi]_C = [\varphi]_C^B[v]_B$. לכן:

$$M \cdot [\theta]_{B'} = [id]_B^{B'}[\theta]_{B'} = [id(\theta)]_B = [\theta]_B$$

■

סימון. תהי $T \colon V \to V$ ט"ל ו־V מ"ו. נסמן $[T]_B^B =: [T]_B$.

טענה. תהי $T \colon V \to W$ איזו', ו־B, C בסיסים של V ושל W. אז $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$

הוכחה. ראינו שעבור $\varphi \colon V \to U$ ו־$\psi \colon U \to W$ עם B_v, B_w בסיסים, מתקיים $[\psi \circ \varphi]_{B_w}^{B_v} = [\psi]_{B_w}^{B_v}[\varphi]_{B_U}^{B_V}$.

נראה ש־$[T^{-1}]_B^C$ ההופכית ל־$[T]_C^B$.

$$[T]_C^B[T^{-1}]_B^C = [T \circ T^{-1}]_C^C = [id_W]_C = [id_W]_C^C = I$$

הערה: ומכיוון שהופכית הפיכה מצד אחד אמ"מ משני הצדדים והדבר שם ריבועי (הנחנו בסתר שוויון ממדים מתאים) אז זה תקין. ■

משפט. (השם של המורה: "הקשר בין מעבר בסיס למטריצה מייצגת"). יהיו $T \colon V \to V$ ט"ד, $\dim V = n$, B, B' בסיסים ל־V. אז:

$$[T]_{B'} = M^{-1}[T]_B M$$

הוכחה.

$$M^{-1}[T]_B M = [id]^B_{B'}[T]^B_B[id]^{B'}_B = [id \circ T \circ id]^{B'}_{B'} = [T]_{B'}$$

■

הגדרה. $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. אז A,B דומות אם $\exists M \in M_n(\mathbb{F})\colon A = M^{-1}BM$.

דוגמה.

1. אם A דומה ל־I, אז $A = M^{-1}IM = MM^{-1} = I$
2. אם A דומה ל־B אז B דומה ל־A.

משפט. יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. אז A,B דומות, אמ"מ קיים V מ"ו, $T\colon V \to V$ ו־C, C' בסיסים כך ש־$A = [T]_C,\ B = [T]_{C'}$.

$\Longrightarrow$ נניח A,B כמתואר, אז $[T]_C = M^{-1}[T]_C M$ עבור M מט' מעבר בסיס, $A = M^{-1}BM$.

טל: "יש פה בחור ישן". צימרמן: "אני כותב". טל: "אני מבין... תהיה איתנו". צימרמן: "אני כותב". טל: "בסדר פשוט... תכתוב". צימרמן: "אני כותב".

$\Longleftarrow$ יהיו A,B דומות. אז $B = M^{-1}AM$ ו־$V = \mathbb{F}^n$. נסמן ב־E בסיס סטנדרטי ל־$\mathbb{F}^n$. נגדיר $T(v) = Av$ ונסמן ב־(m_{ij}) את האיברים ב־M. נסמן

$$b'_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} e_j,\ \ B' = \{b'_i\}$$

לכל $1 \le i \le n$. מהגדרת מטריצה מייצגת $M = [id]^{B'}_E$. B' בסיס כי עבור M הפיכה נקבל $\{b'_i\}$ בסיס. סה"כ קיבלנו B', E, T, V כך ש־$A = [T]_E$ ו־$B = [T]_{B'}$. ולכן

$$[B] = M^{-1}AM = [id]^E_{B'} \cdot [T]^E_E [id]^B_E = [T]_B$$

DETERMINANTS . . . . (2)

משפט (יחידות דיטרמיננטה). נניח שקיימות $d_1\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ ו־d_2 שונות. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז $A = E_1 \cdots E_t \cdot B$ עבור B מדורגת קאנונית ו־E_i מט' אלמנטרית.

הוכחה. אם נסמן $\varphi 1 \ldots \varphi_t$ פעולות דירוג, אז $B = (\varphi_t(\cdots(\varphi_1(A))))$ ולכן $\det B = \prod_{i=1}^{t} \lambda_i \det A$ (כך ש־λ_i הוא הקבוע שמתאים לפעולה) ולכן $\det A = \lambda \det B$ (λ קבוע). נפצל למקרים.

- אם $B = I$, אז $\exists c\colon\ \det A = c$ כדרוש.
- אחרת, $B \neq I$. בגלל ש־$B \in M_n(\mathbb{F})$, אם לא I אז יש שורת אפסים: $d_1(A) = d_2(A) \implies \det A = 0 \implies \det B = 0$.

■

הערה: הגיון שלי להוכחה: דטרמיננטה היא 0 אם לא הופכי, ואחרת היא מכפלת הקבועים של הפעולות האלמנטריות שהיא צריכה לעשות כמו שהראו.

למה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם שורת אפסים. אז $\det A = 0$.

הוכחה. משהומשהו מולטילינאריות אני לא מקליד את כל הבלגן הזה (דורש הרבה מטריצות כלליות כאלו עם המון 3 נקודות). השורה התחתונה שמפצלים ומקבלים $\det A = 2\det A$ כלומר $\det A = 0$. ■

סימון. $|A| := \det A$.

משפט. יהיו $\det\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, $A,B \in M_n(\mathbb{F})$, דט'. אז $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

הוכחה. נסמן $A = E_1 \ldots E_s \cdot A_1$ עבור E_i מט' אלמנטריות, A_1 מדורגת קאנונית מתאימה ל־A. אז $|AB| = |E_1 \cdot A_1 B| = \prod_{i=1}^{s} |E_i| \cdot |A_1 B|$ (נסתכל על A,B בתור תוצאה של הפעולות האלמנטריות). אם $A_1 = I$, אז $|B| = |IB| = |A_1 B|$, ולכן $|AB| = (\prod |E_I|)|B| = |A||B|$. אחרת, A_1 בעלת שורת אפסים.

אחרת ל־A_1 שורת אפסים, כלומר $|AB| = \lambda |A_1 B| = 0$ כי $|A_1 B| = 0$. סה"כ $|A||B| = |0||B|$. ■

טענה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A הפיכה אמ"מ $|A| \neq 0$.

הוכחה. נציב את A באמצעות $A = \prod E_i \cdot A'$ עבור A' קאנונית...

$$|A| \neq 0 \iff |\prod E_i||A'| \neq 0 \iff |A'| \neq 0 \iff A' = I \iff \text{הפיכה } A$$

■

משפט. $|A|=|A^T|$.

הוכחה. נפרק כרגיל ל־$A=\prod E_i\cdot A'$. אם A לא הפיכה, אז $\det A=0$ וגם A^T לא הפיכה כלומר $\det A^T=0$ ואכן $\det A=\det A^T$. אחרת, $A'=I$. נראה ש־$E_i=E_i\cdot t$ לכל i. עבור הכפלת שורה בסקלר [רק פילוג למקרים שאין לי כוח להעתיק]. ■

הגדרה. יהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נניח $1\le i,j\le n$. אז המינור A_{ij} או $M_{ij}(A)$ היא המטעיצה המתקבלת מ־A ע"י מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

משפט. קיימת פאקינג דטרמיננטה.

הוכחה. נוכיח ש־:

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{n+j}\alpha_{nj}\right)|A_{nj}|=:\mathrm{dn}$$

(הערה: A_{nj} הוא המינור ו־α הקורדינאטות) נראה שאכן dn היא דיטרמיננה לכל n. נוכיח באינדוקציה. **בסיס.**

1. $|I|=1$. $|A|=1 \implies AI...$ $\iff a_{11}=1$
2. מולטי־ליניאריות. אפשר לעשות על דף.
3. שתי שורות שוות גורר דט' הפיכה. לא קיים, באופן ריק.

צעד.

1. $|I|=1$. נראה שאם $A=I_n$ אז $|A|=1$

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

נשים לב שעבור $j\neq n$ נקבל שב־A_{nj} יש שורת אפסים. זאת כי "העפנו" 2 איברי ספותחים אבל יש יותר שורות מאיברים פותחים. אזי יש שורת אפסים. לכן נקבל שהלעיל שווה ל־$(-1)^{n+n}a_{nn}|A_{nn}|$. בגלל ש־$a_{nn}=1$ ובאינדוקציה $A_{nn}=1$, וסה"כ נקבל שוויון ל־1.

2. מולטי־ליניאריות. ספוילר, עומד להיות כיף.

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha\alpha_{il}+\beta\beta_{i1} & & \alpha_{in}+\beta\beta_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{ni} & & \alpha_{ni}\end{vmatrix},\left(\alpha_{11}\quad\right)$$

■