

חדו"א 1 -- תרגיל 9

1. נגדיר את הפונקציה הבאה: $(\alpha, \beta \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של α, β הפונקציה $f(x)$ רציפה/גזירה/רציפות/גזירה פעמיים בנקודה 0.

הערה: פונקציה נקראת גזירה ברציפות אם היא גזירה והנגזרת היא פונקציה רציפה.

2. נתונה פונקציה גזירה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) אם f מחזורית עם מחזור T גם f' מחזורית עם מחזור T .

(ב) אם f זוגית אז f' אי זוגית.

3. הוכיחו כי $(x^n \log x)^{(n)} = n! (\log x + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n})$ לכל $x > 0$ ו $n \geq 1$.

4. הפריכו את הטענה הבאה: אם $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה גזירה, אז f' רציפה ב- (a, b) .

5. הוכיחו כי למשוואה $x = \cos x$ יש בדיוק פתרון ממשי אחד.

6. נתונה פונקציה $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $|f(x)| \leq |\tan x|$ לכל $x \in [-1, 1]$ אזי f פונקציה גזירה ב 0.

(ב) אם $|f(x)| \leq |\cos x - 1|$ לכל $x \in [-1, 1]$ אזי f פונקציה גזירה ב 0.