גרפים 3 $\sim$ נטלי שלום $\sim$ קשירות, עצים

פרץ שחר

24 ליוני 2024

1 תזכורות

- גרף מסמנים ב־$G = \langle V, E \rangle$
- $d(v)$ היא הדרגה של קודקוד v.
- מסלול מקודקוד a ל־b הוא סדרה של קודקודים $\langle v_0, \dots v_m \rangle$ כך ש־$v_0 = a, v_m = b$ וכך ש־:

1. בין קל שני קודקודים עוקבים סדרה, יש קשת, כלומר $\forall 0 \leq i < m . \{v_i, v_{i+1}\} \in E$
2. אין קשת שחוזרת פעמיים, כלומר $\forall i \neq j . \{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$. קודקוד יכול לחזור פעמיים.

- אורך של מסלול, הוא מס' הקשתות שבו. בפרט, סדרה באורך 1 היא מסלול באורך 0.
- מעגל: מסלול $v_0, \dots v_m$ שבו $v_0 = v_m$ ו־$m > 0$, נקרא מעגל.
- מסלול פשוט, הוא מסלול שבו שעל הצמתים שונים זה מזה.
- מעגל פשוט, הוא מסלול שבו כל הצמתים שונים זה מזה, פרט לכך שהראשון והאחרון זהים.

1.1 תרגיל

נתון גרף $G = \langle V, E \rangle$ כך שהדרגה של כל קודקוד היא לפחות $d \geq 2$, ונתון $|V| \leq d^2 - d$. הוכיחו, שיש ב־G מעגל באורך 4.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים G כזה ללא מעגלים באורך 4. יהי $v \in V$, אז קיימים לו לפחות d שכנים, נסמן d מתוכם: $A = \{u_1, \dots, u_d\}$. נבחין בכמה דברים:

- לכל שני שכנים u_i, u_j של v, לא ייתכן קיום שכן משותף שאינו v, כי אחרת, אם היה קיים w כזה, אז קיים מעגל באורך 4 שהוא v, u_i, w, u_j, v.
- כל u_i הוא שכן של לכל היותר מקודקוד אחד ב־A, כי אם u_i שכן של u_j, u_k ($i \neq j \neq k$) אז נקבל מעגל v, u_j, u_i, u_k, v.

לכן, לכל שכן של v יש לפחות $d - 2$ שכנים שאינם v. נקבל:

$$|V| \geq \underbrace{1}_{\text{הקודקוד } v} + \underbrace{d}_{A} + \underbrace{d}_{A} + \underbrace{d(d-2)}_{\text{השכנים של } A \text{ ללא } v \text{ ו־} A} = d^2 - d + 1$$

סה"כ סתירה לחסם $|V| \leq d^2 - d$. ■

2 קשירות

הגדרה: יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף. נגדיר יחס $\sim$ מעל V באופן הבא: $\forall a, b \in V . a \sim b \iff$ קיים מסלול בין a ל־b.

טענה: $\sim$ יחס שקילות מעל V.

הוכחה (קצת מעפנה). רפלקסיביות, סימטריות - "קל".

טרנזיטיביות: לא טרוויאלי. הבעיה: קשתות שיעשו overlapping. הוכחה לא קונסטקטיבית: על בסיס קיום הילוך ידוע קיום מסלול פשוט ביניהם, בלי לבנות את המסלול. הוכחה קונסטרקטיבית:

יהי $b = v_0, \dots v_m = a$, $b = u_0, \dots u_k = c$. ניקח את הקודקוד הראשון ב־$v_0, \dots v_m$ כך שקיים $0 \leq j \leq k$ שמופיע גם ב־$u_0, \dots u_k$. נניח שהוא $v_i = u_j$, אז ניקח את המסלול $v_0, \dots v_i, u_{j+1}, \dots, u_k$. ■

הגדרה: כל מחלקת שקילות ביחס $\sim$ מעל V, נקראת רכיב קשירות.

הערה: מספר רכיבי הקשירות בגרף הוא תכונה שנשמרת תחת איזומורפיזם.

הגדרה: גרף נקרא קשיר (connected) אם יש בו רכיב קשירות יחיד.

כלומר, גרף הוא קשיר אם בין כל שני קודקודים בו קיים מסלול.

הערה: כל מחלקת שקילות (כל רכיב קשירות) הוא תת־גרף קשיר של הגרף המקורי.

משפט: בגרף קשיר, בין כל שני קודקודים קיים מסלול פשוט. (הוכחנו, בשיעור הקודם, טענה האומרת שאם יש מסלול בין שני קודקודים אז יש מסלול פשוט ביניהם).

תזכורת: הגרף המשלים של $G = \langle V, E\rangle$ הוא $\overline{G} = \langle V, \overline{E}\rangle$ כך ש־$\overline{E} = \mathcal{P}_2(V) \setminus E$.

משפט: לכל כרף $G = \langle V, E\rangle$, לפחות אחד מבין הגרפים $G, \overline{G}$ הוא קשיר.

הוכחה. אם G קשיר, סיימנו. לכן, נניח ש־G לא קשיר ונוכיח ש־$\overline{G}$ קשיר. יהיו $u, v \in V$. נוכיח שקיים ביניהם מסלול ב־$\overline{G}$. נפריד למקרים:

- אם היה קיים ביניהם מסלול ב־G, אז מאחר ש־G לא קשיר, אז קיים קודקוד a כך שאין מסלול ב־G בינו לבין u. ולכן גם אין מסלול ב־G בין a ל־v, ובפרט, הקשתות $\{a, u\}, \{a, v\}$ לא ב־G ולכן הן שייכות ל־$\overline{E}$, ואז נקבל שיש מלסול ב־$\overline{G}$ בין u ו־v: u, a, v.
- אם לא היה קיים מסלול בין u ל־v בגרף G: אז בפרט $\{u, v\} \notin E$ כלומר $\{u, v\} \in \overline{E}$ וסה"כ המסלול $\langle u, v\rangle$ הוא מסלול בין u ל־v.

סה"כ בין כל שני קודקודים ב־$\overline{G}$ יש מסלול ולכן הוא קשיר. ■

משפט: (מספר הקשתות המינימלי בגרף קשיר) עבור G גרף קשיר, מתקיים $|E| \geq |V| - 1$.

הערה: ההפך לא נכון.

אינטואיציה: נרצה לחבר אותם בקו ישר.

הוכחה. לשם ההוכחה, נרצה נראה שתי למות (טענת עזר, שהיא לא ממש משפט):

- **למה 1.** בגרף קשיר שבו $|E| < |V|$ ו־$|V| \geq 2$, קיים קודקוד מדרגה 1.

הוכחה של למה 1. דרגה 0 לא תיתכן כי אז יהיה קודקוד מבודד [=קודקוד ללא שכנים] ואז לא יהיה מסלול בינו לבין יתר הקודקודים. לכן, אם נניח בשלילה שלא קיים קודקוד מדרגה 1, אז כל הקודקודים מדרגה לפחות 2. ואז:

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 2 \cdot |V| \implies |E| \geq |V|$$

וזו סתירה לנתון $|E| < |V|$. ■

- **למה 2.** אם מסירים מגרף קשיר צומת [=קודקוד] בעל דרגה 1 [כנכן צומת זה זכר] ואת הקשת שנוגעת בו, אז הגרף נישאר קשיר.

הוכחה של למה 2. יהי $G = \langle V, E\rangle$ קשיר, $u \in V$ קודקוד מדרגה 1, ונסיר אותו. עלינו להוכיח שתת הגרף על $V \setminus \{u\}$ קשיר. יהיו $x, y \in V \setminus \{u\}$. מאחר ש־$G$ קשיר, היה ביניהם מסלול ב־G. לא ייתכן שהמסלול הנ"ל עבר ב־u מכיוון שהיינו אמורים לחזור פעמיים על אותה הקשת היחידה שיוצאת מ־u. ■

נעבור להוכחת המשפט (יאי □). נוכיח באינדוקציה על $n = |V|$.

- **בסיס:** בעבור $n = 1$ מתקיים $|E| = 0 \geq |V| - 1 = 0$
- **צעד:** נניח שהטענה נכונה עבור $n - 1$, כלומר שבגרף קשיר על $n - 1$קודקודים מתקיים שמספר הקשתות הוא לפחות $n - 2$. נוכיח עבור n. יהי G גרף קשיר על n. נניח בשלילה שיש בו $|E| \leq n - 2 < n = |V|$. לפי למה 1, קיים בו צומת מדרגה 1. לפי למה 2, נוכל להסיר אותו, ולהיוותר עם גרף קשיר. נקבל גרף קשיר עם $n - 1$ קודקודים שבו $|E| \leq n - 3$, לכן, מהנחת האינד', נקבל סתירה, שהרי $|E| \geq n - 2$.

סה"כ הטענה הוכחה. ■

3 עצים

הגדרה: עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.

הגדרה: יער הוא גרף ללא מעגלים.

הגדרה: עלה הוא צומת ביער בעל דרגה 1.

משפט: (מספר הקשתות המקסימלי ביער) בגרף חסר מעגלים בעל n צמתים, יש לכל היותר $n - 1$ קשתות. כלומר $|E| \leq |V| - 1$.

הערה: ההפך לא נכון.

הוכחה. לצורך הוכחת המשפט, נראה למה.

למה 3. אם מסירים קשת מגרף חסר מהגלים, אז מספר רכיבי הקשירות בגרף גדל [בדיוק באחד, אך לא נצטרך להוכיח זאת]. "אני לא רושמת את ההוכחה" (tbh זה יחסית קל)

נעבור להוכחת המשפט. באינדוקציה על $n = |V|$:

- בסיס: עבור $n = 1$, יתקיים $|E| = 0 \leq |V| - 1 = 0$.

- צעד: נניח שהטענה נכונה עבור כל $1 \leq k < n$, ונוכיח עבור n. יהי G גרף חסר מעגלים על n צמתים. נסיר ממנו את הקשת $\{x,y\}$. לפי למה 3, מספר רכיבי הקשירות (אותו נסמן ב־t) לאחר ההסרה גדל, כלומר $t \geq 2$. נסמן את רכיבי הקשירות של G לאחר הסרת הקשת ב־$G_i = \langle V_i, E_i \rangle$ עבור $1 \leq i \leq t$. כל רכיב קשירות מקיים $|V_i| < |V| = n$, והוא חסר מעגלים. לכן, מה"א $|E_i| \leq |V_i| - 1$. לכן, מספר הקשתות בגרף המקורי, (לפני ההסרה של x, y) הוא:

$$|E| \leq \underbrace{1}_{\{x,y\}} + \sum_{i=1}^{t} |E_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} |V_i| - 1 = 1 - t + \underbrace{\sum_{i=1}^{t} |V_i|}_{|V|} \underset{t \leq 2}{\leq} |V| - 1$$

■