מתמטיקה B ~ תרגיל בית 1 ~ מרוכבים וגבולות

שחר פרץ

2 ביוני 2024

1

צ.ל. לחשב את המספר המרוכב הבא:

$$
\begin{aligned}
&2i(i-1)+\overline{(\sqrt{3}+i)}^3+(1+i)\overline{(1+i)} \\
=&-2-2i+(\sqrt{3}-i)^3+1^2+1^2 \\
=&-2-2i+(3-2\sqrt{3}i-1)(\sqrt{3}-i)+2 \\
=&-2-2i+3\sqrt{3}-6i-\sqrt{3}-3i-2\sqrt{3}+i+2 \\
=&\boldsymbol{-10i}
\end{aligned}
$$

2

1. $\ell et\ a+bi=z$

$$
\begin{aligned}
& & z^2\bar{z} &= z \\
&\iff & z\cdot z\bar{z} &= z \\
&\iff & z\cdot(a^2+b^2) &= z \\
&\iff & a(a^2+b^2)+bi(a^2+b^2) &= a+bi \\
&\iff & \begin{cases} a(a^2+b^2)=a \\ b(a^2+b^2)=b \end{cases} &\iff a^2+b^2=1 \lor a,b=0 \\
&\iff & \boldsymbol{b} &\boldsymbol{=\pm\sqrt{1-a^2},\ \lor a,b=0}
\end{aligned}
$$

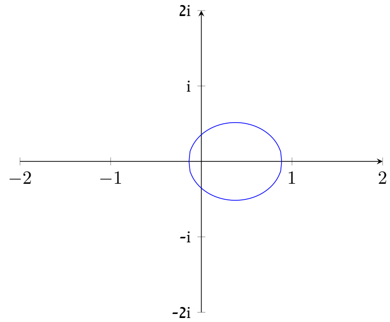
2. $\ell et\ a+bi=w$

$$
\begin{aligned}
|3w+1| &= |w| \\
|3(a+bi)+1| &= |a+bi| && \text{by definition} \\
\sqrt{(3a+1)^2+(3b)^2} &= \sqrt{a^2+b^2} && ()^2 \\
9a^2+6a+1+9b^2 &= a^2+b^2 && -a^2-9b^2 \\
8a^2+6a+1 &= -8b^2 && \cdot\tfrac{1}{-8} \\
b^2 &= -\frac{8a^2+6a+1}{8} && \sqrt{\ } \\
\boldsymbol{b} &\boldsymbol{=\pm\sqrt{-\frac{8a^2+6a+1}{8}}}
\end{aligned}
$$

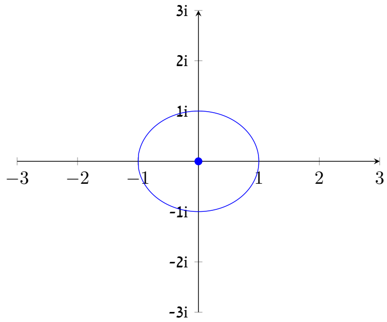
נסרטט:

המשך בעמוד הבא

סעיף 1



סעיף 2



3

$$\begin{array}{rl} & x^2 \quad - 4x \quad + 2 \\ x^2+3x-5 \;\; / & x^4 - x^3 \; - 15x^2 + 16x + 6 \\ & (-)\; x^2 + 3x^3 - 5x^2 \\ \hline & - 4x^3 - 10x^2 + 16x \\ & (-) \quad - 4x^3 - 12x^2 + 20x \\ \hline & + 2x^2 \quad - 4x \quad + 6 \\ & (-) \quad + 2x^2 \quad + 6x \quad - 10 \\ \hline & - 10x + 16 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^4 - x^3 - 15x^2 + 16x + 6}{x^2+3x-5} = x^2 - 4x + 2 + \frac{-10x+16}{x^2+3x-5}$$

4

יהי $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, בעבור $r, \in \mathbb{R}$.

(א) צ.ל. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) =: z_n$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה. בסיס: בעבור $n = 1$ יתקיים $z_1 = z = z^1$ וסה"כ הוכח השוויון כדורש.

צעד: יהי $n \in \mathbb{N}$, נניח באינדוקציה נכונות בעבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{n+1}\big((\cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta) + (\cos\theta\sin n\theta + \cos n\theta\sin\theta)i\big) \\ &= r^{n+1}\Big(\quad (0.5(\cos(\theta - n\theta) + \cos((n+1)\theta)) - 0.5(\cos(\theta - n\theta) - \cos((n+1)\theta))) \\ &\qquad + \big(0.5(\sin((n+1)\theta) - \sin(\theta - n\theta)) \; + 0.5(\sin((n+1)\theta) - \sin(\theta - n\theta))\big) \Big) \\ &= r^{n+1}\big(0.5(2\cos(n+1)\theta) + 0.5(2\sin((n+1)\theta))i\big) \\ &= r^{n+1}(\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta) \end{aligned}$$

כדרוש. בכך, צעד האינדוקציה הושלם, והטענה הוכחה. ■

(ב) נחשב את $(1+\sqrt{3}i)^{2024}$. נתבונן בוקטור $(1,\sqrt{3})$ ונפרק אותו לגורמים; נוציא $\theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arctan 3^{0.5} = \frac{\pi}{3}$. ממשפט פיתגורס האורך $r = \sqrt{1+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$. סה"כ $r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{3}$. נציב:

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3}i)^{2024} &= \left[2\left(\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{2024} && (1) \\ &= 2^{2024}\left(\left(\cos\left(2024\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\left(\sin\left(2024\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) && (2) \\ &= 2^{2024}\left(\cos\left(674\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(674\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2^{2024}\Big(-0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) && (3) \\ &= 2^{2023}(-1+\sqrt{3}) \approx -9.631\cdot 10^{608} + 1.668\cdot 10^{609} && (4) \end{aligned}$$

(ג) נגדיר ששורש יחידה מסדר n הוא פתרון $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^n = 1$. צ.ל. $\mathcal{A} = \{1, u, u^2, \dots, u^{n-1}\}$ האי קבוצת כל שורשי היחדיה מסדר n, כאשר $u = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

הוכחה. בכלליות, נוכל להגיד $\mathcal{A} = \{u^k \mid k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}\}$, ונצטרך להוכיח שזו קבוצת כל שורשי היחידה. ניעזר בהכלה דו כיוונית.

- יהי $z \in \mathcal{A}$, נוכיח $z^n = 1$. מעקרון ההפרדה קיים $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k < n$ כך ש־$z = u^k$. מהטענה שהוכחה בסעיף (א), נקבל:

$$z = u^k = 1^k\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

ולפי אותה הטענה:

$$z^n = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i = 1$$

כאשר הטענה האחרונה לפי המחזוריות של $\sin, \cos$ כל 2π.

- מהכיוון השני, יהי $z^n = 1$ ובה"כ נסמן $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (זיווג למערכת פולארית), נוכיח $a \in \mathcal{A}$. מהטענה שהוכחה סעיף (א):

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1 + 0i \implies \begin{cases} r^n\cos n\theta = 1 \\ r^n\sin n\theta = 0 \implies \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

משום ש־$\sin n\theta = 0$ ומהמחזוריות של $\sin$, נקבל שבהכרח $n\theta = k2\pi$ עבור $k \in \mathbb{N}$. נחלק ונקבל $\theta = \frac{2\pi k}{n}$. נותר להוכיח כי $r = 1$. מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$r^n\cos n\theta = 1 \implies r^n\cos n\frac{2\pi k}{n} = 1 \implies r^n\cos 2\pi k = 1 \implies r^n \cdot 1 = 1 \implies r^n = 1 \implies r = 1$$

כאשר הפעולה האחרונה היא העלה בחזקת $()^{\frac{1}{n}}$, שחוקית בגלל עולם דיון ממשי חיובי.

רק, נעיר שנוכל להשתמש ב־$0 \le k \le n-1$ בכלל המחזוריות של הפונקציות הטריגונומטריות.

■

(ד) נרצה לחשב את סכום כל שורשי היחידה מסדר n:

$$z := \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\cos k\frac{2\pi}{n} + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin k\frac{2\pi}{n}$$

לפי הסכום $\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ שראינו בכיתה, נקבל:

$$\Im(z) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{2n}\right) - \cos\left((n-1+0.5)\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{2n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cancel{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n}}}{\sin\frac{\pi}{n}} = 0$$

ולפי הנוסחה $\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2} + \sin\left(\left(n+\frac{\theta}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ שהוצאתי מויקיפדיה אבל נראית מספיק דומה לזו שראינו בכיתה אז אניח שמותר לנו להשתמש בה:

$$\Re(z) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \sin\left((n-1+0.5)\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{2n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cancel{\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = 0$$

וסה"כ:

$$z = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}_i = \Re(z) + i\Im(z) = 0$$

המשך בעמוד הבא

5

נחשב את הגבולות שלהלן:

(א) משום שהפונקציה רציפה בנקודה $x=0$ (כי אין בה חור באותה הנקודה, והיא פונקציה רציונלית) אז:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{-1}=\mathbf{-1}$$

(ב) לכל $x>2$ יתקיים שערך הפונקצייה יהיה חיובי (משום ש־$\frac{1}{x-2}>0$ $\implies x-2>0 \implies x>2$) ולכן:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$$

(ג)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{x+\frac{3}{x}}=\frac{1-0}{\infty+0}=\mathbf{0}$$

(ד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x-1}{2x^3+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}=\mathbf{2.5}$$

(ה) משום שלכל $x>0$ יתקיים $\frac{x}{|x|}=1$, אז:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\mathbf{1.5}$$

6

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\\ =\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\sqrt{x+1}+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}\\ &=\lim_{x\to 64}\frac{x-64}{(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16)(x-64)}\\ &=\lim_{x\to 64}\frac{x-64}{48(x-64)}=\mathbf{\frac{1}{48}}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-3x+2}{(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1})(\underbrace{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}_{=4})}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{4(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1})}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{2(\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1})}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1}}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(-x+2)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{5x-1})}{2(4x+1-5x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{6(-x+2)}{2(-x+2)}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{-6x+12}{-2x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{-6\cancel{(x-2)}}{-2\cancel{(x-2)}}=\mathbf{3}\end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}) \\
=&\lim_{x\to\infty^+}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+1})\cdot\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1})}{(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1})} \\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
=&\frac{6}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \mathbf{3}
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-\frac{x^2}{x+3}\right) &&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3(x+3)-x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x+3)}\right) \\
=&\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4+3x^3-x^4+x^2}{x^3+3x^2-x-3}\right) &&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3+\cancel{\frac{1}{x}}}{1+\cancel{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}\right) = \mathbf{3}
\end{aligned}
$$

7

נתונה הפונקציה:

$$
f(x) = \begin{cases} f_1(x) := \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}, & x > 3 \\ f_2(x) := \dfrac{ax}{6}, & x \leq 3 \end{cases}
$$

צ.ל. לחשב את הערך של a עבורו הפונקציה הרציפה בכל תחום הגדרתה.

לכל $x > 3$, יתקיים שערך הפונקציה וגבולה יהיה $f_1(x)$, שהיא פונקציה המוגדרת לכל $x^2 - 9 > 0$, אי שוויון שיתקיים לכל $x > 3$ כי תחת הנתונים $x^2 - 9 > 0 \implies x^2 > 9$. כלומר, הפונקציה תהיה מוגדרת בכל תחום, והיא פונקציה רציונלית, כלומר רציפה בכל נקודה פרט לנקודות אי־ההגדרה שלה.

לכל $x < 3$, יתקיים שערך הפונקציה וגבולה יהי $f_2(x)$, שגם היא פונקציה רציפה באופן דומה.

עבור $x = 3$, יתקיים שערך הפונקציה יהיה $f_2(x) = \frac{ax}{6}$, אך גבולה יהיה שונה משני הצדדים. נדרוש, ששני הגבולות יהיו שווים לערכה בנקודה. מצד אחד:

$$
\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f_2(x) = f_2(x)
$$

כדרוש. מהצד השני:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f_2(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \\
=&\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \\
=&\lim_{x\to 3^+}\frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-3x+9}{8(x^2-9)} \\
=&\lim_{x\to 3^+}\frac{-3(x-3)}{(x+3)(x-3)8} = \lim_{x\to 3^+}\frac{-3}{(x+3)\cdot 8} = \frac{-3}{6\cdot 8} = -\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

נדרוש שוויון.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 3^+} f(x) \overset{!}{=} f(3) \implies \frac{1}{16} \overset{!}{=} \frac{3a}{6} \\
&\implies -0.375 \overset{!}{=} 3a \quad \implies \boldsymbol{a} \ \ \mathbf{= -\frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

סה"כ מצאנו ש־$a = -0.125$.