# לינארית 2א ~ תרגיל בית 1

שחר פרץ

6 בנובמבר 2025

## (1)

קריאת קבצי הנהלים במודל בלבד.

## (2)

עבור כל אחד מהקבוצות הבאות, נקבע אם היא תמ״ו של $\mathbb{R}^3$.

(א) $$A := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon \sqrt{2}x_1+\pi^3x_2-x_3=0\}$$

נוכיח ש־$A$ מ״ו. נוכיח סגירות לכפל ולחיבור. יהיו $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ וכן $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$. נסמן $x=(x_1,x_2,x_3)$ וכן $y=(y_1,y_2,y_3)$. נוכיח $\lambda_1x_1+\lambda_2y_2\in A$.

ידוע:

$$\begin{cases}\sqrt{2}x_1+\pi^3x_2-x_3=0\\ \sqrt{2}y_1+\pi^3y_2-y_3\ =0\end{cases}\implies\begin{cases}\lambda_1\sqrt{2}x_1+\lambda_1\pi^3x_2-\lambda_1x_3=0\\ \lambda_2\sqrt{2}y_1+\lambda_2\pi^3y_2-\lambda_2y_3\ =0\end{cases}\implies\sqrt{\lambda}_1x_1+\lambda_1\pi^3x_2-\lambda_1x_3+\sqrt{\lambda}_2y_1+\lambda_2\pi^3y_2-\lambda_2y_3=0$$

נצמצם ונקבל $\sqrt{2}(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1)+\pi^3(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)-(\lambda_1x_3+\lambda_2y_3)=0$, ולכן, $\lambda_1x+\lambda_2y=(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1,\lambda_1x_2+\lambda_2y_2,\lambda_1x_3+\lambda_2y_3)\in A$ כדרוש. ■

(ב) $$B := \{(x_1,x_2,0)\in\mathbb{R}^3\colon x_1^2-x_2=0\}$$

נוכיח ש־$B$ איננו מ״ו. נניח בשלילה ש־$B$ מ״ו. עבור $x=(1,1,0)$ מתקיים $1^1-1=0$ ולכן $x\in B$. מסגירות לכפל $2x\in B$ כלומר $2^2-2=0$. סה״כ $4=2$ וסתירה. ■

(ג) $$C := \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1+2x_2+3x_3=1\}$$

נוכיח ש־$C$ איננו מ״ו. עבור $x=:(1,0,0)$ מתקיים $1+2\cdot 0+3\cdot 0=1$ ולכן $x\in C$. נניח בשלילה ש־$C$ מ״ו, אזי מסגירות לחיבור $2x\in C$. כלומר $2=1$ וסתירה. ■

## (3)

תהיא $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ פונקציונל לינארי. נניח $f\neq 0$. נוכיח $\dim\ker f=n-1$.

הוכחה. תהי $f$ פונקציונל לינארי מרוכב מעל $\mathbb{C}^n$. ידוע $\operatorname{Im} f\subseteq\mathbb{C}$ ולכן $\dim\operatorname{Im}\le 1$. נפרק למקרים: אם $\dim\operatorname{Im}=0$ אזי $\operatorname{Im} f=\{0\}$ ואז $\forall v\in\mathbb{C}^n f(v)=0$ כלומר $f=0$ וסתירה. לכן $\dim\operatorname{Im} f=1$ בהכרח. ממשפט הממדים, $\dim\operatorname{Im} f+\dim\ker f=\dim\mathbb{C}^n=n$, נציב ונקבל $1+\dim\ker f=n$. נחסר אגפים, סה״כ $\dim\ker f=n-1$ כדרוש. ■

## (4)

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$.

(א) נניח $A$ מטריצה הפיכה, נוכיח $A^{-1}$ הפיכה.

הוכחה. מההנחה, קיימת $A^{-1}$ כך ש־$AA^{-1}=I$. מהיות ההופכי הימני והשמאלי זהים להעתקות לינאריות (משפט שהוכח בליני1), בהכרח $A$ ההופכי של $A^{-1}$, ולכן $A^{-1}$ הפיכה. ■

(ב) נניח $A,B$ הפיכות. נוכיח $AB$ הפיכה.

הוכחה. יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות. כלומר $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=n$. ממשפט האפסות של סילבסטר שהוכח בלינארית 1א בסמסטר הקודם, מתקיים:

$$\operatorname{rank}(AB)\geq \operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n=n+n-n=n$$

ידוע $\operatorname{rank}(AB)\leq n$, סה"כ $n\leq \operatorname{rank}(AB)\leq n$ כלומר $\operatorname{rank}AB=n$ וממשפט $AB$ הפיכה כדרוש. ■

(ג) נמצא $A,B$ הפיכות כך ש־$A+B$ איננה הפיכה.

דוגמה. בעבור $A=I, B=-I$, מתקיים $A,B$ הפיכות, ולכן $A+B=I-I=0$ ומטריצת האפס איננה הפיכה (כי $\operatorname{rank}0=0\neq n$ בהנחה שהממד איננו 0). ■

(ד) יהי $V$ מ"ו מממד $n$ ואכן $\mathcal{B},\mathcal{C}$ שני בסיסים שלו. תהי $f\colon V\to V$ העתקה לינארית. נוכיח ש־$f$ הפיכה אמ"מ $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ הפיכה.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ הפיכה.

- **חח"ע:** לכל $v\in\ker f$ מתקיים $f(v)=0$. נפעיל את $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ עד שני האגפים ונקבל $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{C}}=[f(v)]_{\mathcal{C}}=[0]_{\mathcal{C}}$ וידוע $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ הפיכה, כלומר מרחב האפסות שלה כולל את וקטור האפס בלבד. לכן $[v]_{\mathcal{C}}=[0]_{\mathcal{C}}$ כלומר $v=0$ מחח"ע $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ (שהוכחה בהמשך תרגיל הבית ללא תלות במשפט זה). סה"כ $\dim\ker f=0$ כלומר היא חח"ע.
- **על:** העתקה חח"ע ממרחב לעצמו היא בהכרח על, שכן $\dim\ker f=0$ וממשפט הממדים $\dim\operatorname{Im}f=n=\dim V=\operatorname{range}f$ כדרוש.

$\Longleftarrow$ נניח $f$ איזומורפיזם ונראה ש־$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ הפיכה. מהיותה איזומורפיזם, היא משמרת בסיס, ולכן $f(B)$ בסיס. המטריצה המייצגת $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=[f(B)]_{\mathcal{C}}$ כוללת שורות שהן בסיס שכן גם $[\cdot]_{\mathcal{C}}$ איזומורפיזם ולכן משמרת בסיס. מהיות שורות $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ בת"ל, ומשום שיש לה $n$ שורות ועמודות, אז $\operatorname{rank}[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=n$ כלומר היא הפיכה כדרוש.

■

## (5)

נגדיר $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, כך ש־$f(a,b)=ax^2-2b$.

(א) נוכיח ש־$f$ לינארית.

הוכחה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^2$. יהיו סקלרים $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. אזי קיימים $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ כך ש־$x=(a_1,b_1)$ ו־$y=(a_2,b_2)$. מכאן:

$$f(\lambda_1x+\lambda_2y)=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)x^2-2(\lambda_1b_1+\lambda_2b_2)=\lambda_1(a_1x^2-2b_1)+\lambda_2(a_2x^2-2b_2)=\lambda_1f(x)+\lambda_2f(y)$$

כדרוש. ■

(ב) יהיו $\mathcal{B},\mathcal{C}$ הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ בהתאמה. נמצא את $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

הוכחה.

$$[f(1,0)]_{\mathcal{C}}=[x^2]_{\mathcal{C}}=(0,0,1)$$
$$[f(0,1)]_{\mathcal{C}}=[-2]_{\mathcal{C}}=(2,0,0)$$

ומהגדרה:

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

■

(ג) עתה נמצא את $[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$ בעבור $\mathcal{B}'=((1,0),(1,1)),\mathcal{C}=(1,2x,x^2-1)$.

הוכחה.

$$[f(1,0)]_{\mathcal{C}}=[x^2]_{\mathcal{C}}=[1+(x^2-1)]_{\mathcal{C}}=(1,0,1)$$
$$[f(0,1)]_{\mathcal{C}}=[-2]_{\mathcal{C}}=(-2,0,0)$$

סה"כ מהגדרת מטריצה מייצגת:

$$[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

■

(ד) נסמן $v=(2,1)\in\mathbb{R}^2$. נמצא את $[v]_{\mathcal{B}'}$ ואת $[f(v)]_{\mathcal{C}}$ ונוודא שאכן מתקיים $[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}[v]_{\mathcal{B}'}=[f(v)]_{\mathcal{B}'}$.

הוכחה. נקבל בקלות $[v]_{\mathcal{B}'}=(1,1)$, וכן $f(v)=x^2-2$ כלומר $[f(v)]_{\mathcal{C}'}=(-1,0,1)$. ואכן:

$$[f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}[v]_{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=[f(v)]_{\mathcal{C}'}$$

■

## (6)

יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ונניח $\dim V=n$. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $V$. נוכיח שההעתקה $[\cdot]_{\mathcal{B}}\colon V\to\mathbb{F}^n$ היא איזומורפיזם.

הוכחה.

- **חח"ע:** יהיו $v\in\ker[\cdot]_{\mathcal{B}}$. אז $[v]_{\mathcal{B}}=0$. מהגדרת $[\cdot]_{\mathcal{B}}$, $v$ הוא קומבינציה לינארית של הבסיס $\mathcal{B}$ בעבור הסקלרים $0,0\ldots,0$. אך, $v=\sum_{i=0}^n 0\cdot b_i=\sum_{i=0}^n 0=0$ כלומר $v=0$ וסה"כ $\ker[\cdot]_{\mathcal{B}}=0$ כדרוש.
- **על:** יהי $v\in\mathbb{F}^n$. נסמן $v=(\lambda_1\ldots\lambda_n)$ וכן $\mathcal{B}=\{b_1\ldots b_n\}$. נקבל שמהגדרה $w=\sum_{i=0}^n\lambda_i b_i$ מקיים $[w]_{\mathcal{B}}=v$ ולכן $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ על כדרוש.

סה"כ היא חח"ע ועל וסיימנו. ■

## (7)

יהיו $B,C$ בסיסים של $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ הנתונים ע"י:

$$B=\{1-x,\,2-x,\,1-3x-x^2\},\quad C=\{1+x^2,\,x+x^2,\,x^2\}$$

נמצא את מטריצת המעבר $[I]^C_B$.

הוכחה. מהגדרה:

$$I=\begin{pmatrix}|&|&|\\ [C_1]_B&[C_2]_B&[C_3]_B\\ |&|&|\end{pmatrix}$$

נמצא את הוקטורים הדרושים.

$$C_1=1-x=1+x^2-(x+x^2)=B_1-B_2\implies [C_1]_B=(1,1,0)$$
$$C_2=2-x=2(1+x^2)-(x+x^2)-x^2=2B_1-B_2-B_3\implies [C_2]_B=(2,-1,-1)$$
$$C_3=1-3x-x^2=(1+x)-4(x+x^2)+3x^2\implies [C_3]_B=(1,-4,3)$$

כלומר:

$$[I]^C_B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&-4\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

■

## (8)

יהי $V$ מ"ו נוצר סופית. יהי $B$ בסיס של $V$ וכן $T\colon V\to V$ לינארית. נניח ש־$A\in M_n(\mathbb{F})$ מקיימת $A\sim B$. נוכיח שקיים בסיס $C$ כך ש־$A=[T]_C$.

הוכחה. ידוע קיום $P\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש־$[T]_B=PAP^{-1}$. לכן $A=P^{-1}[T]_BP$. ממשפט בליניארית 1א, קיים בסיס $C$ כך ש־$P=[I]^B_C$ (בהינתן בסיס, כל מטריצה הפיכה היא מטריצת מעבר בסיס ממנו לבסיס אחר). מכאן $P^{-1}=[T]^C_B$ וסה"כ:

$$A=P^{-1}[T]^B_BP=[I]^C_B[T]^B_B[T]^B_C=[T]^C_C=[T]_C\quad\top$$

■

**שחר פרץ, 2025**

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד