מתמטיקה B ~ עברי נגר ~ חקירה ~ סיכום חלקי

שחר פרץ

10 ליוני 2024

1 משהו קיצוני

נק' קיצון (לוקאלית): מינ'/מקס' **נק' סטציונרית:** $f'(x_0) = 0$ יתקיים קיצון גורר סטציונרית, אך לא להפך. לדוגמה:

$$f(x) = x^3, \; f'(0)$$

עוד דרך לבדוק את סוג הקיצון, הוא לבדוק בנגזרת השנייה. אם $f'(t) = 0 \wedge f''(t) > 0$, אז ב־$t$ נוכל לדעת שהנגזרת השנייה עולה, וסה"כ הנגזרת תהפוך משלילית לחיובית – כלומר, הפונקציה תהיה בעל מינימום לוקאלי ב־t. באופן דומה, אם $f''(t) < 0$ וגם $f'(t) = 0$ נקבל מקסימום לוקראלי. אלו תנאיים מספיקים, אך לא הכרחיים.

נוכל להתבונן גם בנקודות סטצ' ולא קיצון, בהן יתקיים $f'(t) = 0 \wedge f''(t)$, אך גם זה לא אמ"מ. לדוגמה, $g(x) = x^4$ אך $g'(0) = 0 \wedge g''(0) = 0$ למרות שיש ריצון בנקודה. כלומר, גם התנאים האלו הכרחיים אך לא מספיקים או הפוך או משהו כזה.

נק' קיצון לוקאלית של f' היא כזו שבה f'' משנה סימן = נק' פיתול. הנגזרת השנייה מתארת כמה מהר הפונקציה "מתעקמת". באנגלית, פיתול זה inflection.

סטצ' + פיתול = עוקף – saddle. (לא כל נקודות הפיתול הן סטציונריות).

1.1 סיכום

- סטצ' $\iff f'(t) = 0$
- קיצון לוקאלי $\iff$ סטצ' $\wedge$ הנגזרת משנה סימן (בהתאם לסוג הקיצון). $\implies$ לנגזרת השנייה סימן מתאים בנק'.
- עוקף $\iff$ סטצ' $\wedge$ לא קיצון $\iff$ סטצ' $\wedge$ הנגזרת לא משנה סימן $\impliedby f'' = 0$

1.2 הערות נוספות

- אם הפונקציה לא גזירה בנק' – צריך לבדוק ידנית. לדוגמה: $f(x) = \sqrt{|x|}$, שלא גזירה בנק' המינימום הלוקאלי $f(0)$.
- קצוות התחום – אוטומאטית קיצון. בדיקה ידנית גם־כן. לדוגמה: $g(x) = x, x \in [3, 5]$. יתקיים $f'(x) = 1$. כלומר אין מינ/מקס לוקאלי, אך קצוות התחום יהיו גם מינ/מקס לוקאלי. בעבור $g(x) = x, x \in (3, 5)$ אין שום מינ'/מקס – בכל נקודה שבה היא מוגדרת, קיים ערך אחר עבורו היא מוגדרת ויותר גדולה.
- קיצון גלובאלי – להשוות בין הלוקאלים + קצוות התחום (כולל ב־$\pm\infty$ + אסימפטוטות)

2 קופסא

<הכנס כאן ציור שצילמתי, כתבו לי אם אתם צריכים>. ננסה למצוא את הנפח המקסימלי. נקבל:

$$V(\ell) = \ell \cdot (4 - 2\ell)(3 - 2)$$
$$V'(\ell) = 12\ell^2 - 28\ell + 12$$
$$V(\ell) = 0 \iff \ell = \frac{7 + \sqrt{13}}{6} =: a_\pm$$

הנקודות הללו, עלולות להיות ריצון. תחום הפונקציה: $0 \le \ell \le \frac{3}{2}$ מתוך הגדרת התיבה. הוא גם ישלול את אחת מהתשובות. נתבונן בפרבולה מחייכת ונמצא כי a_- מקס' לוקאלי.

בשביל למצוא מקס' גלובלי נתבונן בערכה בשני קצוותיה. נחשב ונמצא ששניה שווים ל־0 וגם מינימום, כלומר $\ell = a_-$ יהיה המינימום המוחלט.

3 חקירה

תזכורת: חקירה, כוללת:

1. תחום הגדרה
2. נק' חיתוך עם הצירים
3. תחומי חיוביות/שליליות
4. מציאת נקודות סטציונריות, וסיווגן, וקיצון בקצוות התחום
5. תחומי עלייה וירידה
6. אסימפטוטות וגבולות
   - נק' פיתול
   - עוקף
   - קעירות/קמירות
   - זוגיות
   - קיצון גלובאלי
7. סרטוט

כאשר מה שמסומן ב־[-] לא חובה בהכרח, ותלוי במה שמבקשים.

המלצה לחקירה: (ואולי קצת בכללי) לסמן באותיות דברים. לדוגמה, כאשר בודקים חיתוך עם הצירים, לבדוק עבור $f(t)=0$ ולא $f(x)=0$.
<עברי עשה דוגמה של חקירה אבל אני באמת לא חשוב שיש טעם להראות את זה>

4 חוק סנל

אסור להתשמש בכלל לופיטל בש.ב.

נניח שהמרחב מחולק לשני תחומים. "פה זה חול ופה זה ים". בנקודה B, בים, יש מישוה שטובע. אנחנו נמצאים בנק' A בחול. המרחק בין B לקו החוף הוא ℓ_2, בינינו לבין החוף ℓ_1 ובין שני האנכים לקו החוף d. אנחנו רוצים לשדוד לו את הכיסים לפני שהוא מת. אנחנו רצים ב־v_1 ורצים ב־v_2. המרחק ממנו נחתוך לים, יהיה x. לפי פיתגורס: (כאשר L זה דרך ו־T זמן)

$$L(x)=\sqrt{\ell_2^2+x_2}+\sqrt{\ell_1^2+(d-x)^2}$$

$$T(x)=\frac{\sqrt{\ell_2^2+x^2}}{v_2}+\frac{\sqrt{\ell_1^2+(d-x)^2}}{v_1}$$

יהיה יותר נוח לפתור את זה עם טריגו. נצטרך לעשות את זה בשיעורי הבית.