אלגברה לינארית 2א - תרגיל 11

1. רשמו את הפירוק הפולרי של המטריצות הבאות.

   (א) $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}11 & 17\\ -23 & 19\end{pmatrix}$.

   (ב) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\sqrt{3}\\ 5\sqrt{3} & 7\end{pmatrix}$.

2. תהי $N\in M_n(\mathbb{R})\subseteq M_n(\mathbb{C})$ נורמלית, הפיכה, וממשית. יהי

$$N=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^*$$

לכסון אוניטרי שלה כמטריצה מרוכבת. מצאו את הפירוק הפולארי של N. שימו לב להוכיח שהמטריצות שמתקבלות בפירוק שרשמתם אכן ממשיות.

3. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $A=UP$ הפירוק הפולארי שלה (U אוניטרית, P מוגדרת חיובית). הראו כי $A^2=U^2P^2$ (ואז זהו הפירוק הפולארי של A^2) אם ורק אם A נורמלית.

4. נזכר שבהינתן פולינום מתוקן $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$ עם מקדמים ב $\mathbb{F}$ הגדרנו את המטריצה המצורפת ע"י

$$A_f=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -a_2\\ & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

   (א) תהי $T:V\to V$ ט"ל ו $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V כך ש $[T]_B=A_f$. הראו כי $T^i(v_1)=v_{i+1}$ לכל $i<n$.

   (ב) הוכיחו כי $f(T)=0$ (הדרכה: הראו כי $f(T)v_1=0$ וע"י הפעלת T הסיקו כי $f(T)v_i=0$ לכל i).

   (ג) יהי $g(x)$ פולינום ממעלה נמוכה מn. השתמשו בסעיף א' כדי להראות ש $g(T)v_1\neq 0$ והשתמשו בכך כדי להראות ש $g(T)\neq 0$.

5. יהי F שדה ויהי V מ"ו מעל F. תהי $T:V\to V$ נילפוטנטית.

   (א) תהי $I:V\to V$ העתקת הזהות ויהי $0\neq\alpha\in F$. הראו כי $\alpha\cdot I+T$ הפיכה (רמז: טור טלסקופי).

   (ב) תהי $f\in F[x]$. הראו כי $f(T)$ הפיכה אסם $f(0)\neq 0$.

   (ג) נניח כי $f(0)\neq 0$. הראו כי קיים $g\in F[x]$ כך ש $f(T)g(T)=I$.