לינארית 1א 2

שחר פרץ

19 במרץ 2025

DALIT STUFF . . . (1)

לגבי סוף השנה. בסוף יוני נגמר הסמסטר – יהיה מפגש, בהתחלה לבדנו ולאחר מכן עם ההורים. נדבר על המשמעות של בניית תוכנית אישית. בלי קשר דאי לקרוא את התוכנית של מדמח באינטרנט. נדייק כל אחד בפוקוס ואת התוכנית. בתוך המסלול הנוכחי אי אפשר להתקדם מעבר לשנה ב' ואי אפשר לסיים תואר. זהו אינו מסלול אקדמי והוא אינו משוייך לשום פקולטה או תואר.

נצטרך להגיע למצב בו מי שחושב או רוצה להתקדם לתוא רבהמשך (אף רחוק) צריך להיות בתוך מסלול המאפשר את זה. ישנו דבר שרלוונטי לנו (בדגש – יתכנו שינויים) והוא מסמך מסודר שכולל את התאריכים והדברים שנדרשים לקבלה למסלול לתואר. התוכנית אודיסאה כמו עסקת חבילה – כוללת את התוכן למעבר למסלול אקדמי והמרה. הדרישה – כל הציונים עוברים והממוצע מעל 85. צריך לעשות את כל הקורסים. בדיקת האפשרות להליך קבלה תדרש מסוף כיתה י"א. הציונים צריכים להיות טובים. כרגע בכל מקרה אין אופציה להצטיינות דיקן ולכן זה לא משנה שעושים מועדי ב' (בהנחה שהציונים טובים). לכן יש משמעות לכל רגע שאנחנו כאן. על כן לא תתאפשר הגעה באיחור וכו', ואם תהיה טיילת יהיה קשה ללמד.

אחרי שנפגש ביחד (כל השנה), כל מסלול (בנפרד), נפגש כל אחד עם ההורים (זאת לאחר מועדי א' אב', סוף אוגוסט או תחילת ספטמבר). נדבר גם על דו־חוגי (כמו מיכאל שרוצה לשלב מדמח עם הנדסת חשמל), ונבין איך מייצרים תוכנית שנוכל להתמודד איתה ולשמור על ההשגים, נוכל לבצעה במקביל לתיכון ותמלא את דרישותנו.

צריך ממוצע מעל 90 בשביל לקבל אישורים לחדו"א 2. כל עוד לא גומרים חדו"א – אין אפשרות לרוץ על קורסים בפקולטה. אבל "טכנית אפשר הכל" אז אני אופטימי.

ACTUAL LINEAR ALGEBRA . . . (2)

הגדרה. יהי $T\colon V\to V$ א"ל, נניח $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע, אז המרחב העצמי (מ"ע) של λ הוא:

$$V_\lambda := \{v\in V \mid Tv=\lambda v\}$$

טענה. V_λ תמ"ו של V. ראה תרגול.

הגדרה. יהי $T\colon V\to V$ א"ל, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של T. נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של λ (ביחס ל־T) הוא $\dim V_\lambda$.

[מספר דוגמאות שראינו בתרגול].

דוגמה. יהי V מ"ו ממימד n, $T\colon V\to V$ א"ל. נניח קיו ם$v\in V$ המקיים $T^nv=v$, ו־$\{v,Tv,T^2v,\dots,T^{n-1}v\}$ בסיס של V. ננסה להבין מהם הע"ע.

יהי $0\neq u\in V$ ו"ע כך ש־$Tu=\lambda u$. נראה כי $T^nu=u$. ידוע קיום $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{F}$ כך ש־$u=\sum\alpha_iT^i(v)$. אז:

$$\lambda^nu=T^n(u)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\underbrace{T^{n+i}(v)}_{=T^i(T^nv)=T^iv}=u$$

ננסה להבין מי הם הוקטורים העצמיים. הם שורשי היחידה. זה תלוי שדה.

משפט. תהי $T\colon V\to V$ א"ל, ונניח $A\subseteq V$ קבוצה של ו"ע של T עם ע"ע שונים, אז A בת"ל. הוכחה בתרגול.

הגדרה. יהי $T\colon V\to V$ א"ל. נאמר ש־T ניתן לכסון/לכסין אם קיים ל־V בסיס של ו"ע של T.

מסקנה. אם $\dim V=n$ ול־T יש n ע"ע שונים אז T לכסין.

הערה. שימו לב – ייתכן מצב בו קיימים פחות מ־n ע"ע שונים אך T עדיין לכסין. דוגמה: $id, 0$

מסקנה. תהי $T\colon V\to V$ א"ל. נניח שלכל λ ע"א, ישנה $B_\lambda\subseteq V_\lambda$ בת"ל. אז $B=\bigcup_\lambda B_\lambda$ בת"ל.

הוכחה. [הערה: ההוכחה הזו עובדת בעבור ההכללה לממדים שאינם נוצרים סופית]. ניקח צ"ל כלשהו שווה ל־0:

$$\begin{aligned}\sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i = 0 \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_i} \alpha_i v_{\lambda,i} \\ &\implies \sum_{\lambda_j} \alpha_i v_{\lambda_{ji}} =: u_j \in V_{\lambda_j} \\ &\implies \sum_j u_j = 0\end{aligned}$$

קיבלנו צירוף ליניארי לא טרוויאלי של איברים במ"ע שונים (=עם ע"א שונים). אם אחד מהם אינו 0, קיבלנו סתירה למשפט. סה"כ קיבלנו שלכל j מתקיים $\sum \alpha_{ji} v_{ji} = 0$. בגלל ש־$v_{ji} \in B_j$ אז בת"ל ולכן כל הסקלרים 0. ■

מסקנה. יהי $T\colon V \to V$ א"ל כך ש־$\dim V = n$. אז:

$$\sum_{\lambda} \dim V_{\lambda} \le n$$

שוויון אמ"מ T לכסין.

הוכחה. לכל λ יהא B_λ בסיס. אז $B = \sum_\lambda B_\lambda$ בת"ל. אז $n \ge |B| = \sum_\lambda \dim V_\lambda$.
אם T לכסין אז קיים בסיס של ו"ע כך שאכל אחד מהם מבין V_λ ושוויון.
מצד שני, אם יש שוויון אז B קבוצה בת"ל של n ו"ע ולכן בסיס ולכן T לכסין. ■

THE SAME STUFF JUST FOR MATRIXES .... (3)

הגדרה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש־$0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ הוא ו"ע של A עם ע"ע λ אם $Av = \lambda v$.

משפט. תהי $T\colon V \to V$ א"ל ויהי B בסיס סדור, ו־V נוצר סופי (לעיתים יקרא: סוף־ממדי). נניח $A = [T]_B$. אז $v \neq 0$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ אמ"מ $[v]_B$ וקטור עצמי של A עם ע"ע λ.

הוכחה. גרירה דו־כיוונית. נניח V ו"ע של T. אז $A[v]_B = [Tv]_B = [\lambda_v]_B \lambda [v]_B$. מהכיוון השני "לכו הפוך". ■

הגדרה. מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תקרא לכסינה/נתנת ללכסון אם היא דומה למטריצה אלכסונית $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית כך שקיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה שעבורה $\Lambda = P^{-1}AP$.

משפט. יהיו $A, P \in M_n(\mathbb{F})$. נניח P הפיכה. אז אם $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ אמ"מ עמודות P הן ו,ע של A עם ע"ע $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ בהתאמה.

הוכחה. נסמן $P = (P_1 \ldots P_n)$. אז:

$$AP = (AP_1 \ldots AP_n) = (\lambda_1 P_1 \ldots \lambda_n P_n) = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

ולכן:

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\Lambda$$

ההוכחה מהכיוון השני היא לקרוא את זה מהצד השני. ■

"אני מקווה שראיתם שכפל באלכסונית מתחלפות". "אני אמרתי שטות". $\sim$ בן

3.1 Characteristic Polynomial

תרגיל. תהי $A=\begin{pmatrix}-7&8\\6&7\end{pmatrix}$. מצאו ו"ע וע"ע של A ולכסנו אם אפשר.

פתרון. מחפשים $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\neq$ ו־$\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש־:

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\lambda I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
\lambda I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=0\\
(\lambda I-A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=0
\end{aligned}
$$

סה"כ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ו"ע עם ע"ע λ אמ"מ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\ker(\lambda I-A)$, אמ"מ $\lambda I-A$ לא הפיכה, אמ"מ $\det(\lambda I-A)=0$ (AKA "הפולינום האופייני"). במקרה הזה:

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+7&-8\\-6&\lambda-7\end{pmatrix}\implies\det(\lambda I-A)=(\lambda+7)(\lambda-7)=\lambda^2-1$$

לכן הע"ע הם ±1. נמצא את הו"ע. עבור $\lambda=1$, מתקיים:

$$\begin{pmatrix}8&8\\-6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

יש לנו חופש בחירה (ופתרון יחיד עד לכדי כפל בסקלר). במקרה הזה, נבחר $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda=-1$, יתקיים:

$$\begin{pmatrix}6&8\\-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\Longleftarrow b\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

ראינו שהמלכסנת היא העמודות של הו"ע. אז:

$$P=\begin{pmatrix}1&4\\-1&-3\end{pmatrix}$$

וסה"כ $P^{-1}AP=I$. מכאן צריך למצוא את P^{-1}.

משפט. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אז $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של A אמ"מ $|\lambda-A|=0$.

הגדרה. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. הפולינום האופייני של A מוגדר להיות:

$$f_A(x)=|xI-A|$$

משפט. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אז $f_A(x)$ הוא פולינום מתוקן [=מקדם מוביל הוא 1] ממעלה n, המקדם של x^{n-1} הוא $-\operatorname{tr}A$ והמקדם החופשי הוא $(-1)^n|A|$.