לינארית 1א ~ תרגיל בית 9

שחר פרץ

13 במאי 2025

. . . . (1) . . . .

נוכיח ש־$\dim \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2}$ ו־$\dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2+n}{2}$.

הוכחה. הוכחנו בתרגיל בית קודם ש־$V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$, ובפרט הם תמ"וים [ההוכחה מתרגיל הבית הקודם מצורפת בסוף שיעורי בית אלו ע"מ שלא להכביד על ההוכחה כאן]. נוכיח שהקבוצה להלן בסיס ל־$\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$:

$$B := \left(A_{ij} = \begin{cases} 1 & i = \tilde{i},\ j = \tilde{j} \\ -1 & i = -\tilde{i},\ j = -\tilde{j} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \middle| i, j \in \mathbb{N} \wedge n > j > i \right)$$

נבחין שכמות המספרים $i, j \in [n]$ כך ש־$i < j$ היא $\frac{n^2-n}{2}$. על כן $|B| = \frac{n^2-n}{2}$ (כי כל זוג מטריצות בבסיס שונה). עתה נוכיח ש־B אכן בסיס: נתבונן ברצף $\alpha_i \dots \alpha_k \in \mathbb{R}$סקלרים, וקודם לכן הראינו $\exists n \colon \frac{n^2-n}{2} = k$. אזי, קל לראות ש־:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i B_i = \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_k B_k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_n & \cdots & \alpha_{2n-3} \\ -\alpha_2 & -\alpha_n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha_k \\ -\alpha_{n-1} & -\alpha_{2n-3} & \cdots & -\alpha_k & 0 \end{pmatrix}$$

מטריצה להלן המוגדרת ביחידות ע"י כל אחד מהסקלרים $\alpha_1 \dots \alpha_k$ ולכן B בסיס למרחב המטריצות מהצורה לעיל (זהו מרחב משום שזהו $\operatorname{span} B$ תמ"ו של $M_n(\mathbb{R})$). עתה נראה ש־$\operatorname{span} B = \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$. קל לראות $\operatorname{span}_B \subseteq \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$. נראה הכלה מהכיוון השני. יהי $M \in \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$, נוכיח $M \in \operatorname{span} B$. נניח בשלילה $M \notin \operatorname{span} B$, אז:

- (בדיקה עבור האלכסון האמצעי): אם $\exists i \colon M_{ii} \neq 0$, אז בפרט משום ש־$M \in \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$ נקבל $M_{ii} = -M_{ii}$, האי־השוויון ל־0 מותר לחלק את אגפי המשוואה ($\mathbb{R}$ תחום שלמות ללא מחלקי אפס) ולקבל $1 = -1$ ובאופן שקול $2 = 0$, בסתירה לכך שאיננו עובדים ב־$\mathbb{Z}_2$.
- (עבור המשולש התחתון): אם $\exists i, j \colon M_{ij} \neq -M_{ji}$ בסתירה להיות $M \in \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$.
- (עבור המשולש העליון): אין ב־$\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$ שום הגבלה בעבור סקלר במשולש העליון בהינתן שהתחתון הוגבל.

סה"כ הראינו שבהכרח $M \in \operatorname{span} B$, ו־$B$ בסיס ל־$\operatorname{span} B$, וסה"כ B בסיס ל־$\mathrm{ASym}_n(\mathbb{R})$ והראינו $\dim \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2}$. מהיות $n = \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, יתקיים:

$$\dim \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = n \implies \frac{n^2-n}{2} + \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = n \implies \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2+n}{2}$$

סה"כ:

$$\boldsymbol{\dim \mathrm{ASym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2},\ \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \frac{n^2+n}{2}}$$

■

. . . . (2) . . . .

יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{F}^n$ וקטורים בת"ל ותהי A המטריצה ששורותיה $v_1 \dots v_k$. נוכיח $\dim\{x \in \mathbb{F}^n \colon Ax = 0\} = n - k$.

הוכחה. ל־$\mathbb{F}^n$ קיים בסיס סטנדרטי E כלשהו ובאופן דומה $\tilde{E}$ בסיס סטנדרטי ל־$\mathbb{F}^k$. נראה כי $\operatorname{Col} A = \mathbb{F}^k$. הכלה $\operatorname{Col} A \supseteq \mathbb{F}^k$ מתקיימת כי $A \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$. נראה ש־$\operatorname{rank} A \geq k$, זאת בגלל שמתקיים בעבור בסיס סטנדרטי E ש־:

$$\operatorname{Col} A^T \supseteq \{A^T e \mid e \in E\} \overset{(1)}{=} \operatorname{span}\{v_1 \dots v_k\} =: B \implies \dim \operatorname{Col} \leq \dim B \overset{(2)}{=} k$$

(2) מתקיים מבת"ליות B ו־(2) מתקיים מהגדרת כפל מטריצה בוקטור. מתקיים $\operatorname{rank} A = \operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^T$ ולכן $\operatorname{rank} A \geq k$. נבחין כי $\operatorname{rank} A \leq k$ כי $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Row} A \leq k$ בגלל שיש רק k וקטורים בשורות A (לא יכול להיות שהקבוצה $\operatorname{Row} A$ מממד יותר גדול מהקבוצה הפורשת שלה שורות A). סה"כ $\operatorname{rank} A = k$. ממשפט הדרגה והאפסות:

$$\operatorname{rank} A + \dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathbb{F}^n \implies k + \mathcal{N}(A) = n \implies \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} = \mathcal{N}(A) = n - k$$

כדרוש. ■

. . . . (3) . . . .

תהי $A \in M_n(R)$ מטריצה נילפטוטנטית כך ש־$A^k = 0$. צ.ל. $\{(A+I)^0 \dots (A+I)^k\}$ ת"ל.

הוכחה. נוכיח בעזרת הבינום של ניוטון:

$$(A+I)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{n} A^i I^{n-i} = \cancel{A^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{n} A^i \in \operatorname{span}(A^0 \dots A^{k-1})$$

לכן, $(A+i)^k \in \operatorname{span}(A^{k-1} \dots A, I)$ (כי צירוף ליניארי של הבינומים). בפרט, לכל $j < k$:

$$(A+I)^n = \sum_{i=1}^{j} \binom{i}{n} A^j I^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{i}{n} A^i \in \operatorname{span}(A^j, \cdots, A^1, I) \overset{j<k}{\subseteq} \operatorname{span}(A^{k-1}, \cdots, A^1, I)$$

במילים אחרות:

$$\dim \operatorname{span}\{(A+I)^0 \cdots (A+I)^k\} \leq \dim \operatorname{span}\{A^0 \dots A^{k-1}\} \leq k$$

אך בסדרה $(A+I)^0, \cdots, (A+I)^k$ ישנם $k+1$ וקטורים, במ"ו מממד k, ולכן ממשפט היא תלויה לינארית כדרוש. ■

. . . . (4) . . . .

נגדיר:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$3A - 4B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & -4 \\ 7 & 5 & 21 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$CD \in \varnothing,\ \text{undefined} \tag{2}$$

$$B^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$DD^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$BD = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

נבחין כי CD אינו מוגדר, כי $D \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ו־$C \in M_{3\times 4}$, אך $3 \neq 4$.

המשך בעמוד הבא

. . . . (5) . . . .

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונגדיר $\operatorname{tr}(A)$ להיות סכום איברי האלכסון הראשי. נוכיח את הטענות הבאות:

(א) נוכיח $\forall A < B \in M_n(\mathbb{F})\colon\ \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$

הוכחה. יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. אז:

$$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A)_{ii} + (B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A)_i i + \sum_{i=1}^{n}(B)_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B \quad \top$$

■

(ב) נוכיח שלכל $C \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ D \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ מתקיים $\operatorname{tr}(CD) = \operatorname{tr}(DC)$.

הוכחה. יהיו $C \in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ D \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ מטריצות. אז:

$$\sum_{i=1}^{n}(CD)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C)_{ji}(D)_{ij} \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(D)_{ij}(C)_{ji} = \sum_{i=1}^{m}(DC)_{ii} = \operatorname{tr}(DC)$$

כאשר (1) נובע מהחלפת סדר סכימה (חוקי מקומטטיביות סכום) ומקומטטיביות כפל. ■

. . . . (6) . . . .

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, ותהי $C \in M_n(\mathbb{F})$. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

(א) נפריך $A+B$ הפיכה.

הפרכה. נראה דוגמה נגדית. נבחר $A = I,\ B = -I$ הפיכות. אז $A + B = 0$ שאיננה הפיכה, בסתירה לטענה. ■

(ב) נפריך AC הפיכה.

הפרכה. נראה דוגמה נגדית. עבור $A = I$ הפיכה, ו־$C = 0$ מטריצה $C \in M_n(\mathbb{F})$, מתקיים $AC = I \cdot 0 = 0$ שאיננה הפיכה. ■

(ג) נוכיח ABA הפיכה.

הוכחה. לפה. לכל זוג מטריצות $\bar{A}, \bar{B} \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, AB הפיכה. נוכיח את הלמה: מהיות $\bar{A}, \bar{B}$ הפיכות, הן מייצגות בבסיס סטנדרטי E פונקציה איזו', ונסמן $T_A(x) := \bar{A}x,\ T_B := \bar{B}x$ ובפרט $[T_A]_E = A,\ [T_B]_E = B$. נסיק $AB = [T_A]_E \cdot [T_B]_E = [T_A \circ T_B]_E$. הרכבת איזו' היא איזו' ולכן $T_A \circ T_B$ איזו', כלומר $[T_A \circ T_B]_E$ הפיכה כדרוש.

הלמה הוכחה. ממנה, AB הפיכה כי A, B הפיכות. לכן גם ABA הפיכה כי AB הפיכה ו־A הפיכה, כדרוש. ■

(ד) נוכיח שאם $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{F}$ שדה המרחיב את $\mathbb{F}$, אז A הפיכה ב־$M_n(\mathbb{K})$.

הוכחה. ידוע $M_n(\mathbb{F}) \subseteq M_n(\mathbb{K})$, ותהי $M \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה ב־$M_n(\mathbb{F})$. נסיק $M \in M_n(\mathbb{K})$, ונראה שגם בחוג הזה היא הפיכה. מהיות M הפיכה מעל $M_n(\mathbb{F})$, ידוע קיום מטריצות אלמנטריות $E_1 \dots E_k$ כך ש־$M \cdot \prod_{i=1}^{n} E_i = I$ (כי היא ניתנת לדירוג לכדי I מהגדרה). אזי $E_i \in M_n(\mathbb{K})$ מהכלה. בפרט לכל זוג מטריצות מעל $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, נבחין כי AB נשאר זהה מעל $M_n(\mathbb{K})$ כי כפל מטריצות מוגדר באמצעות פעולות חיבור וחיסור על השדה, שנותרו זהות במקרה הזה (אחרת צמצום הפעולות מ־$\mathbb{K}$ ל־$\mathbb{F}$ שונה מהפעולות על $\mathbb{F}$, וזו סתירה לנתון ש־$\mathbb{K}$ מרחיב את $\mathbb{F}$). לכן גם נשאר השוויון $M \cdot \prod_{i=1}^{n} E_i = I$ מעל $M_n(\mathbb{K})$. באופן שקול M הפיכה מעל $M_n(\mathbb{K})$ כדרוש. ■

(ה) נפריך את הטענה $AC = BC \implies A = B$ בקשירה לעיל.

הפרכה. נבחר $C = 0,\ A = I,\ B = -I$, ונבחין כי A, B הפיכות. נבחין כי $AC = A\cdot 0 = 0 = B \cdot 0 = BC$ וכן $A = I \neq -I = B$, כלומר $AC = BC \wedge A \neq B$ בסתירה לטענה. ■

. . . . (7) . . . .

(א) מעל $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

נוכיח שהמטריצה לא הפיכה באמצעות כך שנראה ש־$\operatorname{rank} A < 3$ באמצעות הוכחת ת"ליות עמודותיה.

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8+7 \\ 2-10+8 \\ 3-12+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ב) מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

נוכיח שהיא הפיכה ונמצא את ההפיכה שלה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \\ 2 & 5 & 1 & I \\ 1 & -4 & 3 & \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & -13 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{-31} R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_2 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{71}{31} & 0 & \frac{29}{31} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{71}{31} & 0 & \frac{29}{31} \\ \frac{18}{31} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{31} & \frac{1}{31} & \frac{2}{31} \end{pmatrix}$$

(ג) מעל $\mathbb{Z}_7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \\ 2 & 5 & 1 & I \\ 1 & -4 & 3 & \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_3 \to 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 + 4R_1]{R_2 \to R_2 + 5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ד) מעל $\mathbb{R}$:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 2 & -1 & I \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to 0.5R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{-2} & 2 & 1.5 & -3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 \cdot \frac{-2}{3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{-3} & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{-3} & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14}{3} & 2 & \frac{14}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \to \frac{3}{14} R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{-3} & -1 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 1R_4]{\substack{R_3 \to R_3 + \frac{4}{3} R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & \frac{4}{7} & -1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{14} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 1R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{2} & \frac{11}{24} & \frac{3}{98} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{23}{49} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{2} & \frac{11}{24} & \frac{3}{98} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{23}{49} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{2} & \frac{11}{24} & \frac{3}{98} \\ -\frac{3}{7} & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

(ה) מעל $\mathbb{R}$, נמצא את ההופכית למטריצה הבאה (אם יש כזו, כתלות בערכי $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$A := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & \lambda & I \\ 0 & \lambda & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[(1)]{R_3 \to R_3 - \lambda R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 & 0 & -\lambda & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)]{R_3 \to \frac{1}{1-\lambda^2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_3]{R_2 \to R_2 - \lambda R_1} \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 - \frac{1}{1-\lambda^2} \\ I & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} \\ & 0 & \frac{-\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{1-\lambda^2} & \frac{1}{1-\lambda^2} \end{pmatrix}$$

- במקרה והנחה (1) לא נכונה ו־$\lambda = 0$:

$$\left(\begin{matrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\middle| I\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(I\middle|\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)$$

- במידה והנחה (2) לא נכונה ו־$1-\lambda^2=0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\lambda\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מטריצה לא הפיכה כי יש שורת אפסים ולכן שורותיה ת"ל.

נסכם:

$$A^{-1} = \begin{cases}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \lambda=0\\ \text{ininevitable} & \lambda=\pm1\\ \begin{pmatrix}1&0&-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\\0&1&0\\0&-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}&\frac{1}{1-\lambda^2}\end{pmatrix} & \text{else}\end{cases}$$

(8)

תהיינה A,B ריבועיות המקיימות $A^2=A\wedge B^k=0$. נוכיח $I-B, I+A$ הפיכות.

הוכחה.

- נוכיח ש־$I+A$ הפיכה:

$$I = A+I-A = A+I-\underbrace{\frac{1}{2}A}_{=\frac{1}{2}A^2}+\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}A^2+A-\frac{1}{2}A+I = (A+I)\left(A-\frac{1}{2}\right) \implies A^{-1} = A-\frac{1}{2}I$$

- נוכיח ש־$I-B$ הפיכה. לכפול בצורה כזו שכל איבר "יבטל" את קודמו. כלומר:

$$(B-I)(B^{k-1}+\cdots+I) = B^k+B^{k-1}-B^{k-1}+\cdots+I = I$$

פורמלית:

$$(B-I)\left(\sum_{i=1}^{k-1}B^i\right) = \sum_{i=2}^{k}B^i+\sum_{i=1}^{k-1}B^i = I+B^k+\sum_{i=2}^{k-1}\cancel{(B^i-B^i)} = I+B^k = I$$

כי $B^k=0$, כדרוש.

■

העתק הדבק מהתרגיל בית 4, שאלה שעוזרת לתרגיל 1:

יהיו:

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}) = \{A\in M_n(\mathbb{F}) \mid \forall i,j\colon A_{ij}=A_{ji}\},\ \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F}) = \{A\in M_n(\mathbb{F}) \mid \forall i,j\colon A_{ij}=-A_{ji}\}$$

נראה ש־$M_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{F})+\mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$ (סכום ישר) נסמן $\mathrm{Sym} := \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ ו־$\mathrm{ASym} := \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$.

הוכחה.

- נבחין ש־$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}), \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$ מעקרון ההפרדה. עתה נראה בשניהם סגירות לחיבור ולכפל:
  - **סגירות לכפל:**

* עבור Sym, יהיו $M \in \mathrm{Sym}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, ונבחין שלכל $i,j \in [n]$ עדיין λM מקיים $(\lambda M)_{ij} = \lambda(M) = \lambda(M)_{ji} = (\lambda M)_{ji}$.
* עבור ASym, לכל $M \in \mathrm{ASym}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ עדיין מתקיים $\forall i,j \in [n] \colon (\lambda M)_{ij} = \lambda(M)_{ij} = -\lambda(M)_{ji} = -(\lambda M)_{ji}$.

- **סגירות לחיבור:**
  * עבור Sym, יהיו $M,P \in \mathrm{Sym}$ ואכן $(M+P)_{ij} = (M)_{ij} + (P)_{ij} = (M)_{ji} + (P)_{ji} = (M+P)_{ji}$.
  * עבור ASym, יהיו $M,P \in \mathrm{ASym}$ ואכן $(M+P)_{ij} = (M)_{ij} + (P)_{ij} = -(M)_{ji} - (P)_{ji} = -(M+P)_{ji}$.
- **קיום אפס:**
  * עבור Sym נבחין ש־ $(0_M)_{ij} = 0_{\mathbb{F}} = (0_M)_{ji}$
  * עבור ASym נבחין ש־: $(0_M)_{ij} = 0_{\mathbb{F}} = -0_{\mathbb{F}} = -(0_M)_{ji}$

סה"כ הראינו ש־$\mathrm{Sym},\ \mathrm{ASym}$ תמ"וים. נראה ש־$\mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym} = \{0_M\}$. יהי $A \in \mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym}$. אזי:

$$-(A)_{ij} \overset{\mathrm{Sym}}{=} -(A)_{ji} \overset{\mathrm{ASym}}{=} (A)_{ij}$$

אם $(A)_{ij} \neq 0$, אז נוכל לחלק בו ולקבל $1 = -1$ וזו סתירה. סה"כ $\forall i,j \in [n] \colon (A)_{ij} = 0$, ולכן $A = 0_M$, כלומר אכן $\mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym} = \{0_M\}$ כדרוש.

• עתה נראה שלכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות שתי מטריצות $A_s,\ A_{as} \in \mathrm{ASym}$ כך ש־$A = A_s + A_{as}$. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נסמן $A_s = \frac{A+A^T}{2}$ ו־$A_{as} = \frac{A-A^T}{2}$. אזי:

- **$A_s \in$ Sym:** יהיו $i,j \in [n]$, אז:

$$(A_s)_{ij} = \left(\frac{A+A^T}{2}\right)_{ij} = \frac{\overbrace{(A)_{ij}}^{(A^T)_{ji}} + \overbrace{(A^T)_{ij}}^{(A)_{ji}}}{2} = \frac{(A)_{ji} + (A^T)_{ji}}{2} = (A_s)_{ji} \quad \top$$

- **$A_{as} \in$ Sym:** יהיו $i,j \in [n]$, אז:

$$(A_{as})_{ij} = \left(\frac{A-A^T}{2}\right)_{ij} = \frac{\overbrace{(A)_{ij}}^{(A^T)_{ji}} - \overbrace{(A^T)_{ij}}^{(A)_{ji}}}{2} = \frac{(A^T)_{ji} - (A)_{ji}}{2} = -\frac{(A)_{ji} + (A^T)_{ji}}{2} = -(A_s)_{ji} \quad \top$$

- **$A_s + A_{as} = A$:**

$$A_s + A_{as} = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2} = \frac{A+A+\cancel{A^T - A^T}}{2} = \frac{2A}{2} = A \quad \top$$

סה"כ הראינו ש־$M_n(\mathbb{F}) = \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ סכום ישר, כדרוש. ■

....