מתמטיקה B ~ עברי נגר ~ גומרים

שחר פרץ

11 ליולי 2024

SWIFT UI .... (1)

תזכורות:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$$

תזכורת: $O(x^n)$ הוא בשאיפה ל־0 (כלומר, כל דברים שהולכים ל־0 יותר מהר מ־x^n, ובפרט $x^{n>}$).

"פעם הבאה תשיב מאמי" (עברי, על רתם)

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x - x}{x^2(1-\cos\sqrt{x})}}_{f(x)}$$

נקבל:

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)}{x^2\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)\right)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{\frac{x^3}{2} + O(x^4)} \cdot \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x)}$$

וסה"כ:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-1/6}{1/2} = -\frac{1}{3}$$

יכולנו גם לפתור את הגבול עם לופיטל. בעצם, מה שעשינו זה כמו להפעיל לופיטל 3 פעמים. טור טיילור הוא "קיצור דרך" לכך.

1.1 $e^{-\frac{1}{x^2}}$

נגדיר $f(0) = 0$, כי זה גם הגבול ונרצה שהיא תהיה רציפה בנקודה הזו.

$$f'(x) = e^{-1/x^2}\left(2\cdot\frac{1}{x^3}\right),\ f''(x) = e^{-1/x^2}\left(2\cdot\frac{1}{x^3}2\frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)$$

וגם כאן נגדיר $f'(0) = 0$, והאסימפטוטות יוותרו. באופן כללי, $f^{(k)} = e^{-1/x^2}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ומשום שפולינום גדל לאט יותר ואקספוננט, אזי בגבול $f^{(k)}(0) = 0$. סה"כ, טור הטיילור שלה סביב 0 יתאפס, כי כל הנגזרות סביב 0 יתאפסו:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k = 0$$

"הפונקציה רציפה אחושרמוטה" (עברי). לפחות תחת ההנחה שהגדרנו שזה הערך שלה ב־0, וזה לא ממש בעיה כי היא רציפה.

EUILER FORMULA .... (2)

נרצה להרחיב את הגדרת החזקה למספרים מרוכבים. שיעור שעבר ראינו את טור הטיילור של e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k =: e(x)$$

נבחר, להגדיר את הפונקציה $e(x)$ כטור הטיילור להלן. נוכיח שההגדרה שלנו מקיימת חוקי חזקות: נוכיח את הטענה $e(x+y)=e(x)+e(y)$ (תחת ההנחה שזו הגדרה ל־e^x, ואי אפשר להשתמש בטענות קודמות על הפונקציה הזו).

$$e^{(x+y)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k \qquad =\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{m}x^m y^{k-m} \tag{1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^{k-m}}{m!}\overset{n=k-m}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^n}{y!}=e(x)e(y)\right) \tag{2}$$

נגדיר:

$$\forall x\in\mathbb{C}.e^x=e(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

ההוכחה שלנו לחוק החזקות עובדת גם על מרוכבים, אז מצאנו סיבה לבצע את ההגדרה הזו – ההרחבה משמרת את חוקי החזקות. באופן דומה, נגדיר $\sin x,\cos x$ עבור $x\in\mathbb{C}$ לפי טורי הטיילור שלהם.

$$e^{ix}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(ix)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k i^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4m)!}x^{4m}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i}{(4m+1)!}x^{4m+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{(4m+2)}x^{4m+2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-i}{(4m+3)!}x^{4m+3}$$

הסתמכנו על כך ש־:

$$i^k=\begin{cases}1 & k\equiv 0\\ i & k\equiv 1\\ -1 & k\equiv 2\\ -i & k\equiv 3\end{cases}\bmod 4$$

נסדר את הטורים:

$$\cdots=\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\text{even}}}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}}^{\infty}\frac{-1}{(2n)!}x^{2n}\right)+i\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_{\text{even}}}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}}^{\infty}\frac{-1}{(2n)!}x^{2n}\right)$$

ניעזר בעובדה ש־ $(-1)^n=\begin{cases}1 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ -1 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$ ולכן נוכל לאחד את הסכומים, ולקבל:

$$\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}=e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

את הטורים האלו אנו מזהים כטורי הטיילור של החזקות. סה"כ קיבלנו את נוסחאת אויילר.

נשחק עם זה.

$$x=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}.e^x=e^{a+bi}=e^a e^{bi}=e^a(\cos b+i\sin b)$$

כלומר, המספר e^x הוא מספר שאורכו e^a והזווית שלו היא b; $|e^x|=e^x,=e^{\Re(x)}$, באופן דומה על זווית. מהצד השני, אם נפרק מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{\ln r+i\theta}=re^{i\theta}$$

בהתאם לחוקי החזקות, נוכל לקבל הבנה נוספת של מה משמעותו של הכפל:

$$z_1z_2=(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1\theta_2)}$$

הכפלנו את האורך ב־r, וסובבנו ב־θ. ולמי שזוכר את ההוכחה ההיא משיעורי הבית:

$$z=a+bi,\ z^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{i\theta}=r^n(\sin\theta+i\cos\theta)$$

שבאותה התקופה, ניאלצנו להיעזר באינדוקציה או באמצעים אחרים, מסובכים יותר. השתמשנו באותה הזהות בשביל למצוא את שורשי היחידה, המספרים שמקיימים $z^n=1$. הוכחנו, $z=u_n^k$ כאשר $u_n=\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$. הם, המספרים שייקימו את המשוואה:

$$r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\overset{!}{=}1$$

עבורה בהכרח צריך להתקיים $n\theta=2\pi k$ כלומר $\theta=\frac{2\pi k}{n}$. נוכל להבין זאת גיאומטרית – נחלק את הזווית על מעגל היחידה ל־n חלקים, ואז נרצה להסתובב עליהם n פעמים עד לחזרה לנקודת ההתחלה.

2.1

נפתור את המשוואה $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$. לפי הייצוג הפולארי:

$$\begin{cases} R = \sqrt{i^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \implies \alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

כלומר:

$$z = re^{\theta},, \ r = \sqrt{2},\ r^2 e^{i2\theta} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$$

סה"כ:

$$2\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \implies \theta = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

סה"כ $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{k} + i\pi k}$. סה"כ יש לנו 2 פתרונות, כי:

$$k = 0 z = \sqrt{2}e^{i\pi/6} \tag{3}$$
$$k = 1 z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} \tag{4}$$
$$k = 3 z = \sqrt{2}e^{i\pi/6 + i2\pi} = z_0 \tag{5}$$

נוכל גם לקבל את זהות אוילר בצורותיה השונות:

$$e^{2\pi i} = 1,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{i\pi} + 1 = 0$$

תרגיל:

$$w^3 = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3} \tag{6}$$
$$r^3 \cos 3\theta + i\sin\theta = 2\left(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3\right) \tag{7}$$

נקבל:

$$w = re^{i\theta}, \implies r = \sqrt[3]{2}\ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \implies \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$$

נקבל את הפתרונות:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9},\ w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i7\pi/9},\ w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i13\pi/9}$$

עשינו סיבוב 2π. התחלנו ממרוכבים וחזרנו אליהם.

. . . .

סוף מתמטיקה B, סייבר, 2024

עברי נגר