אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 1

26 באוקטובר 2025

היעזרו בתרגול ובשאר החומר שלמדתם.ן באלגברה ליניארית 1 כדי לפתור את השאלות הבאות.

1. קראו את קובץ הנהלים המופיע במודל והפנימו אותם.
2. עבור כל אחת מתתי-הקבוצות הבאות, קיבעו האם היא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$ והוכיחו זאת.

   (א) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{2}x_1 + \pi^3 x_2 - x_3 = 0\}$

   (ב) $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2 = 0\}$

   (ג) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1\}$

3. תהי $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ העתקה ליניארית (מעל השדה $\mathbb{C}$) ונניח ש- $f \neq 0$ (כלומר, קיים $v \in \mathbb{C}^n$ כך ש- $f(v) \neq 0$). הוכיחו כי $\dim\ker f = n - 1$ (רמז: היעזרו בנוסחת המימדים).
4. יהיו $A, B \in M_n(F)$.

   (א) הוכיחו שאם A מטריצה הפיכה אז גם A^{-1} הפיכה.

   (ב) הוכיחו שאם A, B הפיכות אז גם AB הפיכה.

   (ג) תנו דוגמה למטריצות הפיכות A, B כך ש- $A + B$ אינה הפיכה.

   (ד) יהי V מרחב וקטורי ממימד n, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ שני בסיסים שלו ותהי $f : V \to V$ העתקה ליניארית. הוכיחו כי f הפיכה (כלומר, יש העתקה ליניארית $f^{-1} : V \to V$ כך ש- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$) אם ורק אם $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ הפיכה (רמז: השתמשו בהתאמה בין העתקות ליניאריות ומטריצות שהזכרנו בתרגול).

5. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ באופן הבא: לכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(a,b)=ax^2-2b$.

(א) הוכיחו ש- f העתקה ליניארית.

(ב) יהיו $\mathcal{B}=((1,0),(0,1))$ ו- $\mathcal{C}=(1,x,x^2)$ בסיסים של $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ בהתאמה. חשבו את $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

(ג) יהיו $\mathcal{B}'=((1,0),(1,1))$ ו- $\mathcal{C}'=(1,2x,x^2-1)$ בסיסים של $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ בהתאמה. חשבו את $[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}$.

(ד) נסמן $v=(2,1)\in\mathbb{R}^2$. חשבו את $[v]_{\mathcal{B}'}$, את $[f(v)]_{\mathcal{C}'}$ וודאו שאכן מתקיים $[f]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'}=[f(v)]_{\mathcal{C}'}$.

6. הוכיחו את הטענה מהתרגול: יהי V מ"ו מעל F, $\dim V=n$ ויהי B בסיס של V. אז ההעתקה $T:V\to F^n$ המוגדרת על ידי $T(v)=[v]_B$ היא איזומורפיזם של מ"ו.

7. יהיו B,C שני בסיסים של $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ הנתונים על ידי

$$B=\{1-x,2-x,1-3x-x^2\}$$

$$C=\{1+x^2,x+x^2,x^2\}$$

חשבו את $[\mathrm{Id}]_B^C$ (רמז: נוח להיעזר באלגוריתם מהתרגול).

8. יהי V מ"ו נוצר סופית, B בסיס של V ו- $T:V\to V$ העתקה ליניארית. נניח ש- $A\in M_n(F)$ דומה ל- $[T]_B$. הוכיחו שקיים בסיס C של V כך ש- $A=[T]_C$.