מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 14

ניתן בתאריך 21.2.2024. להגשה עד יום שלישי 27.2.2024 ב־23:59.

סימון: בהינתן שתי קבוצות A, B, מסמנים $A \sim B$ אם קיים זיווג $f : A \to B$.
(כלומר $A \sim B$ ו־$|A| = |B|$ הם סימונים שקולים)

1. נניח כי $|A| = |A'|\,,\ |B| = |B'|$. הוכיחו את הטענות הבאות שהיו בהרצאה:
   (א) $|P(A)| = |P(A')|$
   (ב) אם A, B זרות וגם A', B' זרות אז $|A \uplus B| = |A' \uplus B'|$.

2. נניח כי $|A| \leq |A'|$ ו־B קבוצה כלשהי. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) $|B \to A| \leq |B \to A'|$
   (ב) $|A \to B| \leq |A' \to B|$

3. הוכיחו:
   (א) $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \to \mathbb{N}|$
   (ב) $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \to \{0,1\}|$
   (ג) $|\mathbb{Z}| = |\{0,1\} \times \mathbb{N}|$

4. הוכיחו את הטענות הבאות על ידי מציאת פונקציית זיווג מתאימה (כתבו את פונקציית הזיווג באופן פורמלי והוכיחו שהיא זיווג):
   (א) $[0,1] \sim [2,7]$
   (ב) $[0,1] \times [0,1] \sim [2,7] \times [2,7]$
   (ג) $\{5,6\} \to \mathbb{N} \ \sim\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}$
   (ד) $\mathbb{Z} \times [0,7) \sim \mathbb{R}$
   (ה) $\{1,4,9,16\} \times \mathbb{N} \ \sim\ \mathbb{N}_+$
   (ו) $(3,4) \cup (5,7) \sim \mathbb{R}$
   (ז) $[0,1] \cup \{2\} \sim [0,1]$
   (ח) $[0,1] \cup \mathbb{N} \sim [0,1]$

5. נתונים יחסי השקילות הבאים (אין צורך להוכיח שהם יחסי שקילות). עבור כל אחד מהם, מצאו זיווג בין קבוצה ידועה לבין קבוצת המנה והוכיחו את טענותיכם.
   [הכוונה בקבוצה ידועה: קבוצה שניתן להרכיב מהקבוצות המוכרות $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{N}_{even}, \ldots$, קטע פתוח/סגור וכו', ואם צריך אז גם שימוש בפעולות בסיסיות כמו איחוד, חיתוך, הפרש, קבוצת חזקה וכדומה.]
   (א) $R = \left\{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \right\}$
   (ב) תהי $f \in P(\mathbb{Z}) \to P(\mathbb{N})$ המוגדרת ע"י $f = \lambda A \in P(\mathbb{Z}) . A \cap \mathbb{N}$. נגדיר יחס שקילות:

$$S = \{ \langle A, B \rangle \in P(\mathbb{Z}) \times P(\mathbb{Z}) \mid \min(f(A)) = \min(f(B)) \}$$

   כאשר $\min$ מוגדרת באופן הבא:

$$\min = \lambda A \in P(\mathbb{N}) . \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \iota a \in A . \forall x \in A . a \leq x & A \neq \emptyset \end{cases}$$

(ג) $T = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sin(x) = \sin(y)\}$ (השאלה מצריכה לדעת לפתור משוואות טריגונומטריות)

(ד) $R = \left\{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2 \mid Im(f) = Im(g)\right\}$

6. תהיינה A, B שתי קבוצות המקיימות $A \sim B$. בהינתן קבוצה X, נסמן:

$$H(X) = \{f \in X \to X \mid \text{לא חח"ע } f\}$$

הוכיחו כי $H(A) \sim H(B)$.

7. תהי A קבוצה. נסמן ב־$S(A)$ את קבוצת כל יחסי הסדר החזקים על A, ונסמן ב־$W(A)$ את קבוצת כל יחסי הסדר החלשים על A. כתבו זיווג $F : S(A) \to W(A)$ בכתיב למדא, והוכיחו שזהו זיווג.