מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 10 - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך אחרון להגשה:	ניתן בתאריך:
תחפשו בקומיטים הקודמים	שחר פרץ	23.1.2024	17.1.2024

תרגיל בית 10 - מבוא ליחסי שקילות

שאלה 1

סעיף (א)

נתון: R יחס מעל A

צ.ל.: R רפלקסיבי אמ"מ $id_A \subseteq R$

הוכחה: יהי R יחס מעל A. נוכיח באמצעות מעברים שקולים:

$$\begin{aligned}
& id_A \subseteq R \\
\iff & \forall a, b \in A. \langle a, b \rangle_A \implies \langle a, b \rangle \in R && (\subseteq \text{ definition}) \\
\iff & \forall a, b \in A. a = b \implies \langle a, b \rangle \in R && (id \text{ definition}) \\
\iff & \forall a \in A. \langle a, a \rangle \in R \qquad \mathscr{Q.E.F.}
\end{aligned}$$

כאשר השקילות האחרונה נכונה לפי הצבה. סה"כ, לפי הגדרת יחס רלפקסיבי, הגענו לשקילות.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: R יחס מעל A

צ.ל.: R סימטרי אמ"מ $R^{-1} = R$

הוכחה: יהי R יחס מעל A. נתחיל במעברים שקולים:

$$\begin{aligned}
& R^{-1} = R \\
\iff & \forall a, b \in A. \langle a, b \rangle \in R^{-1} \longleftrightarrow \langle a, b \rangle \in R && (= \text{ definition}) \\
\iff & \forall a, b \in A. \langle b, a \rangle \in R \longleftrightarrow \langle a, b \rangle \in R && (R^{-1} \text{ definition}) \qquad \mathscr{Q.E.F.}
\end{aligned}$$

לפיכך, באופן ישיר $R^{-1} = R$ גוררת $\langle a,b\rangle \in R \implies \langle b,a\rangle \in R$ (מתוך הגדרת היחס $\longleftrightarrow$) ולכן לפי הגדרה ישנה גרירה להיות R סימטרי. הגרירה בין יחס סימטרי לטענה $\langle b,a\rangle \in R \longleftrightarrow \langle a,b\rangle$ מתקיימת בלי הגבלת הכלליות על a ו־b.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: R יחס מעל A

צ.ל.: R טרנזיטיבי אמ"מ $R \circ R \subseteq R$

הוכחה: יהי R יחס מעל A. נתחיל במעברים שקולים;

$$\begin{aligned}
&R \circ R \subseteq R \\
&\forall a,c \in A.\langle a,c\rangle \in R \circ R \implies \langle a,c\rangle \in R && (= \text{definition}) \\
&\forall a,c \in A.(\exists b \in A.aRb \land bRc) \implies aRc && (\circ \text{ definition})
\end{aligned}$$

מכאן ואילך נוכיח שתי גרירות:

- נניח R טרנזיטיבי, ונוכיח את הטענה לעיל. לפי ההנחה, יהי $a,b,c \in R$, נניח $aRb \land bRc$ גורר aRc, ובה"כ נוכיח שקיום $\tilde{b} \in B$ עבורו מתקיים $aR\tilde{b} \land \tilde{b}Rc$ נגרר aRc, וזה פסוק אמת כי ההנחה מתרחשת לכל $b \in B$ ובפרט $\tilde{b}$.
- יהי $a,c \in A$, נניח שקיים $\tilde{b} \in A$ עבורו $aR\tilde{b} \land \tilde{b}Rc$ גורר aRc, ונוכיח שהיחס הוא טרנזיטיבי. יהי $b \in B$, נניח $aRb \land bRc$. נניח בשלילה ש־$\neg aRc$, ונסיק סתירה מתוך ההנחה שטוענת שקיום $b \in A$ כזה גוררת aRc.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 2

יהי R יחס מעל קבוצה A. נגדיר קבוצה $B \subseteq A$ **סגורה ביחס ל־R** אם ורק אם $\forall x \in B.\forall a \in A.(xRa \implies a \in B)$.

תהי קבוצה $X \subseteq A$, ונגדיר $X' = \{b \in A \mid \exists x \in X.xRb\}$. **צ.ל.** ש־$X \cup X'$ סגורה ביחס ל־R.

הוכחה: יהי $x \in X \cup X'$, יהי $a \in A$, נניח xRa, נוכיח $a \in X \cup X'$. נפלג למקרים:

- אם $x \in X$, וידוע xRa, אז סה"כ $a \in A \land x \in X.xRa$ ולכן לפי עקרון ההפרדה $x \in X'$ ובפרט $x \in X' \cup X$.
- אם $x' \in X'$, וידוע $x'Ra$, נסיק מתוך הנתון ש־$x \in A \land \exists x \in X.xRx'$, מתוך טנרזיטיביות יחס השקילות מתקיים xRa, ולכן בה"כ הגענו למצב הקודם שכבר הוכח שממנו נגרר $a \in X$ ובפרט $a \in X \cup X'$.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 3

סעיף (א)

נתון: $\langle a,b\rangle \in \text{Res} \iff b - a \in \mathbb{Z}$

צ.ל.: Res יחס שקילות.

הוכחה:

- *רפלקסיביות:* יהי $r\in\mathbb{R}$, צ.ל. $\langle r,r\rangle\in R$, או באופן שקול $r-r\in\mathbb{Z}$, ומתוך הגדרת איבר הופכי על חיבור בממשיים $0\in\mathbb{Z}$, שמתקיים מתוך הגדרת השלמים על פני הממשיים.
- *סימטריות:* יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, נניח $a\text{Res}b$, או באופן שקול $a-b\in\mathbb{Z}$, צ.ל. bRa, או באופן שקול $b-a\in\mathbb{Z}$. נבחר $\mathbb{Z}\ni z=a-b$, נסיק אלגברית $b-a=-z$, ומתוך שלמות החיבור על השלמים $-z\in\mathbb{Z}$, על כן נציב ונקבל $b-a\in\mathbb{Z}$ כדרוש.
- *טרנזיטיביות:* יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, נניח $a\text{Res}b\wedge b\text{Resc}$ ובאופן שקול $a-b\in\mathbb{Z}\wedge b-c\in\mathbb{Z}$, נוכיח $a\text{Resc}$, כלומר נוכיח $a-c\in\mathbb{Z}$. אלגברית, נבחר $a-b=z_1, b-c=z_2$, ונקבל מתוך חיסור משוואות:

$$\begin{cases} a-b=z_1 \\ b-c=z_2 \end{cases} \implies a-b+b-c=a-c=z_1+z_2$$

וכאמור מתוך שלמות החיבור על השלמים מתוך העובדה ש־$z_1,z_2\in\mathbb{Z}$ (שנובעת מתוך הצבה) נסיק $z_1+z_2\in\mathbb{Z}$ ולכן נציב ונקבל $a-c\in\mathbb{Z}$ כדרוש.

סעיף (ב)

נתון: יהיו $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $k\in\mathbb{Z}$, עבורם נגדיר. $X+k:=\{x+k\mid x\in X\}$. יהיו A,B קבוצות, עבורן נגדיר:

$$A\sim B\iff\left\{\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}(\mathbb{N})^2\mid\exists k\in\mathbb{Z}.A=B+c\right\}$$

צ.ל.: $A\sim B$ יחס שקילות:

הוכחה:

- *רפלקסיביות:* יהי $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, צ.ל. $A\sim A$ ובאופן שקול $\exists k\in\mathbb{Z}.A=A+k$. נבחר $k=0\in\mathbb{Z}$, עבורו $A+k=A+0=\{x+0\mid x\in A\}=\{x\mid x\in A\}=A$ (זאת מתוך הגדרת איבר 0, וכי הפעולה $x+0$ משום ש־$A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ולכן לכל $a\in A.a\in\mathbb{N}$ ובפרט x), וסה"כ נמצא $k\in\mathbb{Z}$ עבורו $A=A+k$ כלומר $A\sim A$ כדרוש.
- *סימטריות:* יהיו $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, נניח $A\sim B$, נוכיח $B\sim A$. לפי ההנחה, קיים $k_1\in\mathbb{Z}$ עבורו $A=B+k_1$, ולכן מתוך הגדרת שוויון קבוצות יהיו $a\in A,b\in B$, נגרר $a=b+k_1$. צ.ל. קיום $k_2\in\mathbb{Z}$ עבורו $B=A+k_2$. נבחר $k_2=-k_1$ (שמוגדר מתוך שלמות החיבור, ובפרט החיסור, על השלמים), ונסיק:

$$A+k_2=\{a+k_2\mid a\in A\}=\{b+k_1+k_2\mid b\in B\}=\{b+k_1-k_2\mid b\in B\}=B$$

כדרוש.
- *טרנזיטיביות:* יהיו $A,B,C\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, נניח $A\sim B\wedge B\sim C$ כאשר $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ הם הקבועים המתאימים להם באופן דומה לאשר היה בחלק הקודם, וצ.ל. $A\sim C$ כלומר קיום $k_3\in\mathbb{Z}$ בעבורו מתקיים $A=C+k_3$. נבחר $k_3=k_2+k_1$, נסיק:

$$
\begin{aligned}
C+k_3 &= \{c+k_3 \in C \mid c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} \\
&= \{c+k_2+k_1 \mid c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\} \\
&= \underbrace{\{b+k_1 \mid b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}}_{B+k_2=C} \\
&= \underbrace{\{a \mid a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}}_{A+k_1=B} = A
\end{aligned}
$$

כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: תהי $E \subseteq \mathbb{N}$, נגדיר:

$$R_1 = \left\{\langle C, D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 C \cap E = D \cap R\right\}$$

כאשר $R_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$

צ.ל.: R_1 יחס שקילות

הוכחה:

- *רפלקסיביות:* יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח $\langle A, A\rangle \in R_1$, או באופן שקול לפי עקרון ההפרדה $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (שמתקיים ישירות מהגרירה) וגם $A \cap E = A \cap E$ (שמתקיים מתוך הגדרת זהות).
- *סימטריות:* יהיו $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, נניח $\langle A, B\rangle \in R_1$ ונוכיח $\langle B, A\rangle \in R_1$. מתוך הנתון, $A \cap E = B \cap E$. צ.ל. $B \cap R = A \cap E$, שמתקיים לפי קומוטטיביות שוויון בין קבוצות.
- *טרנזיטיביות:* יהיו $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$, נניח $\langle A, B\rangle \in R_1 \wedge \langle B, C\rangle \in R_1$ ונוכיח $\langle A, C\rangle \in R_1$. מתוך ההנחה $A \cap E = B \cap E \wedge B \cap E = C \cap E$, ומתוך טרנזיטיביות שוויון בין קבוצות נגרר $A \cap E = C \cap E$ ולכן $\langle A, C\rangle \in R_1$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד)

נתון: $A = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid b > 0\}$. נגדיר את היחס R_2 מעל A באופן הבא:

$$R_2 = \{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in A^2 \mid ad = cb\}$$

צ.ל.: R_2 יחס שקילות

הוכחה:

- *טרנזיטיביות:* יהי $\langle a, b\rangle \in A$, נוכיח $\langle\langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R_2$. לפיכך, צ.ל. (מתוך עקרון ההפרדה) $ab = ab$, נחלק את שני האגפים (שכן $a, b > 0$ ובפרט א"ש ל־0) ונקבל $1 = 1$, אשר מהווה פסוק אמת.
- *סימטריות:* יהיו $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in A^2$, נניח $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in R_2$ (כלומר $ab = cd$ נניח) ונוכיח $\langle\langle c, d\rangle, \langle a, b\rangle\rangle \in R_2$, שמתקיים משום ש־$cb = ad$ מתוך קומוטטיביות השוויון.

- *טרנזיטיביות:* יהיו $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\in A^2$, נניח $\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle,\langle\langle c,d\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R_2$, ונוכיח $\langle\langle a,b\rangle,\langle e,f\rangle\rangle\in R_2$. מתוך ההנחה, $ab=cd\land cd=ef$, ולכן $ab=ef$ (טרנזיטיביות הזהות) כדרוש מעקרון ההפרדה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ה)

נתון: נגדיר R_3 מעל $R\to R$ המוגדר באופן הבא:

$$R_3=\left\{\langle f,g\rangle\in(\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2\mid\exists\delta>0.\forall x\in(-\delta,\delta).f(x)=g(x)\right\}$$

צ.ל.: R_3 יחס שקילות

הוכחה:

- *טרנזיטיביות:* יהי $f\colon R\to R$, צ.ל. $\langle f,f\rangle\in R_3$. לפי עקרון ההפרדה, צ.ל. קיום $\delta>0$ עבורו יהי $x\in(-\delta,\delta)$, מתקיים $f(x)=f(x)$. נבחר $\delta=1$, ומתוך היות f פונקציה, ובפרט ח"ע, אז $f(x)=f(x)$ כדרוש.
- *סימטריות:* יהיו $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נניח $\langle f,g\rangle\in R_3$, צ.ל. $\langle g,f\rangle\in R_3$, או באופן שקול צ.ל. קיום $\tilde{\delta}>0$ עבורו יהי $x\in(-\tilde{\delta},\tilde{\delta})$, מתקיים $g(x)=f(x)$. מתוך ההנחה, קיים $\delta>0$ שבעבורו מתקיים אותו התנאי על $f(x)=g(x)$, שמתוך קומוטטיביות השוויון גורר שקילות לתנאי $g(x)=f(x)$, לכן בחירת $\tilde{\delta}=\delta$ תהיה תקינה.
- *טרנזיטיביות:* יהיו $f,g,h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות, נניח $\langle f,g\rangle\in R_3\land\langle g,h\rangle\in R_3$, נוכיח $\langle f,h\rangle\in R_3$. מתוך ההנחה, קיימים δ_1,δ_2 שבעבורם יהי $x_1\in(-\delta_1,\delta_1)$ ובאופן דומה עבור x_2, מתקיים $f(x_1)=g(x_1)$ וגם $g(x_2)=h(x_2)$. צ.ל. קיום δ עבורו לכל $x\in(-\delta,\delta)$ מתקיים $f(x)=h(x)$. נבחר $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, ובה"כ $\delta_1<\delta_2$ ולכן $\delta=\delta_1$, נסיק $(-\delta,\delta)\subseteq(-\delta_1,\delta_1)\subseteq(-\delta_2,\delta_2)$ ולכן מתוך ההנחה $f(x)=g(x)\land g(x)=h(x)$ ומתוך טרנזיטיביות הזהות $f(x)=h(x)$ וסה"כ $\langle f,h\rangle\in R_3$ כדרוש.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

שאלה 4

סעיף (א)

נתון: נתון היחס R_1 מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ המוגדר באופן הבא:

$$R_1=\left\{\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}(\mathbb{N})^2\mid\exists n\in\mathbb{N}.A\triangle B=\{n\}\right\}$$

- *רפלקסיביות:* נשלול. נבחר $A=\emptyset\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, נניח בשלילה רפלקסיביות ונסיק $\langle A,A\rangle\in R_1$ ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ שבעבורו $A\triangle A=\{n\}$, אך $A\triangle A=\emptyset$ ולכן מהכלה דו כיוונית $\{n\}\subseteq\emptyset$ ובפרט $n\in\emptyset$ וזו סתירה לפי הגדרת הקבוצה הריקה.
- *סימטריות:* נוכיח. יהיו $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונניח $\langle A,B\rangle\in R_1$, נוכיח $\langle B,A\rangle\in R_1$. לפי ההנחה, קיים $n\in\mathbb{N}$ בעבורו $A\triangle B=\{n\}$. מתוך קומוטטיביות הפעולה $\triangle$ נסיק $B\triangle A=\{n\}$ ולכן סה"כ $\exists n\in\mathbb{N}.B\triangle A=\{n\}$ ובאופן שקול לפי עקרון ההפרדה $\langle B,A\rangle\in R_1$ כדרוש.

- *טרנזיטיביות:* נשלול. נבחר $A = \{1,2\}, B = \{1\}, C = \{1,3\}$ ולכן מתקיים $A \triangle B = \{2\}, B \triangle C = \{3\}$ ומתוך עקרון ההפרדה $\langle A,B\rangle \in R_1 \wedge \langle B,C\rangle \in R_1$. כדי לשלול את הגרירה, נוכיח $\langle C,A\rangle \notin R_1$, או באופן שקול, יהי $n \in \mathbb{N}$, צ.ל. $A \triangle C \neq \{n\}$. נחשב ונקבל $A \triangle C = \{2,3\}$, שאינו סינגילטון (כי $2 \neq 3$), ולכן לא קיים כל n מתאים.

סעיף (ב)

נתון: נגדיר את היחס R_2 מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ באופן הבא:

$$R_2 = \left\{ \langle A,B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A \subseteq B \right\}$$

צ.ל.: R_2 אינו יחס שקילות.

הוכחה:

- *רפלקסיביות:* נוכיח. יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, צ.ל. $\langle A,A\rangle$ ואופן שקול צ.ל. $A \subseteq A$. ידוע שכל גודל שווה לעצמו ולכן $A = A$ ובהכללה $A \subseteq A$ כדרוש.
- *סימטריות:* נשלול. נבחר $A = \emptyset, B = \{1\}$, שניהם בקבוצת החזקה של $\mathbb{N}$, ומתקיים $A \subseteq B$ ולכן מעקרון ההפרדה ומתקיים $\langle A,B\rangle \in R_2$. בניגוד לכך, לפי הגדרת גרירה $A \not\subseteq B$ (כי $1 \in B \wedge 1 \notin A$) ולכן מתוך עקרון ההפרדה $\langle B,A\rangle \notin R_2$.
- *טרנזיטיביות:* נוכיח. יהיו $\langle A,B\rangle \in R_2 \wedge \langle B,C\rangle \in R_2$. מעקרון ההפרדה, $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ וגם $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$. יהי $a \in A$, מתוך הנתון $A \subseteq B$ נסיק $a \in B$, ומהנתון $B \subseteq C$ נדע $a \in C$ וסה"כ $\forall a \in A. a \in C$ ולפי הגדרה $A \subseteq C$ השקילות לטענה $\langle A,C\rangle \in R_2$ לפי עקרון ההפרדה.

סעיף (ג)

נתון: נגדיר את היחס R_3 מעל $\mathbb{Z}$ באופן הבא:

$$R_3 = \left\{ \langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid a + b = 100 \right\}$$

צ.ל.: R_3 אינו יחס שקילות

- *רפלקסיביות:* נשלול. נבחר $a = 1 \in \mathbb{Z}$, ונניח בשלילה אשר R_3 רפלקסיבי. מתוך הנחת השלילה, $\langle a,a\rangle \in R_3$, ולכן $a + a = 100$ ונסיק $2 = 100$ אך זוהי סתירה.
- *סימטריות:* נוכיח. יהי $a,b \in \mathbb{Z}$, נניח $\langle a,b\rangle \in R_3$, נסיק $a + b = 100$, צ.ל. $\langle b,a\rangle \in R_3$ או באופן שקול תחת הנתונים צ.ל. $b + a = 100$. מקומוטטיביות הכפל על השלמים, נסיק מהנתונים $b + a = 100$ כדרוש.
- *טרנזיטיביות:* נשלול. נבחר $a = 1, b = 99, c = 1$, ולכן $a + b = a + c = 100$, וסה"כ $\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in R_3$. עם זאת, $a + c = 2 \neq 100$ ולכן $\langle a,c\rangle \notin R_3$ וזו סתירה.

סעיף (ד)

נתון: נגדיר את היחס R_4 מעל $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$R_4 = \left\{ \langle f,g\rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2 \mid f \circ g = id_{\mathbb{N}} \right\}$$

- *רפלקסיביות:* נשלול. נבחר $f=\lambda n\in\mathbb{N}.0$. נניח בשלילה שהיחס רפלקסיבי, כלומר $f^{(2)}=id_{\mathbb{N}}$. נטען $f\circ f=\lambda n\in\mathbb{N}.0$, ונוכיח לפי כלל η; יהי $x\in\mathbb{N}$, צ.ל. $f(f(x))=0$, שמתקיים מיד לפי כלל β. עתה, נטען לאי שוויון בין $f\circ f$ ו־$id_{\mathbb{N}}$, ונוכיח ע"י כלל η. נבחר $x=1\in\mathbb{N}$, עבורו מתקיים $(f\circ f)(1)=f(f(1))=0\neq 1=id_{\mathbb{N}}(1)$, וסה"כ הגענו לסתירה.
- *סימטריות:* נשלול. נבחר את הפונקציות $f=\lambda x\in\mathbb{N}.0.5(x-1)$ ואת $g=\lambda x\in\mathbb{N}.2x+1$. נניח בשלילה שהיחס סימטרי. נטען $f\circ g=id_{\mathbb{N}}$, ונוכיח באמצעות כלל אטא. יהי $n\in id_{\mathbb{N}}$, לפיכך:

$$f(g(n))=f(2x+1)=0.5(2x+1-1)=x=id_{\mathbb{N}}(x)$$

כדרוש. לפיכך, לפי הנחת השלילה, $g\circ f=id_{\mathbb{N}}$, ולפי כלל η, בפרט עבור $n=2$, אבל:

$$(g\circ f)(n)=g(f(n))=0.5(2n+1)=2.5\neq id_{\mathbb{N}}(n)=2$$

ולכן הגענו לסתירה.

- *טרנזיטיביות:* נשלול. נניח בשלילה טרנזיטיביות ונבחר דוגמה נגדית $h=f=\lambda n\in\mathbb{N}.x+1$, $g=\lambda n\in\mathbb{N}.x-1$. נטען $\langle f,g\rangle,\langle g,h\rangle\in R_4$, שנכון כי $f\circ g=id_{\mathbb{N}}$ לפי כלל η ($f(g(n))=n-1+1=n$) וכי $g\circ h=id_{\mathbb{N}}$ (לפי אותו הכלל $g(h(n))=n+1-1=n$). לפיכך, לפי הנחת השלילה $f\circ h=id_{\mathbb{N}}$ ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(h(n))=n$ ובפרט בעבור $n=2$ אך:

$$f(h(n))=f(n+1)=n+2=4\neq 2=id_{\mathbb{N}}(n)$$

וזו סתירה.

שאלה 5

סעיף (א) - הוכחה

טענה: תהי A קבוצה ויהיו R,S יחסי שקילות על A, $T:=R\cap S$ יחס שקילות

צ.ל.: להוכיח את הטענה

הוכחה:

רפלקסיביות: יהי $a\in A$, נסיק $\langle a,a\rangle\in R\wedge\langle a,a\rangle\in S$ מתוך רפלקסיביות היחסים להלן, נוכיח aTa. לפי מה שהסקנו, בהתאם להגדרת $\cap$, נסיק $\langle a,a\rangle\in T$, וסה"כ aTa כדרוש.

סימטריות: יהיו $a,b\in A$. נניח aTb ונוכיח bTa. לפי ההנחה והגדרת $\cap$, $\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle a,b\rangle\in S$, ולכן מתוך סימטריות היחסים R,S נסיק $\langle b,a\rangle\in R\wedge\langle b,a\rangle\in S$ וסה"כ $\langle b,a\rangle\in T$ כלומר bTa כדרוש.

טרנזיטיביות: יהיו $a,b,c\in A$, ונניח $aTb\wedge bTc$ (או באופן שקול בהתאם להגדרת $\cap$ נניח $\langle a,b\rangle\in S,R\wedge\langle b,c\rangle\in S,R$) ונוכיח aTc. לפי ההנחה וטרנזיטיביות S,R נסיק $\langle a,c\rangle\in R,S$, כלומר $\langle a,c\rangle\in R\cap S$ וסה"כ aTc כדרוש.

סעיף (ב) - הפרכה

טענה: תהי A קבוצה, ויהיו R,S יחסי שקילות, נגרר $R\cup S$ יחס שקילות.

צ.ל.: הפרכת הטענה.

הוכחה: נשלול טרנזיטיביות. נבחר יחסי שקילות R_1, R_2 על $A := \{1,2,3\}$ המוגדרים באופן הבא:

$$R_1 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

נתבונן ב־$R_1 \cup R_2$, ונניח בשלילה את נכונות הטענה. ידוע, $\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle \in R_1 \cup R_2$ (זאת כי $\langle 1,2\rangle \in R_1 \land \langle 2,3\rangle \in R_2$) ונסיק מהנחת השלילה ש־$\langle 1,3\rangle \in R_3$ כך $\langle 1,3\rangle \notin R_1, R_2$ וסה"כ הגענו לסתירה.

סעיף (ג) - הפכה

טענה: יהיו R, S יחסים טרנזיטיביים על הקבוצה A, נגרר $R \circ S$ טרנזיטיבי גם הוא.

צ.ל.: סתירת הטענה.

הוכחה: נבחר $A = \{1,2,3,4,5\}$. נוסף על כך, נבחר:

$$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$$
$$R = \{\langle 2,3\rangle, \langle 4,5\rangle\}$$

כאשר שניהם מקיימים טרנזיטיביות באופן ריק. נניח בשלילה שהטענה נכונה. נתבונן בהרכבה $R \circ S$, ונסיק:

$$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,5\rangle\}$$

לפי הנחת השלילה, $R \circ S$ טרנזיטיבי, ולכן $\langle 1,5\rangle \in R \circ S$, וזו סתירה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

שאלה 6

סעיף (א)

נתון: יהי R יחס שקילות מעל A, נוכיח $a, b \in A$.

צ.ל.: $([a]_R \cap [b]_R = \emptyset) \lor ([a]_R = [b]_R)$

הוכחה: בהתאם לשקילות לפסוק גרירה, נניח $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, ונוכיח $[a]_R \neq [b]_R$. לפי ההנחה, יהי $x \in A$, ידוע $x \in [a]_R \land x \in [b]_R \longleftrightarrow x \in \emptyset$ (זאת בהתאם להגדרת $\cap$ ושוויון קבוצות), או באופן שקול $xRa \land cRb \longleftrightarrow x \in \emptyset$ (זאת בהתאם להגדרת מחלקת השקילות). נניח בשלילה ש־$[a]_R = [b]_R$. לפיכך, נגרר שלכל $x \in A$ מתקיים $xRa \longrightarrow xRb$ (זאת בהתאם להגדרת מחלקת השקילות והכלה דו כיוונית). כלומר, נניח xRa ונסיק xRb, אך זו סתירה כי בהתאם לנתון זה גורר פסוק שקר (או באופן שקול: $x \in \emptyset$, המהווה פסוק שקר).

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף (ב)

נתון: תהי A קבוצה, ויהי R יחס שקילות על A, יהיו a, b.

צ.ל.: $aRb \iff a \in [b]_R \iff [a]_R = [b]_R$

הוכחה:

נוכיח שקילות באמצעות שרשרת גרירות:

- i גורר ii: נניח aRb, נוכיח $a \in [b]_R$. צ.ל. $a \in A \wedge aRb$. הטענה aRb נכונה ישירות מהנתון. נשאר להוכיח ש־$a \in A$; נניח בשלילה ש־$a \notin A$, וידוע $\langle a,b\rangle \in R$ מתוך הנתון, כמו כן ידוע R על A כלומר $R \subseteq A^2$ ונסיק $\forall \langle x,y\rangle \in R.x \in A \wedge y \in A$ ובפרט כאשר $x = a$, וזו סתירה להנחת השלילה. סה"כ $a \in [b]_R$ כדרוש.
- ii גורר iii: נניח $a \in [b]_R$, ונוכיח $[a]_R = [b]_R$. נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:
  - יהי $x \in [a]_R$, ונסיק xRa, נוכיח $x \in [b]_R$ ובאופן שקול נוכיח xRb. מתוך ההנחה, aRb, ולכן משום שידוע $aRb \wedge xRa$ ולפי טרנזיטיביות יחס השקילות R, נסיק xRb כדרוש.
  - יהי $x \in [b]_R$, ונסיק xRb. נוכיח $x \in [a]_R$, ובאופן שקול נוכיח xRa. מתוך ההנחה, aRb, ולכן לפי טרנזיטיביות יחס השקילות R נסיק xRa כדרוש.
- iii גורר i: נניח $[a]_R = [b]_R$, ונוכיח aRb. באופן שקול להנחה, לכל x מתקיים $xRb \longleftrightarrow xRa$. נפלג למקרים: אם A קבוצה ריקה, אז $a,b \in A = \emptyset$ ולכן סה"כ הטענה מתקיימת באופן ריק (כי $[a]_R$ לא מוגדר), ואם A אינה קבוצה ריקה אז קיים $x \in A$ בעבורו $xRb \longleftrightarrow xRa$, ולכן מתוך טרנזיטיביות יחס השקילות R נסיק aRb כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

שאלה 7

סעיף (א)

נתון: R יחס שקילות על A, עבורו ידוע $\exists x \in A.\forall y \in A.xRy$.

צ.ל.: $R = A \times A$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

- יהי $\langle a,b\rangle \in A \times A$, ולכן $a,b \in A$. צ.ל. $\langle a,b\rangle \in R$. מתוך הנתון, ידוע שקיים $x \in A$ שבעבורו $xRa \wedge xRy$, ולכן לפי טרנזיטיביות יחס השקילות R נסיק aRb או באופן שקול $\langle a,b\rangle \in R$ כדרוש.
- צ.ל. $R \subseteq A \times A$, שנגרר ישירות מהנתון R יחס על A.

$\mathscr{Q.E.D.}$ $\blacksquare$

סעיף (ב)

נתון: יהי T יחס שקילות על A. ידוע $R \subseteq T$

צ.ל.: $T = A \times A$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית;

- $A \times A \subseteq T$: יהי $\langle a,b\rangle \in A \times A$, נסיק $a,b \in A$. צ.ל. $\langle a,b\rangle \in T$. מתוך ההנחה, ומשום ש־$a,b \in A$, קיים x שבעבורו $\langle x,a\rangle \in R \wedge \langle x,b\rangle \in R$. משום ש־$R \subseteq T$, אז לכל $\langle c,d\rangle \in R$ מתקיים $\langle c,d\rangle \in T$, ובפרט $\langle x,a\rangle, \langle x,b\rangle$. סה"כ $\langle x,a\rangle, \langle x,b\rangle \in T$. מתוך הטרנזיטיביות של יחס השקילות T ידוע $\langle a,b\rangle \in T$, כדרוש.

- $T \subseteq A \times A$: שקול לנתון T יחס על A ובפרט נגרר ממנו.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג)

נתון: יהי $A = \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, יהי יחס R על $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ המוגדר באופן הבא:

$$R = \left\{(R_1, R_2) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2 \colon R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1\right\}$$

צ.ל.: $\exists x \in A.\forall y \in A.xRy$, להפריך R יחס שקילות.

הוכחה: נוכיח בנפרד את שתי הטענות אותן נתבקשנו להוכיח.

- $\exists x \in A.\forall y \in A.xRy$: נבחר $x = id_A = id_{\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}$. יהי $y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, נוכיח xRy. בהתאם לעקרון ההחלפה, צ.ל. $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})^2$ (שמתקיים ישרות מהגדרת מכפלה קרטזית) וצ.ל. $x \circ y = y \circ x$. באופן שקול, צ.ל. $id_A \circ y = y \circ id_A$, אשר מתקיים ישירות לפי משפט נתון. סה"כ xRy, כדרוש.
- R אינו יחס שקילות: מתוך חוקי דה־מורגן, די בלהפריך טרנזיטיביות. נניח בשלילה שהיחס טרנזיטיבי ונראה דוגמה נגדית. נבחר את היחסים מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$; $R_1 = \{\langle 0,1\rangle\}, R_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}, R_3 = \{\langle 1,0\rangle\}$. משום ש־$R_1 \circ R_2 = \{\langle 0,1\rangle\} = R_2 \circ R_1$, וגם $R_2 \circ R_3 = \{\langle 1,0\rangle\} = R_3 \circ R_2$, אז $R_1RR_2 \wedge R_2RR_3$ ולכן מהנחת השלילה R_1RR_3 כלומר $R_1 \circ R_3 = R_3 \circ R_1$ אך $R_1 \circ R_3 = \{\langle 0,0\rangle\} \neq \{\langle 1,1\rangle\} = R_3 \circ R_1$ וסה"כ ישנה סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 8

סעיף (א)

נתון: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ויהי R יחס מעל A. נגדיר $R^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$

צ.ל.: R^* טרנזיטיבי

הוכחה: יהיו $a, b, c \in A$, ונניח $aR^*b \wedge bR^*c$. צ.ל. aR^*c. מתוך ההנחה והגדרת $\bigcup$, קיים $k \in \mathbb{N}_+$ שבעבורו $aR^{(k)}b \wedge bR^{(k)}c$. נתבונן ב־$R^+ := R^{(k)} \circ R^{(k)}$. נטען aR^+c, ונוכיח זאת לפי הגדרת $\circ$ שדורשת מציאת $\tilde{b} \in A$ שבעבורו $aR^{(k)}\tilde{b} \wedge \tilde{b}R^{(k)}c$, ונשים לב שאלו בדיוק התנאים ש־b מתקיים, כלומר נבחר $b = \tilde{b}$ וסה"כ aR^+c. מתוך המשפט הנתון לנו, $R^+ = R^{(k)} \circ R^{(k)} = R^{(k+k)}$, ולכן סה"כ הסקנו $aR^{(2k)}c$. משום ש־$2k \in \mathbb{N}$ כי כפל טבעיים טבעי, אז קיים $\tilde{k} = 2k \in \mathbb{N}$ המקיים $R^{(2k)} = R^{(\tilde{k})}$, וסה"כ לפי הגדרת $\bigcup$ נסיק $R^{(2k)} \subseteq R^*$, ולכן משום שהוכחנו $\langle a, c\rangle \in R^{(2k)}$ אז לפי הגדרת הכלה $\langle a, c\rangle \in R^*$ ובאופן שקול aR^*c כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה, ויהי R יחס מעל A

צ.ל.: $R \subseteq R^* \wedge \forall S \subseteq A \times A.R \subseteq S \implies R^* \subseteq S$

הוכחה: נפרק לשני דברים אשר צ.ל.:

- $R \subseteq R^*$: צ.ל. קיום $k \in \mathbb{N}_+$ שבעבורו $R = R^{(k)}$, נבחר $k = 1$ ולכן לפי הגדרה $R = R^{(k)}$ כדרוש.
- $\forall S \subseteq A \times A. R \subseteq S \implies R^* \subseteq S$: יהי S יחס טרנזיטיבי מעל A, ונניח $R \subseteq S$. נוכיח $R^* \subseteq S$. ראשית כל, נוכיח ש־$R^* \subseteq S^*$, באמצעות אינדוקציה על $\forall k \in \mathbb{N}_+ . R^{(k)} \subseteq S^{(k)}$:
  - בסיס: צ.ל. $R^{(1)} \subseteq S^{(1)}$, ובאופן שקול $R \subseteq S$, שנגרר ישירות מההנחה.
  - צעד: נניח $R^{(k)} \subseteq S^{(k)}$, ונוכיח $R^{(k+1)} \subseteq S^{(k+1)}$; יהי $\langle a,c\rangle \in R^{(k+1)}$, נוכיח $\langle a,c\rangle \in S^{(k+1)}$. מהגדרת הרכבה של יחס, $\langle a,c\rangle \in R^{(k)} \circ R$, ולכן, קיים $b \in A$ בעבורו $\langle a,b\rangle \in R^{(k)} \wedge \langle b,c\rangle \in R$, ולכן מתוך ההנחה $\langle b,c\rangle \in S$ וה.א. $\langle a,b\rangle \in S^{(k)}$ ומהגדרת הרכבת יחסים $\langle a,c\rangle \in S^{(k)} \circ S$, ובאופן שקול $\langle a,c\rangle \in S^{(k+1)}$ כדרוש.

  נוכיח $S^* = S$, באמצעות הכלה דו־כיוונית:
  - $S \subseteq S^*$: נכון באופן טריוואלי מהגדרת הסגור הטרנזיטיבי.
  - $S^* \subseteq S$: נוכיח באינדוקציה $S^{(k)} \subseteq S$:
    - בסיס: צ.ל. $S^{(1)} \subseteq S$, כלומר $S \subseteq S$, המתקיים כי נתונה הדיקות ($S = S$).
    - צעד: נניח $S^{(k)} \subseteq S$, ונוכיח $S^{(k+1)} \subseteq S$. יהי $\langle a,c\rangle \in S^{(k+1)}$, ובאופן שקול קיים $b \in A$ בעבורו $\langle a,b\rangle \in S^{(k)} \wedge \langle b,c\rangle \in S$. מתוך ההנחה, $\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S$, ומתוך טרנזיטיביות S נסיק $\langle a,c\rangle \in S$, כדרוש.

  סה"כ, $R^* \subseteq S^* \wedge S^* = S$, נציב ונקבל $R^* \subseteq S$ כדרוש.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף (ג)

נתון: $R = \left\{\langle\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a = c \vee b = d\right\}$

צ.ל.: $R^* = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

הוכחה: נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

- $R^* \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$: נוכיח באינדוקציה על k.
  - בסיס: ע"פ הגדרת הכלה, יהי $\langle a,b\rangle \in R^{(k)}$, נוכיח $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $\langle a,b\rangle \in R^{(1)} = R$: לפי עקרון ההפרדה נגרר $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ כדרוש.
  - צעד: נניח על k ונוכיח על $k+1$, ידוע $R^{(k+1)} = R^{(k)} \circ R$ ומשום שלפי ה.א. + עקרון ההפרדה ידוע $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge R^{(k)} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ אז לפי הגדרת הרכבה $R^{(k+1)} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ כדרוש.
- $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \subseteq R^*$: יהיו $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, נוכיח $\langle a,b\rangle R^* \langle c,d\rangle$. בניסוח שקול, צ.ל. קיום $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו $\langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle$. נבחר $k = 2$, ולכן ע"פ הגדרה $R^{(k)} = R \circ R$. לכן, צ.ל. $\langle a,b\rangle R \circ R \langle c,d\rangle$ ובאופן שקול נוכיח קיום $a', b' \in A$ שבעבורם:

$$\langle a,b\rangle R \langle a',b'\rangle \wedge \langle a',b'\rangle R \langle c,d\rangle$$

נבחר $a'=a, b'=d$ ולכן צ.ל.: $\langle a,b\rangle R\langle a,d\rangle \wedge \langle a,d\rangle R\langle c,d\rangle$. לכן, לפי עקרון ההפרדה, צ.ל. $a',b',a,c,c,d\in A$ (שכמובן מתקיים לפי הגדרתם + הצבה), וגם $(a=c\vee d=d)\wedge(a=a\vee b=d)$ ומשום ש־$a=a\wedge d=d$ פסוק אמת זה גם מתקיים. סה"כ $\langle a,b\rangle R\circ R\langle c,d\rangle$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 9

סעיף (א)

נתון: יהי R יחס מעל A, נגדיר $Sym(R)=R\cup R^{-1}$

צ.ל.: $Sym(R)$ יחס סימטרי

הוכחה: יהי $\langle a,b\rangle\in Sym(R)$, נוכיח $\langle b,a\rangle\in Sym(R)$. נפלג למקרים: ידוע $\langle a,b\rangle\in R\cup R^{-1}$, ולכן $\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^{-1}$:

- אם $\langle a,b\rangle\in R$: לכן, $\langle b,a\rangle\in R^{-1}$ לפי הגדרה, ולכן $\langle b,a\rangle\in Sym(R)$ לפי הגדרת $\cup$.
- אם $\langle a,b\rangle\in R^{-1}$: לכן, $\langle b,a\rangle\in R$ לפי הגדרה, ולכן $\langle b,a\rangle\in Sym(R)$ לפי הגדרת $\cup$.

סה"כ $\langle b,a\rangle\in Sym(R)$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

נתון: יהי S יחס סימטרי מעל A, ידוע $R\subseteq S$

צ.ל.: $R\subseteq Sym(R)\wedge Sym(R)\subseteq S$

הוכחה: נוכיח את שתי הטענות אשר הכרחיות להוכחה:

- $R\subseteq Sym(R)$: יהי $\langle a,b\rangle\in R$, לפיכך $\langle a,b\rangle\in R\cup R^{-1}$ לפי הגדרת $\cup$ ולכן $\langle a,b\rangle\in Sym(R)$ כדרוש.
- $Sym(R)\subseteq S$: יהי $\langle a,b\rangle\in Sym(R)$, לפיכך $\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^{-1}$, נפלג למקרים ונוכיח $\langle a,b\rangle\in S$:
  - $\langle a,b\rangle\in R$: ידוע $R\subseteq S$ ולכן לכל $\langle\tilde{a},\tilde{b}\rangle\in R$ מתקיים $\langle\tilde{a}.\tilde{b}\rangle\in S$ ובפרט $\langle a,b\rangle$ ולכן $\langle a,b\rangle\in S$ כדרוש.
  - $\langle a,b\rangle\in R^{-1}$: ולכן $\langle b,a\rangle\in R$, ולכן באופן דומה למקרה הקודם $\langle b,a\rangle\in S$, ומשום ש־S יחס סימטרי אז $\langle a,b\rangle\in S$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג) - סתירה

נתון: $A\neq\emptyset$, $R_+:=Sym(R^*\cup id_A)$

צ.ל.: R_+ אינו יחס שקילות

הוכחה:

ראשית כל, היחס $R^* \cup id_A$ הוא יחס מעל A כי R^*, id_A מעל A ולכן נניח בשלילה שקיים $\langle a,b\rangle \in R^* \cup id_A$ שאינו ב־A^2 וסה"כ נסיק $\langle a,b\rangle \in id_A \vee \langle a,b\rangle \in R^*$, בשני המקרים זו סתירה. באופן דומה, $Sym(R)$ לכל R מעל A הוא בעצמו יחס מעל A, וסה"כ R_+ מעל A.

עתה, נפריך R_+ יחס שקילות. נניח בשלילה שהוא יחס שקילות ונראה דוגמה נגדית. נבחר $A = \{1,2,3\}$ ונבחר $R = \{\langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$. נסיק:

$$\begin{aligned} R_+ &= Sym(R^* \cup id_A) = R^* \cup id_A \cup (R^* \cup id_A)^{-1} \\ &= \{\langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\} \cup \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\} \cup (\{\langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\} \cup \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle)^{-1} \\ &= \{\langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\} \end{aligned}$$

ולכן מהנחת השלילה משום ש־$\langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle \in R_+$ אז $\langle 2,1\rangle \in R_+$ אך זו סתירה.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

~ סוף ~