

## מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 19

להגשה עד יום שלישי 28.5.24 ב-23:59.

1. בכמה דרכים ניתן לחלק 55 כדורים זהים ל-5 תאים (שוניים) כך שבתא ה- $i$  לא יהיו יותר מ-10 כדורים?
  2.  $A = \{1, \dots, 2023\}$ . בשאלה או נחשיב על תמורות של  $A$  כעל מחזורות באורך  $|A|$  שכל תוויהן שונים (התווים הם איברים של הקבוצה  $A$ ).  
(א) בכמה תמורות של  $A$  מופיעים שני הרצפים 1, 2 ו-3, 4? בכמה תמורות מופיע הרצף 5, 6, 7?  
(ב) בכמה תמורות של  $A$  לא מופיע שום רצף מהצורה  $i, i+1$ ? נמקד.
  3. כמה מספרים שלמים יש בין 1 ל-1000 שלא מתחלקים באף אחד מהמספרים 4, 6, 9?
  4. בבית הספר לפסיכולוגיה 100 סטודנטים לומדים את הקורס "עקרונות ההכלה וההקשבה". כל סטודנט מקבל ציון שהוא מספר טבעי בין 0 ל-100 שמתחלק ב-5. צוות הקורס החליט שהממוצע בקורס יהיה לפחות 60. בכמה דרכים יכולים המרצים לחלק ציונים לסטודנטים בקורס?
  5. נאמר שפונקציה  $f: [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$  היא מונוטונית עולה חלש ביחס להכלה אם  $\forall i, j \in [n]. i \leq j \rightarrow f(i) \subseteq f(j)$ .  
פונקציה כזו היא מונוטונית כולה חזק ביחס להכלה אם  $\forall i, j \in [n]. i \leq j \rightarrow f(i) \subsetneq f(j)$ .  
(א) כמה פונקציות  $f: [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$  הן מונוטוניות עולות חלש ביחס להכלה?  
(ב) כמה פונקציות  $f: [n] \rightarrow \mathcal{P}([k])$  הן מונוטוניות עולות חזק ביחס להכלה?
  6. נסמן ב- $U = \{0, 1\}^{2n}$  את אוסף המחרוזות הבינאריות באורך  $2n$ . נגדיר את  $A_i = \{x \in U \mid x_i = 0 \wedge x_{i+1} = 1\}$  עבור  $1 \leq i \leq 2n$ .  
(א) תהי  $J \in \mathcal{P}_r([2n-1])$ , מה עוצמת החיתוך  $\bigcap_{j \in J} A_j$ ? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- $J$ ).  
עבור כמה  $J \in \mathcal{P}_r([2n-1])$  החיתוך  $\bigcap_{j \in J} A_j$  אינו ריק?  
(סימון:  $\mathcal{P}_r(X)$  היא קבוצת כל תתי הקבוצות של קבוצה  $X$  שהן בגודל  $r$ ).  
(ב) הוכיחו על ידי שיקול קומבינטורי את הזהות הבאה:
- $$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{2n-r}{r} 2^{2n-2r} = 2n+1$$

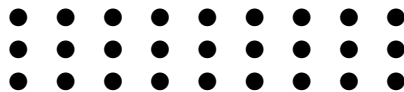
7. בכמה דרכים ניתן לסדר את האותיות במילה boondoggle כך שלא יופיעו הרצפים oo, gg, le, el?

8. נתון ריבוע עם צלע באורך 7 ס"מ ובתוכו 51 נקודות. הוכיחו שקיימות שלוש נקודות שניתן לכסות ע"י עיגול שרדיוסו 1.

9. הוכיחו שלכל מספר טבעי  $n$  ואי  $k$  קיים מספר טבעי  $n > 0$  כך ש- $k$  מחלק את  $2^n$ .

10. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) 27 נקודות מצוירות בשורות כך שיש 3 שורות ובכל שורה 9 נקודות, באופן המזכיר רשת:



כל נקודה צבועה בצבע סגול או כתום. הוכיחו כי קיים מלבן על גבי הרשת שפינותיו הן 4 נקודות שונות שכל קודקודיו הם באותו הצבע (מותר למתוח קווים ברשת רק לאורך העמודות או לאורך השורות).

~~(ב) האם הדבר נכון גם לכל רשת עם 3 שורות ו-7 עמודות (במקום 9 עמודות)? הוכיחו/הפריכו.~~

~~11. הוכיחו שבכל קבוצה של 2023 מספרים טבעיים קיימים שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-4041.~~

~~12. 10 סינים ו-10 יפנים יושבים סביב שולחן עגול מסתובב ולא מוכנים לקום. על השולחן יש 20 מסכי טלוויזיה אישיים שבהם מוקרן הסרט "מלך האריות" עם תרגום. ב-10 מסכים התרגום הוא ביפנית וב-10 מסכים התרגום הוא בסינית. הוכיחו שניתן לסובב את השולחן עם המסכים כך שלפחות 10 אנשים יבינו את התרגום.~~

~~13. מרצה מכיר 9 בדיחות, ובכל שבוע בהרצאה הוא מספר שלוש בדיחות שונות זו מזו. הוכיחו כי עד סוף הסמסטר (לאחר 13 שבועות/הרצאות), בהכרח יהיו שתי בדיחות שסופרו יחד בלפחות שתי הרצאות.~~