עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

להגשה עד פתיחת שנת הלימודים, יום ראשון 3.11.2024.

1 קומבינטוריקה

~~1.~~

~~(א)~~ כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים (מארבע הצורות יהלום, לב, תלתן ועלה) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני? נמקו תשובתכם.
הבהרה: מותר ששניים או שלושה אסים יופיעו ברצף, אך לא כל הארבעה.

~~(ב)~~ כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן כל 4 קלפים מאותו סוג (אס, 2, 3, ..., 10, נסיך, מלכה, מלך) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני? נמקו תשובתכם. ניתן להשאיר תשובה עם סכימה.
הבהרה: מותר ששניים או שלושה קלפים מאותו סוג יופיעו ברצף, אך לא כל הארבעה.

~~2.~~ נתון סריג דו־מימדי. נאמר שמסלול בסריג הוא חוקי, אם בכל צעד מנקודה $\langle x,y\rangle$ ניתן לנוע אך ורק לנקודות מהצורה $\langle x+1,y+r\rangle$ לכל $r\in\mathbb{N}$.

לדוגמה, $\langle 0,0\rangle\to\langle 1,0\rangle\to\langle 2,2\rangle\to\langle 3,5\rangle$ הוא מסלול חוקי של שלושה צעדים מהנקודה $\langle 0,0\rangle$ לנקודה $\langle 3,5\rangle$.

~~(א)~~ כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$?

~~(ב)~~ כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle 2n,2k\rangle$ שאף צעד בהם אינו מסתיים בנקודה $\langle n,k\rangle$?

~~(ג)~~ כמה מסלולים חוקיים קיימים מהנקודה $\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$ כך שבכל צעד $\langle x_1,y_1\rangle\to\langle x_2,y_2\rangle$ בהם מתקיים $y_1+2\le y_2$?

3. נתונים n כדורים ממוספרים $1,2,...,n$. יש לסדרם ב־n תאים הממוספרים $1,2,...,n$ כך שבכל תא יימצא בדיוק כדור אחד. כמו כן, לכל $1\le i\le n-1$ אסור להכניס את הכדור ה־i לתא ה־i (אין מגבלה על הכדור ה־n). נסמן ב־$F(n)$ את מספר האפשרויות לסדר את הכדורים תחת האילוצים הנ"ל.

~~(א)~~ הביעו את $F(n)$ בעזרת D_m (מספר התמורות ללא נקודות שבת על m איברים).

(ב) מצאו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה מתאימים עבור $F(n)$. בסעיף זה אין להשתמש ב־D_m וכמו כן אין להשתמש בסימן הסכימה.

4.

(א) הוכיחו את הזהות הבאה באופן קומבינטורי וללא מניפולציות אלגבריות על המשוואה:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+r-i-1}{r}=\binom{r-1}{n-1}$$

~~(ב)~~ מצאו ביטוי ללא סכימה לסכום הבא:

$$\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$$

5. תהיינה $(a_i)_{i=1}^{2n}$, $(b_i)_{i=1}^{2n}$ שתי סדרות באורך $2n$ של מספרים שלמים כך שלכל $1\le i\le 2n$ מתקיים $1\le a_i\le n$ וגם $1\le b_i\le n$. הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של אינדקסים $I,J\subseteq[2n]$ עבורן מתקיים $\sum_{i\in I}a_i=\sum_{j\in J}b_j$.

C 3b, 4a, 5

2 תורת הגרפים

~~1.~~ הוכיחו או הפריכו:

~~(א)~~ קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: $1,3,3,3,4,5$.

~~(ב)~~ קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: $1,3,3,3,5,5$.

~~(ג)~~ קיים גרף עם 6 צמתים מדרגות: $1,3,3,3,4,4$.

~~2.~~

~~(א)~~ הוכיחו שבכל עץ עם $n \geq 2$ צמתים יש לפחות שני עלים (עלה הוא צומת מדרגה 1).

(ב) יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף. נאמר שקשת $e \in E$ היא **גשר** אם לגרף $G' = \langle V, E \setminus \{e\}\rangle$ יש יותר רכיבי קשירות מאשר ל־G. הוכיחו כי אם דרגת כל צומת ב־G היא זוגית אז ב־G אין גשר.

~~3.~~ יהי $G = \langle V, E\rangle$ גרף שבו לכל צומת $v \in V$ מתקיים $d(v) \geq k > 1$. הוכיחו כי ב־G קיים מעגל פשוט באורך לפחות $k+1$.

4. יהי $G = \langle [n], E_G\rangle$ גרף. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על G, עבורו לכל גרף $H = \langle [n], E_H\rangle$ שאיזומורפי ל־G מתקיים $G = H$. הוכיחו את תשובתכם.

~~5.~~ יהי $G_1 = \langle V, E_1\rangle, G_2 = \langle V, E_2\rangle$ המוגדרים באופן הבא: $V = \{1,2,...,100\}$,

$$E_1 = \{\{a,b\} : |a-b| = 10 \vee |a-b| = 90\}$$
$$E_2 = \{\{a,b\} : |a-b| = 11 \vee |a-b| = 89\}$$

האם G_1 איזומורפי ל־G_2? אם כן, בנו את האיזומורפיזם. אם לא, הוכיחו זאת.

~~6.~~ הוכיחו שגרף $G = \langle V, E\rangle$ הוא עץ אמ"מ יש מסלול פשוט <u>יחיד</u> בין כל שני צמתים.

~~7.~~ נתון עץ $T = \langle V, E\rangle$ וקודקוד $v \in V$. אם נסיר מהעץ את v ואת כל הקשתות הנוגעות בו, כמה רכיבי קשירות יהיו בגרף שיתקבל? הוכיחו את תשובתכם.

8. **תזכורת:** בהינתן $s,t \geq 1$ טבעיים, <u>מספר ראמזי</u> $R(s,t)$ הוא המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש**בכל** צביעה של **קשתות** הגרף השלם $K_{R(s,t)}$ בכחול ואדום קיים תת גרף K_s כחול או תת גרף K_t אדום. בהרצאה ראיתם שלכל $s,t \geq 2$ מתקיים

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

(א) יהיו $s,t \geq 2$ טבעיים כלשהם. הוכיחו שאם $R(s-1,t)$ וכן $R(s,t-1)$ שניהם זוגיים, אז

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) - 1$$

<u>הדרכה:</u> סמנו $R(s-1,t) = 2m$, $R(s,t-1) = 2n$ עבור $n,m \in \mathbb{N}_+$ מתאימים. הוכיחו תחילה שבכל צביעה של קשתות הגרף השלם $K_{2m+2n-1}$ בכחול ואדום, קיים צומת שמספר הקשתות האדומות היוצאות ממנו **אינו** $2m-1$.

(ב) היעזרו בסעיף הקודם והוכיחו שמתקיים $R(4,4) \leq 18$. (הערה: למעשה, מתקיים שוויון).

9. **תזכורת:** בהינתן גרף $G = \langle V, E\rangle$, <u>צביעה</u> חוקית (של **הצמתים**) שלו ב־k צבעים היא פונקציה $f \in V \to \{1,...,k\}$ כך שלכל קשת $\{u,v\} \in E$ מתקיים $f(v) \neq f(u)$. אם קיימת צביעה כזו, הגרף נקרא <u>k־צביע</u>. ה־k המינימלי עבורו G הוא k־צביע נקרא <u>מספר הצביעה</u> של G, ומסומן $\chi(G)$.

הגדרה: בגרף $G = \langle V, E\rangle$ נאמר שקבוצת קודקודים $U \subseteq V$ היא <u>בלתי תלויה</u> אם אין אף צלע בין שני קודקודים של U. נסמן ב־$\alpha(G)$ את גודל קבוצה הבלתי־תלויה הגדולה ביותר.

(א) הוכיחו שלכל גרף מתקיים $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

(ב) הוכיחו שלכל גרף מתקיים $|E| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

(ג) בהינתן גרף G וקודקוד v, נסמן ב־ $G - v$ את הגרף המתקבל מהסרת v והקשתות הנוגעות בו. הוכיחו ש־

$$\chi(G-v) \in \{\chi(G), \chi(G) - 1\}$$

(ד) הוכיחו שלכל גרף G מתקיים $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$ (רמז: אינדוקציה).

~~10.~~ יהי G גרף עם $5n+1$ קודקודים. נצבע את הקודקודים ב־n צבעים. הוכיחו שב־G או ב־$\overline{G}$ יש משולש שכל הקודקודים שלו צבועים באותו הצבע.

בהצלחה!

G 9, 4