מבנ"ת ודלית

שחר פרץ

24 במרץ 2025

1 דלית

כשקורים דברים רעים – על אחריותנו. כדאי לשחזר את הדברים לאחור כדי להבין מה קרה במבחן, מה קרה בשיעורים, מה קרה לאורך הקורס וכו' ולהבין מה קורה. הדרך להבין את הדברים האלו היא הדרך לצאת מזה ולהמשיך.

בלי סריקות אין מה לדבר על מבחנים. עתה יש סריקות וכדאי להבין מה היה. על כן, בן, שהוא **אינו חלק מצוות הקורס של ליניארית 1א** (שכן אחרת אסור לראות את המבחן) לנסות להבין מה קרה. לאחר כן, הבחירה האם לערער ועל מה היא שלנו. אחת שערעור נשלח זה מחוץ לידיים של אודיסאה. כמו כן השאלות של המבחן ואופי הבדיקה שלו.

בפרקטיקה, למרות שאודיסאה לא תוכנית שנועדה לכך שתלמידים יחזרו על קורסים (זה פשוט לא קיים), מי שציונו לא משקף את יכולותיו, יוכל לעבור תהליך חריג של חזרה על הקורס. המשמעות של זה, היא שנבחן שנה הבאה בליניארית 2. זה אומר שיהיה צריך לשלם על הקורסים, נקודה אקדמית עולה 290 שקל.

המועד המיוחד יאושר בהמשך. לא לבנות עליו.

2 חזרה למבנת

תזכורות – רצינו לתת חסם amortized, לתת חסם עליון על עלות של דרת פעולה ולא פעולה בודדת, לפי עלות של סוג פעולה.

$$\text{cost}(op_1 \dots op_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{amort}(\text{type}(op_i))$$

עבור כל סדרת פעולות (בפרט worst case) מנ' התחלה בסיסית. בעיה קטנה ש-$_i^{-1}$ יכול להיארך יותר זמן כתלות באורך של המבנה (בעיה בסימון).

2.0.1 accounting

(המשך משיעור שעבר). נוכיח שההכנסה בסוף הרשימה עול $O(1)$ amortiezed, בשיטת accounting. כל הכנסה תשלם 3 מטבעות.

צ.ל. שאין מינוס בבנק.

טענה. כאשר ה־capacity של הרשימה הוא m, ויש בה $\frac{m}{2}+k$ איברים, בבנק יש לפחות $2k$ מטבעות. למה זה מוכיח את מה שצריך? כי $2k > 1$ וצריך להוכיח שאין לנו מינוס בבנק.

הוכחת הטענה. נתחיל עם $M = 1$ ובלי איברים הטענה נכונה. אחרת נניח כרגע שהטענה מתקיימת ונכנס איבר חדש. אז:

- הכנסה זולה, ואז אז היתרה גדלה ב־2 והטענה מתקיימת.
- הכנסה יקרה, כלומר $k = \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil$ ויש $2k \geq M$ מטבעות. לכן נעתיק את M האיברים ונכפיל תא הקיבולת. נוסיף 3 מטבעות ונמשוך מטבע אחר ו־$k = 1$ (עבור ה־M החדש) ובטענה מתקיימת (נשארו 2 מטבעות בבנק).

2.0.2 שיטת Potential

(פוטנציאל). נגדיר פונ' שאפשר לחשב עליה כמו והיא מתארת מה היתרה בבנק.

נגדיר פונ' ϕ שמתארת את היתרה בבנק בכל רגע. אז ϕ_i היא היתקה לאחר פעולה op_i. אז $\text{amort}(_i^{-1}) = \text{cost}(_i^{-1}) + \phi_i - \phi_{i+1}$. ההגיון: אם $\phi_i < \phi_{i+1}$ אומר שהפעולה יקרה וזה יקטין את היתרה, אך יקטין את העלות, ופעולות זולות יהפכו את ההפך.

כאן amort מוגדר עבור פעולה, ובסוף ניקח את ה־worst case עבור type של פעולה.

במקרה הזה, נגדיר $\phi(M,n) = 2n - M$. כאשר M ה־capacity, ממש כמו בסעיף הקודם. למעשה יותר במדויק:

$$\phi(M,n) = \begin{cases} 2n - M & n \geq \frac{M}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כאשר M הקיבולת בזכרון של הרשימה, ו־n האינדקס שנכניס. כמו בסעיף הקודם נפרק למקרים.

- בהכנסה זולה, $n \to n+1, M \to M\ (n<m)$ אז

$$\text{cost} = 1 + (2(n+1) - M) - (2n - M) = 3$$

בהכנסה יקרה, $n = M$, אז $n \to n+1,\ \ M \to 2M$ ואז:

$$\text{cost} = \underbrace{n+1}_{\text{הכנסה}} + \underbrace{(2(n+1) - 2M) - (2n - M)}_{2-M=2-n} = n + 1 + 2 - n = 3$$

2.1 הורדת איבר מרשימה

אם נקטין כאשר $n = \frac{M}{2}$ נבחין בבעיה: יהיו לנו אוסילציות על החסרה והורדה רפטטיבית על חזקות של 2 (נגיע לרצף פעולות יקרות של מחיקה והוספה). לכן, נעשה זאת כאשר $n = \frac{M}{4}$. נוכיח שזה עובד.

הוספה: נשלם 3 מטבעות; מחיקה: נשלם 2 מטבעות.

טענה. היתרה בבנק מקיימת: אם $n = \frac{M}{2} + k$ יש לפחות $2k$ מטבעות. אם $n = \frac{M}{2} - k$ יש לפחות k מטבעות. בשני המקרים $k \geq 0$.

נוכיח עם פונק פוטנציאל. נגדיר:

$$\phi(M, n) = \begin{cases} 0 & n < \frac{M}{4} \\ 2n - M & n \frac{M}{2} \\ \frac{M}{2} - n & m < \frac{M}{2} \end{cases}$$

2.2 באמת $O(1)$

איך נעשה את זה לא $\text{amort} = O(1)$ אלא ב־worst case לכל אופרציה?

נשמור 2 רשימות. כשנגמר המקום ברשימה הקטנה, באורך M (נגיד ועכשיו $n = M$), ניצור רשימה באורך $4m$ חדשה במילים אחרות, במקום להכניס לבנק, אני ארשום כבר ישירות לזכרון. כאשר נכניס את המיקום ה־$n+1$ לזכרון, נשמור את שני האיברים הראשונים מהמערך הבינוני באורך $2M$ במערך בגודל $4M$.