

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 4

להגשה עד יום רביעי 6.12.23

1. נתון אוסף של קבוצות $\{A_i \mid i \in I\}$ ונתונה קבוצה B . הוכיחו:

(א) אם לכל $i \in I$ מתקיים $A_i \subseteq B$, אז $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$.

(ב) אם לכל $i \in I$ מתקיים $B \subseteq A_i$, אז $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

2. פשטו את הקבוצות הבאות והוכיחו את קביעתכם.

הערה: במידת הצורך, תוכלו להשתמש בתכונות ארכימדס של המספרים הממשיים: לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $x < n$.
בפרט, ניתן להסיק כי לכל $x > 0$ קיים $n \in \mathbb{N}_+$ כך ש- $\frac{1}{n} < x$.

(א) $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (m, m+1)$

(ב) $\bigcup_{k=2}^{\infty} [\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$

(ג) עבור מספר $\varepsilon > 0$ קבוע, $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q - \varepsilon, q + \varepsilon)$

(ד) $\bigcap_{x \in (1, 1000)} [1, x]$

(ה) $\bigcap_{x \in [0, 1]} [x, x+1]$

(ו) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} (q - \frac{2}{n}, q + \frac{2}{n}) \right)$

(ז) $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} (z, z + \frac{2}{n}) \right)$

(ח) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$

3. בכל סעיף להלן מתוארת קבוצה עם כמות סופית של איברים. רשמו אותה במפורש, והוכיחו את השוויון.

(א) $[0, 5] \triangle \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} [1 - \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}]$

(ב) $\{0\} \triangle \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$

4. לפניכם מספר הגדרות אלטרנטיביות לזוג סדור $\langle a, b \rangle$. קבעו האם הן טובות, כלומר האם מתקיימת התכונה -

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff (a = c \wedge b = d)$$

הוכיחו את קביעתכם.

(א) $\langle a, b \rangle = \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$

(ב) $\langle a, b \rangle = \{a, \{b\}\}$

(ג) $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{\{b\}\}\}$

(ד) $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, \{b\}\}\}$

5. יהיו A, B, C, D קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(ב) A ריקה אם ורק אם $A \times A$ ריקה.

(ג) $A \times (B \cap C) = A \cap (B \times C)$

(ד) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ה) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$

(ו) $A \times B \subseteq C \times D \iff (A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D) \quad (\text{ז})$$

6. יהיו A, B, C קבוצות. בכל סעיף בנפרד, מצאו תנאי מספיק והכרחי על הקבוצות כדי שהטענה בסעיף תתקיים. הוכיחו את תשובתכם.

$$A \times B = B \times A \quad (\text{א})$$

$$C \times C = (A \times A) \cup (B \times B) \quad (\text{ב})$$