תרגיל בית 1 – אלגברה ליניארית 1א'

שחר פרץ

21 בנובמבר 2024

(1)

נחשב את הביטויים הבאים על $\mathbb{C}$:

$$(1+i)(2-5i)+(-1+i)\cdot(4+3i) = 2-5i+2i+5-4-3i+4i-3 = \boldsymbol{-2i} \tag{1}$$

$$\frac{1-7i}{4-5i}+(3-i) = \frac{(1-7i)(4+5i)}{4^2+5^2}+3-i = \frac{4+5i-28i+25}{41}+3-i = \frac{29}{41}-\frac{23}{41}i+3-i = \boldsymbol{\frac{152}{41}-\frac{64}{41}i} \tag{2}$$

$$\frac{\overline{(-3+i)}(2+4i)}{1+8i} = \frac{(-3-i)(2+4i)(1-8i)}{1+8^2} = 65^{-1}\left((-2-14i)(1-8i)\right) = 65^{-1}(-114+2i) = \boldsymbol{-1\frac{49}{65}+\frac{2}{65}i} \tag{3}$$

(2)

נמיר את המספרים הבאים להצגה פולארית (כאשר θ הזווית של z):

$$z=1+i,\ |z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \theta=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4},\ \boldsymbol{z=\sqrt{2}e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}} \tag{1}$$

$$z=\sqrt{2}i, \text{ which is a line, hence: } |z|=\sqrt{2},\ \theta=90^\circ=\frac{\pi}{2},\ z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \tag{2}$$

$$z=-7i, \text{ which is a line too, hence: } |z|=-7,\ \theta=\frac{\pi}{2},\ z=-7e^{\frac{\pi}{2}i} \tag{3}$$

$$z=-1+\sqrt{3}i,\ |z|=\left(1^2+\sqrt{3}^2\right)^{0.5}=2,\ \theta=\pi-\arctan\left(\sqrt{3}\right)\ =\frac{2}{3}\pi,\ \boldsymbol{z=2e^{\frac{2}{3}\pi i}} \tag{4}$$

(3)

נמצא את ההצגה הקרטזית של המספרים הבאים (נסמן ב־m את היחס y/x):

$$z=2e^{i\frac{\pi}{2}},\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)=\infty \implies y/x=\infty \implies x=0 \implies y=\sqrt{y^2+0}=|z|=2,\ \boldsymbol{z=2i} \tag{1}$$

$$6e^{-i\frac{\pi}{6}}=6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+-0.5i\right)=\boldsymbol{3\sqrt{3}+-3i} \tag{2}$$

(4)

נמצא את כל הפתרונות למשוואות הבאות:

א. בעבור $z^8=-1$. נסמן $z=re^{i\theta}$. כלומר:

$$r^8e^{i8\theta}=z^8=-1=e^{i\pi} \implies r^8=1\to r=1,\ 8\theta=\pi+2\pi k\to\theta\pi+\frac{k}{4}\pi$$

כאשר מחזור של $2\pi k$, כלומר די בפתרונות $k\in[8]$. וסה"כ קבוצת הפתרונות תהיה $\boldsymbol{\{e^{0.25k\pi}\mid k\in[8]\}}$

ב. בעבור $z^3=8$. נסמן $z=re^{i\theta}$.

$$(re^{i3\rangle})=z^3=8=8e^0 \implies r=8,\ \theta=0+2\pi k$$

מכיוון שבעבור כל k נמצא סיבוב שלם, סה"כ קבוצת הפתרונות תהיה $\boldsymbol{\{8\}}$

ג. בעבור $z^2 + z + 1 = 0$, נתבונן בנוסחאת השורשים:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -0.5 \pm 0.5\sqrt{3}i$$

וקבוצת הפתרונות בהתאם.

.... (5) ....

נמצא את הנגדי וההופכי של כל איבר ב־$\mathbb{Z}_7$:

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{-n}$	0	6	5	4	3	2	1
$\boldsymbol{n^{-1}}$	$\varnothing$	1	4	5	2	3	6

.... (6) ....

ידועות הטענות:

$$(a+b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$$
$$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n)) \bmod n$$
$$(a^b) \bmod n = (a \bmod n)^b \bmod n$$

ולכן:

$$\begin{aligned}(24^{100} - 4^{100}) \bmod 13 &= ((24)^{100} \bmod 13 - 16^{50} \bmod 13) \bmod 13 = (11^{100} \bmod 13 - 3^{50} \bmod 13) \bmod 13 \\ &= ((11^2 \bmod 13)^{50} - (3^5 \bmod 13)^{10}) \bmod 13 = (16^{25} \bmod 13 - 9^{10} \bmod 13) \bmod 13 = (3^{25} \bmod -81^5 \bmod 13) \bmod 13 \\ &= (9^5 \bmod 13 - 3^5 \bmod 13) \bmod 13 = (3-9) \bmod 13 = \mathbf{7}\end{aligned}$$

.... (7) ....

יהי $\mathbb{F}$ שדה. צ.ל. $\forall a,b \in \mathbb{F}.(-a)b = a(-b) = ab$

הוכחה. יהיו $a,b \in \mathbb{F}$. ניזכר בטענה מההרצאה לפיה $(-1) \cdot c = -c$, לכל c מספר בשדה, ובפרט עבור $c = a, b, ab$. לכן, מאסוציאטיביות:

$$(-a)b = ((-1)a)b = (-1)(ab) = -ab$$

ומסימטריה גם $a(-b)$ יקיים את הדרוש. ■

.... (8) ....

נתבונן בפעולות החיבור והכפל $\oplus, \otimes$ בהחלפה על $\mathbb{R}$. ננמק אילו מתכונות השדה מתקיימות או לא מתקיימות בעבור כל אחת מהן. יהיו $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ (בקונטסט הזה, אלא אם צויין אחרת);

א. נגדיר $\oplus(x,y) = x + y + 5, \otimes(x,y) = 2xy$.

- תתקיים קומטטביות חיבור: $x \oplus y = x + y + 5 = y + x + 5 = y \oplus x$
- תתקיים קומטטביות כפל: $x \otimes y = 2xy = 2yx = y \otimes x$
- תתקיים אסוציאטיביות חיבור: $(x \oplus y) \oplus z = (x+y+5)+z+5 = x+y+z+10 = x+(y+z+5)+5 = x \oplus (y \oplus z)$
- תתקיים אסוציאטיביות כפל: $(x \otimes y) \otimes z = 2(2xy)z = 4xyz = 2x(2yz) = x \otimes (y \otimes z)$
- ימצא איבר הופכי לחיבור: $x + (-x-5) = x - x - 5 + 5 = 0_{\mathbb{R}}$
- ימצא איבר הופכי לכפל: $x \cdot (0.5x^{-1}) = 2 \cdot 0.5xx^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$
- לא תתקיים דיסטרבוטיביות: בעבור $z = x = y = 1$, $(x \oplus y) \otimes z = (x+y+5) \cdot 2z = 2zx + 2zy + 10z = x \otimes z + y \otimes z + 10 \otimes z \perp$

ומשום שאין דיסטרבוטיביות זהו אינו שדה.

ב. נגדיר $\oplus = +, \ \otimes = \cdot \circ (\lambda x \in \mathbb{R}.2x)$. באופן זהה לסעיף א' בעבור הכפל שמוגדר אותו הדבר. החיבור מוגדר באופן זהה לחיבור ב־$\mathbb{R}$ ולכן קומטטיבי, אסוציאטיבי ובעל איבר נגדי. בעבור דיסטרבוטיביות:

$$(x \oplus y) \otimes z = (x+y) \cdot 2z = 2zx + 2zy = x \otimes z + y \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

ולכן זהו שדה.

ג. נגדיר $x \oplus y = x,\ x \times y = x^2$. אזי:

- תתקיים קומטטיביות חיבור: $x \oplus y = x = y \oplus x$
- תתקיים קומטטיביות כפל: $x \otimes y = x = y \otimes x$
- לא תתקיים אסוציאטיביות חיבור: בעבור $z = 1, x = 2$ $(x \oplus y) \oplus z = x \neq z = z \oplus (y \oplus x)$
- לא תתקיים אסוציאטיביות כפל: בעבור $z = 1, x = 2$ $(x \otimes y) \otimes z = (x^2)^2 = x^4 \neq z^4 = (z^2)z^2 = z \otimes (y \otimes x)$
- לא ימצא נגדי חיבור: נניח בשלילה שקיים כזה 0_O, $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0_O\}. x \oplus y = x \neq 0_O \perp$
- לא ימצא נגדי לכפל: נניח בשלילה שקיים כזה 1_O $\forall y \in \mathbb{R}. x \otimes y = x^2 \neq 1_O \perp$

  (כי לא ריבוע כל מספר הוא 1_O, כי $2^2 = 4 = 1_O = 1 = 1^2$ אך $4 \neq 1$)
- תתקיים דיסטרבוטיביות: $(x \oplus y) \otimes z = x \otimes z = x^2 = x^2 \oplus a = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

ומשום שאין אסוציאטיביות זהו אינו שדה.

....

שחר פרץ, 2024

נוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד