תרגיל בית ט

שחר פרץ

26 באוגוסט 2025

(1)

(2)

(3)

(4)

יהי $T\colon V\to V$ לינארית ונניח $V=\bigoplus W_i$ כאשר W_i הם T־איוואריאנטים. נוכל לשכל $f\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים: $f(T)(V)=\bigoplus f(T)(W_i)$.

- ראשית, נוכיח ש־$f(x)=\alpha\cdot x^k$ מקיים את הדרוש. נבחין ש־$f(T)=\alpha\cdot T^k$ ומכאן $f(T)(P)=T^k(P)$ לכל P מרחב. נבנה מטריצה מייצגת ל־T, ואז כמו שראינו בהרצאה קיים בסיס כך ש־:

$$[T]_B=\operatorname{diag}([T|_{W_1}]_B\dots[T|_{W_k}]_B)$$

עוד נבחין:

$$[T]_B^k=\operatorname{diag}([T|_{W_1}]_B^k\dots[T|_{W_k}]_B^k)$$

ממכאן נסיק ש־$[W_k]_B^k$ הם מרחבים שסכומם הישר הוא המרחב $[V]_B$, גם באותו האופן שראינו בהרצאה. העתקת הקורדינאטות היא איזו ולכן $T^k(V)=\bigoplus T^kW_i$ כדרוש.

- עתה נראה שבהינתן f,g שמקיימים את התנאי לעיל, גם $h=f+g$ מקיים את התנאי לעיל. זאת כי:

$$h(T)=g(T)+f(T)\quad\begin{cases}g(T)V=\bigoplus g(T)W_i\\ f(T)V=\bigoplus f(T)W_i\end{cases}$$

$$h(T)=g(T)(V)+f(T)(V)=\bigoplus g(T)(W_i)+\bigoplus f(T)(W_i)\overset{!}{=}\bigoplus(g(T)(W_i)+f(T)(W_i))=\bigoplus h(T)(V)$$

כאשר המעבר המסומן נכון כי אם $V=W_1\oplus W_2=V\wedge U_1\oplus U_2$ אז $(U_1+W_1)\oplus(U_2+W_2)=V$

(5)