מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 13

להגשה עד יום שלישי 20.2.24 ב־23:59.

1. נניח $\langle A,<_A\rangle$, $\langle B,<_B\rangle$ קבוצות סדורות חזק. נגדיר את הסדר הלקסיקוגרפי על $A\times B$, על ידי -

$$\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle \iff (a <_A c \ \vee \ (a=c \ \wedge \ b <_B d))$$

(א) הוכיחו כי $<_{lex}$ הוא יחס סדר חזק על $A\times B$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם קיים ב־$\langle A,<_A\rangle$ איבר מינימלי אז קיים ב־$\langle A\times B,<_{lex}\rangle$ איבר מינימלי.

2. תהי $f\in P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$. עבורה נגדיר את היחס: $R_f=\{\langle A,B\rangle \mid f(A)\subseteq f(B)\}$.

(א) מצאו תנאי הכרחי ומספיק על הפונקציה f עבורו R_f הוא יחס סדר. הוכיחו את טענתכם.

(ב) תהי $F\subseteq P(\mathbb{N})\to P(\mathbb{N})$ קבוצת הפונקציות המקיימות את התנאי של סעיף א'.
<u>הוכיחו/הפריכו:</u> הפונקציה $\lambda f\in F.\, R_f$ היא חח"ע.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) בהינתן יחס סדר חלש R מעל קבוצה **סופית** $A\neq\emptyset$, קיים $a_M\in A$ כך ש־

$$\forall b\in A.\ \langle a_M,b\rangle\in R \iff a_M=b$$

(כלומר, קיים ב־A איבר מקסימלי ביחס R)

(ב) בהינתן יחס סדר חלש R מעל קבוצה **סופית** $A\neq\emptyset$, קיים $a_M\in A$ **יחיד** כך ש־

$$\forall b\in A.\ \langle a_M,b\rangle\in R \iff a_M=b$$

4. תהי X קבוצת כל החלוקות של $\mathbb{R}$, כלומר $X=\{\pi\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))\mid \text{חלוקה של } \mathbb{R}\ \pi\}$. נגדיר יחס $\sqsubset$ על X באופן הבא: עבור $\pi_1,\pi_2\in X$,

$$\pi_1\sqsubset\pi_2 \iff \forall Z\in\pi_2\,\exists Y\in\pi_1\,(Z\subseteq Y)$$

(א) הוכיחו כי $\sqsubset$ הוא יחס סדר חלש על X.

(ב) הביאו דוגמא לשלושה איברים <u>שונים</u> $\pi_1,\pi_2,\pi_3\in X$ כך ש־ $\pi_1\sqsubset\pi_2\sqsubset\pi_3$.

(ג) האם הסדר קווי? האם יש איבר גדול ביותר? במידת הצורך תנו דוגמאות מתאימות.

5. תהיינה X,Y קבוצות לא ריקות. נניח ש־$\leq_X$ הוא יחס סדר חלש על X. נגדיר יחס $\preceq$ מעל קבוצת הפונקציות $Y\to X$:

$$f\preceq g \iff \forall y\in Y.\, f(y)\leq_X g(y)$$

בתרגול הוכחנו ש־$\preceq$ הוא יחס סדר חלש על $Y\to X$.

(א) נניח ש־$x_0\in X$ הוא איבר מקסימלי. הוכיחו ש־ $\lambda y\in Y.x_0$ הוא איבר מקסימלי ב־$Y\to X$.

(ב) **הגדרה:** בהינתן שתי קבוצות סדורות $\langle A,\leq_A\rangle$, $\langle B,\leq_B\rangle$, נאמר שפונקציה $h\in A\to B$ היא <u>שומרת סדר</u> אם לכל $a_1,a_2\in A$ מתקיים: $a_1\leq_A a_2 \iff h(a_1)\leq_B h(a_2)$.
<u>הוכיחו:</u> הפונקציה $h\in X\to(Y\to X)$ המוגדרת ע"י $h=\lambda x\in X.\,\lambda y\in Y.\,x$ היא שומרת סדר.

(ג) נניח $X=\{0,1\}$ ו־Y קבוצה לא ריקה כלשהי. נתבונן בקבוצות הסדורות $\langle\mathcal{P}\left(Y\right),\subseteq\rangle$, $\langle Y\to\{0,1\}\,,\,\preceq\rangle$.
מצאו פונקציה $h:\left(Y\to\{0,1\}\right)\to\mathcal{P}\left(Y\right)$ שהיא חח"ע, על ושומרת סדר. הוכיחו תשובתכם.

6. נגדיר על קבוצת הפונקציות $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ את היחס -

$$f\leq^{*}g\iff\exists n\in\mathbb{N}.\forall m\geq n.\ f(m)\leq_{\mathbb{N}}g(m)$$

($\leq_{\mathbb{N}}$ הוא יחס הסדר הסטנדרטי על הטבעיים)

(א) האם $\leq^{*}$ הוא יחס סדר (חלש)?

(ב) נגדיר יחס R על $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$fRg\iff\exists n\in\mathbb{N}.\forall m\geq n.\ f(m)=g(m)$$

הוכיחו שזה יחס שקילות.

(ג) נגדיר יחס $\leq$ על הקבוצה $\left(\mathbb{N}\to\mathbb{N}\right)/R$ באופן הבא:

$$[f]_{R}\leq[g]_{R}\iff f\leq^{*}g$$

הוכיחו שהיחס לא תלוי בבחירת הנציגים, ושהוא יחס סדר חלש על קבוצת המנה $\left(\mathbb{N}\to\mathbb{N}\right)/R$.
<u>הדרכה:</u> כדי להוכיח אי תלות בבחירת הנציגים, הוכיחו שלכל $f,f',g,g'\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מתקיים: **אם** $f\leq^{*}g$ וגם $f'\in[f]_{R}$ ו־$g'\in[g]_{R}$, **אז** $f'\leq^{*}g'$.

(ד) תהי $B=\{[c_{n}]_{R}:n\in\mathbb{N}\}$, כאשר $c_{n}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא הפונקציה הקבועה $c_{n}=\lambda x\in\mathbb{N}.n$.
הראו כי $[id_{\mathbb{N}}]_{R}$ הוא חסם מלעיל ל־B, כלומר הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $[c_{n}]_{R}\leq[id_{\mathbb{N}}]_{R}$. האם $[id_{\mathbb{N}}]_{R}\in B$?