הרצאה 5

שחר פרץ

4 בדצמבר 2024

הערה: $\text{span}(\emptyset)=\{0\}$

LINEAR MAPS .... (1)

למה. תהי $\varphi\colon V\to U$, ו־F שדה.

1. $\varphi(0_V)=0_V$
2. $\text{Im}\varphi$ תמ"ו של U
3. $\ker\varphi$ תמ"ו של V
4. φ על אמ"מ $\text{Im}\varphi=U$
5. φ חח"ע אמ"מ $\ker\varphi=0$
6. φ העתקת האפס אמ"מ $\Im\varphi=\{0\}$ אמ"מ $\ker\varphi=V$

הוכחה.

1.

$$\varphi(0_V)=\varphi(0_F\cdot 0_V)=0_F\cdot\varphi(0_V)=0$$

2. נראה:

$$\forall v_1,v_0\in\text{Im}\varphi,\lambda\in F\colon \lambda_1v_1+\lambda_2v_2\in\text{Im}\varphi$$

וגם $\text{Im}\varphi$ לא ריק כי $0\in\text{Im}\varphi$ מסעיף קודם. נוכיח את הטענה הראשונה:

$$V_i=\chi(x_0)\implies\sum\lambda_1\varphi(x_i)=\varphi\left(\sum\lambda_ix_i\right)\in\text{Im}\varphi$$

מלינאריות והגדרה של תמונה.

3. $0\in\ker\varphi$ מסעיף קודם־קודם. נראה: $\sum\lambda_iv_i\in\ker\varphi$ עבור $\lambda_i\in F$. ואכן:

$$\varphi\left(\sum\lambda_iv_i\right)=\sum\lambda_i\varphi(v_i)=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0$$

ולכן הקרנל.

4.

$$\text{Im}\varphi=U\iff\forall y\in U.y\in\text{Im}\varphi\iff\exists x\colon\varphi(x)\ =y\iff\varphi\ \text{על}$$

5.

$$\forall x,y\in V,t\in V.\varphi(t)=0\iff\varphi(x-y)=0\iff f(x)=f(y)\iff\varphi\ \text{חח"ע}$$

המעבר האחרון מליניאריות.

6.

$$\varphi\ \text{העתקת האפס}\iff(\forall x\in V.\varphi(x)=0)\iff\text{Im}f=\{0\}\iff\ker(x)=V$$

"זה פשוט ישירות. בוא נראה אם הם כתבו איזה משהו... אז אני פשוט אוסיף קצת מילים"

■

הגדרה. $\varphi\colon V_1 \to V_2$ נאמר שאיזומורפיזם (איזו') אם קיימת ψ ליניארית כך ש־$\psi\colon V_2 \to V_1 . \psi \circ \varphi = id_{V_1} \wedge \varphi \circ \psi = id_{V_2}$. **סימון.** $\psi =\colon \varphi^{-1}$.

למה. $\psi\colon V_1 \to V_2$ ליניארית $\Longleftarrow$

1. φ איזו' $\Longleftrightarrow$ φ חח"ע ועל
2. אם φ איזו' $\Longleftarrow$ הופכית יחידה.

אומרים שמשהו הוא "איזומורפי" אם יש איזומורפיזם ביניהם.

טענה. נתבונן ב־$\hom(V_1, V_2)$ מ"ו מעל F, בעבור הפעולות:

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v),\ (\lambda\varphi) := \lambda\varphi(v)$$

זה פשוט לבדוק את כל התכונות. לא נוכיח את זה.

טענה. יהיו $\varphi\colon V_1 \to V_2,\ \psi\colon V_2 \to V_3$, אז $\psi \circ \varphi$ העתקה ליניארית.

"זה נפתח כזה כמו... נפתח כזה".

טענה. לטענה הזו, נסמן $\varphi \cdot \psi = \varphi \circ \psi$. יהיו V מ"ו ו־$U =\colon \hom(V)$. $\Longleftarrow$

1. קיום ניטרלי לכפל, שהוא id_V
2. אסוציאטיביות:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in U . (\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$$

3. דירטביוטיביות משמאל:

$$\forall \varphi, \psi_1, \psi_2 \in U . \varphi \cdot (\psi_1 + \psi_2) = \varphi\psi_1 + \varphi\psi_2$$

4. דיסטרביוטיביות מימין:

$$\forall \varphi, \psi_1, \psi_2 \in U . (\psi_1 + \psi_2)\varphi = \psi_1 \cdot \varphi + \psi_2 \cdot \varphi$$

5. תאימות עם כפל בסקלר:

$$\forall \varphi, \psi \in U,\ \lambda, \alpha \in F . (\lambda\varphi)(\alpha\psi) = (\lambda\alpha)(\psi \cdot \varphi)$$

כלומר, זה כמעט־שדה – אין קומטטיביות. זו גם הסיבה שצריך להוכיח דיסטרביוטיביות משני הכיוונים. דוגמא למקרה בהו קומטטיביות לא עובדת:

$$\ell et\ V = F^2,\ \varphi\colon (x, y) \mapsto (x, -y),\ \psi\colon (x, y) \mapsto (-y, x) . \varphi\psi(1, 0) = \varphi(0, 1) = (0, -1) \neq (0, 1) = \psi(1, 0) = \varphi\psi(0, 1)$$

טענה. יהיו $\varphi\colon V \to U$, $V_1, \dots V_s \in V$ ו־$\lambda_1 \dots \lambda_S \in F$, אז $\varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i \varphi(v_i)$.

מסקנה. יהי V מ"ו עם בסיס $B = (V_1, \dots, V_n)$ ותהי $\varphi\colon V \to U$ אז לכל $(u_1, \dots, u_n)$ U-c, מתקיים שקיימת ויחידה ההעתקה ליניארית $\forall i \in [n] . \varphi(v_i) = u_i$ (המרצה הגיע ממצב ש־u_i בסיס ב־V למצב שזה לא בסיס ולא ב־V. לא חושב שהוא קרא את הסיכום שהוא גנב מהאינטרנט).

הוכחה. **יחידות:** יהי $x \in V$. נראה ש־$\varphi(x)$ קבוע. ואכן, $\varphi(x) = \varphi\left(\sum \lambda_i v_i\right)$ עבור λ_i המקדמים של הצירוף הליניארי של x בבסיס. וזה:

$$\dots = \sum \lambda_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

קיום: נראה שהפונקציה ליניארית (ספוילר: המורה יגדיר את הפוקנציה שנוכיח עליה רק למטה). יהי $\lambda_1, \lambda_2 \in F, x_1, x_2 \in V$ ונראה ש־$\varphi(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i \varphi(x_i)$.

נסמן:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i,\ x_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

פירוק לבסיס, ונראה שמתקיים: [הערה: φ מוגדרת להיות $\varphi\left(\sum\lambda_i v_i\right)=\sum v_i\varphi(v_i)$. למה לכל הרוחות אנחנו מוכחים משהו על φ שהמורה הגדיר אותה רק אחרי השוויון למטה]

$$\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\varphi\left(\lambda_1\sum\alpha_iv_i+\lambda_2\sum\beta v_i\right)=\varphi\left(\sum(\lambda_1\alpha_i+\lambda_2\beta_i)v_i\right)=\sum\left((\lambda_1\alpha_i+\lambda_2\beta_i)\right)\varphi(v_i)=$$
$$\lambda_1\sum\alpha_i\varphi(v_i)+\lambda_2\sum\beta_i\varphi(v_i)=\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)$$

■

טענה. תהי $\varphi\colon V\to U$ ליניארית ו־$B=(v_1\dots v_s)$ וקטורים ב־v. נסמן $\varphi(B):=(\varphi(v_1)\dots\varphi(v_s))$ (סדרת התמונות). $\Longleftarrow$

1. אם $\varphi(B)$ בת"ל $\Longleftarrow$ B בת"ל
2. אם B פורשת $\Longleftarrow$ $\varphi(B)$ פורשת את $\mathrm{Im}\varphi$ [ובפרט אם φ על אז $\varphi(B)$ פורשת את U]
3. אם $\ker\varphi=0$ $\Longleftarrow$ (B בת"ל $\iff$ בת"ל $f(B)$).
4. אם φ איזו' אז: B בת"ל/פורשת/בסיס גורר $\varphi(B)$ בת"ל/פורשת/בסיס, בהתאמה.

הוכחה.

1. נניח $\varphi(B)$ בת"ל. נראהְ ש־B בת"ל. נניח $\sum\alpha_iv_i=0$ ונראה שגורר $\forall i\in[s].\alpha_i=0$.
   נסתכל על המשוואה לאחר הפעלת φ:
   $$o=\varphi(0)=\varphi\left(\sum\alpha_iv_i\right)=\sum\alpha_i\varphi(v_i)\Big)\implies\alpha_i=0$$
   קיבלנו צירוף ליניארי של $f(B)$ שווה ל־0. ובגלל ש־$\varphi(B)$ בת"ל אז הצירוף הליניארי חייב להיות הטרוויאלי מהגדרת בת"ל.
2. יהי $y\in\mathrm{Im}\varphi$. אז $\exists x\in V.y=\varphi(x)$ (כי B פורש). אזי $\exists\lambda_i\in F\colon x=\sum\lambda_iv_i$ ולכן $y=\varphi(\sum\lambda_iv_i)$ וסה"כ $y=\sum\lambda_i\varphi(v_I)$ וסה"כ נפרש ע"י $\varphi(B)$.
3. נניח B בת"ל, ונראה $\varphi(B)$ בת"ל. נסתכל על $\sum\alpha_i\varphi(v_i)=0$ ונראה ש־α_i 0. מליניאריות $\varphi(\sum\alpha_iv_i)=0$ ומהנתון $\ker\varphi=\{0\}$, $\sum\alpha_iv_i=0$. סה"כ כי α_i $B=\{v_i\}$ בת"ל.
4. • בת"ל: אם φ איז' אז φ חח"ע ולכן $\ker\varphi=\{0\}$ ערצוי מטענה קודמת.
   • פורשת: נסתכל על φ^{-1} כהעתקה (כי φ איזומורפיזם) ונסתכל על $\varphi^{-1}(C)$,$C=\varphi(B)$. אם C פורש אז $\varphi^{-1}(C)$ פורש מטענה (2) ולכן $\varphi(B)$ פורש גםB.

■

LINEAR MAPS BUT NOW WITH DIMMNESIONS . . . . (2)

משפט. בהינתן $\varphi\colon V\to U$ ו־$\dim V<\infty$ אז $\dim V=\dim\ker\varphi+\dim\mathrm{Im}\varphi$.

הוכחה. נראה בסיס ל־V. נסתכל על $\ker\varphi$ ונסמן בסיס שלו $v_1\dots v_s\in B_1$. נרחיב את B_1 לבסיס ל־V עם $v_{s+1}\dots v_{\dim V}$. נראה ש־$v_{s+1}\dots v_[\dim V]$ בסיס למרחב שמימדו $\dim\mathrm{Im}\varphi$.

נראה כי $\varphi(v_{s+1}\dots v_{\dim V})$ פורש את $\mathrm{Im}\varphi$.

$$\mathrm{Im}\varphi=\varphi(\mathrm{span}(v_{s+1}\dots v_{\dim V}))\cup\{0\}$$

ההסבר לשוויון הוא שמתקיים (כאשר $v_i\in B$):

$$\forall y\in\mathrm{Im}\varphi\exists x\in V.y=\varphi(x)\implies y=\varphi(\sum\alpha_iv_i)=\underbrace{\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\varphi(v_i)}_{0}+\sum_{i=s+1}^{\dim V}\alpha_i\varphi(v_i)\implies y\in\mathrm{span}(\varphi(s+1),\dots\varphi(\dim V)))$$

נראה שבת"ל. נניח $\sum_{i=s+1}^{\dim V}\alpha_i\varphi(v_i)=0$ ונראה $\alpha_i=0$. מההנחה:

$$\varphi\left(\sum_{i=s+1}^{\dim V}\alpha_iv_i\right)=0$$

אבל, בגלל ש־$v_{s+1}\dots v_{\dim V}\notin\ker\varphi$ אז $\sum_{i=s+1}^{\dim V}\alpha_iv_i=0$ ומבת"ליות $\alpha_i=0$.

■

מסקנה. תהי $\varphi\colon V\to U$ ליניארית. אם $\dim V<\infty$ אז:

1. אם φ שיכון, אז $\dim V\le \dim U$
2. אם φ על אז $\dim U\le \dim V$
3. אם φ איזו' אז $\dim V=\dim U$
4. אם φ חח"ע או על, וגם $\dim V=\dim U$, אז φ איזו'.

הוכחה. 1. φ שיכון, אז $\dim V=\dim\ker\varphi+\dim \mathrm{Im}\varphi$ וידוע $\ker\varphi=0$ כלומר $\dim V\le 0+\dim U=U$

2. φ על, אז

$$\dim V=\dim\ker\varphi+\underbrace{\dim\mathrm{Im}\varphi}_{\dim U}\implies \dim V-\dim\ker\varphi=\dim U$$

3. אם איזו', אז שיכון וגם על, ולכן $\dim U\le\dim V\le\dim U$ כדרוש.
4. אם φ וגם $\dim V=\dim U$: נראה שיכון, כלומר $\ker\varphi=0$. אכן:

$$\dim V=\dim\ker\varphi+\dim\underbrace{\mathrm{Im}\varphi}_{\dim U}$$

ולכן $\dim\ker\varphi=0$ וסה"כ $\ker\varphi=\{0\}$. אחרת, φ שיכון וגם $\dim U=\dim V$. נראה שעל.

$$\dim V=\dim\ker\varphi+\dim\mathrm{Im}\varphi\implies \dim V=\dim\mathrm{Im}\varphi\implies \mathrm{Im}\varphi=U$$

וגם:

$$(\dim V)=\dim U=\dim(\mathrm{Im}\varphi)$$

הם אותו מרחב (ניקח בסיס של $\mathrm{Im}\varphi$ והוא יהיה בסיס של U בכלל שסדרה בת"ל באורך המימד).

■

מסקנה. יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו. אז: (נובע מעקרון ההכלה וההדחה)

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

"משפט המימדים".

הוכחה. נתבונן ב־$\varphi\colon U+W\to V$ אינטואיציה: נוכל להתסכל על $U\times W\to V$. הוא מעניין אותנו כי:

1. אם היינו יוצרים $\varphi(u,w)=u+w$, אז הקרנל $\ker\varphi=\{(u,-u)\mid u\in U\}$. הקרנל איזומורפי ל־$U$.
2. לכן, $\dim(U\times W)=\dim U+\dim\mathrm{Im}\varphi$

ואז:

$$\alpha\colon U\times W\to U,\alpha(u,w)=u,\ker\{(0,w)\mid w\in W\},\ \dim U\times W=\dim U+\dim W$$

נגמרה האינטואיציה. עכשיו ההוהחכה. נגדיר:

$$\alpha\colon U\times W\to U,\ \alpha(u,w)=u$$

נחשב ונקבל: ,

$$\dim(u\times W)=\dim\ker\alpha=\underbrace{\dim\{(0,w)\mid w\in W\}}_{\dim W}+\dim U$$

נראה ש־$\ker\alpha$ אכן במימד כמו W ע"י איזומורפיזם $w\mapsto\varphi(0,w)$. וסיימנו ממשפט ממקודם מפיו איזו גורר אותו המימד.

נגדיר:

$$\varphi\colon U\times W\to V,\ \varphi(u,w)=u+w\implies \{(u,-u)\mid u\in U\cap W\}=\ker\varphi \text{ איזומורפי ל־ } U\cap W$$

אזי

$$\dim U+\dim W=\dim U\times W=\dim U\cap W+\dim\mathrm{Im}\varphi$$

ולכן

$$\dim U+\dim W=\dim U\cap W+\dim \mathrm{Im}\varphi$$

נשים לב ש-:

$$\mathrm{Im}\varphi=U+W=\{(u+w)\mid u\in U,w\in W\}$$

וסה"כ

$$\dim U+\dim W=\dim U\cap W+\dim(U+W)$$

כרצוי (איכשהו). ■

LINEAR MAPS BUT IT'S IN THE MATRIX .... (3)

מסקנה. יהיו U,V מ"ו ממימד n, ו־$B=(v-1\dots v_n)$ בסיס, אז ישנה התאמה חח"ע ועל בין $\varphi\colon V\to U$ איזו' לבין בסיס של U, והיא: עבור φ איזו' נתאים את $\varphi(B)$ ועבור C בסיס של U נתאים את $\varphi_C\colon V\to U$ כך ש־$\forall i\in[n].\varphi_C(v_i)=u_i$

יהי V מ"ו ממימד n, ו־$B=(v_1\dots v_n)$ בסיס סו־$v\in V$. אז:

$$[v]_B=(\lambda_1\dots\lambda_n)\in F^n,\ \ v=\sum\lambda_i v_i$$

משפט. יהי V מ"ו עם בסיס $B=(v_1,\dots v_n)$. אז $\varphi=\varphi_B\colon F^n\to V$ כך ש־$\varphi(\lambda_1\dots\lambda_n)=\sum\lambda_i v_i$. אז: φ איזו וההופכית $\varphi^{-1}(v)=[v]_B$

עכשיו נעשה דברים אקראיים ונעתיק את מה השמורה עושה. $\varphi\colon V\to U$, $B=(v_1\dots v_n)$ בסיס, $C=(u_1\dots u_n)$ בסיס של U, נרצה לבנות מטריצה כך ש־:

$$\forall j\in[n].\varphi(v_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i$$

את φ נרצה לייצא באמצעות תוצאות $\varphi(B)$, ואותו לייצג באמצעות $([\varphi(v_1)]_C\dots[\varphi(v_n)]_C)$. נקרא למטריצה כזו מטריצה מייצגת.

הגדרה. נגיד שיש לנו $\varphi\colon V\to U$ עם בסיסים B בסיס של V ו־C בסיס של U. נסמן:

$$[\varphi]_C^B=(a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}=\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [\varphi(V_1)]_C & \cdots & [\varphi(V_n)]_C\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}$$

זוהי המטריצה המייצגת של φ לפי בסיס B של V ו־C של U. נשים לב ש־$[\varphi(V_i)]_C$ זו עמודה עם m שורות.

3.1 דוגמאות

3.1.1 דוגמה ראשונה

יהי $\varphi\colon F^2\to F^3$, המוגדרת לפי $\varphi(x,y)=(x,x+y,x+2y)$. נסמן ב־$e$ בסיס סטנדרטי של F^2 ו־e' בסיס סטנדרטי של F^3.

$$e=\{(1,0),(0,1)\}=(e_1,e_2),\ \ \varphi(e_1)=(1,1,1)=e_1'+e_2'+e_3'\implies[\varphi(e_1)]_{e'}=(1,1,1)$$

נמשיך כך:

$$\varphi(0,1)=(0,1,2)\implies[\varphi(0,1)]_{e'}=(0,1,2)\tag{1}$$

וסה"כ:

$$[\varphi]_{e'}^{e}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

3.1.2 דוגמה נוספת

$$C = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)) = (C_1, C_2, C_3)$$

אזי:

$$[\varphi(e_1)]_C = [(1,1,1)]_C = (1,0,0)(\text{since } (1,1,1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3)$$

וסה"כ:

$$[\varphi]_C^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2 ספוילר

יהיו A, φ מטריצה מייצגת של φ. אז נגדיר

$$\varphi(v) = Av$$

כאשר כפל המטריצות:

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ c_1 & & c_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(i \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$