

## מבנית 5

שחר פרץ

21 באפריל 2025

מרצה: עמית ויינשטיין

### AVL TREES ~ ADELSON-VELNSKY LANDIS ..... (1)

רוב הפעולות בעץ חיפוש בינארי בסיבוכיות של גובה העץ. המטרה: לדרוג לכך שהעומק  $O(\log n)$ . באמת נדאג שהוא יהיה מאוד קרוב ל- $\log n$ . אנחנו נשלם על איזון העץ.

נגדיר עץ מאוזן אמ"מ שני העצים מימין ומשמאל, על כל קודקוד, יהיו באותו הקבוה. זו תכונה חזקה מדי שאי אפשר לדרוש בעבור כל עץ, ולא נגדיר את ה-balance factor (בהקשר הזה) להיות 1, ולכל קודקוד ההפרש בין עומק העץ השמאלי לימני, בערך מוחלט, הוא ה-balance factor.

$$BF(v) = \text{height}(v.\text{left}) - \text{height}(v.\text{right}), \text{ where } \text{height}(\emptyset) = -1$$

נגדיר: עץ הוא עץ AVL אם לכל קודקוד  $v$  בעץ מתקיים  $|BF| \leq 1$ .

**משפט 1.** בעץ AVL מתקיים שהגובה הוא  $O(\log n)$

**מסקנה 1.** כל פעולות ה-queue עולות זמן לוגריתמי

נראה שהעלות של האיזון לוקחת  $O(1)$  בסיבוכיות amortized, ונראה שפעולות האיזון יארכו ב-worst case  $O(\log n)$ .

#### 1.1 חסם עליון לגובה העץ

לשם כך, נחפש חסם תחתון לכמות הקודקודים. נתבונן בשורש, ונבחין שמהדרישה יש לו שני עצים, האחד מעומק לכל הפחות  $h-1$  והשני  $h-2$ . הם יאלצו להיות מינימליים כדי שנמצא את החסם התחתון לכמות הקודקודים. נסכם - אם  $F_h$  קבוצת עצי ה-AVL מעומק  $h$ , אז  $|F_h| = |F_{h-1}| + |F_{h-2}|$ . נגדיר בסיס:  $F_0 = \{\emptyset, \emptyset\}$ . כלומר,  $F_0 = 1$ ,  $F_2 = 2$ . ואכן עצים אלו קרויים עצי פיבונאצ'י. כי מתקיים  $|F_h| = f_{h+3} - 1$  (כאשר  $f$  מספר פיבונאצ'י). מבדיקה,  $f_i \approx \frac{\Phi^i + (1-\Phi)^i}{\sqrt{5}}$ . לכן:

$$n \geq |F_n| = f_{n+3} - 1 \geq \frac{\Phi^{n+2}}{\sqrt{5}} \implies \sqrt{n+2} \geq \Phi^{h+3} \implies$$

וסה"כ:

$$h+3 \leq \log_{\Phi}(n+2) \leq 1.44 \log n = O(1) = O(\log n)$$

#### 1.2 הכנסה לעץ

מכניסים קודקוד חדש. תמיד בתור עלה. מה השתנה בעץ?

**מסקנה 2.**

1. ה- $BF$  של כל הקודקודים יכול להשנות בכלל היותר 1. כלומר  $|BF(v)| \leq 2 \forall v \in V$ .

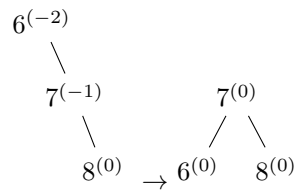
2. רק קודקודים במסלול מהעלה שהוכנס עד השורה אולי שינו את ה- $BF$  שלהם.

3. בטיפוס מהעלה שהוכנס כלפי מעלה, אם נתקלנו בקודקוד שלא שינה את ה- $BD$  שלו, אז אף קודקוד בהמשך המסלול לא שינה את ה- $BD$ .

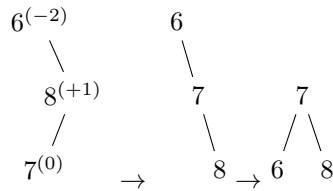
לאלגוריתם: נתחיל מהעלה שלנו, נתחיל לאפס למעלה עד שנגיע לעלה ששה- $BF$  שלו השתנה. הרוב המוחלט של הקודקודים מגובה נמוך, ולכן האמורטיזי יהיה  $O(1)$ .

#### 1.3 סוגי הרוטציות לתיקון

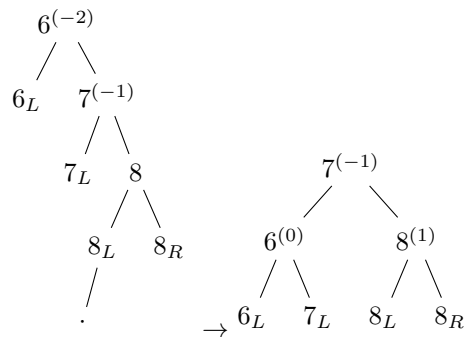
לא כמו בממשלה. נתחיל עם איזה קודקוד, בה"כ 6, ונניח שה- $BF$  הוא -2.



זוהי רוטציה שמאלית. (ה-BF<sup>-</sup> מצוין בערך מלמעלה)  
במקרה הבא נעשה רוטציה ימנית ואז שמאלית:



זוהי רוטציה ימנית ואז שמאלית.  
מה הוותר? שאר העץ. אך אין זה משנה, היינו יכולים לתהסכל הצמתים כעל תתי עצים, וידוע שהם מגובה  $h$  בכל מקרה אז זה בסדר.  
אוטרציה שמאלית באופן כללי:



אין לי כוח להעתיק את הרוטציה המורכבת יותר באופן כללי. במצגת יש מקרה מקביל סימטרי לשתי האוטציות האלו, כלומר רוטציה ימנית, ורוטציה שמאלית ואז ימנית. זה מה שנעשה עבור הצומת הראשון בו ה-BF<sup>-</sup> לא חוקי, תמיד אחת מהרוטציות האלו.

.....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד