מתמטיקה B ~ עברי נגר ~ משהו

שחר פרץ

6 ליולי 2024

INTERGRATION BY PARTS (IBP) .... (1)

הגישה היחידה שיש לנו פרט לשיטת ההצבה. נובע מכלל המכפלה.

$$(fg)' = f'g + fg' \implies f'g = fg' - (fg)' \implies \int f'(x)(gx)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x$$

לדוגמה:

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} g(x) = x & f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 & f'(x) = \sin x \end{cases}\right] = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

שיטת הרישום – udv. החוק:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

ככה לרוב רושמים.

$$\int x^2 e^x = \left[\begin{cases} u = x^2, & v = e^x \\ du = 2x\,\mathrm{d}x & dv = e6x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = x^2e^x - \int 2xe^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\begin{cases} u = x & v = e^x \\ du = \ \mathrm{d}x, & dv = e^x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = (x^2e^x) - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

דוגמה פשוטה בשביל להכניס עיזות לאינטגרל (הדבר הטוב ביותר בכל הזמנים).

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x \cdot 1\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} u = \ln x & v = x \\ du = \frac{\mathrm{d}x}{x} & dv = 1\ \cdot\ \mathrm{d}x \end{cases}\right] = x\ln x - \int x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - x + C$$

תרגיל:

$$\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} u = \ln x & v = \frac{1}{4}x^4 \\ du = \frac{\mathrm{d}x}{x} & dv = x^3\ \cdot\ \mathrm{d}x \end{cases}\right] = \frac{x^4\ln x}{4} - \int \frac{x^3}{4} = \frac{x^4\ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

וגם בעבור אינטגרל מסויים:

$$\int_a^b u\ dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\ du$$

הסבר לסימון:

$$\int_1^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}$$

דוגמה נוספת: (אותה ההצבה כמו קודם. אמור להסביר למה צריך להציב שם)

$$\int_2^5 \ln x\,\mathrm{d}x = \int_2^5 (x\ln x)'\,\mathrm{d}x - \int_2^5 x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x\Big|_2^5 - x\Big|_2^5 = 5\ln 5 - 5 - (2\ln 2 - 2)$$

ע"ש עצמי:

$$I=\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\left[\begin{cases}u=\sin x & v=e^x\\ du=\cos x\,\mathrm{d}x & dv=e^x\,\mathrm{d}x\end{cases}\right]=e^x\sin x-\int e^x\cos\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[\begin{cases}u=\cos x & v=\dots\\ du=\dots & dv=\dots\end{cases}\right]=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int -e^x\sin x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=e^x(\sin x-\cos x)-I$$

נעביר אגפים.

$$2I=e^x(\sin x-\cos x)\implies I=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$$

אבל להציב ככה I זה טיפה בעייתי כי הם מוגדרים עד לכדי קבוע. אז כשמעבירים אגף יכול להיות שיש שני קבועים שונים. סה"כ הקבוע לא מענלם למרות שחיסרנו אותם.

PARTIOAL FRACTIONS . . . . (2)

"טריקים ושטיטיקים" שלא בהכרח תמיד עוזרים באינטגרלים אבל יכולים לעזור גם בהם.

$$\frac{7x-7}{x^2-x-12}=\frac{7x-7}{(x-4)(x+3)}\overset{!}{=}\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-4)}{x^2-x-12}=\frac{(A+B)x+(3A-4B)}{x^2-x-12}$$

נמצא A,B מתאימים. נקבל:

$$\begin{cases}A+B=7\\ 3A-4B=-7\end{cases}\implies A=3,\ B=4$$

שזו מערכת משוואות שקל לפתור. סה"כ $\frac{7x-7}{x^2-x-12}=\frac{3}{x-4}+\frac{4}{x+3}$. הדבר הזה, עובד באופן כללי. באופן כללי, כל שבר נוכל לכתוב כסכום של שני שברים קטנים יותר.

נתבונן בשבר הבא:

$$\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{x^2+x-2}{(x^2+1)(3x-1)}\overset{!}{=}\frac{A}{3x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+3B)x^2(-B+3C)x+(A-C)}{(x^2-1)(3x-1)}$$

סה"כ: $A+3B=1,\ -B+3C=1,\ A-C=-2$. תשברו את הראש ותמצאו $A=-7/5, B=4/5'C=3/5$. קדימה, ננסח באופן כללי:

כל פונקציה רציונלית מהצורה להלן נוכל לכתוב כך:

$$\frac{P_{<m}(x)}{(a_1x+b_1)\cdot\dots\cdot(a_mx+b+m)}=\frac{A_1}{a_x+b_1}+\dots+\frac{A_m}{a_mx+b_m}$$

כאשר P_i הוא פולינום ממעלה i.

הטבלה להלן תראה איזה איבר כל גורם שנוצר מהשורש למטה יביא:

$$ax+b\quad\to\quad\frac{A}{ax+b}\tag{1}$$
$$ax^2+bx+c\quad\to\quad\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\tag{2}$$
$$(ax+b)^k\quad\to\quad\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\dots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}\tag{3}$$
$$(ax^2+bx+c)^k\to\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dots+\frac{A_kx+B_k}{(ax62+bx+c)^k}\tag{4}$$

דוגמה:

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{2x+4}{x^2(x-2)}\overset{!}{===}\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2B+C)x-2C}{x^3-2x^2}\implies\begin{cases}A+B=0 & A=2\\ -2B+C=2 & B=-2\\ -2C=4 & C=-2\end{cases}$$

משפט. כל פולינום ממשי אפשר לחלק לגורמים ממעלה ריבועית לכל היותר. זה למה עברי עצר בטבלה במעלה 2.

"שיטת הכיסוי של הרדי או משהו כזה":

$$\frac{7x-7}{x^2-x-12}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+3}$$

נכפול ב־$x-4$:

$$\frac{7x-7}{x+3}=A+\frac{B(x-4)}{x+3}\xrightarrow{x=4}\frac{7\cdot 5-7}{4+3}=A$$

אפשר גם לכפול ב־$(x-3)$ ואז לקחת $x\to -3$.

זו סתם שיטה נוחה יותר לפתור את המשוואות האלו.

2.1 אז למה עשינו את זה

כי אינטגרלים. עבור פונקציה $\frac{P(x)}{Q(x)}$, נעשה חילוק פולינומים ונקבל $p(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$. מעלת r קטנה ממעלת Q, ונוכל לבצע חרא של שברים חלקיים ולקבל פולינום + שברים חלקיים. עכשיו נעשה אינטגרל. אין בעיה לעשות אינטגלים על פולינומים או על שברים חלקיים.

ש.ב.: תקראו על הצבת ויירשטראס (Weirstrass).

L'HÔPITAL'S RULE (LH) .... (3)

לופיטל קנה את הזכויות לכלל מברנולי. כאילו ליטרלי. הבעיה בגבולות מתחילה כאשר f,g שואפים ל־0 ומנסים לחלק אותם אחד בשני. לכן, בינתיים נניח $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\overset{?}{=}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\Bigg/\left(\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

חוץ מההנחה שאפשר לפצל את הגבולות, "לא רימיתי בשום דבר" (עברי).

"הצורה הכי פורמלית שעדיין הגדרנו". יהיו f,g פונקציות גזירות בסביבה בסביבה נקובה של t. נניח:

1. $\lim_{x\to t}f(x)=0$
2. $\lim_{x\to t}g(x)=0$
3. $g'(x)\neq 0$ בסביבה נקובה של t.
4. קיים הגבול $L=\lim_{x\to t}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אם ארבעת התנאים להלן מתקיימים, אז קיים הגבול $L=\lim_{x\to t}\frac{f(x)}{g(x)}$ וגם $L=L'$. התנאי הרביעי מאוד חשוב. בד"כ שוכחים אותו.

אפשר להשתמש בלופיטל כמה פעמים. תקף גם עבור קבולות חד־צדיים, ובפרט עבור $t=\pm\infty$. יש גם כלל לופיטל עבור $\frac{0}{\infty}$, כלומר כאשר אין תנאי 1, ותנאי 2 הופך ל־$\lim_{x\to t}g(x)=\pm\infty$.

דוגמאות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

יש לזה גבול אז השוויון בהתחלה היה תקין.

דוג':

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}\overset{LH}{=}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{x^2}\overset{LH}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x}{2x}=$$
$$-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(\sin x))}{x}\overset{LH}{=}-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x}{1}=-\frac{1}{6}$$

הבהרה: רק לאחר שראינו שהגבול קיים, בדיעבד נוכל לדעת שכל השוויונות שמבוססים על LH הם תקינים.

"גבול שאתם צריכים לדעת אבל תנסו לחשב אותו עם לופיטל":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{x}=0$$

שימו לב – **לא להשתמש בטיעונים מעגליים**. דוגמה:

$$\lim_{x\to x_0}=\frac{\sin x}{x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

בשביל לעשות את הגבול הזה ניאלצנו לגזור את $\sin x$, אך בשביל לעשות זאת ניאלצנו לחשב את הגבול.