תרגיל בית 3 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. פתרו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=7 \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=11 \end{cases}$$

2. עבור כל אח מהסעיפים הבאים, מצאו את כל הערכים של הפרמטר λ עבורם למערכת יש פתרון יחיד/יש אינסוף פתרונות/אין פתרונות. עבור הערכים שלהם יש פתרון, מצאו את קבוצת הפתרונות

א.

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} (1+\lambda)\,x_1-(1+\lambda)\,x_2+\left(\lambda^2-1\right)x_3=1+\lambda \\ (1+\lambda)\,x_1+\left(\lambda^2-1\right)x_2-(1+\lambda)\,x_3=1+\lambda \\ (2\lambda+2)\,x_1+\left(\lambda^2-1\right)x_2-(\lambda+3)\,x_3=2\lambda+1 \end{cases}$$

3. הוכיחו שהקבוצה $\mathbb{R}^\infty := \{(a_1,a_2,\ldots) \mid a_i\in\mathbb{R}\}$ עם הפעולות הבאות:

$$(a_1,a_2,\ldots)+(b_1,b_2,\ldots)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots)$$

$$\lambda\cdot(a_1,a_2,\ldots)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots)$$

הוא מרחב וקטורי

4. בכל אחד מהסעיפים, קבעו (והסבירו) האם הקבוצה היא תת־מרחב של המרחב הוקטורי הנתון:

א) $\left\{a\cdot x^2+b\cdot x+c \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_5, b=a^5\right\}$ כתת־מרחב של $\mathbb{Z}_5[x]$

ב) $\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \mid x_1^2+x_2^2>1\right\}$ כתת־מרחב של $\mathbb{R}^n$ (עבור $n\geq 2$)

ג) $\{(a_1,a_2,\ldots)\in\mathbb{R}^\infty \mid \exists m\in\mathbb{N}.\forall n\geq m.a_n=0\}$ כתת־מרחב של $\mathbb{R}^\infty$

ד) התת־קבוצה של $\mathbb{R}^\infty$ שמכילה את כל הסדרות המונוטוניות עולה (אלה שמקיימות $a_n\leq a_{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$)

ה) $\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}.f(x)=f(-x)\}$ כתת־מרחב של $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

5. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $S,T\subseteq V$ תתי־קבוצות סופיות ולא ריקות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א) אם $S\cap T=\emptyset$ אז $S\cap\mathrm{Sp}\left(T\right)=\{0\}$
ב) אם $S\cap T=\emptyset$ אז $\mathrm{Sp}\left(S\right)\cap\mathrm{Sp}\left(T\right)=\{0\}$
ג) אם $S\cap\mathrm{Sp}\left(T\right)=\emptyset$ אז $T\cap\mathrm{Sp}\left(S\right)=\emptyset$

6. קבעו האם הסדרות הבאות הן ת"ל או בת"ל. במידה והן ת"ל, כתבו במפורש צירוף לינארי לא טריוויאלי של האיברים שמתאפס:
א) $\left(x^3+3x-2,x+5,x^2-x+1\right)$ כאיברים ב־$\mathbb{R}\left[x\right]$ מעל $\mathbb{R}$
ב) $\left(\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&7\\0&7\end{pmatrix}\right)$ כאיברים ב־$M_2\left(\mathbb{R}\right)$ מעל $\mathbb{R}$
ג) הפונקציות $\left(\cos\left(nx\right),\sin\left(nx\right)\right)$ עבור $n\in\mathbb{N}$, כאיברים ב־$\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{R}$

7. הוכיחו/הפריכו:
א) יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ שני וקטורים בת"ל. אז $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ בת"ל לכל $z_1,z_2\in\mathbb{R}$.
ב) יהיו $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ שני וקטורים בת"ל. אז $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ בת"ל.

8. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,v_2,v_3,v_4\in V$. נתון:
א) $\left(v_1,v_2,v_3\right)$ סדרה בת"ל
ב) $\left(v_1,v_2,v_4\right)$ סדרה בת"ל
ג) $\mathrm{Sp}\left(v_1,v_2,v_3\right)\cap\mathrm{Sp}\left(v_1,v_2,v_4\right)=\mathrm{Sp}\left(v_1+v_2,v_1-v_2\right)$
הוכיחו שהסדרה $\left(v_1,v_2,v_3,v_4\right)$ היא בת"ל

9. יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,v_2,v_3,v_4\in V$ נניח ש־v_1,v_2,v_3,v_4 הם בת"ל. האם גם $v_1+v_2,v_2+v_3,v_3+v_4,v_1+v_4$ הם בת"ל?

10. צמצמו את הקבוצה הבאה לקבוצה בת"ל:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\9\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\11\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

11. קבעו עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ הקבוצות הבאות מהוות בסיס של $\mathbb{R}^3$:
א) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}\right\}$
ב) $\left\{\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a+1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-a\end{pmatrix}\right\}$

12. יהי $\left(v_1,v_2,v_3\right)$ בסיס של מ"ו V מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו שגם $\left(v_1,v_1+v_2,v_1+v_2+v_3\right)$ הוא בסיס של V.