חדו"א 1א ~ תרגיל בית 6

שחר פרץ

15 בדצמבר 2025

(1)

נשלים את הוכחת משפט ההשוואה הגבולי. יהי a_n, b_n סדרות חיוביות, ונניח שקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

(א) נראה שאם $\ell = 0$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

הוכחה. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$ מתכנס. נוכיח את התכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לפי הגדרה. יהי $\varepsilon > 0$. החל מ־N_1 כלשהו, מתקיים:

$$\forall n \geq N_1\colon \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon \implies |a_n| < \sqrt{\varepsilon}\,|b_n| \implies a_n < \sqrt{\varepsilon} b_n$$

יכולנו להפטר מהערך המוחלט, כי הסדרות חיוביות. לכן ממבחן ההשוואה הרגיל, אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. ■

(ב) נראה שאם $\ell = \infty$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \impliedby \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

הוכחה. (אין מה להשתמש באריתמטיקה כי קשה לטפל כך במקרה בו $a_n \to 0$). נקבל שלכל $M \in \mathbb{R}$ המ"מ $\frac{a_n}{b_n} > M$, כלומר $a_n > Mb_n$. ממשפט ההשוואה הרגיל אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, וסיימנו. ■

(2)

נתון שהטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. נוכיח שגם $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n\right)^3$ מתכנס.

הוכחה. משום ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \to 0$, כלומר החל מ־N כלשהו, $a_n < 1$. מכאן שלכל $n \geq N$ נקבל $(a_n)^3 < a_n$. דהיינו:

$$\forall n \geq N\colon \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n\right)^3 < \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ממשפט ההשוואה הראשון, קיבלנו ש־$\sum_{n=1}^{\infty} 2(a_n)^3$ מתכנס. ■

(3)

נקבע האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים.

(א) נוכיח שהטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

התחלתי משאלה 9, וכבר הראיתי שהטור ב־9ה מתכנס בהחלט, כלומר שהטור הזה מתכנס. זה ממש אותו הסעיף.

(ב) נקבע מתי הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

הוכחה. נפשט את הביטוי:

$$\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha}=\left(\sqrt{3}n+1-\sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{n^2-1}+(n-1)^{\frac{2}{3}}}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{n^2-1}+(n-1)^{\frac{2}{3}}}\right)^{\alpha}=\frac{\overbrace{(n+1-(n-1))^{\alpha}}^{2^{\alpha}}}{\left((n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{n^2-1}+(n-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\alpha}}$$

ניעזר במבחן ההשוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta}}$. נבחין אחרי כן מי הוא ה־β שאנו מחפשים.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\alpha}}{\left((n+1)^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{n^2-1}+(n-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\alpha}}n^{\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\alpha}n^{-\frac{2}{3}\alpha}n^{\beta}}{\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+(1-\frac{1}{n})^{\frac{2}{3}}\right)^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}n^{\beta-\frac{2}{3}\alpha}=\cdots$$

עבור $\beta=\frac{2}{3}\alpha$ נקבל:

$$\cdots=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}\lim_{n\to\infty}n^{\frac{2}{3}\alpha-\frac{2}{3}\alpha}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}\in\mathbb{R}$$

סה"כ מצאנו ממשפט הגבול החלקי, שהטור מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}\alpha}}$ מתכנס. ממשפט שהראינו בכיתה, ההתכנסות מתקיימות אמ"מ $\frac{2}{3}\alpha>1$, כלומר $\alpha>1.5$. סה"כ הטור מתכנס אמ"מ $\alpha>1.5$. ■

(ג) נבין מתי הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha n}{n+1}\right)^{n}\quad\alpha\in\mathbb{R}$$

הוכחה. ניעזר במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha n}{n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n}{n+1}=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\alpha$$

כלומר, אם $\alpha>1$ הטור לא מתכנס, ואם $\alpha<1$ הטור מתכנס. ננסה להבין מה מתרחש כאשר $\alpha=1$. נבחין ש־:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}=\frac{1}{e}$$

כלומר, במקרה ש־$\alpha=1$, הסדרה שיוצרת את הטור אפילו לא שואפת ל־0, תנאי הכרחי להתכנסות הטור. סה"כ הטור מתכנס אמ"מ $\alpha<1$. ■

(ד) ננסה להבין את הטור הבא מתכנס:

$$S_n=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n^2-1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}\right)^{n^2}<\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\overset{(1)}{<}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{e}\right)^{n}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{e^n}$$

השוויון (1) נכון שכן $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ סדרה מונוטונית עולה שמתכנסת ל־$\frac{1}{e}$, ומכאן שהמ"מ $\frac{1}{e}$ חוסם אותה מלמעלה. סה"כ S_n חסום ע"י סדרה מתכנסת (טור גיאומטרי) ומכאן ש־S_n מתכנס.

(ה) ננסה להבין מתי הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}\quad m,k\in\mathbb{N}$$

הוכחה. נתקוף באמצעות מבחן המנה.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\sqrt[m]{(n+1)!}}{\sqrt[k]{(2n+2)!}}}{\frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}}=\frac{\sqrt[m]{(n+1)!}\sqrt[k]{(2n)!}}{\sqrt[m]{n!}\sqrt[k]{(2n+2)!}}=\sqrt[m]{\frac{\cancel{1\cdots n}\cdot(n+1)}{\cancel{1\cdots n}}}\cdot\sqrt[k]{\frac{\cancel{1\cdots 2n}}{\cancel{1\cdots 2n}\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}}=\frac{\sqrt[m]{n+1}}{\sqrt[k]{(2n+1)(2n+2)}}$$

נבחין ש־$(2n+1)(2n+2)=4n^2+6n+2$. ננסה עתה לחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[m]{(n+1)}}{\sqrt[k]{4n^2+6n+2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\left(n^{\frac{1}{k}}+\frac{1}{n^{k/m}}\right)^{\frac{k}{m}}}{4n+6+\frac{1}{n}}}=4\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{m}}}{n}}=4\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1-\frac{1}{m}}{k}}$$

נבחין שהגבול לעולם לא יתכנס ל־1. יש שתי אפשרויות:

- אם $\frac{1-\frac{1}{m}}{k}<1$ אז הגבול מתכנס ל־0, ואז ממשפט המנה הגבולי, הטור מתכנס.
- אם $\frac{1-\frac{1}{m}}{k}>1$ אז הגבול מתכנס ל־$+\infty$, ואז ממשפט המנה הגבולי, הטור אינו מתכנס.

■

(4)

(א) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים. נניח המ"מ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. נוכיח שאם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה. מתקיים באינדוקציה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} =: x_n \qquad a_n = x_n a_{n-1} = \cdots = a_1 \prod_{i=1}^{n} x_i$$
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} =: y_n \qquad b_n = y_n b_{n-1} = \cdots = b_1 \prod_{i=1}^{n} y_i$$

נתון למעשה $x_i \le y_i$ לכל $i \in [n]$. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ל־ℓ. מכאן ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1 \prod_{i=1}^{n} x_i\right) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} x_i \le a_1 \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} y_i = \frac{a_1}{b_1}\cdot b_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{a_1}{b_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_1 \prod_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{a_1}{b_1}\ell$$

סה"כ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסום מלמעלה בטור שמתכנס, ולכן (ממשפט ההשוואה הראשון, שכן נתון ששני הטורים שלנו חיוביים) מתכנס גם הוא. ■

(ב) נוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ מתכנס.

הוכחה. נבחין ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

שמתכנס. ידוע קירוב סטרלינג, כלומר $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{e\pi n}} = 1$. מכאן ש־:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{n-2}}{e^n\left(\frac{e}{n}\right)^n}}{\frac{n^{n-2}}{e^n n!}} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{e}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{\pi n e}}\sqrt{\pi n e} = 1\cdot\infty = \infty$$

סה"כ ממשפט ההשוואה הגבולי, סיימנו. ■

(5)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתכנס.

(א) נוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

הוכחה. ממשפט $a_n \to 0$. לכן ממבחן המנה של דלאמבר, בהכרח $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell \le 1$. נפעיל את מבחן ההשוואה הגבולי על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\frac{\sqrt{a_n a_{n+1}}}{a_n} = \sqrt{\frac{a_n a_{n+1}}{a_n^2}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{\ell} \ge 0$$

משום ש־$\sqrt{\ell} \in \mathbb{R}$, אז בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ידוע $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, סה"כ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס כנדרש. ■

(ב) נראה שהכיוון ההפוך למשפט לעיל לא נכון באופן כללי.

הוכחה. ננסה "לתקוף" את השאלה לעיל כך שהיחס בין איברי a_n שואף ל־0. נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{1}{n^2} & \text{else} \end{cases}$$

נבחין ש־:

$$S_n = \sum_{i=1}^{N} a_n \ge \sum_{i\in\mathbb{N}_{\text{even}}}^{N} \frac{1}{n} = 0.5\sum_{i=1}^{0.5N} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

כלומר ממשפט ההשוואה הראשון S_n איננה מתכנסת. עם זאת:

$$S'_n = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}} \leq \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{1}{n^3}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{n^{1.5}}$$

ממשפט $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ מתכנס. לכן ממשפט ההשוואה S'_n מתכנס. סה"כ מצאנו דוגמה נגדית. ■

(ג) עתה נתון a_n מונוטונית. נראה את הכיוון ההפוך.

הוכחה. משום ש־$a_n \to 0$ וחיובית, בפרט a_n מונוטונית יורדת בהכרח. לכן:

$$a_n \geq a_{n+1} \implies \sqrt{a_n a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}^2} = a_{n+1} \implies \sum_{i=1}^{N} \sqrt{a_n a_{n+1}} \geq \sum_{i=1}^{N} a_{n+1}$$

משום ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ מתכנס. מכאן ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס גם הוא (שתי הסדרות נבדלות בחיבור קבוע a_1). סה"כ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כנדרש. ■

(6)

נחשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

הוכחה. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים ב־S_n. נבחין ש־:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

נחשב כל אחד מהטורים הבאים בנפרד:

$$S_n^1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}$$

וסה"כ נקבל:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(S_n^1 + S_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4}$$

כלומר הטור שואף ל־$\frac{1}{4}$. ■

(7)

נקבע האם הטור הבא מתכנס או מתבדר:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\alpha}}{n \log n}$$

הוכחה. נבצע את מבחן העיבוי פעמיים:

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\alpha}}{n \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\alpha}}{n \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{(\log\log 2^n)^{\alpha}}{\cancel{2^n} \log 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\alpha}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{2^n} \frac{\log^{\alpha} 2^n}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

סה"כ הטור מתבדר. ■

(8)

נמצא דוגמה לסדרות a_n, b_n כך ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ כך $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) < \infty$.

הוכחה. נגדיר את הסדרות הבאות:

$$a_n = I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}} = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 1 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} \qquad b_n = I_{\mathbb{N}_{\text{even}}} = \begin{cases} 1 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \end{cases}$$

נבחין ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \xrightarrow{n\to\infty} \infty \xleftarrow{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

אך:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \min\{0,1\} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 < \infty$$

וסיימנו. ■

(9)

נחקור את הטורים הבאים (נקבע לכל טור האם הוא מתכנס בהחלט, או מתבדר):

(א) נתבונן בטור הבא, בעבור $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a \ln n}$$

הוכחת התכנסות. נבחין ש־n^a וכן $\ln n$ מונוטוניות עולות וחיוביות שתיהן, כלומר $\ln n \cdot n^a$ מונוטונית עולה. מכאן ש־$\frac{1}{n^a \ln n}$ מונוטונית יורדת, וממשפט לייבניץ, הטור מתכנס. נבדוק מתאי הוא מתכנס בהחלט. מכיוון אחד:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln n} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

כלומר ממשפט ההשוואה הגבולי, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln n}$ מתכנס במקרה בו $a > 1$. אחרת, $a \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln n} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{na} \ln 2^n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(a-1)} n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n(1-a)}}{n} \overset{a \leq 1}{<} \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

כלומר, ממשפט ההשוואה וממבחן העיבוי, במקרה זה הטור לא מתכנס בהחלט. ■

(ב) נתבונן בטור הבא, בעבור $a \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$$

הפרכת התכנסות. ניעזר במבחן השורש. נבחין ש־:

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{a^{n^2}}} = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{a^{n^2}}} = \frac{n}{a^n}$$

לכל $a > 1$ הביטוי ישאף ל־0 ולכן הטור לא יתכנס, ולכל $a \leq 1$ הביטוי ישאף ל־∞ ולכן הטור יתכנס. הטור חיובי ולכן התכנסות שקולה להתכנסות בהחלט. ■

(ג) נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$$

הוכחת התבדרות. נסמן ב־a_n את הסדרה שיוצרת את הטור, וב־S_n את סדרת הגבולות החלקיים. נבחין ש־:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \equiv 0 \\ \frac{1}{n} & n \equiv 1 \bmod 3 \\ \frac{1}{n} & n \equiv 2 \end{cases}$$

יהי N מתחלק בשלוש. נבצע מניפולציות על הסכום:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=3k}^{N} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right) = -1 + \sum_{n=3k+1}^{N} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\overset{\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}}{>} -1 + \sum_{3k+1}^{N} \left(\frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}} \right) \xrightarrow{n\to\infty} -1 + \infty = +\infty$$

כלומר, ל־S_N יש גבול חלקי הוא S_{3N} שחסום מלמטה ע"י סדרה ששואפת לאינסוף, וממשפט הפיצה $S_{3N} \to \infty$. מכאן שגם S_N איננה מתכנסת. בפרט הוא אינו מתכנס בהחלט. ■

(ד) נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$$

הפרכת התכנסות. נוכיח שהטור מתכנס בהחלט. נבחין ש־:

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 \leq 0.5$$

(כי $\sqrt[n]{n}$ מונוטוני יורד החל מ־$n = 2$, וכן $\sqrt[2]{2} < 1.5$). מכאן ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n < \sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n = 2$$

כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ מתכנס. בגלל ש־$|(-1)^n| = 1$, אז הטור מתכנס בהחלט. ■

(ה) נתבונן בטור הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n^2}$$

הוכחת התכנסות. נבחין ש־$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ מספר שלם, כלומר $\left| (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right| = 1$. מכאן ש־:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

בגלל ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, אזי הטור כולו מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. ■