חדו"א ו1 4

שחר פרץ

16 בנובמבר 2025

יש לנו שתי תכונות עבור תכונות של סדרות. תהא a_n סדרה, אז:

- הרעיון: לכל אינדקס שנבחר, יש עוד אינסוף מעליו שמקיימים את התכונה.

הגדרה 1. נאמר כי תכונה היא שכיחה בסדרה כאשר אינסוף מאיברי הסדרה מקיימים את התכונה. (באנגלית: infinitely often).

- הרעיון: החל מנקודה מסויימת, כל איברי הסדרה מקיימים את הדרוש.

הגדרה 2. נאמר שתכונה קוראת כמעט תמיד כאשר כל איברי הסדרה, פרט למספר סופי, מקיימים את התכונה. (באנגלית: almost everywhere)

ואז, נקבל כמו בשבוע שעבר את שתי הטענות הבאות:

- יהי $\ell \in \mathbb{R}$ הוא גבול של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$ כמעט תמיד.
- יהי $\ell \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$ שכיחה.

השקילויות האלו נכונות רק בגלל שהסדרות שלנו בדידות. נזכור שראינו בשבוע שעבר ש־ℓ גבול חלקי של a_n אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \geq N$ כך ש־$|a_n - \ell| < \varepsilon$.

סימון 1. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים של a_n נסמן $\hat{P}(a_n)$.

סימון 2. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים הסופיים (כלומר לא $\pm\infty$) של a_n נסמן $P(a_n)$.

יש כאן קצת abuse of notation כאשר אנו מתייחסים ל־$\pm\infty$ כאובייקטים.

בעזרת הסימונים הללו נקבל ניסוח שקול של משפט בולצאנו־ווייראשטראס (לכל סדרה חסומה יש ת"ס מתכנסת):

מסקנה 1. לכל a_n סדרה, $\hat{P}(a_n) \neq \varnothing$.

משפט 1. תהא a_n סדרה, חסומה. תהא b_n סדרה, המקיימת:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ש־$b_n \in P(a_n)$
2. b_n מתכנסת ל־ℓ

אז $\ell \in P(a_n)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $N \in \mathbb{N}$. ידוע $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ החל ממנו $\forall n \geq N_1 \colon\ |b_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. אז $b_{N_1} \in P$, לכן קיים $n \geq N$ כך ש־$|a_n - b_{N_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$. מא"ש המשולש:

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - b_{N_1}| + |b_{N_1} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

■

משפט 2. תהא a_n חסומה. אז ל־P יש מקסימום ומינימום.

הערה 1. הסופרמום של a_n הוא לא הסופרמום של P. לדוגמה עבור $a_n = \frac{1}{n}$ אז $\sup a_n = 1$ למרות ש־$P(a_n) = \{0\}$.

הוכחה. ראינו ש־a_n חסומה לכן P חסומה. מבולצאנו־וויראשטראס, $P \neq \varnothing$. לכן ל־P יש סופרמום ואינפימום. נסמן $\alpha = \sup P, \beta = \inf P$. יהי $\varepsilon > 0$. ידוע שקיים $\ell \in P$ כך ש־$\ell > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$. כמו כן $\ell \leq \alpha < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. סה"כ $|\ell - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. יהי $N \in \mathbb{N}$. אז קיים $n \geq N$ כך ש־$|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. מא"ש המשולש:

$$|a_n - \ell| < |a_n - \ell| + |\ell - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

מכאן ש־α גבול חלקי של a_n ולכן $\alpha \in P$, כלומר $\alpha = \max P$.

באופן דומה (תרגיל לבית) אפשר להראות ש־$\beta = \min P$. ■

מכאן, אפשר להראות את הטענה הבאה (זהו אינו משפט בקורס):

משפט 3. תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. אם A חסומה מלעיל, אז קיימת סדרה $a_n \colon \mathbb{N} \to A$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

הוכחה. נסמן $\alpha = \sup A$. ידוע שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש־:

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \le \alpha < \alpha + \frac{1}{n}$$

(מהגדרת סופרמום). נקבל ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. (הערה: a_n למעשה פונקציית בחירה, וצריך כאן את אקסיומת הבחירה הרציפה). ■

סימון 3. תהי a_n סדרה. נסמן ב־$\limsup_{n\to\infty} a_n$ את הגבול החלקי הגדול ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבול עליון.

סימון 4. תהי a_n סדרה. נסמן ב־$\liminf_{n\to\infty} a_n$ את הגבול החלקי הקטן ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבו לתחתון.

הערה 2. אם a_n אינה חסומה מלעיל, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ ואם a_n אינה חסומה מלרע אז $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$. בשביל להראות את זה צריך עוד קצת טענות.

משפט 4. תהא a_n חסומה מלעיל. בהינתן $\ell \in \mathbb{R}$ הגבול העליון של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

1. $a_n < \ell + \varepsilon$ כמעט תמיד.
2. $a_n > \ell - \varepsilon$ שכיח.

הוכחה.

$\Leftarrow$ נניח ש־ℓ הגבול העליון של a_n. יהי $\varepsilon > 0$. נניח בשלילה כי לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \ge N$ כך ש־$a_n \ge \ell + \varepsilon$. נבנה ת"ס באופן הבא:

$$\begin{cases} n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \ge \ell + \varepsilon\} \\ n_{k+1} = \min \underbrace{\{n > n_k \mid a_n \ge \ell + \varepsilon\}}_{\neq \varnothing} \end{cases}$$

הסדרה לעיל אכן איננה ריקה בגלל הנתון. אז a_{n_k} ת"ס של a_n שכל איבריה בקטע $[\ell + \varepsilon, +\infty)$ כת"ס של a_n היא חסומה, ולכן יש לה ת"ס מתכנסת לגבול של $m \in \mathbb{R}$. m גבול חלקי של a_n עצמה (ת"ס של ת"ס היא ת"ס) ומקיים $m \ge \ell + \varepsilon > \ell$ (כי a_{n_k} חסומה ב־$\ell + \varepsilon$) בסתירה לכך ש־ℓ גבול עליון.

לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$, מתקיים $a_n < \ell + \varepsilon$. מכאן ש־$a_n < \ell + \varepsilon$ כמעט תמיד.

עתה נראה ש־$a_n > \ell - \varepsilon$ שכיחה. יהי $N \in \mathbb{N}$. ידוע ℓ גבול חלקי של a_n לכן קיים $n \ge N$ כך ש־$|a_n - \ell| < \varepsilon$. לכן $a_n > \ell - \varepsilon$ (עם קצת מניפולציות אלגבריות).

$\Longrightarrow$ נניח (1) $a_n < \ell + \varepsilon$ כמעט תמיד ו־(2) $a_n > \ell - \varepsilon$ שכיחה. יהי $\varepsilon > 0$. מ־(1) קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \ge N_1 \colon a_n < \ell + \varepsilon$. יהי $N \in \mathbb{N}$. מ־(2) קיים $n \ge \max N, N_1$ כך ש־$a_n > \ell - \varepsilon$. אז $n \ge N_1$ לכן $a_n < \ell + \varepsilon$ ומכאן $|a_n - \ell| < \varepsilon$ לכן $\ell \in P$.

נראה שהוא העליון. יהי $m \in P$. נניח בשלילה $m > \ell$. נסמן $\varepsilon = \frac{m-\ell}{2}$. מכיוון ש־$m \in P$ לכן $|a_n - m| < \varepsilon$ שכיח, כלומר אינסוף מאיברי הסדרה גדולים מ־$\ell - \varepsilon$. לכן $a_n < \ell + \varepsilon$ לא כמעט תמיד, בסתירה. מכאן ש־$m \le \ell$ ולכן $\ell = \limsup a_n$. ■

הערה 3. אפשר לבצע הוכחה סימטרית עם $\liminf$.

הערה 4. אם גם (1) וגם (2) מתקיימות כמעט תמיד, נקבל מיד את הגדרת הגבול.

משפט 5. תהא a_n סדרה חסומה. אז לכל $\varepsilon > 0$ כמעט תמיד:

$$\liminf a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

בעצם, יש את הקטע הפתוח:

$$(\liminf a_n - \varepsilon, \limsup a_n + \varepsilon)$$

וכל איברי הסדרה פרט לכמות סופית של מספרים נמצאים בו.

סימון 5. בהינתן $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כלשהי:

$$\inf_n F(n) = \inf\{F(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \sup_n F(n) = \sup\{F(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

תרגיל: תהא a_n סדרה חסומה. אז:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \sup_{k \ge n} a_k$$

הוכחה. נגדיר $S_n = \sup_{k \ge n} a_k = \sup\{a_k \mid k \ge n\}$.

יהיו n, m ונניח $n > m$. אז:

$$\{a_k \mid k \ge n\} \subseteq \{a_k \mid k \ge m\}$$

לכן (תרגיל):

$$S_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{a_k \mid k \geq m\} = S_m$$

לכן S_n מונוטונית יורדת ולכן מתכנסת ל־$\inf S_n$. נסמן $S = \inf S_n$. יהי ℓ גבול חלקי של a_n. אז קיימת ת"ס a_{m_k} של a_n המקיימת $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$. לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $S_{n_k} \geq a_{n_k}$ לפי הגדרת חסם עליון. כמו כן $\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S$ מקיים $\ell \leq S$. לכן $\lambda := \limsup n \to \infty a_n \leq S$.

יהי $\varepsilon > 0$. אז $a_n < \lambda + \varepsilon$ כמעט תמיד. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N\colon a_n < \lambda + \varepsilon$. לכן $\forall n \geq N\colon S_n \leq \lambda + \varepsilon$. לכן $S \leq \lambda + \varepsilon$ כלומר $S \leq \lambda$ (יש כאן למה: $\left(\forall \varepsilon > 0\colon \alpha \leq \beta + \varepsilon\right) \implies \alpha \leq \beta$). מכאן $S = \lambda$. ∎

"טרוויאלי זה היבריס".

סדרות קושי

"הוא היה כומר, ואת כל הטענות שלו הוא גנב מתלמידים שלו. המון תלמידים מיוחסים לו".

הגדרה 3. תהא a_n סדרה. נאמר ש־a_n סדרת קושי, כאשר:

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists N \in \mathbb{N}.\, \forall n, m \geq N\colon\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

הטענה המרכזית שנראה על סדרות קושי, היא שסדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת קושי.

יש כאן נקודה נחמדה. אנחנו לא באמת צריכים לעבוד ערך מוחלט. יש לנו רק שלוש תכונות שמעניינות אותנו:

1. **אי־שליליות ולא מנוונות:** לכל $x, y \in \mathbb{R}\colon\ |x - y| \geq 0$ ו־$|x - y| = 0$ אמ"מ $x = y$.
2. **סימטריות:** $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ |x - y| = |y - x|$
3. **א"ש המשולש:** $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

פונקציה $d\colon A^2 \to \mathbb{R}$ נקראת מטריקה אם היא מקיימת את שלושת התכונות לעיל. מרחב מטרי נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת בו. באיזשהו הבט, צריך משהו בסגנון $\mathbb{R}$ (אקסיומת השלמות) או דברים דומים לו כדי שהמרחב המטרי יהיה שלם. ההגדרה של סדרת קושי מאוד תועיל לנו (בקורסים אחרים) כאשר לא בהכרח ברור מזה המושג של גבול.

משפט 6. תהא a_n סדרה. אז a_n מתכנסת אמ"מ a_n סדרת קושי.

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח ש־a_n מתכנסת. אז קיים $\ell \in \mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N\colon\ |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$N$. יהי $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי. היינו צריכים את תכונות המטריקה בלבד, ולא היינו צריכים את אקסיומת השלמות)

$\Longleftarrow$ נניח a_n סדרת קושי. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n, m \geq N\colon\ |a_n - a_m| < 1$. נתבונן ב־$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$. יהי $n \in \mathbb{N}$. אם $n \geq N$ אז $|a_n| \leq M$. אחרת $|a_n - a_N| < 1$ ולכן $M > |a_N| + 1 > |a_n|$. מכאן ש־a_n חסומה. לפי בולצאנו־וויירשטראס (פוף! הנחנו את אקסיומת השלמות) ל־a_n יש ת"ס a_{n_k} המתכנסת לגבול $\ell \in \mathbb{R}$.

עתה, אקסיומת השלמות הפילה לנו גבול ℓ מהשמיים, ומכאן נוכל להמשיך לעבוד לפי הגדרה. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים K_1 ש־$\forall k \geq K_1\colon\ |a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ וכן קיים N_1 כך ש־$\forall n, m \geq N_1\colon\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. קיים K_2 כך שלכל $k \geq K_2$, $n_k > N_1$ (כי n_k סדרת טבעיים מונוטונית עולה ממש). נתבונן ב־$N = \max\{n_{K_1}, n_{K_2}\}$. יהי $n \geq N$. קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$n_k > n$. ואז:

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

∎

חזקות ממשיות

משפט 7. תהא a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־0. אז $\forall x > 0\colon\ \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = 1$.

הוכחה.

- נוכיח למקרה $x > 1$. ראינו בתרגול ש־$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 = \lim_{n\to\infty} x^{\pm n^{-1}}$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $P \in \mathbb{N}$ כך ש־$1 - \varepsilon < x^{-\frac{1}{P}} <$ $1 < x^{\frac{1}{P}} < 1 + \varepsilon$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$, $|a_n| \leq \frac{1}{P}$. אזי $-\frac{1}{P} < a_n < \frac{1}{P}$. ממונוטוניות החזקה (שלא הוכחנו אבל ניחא) $1 - \varepsilon < x^{-P^{-1}} < x^{a_n} < x^{P^{-1}} < 1 + \varepsilon$.
- אם $x = 1$ זה טרוויאלי ואם $x < 1$ אז מאריתמטיקה של גבולות סיימנו.

∎

משפט 8. תהא a_n סדרת רציונלים מתכנסת. אז לכל $x \geq 0$ הסדרה x^{a_n} מתכנסת.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. a_n מתכנסת ולכן היא חסומה. מכאן ש־x^{a_n} חסומה. כלומר קיים $M > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|x^{a_n}| \leq M$. קיים $p \in \mathbb{N}$ כך ש־:

$$1 - \frac{\varepsilon}{M+1} < x^{-\frac{1}{O}} < 1 < x^{\frac{1}{P}} < 1 + \frac{\varepsilon}{M+1}$$

a_n מתכנסת ולכן סדרת קושי. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n, m \geq N\colon\ |a_n - a_m| < \frac{1}{P}$ ומחוקי חזקות $|x^{a_n} - x^{a_m}| = |x^{a_m}|\,|x^{a_n - a_m} - 1| \leq$ $\varepsilon > M \cdot \frac{\varepsilon}{M+1}$. ∎

משפט 9. בהינתן a_n, b_n סדרות רציונליים שתיהן מתכנסות לאותו הגבול, אז $\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{b_n}$.

ההוכחה לבית. מהמשפט האחרון יש לנו אי־תלות בבחירת נציג. אפשר גם להראות שזהו אכן יחס שקילות (בפרט קיימת סדרת רציונליים השואפת ל־α, לכל $\alpha \in \mathbb{R}$). לכן נוכל להגדיר:

הגדרה 4. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ו־$x > 0$. נגדיר $x^\alpha := \lim_{n\to\infty} x^{a_n}$ כאשר a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־α.

משפט 10. תהא a_n סדרה (לא בהכרח סדרת רציונליים) ויהי $x > 0$. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אמ"מ $\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = x^a$.

משפט 11. חזקות ממשיות מקיימות חוקי חזקות.

עקרון הרווחים המקוננים של קנטור

(ידוע בעיקר כ"משפט החיתוך של קנטור") תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. $\forall n \in\colon a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

אז:

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

הוכחה. ידוע a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל (ע"י b_1). לכן a_n מתכנסת. נסמן את גבולה c. מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + (b_n - a_n) = c$$

לכן $\lim_{n\to\infty} b_n = c$. ידוע a_n עולה ו־b_n יורדת ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $a_n \leq c \leq b_n$, כלומר $c \in [a_n, b_n]$ ומכאן $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. יהי $d \in \mathbb{R}$. נניח $d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n m b_n]$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$b_n - a_n < \varepsilon$. $c, d \in [a_n, b_n]$ אזי $|c - d| < b_n - a_n < \varepsilon$ לכן $c = d$. ∎

גם כאן – ההוכחה נראית תמימה, אבל איפשהו באמצע מתחבא משפט ווירשטראס הראשון, שאומר שכל סדרה מונוטונית חסומה היא בעלת גבול. למעשה, עקרון הרווחים המקוננים של קנטור שקול לאקסיומת השלמות! בבית, מאוד מומלץ להוכיח את הכיוון ההפוך. תרגיל מעניין אחר הוא להוכיח את בולצאנו־וייראשטראס באמצעות עקרון הרווחים המקוננים במקום אקסיומת השלמות.

לגוריתמים

משפט 12. לכל $a, b > 0$, אם $a \neq 1$ אז קיים ויחיד $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$a^x = b$.

הוכחה. נוכיח למקרה $a > 1$. הוכחנו בבית ש־$\{a^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ אינה חסומה. לכן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$a^k > b$. מעקרון הסדר הטוב בטבעיים, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$a^{k-1} \leq b < a^k$. נגדיר $x_1 = k - 1, y_1 = k$. נסמן $c = \frac{x_n + y_n}{2}$. אם $a^{x_n} \leq b < a^c$ נגדיר $x_{n+1} = x_n, y_{n+1} = c$. אחרת נגדיר $x_{n+1} = c, y_{n+1} = y_n$ (המרצה מבצע חיפוש בינארי). ממשפט הרקורסיה x_n קיימת. בשלב ה־$n+1$ נקבל ש־$b \in [a^{x_n}, a^{y_n}]$ וגם $y_n - x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ וכן $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$. לכן קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n] = \{x\}$. אז $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$ לכן $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x$. כמו כן $\bigcup_{n=1}^{\infty} [x^{a_n}, a^{y_n}] = \{b\}$ (לבית). לכן b כזה קיים.

היחידות נובעת ממונוטוניות החזקה. ∎

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־$\LaTeX$ ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד