חדו"א 1א -- תרגיל 2

1. הוכיחו את השקילות בין תנאי החסם העליון שהוצגו בתרגול, כלומר:
תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה ויהי $s \in \mathbb{R}$. אז s הוא החסם העליון של A אם ורק אם s חסם מלעיל מינימלי של A.

2. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:
   (א) אם אין ל־A איבר מקסימלי אז A קבוצה אינסופית.
   (ב) אם A אינסופית ללא איבר מינימלי אז A אינה חסומה מלרע.
   (ג) אם A, B חסומות ו־$\sup A = \inf B$ אז החיתוך $A \cap B$ מכיל בדיוק איבר אחד.
   (ד) אם A, B חסומות מלעיל וזרות (כלומר $A \cap B = \emptyset$) אז $\sup A \neq \sup B$.

3. תהאנה a_n, b_n סדרות, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, וכן $a_{n+1} \leq a_n$ ו־ $b_n \leq b_{n+1}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$.
נניח כי $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלעיל ו־$\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלרע.
נסמן $\alpha = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \beta = \sup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. נתון כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\alpha < a_n, b_n < \beta$.
הוכיחו שמתקיים $(\alpha, \beta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

4. מצאו $\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ (אם קיימים) עבור הקבוצות הבאות:
   (א) $A = \left\{x + \frac{1}{x} \,:\, x > 0\right\}$
   (ב) $B = \left\{x^2 + x + 1 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$
   (ג) $C = \left\{\frac{m}{n} \,:\, m, n \in \mathbb{N}, m < n\right\}$.
   (ד) $D = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$

5. נגדיר את הקבוצה
$$A = \left\{\lceil\sqrt{n}\rceil - \sqrt{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$$
כאשר $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$ (הערך השלם העליון של $x \in \mathbb{R}$).
מצאו את $\sup A, \inf A$.

6. הוכיחו כי לכל קבוצה סופית קיימים מקסימום ומינימום.

7. קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא דיסקרטית אם לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A = \{x\}$.
לקבוצה A נגדיר את הקבוע $d(A) = \inf \{|x - y| : x, y \in A, x \neq y\}$.
   (א) אם $d(A) > 0$ אז A דיסקרטית.
   (ב) הוכיחו את אחת מהטענות הבאות:
      i. אם A חסומה מלעיל ו־$d(A) > 0$ אז יש בה מקסימום.
      ii. אם A חסומה מלרע ו־$d(A) > 0$ אז יש בה מינימום.
      iii. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה דיסקרטית ותהי $B \subseteq A$, אז B דיסקרטית.
   (ג) הוכיחו כי $\mathbb{Z}$ היא דיסקרטית וכי $d(A) = 1$.

8. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$, אם $x > 1$, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x^n > y$. הסיקו כי לכל $x > 1$ מתקיים $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = +\infty$.
הראו בנוסף כי אם $x < -1$ אז לסדרה x^n אין גבול סופי או אינסופי (יש כאן 3 תת־הוכחות. יש להראות כי הסדרה אינה מתכנסת, אינה שואפת ל $+\infty$, ואינה שואפת ל $-\infty$)

9. (*) הוכיחו שהקבוצה $\{sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$ צפופה בקטע $[-1, 1]$. כלומר, הוכיחו שלכל $x, y \in [-1, 1]$ כך ש $x < y$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x < sin(n) < y$. בתרגיל זה ניתן להשתמש בעובדה ש π הוא מספר אי רציונלי.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. הוכיחו כי קיים $\max A$ אם ורק אם $\sup A \in A$, ובמקרה זה $\sup A = \max A$.
2. מצאו $\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ (אם קיימים) עבור הקבוצות הבאות:
   (א) $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$
   (ב) $B = \left\{ \frac{2^p}{5^q} : \frac{p}{q} \in (1,2) \cap \mathbb{Q},\ q > 0 \right\}$
   (ג) $C = \left\{ \frac{mn}{1+m+n} \ \mid \ n, m \in \mathbb{N} \right\}$
3. תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות.
   (א) הוכיחו כי אם A, B חסומות מלעיל אז $A \cup B$ חסומה מלעיל ומתקיים $\sup (A \cup B) = \max \{\sup A, \sup B\}$.
   (ב) הוכיחו כי אם $A \subseteq B$, ו־ B חסומה מלעיל אז A חסומה מלעיל ומתקיים $\sup A \leq \sup B$.
   (ג) נניח כי לכל $a \in A, b \in B$ מתקיים $a \leq b$. הוכיחו כי $\sup A \leq \inf B$.
4. נגדיר את הקבוצה

$$A \cdot B = \{a \cdot b \ : \ a \in A, b \in B\}$$

הוכיחו כי אם $A, B \subseteq [0, \infty)$ חסומות מלעיל, אז $A \cdot B$ חסומה מלעיל ומתקיים $\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.