תרגיל בית 11

26 ביוני 2025

תרגיל 1 יהי $V=\mathbb{R}_{\leq 2}$ ויהיו $t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}$ מספרים ממשיים שונים. נגדיר $L_i:V\to\mathbb{R}$ ע"י $L_i(p)=p(t_i)$.

א. הראו שL_1,L_2,L_3 הם פונקציונלים לינאריים ומהווים בסיס לV^*.

ב. מצאו בסיס של V עבורו הבסיס מסעיף א הוא הבסיס הדואלי.

ג. תהי $D:V\hookleftarrow$ העתקת הנגזרת. מצאו את הייצוג של D^* בבסיס מסעיף א' ומצאו את הייצוג של D בבסיס מסעיף ב'.

תרגיל 2 נסתכל על המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^3$ עם הבסיס הסטנדרטי. נגדיר את ההעתקה הלינארית $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=y-x+2z$.

מצאו וקטור $v\in\mathbb{R}^3$ כך שלכל $u\in\mathbb{R}^3$ מתקיים ש

$$T(u)=v^Tu$$

עכשיו נעבור להסתכל על המרחב לפי הבסיס

$$B=\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\}$$

מצאו וקטור $w\in\mathbb{R}^3$ עבורו לכל $u\in\mathbb{R}^3$ מתקיים ש

$$T(u)=w^T[u]_B$$

תרגיל 3 נסתכל על המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^4$ ועל תת המרחב שלו שנפרש על ידי

$$V=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\-1\end{pmatrix}\}$$

מצאו בסיס למרחב המאפס של V.

תרגיל 4 נסתכל על הבסיס

$$B=\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\}$$

מצאו את B^*, הבסיס הדואלי ל B. 1. נגדיר בסיס $B=(v1,v2,v3)$ ל-$\mathbb{R}^3$ באמצעות הוקטורים:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

מצאו את הבסיס B^* הדואלי לB.

תרגיל 5 יהי $B=(v_1,...,v_n)$ בסיס של מ"ו V ויהי $C=(\phi_1,...,\phi_n)$ תת קבוצה סדורה כלשהי של V^* (לא בהכרח $C=B^*$). הוכיחו שהמטריצה $A_{ij}=\phi_i(v_j)$ הפיכה אמם C בסיס ל-V^*.

תרגיל 6 יהי V מ"ו ויהיו $\phi_1,\phi_2\in V^*$ כך שמתקיים:

$$\forall v\in V:\phi_1(v)\geq 0 \implies \phi_2(v)\geq 0.$$

הוכיחו ש-ϕ_1,ϕ_2 תלויים לינארית.

תרגיל 7 תהי $T:V\to W$ ה"ל בין מרחבים נ"ס ויהי $(w_1,...,w_n)$ בסיס סדור של W. הוכיחו שישנם $\phi_1,...,\phi_n\in V^*$ כך שמתקיים:

$$\forall v\in V:T(v)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(v)w_i.$$

תרגיל 8 יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $\phi_1,\phi_2\in V^*$. הוכיחו שהפונקציה $\phi:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת לפי $\phi(v)=\phi_1(v)\cdot\phi_2(v)$ היא איבר של V^* אמם היא העתקת האפס. האם זה נכון מעל כל שדה?