תרגול 1

שחר פרץ

28 ביולי 2025

(1)

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נניח v_1, v_2, v_3, v_4 בת"ל. נגדיר: $U = \operatorname{span}\{v_1, \dots v_4\}$.$W = \operatorname{span}\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1\}$. האם $U = W$?

פתרון: ברור ש־$\dim U = 4$. משום ש־$\sum v_i - v_{i-1 \mod 4} = 0$, אז הוקטורים שיוצרים את W ת"ל ולכן $\dim W \leq 3$. סה"כ $\dim W \neq \dim U$ ולכן $U \neq W$ וסיימנו.

הערה: למעשה מתקיים $\dim W = 3$. **נימוק:** ע"פ משפט מהכיתה ניתן לכתוב $W = \operatorname{span}\{v_1 - v - 2, v_2 - v_3, v_3 - v_4\}$ (נכון כי בצירוף הלינארי אין אפסים). יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_3$ ואז $\lambda_1(v_1 - v_2) + \lambda_2(v_2 - v_3) + \lambda_3(v_3 - v_4) = 0$ ונוכיח שהוא טרוויאלי. נפתח את הסוגריים ונקבל $\lambda_1 v_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)v_3 - \lambda_3 - \lambda_3 v_4$ צירוף לינארי של וקטורים בת"ל ונקבל $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ וסיימנו.

הערה: אם נוסיף לקבוצה מקודם את v_4 במקום את $v_4 - v_1$, נקבל קבוצה ממימד 4.

(2)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי בעל q איברים. כמה איזומורפיזמים $\mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^4$ יש? **פתרון:** יהי בסיס $B = (v_1 \dots v_4)$ כלשהו. נוכל להגדיר את ההעתקה בהינתן $Tv_1 \dots Tv_4$. נבחין ש־$\left|\mathbb{F}^4\right| = q^4$ ולכן יש q^4 וקטורים ב־$\mathbb{F}^4$.

1. בחירת הוקטור הראשון, כל וקטור שאינו אפס $q^4 - 1$ אפשרויות.
2. בחירת הוקטור השני, כל דבר שלא ת"ל בוטקור הראשון כלומר כל דבר שהוא לא כפל בסקלר בוקטור הראשון – $q^4 - q$ אפשרויות.
3. בחירת הוקטור השני – כל דבר שאינו צירוף לינארי (שני סקלרים) ונקבל $q^4 - q^2$.
4. כנ"ל $q^4 - q^3$

סה"כ:

$$(q^4 - 1)(q^4 - q)(q^4 - q^2)(q^4 - q^3) = q^6(q^4 - 1)(q^3 - 1)(q^2 - 1)(q - 1)$$

(3)

תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$ כך ש־$\rho(A^2) \geq \rho(A)$ הוכיחו שמרחב הפתרונות של $A\bar{x} = 0$ שווה למרחב הפתרונות של $A^2\bar{x} = 0$. מסתבר ש־$\rho = \operatorname{rank}$.

הוכחה. יהי $\bar{x} \in \mathcal{N}A$, כלומר $A\bar{x} = 0$ מהגדרה. לכן $\bar{x} \in \mathcal{N}A^2 \impliedby A^2x = (A \cdot A)x = A(Ax) = A0 = 0$ ולכן $\mathcal{N}A \subseteq \mathcal{N}A^2$.

נתון $\operatorname{rank} A^2 \geq \operatorname{rank} A$ ומשום שידוע ממשפט הדרגה והאפסות:

$$n - \dim \mathcal{N}A = \operatorname{rank} A \geq \operatorname{rank} A^2 = n - \dim \mathcal{N}A^2$$

ומשום שנתון $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ מקבלים שוויון. סה"כ:

$$n - \dim \mathcal{N}A = n - \dim \mathcal{N}A^2 \implies \dim \mathcal{N}A = \dim \mathcal{N}A^2$$

וראינו הכלה, לכן $\mathcal{N}A = \mathcal{N}A^2$ וסיימנו. ■

הערה: יותר קל להראות הכלה ושוויון ממדים מהכלה דו־כיוונית, ברוב הפעמים.

(4)

תהי $T \colon M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ ההעתקה הלינארית $T(A) = A^T$. מצאו $\det T$, כלומר את $\det([T]_B^B)$ כאשר B בסיס של $M_3(\mathbb{R})$.

הערה: זה מוגדר היטב כי דטרמיננטה לא תלויה בבסיס מהסיבה הבאה:

$$\det([T]_C^C) = \det([id]_C^B[T]_B^B[id]_B^C) = \det(M_C^B)\det([T]_B^B)\det(M_B^C) = \cancel{\det(M_C^B)\det((M_C^B))^{-1}}\det([T]_B^B) = \det([T]_B^B)$$

עתה נפנה להוכיח את השאלה. משום שאנו יכולים לבחור כל בסיס, נבחר את הבסיס הסטנדרטי. בהינתן:

$$B = \{e_1 \dots e_9\},\ T(B) = \{e_1, e_4, e_7, e_2, e_5, e_8, e_3, e_6, e_9\}$$

הערה: e_i מוגדר באופן הבא:

$$e_i = \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{i4} & \delta_{i5} & \delta_{i6} \\ \delta_{i7} & \delta_{i8} & \delta_{i9} \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה 9×9 שנוכל למצוא את הדטרמיננטה שלה באמצעות מינורים ושטויות, אבל אפשר להסתכל על זה גם כעל 3 החלפות עמודות ביחס ל־I כלומר $\det[T]_B^B = (-1)^3 \det I = -1$.

(5)

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהי $T\colon V \to V$ ט"ל המקיימת $T \circ T = T$. הוכיחו ש־$V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

הוכחה. נתחיל מלהוכיח חיתוך ריק. יהי $v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$. אז $Tv = 0 \wedge \exists w \in V\colon Tw = v$. אזי:

$$T^2 = T \implies 0 = Tv = T(T(w)) = T^2 w = Tw = v \implies v = 0$$

לכן $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$. מהגדרה, $\ker T, \operatorname{Im} T \subseteq V$ ולכן בפרט $\operatorname{Im} T \oplus \ker T \subseteq V$. ברם, ממשפט ממדים כלשהו $\dim(\ker T \oplus \operatorname{Im} T) = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = \dim V$. דהיינו $\ker T \oplus \operatorname{Im} T = V$ כדרוש.

■

(6)

יהי V מ"ו המוגדר מעל $\mathbb{R}$ יהיו. תהיינה $T, S\colon V \to \mathbb{R}$ העתקות לינאריות שאינן העתקת האפס. נניח שמתקיים לכל $v \in V$ כך שאם $T(v) \geq 0 \implies S(v) \geq 0$. הוכיחו כי קיים סקלר $\alpha > 0$ ממשי המקיים $T = \alpha S$.

טיוטה. הבחנה: $\dim\operatorname{Im} T = 1$ (כי לא העתקת האפס, ולכן $\dim\operatorname{Im} T \neq 0$). באופן דומה $\dim\operatorname{Im} S = 1$. ממשפט הממדים $\dim\ker T = \dim\ker S = n - 1$. לכן נוכל לבחור בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ כך ש־$T(v) = \lambda_n T(v_n)$ (כי קיים v_n כזה ואז אפשר להרחיב בסיס). נרצה להגיד אותו הדבר על S, כך לא ברור שזה אותו הבסיס. נבחר בסיס כך ש־$S(u) = \alpha_n T(u_n)$. הרעיון הכללי הוא להראות שהן מתאפסות ביחד, ואז למעשה הוכחנו שוויון קרנלים מה שמוכיח את הטענה. למעשה רוצים להוכיח $S(v) = 0 \implies T(v) = 0$. אבל זה לא קשה: נניח $S(v) = 0$ אז $Sv \geq 0$. לכן $T(-v) = 0 \implies S(-v) \geq 0$ וסה"כ הראנו $S(v) = 0$. ■

הוכחה. יהי $v \in \ker T$, כלומר $Tv = 0$. ע"פ הנתון $Sv \geq 0$. תשתקו, T ט"ל ולכן $T(-v) = 0$ משמע $S(-v) = -S(v) \geq 0$. מכאן נסיק שבהכרח $S(v) = 0$ כלומר $v \in \ker S$ ועל כן $\ker T \subseteq \ker S$.

כיוון ו־T, S אינן העתקות האפס והטווח שלהן הוא $\mathbb{R}$ שממדו 1, אז:

$$\dim\operatorname{Im} T = \dim\operatorname{Im} S = 1$$

ע"פ משפט הממדים, נגרר:

$$\dim\ker T = \dim\ker S = n - 1$$

יחדיו עם ההכלה ממקודם נסיק $\ker T = \ker S$. יהי בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ בסיס ל־$\ker T$ ונשלימו לבסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ של V. יהי $v \in V$ נתון על־ידי צירוף לינארי $v = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$. נקבל $T(v) = \sum_{i=0}^n \lambda_i T(v_i) = \lambda_n T(v_n)$ ובאופן דומה $S(v) = \lambda_n S(v_n)$. בהגדרה $v_n \notin \ker T = \ker S$, לכן $T(v_n), S(v_n) \neq 0$. זה מאפשר לחלק ולקבל:

$$\lambda_n = \frac{T(v_n)}{S(v_n)} T(v_n) = \frac{T(v_n)}{S(v_n)} S(v)$$

נגדיר $\alpha = \frac{T(v_n)}{S(v_n)}$. נקבל $\forall v \in V\colon T(v) = \alpha S(v) \implies T = \alpha S$.

מותר להניח בה"כ $T(v_n) > 0$ (אחרת פשוט נשלים לבסיס עם $-v_n$ במקום) ואז ע"פ הנתון $S(v_n) \geq 0$ ולכן $\alpha > 0$ מש"ל. ■

אינטואציה שלי: צריך למעשה שקבוצת המקורות של התמונה תהיה אותה הדבר. תנסו להבין למה זה נכון, זה המפתח לפתרון השאלה.

(7)

תהִינה $A,B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח $\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B \neq n-1$. הוכיחו כי $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$.
הרמז להפרדה למקרים: אי־השוויון ל־$n-1$. במקרה של $n-2$ אי אפשר להשתמש בקטע של ההפיכות ולכן חייבים להשתמש בהגדרה.

הוכחה. נחלק למקרים.

- אם $n = \operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B$ במקרה הזה שתיהן הפיכות ובפרט AB הפיכה. אז:

$$\operatorname{adj}(AB) = \det(AB) \cdot (AB)^{-1} = (\det(B)B^{-1})(\det AA^{-1}) = \operatorname{adj} B \operatorname{adj} A$$

- נניח שלפחות אחת מהמטריצות בה"כ A מדרגה לכל היותר $n-2$. טענת עזר: אם $\operatorname{rank} C \leq n-2$ אז $\operatorname{adj} C = 0$. לכן אגף ימין 0 וסיימנו. ידוע $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leq n-2$ ולכן גם $\operatorname{adj} AB = 0$, וסה"כ $0 = 0$.

  טענת העזר נכונה ישירות מההגדרה של adj, כי המינור מתאפס.

■

הערה שלי: מי שמתקשה שיפתור את 23BA שאלה 1. ו־25AB שאלה 1. יש שם גם הרחבה על $\operatorname{rank} A = n-2$.

עוד הערה שלי: תפתרו שאלות מס' 3-4 ממבחנים של גינסבורג. אלו השאלות הכי קשות שתמצאו.

"קוראים לזה הג'וינט ואני לא יכול לומר לך" ~ גינסוברג למיכאל ששאל אותו מה זה

שחר פרץ, 2025