חדו"א 1א ~ תרגיל בית 8

שחר פרץ

17 בינואר 2026

(1)

נחשב את הגבולות הבאים:

(ב)

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1983}-(1+1983x)}{x^2+x^{1983}}=\lim_{x\to0}\frac{-1+1983x+\sum_{i=0}^{1983}\binom{i}{1983}x^i}{x^{1983}+x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1^{-1982}+1983x^{-1981}+\sum_{i=0}^{1982}\binom{i}{1983}x^{i-1983}}{1+x^{-1981}}=\frac{1}{1}=1$$

(ד)

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left((x-1)\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)+\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\cancel{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}\right)=0\cdot0+\frac{2}{\pi}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$

(ו)

$$0=\lim_{x\to0}x=\lim_{x\to0}x\sqrt{-1+2}<\lim_{x\to0}x\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2}<\lim_{x\to0}x\sqrt{1+2}=\lim_{x\to0}\sqrt{3}x=0$$

סה"כ מסנדוויץ' הגבול הוא 0.

(ח)

$$1=\frac{1}{1}=\frac{\cancel{\frac{1}{x}}}{1-\cancel{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1}<\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}<\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\cancel{\frac{1}{x}}}{1-\cancel{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1}=1$$

סה"כ מסנדוויץ' הגבול הוא 1.

(ט) יהי $a>0$. נמצא את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$$

ראה סעיף י"ח

(י) יהיו $a,b>0$. נתבונן בגבול:

$$\frac{b}{a}=\lim_{x\to0}\frac{b\cancel{x}}{a\cancel{x}}-\cancel{\lim_{x\to0}x}=\lim_{x\to0}\frac{bx-0.5x^2}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{b}{x}-\frac{1}{2}\right)<\lim_{x\to0}\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{b}{x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{bx+0.5x^2}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{b\cancel{x}}{a\cancel{x}}+\cancel{\lim_{x\to0}x}=\frac{b}{a}$$

סה"כ מסנדוויץ' סיימנו.

(יב)

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\log\left((\sin x)^{\frac{1}{\log x}}\right)}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\log\sin x}{\log x}}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\log\sin x}{\log x}}=\cdots$$

נפנה לחשב את הגבול למעלה בנפרד:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x\sin x}{\log x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}+\log\cos x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\sin x+\lim_{x\to 0^+}\log\cos x=0+\log(1)=0$$

סה"כ נקבל שהגבול כולו שווה ל־:

$$\cdots=e^0=1$$

(יד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}}}}{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1$$

(טז) ניעזר בזהות הטריגונומטרית $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2\sin^2 x\cdot\cos x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{4\cos^2 x\cdot\sin x-2\sin^3 x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos^2 x\sin x}{\cos^2 x\sin x}-\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x\cdot\sin x}\right)^{-1}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\left(\lim_{x\to 0}2\frac{\cancel{\cos^2 x\sin x}}{\cancel{\cos^2 x\sin x}}\right)+\left(\lim_{x\to 0}\tan^2 x\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right)\right)^{-1}=\frac{3}{2}+(2+0\cdot 1)^{-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

(יח) יהי $a>0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln a\cdot a^x-0}{1}=\ln a$$

(2)

תהיינה $x_0\neq x_1$ שתי נקודות. נמצא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בדיוק ב־x_0,x_1.

הוכחה. יהיו x_0,x_1 כלשהם. משום שנתון $x_0\neq x_1$, בהכרח קיימות סביבות δ_0 ו־δ_1 ל־x_0 ו־x_1 בהתאמה בינהן החיתוך זר (כלומר $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)=\varnothing$). נגדיר את הפונקציה f הבאה:

$$f=\begin{cases}D(x)(x-x_0) & x\in(x_0-\delta_0,x+\delta_0)\\ D(x)(x-x_1) & x\in(x_1-\delta_1,x+\delta_1)\\ D(x) & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח שהיא מקיימת את הדרוש.

- **רציפה ב־x_0:** הוכחנו ש־$D(x)\cdot x$ רציפה ב־0. מהזזת פונקציות $D(x)(x-x_0)$ רציפה ב־x_0. כלומר היא רציפה בסביבת δ קטן ככל רצוננו ובפרט קטן מ־δ_0 סביב x_0, וסה"כ גם f רציפה ב־x_0 כדרוש.
- **רציפה ב־x_1:** כבר הוכחנו.
- **לא רציפה ב־$\{x_0,x_1\}\not\ni x$:** עבור x שנמצא בסביבות δ_1,δ_0 של x_1,x_0 בהתאמה, הוכחנו זאת בכיתה כאשר דיברנו על $D(x)x$. כנ"ל בעבור x מחוץ לסביבות ש־f מוגדרת בסביבתו כ־$D(x)$. נצטרך להתעסק ספציפית עם $x=x_0-\delta_0,x_1+\delta_1$, וכו' (קצוות הקטעים) משום ש־f אינה מוגדרת להיות פונקציה שאנו מכירים בסביבת x. נבחין שהגבול מימין ל־x לא קיים במקרה זה, שכן $D(x)$ חסרת גבולות חד־צדדיים בשני צידיה, ו־f מוגדרת להיות $D(x)$ בסביבה חד־כיוונית כלשהי של x.

סה"כ הראינו שהפונקציה מקיימת את הדרוש. ■

(3)

נוכיח ונפריך את הטענות הבאות:

(א) נפריך את שתי הטענות הבאות:

- אם f,g לא רציפות ב־x_0, אז $f+g$ אינה רציפה ב־x_0.

הפרכה. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f = D(x) \quad g = -D(x)$$

בשיעור הראינו ש־f, g אינן רציפות באף נקודה ובפרט ב־x_0. אך $f + g = 0$ פונקציה קבועה שרציפה בכל נקודה ובפרט ב־x_0.
סה"כ סתירה למשפט. ∎

- אם f, g לא רציפות ב־x_0, אז $f \cdot g$ אינה רציפה ב־x_0.

הפרכה. נסתכל על הפונקציה הבאה:

$$f = D(x) = I_{\mathbb{Q}} \quad g = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

כאשר I_X האינדיקטור של הקבוצה X ב־$\mathbb{R}$. נבחין שבכל x מתקיים $g(x) \neq 0 \iff f(x) = 0$, כלומר $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$, ומכאן ש־$(f \cdot g)(x) = 0$ כלומר $f \cdot g$ פונקציה קבועה ב־0. ידוע מההרצאה ש־f לא רציפה בשום נקודה, וההוכחה על g זהה.
סה"כ סתירה למשפט משום שהפונקציה הקבועה רציפה בכל נקודה ובפרט ב־x_0. ∎

(ב) אם f רציפה בנק' x_0 ו־g אינה רציפה ב־x_0, אז $f + g, f \cdot g$ אינן רציפות ב־x_0.

הוכחה. בנקודות מבודדות הטענה מתקיימת באופן ריק. בנקודה x_0 שאינה מבודדת, כלומר f מוגדרת בסביבתה, נפריק את הרציפות. משום ש־g אינה רציפה ב־x_0, זוהי נקודת אי־רציפות סליקה, או מסוג כלשהו. בהינתן $+$ בה"כ פעולה מחבורת החיבור או מחבורת הכפל ב־$\mathbb{R}$:

- אם זוהי נקודת אי־רציפות סליקה, נקבל בקלות, אז $\lim_{x\to x_0} g(x) = z \neq g(x_0)$ כלשהו, ואז $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = x_0 + z \neq x_0 + x_1$ וסיימנו.
- אם זו נקודת אי־רציפות מסוג ראשון או שני, הגבול $\lim_{x\to x_0} g(x)$ אינו קיים. משום שמהנתון הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושווה ל־$f(x_0)$, מאריתמטיקת גבולות בהכרח $g(x)$ קיים, שכן אחרת:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x) - f(x)) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) - \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$$

כאשר השוויון $\stackrel{!}{=}$ נכון משום ששני הגבולות שמימנו מוגדרים בהתאם לנתון / הנחה בשלילה. מכאן $\lim_{x\to x_0} g(x)$ גבול שקיים וסתירה.

∎

(ג) אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז היא משיגה ערך מקסימלי/מינימלי ב־$\mathbb{R}$.

הפרכה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \arctan x \sin x$. ידוע $\arctan$ פונקציה מונוטונית עולה ממש וחסומה (ב־$\pm\frac{\pi}{2}$) ב־$\mathbb{R}$. מכאן שאין לה מקסימום, כי אם x מקסימום אז $\arctan(x+1) > \arctan(x)$ ומכאן $x+1$ מקסימום – סתירה, בעבור מינימום $x - 1$ באופן דומה (ממונוטוניות עולה). עוד ידוע ש־$\tan$ רציפה ומכאן ש־$\arctan$ רציפה (הופכית רציפה היא רציפה) וסה"כ $\arctan$ חסומה ורציפה, אך ללא מקסימום או מינימום. ∎

(4)

תהי f פונקציה רציפה ב־$[0, 1]$ המקיימות $f(x) > x$. נוכיח קיו ס$h > 0$ כך ש־$f(x) > x + h$ לכל x בתחום ההגדרה.

הוכחה. יהי $x \in [0, 1]$. משום ש־f רציפה בקטע סגור, היא רציפה במ"ש בו, כלומר קיימת δ כך שלכל x_0 בסביבת ε מתקיים, שלכל x בסביבה $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

∎

(5)

(א) נבנה פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקבלת כל ערך ב־$\mathbb{R}$ שלוש פעמים.

(ב) נוכיח אי־קיום פונקציה רציפה המקבלת כל ערך ב־$\mathbb{R}$ בדיוק פעמיים.

הוכחה. נניח בשלילה קיום $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה כך ש־$\forall r \in \mathbb{R}. \exists!(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1) = f(x_0) = r$. נתחיל מלהוכיח את הלמה הבאה: פונקציה רציפה f כלשהי לא יכולה לשכן קרן בתוך קטע פתוח, כלומר בהינתן $[a, b]$ כלשהם וקרן $[z, \infty)$ או $(\infty, z]$ כלשהי, בהכרח קיים x בקרן כך ש־$x \notin f([a, b])$. ההוכחה פשוטה: הפונקציה f רציפה ב־(a, b) ובעלת גבולות סופיים בקצוות (מרציפות גם־כן), ולכן ממשפט ויראשטראס f חסומה ב־$[a, b]$, דהיינו $f([a, b])$ הינו קטע סגור, ובפרט בהכרח אינו שווה לקרן, כלומר אכן קיים x בקרן.

נתבונן ב־$r = 0$. נניח ש־x_0, x_1 המתאימים לו ובה"כ $x_0 < x_1$. נסמן $x_3 = \frac{x_0+x_1}{2}$, ובה"כ $f(x_3) < 0$ (אחרת ההוכחה זהה אך הפוכה באי־השוויונות). מהלמה, נתבונן ב־$x_2 := x_1 + a$, ובה"כ $f(x_2) < 0$ (זאת משום שאם לא קיים a מתאים כזה, נוכל לבחור

$x_2 = x_0 - a$ עבור a אחר, ולפי הלמה בהכרח הקרן $[0,\infty)$ מכילה איבר מחוץ ל־(x_0, x_1) כלומר אכן קיים a מתאים. מקרה זה בו $x_2 < x_0$ לא שובר את ההוכחה). סה"כ יש לנו מספרים $x_0 < x_3 < x_1 < x_2$.

משום ש־$f(x_0) = f(x_1)$, בהכרח $(f(x_3), f(x_1)) = (f(x_3), f(x_1))$ ובגלל ש־$f(x_2) < f(x_1) \wedge f(x_3) < f(x_1)$, בהכרח $(f(x_3), f(x_1) \cap (f(x_2), f(x_1)) \neq \varnothing$. סה"כ קיים $y \in (f(x_3), f(x_1)) \cap (f(x_2), f(x_1)) \cap (f(x_3), f(x_0))$.

ממשפט ערך הביניים f מקיימת את תכונת דרבו.

- **על $(f(x_3), f(x_1))$:** בהכרח קיים $z_1 \in (x_3, x_1)$ כך ש־$f(z) = y$.
- **על $(f(x_3), f(x_0))$:** בהכרח קיים $z_2 \in (x_3, x_0)$ כך ש־$f(z) = y$.
- **על $(f(x_2), f(x_1))$:** בהכרח קיים $z_3 \in (x_2, x_1)$ כך ש־$f(z) = y$.

משום ש־(x_3, x_1), (x_3, x_0) ו־(x_2, x_1) זרים בזוגות, סה"כ z_1, z_2, z_3 שונים בזוגות. כלומר מצאנו שלושה מספרים שונים עבורם f מחזירה את y, בסתירה לכך שקיימים בדיוק שניים. ■

(6)

(א) תהי $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה עם $f(0) = f(1)$. נוכיח שמשוואה $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ יש פתרון $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

הוכחה. נסמן $x_0 = 0, x_1 = 1$. אם f קבועה כל x פתרון ובפרט $x = 0$ וסיימנו. אחרת קיים $x_2 \in (x_0, x_1)$ כך ש־$f(x_2) \neq f(x_1)$. עוד נסמן $y_i = f(x_i)$. נתעסק בה"כ במקרה בו $y_2 > y_0$, והמקרה בו $y_2 < y_0$ באופן דומה. ■

(ב) יהי $a_1, a_2, a_3 > 0$ ו־$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ מספרים כלשהם. נראה שלמשוואה הבאה בדיוק שני פתרונות:

$$\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3} = 0$$

הוכחה. נבחין שבהכרח $x \neq \lambda_i$, ולכן נוכל להכפיל את הסיפור ולקבל:

$$(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)a_1 + (x - \lambda_3)(x - \lambda_1)a_2 + (x - \lambda_2)(x - \lambda_1)a_3 = 0$$

לאחר צמצום:

$$\overbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}^{\alpha} x^2 - \overbrace{(a_1(\lambda_2 + \lambda_3) + a_2(\lambda_3 + \lambda_1) + a_3(\lambda_1 + \lambda_2))}^{\beta} x + \overbrace{(\lambda_2\lambda_3 a_1 + \lambda_3\lambda_1 a_2 + \lambda_2\lambda_1 a_3)}^{\gamma} 1 = 0$$

זוהי משוואה ריבועית. ידוע שיש לה שני פתרונות בדיוק אמ"מ הדיסקרימיננטה גדולה מ־0, דהיינו צ.ל. $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, כלומר $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. מא"ש הלדר, נגדיר $v_1 = (a_1, a_2, a_3)$ וכן $v_2 = (\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2)$, ואז עבור נורמת ה־$\ell_p$ עבור $p = 0.5$ נקבל (מתלכד עם א"ש קושי־שוורץ):

$$\alpha\gamma = (a_1 + a_2 + a_3)(\lambda_2\lambda_3 a_1 + \lambda_3\lambda_1 a_2 + \lambda_2\lambda_1 a_3) < \frac{\beta^2}{4} = \frac{(a_1(\lambda_2 + \lambda_3) + a_2(\lambda_3 + \lambda_1) + a_3(\lambda_1 + \lambda_2))^2}{4}$$

איך עושים את זה

$$\alpha\gamma = \lambda_2\lambda_3(a_1a_1 + a_1a_2 + a_1a_3) + \lambda_1\lambda_3(a_2a_1 + a_2a_2 + a_2a_3) + \lambda_2\lambda_1(a_3a_1 + a_3a_2 + a_3a_3)$$

$$\beta =$$

■

(7)

נתונה $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ רציפה. נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$x_1 \dots x_n \in (a,b)$ קיימת $x \in (a,b)$ כך ש־:

$$f(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) = \mathrm{AM}(x_i)$$

הוכחה. נסמן $x_{\max} = \max(x_i)_{i=1}^n$ ו־$x_{\min} = \min(x_i)_{i=1}^n$. אם $x_{\max} = x_{\min}$ אז x_i קבוע ואז $\mathrm{AM}(x_i) = x_1$ ו־$x_1 \in (a,b)$ יקיים את הדרוש. אחרת $x_{\max} \neq x_{\min}$. ידוע שהממוצע החשבוני של $f(x_i)$ מקיים $\mathrm{AM}(x_i) \in (f(x_{\min}), f(x_{\max}))$ כי ממוצע בין מספרים נמצא בין המקסימום למינימום, ו־$x_{\max} \neq x_{\min}$. סה"כ ממשפט ערך הביניים קיים x כך ש־$\mathrm{AM}(x_i) = f(x)$ כנדרש וסיימנו. ■

(8)

נוכיח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון.

(א) נתבונן במשוואה $(1-x)\cos x = \sin x$. נוכיח שיש לה לפחות פתרון אחד ב־$(1,0)$.

הוכחה. נסמן $f(x) = (1-x)\cos x - \sin x$. נוכיח $f(x)$ יורדת ב־$(0, \frac{\pi}{4})$. נגזור אותה, ונקבל:

$$f'(x) = (1-x)'\cos x + (1-x)(\cos x)' - (\sin x)' = -\cos x + (1-x)\sin x - \cos x = (1-x)\sin x - 2\cos x$$

ננסה להראות ש־$f'(x) < 0$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. לשם כך ניעזר במשפט קושי. נגדיר $f(x) = (1-x)\sin x$. נתבונן ב־$x \in (0,1)$:

$$\frac{f(1) - f(x)}{g(1) - g(x)} = \frac{(1-x)\sin x}{2\cos x} < 1$$

$$g(1) - g(x) = \cos x$$

■

(ב) נתבונן במשוואה $\cot x = \alpha x$ בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה.

$$f(x) = \cot x - \alpha x \quad f'(x) = -\csc x - \alpha = -\frac{1}{\sin^2 x} - \alpha$$

נראה ש־$f'(x)$ פונקציה שלילית בתחום הגדרתה (הוא $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). ידוע $\sin^2 x > 0$ לכל $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (שכן $x \neq \pi k$ ולכן אינו שורש, וריבוע מספר לא 0 הוא חיובי). מכאן ש־$\frac{1}{\sin^2 x} > 0$ גם כן וסה"כ באותו התחום $\csc < 0$. ידוע $\alpha > 0$ כלומר $-f'(x) = -\csc - \alpha <$ $-\csc x < 0$. סה"כ הנגזרת שלילית כלומר $f(x)$ מונוטונית יורדת.

ידוע $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \alpha = -\alpha$ ומשום ש־$\alpha > 0$ סה"כ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. ■

(9)

יהי $P(x)$ פולינום שאינו פולינום האפס. נוכיח שלמשוואה $|P(x)| = e^x$ יש לפחות פתרון ממשי אחד.

הוכחה. יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n עם מקדמים $a_0 \dots a_n$. נגדיר $f(x) = |P(x)| - e^x$. ידוע e^x מונוטונית עולה. ידוע $e^0 = 1$. עוד נבחין ש־$|P(x)| > 1$ המ"מ, שכן הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |P(x)| - 1 = \lim_{x\to\pm\infty} \left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^n\right| - 1 = \lim_{x\to\pm\infty} \left|(a_i - 1)x^{-n}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-n}\right| \cdot x^n = \lim_{x\to\pm\infty} |a_n| \cdot x^n = |a_n| \cdot \pm\infty = \pm\infty$$

כלומר עבור $x < 0$ מתקיים $|P(x)| - 1 > 0$. ממונוטוניות e^x ב־$(-\infty, 0]$ בהכרח $|P(x)| = e^0 > 0$ $|P(x)| - e^x >$ עבור אותו ה־$x < 0$. סה"כ מצאנו x כך ש־$f(x) > 0$. נסמנו x_1.

הראינו בעבר לסדרות (ואפשר מהיינה + מונוטוניות להראות גם לפונקציות) ש־$\lim_{x\to\infty} \frac{|P(x)|}{e^x} = 0$. מכאן (מחסמים אסימפטוטיים) שלכל $c > 0$ החל מ־x_0 כלשהו $c\,|P(x)| < e^x$ ובפרט עבור $c = 1$ נקבל $|P(x)| - e^x < 0$. סה"כ מצאנו x_0 כך ש־$f(x_0) < 0$ ו־x_1 כך ש־$f(x_1) > 0$. משום ש־f רציפה מערך הביניים נקבל שקיים $\tilde{x}$ כך ש־$f(\tilde{x}) = 0$ (כי $0 \in (f(x_0), f(x_1))$) וסה"כ $\tilde{x}$ מוכיח את הדרוש. ■

(10)

נוכיח שפונקציה מחזורית ורציפה ב־$\mathbb{R}$ מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה. מהיותה מחזורית קיים r ו־$x_0 \in (0, r)$ כך ש־$f(x_0 + rk) = f(x_0)$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. נסמן $A_k = [x_0 + rk, x_0 + r(k+1))$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. נבחין ש־f רציפה ו־A_0 קומפקטית כלומר ממשפט ויירשטראס f מקבלת מינימום ומקסימום ב־A_0, את המינימום נסמן ב־$x^- \in A_0$ ואת המקסימום ב־$x^+ \in A_0$. ממחזוריותה $f(A_k) = f(A_0)$ כלומר:

$$\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = f\left(\biguplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f(A_k) = f(A_0)$$

סה"כ $\operatorname{Im} f$ בעלת מקסימום ומינימום x^+ ו־x^-, כלומר x^+ ו־x^- המקסימום והמינימום של כל f, וסה"כ f מקבלת מקסימום ומינימום מהגדרת תמונה. ■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד