חדו"א 1א ~ תרגיל בית 2

שחר פרץ

12 בנובמבר 2025

(1)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה ויהי $s \in \mathbb{R}$. נוכיח s החסם העליון של A אמ"מ s חסם מלעיל מינימלי.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$. נוכיח שקילות באמצעות הוכחת גרירה דו־כיוונית.

$\Longrightarrow$ נניח α חסם עליון של A. נוכיח שהוא חסם מלעיל מנימלי. מהיותו חסם עליון, ידוע שהוא חסם מלעיל. נוכיח שהוא מינימלי. יהי $\beta \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A. נניח בשלילה $\alpha < \beta$, אז בעבור $\varepsilon = \alpha - \beta$ קיים $a \in A$ כך ש־$a > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$, ומכאן ש־$\beta$ אינו חסם מלעיל של A וסתירה.

$\Longleftarrow$ נניח α חסם מלעיל מינימלי, נוכיח שהוא חסם עליון. יהי $\varepsilon > 0$. אז נניח בשלילה שלא קיים $a \in A$ כך ש־$a > \alpha - \varepsilon$, ואז $\forall a \in A\colon a < \alpha - \varepsilon$ כלומר $\alpha - \varepsilon$ חסם מלעיל של A מהגדרה, אך $\alpha - \varepsilon < \alpha$ וזו סתירה למינימליות של α מבין החסמים מלעיל. סה"כ בהכרח קיים a המתאים לתנאי וסיימנו.

■

(2)

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. נוכיח או נפריך את את הטענות הבאות.

(א) נוכיח שאם ל־A אין איבר מקסימלי אז A אינסופית.

הוכחה. תהי A קבוצה ללא איבר מקסימלי. נניח בשלילה שהיא סופית. אזי $\max A$ מוגדר (ממשפט הרקורסיה: ידוע קיום זיווג $f\colon [n] \to A$ ואז הפונקציה $m_1 = f(1)$, ותנאי נסיגה $m_{n+1} = \max\{m_k, f(k+1)\}$ מגדירה את $\max A := m_n$)וחוסם את הסדרה מלמעלה, וסיימנו. ■

(ב) נפריך את הטענה שאם A אינסופית ללא איבר מינימלי אז A אינה חסומה מלרע.

הפרכה. בעבור הקבוצה $A = \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$ מתקיים תמיד $\frac{1}{n} > 0$ כלומר 0 חסם מלרע של A. מנגד כן הזיווג $f\colon A \to \mathbb{N}$ המוגדר לפי $f(a) = a^{-1}$ מראה ש־$|A| = \aleph_0$ כלומר היא אינסופית. סה"כ סתירה לטענה. ■

(ג) נפריך את כך שאם A, B חסומות ו־$\sup A = \inf B$ אז $A \cap B$ מכיל בדיוק איבר אחד.

הפרכה. נתבונן בשתי הסדרות הקבוצות:

$$B = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \quad A = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in n\mathbb{N}_+\right\}$$

בהרצאה הוכחנו ש־$\inf B = 0$. באותו האופן $\sup A = 0$. עם זאת, בהינתן $a \in A \cap B$ מתקיים קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = \frac{1}{n}$ וכן $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = -\frac{1}{m}$ ואז $\frac{1}{n} = -\frac{1}{m}$. נכפיל אגפים ונקבל $m = -n$, ומשום ש־$m, n > 0$ סתירה (כי בהכרח אחד מהם שלילי). ■

(ד) נפריך את הטענה שאם A, B קבוצות חסומות מלעיל וזרות, אז $\sup A \neq \sup B$.

הוכחה. נניח בשלילה את הטענה ונראה דוגמה נגדית. אכן, בעבור:

$$A = \left\{-\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{R}_+\right\} \quad B = \{0\}$$

נוכיח ש־$\sup A = \sup B$ וכן $A \cap B = \varnothing$.

- זרות: נניח בשלילה קיום $a \in A \cap B$, אז $a = 0$ וכן $a = (-2n)^{-1}$ סה"כ קיים הופכי לאפס וסתירה.
- נוכיח $\sup A = \sup B$. הסופרמום של סינגלטון הוא 0 ואכן $\sup B = 0$. נראה ש־$\sup A = 0$.

ניכר ש־0 חוסם את A ולכן חסם מלעיל שלה (שכן הופכי לחיובי הוא חיובי, והכפלתו ב־(-1) תביא למספר שלילי). יהי $\varepsilon > 0$. אכן, בעבור

$$A \ni -\frac{1}{2n} < 0 - \varepsilon \impliedby 1 < 2n\varepsilon \impliedby \frac{1}{2\varepsilon} < n \impliedby n = \frac{1}{4\varepsilon}$$

סה"כ 0 סופרמום כדרוש. אז $\sup A = \sup B$ וסתירה וטענה שרצינו להפריך.

■

(3)

תהאנה a_n, b_n סדרות כך ש־$\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n < b_n$ וכן $b_n \le b_{n+1} \land a_{n+1} \le a_n$ (כלומר b_n מונוטונית עולה ו־a_n מונוטונית יורדת). נגדיר $I_n = [a_n, b_n]$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח כי תמונת $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל ותמונת $\{a_n\}_n^{\infty}$ חסומה מלרע. מאקסיומת השלמות קיים $\beta = \sup b_n$ וכן $\alpha = \inf a_n$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדר הסימון $I_n = [a_n, b_n]$. נוכיח ש־$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

הוכחה. באינדוקציה ידוע $a_m < a_0 < b_0 < b_n$ כלומר $\forall m, n \in \mathbb{N} \colon a_m < b_n$. נפנה להוכיח את הדרוש הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ יהי $x \in (\alpha, \beta)$ כלומר $\alpha < x < \beta$. ממשפט ויירשטראס הראשון, a_n, b_n בעלות גבול. יתרה מכך, $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \to \infty} b_n = \beta$. יהי $x \in (\alpha, \beta)$. נתבונן בקטע $I = (\alpha+1, x)$. מתקיים $x < \alpha < \alpha+1$ כלומר $\alpha \in I$. מההגדרה השקולה לגבול שראינו, יש כמות סופית של a_n־ים מחוץ ל־I, ומכאן ש־$|\{a \in A \mid a \in I\}| \ge \aleph_0$. סה"כ קיים בהכרח $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a \in I$ כלומר $x < a_n < \alpha + 1$. ידוע $a_n < \alpha$ כלומר $a \in (\alpha, x)$. באופן זהה ניתן למצוא b_m כך ש־$b_m \in (x, \beta)$. בעבור $k = \max\{m, n\}$ מתקיים:

$$\alpha < a_k \le a_n < x < b_m \le b_k < \beta \implies x \in (a_k, b_k) \subseteq [a_k, b_k] = I_k$$

ומהגדרת איחוד מוכלל $x \in \bigcup_{t \in \mathbb{N}} I_t$ כדרוש.

$\supseteq$ מצד שני, יהי $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. נוכיח $x \in (\alpha, \beta)$. אכן ידוע קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x \in I_n = [a_n, b_n]$ כלומר $\alpha < a_n \le x \le b_n < \beta$ ולכן $\alpha < x < \beta$ דהיינו $x \in (\alpha, \beta)$ וסיימנו.

■

(4)

נמצא אינפימום, סופרמום, מינימום ומקסימום לקבוצות הבאות:

(א)
$$A = \left\{ x + \frac{1}{x} \colon x > 0 \right\}$$

נוכיח שיש לקבוצה מינימום הוא 2. יהי $k \in A$. מכאן $k = x + \frac{1}{x}$ עבור $x > 0$. יהי $k \ne 2$, נוכיח $k > 2$. נניח בשלילה $k < 2$. אז $x + \frac{1}{x} < 2$, ובשקילות נקבל $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 < 0$. אך ריבוע מספר ממשי גדול מ־0 וזו סתירה. לכן בהכרח $k = 2$ מינימלי וקיים. ידוע שהמינימום אם קיים הוא אינפימום, כלומר $\inf A = \min A = 2$.

עתה נראה שהקבוצה לא חסימה מלעיל. זאת כי לכל $M \in \mathbb{R}$ בשלילה חסם מלעיל מתקיים שאם $M < 1$ אז סתירה כי $2 \in A$, אחרת $M \ge 1$ ואז:

$$A \ni M + \frac{1}{M} > M$$

בסתירה להיות M חסם מלעיל. מהיותה לא חסומה מלעיל, אין לה סופרמום (כי סופרמום הוא חסם מלעיל), ואין לא מקסימום (כי אחרת המקסימום היה סופרמום שלא קיים).

(ב)
$$B = \{x^2 + x + 1 \colon x \in \mathbb{R}\}$$

נוכיח שהמינימום הוא $\frac{3}{4}$. עבור $x = -\frac{1}{2}$ אכן מתקיים $x^2 + x + 1 = 0.75$ ומכאן ש־$0.75 \in B$. עתה נוכיח שהוא מינימלי. נניח בשלילה ש־:

$$x^2 + x + 1 < 0.75 \implies 0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$$

וסתירה. מכאן ש־$\frac{3}{4} = \min B = \inf B$. באופן דומה ל־$A$ היא איננה חסומה: יהי M חסם עליון. משום ש־0.75 מינימום, $M > 0.75 > 0$. משום שלכל $M \in \mathbb{R}_+$ מתקיים $M + \varepsilon > M$ עבור $\varepsilon > 0$, וכן $M^2 > 0$ וגם $M^2 + 1 > 0$, מתקיים:

$$M < M + \varepsilon = M^2 + M + 1 \in A$$

וסתירה וסיימנו. מהיותה לא חסומה מלעיל, אין לה סופרמום (כי סופרמום הוא חסם מלעיל), ואין לא מקסימום (כי אחרת המקסימום היה סופרמום שלא קיים).

(ג)
$$C=\left\{\frac{m}{n}\colon m,n\in\mathbb{N}\wedge m<n\right\}$$

נוכיח ש־C חסרת מינימום ומקסימום, וכן $\inf C=0,\sup C=1$.

- ראשית כל, נוכיח שהסופרמום הוא 1. ידוע שלכל זוג $m<n$ אכן $\frac{m}{n}<1$ ולכן הוא חסם מלעיל. יהי $\varepsilon>0$. נראה קיום $q\in C, 1-\varepsilon<q<1$. למעשה, מצפיפות הרציונלים בממשיים שקיים רציונלי $q\in\mathbb{Q}$ בטווח הזה, ולכל $q<1$ מתקיים ש־$q=\frac{m}{n}$ כלשהם ועבורם $m<n$ $\implies$ $\frac{m}{n}<1$ כלומר $q\in C$. באופן דומה $\inf C=0$.
- עתה נוכיח שאין לקבוצה מקסימום. יהי $M\in C$, ונניח ש־M מקסימום. אז $M\in\mathbb{R}$ וכן $M<1$ (אחרת לכל m,n טבעיים כך ש־$M=\frac{m}{n}$ מתקיים $m=n$ וסתירה) ומצפיפות הרציונליים במשיים קיים $q\in\mathbb{Q}$ (וכבר הראינו שעבור $\mathbb{Q}_+\ni q<1$ מתקיים $q\in C$) כך ש־$M<q<1$ וזו סתירה. באופן דומה אפשר להוכיח שאין מינימום.

(ד)
$$D=\left\{\tfrac{1}{n}+(-1)^n\colon n\in\mathbb{N}\right\}$$

נראה ש־$\max D=\sup D=1.5$, $\inf D=-1$ ו־$\min D$ איננו מוגדר.

נוכיח ש־1.5 מקסימום. עבור $n=2$ אכן $1.5\in D$. יהי $x\in D$. אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=\frac{1}{n}+(-1)^n$. נוכיח $x\leq 1.5$. נפרק למקרים. לכל $n\geq 3$ נבחין ש־:

$$(-1)^n\leq 1\wedge\frac{1}{n}\leq\frac{1}{3}\implies(-1)^n+1\leq 1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$$

עבור $n=2$ ברור ש־$x=1.5$ ועבור $n=1$ מתקיים $x=0$. סה"כ בהכרח $x\leq 1.5$ וסיימנו. מהיות 1.5 מקסימום הוא גם סופרמום. לכן $\sup D=\max D=1.5$.

עתה נראה שאין מינימום. יהי $M\in D$ בשלילה מינימום. אז קיים n טבעי כך ש־$x=\frac{1}{n}+(-1)^n$. עם זאת, עבור $m=2n$:

$$D\ni\frac{1}{m}+(-1)^m=\underbrace{\frac{1}{2n}}_{>n^{-1}}+\underbrace{(-1)^{2n}}_{\geq(-1)^n}>\frac{1}{n}+(-1)^n=M$$

וסתירה. עכשיו נראה ש־-1 אינפימום. בבירור -1 חסם מלרע שכן לכל $x\in D$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=(-1)^n+n^{-1}$ ואז:

$$(-1)^n\geq -1\wedge n^{-1}>0\implies(-1)^n+n^{-1}>-1$$

יהי $\varepsilon>0$. מארכימדיאניות הטבעיים קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$1\leq n\varepsilon$. אז $n^{-1}\leq\varepsilon$. מכאן:

$$\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}\leq\varepsilon\implies\frac{1}{2n}+\underbrace{(-1)^{2n}}_{-1}<-1+\varepsilon$$

כדרוש.

(5)

נגדיר את הקבוצה:

$$A=\left\{\lceil\sqrt{n}\rceil-\sqrt{n}\colon n\in\mathbb{N}\right\}$$

כאשר $\lceil x\rceil:=\min\{n\in\mathbb{Z}\mid x\leq n\}$. נוכיח ש־$\sup A=1,\inf A=0$.

הוכחה. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$0\leq x-x\leq\lceil x\rceil-x\leq x+1-x=1$$

וזאת כי בין x לבין $x+1$ בהכרח קיים מספר טבעי (הוכח בכיתה). נסמן ב־$\tilde{x}$ את $\lceil x\rceil-x$.

- **אינפימום:** מהא"ש לעיל בהכרח 0 חסם תחתון. יהי $\varepsilon>0$. נראה ש־$\exists x\in A\colon x\leq 0+\varepsilon$. אז עבור המספר

■

(6)

נוכיח שלכל קבוצה סופית קיים מקסימום ומינימום.

הוכחה. תהי A קבוצה סופית. אזי $|A|=n$ עבור n טבעי כלשהו. נוכיח באינדוקציה על n את הטענה. צעד עבור $n=1$ אז A סינגילטון ואז $A=\{a\}$ כלשהו, ו־$\min A=\max A=a$ וסיימנו. אחרת, $|A|>1$ כלומר קיים $a\in A$ וכן $|A\setminus\{a\}|=n-1$. מה.א. ל־$A\setminus\{a\}$ קיים מינימום ומקסימום, נסמנם M_+, M_- בהתאמה. אז עבור:

$$\max A =: \begin{cases} a & a > M_+ \\ M_+ & \text{else} \end{cases} \quad \min A =: \begin{cases} a & a < M_- \\ M_- & \text{else} \end{cases}$$

מתקיים ש־$\forall b\in A\setminus\{a\}\colon\ \min A\le M_-\le b$ ומהגדרת $\min$ גם $\forall b\in A\colon b\ge \min A$ כדרוש (כי $A=(A\setminus\{a\})\uplus\{a\}$) ובאופן דומה לגבי $\max$ וסיימנו. ■

(7)

קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא דיסקרטית אם $\forall x\in A.\,\exists\varepsilon>0\colon (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\{x\}$. נגדיר את הקבוע:

$$d(A)=\inf\underbrace{\{|x-y| : x,y\in A\wedge x\neq y\}}_{D(A)}$$

בעבור קבוצה A כלשהי.

(א) נוכיח שאם $d(A)>0$ אז A דיסקרטית.

הוכחה. תהי קבוצה A כך ש־$d(A)>0$. נוכיח שהיא דיסקרטית. יהי $x\in A$. אז עבור $d(A)>0$ נוכיח ש־$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\{x\}$. נניח בשלילה אחרת, אזי קיים $x\neq y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. מהגדרת הימצאות בתחום:

$$-\varepsilon<x-y<\varepsilon \implies |x-y|<\varepsilon=d(A)$$

מהגדרה $|x-y|\in D(A)$ ומשום ש־$d(A)=\inf D(A)$ אז $|x-y|\ge d(A)$ וזו סתירה לזה שהוכחנו ש־$|x-y|<d(A)$. סה"כ הראינו את הדרוש ו־A דיסקרטית. ■

(ב) נוכיח את הטענה הבאה: אם A חסומה מלעיל ו־$d(A)>0$ אז יש בה מקסימום.

הוכחה. תהי A קבוצה חסומה מלעיל ו־$d(A)>0$ בעבורה. נוכיח שיש בה מקסימום. מהיותה חסומה מלעיל, ידוע שקיים $\sup A$. נתבונן בסביבה נקובה סביב $\sup A$, מהגדרת הדיסקרטיות בהכרח $C=\{\sup A\}$ $(\sup A-\varepsilon,\sup A+\varepsilon)\cap A=:$ עבור $\varepsilon>0$ כלשהו. עם זאת, מהגדרת הסופרמום, קיים $a\in A$ כך ש־$\sup A-\varepsilon<a\le\sup A$. מכאן שבהכרח $a\in C$ ו־$C=\{\sup A\}$ כלומר $a=\sup A$ וסה"כ $\sup A\in A$ כלומר יש מקסימום לקבוצה וסיימנו. ■

הערה: משום מה ביקשתם להוכיח רק אחת משלושת הטענות בסעיף ב'. בחרתי את (i).

(ג) נוכיח כי $\mathbb{Z}$ דיסקרטית בעבור $d(A)=1$

הוכחה. לכל $y\neq x$ כאשר $x,y\in\mathbb{Z}$ בהכרח קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$y=x+n$ וגם $n\neq 0$. אז:

$$|x-y|=|-n|=n>0$$

מספר טבעי גדול ממש מ־0 הוא גדול מ־1 כלומר $|x-y|\ge 1$. מכאן ש־1 חוסם מלמטה את $D(\mathbb{Z})$. נבחין ש־$1\in D(\mathbb{Z})$ בגלל שעבור $0,1\in\mathbb{Z}$ מתקיים $|1-0|=1$. סה"כ 1 הוא המינימום של $D(\mathbb{Z})$ ובפרט האינפימום, וסיימנו. ■

(8)

נוכיח שלכל $x,y\in\mathbb{R}$, אם $x>1$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x^n>y$. מכאן נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty}x^n=+\infty$. נראה גם שלכל $x<-1$ הסדרה חסרת גבולות.

8.1 קיום שורש n־י

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ ממשי אי־שלילי. נתבונן בקבוצה $A=\{a\in\mathbb{R}\colon a^n<x\}$. נוכיח שהיא חסומה מלעיל: לכל $a\in A$, נפרק למקרים:

- אם $a>1$ אז $a<a^n=x$ וסה"כ $\max\{x,1\}$ חסם מלעיל.
- אם $a<1$ אז $\max\{x,1\}$ עדיין חסם מלעיל.

אז הדבר הזה באמת חסום מלמעלה. לכן קיים סופרמום, הוא $\sup A$. נראה ש-$x = (\sup A)^n$. נפריד למקרים.

- אם $\sup A < x$ אז $\sup A \in A$ מהגדרה, ואז A בעלת מקסימום. אבל אוקי להוכיח שאין לזה מקסימום עומד להיות קשה

■

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד