מתמטיקה B ~ הרבה דברים

שחר פרץ

27 למאי 2024

1 עוד על גבולות

1.1 משפטים נוספים

הגדרה: $f:I\to\mathbb{R}$ (כאשר I קטע) יש את תכונת ערך הביניים אם לכל $a,b\in I$ קיים c בין b ל־a כך ש־$f(c)$ בין $f(b)$ ל־$f(c)$.

משפט ערך הביניים: בפונקציות רציפות מתקיימת תכונת ערך הביניים.

יש דוגמאות "מאוד סוציופתיות" שמקיימות את תכונת ערך הביניים אך אינן רציפות.

אופסי. הניסוח של עברי נוראי וכולל משום מה את פונקציית ירכלה. נגדיר מחדש את תכונת ערך הביניים. ... אם לכל $a,b\in I$ ולכל ξ בין $f(a)$ ל־$f(b)$ קיים c בין b ל־a כך ש־$f(c)=\xi$.

משפט הסנדוויץ': אם מתקיים ש־$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$ וגם $f\le g\le h$ בסביבה נקובה של a אז $\lim_{x\to a}g(x)=L$. ידוע גם בשם "משפט שני שוטרים ושיכור".

2 שימושים במשפטים האלו

2.1

נניח ואנו מעוניינים לחשב את הגבול $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$.

מתוך הגבול היחיד הזה, שאותו נחשב באמצעות כלים גיאוטרים, נוכל לקבל את הגבולות האחרים שיעניינו אותנו בנוגע לגיאומטריה.

נתבונן במעגל היחידה, כאשר x שואף ל־0. ראה סרטוט. השטח של המשולש הירוק הוא $\frac{1}{2}\sin x$ ושטח הגזרה הוא $\pi\cdot\frac{x}{2\pi}$. השטח של המשולש הירוק יהיה $\frac{1}{2}\tan x$. מתוך זה ברור מהסרטוט, $\frac{1}{2}\sin x<\pi\cdot\frac{x}{2\pi}<\frac{1}{2}\tan x$. מכמה מעברים אלגברים נקבל $\sin x<x<\tan x$. מצג אחד $\sin x<x\implies\frac{\sin x}{x}<1$, ומצד שני $x<\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\implies\frac{\sin x}{x}>\cos x$. לפי משפט הסנדוויץ, בגלל ש־$\lim_{x\to0}1=\lim_{x\to0}\cos x=1$ ממשפט הסנדוויץ'; $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. [הערה: האי־שוויונות האלו צריכים להתקיים רק בסביבה של $x\to0$]

הערה: הנחנו ש־x חיובי, אך $\frac{\sin x}{x}$ זוגית ולכן זה לא משנה.

הערה 2: הנחנו גם ש־x ברדיאנים. נרחיב עבור כל מידה: $\lim_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x}=\lim_{x\to0}a\cdot\frac{\sin ax}{ax}\overset{t=ax}{=}\lim_{t\to0}a\frac{\sin t}{t}=a\cdot1=a$

ובפרט עבור מעלות.

2.2 שימוש במשפט

- נשתמש באותו הגבול עכשיו:
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x^2}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}\cdot\frac{x}{\sin bx}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$
- תרגיל:
$$\lim_{x\to\infty}\sin\left[\underbrace{\frac{x^2+3}{\sqrt{x^6+18x-1}}}_{u\to0}\right]=\lim_{u\to0^+}\sin(u)=0$$

3 פונקציות היפר־טריגונומטריות

ישנה הפונקציה e^x המעריכית. חלקה האי־זוגי: $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ / החלק הזוגי: $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

החלק הזוגי יהיה $\cosh$ והאי־זוגי $\sinh$. ואכן חיבורם יהיה e^x.

גרפים אני לא עושה כאן, תעשו על דסמוס.

באופן דומה $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

טענה: $\sinh$ תהיה מונוטונית עולה בתחומה החיובי:

$$\underbrace{\cosh x + \cosh y}_{\frac{e^x - e^y + e^x - e^{-y}}{2}} = \frac{1}{2} e^x (1 - e^{-x-y})(1 - e^{-x+y})$$

אם $x > y > 0$ אז $-x + y$ שלילי כלומר $e^{-x+y} < 1$. באופן דומה $1 - e^{-x-y}$ קטן מ־1. סה"כ מכפילים שני עגפים חיוביים וגמרנו.
משום שהפונקציה אי־זוגית אז זה מוכיח גם את המונוטוניות מהצד השני.

3.1 אז למה קוראים להן טריגונומטריות?

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$
$$\sinh^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh 2x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{x-y} - e^{-x-y}}{2} \tag{1}$$
$$= e^x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + e^{-y} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{2}$$
$$= e^x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + e^{-y} \frac{e^x - e^{-x}}{2} + e^{-x} \frac{e^y - e^{-y}}{2} - e^{-x} \frac{e^y - e^{-y}}{2} \tag{3}$$

אוקי עכשיו עברי החליט שהוא מעדיף לפתור את זה בדרך אחרת:

$$\sinh(x+y) = \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y} \boldsymbol{- e^{x-y} - e^{y-x} + e^{x-y} + e^{y-x}}) \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + e^y \frac{e^x - e^{-x}}{2} + e^{-y} \frac{e^x - e^{-x}}{2} + e^{-x} \frac{e^y - e^{-y}}{2}\right] \tag{5}$$
$$= \frac{e^x - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \tag{6}$$
$$= \sinh y \cdot \cosh x + \sinh x \cosh y \tag{7}$$

(בכולד מה שעברי הוסיף והחסיר אך לא משנה את הערך) כלומר, הזהויות שאנו מכירים מהפונקציות הטריגונומטריות מתנהגות באופן דומה לפונקציות הטריגונומטריות, עד לכדי סימן. בהמשך נראה למה.

3.2 תרגיל

$$\cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y \overset{!}{=} \cosh(x+y) \tag{8}$$
$$\cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \tag{9}$$
$$= \frac{1}{2}\left[2e^x + 2e^{-x} + 2e^y + 2e^{-y}\right] \tag{10}$$
$$= e^{x+y} + e^{-x-y} = 2\cosh(x+y) \tag{11}$$

טוב עשיתי טעות ואין לי זמן למצוא איפה

3.3 הפונקציות ההופכיות לפונקציות ההיפר־טריגונומטריות

$$\begin{aligned}
y = \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
ye^x &= \frac{(e^x)^2 - 1}{2} \qquad \cdot e^x \\
(e^x)^2 &- 2ye^x - 1 \\
e^x &= y \pm \sqrt{y^2+1} \\
x = \sinh^{-1} &= \ln(y + \sqrt{y^2+1})
\end{aligned}$$

4 נגזרות

בקורס חדו"א מגיעים לנגזרות בשבוע 7 אז תגידו תודה. עברי אומר שהוא יסתמך על החומר של המכינה "של השמחות".

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h מייצג את $\mathrm{d}x$ נקודות על נגזרות:

1. ליניאריות (בגלל שגבול מקיים את התכונות הללו):

$$(f+g)' = f' + g', \quad (a \cdot f') = a \cdot f'$$

2. מכפלה ומנה:

$$(f \cdot g) = f'g + fg' \tag{12}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \tag{13}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \sin x' = \cos x, \quad \cos x' = -\sin x, \quad \tan x' = -\frac{1}{\cos^x} \tag{14}$$

$$(f \circ g) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{15}$$

וזה נכון גם על אובייקטים לא קומטטביים כמו וקטורים (לפעמים). אפשר לגבר גם על נגזרת, ראשונה, שנייה, שלישית וכו':

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\sin x)'' = -\sin x,\ (\sin x)''' = -\cos x,\ (\sin x)'''' = \sin x$$

את הנגזרת ה־n־ית של פונקציה כללית, נסמן ב־:

$$f^{\underbrace{\prime\prime\prime\prime\prime\prime}_{\times n}} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

לפיכך, נוכל לכתוב:

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x & n \equiv 1 \\ -\sin x & n \equiv 2 \\ -\cos x & n \equiv 3 \\ \sin x & n \equiv 0 \end{cases} \mod 4$$

4.1 נגזרת סתומה

באנגלית – implicit diffrenetation (המלצה של עברי: לתרגם את זה דרך ויקיפדיה)

$$xy = 1 \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y' = -\frac{1}{x^2}$$

הטענה, היא שהיה אפשר לעבוד גם בסדר ההפוך:

$$y + y'x = (xy)' = 1' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

אז למה זה מועיל?

$$x^3y(x)^5+3x=8y(x)^3+1 \tag{16}$$
$$3x^2y^5+5y^4y'x^3+3=8\cdot 3y^2y'+0 \tag{17}$$
$$y'=\frac{3x^2y^3+3}{246^2-5y^4x^3} \tag{18}$$

יש מקרים שבהם אי אפשר לגזור עבור y אך בגלל קסם באמצעות גזירה סתומה זה יעבוד. במקרים אחרים סתם יהיה יותר נוח להציב בנגזרת הסתומה במקרים לכזור מפלצות.

4.1.1 "תרגילונון"

$$y^2+x\sin y=\cos x^2 \tag{19}$$
$$2yy'+\sin y+x\cdot\cos y\cdot y'=-\sin(x^2)\cdot 2x \tag{20}$$
$$\implies y'=\frac{-2x\sin(x^2)-\sin y}{2y+\cos y\cdot x} \tag{21}$$

4.2 שימוש בעולם האמיתי

ידוע לנו הנגזרת של x^a. נרצה להרחיב עבור $a=\frac{n}{m}$ רציונלי ($n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}$). כלומר, $y=x^{\frac{n}{m}}$ (תחת ההנחה שהיא מוגדרת).

$$y=x^{\frac{n}{m}} \implies y^m=x^n \tag{22}$$
$$\implies my^{m-1}y'=nx^{n-1} \implies y'=\frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} \tag{23}$$
$$\implies y'=\frac{nx^{n-1}}{mx^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1} \tag{24}$$
$$\implies ax^{a-1} \tag{25}$$

כלומר הנוסחה עובדת גם עבור אי־רציונליים. אם נגדיר כמו שצריך ממשיים אז זה יעבוד גם עליהם. וכנ"ל על מרוכבים.

4.3 עוד דוגמאות

לפי חוקי חזקות:

$$(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

תרגיל: תגזרו:

$$y(x)=\cos(x^{5/3}\tan^{7/2}(x)) \tag{26}$$
$$y'(x)=-\sin(x^{5/3}\tan^{7/2}(x))\cdot\frac{5}{3}x^{2/3}\tan^{7/2}x\cdot\frac{7}{2}\cdot\tan^{5/2}(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x} \tag{27}$$