ליניארית 2א 22

שחר פרץ

29 ביוני 2025

תזכורת: יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. אז:

הגדרה 1. עבור $T \colon V \to V$ ט"ל צמודה לעצמה (סימטרית מעל $\mathbb{R}$, הרמטית מעל $\mathbb{C}$) מוגדר

$$\forall v, u \in V \colon \langle Tv \,|\, u\rangle = \langle u \,|\, Tv\rangle$$

וזה שקול לכך ש־$T^* = T$.

הגדרה 2. T נקראת נורמלית אמ"מ $T^*T = TT^*$

מטריצה צמודה לעצמה בהכרח נורמלית אך לא להפך.

יש לנו שני ניסוחים למשפט הספקטרלי:

משפט 1. (המשפט הספקטרלי מעל $\mathbb{R}$) T סימטרית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

משפט 2. (המשפט הספקטרלי מעל $\mathbb{C}$) T נורמלית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

....

עוד טענו מהמשפט הספקטרלי:

משפט 3. אם $T^* = T$ אז כל הע"ע של T ממשיים.

וכן שבעבור ייצוג של נורמלית מעל $\mathbb{R}$, קיים סיס א"נ B כך ש־$[T]_B$ מטריצה מהצורה:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \square_m & \\ & & & \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k) \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים מהצורה:

$$\square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

....

התחלנו לדבר על העתקות אוניטריות (מעל $\mathbb{C}$) או אורתוגונליות (מעל $\mathbb{R}$). תקרא כך כאשר $TT^* = I$. הבחנו ש־$A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת כנ"ל אמ"מ $A^{-1} = A^* = \overline{A^T}$ מעל $\mathbb{C}$, ו־$A^{-1} = A^T$ מעל $\mathbb{R}$. באופן כללי זה שקול לאיזומטריה ליניארית (כלומר שם כללי לאורתוגונליות/אוניטריות יהיה איזומטריות).

הערה: איזומטריה, גם מחוץ לליניארית, היא פונקציה שמשרת גודל.

נמשיך עם התזכורות. T איזומטריה אמ"מ מתקיים אחד מבין הבאים:

1. (ההגדרה) $T^* = T^{-1}$
2. $TT^* = T^*T = I$
3. $\forall u, v \in V \colon \langle Tu \,|\, Tv\rangle = \langle u \,|\, v\rangle$
4. T מעבירה כל בסיס א"נ לבסיס א"נ
5. T מעבירה בסיס א"נ כלשהו לבסיס א"נ [מקרה פרטי של 4 בצורה טרוויאלית, אך גם שקול!]
6. $\forall v \in V \colon ||Tv|| = ||v||$

אפשר להסתכל על מתכונה 4 על איזומטריות כעל הומומורפיזם של ממ"פים.

"היה לי מרצה בפתוחה שכתב דבר לא מדויק בסיכום, ואז הוריד נקודות לסטודנטים שהסתמכו על זה. הוא אמר שזה מתמטיקה, אתם אחראים להבין מה נכון או לא – גם אם כתבתי שטויות".

....

גמרנו עם תזכורות

סימון 1. א"נ = אוניטרית בהקשר של מטריצות (בהקשר של מרחבים – אורתונורמלי)

משפט 4. התנאים הבאים שקולים על $A \in M_n(\mathbb{F})$.

1. A א"נ
2. שורות A מהוות בסיס א"נ של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)
3. עמודות A מהוות בסיס א"נ של $\mathbb{F}^n$.
4. $\forall u, v \in \mathbb{F}^n \colon \langle Au \,|\, Av \rangle = \langle u \,|\, v \rangle$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)
5. $\forall v \in \mathbb{F}^n \colon ||Av|| = ||n||$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

הערה שלא קשורה למשפט: נאמר ש־$[T^*]_B = [T]_B^*$ אמ"מ B בסיס **א"נ**.

הערה נוספת: זה בערך אמ"מ כי יש כמה מקרי קצה כמו מטריצת האפס.

הוכחה.

$2 \leftrightarrow 1$ נוכיח את הגרירה הראשונה

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1^T & \cdots & \bar{v}_n^T \\ | & & | \end{pmatrix} = AA^* = I \iff A \text{ א"נ} \implies v_i \bar{v}_j^T = \delta_{ij}$$

הטענה האחרונה שקולה לכך ש־$v_1 \dots v_n$ בסיס א"נ (ביחס למ"פ הסטנדרטית של $\mathbb{F}^n$)

$3 \leftrightarrow 1$ מספיק להוכיח A א"נ אמ"מ A^T א"נ. מסימטריה ($(A^T)^T = A$) למעשה מספיק להוכיח A א"נ גורר A^T א"נ. נוכיח:

$$A^* A = I \implies A^T \bar{A} = I \implies (A^T)^* = \bar{A} \implies A^T (A^T)^* = I$$

$4 \leftrightarrow 1$ נתבונן ב־$T_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ כאשר $\mathcal{E}$ הבסיס הסטנדרטי. אז $A = [T_A]_{\mathcal{E}}$. אז T_A א"נ אמ"מ $A =: [T_A]_{\mathcal{E}}$. אז:

$$\langle Au \,|\, Av \rangle = \langle T_A u \,|\, T_A v \rangle = \langle u \,|\, v \rangle$$

$5 \leftrightarrow 1$ אותה הדרך כמו קודם.

■

שאלה. מהן המטריצות $A \in M_2(\mathbb{R})$ האורתוגונליות?

התשובה. בהינתן $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ מהיות העמודות והשורות מהוות בסיס א"נ:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ a^c + c^2 = 1 \end{cases} \implies a = \cos\theta, \ b = \sin\theta$$

עוד נבחין ש־$ac + bd = 0$ כי:

$$AA^T = I \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = I$$

סה"כ מכך ש־$a^c + c^2 = 1$ ו־$b^2 + d^2 = 1$ נקבל שתי צורות אפשריות:

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \vee A_2 := A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

נבחין ש־A_2 הוא סיבוב ב־θ, ו־A_1 שיקוף ניצב ביחס ל־$\frac{\theta}{2}$. זה לא מפתיע שכן $\det A_1 = -1, \ \det A_2 = 1$. ■

"דרך נוספת לראות את זה":

$$a = \cos\theta \implies b = \sin\theta, \ c = \sin\varphi \implies d = \cos\varphi$$

אז (עד לכדי סיבוב)

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi \implies \sin(\theta + \varphi) = 0 \implies \theta + \varphi = 0 \vee \theta + \varphi = \pi$$

במקרה הראשון ש־$\varphi = \theta$ קיבלנו סיבוב, ובמקרה השני נקבל ש־$\varphi = \pi - \theta$ ואז $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ כדרוש.

ננסה להבין יותר טוב למה הן מסובבות בצורה הזו. A_2 מטריצה מוכרת אך A_1 פחות. נתבונן בפולינום האופייני שלה:

$$f_{A_1}(x) = \begin{vmatrix} x - \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & x + \cos\theta \end{vmatrix} = x^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = (x+1)(x-1)$$

אזי הע"ע $-1, +1$ (שימו לב ש־A_2 לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$).

$$A\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\theta}{2} \mapsto \frac{\theta}{2} + \pi\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

[אני ממש חלש בטריגו ואני מקווה שאני לא מסכם דברים לא נכונים. תבדקו אותי פעמיים כאן בחלק הזה. גם המרצה עשה את ההחלפה המוזרה של $\theta/2 \to \theta/2 + \pi/2$].

"אם הייתם רוצים תקופות מבחנים נורמליות הייתם צריכים להיוולד בזמן אחר".

"ומה, אתם חושבים שאחרי שהפקולטה דחתה בשבוע היא תיאמה את זה עם הפקולטות האחרות? הם דיברו איתם כמה ימים אח"כ"

מסקנה. (הצורה הנורמלית של ט"ל אורתוגונלית) תהי $T\colon V \to V$ אורתוגונלית. אז קיים בסיס א"נ של V, שביחס אליו המטריצה המייצגת את T היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} A_{\theta_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & A_{\theta_n} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

(אוניטרית לא מעיינת כי היא לכסינה)

הגיון:

אורתוגונלית, לכן נורמלית, לכן נראית בצורה של בלוקים 2×2 של ע"ע. הע"ע מגודל 1 כי היא אורתוגונלית, והם חייבים להיות ממשיים על מעגל היחידה הממשי. המטריצה A_θ חייבת להיות אורתוגונלית מגודל 2×2 כי כל תמ"ו שם הוא T־אינוו', כלומר אפשר לחלק את T לבלוקים מתאימים ובפרט T המצומצמת גם אורתוגונלית, ולכן A_θ סה"כ אורתוגונלית. כאשר $A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ו־$b \neq 0$ נשארנו עם המטריצות הללו.

הוכחה. ידוע עבור נורמלית:

$$A = \begin{pmatrix} \Box_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Box_m & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

כאשר

$$\Box_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

ובמקרה הזה משום שהיא אורתוגונלית על $\mathbb{R}$ אז $\lambda_i = \pm 1$ כי $|\lambda_i| = 1$. נתבונן במטריצה $\square_i$ כלשהי, אז $\square_i$ הנפרש ע"י $u_k, u_{k+1} =: U$ מקיים:

$$[T_{|U}]_{B_U} = \square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \quad [Tu_k]_{U_B} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad [Tu_{k+1}] = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

ומשום שהצמצום של אורתוגונלית על מ"ו T-אינו' היא עדיין אורתוגונלית, והיא בהכרח מהצורה של מטריצת הסיבוב לעיל. המטריצה של שיקוף וסיבוב ב-$\frac{\theta}{2}$ לכסינה ולכן להפוך לע"ע $\lambda_1 \dots \lambda_n$ (עד לכדי סדר איברי בסיס) שהם בהכרח מגודל ± 1 בכל מקרה, ויבלעו בשאר הע"ע, ובכך סיימנו. ■

אבל האם הייצוג יחיד? ננסה להבין את יחידות הייצוג עבור נורמלית כללית, ומשם לגזור על אורתוגונלית.

משפט 5. כל שתי מטריצות בצורה לעיל שמייצגות את אותה $T\colon V \to V$ נורמלית, שוות עד כדי סדר הבלוקים על האלכסון.

(יש כאן מה להוכיח רק בעבור $\mathbb{R}$, שכן מעל $\mathbb{C}$ לכסין).

הוכחה. ידוע שבעבור $\lambda_1 \dots \lambda_k$ ע"עים:

$$f_T(x) = \left(\prod (x - \lambda_i)\right)\left(\prod (x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2)\right)$$

כאשר המכפלה הראשונה באה מהע"עים והשניה מהריבועים $\square_i$. נבחין שלכל תמ"ו a_i נקבע ביחידות, ולכן b_i נקבל ביחידות עד כדי סימן (נסיק זאת מהפולינום האופייני). ברור שהע"עים נקבעים ביחידות עוד מההרצאות הראשונות. ■

אז מאיפה בה שינוי הכיוון של b, בעבור מטריצות אורתוגונליות? כלומר, מדוע A_{θ_i} שקולה ל-$A_{-\theta_i}$ (תפתחו את האלגברה/טריגו, זה מה שזה אומר)? זאת כי הן דומות באמצעות ההעתקה שהופכת את הצירים, מה ששקול ללהחליף את עמודות A_{θ_i}.

משפט 6. (המשפט הספקטרלי "בשפה קצת מטריציונית") תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה סימטרית (מעל $\mathbb{R}$)/נורמלית (מעל $\mathbb{C}$). אז קיימת מטריצה P אורתוגונלית/אוניטרית (בהתאם לשדה ממנו יצאנו), ומטריצה אלכסונית D כך ש-$A = P^{-1}DP$

כלומר – מטריצת מעבר הבסיס של המשפט הספקטרלי, שמעביר אותנו לפירוק הספקטרלי, היא איזומטריה. למעשה חיזקנו את המשפט הספקטרלי – המעבר לבסיס המלכסן, מסתבר להיות מיוצג ע"י מטריצות איזומטריות.

המרצה מדגיש שלא השתמשנו במשפט הזה בכלל על בסיסים ועל וקטורים – אפשר לתאר עולם הדיון של המטריצות, משום שהוא עולם דיון הומורפי להעתקות ולמרחבים וקטורים, בלי לדבר בכלל על העתקות ומרחבים וקטורים. המשפט מתאר באופן טהור מטריצות בלבד.

למה 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית, וכן $\{e_1 \dots e_n\}$ בסיס א"נ של V. נניח ש-A היא מטריצת המעבר מבסיס $\{e_1 \dots e_n\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. אז A איזומטריה אמ"מ $\{v_1 \dots v_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

הוכחת המשפט. תהי $T_A\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ באופן הרגיל. אז $A = [T_A]_{\mathcal{E}}$ כאשר $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי. ידוע של-T_A יש בסיס אורתונורמלי מלכסן, כלומר קיים בסיס א"נ B כך ש-$[T_A]_B = D$ כאשר D אלכסונית כלשהית. נבחין ש-$[T_A]_B = [Id]^{\mathcal{E}}_B [T_A]_{\mathcal{E}} [Id]^B_{\mathcal{E}}$, נסמן $P = [Id]^{\mathcal{E}}_B$ ונבחין ש-$[T_A]_B = PAP^{-1}$ ומהלמה P מטריצת מעבר מבסיס א"נ לבסיס א"נ ולכן איזומטריה. נכפיל בהופכיות ונקבל $A = P^{-1}DP$. ■

באמצעות כלים של אנליזה פונקציונלית אפשר להגדיר נורמה גם על פונקציות, ואיכשהו להגדיר את העובדה שההעתקה שמעבירה בסיס (בעולם הדיון של ההעתקות) היא אוניטרית/אורתוגונלית.

"אני יודע איך מגדירים נורמה של טרנספומציה. יופי של שאלות – לא לעכשיו"

"יאללה הפסקה? לא!"

0.1 פלייסהולדר אני אשים כותרת בסיכום הסופי

הערה: במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נקבל ש-

$$A = P^{-1}DP \implies PP^T = I \implies P^{-1} = P^T \implies A = P^T DP$$

מה שמחזיר אותנו לתבניות בילינאריות. נוכל לקשר את זה לסינגטורה. זאת כי A לא רק דומה, אלא גם חופפת ל-D. גם מעל $\mathbb{C}$ נקבל דברים דומים, אך לא במדויק, שכן מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ היא ססקווי-בילינארית ולא בילינארית רגילה.

משפט 7. עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית, אז

- $A^* = A$ (צמודה לעצמה) אמ"מ כל הע"עים שלה ממשיים.
- $A^* = A^{-1}$ אמ"מ כל הע"ע שלה מנורמה 1.

את הכיוון $\Longleftarrow$ כבר הוכחנו. נותר להוכיח את הכיוון השני.

- נניח שכל הערכים העצמיים ממשיים, ו־A נורמלית. נוכל להשתמש במשפט הספקטרלי עליה: לכן קיימת מטריצה אוניטרית P ואלכסונית Λ כך ש־$A = P^{-1}\Lambda P$. ידוע $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ כי אלו הע"ע מההנחה. נבחין ש־:

$$A^* = P^*\Lambda^*(P^{-1})^* = P^{-1}\Lambda P = A$$

כי $PP^* = I$ ו־Λ אוניטרית (אז ה־transpose לא עושה שום דבר) מעל $\mathbb{R}$ (אז ההצמדה לא עושה שום דבר).

- נניח A נורמלית וכל הע"ע מנורמה 1. נוכיח A אוניטרית. בעבור הפירוק הספקטרלי לעיל $A = P^{-1}\Lambda P$ נקבל כאן ש־Λ אוניטרית, ומהמשפט הספקטרלי P אונטרית גם כן. A מכפלה של 3 אוניטריות ולכן אוניטרית.

  (הסיבה שמכפלה של אוניטריות היא אונטרית: בעבור A, B א"נ מתקיים

$$\forall v \in V\colon\ \langle ABv \,|\, ABv\rangle = \langle Bv \,|\, Bv\rangle = \langle v \,|\, v\rangle$$

  משמרת מכפלה פנימית, וזה שקול להיותה אוניטרית ממשפט לעיל)

תזכורת: אם V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$, אז $T\colon V \to V$ תקרא חיובית או אי־שלילית (וכו') אם $T = T^*$ וגם $\forall v \neq 0\colon\ \langle Tv \,|\, Tv\rangle \geq / > 0$.

משפט 8. נניח ש־$A = A^* \in M_n(\mathbb{F})$, אז התנאים הבאים שקולים (קיצור מוכר: TFAE, the following are equaivlent):

1. T_A חיובית/אי שלילית על $\mathbb{F}^n$.
2. לכל $T\colon V \to V$ ובסיס א"נ B כך ש־$A = [T]_B$, T חיובית/אי שלילית.
3. קיימים $T\colon V \to V$ חיובית/אי שלילית ו־B בסיס, כך ש־$A = [T]_B$.
4. הע"ע של A (יודעים ממשיים כי צמודה לעצמה) חיובים/אי שליליים.

הוכחה. מספיק לטעון זאת כדי להוכיח את השקילויות של 1, 2, 3:

$$\langle Tv \,|\, v\rangle_V = \langle [Tv]_B \,|\, [v]_B\rangle_{\mathbb{F}^n} = \langle A[v]_B \,|\, [v]_B\rangle_{\mathbb{F}^n}$$

בשביל $2 \to 1$, ידוע שהאגף הימני גדול מ־0 מההנחה שהיא חיובית/אי שלילית על $\mathbb{F}^n$, ומכאן הראנו שהמיוצגת בכל בסיס חיובית כדרוש. בשביל $3 \to 1$, נפעיל טיעונים דומים מהאגף השמאלי במקום. הגרירה $3 \to 2$ ברורה. סה"כ הראינו את $1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$.

עתה נוכיח שקילות בין 1 ל־4.

$1 \to 4$ יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ע"ע של A (נוכל להניח ממשי כי A צמודה לעצמה)

$$\langle Av \,|\, v\rangle = \lambda \,||v||^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

$4 \to 1$ יהי $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס א"נ של ו"ע, ויהי $V \ni v = \sum \alpha_i v_i$. נקבל:

$$\langle T_A v \,|\, v\rangle = \langle Av \,|\, v\rangle = \left\langle A\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0$$

■

תזכורת: מעל $\mathbb{R}$, הוכחנו שלכל תבנית סימטרית, יש ייצוג יחיד באמצעות מטריצה אלכסונית עם $-1, 1, 0$ על האלכסון.

סימון 2. הסיגנטורה של f תסומן ע"י $\sigma_-(f), \sigma_0(f), \sigma_+(f)$ כמספר האפסים, האחדים וה־-1 ־ב־f

המשך תזכורת: כל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה לעיל.

משפט 9. נניח ש־A מייצגת את התבנית הסימטרית f (עולם הדיון מעל $\mathbb{R}$). אז, אם הסיגנטורה $\sigma_+ = \#(\lambda \mid \lambda > 0)$ עבור λ ע"ע עם חזרות. באופן דומה $\sigma_- = \#(\lambda \mid \lambda > 0)$ וכו'.

הוכחה. משום ש־A מייצגת סימטרית אז A סימטרית. לפי המשפט הספקטרלי קיימת P אורתוגונלית ו־Λ אלכסונית כך ש־$A = P^{-1}\Lambda P = P^T\Lambda P$. A דומה לאלכסונית וחופפת אליה. בעזרת נרמול היא חופפת למטריצה מהצורה $\operatorname{diag}(1 \dots 1, -1 \dots -1, 0 \dots 0)$ כאשר הסימן נקבע לפני הנרמול. ■

מחר – שני הפירוקים האחרונים שלנו. אם יהיה זמן נרחיב על מרחבים דואלים.

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד