עוצמות 6

שחר פרץ

13 למרץ 2024

עוד על חשבון עוצמות

תזכורות: בעבור A, B קבוצות הגדרנו:

- $|A|+|B| = |A\times\{0\}| \uplus |B\times\{1\}|$ (הערה: במידה ונתונה לנו רק אחת מהקבוצות, מותר לבחור את הקבוצה השניה כך שהן יהיו זרות)
- $|A|\cdot|B| = |A\times B|$
- $|A|^{|B|} = |B\to A| = |A^B|$ (כי $A\to B := A^B$)
- על תמציאו $\frac{|A|}{|B|}$, – כי זה לא מוגדר.

משפט (מונוטוניות): יהיו a, b, c, d עוצמות כך ש־$c\le d \land a\le b$, לכן:

1. $a+c\le b+d$
2. $a\cdot c\le b\cdot d$
3. $a^c\le a^d$ (אלא אם $a=c=0\land d\neq 0$)
4. $a^c\le b^c$

הוכחה. נוכיח את הטענה השלישית. יהיו A, C, D קבוצות כך ש־$|A|=a,\ |C|=c,\ |D|=d$. נתון $c\le d$ ולכן קימת $g\colon C\to D$ חח"ע. נרצה להגדיר $\varphi\colon (C\to A)\to(D\to A)$ חח"ע. נגדיר $\tilde g\colon D\to C$ [ללא שימוש ב־AC – בחירה סופית]: יהי $\tilde c\in C$ קבוע (נניח $C\neq\emptyset$):

$$\tilde g = \lambda d\in D.\begin{cases}\iota x\in C.g(x)=d, & d\in \mathrm{Img}\\ \tilde c & d\in D\setminus \mathrm{Img}\end{cases}$$

$\tilde g$מוגדרת היטב מאחר ו־ g חח"ע. מתקיים: $\tilde g\circ g = id_C$. את $\varphi = \lambda h\in C\to A.h\circ\tilde g$. נוכיח φ חח"ע: יהיו $h_1, h_2\in C\to A$ כך ש־$\varphi(h_1)=\varphi(h_2)$. לכן $h_1\circ\tilde g = h)2\circ\tilde g$. אם נרכיב על g, נקבל $(h\circ\tilde g)\circ g = (h_2\circ\tilde g)\circ g$ ומאסוציאטיביות $h_1\circ(\tilde g\circ g) = h_2\circ(\tilde g\circ g)$ ומהזהות לעיל $h_1\circ id_C = h_2\circ id_C$ כלומר $h_1 = h_2$ כדרוש.
נחזור למקרה בו $C=\emptyset$. אם לכן $c=0$. נפריד למקרים:

- אם $a\neq 0$: אז $a^c = a^0 = 1$ וכן a^d אם $d=0$ tz $a^d = a^0 = 1$ ואז $a^c = a^d$. אם $d\neq 0$ אז a^d. אם $d\neq 0$ אז $a^d = |D\to A|\ge 1$, כלומר ${}^d\le a^c = 1$ כדרוש.
- אם $a=0$ אז $a^c = 0^0 = 1$, במקרה זה הנחנו $d=0$ ולכן $a^d = 0^0 = a^c$

כיסינו את כל המקרים. ■

משפט: ("סופר־שימושי"):

1. $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$ (כבר הוכחנו את השוויון לגבי הכפל כשהוכחנו $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$)
2. $2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ (גם כאן הוכחנו את הכפל בשיעור שעבר)
3. $\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_0+2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

(הטענות האלו נכונות עבור כל עוצמה אינסופית תחת אקסיומת בחירה, אבל אסור לנו להניח את זה ואין משפט כזה בקורס)

הוכחה. נוכיח את שלושת הטענות:
(1): עבור כפל כבר הוכחנו, עבור חיבור נשתמש בקש"ב. מהמונוטוניות: $\aleph_0\le\aleph_0+0\le\aleph_0+\aleph_0$ ומצד שני $\aleph_0+\aleph_0 = |\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\uplus\mathbb{N}_{\mathrm{even}}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ כדרוש.
(2): עבור כפל כבר הוכחנו (שיעור שעבר הוכחנו כי $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$), ובעבור $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}$ נוכיח באמצעות קש"ב, $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}\ge 2^{\aleph_0}+0 = 2^{\aleph_0}$ ומהצד השני $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0} = |\underbrace{\mathbb{R}\times\{0\}\uplus\mathbb{R}\times\{1\}}_{\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|\le|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ כדרוש. [אפשר גם להוכיח עם קרנות].
(3): תזכורת; היה תרגיל בשיעורי הבית להוכיח כי $|\mathbb{R}| = |[0,1)\times\mathbb{Z}|$ ולכן $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0$. אפשר גם להוכיח ע"י חשבון עוצמות: $2^{\aleph_0} = 1\cdot 2^{\aleph_0}\le\aleph_0\times 2^{\aleph_0}$, ומהצד השני $\aleph_0\times 2^{\aleph_0}\ge 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, וסה"כ הוכחנו מקש"ב $\aleph_0\times 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ כדרוש. בעבור $\aleph_0+2^{\aleph_0}$ ידוע $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}\ge\aleph_0+2^{\aleph_0}\land 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}+0\ge\aleph_0+2^{\aleph_0}$ וסה"כ מקש"ב $\aleph_0+2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ כדרוש. ■

משפט (חוקי חזקות):

1. $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$
2. $(a\cdot b)^c = a^c\cdot b^c$
3. $a^{b+c} = a^b\cdot a^c$

הוכחה. יהיו A, B, C, D קבוצות ונסמן $a=|A|, b=|B|, c=|C|, d=|D|$. כדי להוכיח את (1) צ.ל. קיום זיווג $\varphi\colon((B\times C)\to A)\to(C\to(B\to A))$ והרי שפונקציית $Cu := curry$ (קורי) היא זיווג... וזהו כאן די נגמרים השימושים של הפונקציה הזו לקורס הזה, סתם חפרו לנו עליה לפני חצי שנה. ■

טענה:

1. לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a+\aleph_0 = a$
2. לכל עוצמה אינסופית a ולכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a+n=a$

הוכחה. ("אה רגע יש לי שתי דקות, אז בו נוכיח"). נוכיח את (1). תהי A קבוצה כך ש-$|A| = a$ ומאחר ש-A אינסופית, אזי קיימת לה ת"ק [=תת קבוצה] בת מנייה $B \subseteq A$.

$$a + \aleph_0 = |A| + |B| = |(A \setminus B) \uplus (B)| + |B| = |A \setminus B| + \underbrace{|B|}_{\aleph_0} + \underbrace{|B|}_{\aleph_0} = |A \setminus B| + \aleph_0 = |(A \setminus B) \uplus B| = |A| = a$$

■