

חדוא 1א - תרגיל 7

1. יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ טור חזקות, ונניח כי קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. הוכיחו כי רדיוס ההתכנסות של הטור נתון עי $R = \frac{1}{L}$ (כולל המקרים $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = \infty$).

2. מצאו את תחום ההתכנסות (רדיוס ההתכנסות והתכנסות בנקודות הקצה) של הטורים הבאים:
 א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n (x - 1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (x + 1)^{2n+1}$

3. הוכיחו\הפריכו:

(א) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים, ונניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. אזי הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד.
 (ב) תהי a_n סדרה, המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אזי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

(ג) תהי a_n סדרה חיובית, המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}} \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}\right) \quad (\text{ב})$$

5. יהי $p \in \mathbb{N}$, לכל $n \in \mathbb{N}$ נחלק את n ב- p עם שארית ונסמן $n = pq_n + r_n$ כאשר $0 \leq r_n < p$ ו- $q_n \in \mathbb{N}$. נגדיר:

$$a_n = \begin{cases} 1 & q_n \text{ odd} \\ -1 & q_n \text{ even} \end{cases}$$

באופן שקול, בכל פעם שאנחנו עוברים בכפולה שלמה של p , אנחנו מחליפים סימן. כלומר, עבור p האיברים הראשוניים מתקיים $a_1 = \dots = a_p = 1$ ועבור p האיברים אחריהם מתקיים $a_{p+1} = \dots = a_{2p} = -1$ וכך הלאה. הראו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ מתכנס.

6. מצאו את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} \quad (\text{ג})$$

7. מצאו את כל ערכי $x \neq \pm 1$ עבורם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ מתכנס.

8. תהי $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$. הוכיחו כי קיימות פונקציה זוגית f_1 ופונקציה אי-זוגית f_2 יחידות כך שלכל $x \in [-a, a]$ מתקיים $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

9. פונקציית דיריכלה (Dirichlet) מוגדרת עי

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי זו פונקציה מחזורית, אך אין לה מחזור מינימלי.

(ב) תהי פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שבכל נקודה $a \in \mathbb{R}$ קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ וכן לכל $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}$ הוא מחזור של f , האם f בהכרח פונקציה קבועה? הוכיחו.

10. הוכיחו:

(א) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ גם לפי היינה וגם לפי קושי.

(ב) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 2$ גם לפי היינה וגם לפי קושי.

(ג) הגבול הבא לא קיים: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

(ד) הגבול הבא לא קיים: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

11. תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של $a \in \mathbb{R}$, ונניח כי $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$. מצאו את $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ והוכיחו לפי ההגדרה שזהו אכן הגבול.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. חקרו את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{n}} \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2\sqrt{n}-1}{n} \quad (\text{ג})$$

2. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ עבור הסדרות הבאות:

$$a_n = n + 1 \quad (\text{א})$$

$$a_n = \frac{2^n + 3^n + 5^n}{3n} \quad (\text{ב})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n} \quad (\text{ג})$$