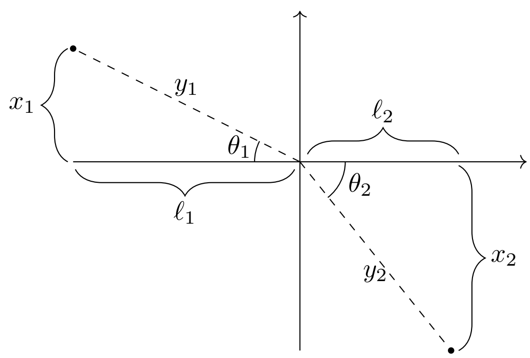
תרגיל בית 3 ~ עברי נגר ~ נגזרות וחקירה

שחר פרץ

24 באוקטובר 2024

1

1. השתכנעתי
2. נמצא את כמות הזמן שיקח למצילה לעבור כתלות ב־θ_1. נשתמש ב־x_1, y_1, x_2, y_2 כמו בסרטוט הבא:



לפי הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות, וכלל החיבור, יתקיים:

$$\tan\theta_2 = \frac{x_2}{\ell_2},\ \tan\theta_1 = \frac{x_1}{\ell_1},\ x_1 + x_2 = d$$

טענה 1. נציב ונקבל קשר גיאומטרי בין הזוויות:

$$d = \underbrace{\ell_1 \tan\theta_1}_{x_1} + \underbrace{\ell_2 \tan\theta_2}_{x_2} \implies \ell_2 \tan\theta_2 = d - \ell_1 \tan\theta_1 \implies \theta_2 = \arctan\left(\frac{d - \ell_1 \tan\theta_1}{\ell_2}\right)$$

עתה, נרצה למצוא ישירות את $t(\theta_1)$. משום ש־$s = t \cdot v$ אז $t = \frac{s}{v}$. נסמן ב־t_1 את כמות הזמן שלוקח לעבור את y_1, וב־t_2 את כמות הזמן שלוקח לעבור את y_2.

$$t(\theta_1) = t_1 + t_2 = \frac{y_1}{v_1} + \frac{y_2}{v_2}$$

באמצעות הגדרת ה־$\cos$ נמצא את y_1, y_2:

$$\cos\theta_1 = \frac{\ell_1}{y_1},\ \cos\theta_2 = \frac{\ell_2}{y_2} \implies y_1 = \frac{\ell_1}{\cos\theta_1},\ y_2 = \frac{\ell_2}{\cos\theta_2}$$

טענה 2. נציב:

$$t(\theta_1) = \frac{\ell_1}{v_1 \cos\theta_1} + \frac{\ell_2}{v_2 \cos\theta_2}$$

ננסה למצוא את הערך של $\frac{1}{\cos\theta_2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta_2} = \sec\theta_2 = \sqrt{\sec^2\theta_2} & \quad \text{since } \sec^2 = 1 + \tan^2 \\
= \sqrt{1 + \tan^2\theta_2} & \quad \text{לפי טענה 1} \\
= \sqrt{1 + \tan^2\left(\arctan\left(\frac{d - \ell_1 \tan\theta_1}{\ell_2}\right)\right)} & \quad \text{since } \tan(\arctan x) = x \\
= \sqrt{1 + \left(\frac{d - \ell_1 \tan\theta_1}{\ell_2}\right)} &
\end{aligned}$$

טענה 3. נציב חזרה בטענה 1. נשתמש בעובדה ש־$x^2 = (-x)^2$:

$$t(\theta_1) = \frac{\ell_1}{v_1 \cos\theta_1} + \frac{\ell_2}{v_2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\ell_1 \tan\theta_1 - d}{\ell_2}\right)}$$

3. כדי למצוא את הזמן המינימלי, נגזור את $t(\theta_1)$, לפי הנוסחה של טענה 2.

$$\begin{aligned}
t'(\theta_1) &= -\frac{\ell_1 v_1 \cos\theta_1}{v_1^2 \cos^2\theta_1} + \frac{\ell_2}{v_2}\left(\frac{1 + \left(\frac{\ell_1 \tan\theta_1 - d}{\ell_2}\right)}{2\sqrt{\frac{\frac{\ell_1 \ell_2}{\cos^2\theta_1}}{\ell_2^2}}}\right) \\
&= -\frac{\ell_1 v_1 \cos\theta_1}{v_1^2 \cos^2\theta_1} + \frac{\ell_2}{v_2}\left(\frac{\frac{\ell_1 \tan\theta_1 - d + \ell_2}{\ell_2}}{\sqrt{4\frac{\ell_1}{\cos^2\theta_1 \ell_2}}}\right) \\
&= -\frac{\ell_1 v_1 \cos\theta_1}{v_1^2 \cos^2\theta_1} + \frac{\ell_1 \tan\theta_1 - d + \ell_2}{v_2\sqrt{4\frac{\ell_1}{\cos^2\theta_1 \ell_2}}}
\end{aligned}$$

נשווה ל־0 כדי לנסות למצוא את נקודות סטציונריות. נכפיל במכפלת האגפים התחתונים.

$$\begin{aligned}
t'(\theta_1) = 0 \iff -\ell_1 v_1 \cos\theta_1 v_2 \sqrt{4\frac{\ell_1}{\cos^2\theta_1 \ell_2}} + (\ell_1 \tan\theta_1 - d + \ell_2)\cdot v_1^2 \cos^2\theta_1 &= 0 \qquad \text{צמצום} \\
2\ell_1^{1.5} v_1 v_2 \ell_2^{-0.5} + (\ell_1 \tan\theta_1 - d + \ell_2)\cdot v_1^2 \cos^2\theta_1 &= 0
\end{aligned}$$

2

1. **שאלה:** מסך קולנוע נמצא בגובה 10 מטר מהרצפה וגובהו 20 מטר. באיזה מרחק x ממנו יש לשבת על מנת שזווית הראיה θ תהיה מקסימלית?

תשובה: מתוך הסרטוט שבשיעורי הבית:

$$\theta(x) = \tan\frac{20+10}{x} - \tan\frac{10}{x} = \tan\frac{30}{x} - \tan\frac{10}{x}$$

כאשר תחום ההגדרה של הזווית יהיה כאשר $\theta(x) = \frac{\pi}{2}$, כלומר $x > 0$. נגזור ונשווה ל־0 כדי למצוא נקודות סטציונריות:

$$\begin{aligned}
\theta'(x) = -\csc^2\left(\frac{30}{x}\right)\frac{30}{x^2} + \csc^2\left(\frac{10}{x}\right)\frac{10}{x^2} &\overset{!}{=} 0 \qquad \cdot x^2 \\
30\csc^2\left(\frac{10}{x}\right) - 10\csc^2\left(\frac{30}{x}\right) &\overset{!}{=} 0 \qquad \csc \\
\frac{10}{\cos^2(10x^{-1})} - \frac{30}{\cos^2(30x^{-1})} &\overset{!}{=} 0 \qquad \times \\
10\cos^2(30x^{-1}) - 30\cos^2(10x^{-1}) &\overset{!}{=} 0 \qquad \cdot 0.2 \\
-2 + \cos(60x^{-1}) + \cos(20x^{-1}) &\overset{!}{=} 0 \\
\cos\left(\frac{80}{x}\right)\cos\left(\frac{40}{x}\right) &\overset{!}{=} 2
\end{aligned}$$

עתה,

2. **שאלה:** מהן אורכי הצלעות של המבחן עם היקף מינימלי ששטחו S?

תשובה: בהינתן שטח S, נסמן צלע אחת ב־x ועבור הצלע השנייה y יתקיים $S = xy \implies y = \frac{S}{x}$. נתבונן בפונקציית ההיקף P וננסה למצוא לה מינימום:

$$P(x) = 2x + 2y = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

נגזור ונשווה ל־0 כדי למצוא נקודות סטציונריות:

$$\begin{aligned} P'(x) = 2\left(1-\frac{S}{x^2}\right) &= 0 \\ x^2 - S &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{S} \end{aligned}$$

$\cdot\frac{x^2}{2}$; $+S, \sqrt{}$

בהתחשב בתחום הגדרה $x \geq 0$, נמצא שהנקודה הסטציונרית היחידה היא $x = \sqrt{S}$. נציב בטבלה כדי למצוא סוג קיצון:

x	$\frac{\sqrt{S}}{2}$	S	$S+1$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$

בהתאם לחישובים הבאים:

$$f'\left(\frac{\sqrt{S}}{2}\right) = 2 - 2\cdot\frac{S}{S/4} = 2-4 = -2 \leq 0$$

$$f'(S+1) = 2 - 2\cdot\underbrace{\frac{S}{(S+1)^2}}_{\leq 1} \geq 0$$

סה"כ מינימום לוקאלי ב־$x = \sqrt{S}$, בו יתקיים:

$$P(x) = P(\sqrt{S}) = 2\sqrt{S} + 2\cdot\frac{S}{S} = 2(\sqrt{S}+1)$$

נבדוק קיצון קצה:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2x + \cancel{\frac{S}{x}} = \infty \leq 2\sqrt{S}+2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \cancel{2x} + \frac{S}{x} = +\infty \leq 2\sqrt{S}+2$$

סה"כ ב־$x=0$ מינימום מוחלט. נחשב את צלעות המלבן:

$$x = \sqrt{S},\ y = \frac{S}{\sqrt{S}} = S, \implies \boldsymbol{x = y = \sqrt{S}}$$

3. **שאלה:** מבין כל הגלילים הסגורים משני הצדדים, עם שטח פנים של $50cm^2$, מה היחס בין גובה הגליל לבסיסו במקרה של הגליל עם הנפח הגדול ביותר?

גליל מוגדר לפי הרדיוס r שלו, וגובה h. נגביל אותו כך ששטח הפנים יהיו $50cm^2$. השטח של שני ה"מכסים" בצורת עיגול שתוחמים אותו, יהיו πr^2 לכל אחד, כלומר $2\pi r^2$ בסה"כ. ללא אותם הבסיסים, שטח הפנים של המעטפת יהיה $2\pi rh$. כלומר, סה"כ, שטח הפנים יהיה:

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 + 2\pi rh &= 50 \\ 2\pi rh &= 50 - 2\pi r^2 \\ h &= \frac{50-2\pi r^2}{2\pi r} \\ &= \frac{25}{\pi r} - r \end{aligned}$$

$-2\pi r^2$; $\cdot\frac{1}{2\pi r}$

מכאן, נסיק ת.ה.:

$$r > 0 \land h > 0 \iff 25 - \pi r^2 > 0 \land r > 0 \iff 0 < x < 2.82095$$

נסמן ב־$V(r)$ את נפח הגליל:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{25}{\pi r} - r\right) = 25r - \pi r^3$$

נגזור במטרה למצוא נקודות סטציונריות, אשר חשודות להוות קיצון מקסימום.

$$V'(r) = 25 - 3\pi r^2 = 0 \iff r^2 = \frac{25}{3\pi} \iff r \approx \pm 1.6287 := \tilde{r}$$

לא ייתכן רדיוס שלילי, ולכן נשלול את התוצאה השלילית. נותר לוודא שהתוצאה אכן קיצון מקסימום.

x	0.1	$\tilde{r}$	0.2
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

זהו אכן קיצון מקסימום, כלומר נפח הגליל יהיה מקסימלי בהינתן ערך $r = \tilde{r}$ זה. נותר תמצוא את התשובה, היא היחס h/r בעבור אות וה־r.

$$\mathscr{A}nswer = \frac{\tilde{h}}{\tilde{r}} = \frac{\frac{25}{\pi \cdot 1.6287}1.6287}{1.6287} = \mathbf{4.886}$$

. . . . 3 . . . .

1. נחקור את הפונקציה $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

- **תחום הגדרה:** $1 + x \neq 0 \implies \boldsymbol{x \neq -1}$
- **סימטריה:** סתירה; $x = 2 \implies f(2) = 2.43 \neq \pm - 0.135 = f(-2)$
- **חיתוך עם הצירים:** $7f(0) = \frac{e^0}{1+0} = 1$

$$f(x) = 0 \implies \frac{e^x}{x+1} = 0 \implies e^x = 0 \implies x = \ln 0 \in \varnothing$$

סה"כ נקודות החיתוך היחידה $\langle 0, 1 \rangle$.

- **סטציונריות וסוגן:** נגזור.

$$f'(x) = \frac{(1+x)e^x - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x + xe^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

נשווה ל־0:

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2} = 0 \implies xe^x = 0 \implies x = 0$$

נמצא את סוג הנקודה. נתבונן בסימן של הנגזרת.

x	-2	-1	-0.5	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\varnothing$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$

כלומר כאשר $x = 0$ המינימום היחיד קיים. משמע $\langle 0, 1 \rangle$ נקודת המינימום היחידה.

- **נקודות עוגף:** נתבונן בנגזרת השנייה, ונשוואה אותה ל־0:

$$f''(x) = [xe^x]' = e^x + xe^x = 0 \implies e^x(x+1) = 0 \implies \begin{cases} e^x = 0 \implies x = \ln 0 \in \varnothing \\ x + 1 = 0 \implies x = -1 \end{cases}$$

נתבונן בכיוון הנגזרת השנייה בין בתחומים המוגדרים ובין נקודות ה־0:

x	-2	-1	0
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\varnothing$	$\cup$

סה"כ אין נקודות עוקף.

- **אסימפטוטות:**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^\infty}{\infty} = \boldsymbol{+\infty}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x+1} = \frac{\frac{e}{\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = \mathbf{0}$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^{-1}}{+0} = \boldsymbol{\infty}$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{e^x}{x+1} = \frac{e^{-1}}{-0} = \boldsymbol{-\infty}$$

- **תחומי עלייה/ירידה:** על בסיס הטבלה של הנגזרת הראשונה; עליה: $x > 0$ / ירידה: $x < 0 \wedge x \neq -1$

- **תחומי קעירות/קמירות:** על בסיס הטבלה של הנגזרת השנייה; קעירות: $x < 1$ / קמירות: $x > -1$

2. נחקור את הפונקציה $f(x) = \frac{(x+a)^2}{1-|x|}$.

- **תחום הגדרה:** $1 - |x| \neq 0 \implies |x| \neq 1 \implies \boldsymbol{x \neq \pm 1}$
- **סימטריה:** עבור $x \geq 0$ כללי:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{(x+a)^2}{1-x} &\overset{!}{=} \frac{(a-x)^2}{1-x} = f(-x) \qquad \cdot(1-x) \\ (x+a)^2 &= (x-a)^2 \qquad \sqrt{} \\ x+a &= x-a \\ 2a = 0 &\implies \boldsymbol{a = 0} \end{aligned}$$

סה"כ הפונקציה תהיה זוגית אמ"מ $a = 0$. אם נרצה שהיא תהיה אי־זוגית, באופן דומה נקבל $x + a = -x + a$ כלומר $2x = 0 \implies x = 0$, וזו סתירה עבור $x = 2$.

- **חיתוך עם הצירים:** $f(0) = \frac{(0+a)^2}{1-|0|} = a^2$

$$f(x) = 0 \implies \frac{(x+a)^2}{1-|x|} = 0 \implies (x+a)^2 = 0 \implies x + a = \pm 0 \implies x = -a$$

סה"כ נקודות חיתוך $\langle 0, a^2 \rangle, \ \langle -a, 0 \rangle$

- **נק' סטציונריות וסוגן:** ראשית, נגזור את הפונקציה, ונשווה את אשר קיבלנו ל־0 כדי למצוא נקודות סטציונריות. מעדן הנוחות, נסמן $\operatorname{sgn}(x) := s_x \in \{-1, 1\}$ (נשים לב כי $|x| = s_x x$, וכי $s_x^2 = 1$). (נשים לב ש־s_x בקונטסקסט של פתרון למשוואה ריבועית, הוא למעשה פיצול לשני מקרים)

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{(2x+2a)(1-|x|) + \operatorname{sgn}(x)(x+a)^2}{1 - 2|x| + x^2} &= 0 \qquad \cdot(1 - 2|x| + x^2) \\ 2x + 2a - s_x 2x^2 \cancel{- s_x 2ax} + s_x x^2 \cancel{+ s_x 2ax} + s_x a^2 &= 0 \\ -s_x x^2 + 2x^1 + (2a + s_x a)x^0 &= 0 \\ \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4s_x(2a + s_x a^2)}}{-2s_x} &= x_{1,2} \\ s_x \mp \sqrt{\frac{4 + 4s_x(2a + s_x a^2)}{4}} = s_x \mp \sqrt{16a^2 + 8s_x a + 4} &= x_{1,2} \\ 1 \mp (a \pm 2) &= x_{1,2} \end{aligned}$$

- **נק' פיתול:** נתבונן בנגזתר השנייה:

$$f''(x) = \left\{ 2|x| \cdot 2(x+a) \right.$$

- **אסימפטוטות וגבולות:**
- **תחומי עלייה/ירידה:**
- **תחומי קמירות/קעירות:**
- **סרטוט:**

3. נחקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)(1 + 2x^2)}$

- **תחום הגדרה:** $g(x) := (a^2 - x^2)(1 + 2x^2) \geq 0$. נמצא נקודות חיתוך עם ציר ה־x ונבדוק כיוון.

$$\begin{cases} a^2 - x^2 = 0 & \implies a^2 = x^2 \implies x = \pm a \\ \vee 1 + 2x^2 = 0 & \implies x^2 = -0.5 \implies x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= (a^2 - 0^2)(1 + 2 \cdot 0^2) = a^2 \geq 0 \\ g(2a) &= (a^2 - 4a^2)(2 + 8a^2) = -4a^2 - 16a^4 \leq 0 \\ g(-2a) &= (a^2 - 4a^2)(2 + 8a^2) = -4a^2 - 16a^4 \leq 0 \end{aligned}$$

נציב בטבלה:

x	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

סה"כ, הפונקציה מוגדרת בעבור $g(x) \geq 0$, כלומר $\boldsymbol{-a \leq x \leq a}$.

- **סימטריה:**

$$\forall x \in \mathbb{R}. f(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)(1 + 2x^2)} = \sqrt{(a^2 - (-x)^2)(1 + 2(-x)^2)} = f(-x)$$

סה"כ **הפונקציה זוגית**, לכל a. היא לא פונקציית קו ישר ולכן לא ייתכן שהיא גם אי־זוגית.

- **חיתוך עם הצירים:** $f(0) = \sqrt{(a^2 - 0)(1 + 2 \cdot 0)} = a\sqrt{2}$

$$f(x) = 0 \iff \sqrt{g(x)} = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \pm a$$

אזי $\boldsymbol{\langle a, 0, \rangle, \langle -a, 0 \rangle, \langle 0, a\sqrt{2} \rangle}$ נקודות החיתוך עם הצירים.

- **נק' סטציונריות וסוגן:** נגזור ונשווה ל־0.

$$f'(x) = \frac{-2x(1 + 2x^2) + 4x(a^2 - x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1 + 2x^2)}} = \frac{2x(-1 + 2a^2 - 4x^2)}{\sqrt{(a^2 - x^2)(1 + 2x^2)}} = 0 \implies 2x(-1 + 2a^2 - 4x^2) = 0$$

נפלג למקרים. אם $2x = 0$ אז עבור $x = 0$ השוויון יתקיים, אחרת, השוויון הבא יצטרך להתקיים:

$$-1 + 2a^2 - 4x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{-1 + 2a^2}{4} \implies x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2}$$

נשים לב שהנקודה הזו קיימת אמ"מ $-1 + 2a^2 \geq 0$. נמצא נקודות חיתוך כדי להבין מתי השוויון מתקיים.

$$2a^2 - 1 = 0 \implies a^2 = 0.5 \implies a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ידוע כי $-2^{-0.5} \leq 0 \leq 2^{-0.5}$, כלומר עבור $a = 0$ נוכל לבדוק מה יתקיים. שם, נמצא $-1 + 2 \cdot 0^2 = -1 \leq 0$, ומשום שזו פרבולות בקצוות האחרים של התחום היא תהיה חיובית, וסה"כ הא"ש יתקיים אמ"מ $a \notin (-2^{0.5}, 2^{0.5})$. נרצה גם לדעת שבהינתן a שעבורן הן מוגדרות, האם הן יהיו בתחום ההגדרה. נפתור את אי־השוויון $\frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2} \leq a$. נמצא נקודות חיתוך של שתי הפונקציות:

$$\implies -1 + 2a^2 = 4a^2 \iff 2a^2 = -1 \iff a = \sqrt{-0.5} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

כלומר אין נקודות חיתוך, משמע נוכל לבחור ערך a אקראי בתחום ההגדרה ולבדוק אם עליו יתקיים אי־השוויון, ומכאן יגרר על השאר. עבור $a = 2 > 2^{0.5}$, נציב ונקבל ש־$\frac{1}{2}\sqrt{-1 + 4} \leq 2$, כדרוש. באופן דומה אי־השוויון $-a \leq -\frac{1}{2}\sqrt{-1 + a^2}$ יתקיים גם הוא. נסכם: שתי הנקודות הללו קיימות אמ"מ $a \notin (-2^{0.5}, 2^{0.5})$, לכל ערך a.

נמצא את סוג הנקודות הסטציונריות: נפלג למקרים.

אם $\boldsymbol{a > \sqrt{2}^{-1}} \implies a \in \mathbb{R}_+ \setminus (-2^{-0.5}, 2^{0.5})$:

$-a$	$\frac{-a - \frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2}}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2}$	$-\frac{1}{4}\sqrt{-1 + 2a^2}$	0	$\frac{1}{4}\sqrt{-1 + 2a^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2}$	$\frac{a + \frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2}}{2}$	a
0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
$\cup$	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$	$\cup$

ניעזרתי בכיוון של ההצבות הבאות:

$$f'\left(\frac{-a - \frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2}}{2}\right) = \frac{\overbrace{\left(-a - \frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2}\right)}^{\leq 0}(\cancel{-1 + 2a^2} - (\overbrace{4(-a^2 - a\sqrt{-1 + 2a^2})}^{\geq 0}\cancel{-1 + 2a^2}))}{\underbrace{\sqrt{\cdots}}_{\geq 0}} = \frac{(+)(-)^2}{(+)} \geq 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\sqrt{-1 + 2a^2}\right) = \frac{\overbrace{(-\frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2a^2})}^{\leq 0}(-1 + \overbrace{2a^2 + \sqrt{-1 + 2a^2})}^{\geq 1}}{\underbrace{\sqrt{\cdots}}_{\geq 0}} = \frac{(-)(+)}{+} \leq 0$$

כאשר ידוע $|a| \geq 2^{0.5}$ ולכן $2a^2 \geq 4 \geq 1$ וסה"כ אי־השוויון בסוגריים תקין.

באופן דומה, ערכם של המקבילים לערכים אלו החיוביים יהיה זהה (כיוון הביטוי בסוגריים הימניות בו x ממעלה שנייה לא ישתנה, אך המקדם שלהם בסוגריים השמאליות כן ישנה את כיוונו כי הוא ממעלה ראשונה). נמצא את ערכי ה־y של נקודות הקיצון שמצאנו:

$$f\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2}\right)=\sqrt{\left(a^2-\frac{1}{4}(-1+2a^2)\right)\left(1+-\frac{1}{2}(-1+2a^2)\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}-a^2\right)}$$

$$f(0)=\sqrt{(a^2-0^2)(1+2\cdot 0^2)}=\sqrt{a^2}=|a|=a$$

$$f(\pm a)=\sqrt{a^2-(\pm a)^2}(1+2a^2)=0$$

אם $a\in(0,2^{0.5}]$:

x	$-a$	$-0.5a$	0	$0.5a$	a
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\cup$	$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$	$\cup$

ניעזרתי בכיוון של ההצבות הבאות:

$$f'(-0.5a)=\frac{-a(-1+2a^2-4\cdot\frac{1}{4}a^2)}{\sqrt{\cdots}}=\frac{-a(-1+a^2)}{\sqrt{\cdots}}=\frac{\overbrace{a-a^2}^{\geq 0}}{\underbrace{\sqrt{\cdots}}_{\geq 0}}\geq 0$$

$$f'(0.5a)=\frac{a(-1+2a^2-4\frac{1}{4}a^2)}{\sqrt{\cdots}}=\frac{\overbrace{a^2-a}^{\leq 0}}{\underbrace{\sqrt{\cdots}}_{\geq 0}}\leq 0$$

כאשר מתקיים אי־השוויון $a^2<a$ כי $1<\frac{1}{\sqrt{2}}<a$ (ראה למה 1 בסעיף 6).

סה"כ, נקודות הקיצון הן:

$$\begin{cases}\left\langle\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2},\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}-a^2\right)}\right\rangle\ \max & a\in(\sqrt{2}^{-1},\infty)\\ \langle 0,a\rangle,\langle\pm a,0\rangle\ \min & \\ \langle 0,a\rangle\ \ \max & a\in(0,\sqrt{2}^{-1}]\\ \langle 0,\pm a\rangle\ \min & \end{cases}$$

- **נק' פיתול:** אין צורך בסעיף זה.
- **אסימפטוטות וגבולות:** לא מצאנו נקודות אי־הגדרה, והפונקציה מוגדרת בקצוות תחום ההגדרה שלה. אזי, הפונקציה רציפה בכל תחום, וללא אסימפטוטות אופקיות.
- **תחומי עלייה/ירידה:** על בסיס הטבלה שבעזרתה מצאנו נקודות סטציונריות, תחומי העלייה והירידה הם:

$$\nearrow:\quad\begin{cases}x\in\left(a,-\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2}\right) & a\in(\sqrt{2}^{-1},\infty)\\ x\in(-a,0) & a\in(0,\sqrt{2}^{-1}]\end{cases}$$

$$\searrow:\quad\begin{cases}x\in\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2},0\right)\cup\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1+2a^2},a\right) & a\in(\sqrt{2}^{-1},\infty)\\ x\in(0,a) & a\in(0,\sqrt{2}^{-1}]\end{cases}$$

- **תחומי קמירות/קעירות:** אין צורך בסעיף זה.
- **סרטוט:**

4

א) **שאלה:** לאילו ערכי a של הפונקציה $f(x)=x^4+ax^3+6x^2$ שתי נקודות פיתול.

פתרון: נשווה ל־0 את הנגזרת השנייה כדי למצוא נקודות חשודות פיתול:

$$f''(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 12x = 0 \implies f''(x) = 12x^2 + 6ax + 12 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{6a \pm \sqrt{9a^2 - 576}}{24}$$

הנקודות הללו יהיו קיימות אמ"מ $9a^2 - 576 \geq 0$. שורשי הפרבולה הזו (כתלות ב־a) יהיו $a_{1,2} = \pm 8$, ומשום שזו פרבולה שמחה, אי־השוויון יתקיים כאשר $a \notin (-8, 8)$. אך, כאשר אי־השוויון יתקיים באופן הדוק השורש יוציא רק נקודה אחת, אזי שתי נקודות פיתול שונות ימצאו כאשר $x \notin [-8, 8]$.

ב) עבור ערך ה־a שבו הדיסקמיננטה של הנגזרת השנייה תהיה 0, כלומר הנגזרת השנייה תשתווה ל־0 בנקודה אחת בלבד. זה יקרה בעת ש־$9a^2 - 576 = 0 \implies \boldsymbol{a = \pm 8}$.

5

a) נרצה להוכיח $\forall x \in \mathbb{R}_+ . \sin x < x$. נתבונן ב־$f(x) = \sin x - x$, ונוכיח את אי־השוויון $f(x) < 0$. נתבונן בנגזרתה של הפונקציה: $f'(x) = \cos x - 1$. נרצה למצוא לה נקודות קיצון. נתבונן בא"ש $\cos x = 1 \implies x = 0.5\pi k$, וממחזוריות $\cos x$ והגדרת הזזה אופקית, בפרט $x = k\pi$ נקודות המקסימום היחידות, ו־$x = 0.5 + \pi k$ נקודות המינימום היחידות. בפרט עבור $k = 0$ נמצא $x = 0, x = 0.5\pi$ נקודות מינימום ומקסימום בהתאמה, כלומר $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \in [0, 0.5\pi]$. משום ש־$f(0) = \sin 0 - 0 = 0$, אזי $f(x) \leq 0$ עבור $x \in [0, 0.5\pi]$. מכיוון שאין קיצון נוסף בתחום, נסיק $\forall x \in (0, 0.5\pi] . f(x) < 0$. עבור $x > 0.5\pi$, נתון $\sin x \leq 1 < 0.5\pi < x$, כלומר גם כאן יתקיים אי־השוויון המבוקש. סה"כ הוכח אי־השוויון לכל $x \in \mathbb{R}_+$.

b) נרצה להוכיח $\forall x \in \mathbb{R}_+ . \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$. נתבונן בפונקציה $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, ונוכיח את אי־השוויון $f(x) > 0$. נגזור אותה, ונקבל $f'(x) = -\sin x - x$. נגזור שוב, ונקבל $f''(x) = -\cos x - 1$, שהיא פונקציה קטנה או שווה ל־0 בכל תחומה (מהגדרת הזזה). לכן, $f'(x)$ מונוטונית יורדת בכל תחומה. יתקיים $f'(0) = -\sin 0 - 0 = 0$, כלומר לכל $x > 0$ נדע $f'(x) \leq 0$. אזי, גם $f(x)$ מונוטונית יורדת חזק, ובגלל ש־$f(0) = \cos 0 - 1 - \frac{0^2}{2} = 0$ אז סה"כ גם הפונקציה הזו תקיים $f(x) < 0$ כדרוש.

c) נרצה להוכיח $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$, ונוכיח את אי השוויון $f(x) < 0$. נגזור ונקבל $f'(x) = \cos x - 1 + 0.5x^2, \ f''(x) = -\sin x + x, \ f'''(x) = -\cos x + 1 < 0$. ידוע שמתקיים $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, ולכן f''' מונוטונית יורדת מתחת ל־0, וכן f'', f' ו־$f(x)$ כדרוש (מונוטיני יורד תחת ציר ה־0 $\Longleftarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}_+ . f(x) < 0$).

6

צ.ל. $\forall x \geq -1, 0 \leq a \leq 1 . (1+x)^a \leq 1 + ax$. יהיו $x \geq -1, 0 \leq a \leq 1$. נעביר אגפים ונמצא שקילות להוכחת הא"ש $f(x) :=$ $(1+x)^a - 1 + ax \leq 0$, כלומר $f(x) \leq 0$. נגזור:

$$f(x) = (1+x)^a - 1 + ax \qquad f(0) = 1^a - 1 + a \cdot 0 = 0$$
$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} - a \qquad f'(0) = a(1+0)^{a-1} - a = a - a = 0$$
$$f''(x) = \underbrace{(a^2 - a)}_{\leq 0}\underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \leq 0$$

הסתמכנו שני אי־שוויונים בטענות לעיל. הראשון, $x + 1 \geq 0$, שנגרר ישירות מכך ש־$x \geq -1$ (נוסיף 2 לשני האגפים). השני, $g(a) = a^2 - a$, נכון כי $g'(a) = 2a - 1$ יהיה קטן ממש מ־0 לכל $0 \leq a \leq 1$, כלומר $g(a)$ מונוטוני יורד החל מנקודת ההתחלה שלו $g(0) = 0$, אזי $g(a) \leq 0$. סה"כ הטענות לעיל אכן נכונות, תחת הנתונים. באופן דומה להסקות שהתבצעו בשאלה קודמת, $f'' < 0$ ולכן f' מונוטוני יורד, ומשום ש־$f'(0) = 0$ אז $\forall x \geq 0 . f'(x) \leq 0$, ובאופן דומה $f(x) \leq 0$ גם כן (תחת אותם התנאים שניתנו), כדרוש.

עתה, נותר להוכיח שוויון אמ"מ $x = -1 \vee a = 1$. משיקולים דומים, לכל $-1 \leq x$ נדע $f'''(x) \geq 0$ וכך (באופן דומה להוכחת אי־השוויון לעיל) יגרר $f(x)$ מונוטונית עולה באותו התחום, כלומר הקיצון היחיד הוא קיצון מקסימום כאשר $x = -1$, שם אכן יתקיים $f(x) = 0$ (כלומר, שוויון). נדע, שהפונקציה תעלה/תרד חזק בכל תחום אחר כי היא לא קבועה, אלא אם $a = 1$, בעת הזו $f(x) = (1+x)^1 - 1 - x \cdot 1 = 0$ (כלומר, שוויון גם במקרה הזה). סה"כ אלו המקרים היחידים בהם ייתכן שוויון.

שחר פרץ, 2024

אהההה כן טקסט תחתון