קומבינטוריקה בסיסית

0.1 עקרונות ספירה בסיסיים

עקרון הסכום: יהיו $A_1,...,A_n$ קבוצות זרות בזוגות. דהיינו, לכל $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ אזי $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + ... + |A_n|$.

עקרון הכפל: אם ניתן לבנות את איברי הקבוצה A ב־r שלבים, כך שבכל שלב i יש k_i אפשרויות, אז $|A| = \prod_{i=1}^{r} k_i = k_1 \cdot ... \cdot k_r$.

עקרון המשלים: יהיו $A \subseteq B$ קבוצות סופיות, אזי $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

עקרון החלוקה/ שיקולי סימטריה: נניח כי $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ באשר $A_1,...,A_n$ קבוצות סופיות זרות בזוגות ושוות עוצמה. אזי $|A_1| = |A|/n$.

0.2 בעיות קומבינטוריות

תרגום בעיות קומבינטוריות: בשאלה קומבינטורית נשאף לתרגם את הבעיה למציאת עוצמה של קבוצה ואז להפעיל שיטות ידועות.

שתי שאלות מנחות בקומבינטוריקה:

1. האם ספרנו את כל האפשרויות?
2. האם כל אפשרות נספרה בדיוק פעם אחת?

בעיות קומבינטוריות שקולות: שתי בעיות קומבינטוריות נקראות שקולות אם התוצאה שלהן זהה ואז לפתור בעיה אחת זהה לפתרון הבעיה השנייה.

מעבר בין בעיות כשנרצה לעבור מבעיה נתונה לבעיה שקולה, לרוב נרצה להתאים כל אפשרויות שנספרת בבעיה הראשונה לאפשרות יחידה שנספרת בבעיה השנייה (פורמלית, למצוא פונקציה חח"ע ועל בין הקבוצות שאנו טוענים שהן שקולות).

חשיבות לסדר: נאמר כי יש חשיבות לסדר בבעיה קומבינטורית אם סידורים שונים של אותם האובייקטים נספרים כאפשרויות שונות.

חזרות: נאמר כי יש חזרות בבעיה קומבינטורית אם ניתן להשתמש באותה האובייקט כמה פעמים בספירת האפשרויות השונות.

טבלה בסיסית

	הסדר חשוב	הסדר לא חשוב
אסור חזרות	$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
מותר חזרות	n^k	$S(n,k) = \binom{k+n-1}{k}$

סיפורים קלאסיים:

1. עם חשיבות לסדר ובלי חזרה

(א) סידור אנשים בשורה: בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים בשורה? במקום הראשון יש n אפשרויות במקום השני יש $n-1$ אפשרויות וכן הלאה. לכן התשובה היא $n!$.

(ב) סידור k מתוך n אנשים בשורה: כמו הבעיה הקודמת רק שאנו מסיימים אחרי k צעדים ולכן הפתרון הינו $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k)$.

(ג) ילד שמן: בכמה אפשרויות ניתן לסדר n ילדים בשורה כך שדני ודנה יושבים זה לצד זו? הדרך לפתרון בעיה זו היא להתבונן על דני ודנה כ"ילד שמן" ולסדר כעת $n-1$ ילדים בשורה ולאחר מכן להכפיל באפשרויות השונות לסידור הפנימי בין דני ודנה. לכן הפתרון הינו $(n-1)!\cdot 2$.

(ד) סידור במעגל: בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים במעגל ללא נקודת ייחוס (כלומר אנו לא מבדילים בין שתי אפשרויות של סיבוב המעגל) ? תחילה נסדר את האנשים במעגל עם נקודת ייחוס שזה כמו לסדר אותם בשורה ולכך יש $n!$ אפשרויות. כעת, כל אפשרויות ללא נקודת ייחוס נספרה n פעמים יותר מדי (פעם אחת כנגד כל אפשרות לסובב את המעגל) ולכן הפתרון הוא $n!/n=(n-1)!$.

(ה) פונקציות חח"ע ועל: כמה פונקציות חח"ע ועל יש מהקבוצה $\{1,...,n\}$ לעצמה? את האיבר 1 אפשר לשלוח ל־n מקומות, את האיבר 2 ניתן לשלוח לכל איבר ש־1 לא נשלח אליו ולכך יש $n-1$ אפשריויות וכך נמשיך. אם כך יש בדיוק $n!$ פונקציות חח"ע ועל כאלו.

(ו) פונקציה חח"ע: כמה פונקציות חח"ע יש מהקבוצה $\{1,...,n\}$ לקבוצה $\{1,...,m\}$? אם $m<n$ אז 0 ואם $m\geq n$ אז נפעל כמו בשאלה הקודמת ולבסוף נקבל $p(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$.

2. עם חשיבות לסדר ועם חזרה:

(א) פונקציות: כמה פונקציות יש מקבוצה בגודל k לקבוצה בגודל n? לכל אחד מבין k האיברים יש n אפשרויות לבחירת תמונתו ולכן ולכן יש n^k פונקציות כאלו

(ב) מחרוזות מעל א"ב: כמה מחרוזות (מילים) באורך k יש מעל א"ב עם n תווים(אותיות)? בכל מקום במחרוזת יש לנו n אפשרויות לבחירת תו ויש לנו k מקומות במחרוזת ולכן הפתרון הוא n^k.

(ג) זוגות של תת קבוצות: כמה זוגות $\langle A,B\rangle\in P(\{1,...,n\})^2$ ישנם כך ש־ $A\cap B\neq\emptyset$? נעבור לבעיה המשלימה, הגודל של $P(\{1,...,n\})$ הוא 2^n ולכן הגודל של $P(\{1,...,n\})^2$ הוא 4^n. נחסיר את כל הזוגות ה"רעים", כלומר זוגות שבהם $A\cap B=\emptyset$. לכל איבר מבין האיברים $1,...,n$ יש כעת שלוש אפשרויות: להיות רק בקבוצה A, להיות רק בקבוצה B, לא ב־A ולא ב־B. אין אפשרויות להיות גם ב־A וגם ב־B שכן החיתוך ריק. ולכן יש 3^n אפשרויות לזוגות כאלו. אם כך, הפתרון לבעיה המקורית הינו 4^n-3^n.

(ד) חלוקת כדורים שונים לתאים: בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים ממוספרים ל־k תאים שונים? לכל כדור יש k אפשרויות לבחירת התא ולכך יש k^n חלוקות כאלו.

3. בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה

(א) בחירת k אנשים מתוך n אנשים: בכמה דרכים ניתן לבחור k אנשים מתוך n אנשים ללא חשיבות לסדר הבחירה? מסמנים מספר זה ב־$C(n,k)$. תחילה נבחר k אנשים מתוך n אנשים אם חשיבות לסדר הבחירה, לכך יש לנו $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$ אפשרויות. כדי לפתרון את הבעיה ללא חשיבות לסדר נשים לב כי כל אפשרויות של בחירת k אנשים ללא חשיבות לסדר נספרה $k!$ פעמים יותר מדי, אחת כנגד כל אפשרויות לסדר את האנשים הללו בשורה. ולכן $C(n,k)=P(n,k)/k!=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. נגדיר $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ נקרא המקדם הבינומי.

(ב) תת קבוצה בגודל מסוים: כמה תת קבוצות בגודל k ישנן לקבוצה $\{1,...,n\}$? כמו הבעיה הקודמת, יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות כאלו.

(ג) חלוקה לזוגות: בכמה דרכים ניתן לחלק כיתה בעלת $2n$ בנים ו־$5n$ בנות לשביעיות שאין חשיבות לסדר בין השביעיות או בתוך השביעיות? תחילה נחלק בנים לשביעיות: נבחר שני בנים לזוג הראשון $\binom{2n}{2}$ ומתוך הנותרים נבחר שני בנים לזוג השני $\binom{2n-2}{2}$ וכך נמשיך. באותו אופן נחלק את הבנות לשביעיות : נבחר 5 בנות לשביעייה הראשונה $\binom{5n}{5}$ ומתוך הנותרות נבחר חמש בנות לשבעייה השנייה $\binom{5n-5}{5}$ וכך נמשיך. עד כה קיבלנו את הביטוי:

$$\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\cdot\binom{2}{2}\binom{5n}{5}\binom{5n-5}{5}\cdots\binom{5}{5}$$

זה מספר האפשרויות לחלק את הכיתה לשביעיות אבל עם חשיבות לסדר בין השביעיות ("השביעייה הראשונה, השביעייה השנייה,...") וכדי לבטל את החשיבת לסדר בין השביעיות נחלק את הביטוי ב־$n!$ אם כך הפתרון הוא:

$$\frac{1}{n!}\cdot\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdots\cdot\binom{2}{2}\binom{5n}{5}\binom{5n-5}{5}\cdots\binom{5}{5}$$

אחרי פיתוח אלגברי וצמצום נקבל:

$$\frac{(2n)!(5n)!}{(2!)^n(5!)^n n!}$$

(ד) בחירת מקומות: כמה מחרוזות ישנן עם בדיוק שלושה A שני B וארבעה C? מילה כזו היא באורך 9, נבחר מתוך 9 המקומות את המקומות שבהם יופיע A $\binom{9}{3}$ מהמקומות הנותרים נבחר את המקומות בהן יופיע התו B $\binom{6}{4}$ ובשאר המקומות נשים C. לכן יש $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{4}$ אפשרויות כאלו.

בלי חשיבות לסדר ועם חזרה אובייקט שאין בו חשיבות לסדר ומותרת חזרה נקרא מולטי קבוצה. במולטי קבוצה מותר לאיבר להופיע כמה פעמים. לדוגמא:

$$\{3,1,2,1\}=\{1,1,2,3\}\neq\{1,2,3\}$$

$S(n,k)$ סופר את כמות המולטי קבוצת בגודל k מתוך האיברים $\{1,...,n\}$. נעבור לבעיה שקולה ושימושית מאוד: כמה פתרונות יש למשוואה

$$x_1+x_2+...+x_n=k$$

כאשר $x_1,...,x_n\in\mathbb{N}$. שימו לב כי פתרון זו n־יה $\langle a_1,...,a_n\rangle\in\mathbb{N}^n$ כך ש־ $a_1+...+a_n=k$. הרדוקציה בין הבעיה של פתרונות למשוואה ומולטי קבוצות ניתנת באופן הבא: בהנתן מולטי קבוצה A בגודל k מבין האיברים $\{1,...,n\}$ נגדיר פתרון למשוואה $\langle a_1,..,a_n\rangle$, a_i יהיה מספר המופעים של i במולטי קבוצה A. מכיוון שהגודל של A הוא k, מובטח כי $\langle a_1,...,a_n\rangle$ פתרון של המשוואה. בכיוון השני, נניח כי $\langle a_1,...,a_n\rangle$ פתרון של המשוואה, נגדיר מולטי קבוצה

$$\{\underbrace{1,1,...,1}_{a_1\ times},\underbrace{2,2,...,2}_{a_2\ times},...,\underbrace{n,n,...,n}_{a_n\ times}\}$$

גם הבעיה של פתרונות למשוואה אינה בעיה פשוטה, נעבור לבעיה שקולה נוספת: בכמה אופנים ניתן לחלק k כדורים זהים ל־n תאים שונים? נראה כי הבעיות שקולות. בהנתן פתרון למשוואה $\langle a_1,..,a_n\rangle$ נבנה חלוקה של k כדורים זהים ל־n תאים הממוספרים $1,...,n$. נשים a_1 כדורים בתא מספר 1, a_2 כדורים בתא מספר 2 וכן הלאה. מכיוון ו־$a_1+...+a_n=k$, חילקנו בדיוק k כדורים. בכיוון השני, אם נתונה לנו חלוקה של k כדורים ל־n תאים אז ניתן לבנות פתרון a_i־ מספר הכדורים בתא ה־i.

אם כך הבעיות של מספר המולטי קבוצות, מספר הפתרונות למשוואה וחלוקת כדורים זהים לתאים שונים הן שקולות ופתרונם שווה ל־$S(n,k)$. נראה כיצד לפתור את הבעיה של חלוקת כדורים לתאים. בהנתן חלוקת כדורים לתאים, נזהה אותה עם מחרוזת בינארית באופן הבא:

$$\lfloor OOO\rfloor\lfloor\ O\ \rfloor\lfloor\quad\rfloor\lfloor O\ O\rfloor\lfloor O\ O\rfloor\lfloor\quad\rfloor\longrightarrow 0001011001001$$

מספר האפסים במחרוזת הוא 8־ כמספר הכדורים שחולקו לתאים. מספר האחדים הוא 5 שכן כל 1 מתאים ל"חוצץ" בין התאים. אם כך בחלוקת n כדורים ל־k תאים מותאמת מחרוזת בינרית באורך $k+n-1$ עם בדיוק k אפסים. זו בעיה שאנו יודעים לפתור שכן בשביל לבחור מחרוזת כזו לצריך רק לבחור את המקומות של האפסים ולכן הפתרון הינו

$$S(n,k)=\binom{k+n-1}{k}$$

להלן בעיות נוספות בלי חשיבות לסדר ועם חזרה:

1. בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים זהים ל־n תאים שונים כך שאף תא אינו ריק? תחילה נחלק כדור אחד לכל תא (חילקנו n כדורים) ואת $k-n$ הכדורים הנותרים נחלק בלי שום הגבלה. ולכן התשובה היא

$$S(n,k-n)=\binom{(k-n)+n-1}{k-n}=\binom{k-1}{k-n}$$

2. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+...+x_n=k$ כך ש־ $x_1\geq 3$ ו־$x_1,..,x_m\in\mathbb{N}$? נתרגם את השאלה לחלוקת כדורים לתאים, למעשה השאלה היא בכמה אופנים ניתן לחלק k כדורים זהים ל־n תאים שונים כך שבתא הראשון יש לפחות שלושה כדורים? נחלק תחילה שלושה כדורים לתא הראשון, נוותר עם $k-3$ כדורים לחלק ב־n תאים ללא הגבלה. ולכן התשובה היא

$$S(n,k-3)=\binom{n+k-k}{k-3}$$

3. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+...+x_n\leq k$ כך ש־ $x_1,...,x_n\in\mathbb{N}$? הטריק הבא נקרא "פח זבל" שכן אנו מגידים משתנה נוסף שערכו הוא ההפרש בין $x_1+...+x_n$ לבין k משתנה זה נקרא פח זבל כי את השארית אנו זורקים אליו. אם כך הבעיה שקולה למספר הפתרונות למשוואה $x_1+...+x_n+x_{n+1}=k$ וזה

$$S(n+1,k)=\binom{n+k}{k}$$

4. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+...+x_n=k$ כך ש־ $x_1\leq 17$? נעבור לבעיה המשלימה, כמות הפתרונות באופן כללי היא $\binom{n+k-1}{k}$. נחסיר את הפתרונות ה"רעים" כלומר פתרונות בהן $x_1>17$ כלומר $x_1\geq 18$. לכך יש $S(n,k-18)$ אפשרויות. ולכן הפתרון הוא:

$$\binom{n+k-1}{k}-\binom{n+k-19}{k-18}$$

5. כמה סדרות מונוטוניות באורך n שינם של מספרים טבעיים מהצורה

$$1\leq x_1<x_2<...<x_n\leq k$$

נתבונן בסדרת ההפרשים של סדרה כזו: $y_1=x_1,\ y_2=x_2-x_1,\ y_3=x_3-x_2,\ ...,y_n=x_n-x_{n-1}$ ההגבלות הן $y_1\geq 1$ ומכיוון ו־ $x_{i+1}>x_i$ אז גם $y_2,...,y_n\geq 1$. ובנוסף צריך להתקיים כי

$$y_1+y_2+...+y_n=x_n\leq k$$

כלומר הבעיה שקולה לכמות הפתרונות למשוואה

$$y_1+...+y_n\leq k$$

כך ש־ $y_1,...,y_n\geq 1$. נוסיף פח זבל $y_{n+1}\geq 0$ ונקבל בעיה שקולה

$$y_1+...+y_n+y_{n+1}=k$$

באשר $y_1,..,y_n\geq 1$. לכן הפתרון הינו

$$S(n+1,k-n)=\binom{k-n+(n+1)-1}{k-n}=\binom{k}{k-n}$$

שימו לב כי מספר זה שווה ל־$\binom{k}{n}$ זה מספר תת קבוצות בגודל n מתוך $\{1,...,k\}$ ואכן יש פתרון פשוט לבעיה שלנו שהוא בחירה של תת קבוצה בגודל k מתוך $1,...,n$. כל קבוצה כזו, ניתן לסדר באופן יחיד כסדרה מונוטונית עולה.

6. להלן עוד בעיות הפתרון שלהן הוא $S(k,n)$: בכמה אופנים ניתן להרכיב סלט פירות מבננות, תותים, מנגו ומלון כך שמספר הפירות בסלט הוא בדיוק n. בכמה אופנים ניתן להרכיב בריכת כדורים מכדורים בצבעים כחול, צהוב, אדום, ירוק. מה שמאפיין בעיות אלה הוא שיש לנו סוגים של אובייקטים ואנו צריכים להחליט כמה אנו לוקחים מכל אחד.