אלגברה לינארית 1א ~ תרגיל בית 9 ~ סמסטר ב' 2025

שחר פרץ

7 ביוני 2025

(1)

נגדיר:

$$B=\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right),\ C=\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$$

כאשר כל החישובים בסעיף זה יתבצעו תחת האיזומורפיזם הבא:

$$\varphi\colon M_{2\times 2}(\mathbb{F})\to\mathbb{R}^4=\varphi\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

נמצא קרנל ותמונה להעתקה הבאה:

$$T\colon M_{2\times 2}\to \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}),\quad [T]_C^B=\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\2&-4&3&1\\-1&2&4&5\end{pmatrix}$$

נמצא קרנל למטריצה באמצעות דירוג מערכת משוואות הומוגנית

$$\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\2&-4&3&1\\-1&2&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+R_1]{R_2\to R_2-2\cdot R_1}\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&0&-1&-1\\0&0&6&6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+6R_1}\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to -R_2]{R_1\to R_1+2R_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$\mathcal{N}[T]_C^B=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

נעביר ייצוג מבסיס B לבסיס סטנדרטי כדי למצוא קרנל:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}[id]_E^B=1\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}[id]_E^B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

ולכן סה"כ:

$$\ker T=\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\right)$$

עתה ניגש למצוא תמונה. לשם כך, נמצא בסיס למרחב העמודות של המטריצה המייצגת, ע"י כך שנדרג שורות ה־transpose שלה (דירוג שורות לא משנה מרחב שורות):

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\2&3&4\\1&1&5\end{pmatrix} \xrightarrow[R_4\to R_4-R_1]{\substack{R_2\to R_2+2R_1\\ R_3\to R_3-2R_1}} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&-1&6\\0&-1&6\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\longleftrightarrow R_4} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&6\\0&-1&6\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-6\\0&-1&6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix}1&0&11\\0&1&-6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

סה"כ, מרחב העמודות:

$$\mathrm{Col}[T]_C^B = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1&0&11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&-6\end{pmatrix}\right)$$

זהו בייצוג C, נעביר חזרה לייצוג סטנדרטי:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}[id]_E^C = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12&12\\12&-10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}[id]_E^C = \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7&-5\\-5&5\end{pmatrix}$$

וסה"כ:

$$\operatorname{Im} T = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}12&12\\12&-10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7&-5\\-5&5\end{pmatrix}\right)$$

עתה ניגש למצוא את $[T]_{C'}^{B'}$ עבור הבסיסים הבאים:

$$B' = \left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}, \quad C' = \left(\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\right)$$

נבחין ש־:

$$[T]_C^{B'} = [id]_B^{B'}[T]_C^B = \begin{pmatrix}1&2&-2&1\\1&3&-4&2\\5&4&2&-1\end{pmatrix}$$

כי זהו רק שינוי סדר שורות. עתה נעביר את המטריצה לייצוג ב־C. נמצא את מטריצת המעבר מ־C ל־C':

$$[id]_{C'}^C = \left(\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right]_{C'}, \left[\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}_{C'}, \left[\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\right]_{C'}\right) = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\2\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-1&-\frac{7}{3}\\0&0&2\\\frac{1}{3}&-1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

נכפול:

$$[T]_{C'}^{B'} = [T]_C^{B'}[id]_{C'}^C = \begin{pmatrix}-12\frac{1}{3}&-11\frac{2}{3}&-1\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\10&8&4&-2\\-2\frac{1}{3}&-3\frac{2}{3}&2\frac{2}{3}&-1\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

כדרוש.

. . . . (2) . . . .

(a) יהיו מטריצות $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נוכיח ש־$A_1, A_2$ שקולות שורה אם ורק אם קיימת $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ובסיס B של $\mathbb{F}^n$ וכן בסיסים C_1, C_2 של $\mathbb{F}^m$ כך ש־$A_1 = [T]_{C_1}^B,\ A_2 = [T]_{C_2}^B$.

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח $\text{Row}\,A_1 = \text{Row}\,A_2$, נוכיח קיום בסיסים B, C_1, C_2 וכן העתקה $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך ש־$A_1 = [T]^B_{C_1},\ \ A_2 = [T]^B_{C_2}$. נתבונן בבסיס B כלשהו למרחב השורות $\text{Row}\,A_1 = \text{Row}\,A_2 =: \text{Row}\,A$. אזי ניתן לדרג את המטריצה המתקבלת מהבסיס B כשורותיה, נסמנה A, אל A_1 וכן אל A_2. נוכל להתסכל על A כעל מייצגת העתקה כלשהי בבסיס B ל־C כלשהו היא $[T]^B_C$, ועל הדירוג כעל כפל של מטריצות מעבר שורה – דהיינו, מטריצה הפיכה, וכל מטריצה הפיכה היא מטריצת שינוי בסיס מבסיס נתון לבסיס כלשהו אחר, בה"כ $[id]^C_{C_1}$ וכן $[id]^C_{C_2}$ יהיו אותן המטריצות. סה"כ:

$$A_1 = A[id]^C_{C_1} = [T]^B_C[id]^C_{C_1} = [T]^B_{C_1}$$
$$A_2 = A[id]^C_{C_2} = [T]^B_C[id]^C_{C_2} = [T]^B_{C_2}$$

$\Longleftarrow$ נניח ששתי מטריצות A_1, A_2 מקיימות $A_1 = [T]^B_{C_1}, A_2 = [T]^B_{C_2}$ עבור $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ העתקה כלשהי וכן B, C_1, C_2 בסיסים כלשהם. נוכיח $\text{Row}\,A_1 = \text{Row}\,A_2$.

יהי C בסיס. נתבונן במטריצה $[id]^C_{C_1}$ מטריצת מעבר בסיס, היא מטריצה הפיכה. אזי היא כפל של מטריצות אלמנטריות, דהיינו שקולה לדירוג שורות. ידוע שכפל במטריצה הפיכה לא משנה שורות מטריצה, ולכן:

$$\text{Row}\,A_1 = \text{Row}[T]^B_{C_1} = \text{Row}[T]^B_C[id]^C_{C_1} = \text{Row}[T]^B_C$$

נפעיל טיעונים דומים בעבור $[id]^C_{C_2}$ ונקבל:

$$\text{Row}\,A_2 = \text{Row}[T]^B_{C_2} = \text{Row}[T]^B_C[id]^C_{C_2} = \text{Row}[T]^B_C$$

סה"כ מטרנזטיביות:

$$\text{Row}\,A_1 = \text{Row}\,A_1 \quad \top$$

■

(b) יהיו $S, T\colon V \to U$ העתקות ליניאריות. נוכיח ש־$\dim(\text{Im}\,S) = \dim(\text{Im}\,T)$ אמ"מ $\exists B_1, B_2$ בסיסים של V וכן C_1, C_2 בסיסים של U כך ש־$[S]^{B_2}_{C_2} = [T]^{B_1}_{C_1}$.

הוכחה. ראשית כל, נראה שעבור העתקה $\varphi\colon V \to U$ ו־B, C בסיסים ל־V, U בהתאמה, מתקיים $\text{Col}[\varphi]^B_C \cong \text{Im}\,\varphi$. ידוע:

$$[\varphi(v)]_C = [\varphi]^B_C \cdot [v]_B \overset{(1)}{\in} \text{Col}[\varphi]^B_C \implies \text{Col}[\varphi]^B_C = \{[\varphi v]_C \mid v \in V\} \overset{(2)}{\cong} \{\varphi c \mid v \in V\} = \text{Im}\,\varphi$$

כאשר (1) נכון מכפל מטריצות ו־(2) נכון כי $[\,\cdot\,]_C\colon U \to \mathbb{F}^m$ איזו'. סה"כ הראינו את הדרוש כלומר קיים איזו' בן $\text{Col}[\varphi]^B_C$ לבין $\text{Im}\,\varphi$ הוא מעבר לייצוג בבסיס C, כלומר $\dim \text{Col}[\varphi]^B_C = \dim \text{Im}\,\varphi$.

נחזור לטענה עצמה.

$\Longrightarrow$ אם $[S]^{B_2}_{C_2} = [T]^{B_1}_{C_1}$ $\exists B_1, B_2 \subseteq V, C_1, C_2 \subseteq U\colon$ אזי:

$$\dim \text{Im}\,S = \dim \text{Row}[\varphi]^{C_2}_{B_2} = \dim \text{Row}[\varphi]^{C_1}_{B_1} = \dim \text{Im}\,T$$

כדרוש.

$\Longleftarrow$ אם $\dim \text{Im}\,S = \dim \text{Im}\,T$, אז קיימים בסיסים כלשהם כך ש־$[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1}, [S]^{B_2}_{C_2}$ המטריצות המייצגות. בשיעורי בית קודמים ראינו שהמטריצות להלן מתאימות אמ"מ $\text{rank}[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1} = \text{rank}[S]^{C_2}_{B_2}$ מה שאכן מתקיים שכן:

$$\text{rank}[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1} = \dim \text{Row}[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1} = \dim \text{Im}\,T = \dim \text{Im}\,T = \dim \text{Row}[S]^{B_2}_{C_2} = \text{rank}[S]^{B_2}_{C_2}$$

ומשום שהן מתאימות קיימים קיימות P, Q הפיכות כך ש־$Q^{-1}[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1}P$ ומשום שהן הפיכות הן בפרט מטריצות העברת בסיס כלשהן מ־$\tilde{B}_1$ ל־B_1 כלשהו וכן מ־$\tilde{C}_1$ ל־C_1 כלשהו, ועל כן קיימים B_1, C_1 כך ש־$[T]^{\tilde{B}_1}_{\tilde{C}_1} = Q^{-1}[T]^{B_1}_{C_1}P$. סה"כ הראינו קיום C_1, B_1, C_2, B_2 כך ש־$[T]^{B_1}_{C_1} = [S]^{C_2}_{B_2}$ כדרוש.

■

(c) תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, נוכיח ש־T איזו' אמ"מ קיימים B, C כך ש־$[T]^B_C = I$.

הוכחה. נסמן $\dim V = n$.

$\Longrightarrow$ נניח T איזו', נוכיח קיומים בסיסים B, C כך ש־$[T]^B_C = I$. מהיותה איזו', דרגתה n. אזי קיים רצף דירוג שורות $E_1 \dots E_k$ כך ש־$[T]^B_{\tilde{C}}$ ייצוג לפי בסיסים כלשהו מקיים $[T]^B_{\tilde{C}}\prod_{i=1}^k E_k = I$. אזי $\triangle =: \prod_{i=1}^n E_k$ מטריצה הפיכה שכן היא כפל של אלמנטריות ובפרט היא מטריצה מעבר שורה מ־$\tilde{C}$ ל־C כלשהי, ונקבל $\triangle = [id]^C_{C_1}$. סה"כ:

$$[T]^B_{\tilde{C}}[id]^{\tilde{C}}_C = I \implies [T]^B_C = I \quad \top$$

$\Longleftarrow$ אם T מתאימה ל־I אז $\text{rank}[T]^B_C = n$ ומשום ש־$T\colon V \to V$ ממדים מגודל זהה n, אזי היא הפיכה כדרוש.

■

(3)

נמצא את החיתוך של $U,W\subseteq\mathbb{R}^4$ הבאים:

$$U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\\7\end{pmatrix}\right\},\ W=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix}\right\}$$

ידוע שדירוג מטריצה לא משנה את מרחב השורות שלה:

$$\begin{pmatrix}0&3&0&1\\7&-3&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}0&3&0&1\\7&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to\frac{1}{7}R_2]{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}0&1&0&\frac{1}{3}\\1&0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

וכן:

$$\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&1\\7&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-\frac{1}{2}R_2]{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&1\\7&3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1\,R_3\to\frac{1}{7}R_3}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&\frac{3}{7}&0&0\end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{7}\\1\end{pmatrix}\right\}=:\operatorname{span}\{u_1,u_2,u_3\},\ W=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}\right\}=:\operatorname{span}\{w_1,w_2\}$$

נחפש אילו וקטורים מהבסיס של W נמצאים ב־U:

$$(U\mid w_1,w_2)=\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&\frac{3}{7}&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{3}{7}\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{3}{7}\\0&0&\frac{3}{7}&0&0\end{array}\right)$$

משום שהשוויון $\frac{3}{7}\alpha=0$ גורר $\alpha=0$ החלק של u_3 בקומבינציה הליניארית הוא 0, אך זה גורר $\frac{1}{3}=0$ אם $w_1\in U\cap W$ וזו סתירה, וכן $\frac{3}{7}=0$ אם $w_2\in W\cap U$ וזו סתירה, וסה"כ $U\cap W=\{0\}$ ובסיס $\{\}$.

עתה נמצא בסיס ל־$U+W$:

$$U+W=\operatorname{span}U+\operatorname{span}W=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{7}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\frac{3}{7}\end{pmatrix}\right\}$$

נצמצם לבסיס; ידוע שמרחב השורות של המטריצה הבאה הוא ה־span של הוקטורים לעיל, וכן דירוגו לא משנה את המ"ו:

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&\frac{3}{7}&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{3}{7}&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5\to R_5-R_2]{R_4\to R_4-R_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&\frac{3}{7}&0&0\\\frac{1}{3}&0&0&0\\\frac{3}{7}&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to 4R_4}\xrightarrow[R_5\to R_5-\frac{3}{7}R_4]{R_3\to R_3-R_4}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&\frac{3}{7}&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{3}{7}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{7}{3}R_2}\begin{pmatrix}I_4\\0_{1\times4}\end{pmatrix}$$

סה"כ הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס ל־$U+W=\mathbb{R}^4$.

(4)

נתבונן במרחבים הבאים:

$$U=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix}\right\},W=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\5\\3\\2\end{pmatrix}\right\}$$

נחפש את $U+W$. ידוע ש־:

$$A_U=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&1&1&3\\0&1&2&4\end{pmatrix},\ A_W=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\5&5&3&2\end{pmatrix}$$

מקיימות $\operatorname{Row} A_U=U,\ \operatorname{Row} A_W=W$. אזי $\operatorname{Row}\begin{pmatrix}A_U\\A_W\end{pmatrix}=U+w$, חיבור בסיסים. נמצא בסיס למרחב הבא באמצעות דירוג המטריצה:

$$\begin{pmatrix}A_U\\A_W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&1&1&3\\0&1&2&4\\1&0&1&0\\5&5&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_5}\begin{pmatrix}5&5&3&2\\0&1&1&3\\0&1&2&4\\1&0&1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{5}R_1}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&1&2&4\\1&0&1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4-\cdot R_1}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&1&2&4\\0&-1&\frac{2}{5}&\frac{2}{-5}\\0&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_5\to R_5-1\cdot R_2]{\substack{R_3\to R_3-R_2\\R_4\to R_4+1R_2}}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&0&1&1\\0&0&\frac{7}{5}&\frac{13}{5}\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{7}{5}R_3}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&0&1&1\\0&0&0&\frac{6}{5}\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\to\frac{5}{6}R_4}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_5\to R_5+R_4}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\\0&1&1&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-\frac{2}{5}R_4]{\substack{R_3\to R_3-1R_4\\R_2\to R_2-3R_4}}\begin{pmatrix}1&1&\frac{3}{5}&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1\to R_1-\frac{3}{5}R_3]{R_2\to R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

סה"כ הבסיס הסטנדרטי בסיס ל־$U+W$. עתה נמצא בסיס ל־$U\cap W$. יהי $v\in U\cap W$. אזי:

$$v\in U\implies \exists a,b,c\colon v=a\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a+b+c\\a+b+2c\\2a+3b+4c\end{pmatrix}$$

$$v\in W\implies \exists d,e\colon v=d\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}5\\5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d+5e\\5e\\d+3e\\2e\end{pmatrix}$$

סה"כ קיבלנו:

$$\begin{pmatrix}d+5e\\5e\\d+3e\\2e\end{pmatrix}=v=\begin{pmatrix}0\\a+b+c\\a+b+2c\\2a+3b+4c\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}-d-5e\\a+b+c-5e\\a+b+2c-d-3e\\2a+3b+4c-2e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

נעביר למערכת משוואות הומוגנית:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&-1&-5\\1&1&1&0&-5\\1&1&1&-1&-3\\2&3&4&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}2&3&4&0&-2\\1&1&1&0&-5\\1&1&1&-1&-3\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 0.5R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\1&1&1&0&-5\\1&1&1&-1&-3\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\0&\frac{1}{-2}&-1&0&-4\\0&\frac{1}{-2}&-1&-1&-2\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to-2R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\0&1&2&0&8\\0&\frac{1}{-2}&-1&-1&-2\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+0.5R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\0&1&2&0&8\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to-R_3}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\0&1&2&0&8\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&-1&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4\to R_4+R_3}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&0&-1\\0&1&2&0&8\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\to-\frac{1}{7}R_4]{R_1\to R_1-1\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&-13\\0&1&2&0&8\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1\to R_1+13R_4]{\substack{R_3\to R_3+2R_4\\R_2\to R_2-8R_4}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

סה"כ מצאנו $d=e=0$ אך גם $c\in\mathbb{R}$ וכן $a=c,\ b=-2c$. סה"כ:

$$v\in\left\{\begin{pmatrix}0\\c-2c+c\\c-2c+2c\\2c-6c+4c\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}c\mid c\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=U\cap W$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

נראה שהכלה והדחה לא עובר על ממדי מרחבים עבור $n = 3$. נתבונן בשלושת התמ"ים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \operatorname{span}\{e_1\},\ U_2 = \operatorname{span}\{e_2\},\ U_3 = \operatorname{span}\{(e_2 + e_1)\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

אזי:

$$\dim(U_1+U_2+U_3) = 2 \neq 1 = \underbrace{\dim U_1}_{=1} + \underbrace{\dim U_2}_{=1} + \underbrace{\dim U_3}_{=1} - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}_{=0} - \underbrace{\dim(U_1 \cap U_3)}_{=1} - \underbrace{\dim(U_2 \cap U_3)}_{=1} + \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)}_{=0}$$

כדרוש.

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

לפני שנחשב דטרמיננטות, נפתח את הנוסחה לדטרממיננטה למטריצה $\in M_{3\times3}(\mathbb{F})$:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - hf) - b(di + gf) + c(dh - eg) \\ &= aei - ahf - bdi + bgf + cdh - ceg \\ &= aei + bgf + cdh - ahf - bdi - ceg\end{aligned}$$

(a) מהנוסחה שהוכחנו:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 3\cdot4\cdot8 - 1\cdot6\cdot8 - 2\cdot4\cdot9 - 3\cdot5\cdot7 = \mathbf{0}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot-4 + 2\cdot5\cdot-1 + 3\cdot2\cdot-2 - 1\cdot5\cdot-2 - 2\cdot2\cdot-4 - 3\cdot4\cdot-1 = 0$$

(c) נפתח לפי השורה האחרונה:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4(0\cdot7\cdot1 + 4\cdot5\cdot4 + 3\cdot0\cdot3 - 0\cdot5\cdot3 - 4\cdot0\cdot1 - 3\cdot7\cdot4) = 4\cdot(-4) = -16$$

(d) גם כאן, נפתח לפי השורה האחרונה. נמצא את המינורים בנפרד:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot3 + 4\cdot2\cdot3 - 2\cdot4\cdot3 - 3\cdot2\cdot4 - 4\cdot3\cdot3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot3 + 4\cdot2\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 3\cdot2\cdot4 - 4\cdot3\cdot3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot2\cdot4 + 2\cdot4\cdot3 + 4\cdot2\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 2\cdot2\cdot4 - 4\cdot2\cdot3 = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot3 + 3\cdot2\cdot3 - 1\cdot3\cdot3 - 2\cdot2\cdot3 - 3\cdot2\cdot3 = 3$$

ונמצא:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot0 - 4\cdot0 + 4\cdot4 - 4\cdot3 = 16 - 12 = \mathbf{4}$$

(e) נתבונן בדטרמיננטה הבאה:

$$\left|A\right| := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -78 & 13 & -43 & 111 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 235 & 14 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 89 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

נבחין ששלושת השורות האחרונות ת"ל אמ"מ הוקטורים $(1,89)$ $(235,11),$ $(1,1),$ ת"ל שכן שאר האפסים ת"ל. אלו 3 וקטורים במרחב $\mathbb{R}^2$, כלומר הם בהכרח תלויים לינארית. לכן שלושת השורות האחרונות של המטריצה ת"ל, ודרגתה איננה 5 גודל המ"ו $\mathbb{R}^5$. סה"כ $\left|A\right| = \mathbf{0}$.

(7)

נמצא את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות:

(a) ראשית כל, נמצא את הדטרמיננטה של:

$$A_n =: \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix} = (-1)^{2n}\alpha_n \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_n A_{n-1}$$

ובסיס:

$$A_1 = \left|\alpha_1\right| = |\alpha_1 I_{1\times 1}| = \alpha_1$$

ולכן:

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n A_{n-1} \\ A_1 = \alpha_1 \end{cases} \implies A_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

נחזור לשאלה מהקורית. נרצה לחשב את הדטרמיננטה הבאה באמצעות פיתוח לפי העמודה האחרונה:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} a_n \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^n + b_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

לפי הדטרמיננטה שפיתחנו קודם לכן:

$$= ((-1)^2)^n a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i + (-1)^n b_1 \prod_{i=2}^{n} a_i = a_1 \prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^n b_1 \prod_{i=2}^{n} = \boldsymbol{\prod_{i=2}^{n} (\alpha_1 + (-1)^n b_1)}$$

(b) נמצא את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+2)^3 \end{pmatrix}$$

אם $\det A \neq 0$, אזי A הפיכה כלומר $\operatorname{rank} A = 4$, אך $\operatorname{Row} A \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ וסה"כ:

$$4 = \operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Row} A \leq \dim \mathbb{R}_3[x] = 3 \implies 4 \leq 3 \quad \perp$$

סתירה. לכן $\det A = 0$ כדרוש.