לינארית 8

שחר פרץ

18 בדצמבר 2024

כמה תזכורות מפעמים קודמות, והשלמות להוכחות:

טענה. יהיו U, V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימדים $n = \dim V, m = \dim U$ ויהי $C = (u_j) \subseteq U, B = (v_i) \subseteq V$ בסיסים אז כל מטריצה $A = M_{m\times n}(F) \ni (a_i)$ מגדירה העתיקה ליניארית שהיא $\forall x_j \in F,\ 1 \leq j \leq n\colon \varphi(\sum_j x_j v_j) = \sum_{i,j\in I} x_j a_{ij} u_i \text{ where } T = \{(x,y) \mid x \in \{1\dots m\}, y \in \{1\dots n\}\}$ ויתקיים $[\varphi]_C^B = A$.

הבהרה: יתקיים

$$\sum_{i,j\in I} x_j a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_j C_i$$

הוכחה. יהי A מט' כרצוי. נבנה φ במשפט. נראה ש־φ ליניארית ואז ש־$[\varphi]_C^B = A$

- ליניארית. יהיו $\lambda, \alpha \in F, v, w \in V$. נראה ש־$\triangle = \varphi(\lambda v + \alpha w) = \lambda\varphi(v) + \alpha\varphi(w)$. נסמן:

$$V = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j,\ W = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

קיימים $(x_j), (y_j)$ מתאימים כי B הוא בסיס.

$$\triangle = \varphi\left(\lambda \sum x_j v_j + \alpha \sum y_j v_j\right) = \varphi\left(\sum (\lambda x_j + \alpha y_j) v_j\right)$$

מהגדרה:

$$\begin{aligned}\triangle &= \sum_{i,j\in T} (\lambda x_j + \alpha y_j) a_{ij} u_j \\ &= \lambda \sum_{i,j\in T} x_j a_{ij} u_j + \alpha \sum_{i,j\in T} y_j a_{ij} u_j \\ &= \lambda\varphi(v) + \alpha\varphi(w)\end{aligned}$$

לפי הגדרת φ. כדרוש.

- $[\varphi]_C^B = A$. יהי $1 \leq j \leq m$. נסתכל על העמודה ה־j שלהן, ונראה שהן שוות.
  - $[\varphi]_C^B = [\varphi(v_j)]_C$ (לפי ההגדרה של מטריצה מייצגת)
  - העמודה ה־j של A היא $\begin{pmatrix} a_{1j} & \\ \vdots & a_{mj} \end{pmatrix}$
  - נחשב את $\varphi(v_j)$:

$$\varphi(v_j) = \varphi\left(\sum_{j\neq t=1}^{n} 0v_t + 1v_t\right) = \sum_{i,\ell\in T} x_{i\ell} a_{i\ell} u_i = \sum_i \underbrace{x_j}_{=1} a_{ij} + u_i + \sum_{i,j\in T\setminus\underbrace{\{(i,j)\mid i\in\{1\dots m\}\}}_{=0}} x_c a_{i\ell} u_i$$

$$= \sum_i a_{ij} \implies [\varphi(v_j)]_C = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

■

תזכורות מהשיעור הקודם:

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) \quad \lambda A := (\lambda a_{ij})$$

ויתקיים:

$$[\varphi+\psi]_C^B = [\varphi]_C^B + [\psi]_C^B,\ [\lambda\varphi]_C^B = \lambda[\varphi]_C^B$$

הוכחה. יהי $1 \leq j \leq n$. נראה שהעמודה ה־j של שני הצצדים שווים. מצד אחד, בעמודה ה־j:

$$[\varphi+\psi]_C^B = [(\varphi+\psi)(v_j)]_C$$

מנגד, בצד השני, בעמודה ה־j:

$$[\varphi]_C^B + [\psi]_C^B \overset{!}{=} [\varphi(v_j)]_C + [\varphi(v_j)]_C$$

נחשב את $(\varphi+\psi)(v_j) = \varphi(v_j) + \psi(v_j)$. נסמן את $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i u + i$ ובאופן דומה ב־u_i את $\psi(v_j)$ ונקבל:

$$\sum \alpha_i u_i = \sum \beta_i u_i = \sum (\alpha_i+\beta_i) u_i$$

וסה"כ

$$[(\varphi+\psi)(v_j)]_C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_a \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

וזה בדיוק כמו ... ■

מסקנה. U, V מ"ו. B, C בסיסים ממימדים n, m בהתאמה, אז קיימת $T\colon\ \hom(V,U) \to M_{m\times n}(F)$ כך ש־$T(\varphi) = [\varphi]_C^B$, כך ש־$T$ איזומורפיזם.

הוכחה. /נראה ש־T חח"ע ,על, ליניארית, ושטווחה מ"ו.

- טווח מ"ו. הטווח הוא $M_{m\times n}(F)$ עם $+, \cdot$ כמו שהוגדר קודם, הוא מ"ו $A+B, \lambda A$. נובע זה שהפעולות פר נקודה (מה שהמורה כתב וציין שלא מספיק פורמלי).
- ליניארית. יהי φ, ψ העתקות מ־V ל־U. יהיו $\lambda, \alpha \in F$. נראה:

$$T(\lambda\varphi + \alpha\psi) = \lambda T(\varphi) + \alpha T(\psi)$$

ואכן:

$$T(\lambda\varphi+\alpha\psi) = [\lambda\varphi+\alpha\psi]_C^B = [\lambda\varphi]_C^B + [\alpha\psi]_C^B = \lambda[\varphi]_C^B + \alpha[\psi]_C^B = \lambda T(\varphi) + \alpha T(\psi)$$

- על. מטענה קודמת לכל מט' A קיימת $\varphi\colon V \to U$ כך ש־$[\varphi]_C^B = A$ ולכן $T(\varphi) = A$.
- חח"ע. יהי φ, ψ העתקות ליניאריות כך ש־$T(\varphi) = T(\psi)$. אז יש להן אותה הטריצה המייצגת, ומכיוון שאיברי הבסיס הולכים לאותו הערך, אז אילו אותן ההעתקות.

■

הגדרה. $A = (a_{ij}) \in M_{m\times s},\ B = (b_{ij}) \in M_{s\times n}$. נגדיר:

$$AB := A\cdot B := (c_ij) = \left(\sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}\right) \in M_{m\times n}(F)$$

כלומר כפל מטריצות יתבצע למטריצות מהצורה:

$$\begin{pmatrix} & s & \cdots \\ m & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} & n & \cdots \\ s & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

כאשר $i \in [m], j \in [m]$. אז לדוגמה:

$$AB := C,\ C_{11} = \sum_{s} a_{1k} b_{k1}$$

עוד דרך להסתכל על הכפל: בעבור A, B כלליות, ותחת הסימון $A_i \in M_{1\times s}$ השורה ה־i של A ו־$B_j \in M_{s\times 1}$ ואז להסתכל על כפל מטריצות כמו $AB = (A_i \cdot B_j)_{i,j\in\ldots}$.

דרך אחרת להסתכל על הכפל, יהיה כמו להסתכל על $e_i \in M_{n\times 1},\ \hat{e}_i \in M_{1\times n}$ בסיסים סטנדרטיים של המ"ו, אז $A \cdot e_i$ יהיה העמודה ה־i ו־$\hat{e}_i \cdot A$ יהיה השורה ה־i.

דוגמה.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 0 - 1\cdot 2 & 2+3+8 \\ 15+0-1 & 6+6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

דוגמה נוספת:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

שימו לב שהכפל לא קומטטיבי. במקרה הזה, ההפוך כלל לא היה הכפל.

טענה. יהיו $\varphi\colon V \to U$ ו־$\psi\colon U \to W$ העתקות ליניאריות, ו־$B_v, B_u.B_w$ בהתאמה. אז:

$$[\psi \circ \varphi]_{B_w}^{B_v} = [\psi]_{B_w}^{B_u} \cdot [\varphi]_{B_u}^{B_w}$$

הוכחה. נסמן:

$$\begin{aligned} B_V &= (v_1 \ldots v_s) \\ B_W &= (w_1 \ldots w_r) \\ B_U &= (u_1, \ldots, u_t) \\ [\psi]_{B_W}^{B_U} &:= Y := (y_{ij}) \in M_{r\times t}(\mathbb{F}) \\ [\psi \circ \varphi]_{B_W}^{B_V} &:= Z := (z_{ij}) \in M_{r\times s}(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

נראה ש־$Z = Y \cdot X$ ע"י זה שנראה עבור כל עמודה (מכיוון שהמרצה לא יסמן את זה אז זה אני כן, A^j תהיה העמודה ה־j במטריצה A, i להיות השורה).

$$YX := \hat{Z}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} x_{ik} y_{kj}$$

תקשיבו, די נמאס לי, אי אפשר לעקוב אחרי המרצה, יש את זה בסיכום של אלגברה ליניארית בעמוד 34 (אני רואה את הסיכום של המורה במסך של המחשב של מנטין מולי והמרצה פשוט מנסה להעתיק מזה) שאתם יכולים למצוא בכל מקרה בלעדי. השורה התחתונה שלו היא:

$$\begin{aligned} &[(\psi \circ \varphi)(v_j)]_{B_W}^{j} \\ =&[\psi(\varphi(v_j))]_B W^j \\ =&\left[\psi\left(\sum_{j=1}^{t} x_{kj} u_k\right)\right]_{B_W}^{j} \\ =&\left[\sum_{k=1}^{t} x_{kj} \cdot \psi(u_k)\right]_{B_W}^{j} \\ =&\left[\sum_{k=1}^{t} x_{kj} \cdot \sum_{p=1}^{n} y_{px} w_p\right]_{B_W}^{j} \end{aligned}$$

זה השלב שבו המרצה זועק לעזרה כי אין לו מושג מה לעשות. אחרי 2 דקות של דיבורים על הכיתה כדי להבין מה קורה:

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{p=1}^{r} w_p \sum_{k=1}^{t} x_{kj} y_{rk}\right]_{B_W}^{j} \\ &= \begin{pmatrix} \sum y_k x_{kj} \\ \vdots \\ \sum y_{rk} x_{kj} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן

$$(Z)_{ij}=\sum_{k=1}^{t}y_{ik}x_{kj}$$

כדרוש. ∎

מסקנה. יהיו A,B,C מטריצות, אז

1. $(AB)C=A(BC)$
2. $A(B+C)=AB+AC$ (בהנחה שהכפל מוגדר)

הוכחה. קיימות α,β,γ העתקות ליניאריות ומרחבים F^a,F^b,F^c. נבקש $A=[\alpha]$, $B=[\beta]$ ו־$C=[\gamma]$ כאשר $[\varphi]=[\varphi]_e$ עבור e הבסיס הסטנדרטי ($e=(e_1\dots e_n)$). נוכל לעשות זאת מהטענה שראינו בתחילת השיעור. אז:

$$(AB)C=([\alpha][\beta])[\gamma]=[\alpha\circ\beta][\gamma]=[\alpha\circ\beta\circ\gamma]=[\alpha\circ(\beta\circ\gamma)]=\dots=A(BC)$$

ו־2 באופן דומה. ∎

נמשיך עם הוכחה לכך שכפל מטריצות לא חילופי שראיתי קודם על המחשב של מנטין, על הסיכום שהמרצה מעתיק ממנו:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

יתקיים:

$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=BA$$

בינתיים מיכאל ומנטין מחליפים icon packs של intelji מולי

למה אני בהרצאה הזו בכלל, אם הייתי רוצה מרצה שמקריא מדף הייתי הולך לפתוחה, פותח את הספר שלהם ושם קורא מסך.

הגדרה. $In:=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\\0&1&0&\cdots\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ היא מטריצת היחידה. אם יש מ"ו ממימד n עם בסיס B אז $[id_v]_B^B=T_n$.

למה. תהי $A\in M_{m\times n}(F)$

טענה. תהי $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(F)$. יהי $x=(x_j)\in F^n$ ו־$b=(b_i)\in F^m$. אז $Ax=b$ אמ"מ x פתרון למערכת המשוואות ש־$(A\mid b)$ מייצג (ליטרלי השתמשתי בזה בש.ב. 2 לפני חודש כי נראה לי הגיוני שככה מגדירים את זה)

הוכחה. באמת?

$$b_i=Ax=\sum a_{it}x_t$$

∎

מסקנה. יהי "אותם תנאים כמו של הטענה הקודמת" מרחב הפתרונות $Ax=0$ הוא מ"ו. וגם, עבור כל φ העתקה ליניארית מ־V ל־U עם בסיסים B,C בהתאמה, כך ש־$[\varphi]_C^B=A$, יתקיים שמרחב הפתרונות $=\ker\varphi$

תודה מנטין שבשלב הזה בהרצאה שלח לי את הסיכום שהמורה שאני מעתיק ממנו מעתיק ממנו. זה כמו העתקות ליניאריות.

זה השלב שבו אני שולח קטעים מהסיכום בקבוצה של אודיסאה כי כל מי ש"מסכם" את השיעור ב־intelji זמין על הוואטסאפ

מתישה, שקצת אחרי שקרני כתב java על הלוח האחורי כדי להסביר למי שישב לידו משהו, הוא התחיל להסביר למרצה למה הוא טועה במה שכתב על הלוח

הוכחה. נראה שמ"ו וגם שעבור כל φ כל ש־$[\varphi]=A$ מתקיים $\ker\varphi=$ מרחב הפתרונות ב־???

תהי φ כך ש־$[\varphi]=A$ מתקיים שלכל $v\in V:\varphi(v)=Av$ (מטענה קודמת עבור φ). נניח בסיסים סטנדטרטיים:

$$x\text{ solution}\iff Ax=0\iff x=\ker\varphi$$

∎

טיפה לא נעים לי ביחס למורה. הוא די רוצה שנצליח אבל לא נראה לי כאילו הוא משקיע מספיק. או שהוא פשוט לא יודע את החומר.

הגדרה. מטריצה משוחלפת (להבדיל ממטריצה עוגיפלצת), בהינתן מטריצה $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$, המטריצה המשוחלפת תהיה $A^t :=$ $(a_{ij}) \in m_{n\times m}(F)$ (למעשה, להחליף שורות ועמודות). באנגלית – transposed.

לדוגמה.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$
$$(In)^t = In$$

טענות.

- $(A^t)^t = A$
- $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

הוכחה (עבור הראשון). אינטואיציה. נסתכל על הגודל של $(A^t)^t$. הוא יהיה כמו A כי החליף עמודות ושורות פעמיים.

אשכרה הוכחה. נסתכל על האיבר ה־i,j של $\iota = (A^t)^t$. הוא:

$$\iota_{ij} = (A^t)^B,\ c_{ij} = B_{ij} = A_{ij}$$

זה השלב שבו המרצה מציין $B = A^t$ ולכן כל $B_{x,y} = A_{y,x}$. ■

טענה. יהי $A \in M_{m\times n}(F)$ מטריצה. אז $\varphi\colon F^m \to F^n$ העתקה, אז $\varphi_A = (\lambda \ldots \lambda_m) = (\lambda \ldots \lambda_n) \cdot A$, ויתקיים $[\varphi_A] = A^t$ (בבסיסים סטנדרטיים).