זוגות סדורים

התכונה המרכזית של זוגות סדורים: $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \iff a=c\wedge b=d$.

<u>הגדרה:</u> הזוג הסדור $\langle a,b\rangle$ הוא הקבוצה $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

<u>דוגמה:</u> $\langle 1,2\rangle=\{\{1\},\{1,2\}\}$, $\langle 2,1\rangle=\{\{2\},\{1,2\}\}$

<u>טענה:</u> ההגדרה הנ"ל לזוג סדור היא טובה.

<u>הוכחה:</u> נוכיח שההגדרה $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$ מקיימת את התכונה המרכזית של זוג סדור. יהיו a,b,c,d.

($\Leftarrow$) נניח $a=c\wedge b=d$. צ"ל: $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$.
מההנחה, נובע כי $\{a\}=\{c\}\wedge\{a,b\}=\{c,d\}$, לכן $x\in\{\{a\},\{a,b\}\}\iff x\in\{\{c\},\{c,d\}\}$, וסה"כ $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

($\Rightarrow$) נניח $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$. משוויון הקבוצות נובע ש- $\{a\},\{a,b\}\in\{\{c\},\{c,d\}\}$. נפריד למקרים:

* אם $\{a\}=\{c\}$: אז $a=c$. נפריד למקרים על $\{a,b\}$:
  - אם $\{a,b\}=\{c,d\}$: אם $b=d$, סיימנו. אחרת, $b=c$, ואז $a=b=c$, ולכן $\{b,d\}\underset{b=c}{=}\{c,d\}=\{a,b\}\underset{a=b}{=}\{b,b\}\underset{\text{אין חשיבות לחזרות}}{=}\{b\}$, לכן $d=b$ וסיימנו.
  - אם $\{a,b\}=\{c\}$: אז $a=b=c$, וכמו קודם נקבל $b=d$ וסיימנו.
* אם $\{a\}=\{c,d\}$: אז $a=c=d$, ולכן $\{a,b\}=\{c\}\underset{c=d}{=}\{d\}$, ולכן $b=d$, וסה"כ $a=c\wedge b=d$.

<u>הערה:</u> ההגדרה הספציפית שבחרנו לזוג סדור אינה משמעותית.

<u>הגדרה:</u> עבור $z=\langle a,b\rangle$, מגדירים את <u>ההיטלים</u> של z על הקואורדינטה הראשונה והשנייה באופן הבא: $\pi_2(z)=b$, $\pi_1(z)=a$.

הגדרה: המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות A,B היא:

$$A\times B=\{z\in P(P(A\cup B)) \mid \exists a\in A.\exists b\in B.\ z=\langle a,b\rangle\} = \{\langle a,b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}$$

מקובל לרשום

זוהי קבוצה חוקית ע״פ עקרון ההפרדה: $z=\overbrace{\{\underbrace{\{a\}}_{\in P(A\cup B)},\underbrace{\{a,b\}}_{\in P(A\cup B)}\}}^{\subseteq P(A\cup B)}\in P(P(A\cup B))$

סימון: אם $A=B$, מקובל לרשום $A^2=A\times A$.

דוגמאות: עבור $A=\{1,2\},\ B=\{3,4\}$:

$A\times B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

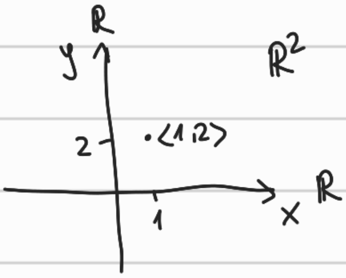
$B\times A=\{\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

$A^2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$A\times\emptyset=\emptyset\ ,\ \emptyset\times A=\emptyset$

הבחנה כללית: לכל קבוצה A, מתקיים $A\times\emptyset=\emptyset\times A=\emptyset$.

הערה: במקום לכתוב קבוצה ע״פ: $\{z\in A\times B \mid \exists a\in A.\exists b\in B.\ z=\langle a,b\rangle\wedge\varphi(a,b)\}$
ניתן לכתוב בקיצור: $\{\langle a,b\rangle\in A\times B \mid \varphi(a,b)\}$.



דוגמה: המישור הממשי הוא המכפלה הקרטזית $\mathbb{R}^2$.

למשל, אם נרצה לכתוב את קבוצת כל הנקודות במישור הממשי שבהן שיעור ה-y קטן משיעור ה-x, ניתן לכתוב זאת כך:
$\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 \mid y<x\}$

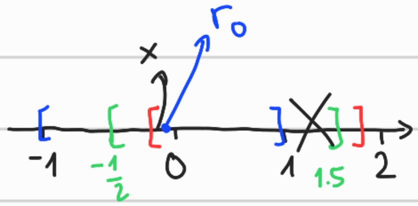
תרגילים

תזכורת: בהינתן אוסף של קבוצות $\{A_i \mid i\in I\}$, האיחוד המוכלל שלהן הוא:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i\in I.\ x\in A_i\}$$

והחיתוך המוכלל, עבור $I\neq\emptyset$, הוא: $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i\in I.\ x\in A_i\}$.

תרגיל: פשטו את הקבוצה $\bigcap_{r\in[-1,0)}[r,r+2]$.



פתרון: נוכיח $\bigcap_{r\in[-1,0)}[r,r+2] = [0,1]$.

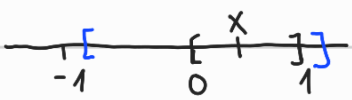
נסמן $A=\bigcap_{r\in[-1,0)}[r,r+2]$.

⊆: יהי $x\in A$. צ"ל: $x\in[0,1]$. אז לכל $r\in[-1,0)$ מתקיים $x\in[r,r+2]$.

בפרט עבור $r=-1$, ידוע ש- $x\in[r,r+2]=[-1,1]$, כלומר $x\le 1$.

נותר להוכיח ש- $x\ge 0$. נניח בשלילה ש- $x<0$. מצפיפות הממשיים בממשיים,
קיים $r_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $x<r_0<0$. בפרט, ניתן לבחור $r_1=\max\{-1,r_0\}$.
אז $-1\le r_1<0$ ובנוסף $x<r_1$, לכן $x\notin[r_1,r_1+2]$, בסתירה לכך ש- $x\in A$.
לכן $x\ge 0$, וסה"כ $x\in[0,1]$.

⊇: יהי $x\in[0,1]$, צ"ל $x\in A$. יהי $r\in[-1,0)$. נוכיח ש- $x\in[r,r+2]$.



אז מתקיים $x\ge 0\underset{\substack{\downarrow\\ r\in[-1,0)}}{>}r$.

מצד שני, מאחר ש- $r\ge -1$, מתקיים $r+2\ge -1+2 = 1\underset{\substack{\downarrow\\ x\in[0,1]}}{\ge} x$

כלומר $x\le r+2$. סה"כ, $x\in[r,r+2]$. זה נכון לכל $r\in[-1,0)$, ולכן $x\in A$.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: לכל A,B,C קבוצות, מתקיים
$A\cup(B\times C) = (A\cup B)\times(A\cup C)$.

תזכורת: $A\times B = \{\langle a,b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}$

פתרון: נפריך ע"י דוגמה נגדית: $A=\{1\},\ B=\{2\},\ C=\{3\}$.

מתקיים $1\in A\cup(B\times C)$, אבל

$1\notin(A\cup B)\times(A\cup C) = \{1,2\}\times\{1,3\} = \{\langle1,1\rangle,\langle1,3\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,3\rangle\}$

<u>תרגיל:</u> יהיו A,B,C קבוצות. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על A,B,C

כך ש- $C\times C = (A\times A)\cup(B\times B)$.

<u>רעיון:</u> הבחנות: * $C\subseteq A\cup B$

* $A,B\subseteq C$

* $A\subseteq B \vee B\subseteq A$, אחרת, קיימים $a\in A\setminus B,\ b\in B\setminus A$.

אז $\langle a,b\rangle\in C\times C$ שייך לא לצד שמאל ולא לצד ימין.

נסו לחשוב על תנאי הכרחי ומספיק לאור ההבחנות הנ"ל.

רעיון כללי! כדי להשתמש בזה צריך להוכיח זאת.