מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 21

להגשה עד יום שלישי 18.6.24 בשעה 23:59. בסוף הקובץ מצורפים תרגילים נוספים לדוגמה, פתורים.

1. הוכיחו קומבינטורית את נוסחאות הנסיגה הבאות עבור D_n (מספר התמורות ללא נקודות שבת על n איברים):

(א) $D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$

(ב) $D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$

2. חשבו את מספר ההילוכים מ־$(0,0)$ ל־$(2n,0)$ שצעדיהם הם $(+1,+1)$ ו־$(+1,-1)$ בלבד, ושלעולם לא עוברים אל מתחת לציר ה־x.

3. נסמן ב־G_n את אוסף הסדרות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ המקיימות $a_i \in \{-1,1\}$ ובנוסף $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$. נקרא להן סדרות טובות.

(א) כמה סדרות טובות יש?

(ב) נסמן ב־$P_n \subseteq G_n$ את הסדרות הטובות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ המקיימות בנוסף כי לכל $1 \le k < 2n$, $\sum_{i=1}^{k} a_i > 0$. מצאו את $|P_n|$.

(ג) לכל $1 \le k \le n$ נסמן ב־$Q_{n,k} \subseteq G_n$ את אוסף הסדרות הטובות $(a_i)_{i=1}^{2n}$ עבורן k הינו המינימלי עבורו $\sum_{i=1}^{2k} a_i = 0$. מצאו את $|Q_{n,k}|$.

4. חשבו את מספר הסדרות $a_1,...,a_{2017}$ המקיימות את שלושת התנאים:

(א) $a_i \in \{-1,1\}$ לכל i, וגם

(ב) $\sum_{i=1}^{2017} a_i = 7$, וגם

(ג) $\sum_{i=1}^{j} a_i > 0$ לכל $1 \le j \le 2017$.

5.

(א) בשיעור הוכחנו את הנוסחה הסגורה עבור מספר קטלן ה־n־י: $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$. פשטו אלגברית את הנוסחה הסגורה הנ"ל והסיקו את השוויונות הבאים:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$$

(ב) הוכיחו בדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2n+1}{n}$$

6. מהו מספר הסדרות $x_1, x_2, ..., x_{4n}$ שבהן $x_i \in \{-1,1\}$ לכל i, ומתקיים

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = \sum_{i=1}^{4n} x_i = 0$$

וכן לכל $1 \le j < 2n$ מתקיים $\sum_{i=1}^{j} x_i > 0$, ולכל $2n \le j \le 4n$ מתקיים $\sum_{i=1}^{j} x_j \ge 0$?

7. בבניין רב קומות, הקומות ממוספרות לפי הסדר במספרים $-2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 50$ (הקומות $-2, -1$ הן קומות חנייה, הקומה 0 היא קומת הקרקע, וישנן עוד 50 קומות מעליה).

חתול ישן ב־1 בינואר בקומה 0 ובכל יום בהמשך חודש ינואר עובר לנמנם בקומה סמוכה (גבוהה יותר או נמוכה יותר). נסמן ב־s_i את מספר הקומה בה החתול נמנם ביום מספר i ($1 \le i \le 31$). בפרט, $s_1 = 0$, ולכל $1 \le i \le 30$, $s_{i+1} \in \{s_i - 1, s_i + 1\}$. מהו מספר הסדרות האפשריות $(s_1, s_2, ..., s_{31})$ שבהן $s_{31} = 6$?

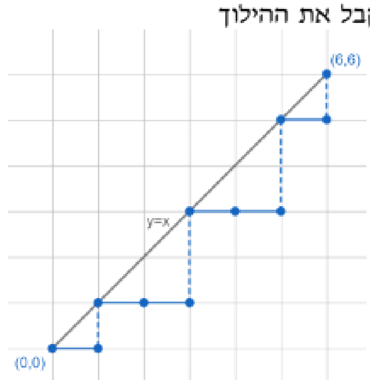
תרגילים פתורים (לא להגשה)

תרגיל כרטיס לסרט עולה 10 שקלים. $2n$ אנשים עומדים בתור לקולנוע, ל־n מתוכם מטבע של 10 שקלים, ול־n הנותרים שטר של 20 שקלים. בתחילת הערב הקופה ריקה, בכמה דרכים ניתן לסדר את האנשים בתור כך שבכל שלב יהיה מספיק עודף?

פתרון נגדיר העתקה בין הסידורים הטובים לבין סדרות של $\{-1,1\}$ באורך $2n$ ע"י $10 \mapsto 1$, $20 \mapsto -1$.
נשים לב כי העתקה זו שולחת כל סידור טוב לסדרה מאוזנת. אכן, נניח כי סידור טוב כלשהו נשלח לסדרה $a_1,...,a_{2n}$ (האינדקסים הינם לפי סדר הופעת האנשים בתור), ברור כי $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0$. בנוסף לכל $1 \le j \le 2n$, $\sum_{i=1}^{j} a_i$ הינו מספר המטבעות בקופה לאחר מכירת הכרטיסים ל־j האנשים הראשונים בתור ומכיוון שמדובר בסידור טוב $\sum_{i=1}^{j} a_i \ge 0$.
העתקה זו הינה העתקה חח"ע ועל (בדקו!) בין הסידורים הטובים וקבוצת הסדרות המאוזנות על $\{-1,1\}$ באורך $2n$, לכן מספר הסידורים הטובים הוא C_n.

תרגיל מהו מספר הסדרות העולות $a_1 \le \ldots \le a_n$ כך שלכל $i \in [n]$, a_i שלם ומתקיים $0 \le a_i < i$?

פתרון לכל סדרה $(a_1,...,a_n)$ כנ"ל נתאים הילוך מונוטוני באופן הבא:
לכל $i \in [n]$ נתאים צעד ימינה $(i-1,a_i) \to (i,a_i)$, נשלים את ההילוך עם צעדים למעלה (לכל $0 \le i \le n$ נוסיף צעדים $(i,a_i) \to (i,a_i+1) \to ... \to (i,a_{i+1})$ כאשר $a_0 = 0$, $a_{n+1} = n$), נשים לב שזה אפשרי משום שהסדרה מונוטונית עולה.
למשל עבור הסדרה $0,1,1,3,3,5$ נקבל את ההילוך



מכיוון ש־$a_i \le i-1$ לכל i, ההילוך שקיבלנו לא חוצה את הישר $y=x$, כלומר קיבלנו התאמה בין אוסף הסדרות הנתונות לבין הילוכים מונוטוניים מ־$(0,0)$ ל־(n,n) שאינם חוצים את הישר $y=x$.
התאמה זו הינה חח"ע ועל (כל הילוך מונוטוני שלא חוצה את $y=x$ ניתן "להחזיר" לסדרה שנשלחה אליו, לכל $i \in [n]$ נגדיר את a_i להיות ה־k המקסימלי כך שההילוך עובר בנקודה $(i-1,k)$).
לכן לפי התרגיל הקודם מספר הסדרות הנ"ל הוא C_n.

תרגיל: כמה הילוכי שריג (עם צעדים ימינה ולמעלה) מ־$(0,0)$ ל־$(8,8)$ ישנם, שאינם נוגעים בישר $y=x+4$?

פתרון: אנחנו יכולים, ע`י הזזה, להסתכל על זה כעל הילוכים $(12,8) \to (4,0)$ שאינם נוגעים בישר $y=x$. נבדוק כמה כאלה יש.
תחילה נבדוק כמה הילוכים $(12,8) \to (4,0)$ יש באופן כללי: מתוך 16 הצעדים צריך לבחור 8 שיהיו ימינה, והשאר למעלה, לכן כל בחירה של מיקום 8 הצעדים למעלה (ללא חשיבות לסדר כי כל ההילוכים למעלה נראים אותו דבר, וללא חזרה כי אי אפשר להגדיר במיקום ספציפי יותר מצעד אחד) מגדירה הילוך. לכן בסה`כ מספר ההילוכים הכללי הוא $\binom{16}{8}$.

כמה הילוכים לא חוקיים יש? נתאים כל הילוך לא חוקי $(12,8) \to (4,0)$, להילוך כללי $(8,12) \to (4,0)$ ע`י שיקוף ההילוך הנתון בישר $y=x$ החל מנקודת הנגיעה הראשונה בישר (כלומר, החל מנק' הנגיעה הראשונה כל צעד למעלה הופך לצעד ימינה, וימינה ללמעלה). זו התאמה הפיכה כי יש לה התאמה הופכית, זו המשקפת כנ`ל מנק' הנגיעה הראשונה (ובהילוכים $(8,12) \to (4,0)$ תמיד יש נגיעה). קיבלנו שמס' ההילוכים הלא חוקיים הוא כמספר ההילוכים הכללי $(8,12) \to (4,0)$ וכאן צריך לבחור 4 צעדי ימינה מתוך 16 הצעדים שישנם, כלומר $\binom{16}{4}$.

בסך הכל, כמות ההילוכים החוקיים היא $\binom{16}{8} - \binom{16}{4}$.