מתמטיקה בדידה - שחר פרץ - תרגיל בית 9

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

ת.ז.: 334558962

תאריך הגשה: 16.1.2024

~~~ תרגיל בית 9 ~~~

שאלה 1

סעיף א' - סתירה

נתון: f הפיכה משמאל

צ.ל.: להפריך את יחידות ההופכית משמאל של f

הוכחה: תהי פונקציה $f\colon A \to B$ הפיכה משמאל, ויהיו $g_1, g_2\colon B \to A$ הופכיות משמאל של f, נשלול $g_1 = g_2$. נבחר:

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, f = \{\langle 1, 1, \langle 2, 2\rangle\}$$
$$g_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}, g_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$$

צ.ל. $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} = g_1 \circ f = g_2 \circ f = id_A$ (נחשב ונמצא שזה נכון) וגם $g_1 \neq g_2$ (נניח בשלילה שוויון, לפיכך לפי שוויון פונקציות נסיק שלכל $b \in B$ מתקיים $g_1(b) = g_2(b)$ ובפרט $b = 3$ אך $2 \neq 1$ וזו סתירה), וכל אשר הכרחי ומספיק כדי לשלול את הגרירה הוכח כדרוש (לפי כלל $\neg(A \to B) \iff A \land \neg B$).

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב' - סתירה

נתון: f הפיכה מימין

צ.ל.: סתירת יחידות קיום הופכית מימין של f

הוכחה: נסתור ע"י הבאת דוגמה נגדית. נבחר פונקציה $f = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$, וכמו כן $A = \{0, 1\}$ ו־$B = \{0\}$. נבחר $g_1 = \{\langle 0,0\rangle\}, g_2 = \{\langle 0,1\rangle\}$. נניח בשלילה $g_1 = g_2$, נקבל $\langle 0,0\rangle = \langle 0,1\rangle$ כלומר לפי התכונה המרכזית $0 \neq 1$ וזו סתירה, סה"כ $g_1 \neq g_2$. כמו כן, $g_1, g_2 \in B \to A$ וגם $g_1 \circ f = \{\langle 0,0\rangle\} = id_B = g_2 \circ f$, כלומר הראשי מתקיים אך הנגרר לו וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■
~~~

סעיף ג׳ - סתירה

צ.ל.: לסתור קיום $g\colon B \to A$ כך ש־$g \circ f = id_A$ אמ"מ f הפיכה.

הוכחה: נסתור את הגרירה בין הקיום לטענה ש־f הפיכה. נמצא דוגמה נגדית. נבחר $f = \{\langle 0,0 \rangle\}$ אך נבחר את B להיות $\{0,1\}$. נוכיח שהנגרר פסוק שקר:

נניח בשלילה f הפיכה משמאל, נסיק קיום g כך ש־$f \circ g = id_B$, ולפי כלל אטא, $f(g(0)) = 0 \wedge f(g(1)) = 1$. זו סתירה כי לא קיים אף ערך (בפרט $g(1)$) עבורו $f(x) = 1$, ע"פ הגדרתה. סה"כ f אינה הפיכה משמאל והנגרר פסוק שקר.

נוכיח שהראשי פסוק אמת:

נבחר $g = \{\langle 0,0 \rangle\}$, כלומר $g \circ f = \{\langle 0,0 \rangle\} = id_A$ משמע הראשי מתקיים, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ד׳ - סתירה

צ.ל.: לסתור קיום $g\colon B \to A$ אמ"מ $f \circ g = id_B$ אמ"מ f הפיכה.

הוכחה: נסתור את הגרירה בין הקיום לטענה ש־f הפיכה. נמצא דוגמה נגדית. נבחר $f = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}$ ונבחר $B = \{0\}$. הפונקציה אינה חח"ע, אמ"מ היא אינה הפיכה משמאל (לפי סעיף (1)(ה) שהוכח בלי גרירה מטענה זו), כלומר f אינה הפיכה משמאל ובפרט לא הפיכה כלל והנגרר פסוק שקר. נבחר $g = \{\langle 0,0 \rangle\}$, כלומר $f \circ g = \{\langle 0,0 \rangle\} = id_B$ משמע הראשי מתקיים, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ה׳ - הוכחה

צ.ל.: f חח"ע אמ"מ קיימת פונקציה $g\colon B \to A$ וגם $g \circ f = id_A$ (או בנוסח שקול ע"פ הגדרה: f הפיכה משמאל).

הוכחה: נוכיח את כל אחת מהגרירות בנפרד.

- גרירה ראשונה: נניח f חח"ע ונוכיח קיום $g\colon B \to A$ עבורה $g \circ f = id_A$. ידוע f חח"ע וכמו כן ידוע (לפי הגדרה) ש־f מלאה ב־$\operatorname{Im}(f)$, לכן f^{-1} פונקציה על $\operatorname{Im}(f)$. נבחר $g = f^{-1}$. נוכיח $g \circ f = id_A$, באמצעות כלל η:
  - שוויון תחום: f מלאה ב־A ע"פ הגדרתה, ולכן $g \circ f$ מלאה ב־A לפי משפט נתון, וכמו כן על id_A, סה"כ $\operatorname{dom}(id_A) = \operatorname{dom}(g \circ f)$.
  - שוויון איברים: יהי $x \in A$, נוכיח $(g \circ f)(x) = id_A(x)$. ע"פ הגדרת הפונקציות, צ.ל. באופן שקול $g(f(x)) = x$. נתבונן ב־$y := f(x)$, שע"פ הגדרה נמצא ב־$\operatorname{Im}(f)$, ולכן $g(y)$ מוגדר, כמו כן לפי הגדרת פונקציה הופכית $f(g(y)) = x$ ומשום ש־f חח"ע סה"כ $g(y) = x$ כדרוש.
- גרירה שנייה: נניח קיום פונקציה $g\colon B \to A$ ההופכית משמאל, ונוכיח f חח"ע. נניח בשלילה ש־f לא חח"ע, אזי קיימים $a_1, a_2 \in A \wedge a_1 \neq a_2$ עבורם $f(a_1) = f(a_2)$. ע"פ הגדרת פונקציה הופכית $g \circ f = id_A$, או בנוסח שקול לפי כלל η, הרכבת פונקציות והגדרת יחס הזהות, $\forall a \in A. g(f(a)) = a$, ובפרט על a_1, a_2, כלומר $g(f(a_1)) = a_1 \wedge g(f(a_2)) = a_2$. מהנחת השלילה $y := f(a_1) = f(a_2)$ לכן $g(y) = a_1 \wedge g(y) = a_2$, כלומר g לא ח"ע ונגרר g לא פונקציה וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 2

סעיף א'

נתון:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^5+1}, f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר פונקציה הופכית $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ וגם $g(x)=\sqrt[5]{x^3-1}$. נוכיח את שני התנאים שיחדיו הכרחיים ומספיקים (את שניהם אוכיח באמצעות כלל η) :

- נוכיח $g\circ f=id_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)=g(f(x))&=\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{x^5+1}\right)^3-1}\\&=\sqrt[5]{x^5+-1}=x\\&=id_{\mathbb{R}}(x)\end{aligned}$$

- נוכיח $f\circ g=id_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)=f(g(x))&=\sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{x^3-1}\right)^3+1}\\&=\sqrt[3]{x^3-1+1}=x\\&=id_{\mathbb{R}}(x)\end{aligned}$$

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב'

נתון:

$$f=\lambda\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2.\langle x+y,x-y\rangle, f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת לפי $g=\lambda\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2.\langle x-y,x+y\rangle$. נוכיח לפי ההגדרה של פונקציה הפיכה (בשני המקרים אשתמש בכלל η):

- $g\circ f=id_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\langle x,y\rangle)=g(f(\langle x,y\rangle))&=g(\langle x+y,x-y\rangle) && (\beta\text{ rule})\\&=\langle x+y-y,x-y+y\rangle=\langle x,y\rangle && (\beta\text{ rule})\\&=id_{\mathbb{R}^2}(\langle x,y\rangle)\end{aligned}$$

- $f\circ g=id_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(\langle x,y\rangle) = f(g(\langle x,y\rangle) &= f(\langle x-y, x+y\rangle) && (\beta \text{ rule})\\ &= \langle x-y+y, x+y-y\rangle = \langle x,y\rangle && (\beta \text{ rule})\\ &= id_{\mathbb{R}^2}(\langle x,y\rangle)\end{aligned}$$

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף ג׳

נתון:

$$f = \lambda h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{R}.h(x+1), f\colon (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g\colon (\mathbb{R}\to\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ כך ש־$g = \lambda h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.\lambda x \in \mathbb{R}.h(x-1)$. נוכיח את אשר דרוש מההגדרה, על בסיס כלל η.

- $g\circ f = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(h) = g(f(h)) &= g(\lambda x \in \mathbb{R}.h(x-1)) && (\beta \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.(\lambda x \in \mathbb{R}.h(x-1))(y+1) && (\beta \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.(\lambda x \in \mathbb{R}.h(x))(x) && (\alpha \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.h(y) && (\beta \text{ rule})\\ &= h && (\eta \text{ rule})\\ &= id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(h)\end{aligned}$$

- $f\circ g = id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(h) = g(f(h)) &= f(\lambda g \in \mathbb{R}.h(x+1)) && (\beta \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.(\lambda x \in \mathbb{R}.h(x+1))(y-1) && (\beta \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.(\lambda x \in \mathbb{R}.h(x))(x) && (\alpha \text{ rule})\\ &= \lambda y \in \mathbb{R}.h(y) && (\beta \text{ rule})\\ &= h && (\eta \text{ rule})\\ &= id_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(h)\end{aligned}$$

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

סעיף ד׳

נתון:

$$\mathrm{f} = \lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases}\frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}}\\ -\frac{n+1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}, f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z}$$

צ.ל.: f הפיכה

הוכחה: נבחר $g\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ המוגדר לפי:

$$g = \lambda z \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 2z & z \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ -2z-1 & z \in \mathbb{Z}_{<0} \end{cases}$$

נוכיח את אשר נדרש מההגדרה:

- $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$: נשתמש בחוק η (התחום שווה). יהי $z \in \mathbb{Z}$, נוכיח $(f \circ g)(z) = id_{\mathbb{Z}}(z) = z$. נפלג למקרים;
  - אם $z \geq 0$ אז $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(2z)$. לפי הגדרה $2|z$ ולכן $2z \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. סה"כ, השוויון ממשיך ונקבל $\cdots = f(2z) = \frac{2z}{2} = z$ כדרוש.
  - אם $z < 0$ אז $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(-2z-1)$. באופן דומה, $-2z \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, ולכן (אני לא רואה סיבה להוכיח את זה בבדידה) $-2z-1 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ וסה"כ, השוויון ממשיך עד לקבלת $\cdots = f(-2z-1) = -\frac{-2z-1+1}{2} = z$ כדרוש.
- $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$: נשתמש בחוק η (התחום שווה). יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $(g \circ f)(n) = id_{\mathbb{N}}(n) = n$. נפלג למקרים;
  - אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אז $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = 2n$. חילוק מספרים $n > 0, 2$ גדול מ־0 גם הוא ולכן $\frac{n}{2} > 0$. לפיכך, המשך השוויון חייב להיות $\cdots = g(\frac{n}{2}) = 2 \cdot \frac{n}{2} = n$ כדרוש.
  - אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אז $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = -\frac{n+1}{2}$. ידועה סגירות על קבוצת הממשיים הגדולים מ־0, לכן $\frac{n+1}{2} \geq 0$ ולכן ההופכי מקיים $-\frac{n+1}{2} < 0$, ונגרר $\cdots = g(-\frac{n+1}{2}) = -2(-\frac{n+1}{2}) - 1 = n$ כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף ה'

נתון:

$$Cu\colon ((A \times B) \to C) \to (A \to (BC))$$
$$Cu = \lambda f \in (A \times B) \to C.\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle)$$

צ.ל.: Cu הפיכה

הוכחה: נבחר:

$$F\colon (A \to (B \to C)) \to ((A \times B) \to C)$$
$$F = \lambda h \in (A \to (B \to C)).\lambda a \in A, b \in B.h(a)(b)$$

נוכיח את אשר דרוש, בעיקר על בסיס תחשיב למדא.

- $F \circ Cu = id_{(A \times B) \to C}$: לפי כלל η והגדרת יחס הזהות, יהי $f\colon (A \times B) \to C$, צ.ל. $(F \circ Cu)(f) = f$. נפתח לפי תחשיב למדא;

$$\begin{aligned}
(F \circ Cu)(f) &= F(Cu(f)) \\
&= F(\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle)) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.(\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle))(a)(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.(\lambda b \in B.f(\langle a, b \rangle))(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a \in A, b \in B.f(\langle a, b \rangle) && (\beta \text{ rule}) \\
&= f && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}$$

- $Cu \circ F = id_{A\to(B\to C)}$: לפי כלל η והגדרת יחס הזהות, יהי $f\colon (A\to(B\to C))$, צ.ל. $(Cu\circ F)(f)=f$. נפתח לפי תחשיב למדא:

$$\begin{aligned}
(Cu\circ F)(f) &= Cu(F(f)) \\
&= Cu(\lambda a\in A, b\in B.f(a)(b)\rangle)) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a\in A.\lambda b\in B.(\lambda a\in A, b\in B.f(a)(b)\rangle))(\langle a,b\rangle) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a\in A.\lambda b\in B.f(a)(b) && (\beta \text{ rule}) \\
&= \lambda a\in A.f(a) && (\eta \text{ rule}) \\
&= f && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}$$

סה"כ שתי התנאים ההכרחיים ומספיקים הוכחו, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 3

סעיף א'

נתון:

$$f=\lambda\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}}).A\cup B$$

טענה: $\text{dom}(f)=\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}}), \text{range}(f)=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, הפונקציה חח"ע, $\text{Im}(f)=\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

צ.ל.: להוכיח הפונקציה הפיכה

הוכחה: נבחר פונקציה $g\colon\mathcal{P}(\mathbb{N})\to(\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$ המוגדרת לפי:

$$g=\lambda N\in\mathcal{P}(\mathbb{N}).\langle\{n\in N.n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\},\{n\in N.n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\}\rangle$$

נוכיח שהיא הפונקציה ההופכית:

- $g\circ f=id_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$: התחום מתאים, נוכיח את אשר נשאר בכלל η; יהי $N\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, צ.ל. $g(f(N))=N$ (לפי הגדרת הרכבת פונקציות ויחס הזהות). נתבונן בהרכבה, לפי כלל β נקבל:

$$\cdots=g(\langle A:=\{n\in N.n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\},B:=\{n\in N.n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\}\rangle)$$

לפי עקרון ההפרדה, $x\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\implies x\in B \wedge x\in\mathbb{N}_{\text{even}}\implies x\in A$, לכן נסיק $A\cup B=\cdots$. נוכיח ש־$A\cup B=N$ באמצעות הכלה דו כיוונית:

  - יהי $x\in A\cup B$, נגרר $x\in A\vee x\in B$ ולפי עקרון ההפרדה נגרר $x\in N\vee x\in N$ כלומר $x\in N$ כדרוש.
  - יהי $x\in N$, נגרר $x\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\vee x\in\mathbb{N}_{\text{even}}$, בה"כ $x\in\mathbb{N}_{\text{even}}$. נניח בשלילה $x\notin A$, נסיק $x\notin N\wedge x\notin\mathbb{N}_{\text{even}}$, וזו סתירה.

  סה"כ $A\cup B=N$ כלומר מתוך טרנזיטיביות הזהות $g(f(N))=N$ כדרוש.

- $f\circ g=id_{\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})}$: התחום מתאים, נוכיח את אשר נשאר בכלל η: יהיו קבוצות $\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}})$ כלומר מתוך הגדרת כפל קרטזי וקבוצת חזקה אמ"מ

$A \subseteq \mathbb{N}_{\text{even}} \land B \subseteq \mathbb{N}_{\text{odd}}$. צ.ל. $f(g(\langle A,B \rangle)) = \langle A,B \rangle$, מתוך הרכבת פונקציות והגדרת יחס הזהות. לפי כלל β, ישנו שוויון ל־;

$$\cdots = f(A \cup B) = \langle C := \{n \in A \cup B . n \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}, D := \{n \in A \cup B . n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\} \rangle$$

וסה"כ צ.ל. $A = C \land B = D$, בה"כ נוכיח $A = C$ באמצעות הכלה דו כיוונית:

- יהי $x \in A$, נוכיח $x \in C$. לפי הגדרה, צ.ל. $x \in A \cup B \land x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר צ.ל. $(x \in A \lor x \in B) \land (x \in \mathbb{N}_{\text{even}})$. התנאי הראשון מתקיים לפי הנתון, $x \in A$, והשני לפי הגדרת A שע"פ הגדרת קבוצת חזקה גוררת $x \in \mathbb{N}_{\text{even}} \implies x \in A$.
- יהי $x \in C$, נוכיח $x \in A$. לפי הגדרה, ידוע $x \in A \cup B \land x \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר $x \in A \lor x \in B$. נניח בשלילה $x \in B$, נגרר לפי הגדרת קבוצת חזקה $x \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \implies x \in B$, כלומר $x \in \mathbb{N}_{\text{even}} \land x \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ וזו סתירה, אזי $(x \in A \lor x \in B) \land x \notin B$ או באופן שקול $x \in A$ כדרוש.

סה"כ הפונקציה הופכית מימין ומשאל, כלומר היא הפיכה. מש"ל.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב'

נתון:

$$f = \lambda g \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} . \lambda n \in \mathbb{N} . g(\{n\})$$

טענה: $\text{dom}(f) = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \text{range}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, הפונקציה לא חח"ע.

צ.ל.: הפונקציה לא חח"ע.

הוכחה: נניח בשלילה שהיא חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר $g_1, g_2 \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ המוגדרות לפי:

$$g_1 = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) . \begin{cases} \max\{N\} & |N| = 1 \\ \min\{N\} & |N| \geq 2 \end{cases}$$
$$g_2 = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) . \max\{N\}$$

על מנת לסתור את הגרירה, יש להוכיח שניים: $g_1 \neq g_2 \land f(g_1)) = f(g_2)$;

- $g_1 \neq g_2$: נניח בשלילה שכן הם פני הדברים, אזי לפי כלל η, נגרר בין היתר יהי $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g_1(x) = g_2(x)$, אך בניגוד לכך שעבור $x = \{1,2\}$ נקבע לפי כלל β ש־ $g_1(x) = 1, g_2(x) = 2$ אך $2 \neq 1$ וזו סתירה.
- $f(g_1) = f(g_2)$: נוכיח בעזרת כלל η. ידוע $\text{dom}(f(g_1)) = \text{dom}(f(g_2)) = \mathbb{N}$ לפי כלל η והגדרת כתיב למדא, ולכן נשאר להוכיח יהי $x \in \mathbb{N}$, צ.ל. $f(g_1)(x) = f(g_2)(x)$. לפי כלל β וכלל η, צ.ל. יהי $n \in \mathbb{N}$, נגרר $g_1(\{n\}) = g_2(\{n\})$. לפי הגדרת סיגילטון, ולפי כלל β, נסיק $g_1(\{n\}) = \max\{n\} = n$, וכמו כן לפי אותו בכלל $g_2(\{n\}) = \max\{n\}$ וסה"כ לפי טרנזיטיביות $g_1(\{n\}) = g_2(\{n\})$ כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ג'

נתון: $f = \lambda h \in \mathbb{N} \to \mathbb{N} . \lambda n \in \mathbb{N} . \sum_{i=0}^{n} h(i)$

טענה: $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \mathrm{range}(f) = \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, הפונקציה לא חח"ע.

צ.ל.: הפונקציה לא חח"ע.

הוכחה: היה לנו כבר את התרגיל הזה בשיעורי הבית הקודמים (3)(ו), מועתקת ההוכחה (עם כמה שיפורים קטנים):

יהיו $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $f_1 \neq f_2$. נניח בשלילה שהפונקציה חח"ע, ונסיק $G(f_1) = G(f_2)$, כלומר, לפי כללי β, η:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_1(i) = n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^{n} .f_2(i)$$

לפי כלל η, $f_1 \neq f_2$ שקול לקיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$f_1(m) \neq f_2(m)$. נסכום עד $m \in \mathbb{N}$ הנמוך ביותר המקיים תכונה זו. משום שהוא הנמוך ביותר, $\forall t < m \in \mathbb{N}. f_1(t) = f_2(t)$, ובפרט, עבור $t = m - 1$, נסיק $f_1(t) = f_2(t)$. נטען $\sum_{i=0}^{t} f_1(i) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i)$, ונגיע לפסוק אמת כי $i < t$ ומטרנזיטיביות יחס הסדר $i < m$, ובפרט $f_1(i) = f_2(i)$, וסכימת מספרים זהים זהה (מתוך יחידות יחס החיבור). עתה, נתבונן בסכום עד m, ונחיל את הנחת השלילה שלנו:

$$\sum_{i=0}^{m} f_1(i) = \sum_{i=0}^{m} f_2(i)$$
$$\sum_{i=0}^{t} f_1(i) + f_1(m) = \sum_{i=0}^{t} f_2(i) + f_2(m)$$
$$f_1(m) = f_2(m)$$

וזו סתירה.

$\blacksquare$ $\mathscr{Q.E.D.}$

סעיף ד'

נתון: $f = \lambda g \in (A \to B) \to C. \lambda a \in A. \lambda b \in B. g(\lambda a \in A.b)$, $A, B, C \neq \emptyset$

טענה: $\mathrm{dom}(f) = (A \to B) \to C, \mathrm{range}(f) = A \to (B \to C)$, f לא חח"ע.

צ.ל.: f לא חח"ע

הוכחה: נבחר $g_1, g_2 \colon (A \to B) \to C$ המוגדרות בכתיב למדא לפי:

$$g_1 = \lambda h \in A \to B. h(0)$$
$$g_2 = \lambda h \in A \to B. h(1)$$

וכמו כן נבחר את C להיות $C = \mathrm{range}(g_1) \cup \mathrm{range}(g_2)$ ואת A, B להיות $A = \{1, 2\}, B = \mathbb{N}$. נניח בשלילה ש־$f$ חח"ע, כלומר לכל $f(g_1) \neq f(g_2) \implies g_1 \neq g_2$. כדי לשלול זאת, נוכיח $g_1 \neq g_2 \wedge f(g_1) = f(g_2)$.

- $g_1 \neq g_2$: נניח בשלילה שהן שוות, כלומר לפי כלל η לכל $h \colon A \to B$ מתקיים $g_1(h) = g_2(h)$ ובפרט עבור $h = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$ אך בניגוד לכך $g_1(h) = 0 \neq 1 = g_2(h)$.
- $f(g_1) = f(g_2)$: או באופן שקול לפי כלל β צ.ל.:

$$
\begin{aligned}
& f(g_1) = f(g_2) \\
\iff & \lambda a \in A.\lambda b \in B.g_1(\lambda a \in A.b) = \lambda a \in A.\lambda b \in B.g_2(\lambda a \in A.b) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & \forall a \in A, b \in B.g_1(\lambda a \in A.b) = g_2(\lambda a \in A.B) && (\eta \text{ rule}) \\
\iff & \forall a \in A, b \in B, c \in C.(\lambda a \in A.b)(c) = (\lambda a \in b)(c) && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & \forall b \in B.b = b && (\eta \text{ rule})
\end{aligned}
$$

אשר מהווה פסוק אמת.

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

שאלה 4

נתון: תהי $A \neq \emptyset$, נניח קיום $f\colon (A \times A) \to A$ זיווג, ויהי $n \in \mathbb{N}_+$, כאשר כפל קרטזי של קבוצה מוגדר לפי:

$$A^n = \underbrace{A \times ... \times A}_{n \text{ times}} = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid \forall 1 \leq i \leq n.a_i \in A\}$$

צ.ל.: נוכיח קיום זיווג $f_n\colon A^n \to A$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה

- בסיס $(n = 1)$: צ.ל. קיום זיווג $f_n\colon A^n \to A$, ידוע $A^1 = \{\langle a \rangle \mid a \in A\}$, או באופן שקול לכל $a_1 \in A^2$ קיים $a \in A$ עבורו $a_1 = \langle a \rangle$. נתבונן בפונקציה $f_1 = \lambda a_1 \in A^1.f(\pi_1(a_1))$ ונטען להיותה זיווג, נוכיח;
  - על: יהי $a \in A$, נוכיח קיום $a_1 \in A^1$ עבורו $f_1(a_1) = a$. נבחר $a_1 = \langle f^{-1}(a) \rangle$ (ידוע f הפיכה כי היא זיווג) אשר מקיים $\langle f^{-1}(a) \rangle \in A_1$ או באופן שקול $f^{-1}(a) \in A$, כי f על ולכן f^{-1} מלאה ב־A. לכן $f_1(a_1) = f(\pi_1(\langle f^{-1}(a) \rangle)) = f(f^{-1}(a)) = a$ כדרוש.
  - חח"ע: יהי $a_1, a_2 \in A^1$ ולכן קיימים $b_1, b_2 \in A$ עבורם $\langle b_1 \rangle = a_1 \wedge \langle b_2 \rangle = a_2$. נניח $f_1(a_1) = f(a_2)$ ונניח בשלילה $a_1 = a_2$, ולכן לפי טרנזיטיביות + התכונה המרכזית של n־יה סדורה נגרר $b_1 \neq b_2$. סה"כ:

$$
\begin{aligned}
& f(a_1) = f(a_2) \\
\iff & f(\pi_1(a_1)) = f(\pi_1(a_2)) \\
\iff & f(b_1) = f(b_2)
\end{aligned}
$$

  ומשום ש־f חח"ע נגרר $b_1 = b_2$, ולכן $b_1 = b_2 \wedge b_1 \neq b_2$ והגענו לסתירה.

- צעד $(n > 1)$: (הערה: נגדיר $a_n = \pi_n(a)$) נניח שקיים זיווג $f_n\colon A^n \to A$, ונוכיח קיום זיווג $f_{n+1}\colon A^{n+1} \to A$. נטען שהפונקציה f_n המוגדרת להלן זיווג:

$$f_n = \lambda a \in A^n.\langle f_n(a_1), f_n(a_2), \ldots, f_n(a_n), f(a_{n+1}) \rangle$$

  נוכיח את אשר הכרחי למספיק להיות f_{n+1} זיווג:
  - על: יהי $y \in A$, נוכיח קיום $a \in A^{n+1}$ עבורו $f_n(a) = y$. נבחר באופן דומה:

$$y = \langle f_n^{-1}(y_1), \ldots, f_n^{-1}(y_n), f(y_{n+1}) \rangle$$

  (הערה: f_n^{-1} פונקציה לפי הנחת האינדוקציה שאומרת f_n זיווג, או באופן שקול, f_n הפיך) נציב ונקבל:

$$f_{n+1}(y) = \langle f_n(f_n^{-1}(y_1)), \ldots, f_n(f_n^{-1}(y_n), f(f^{-1}(y_{n+1}))\rangle$$
$$= \langle y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}\rangle = y \qquad \mathscr{Q.E.F.}$$

- חח"ע: יהי $y_1, y_2 \in A$, נניח $y_1 \neq y_2$, נניח בשלילה $f_{n+1}(y_1) \neq f_{n+1}(y_2)$ ונגיע לסתירה. לפי הנחת השלילה:

$$\begin{aligned} & f_{n+1}(y_1) = f_{n+1}(y_2) \\ \Longleftrightarrow & \langle f_n(y_{1_1}), f_n(y_{1_2}), \ldots, f_n(y_{1_n}), f(y_{1_{n+1}})\rangle = \\ & \langle f_n(y_{2_1}), f_n(y_{2_2}), \ldots, f_n(y_{2_n}), f(y_{2_{n+1}})\rangle \qquad (\beta \text{ rule}) \end{aligned}$$

ולכן, לפי התכונה המרכזית של n־יה סדורה, $\forall m \in \mathbb{N}.f_n(y_{1_m}) = f_n(y_{2_m})$, ומשום ש־$f_n$ חח"ע מתוך הנחת האינדוקציה נסיק $\forall m \in \mathbb{N}.y_{1m} = y_{2m}$ ולכן מתוך התכונה המרכזית $y_1 = y_2$ וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 5

סעיף א׳

צ.ל.: לשלול

$$\forall f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.\exists n \in \mathbb{N}_+.f^{(n)} = id_{\mathbb{Z}}$$

הוכחה:

נוכיח $\exists f \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.\forall n \in \mathbb{N}_+.f^{(n)} = id_{\mathbb{Z}}$. נבחר $f = \lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2$. יהי $n \in \mathbb{N}_+$, ונוכיח באינדוקציה $f^{(n)} = \lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2n$:

- בסיס ($n = 1$): $f^{(n)} = f^{(1)} = f = \lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2 \cdot 1$ כדרוש.
- צעד ($n > 1$): נניח באינדוקציה שהטענה נכונה על $f^{(n)}$, ונוכיח עד $f^{(n+1)}$. לפי הגדרת ההרכבה, $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f$. נוכיח שוויון ל־$\lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2(n+1)$, נשתמש בכלל אטא. משום ש־f מלא ב־$\mathbb{Z}$ אז לפי הרכבה $f^{(n+1)}$ היא גם על $\mathbb{Z}$ וסה"כ הדומיין שווה. לכן, יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח $(\lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2(n+1))(x) = f^{(n)}(f(x))$, או באופן שקול לפי כלל בטא $x + 2(n+1) = f^{(n)}(x+2)$ ולכן נמשיך ונקבל $x + 2(n+1) = 2 + x + 2n = x + 2(n+1)$ וזה פסוק אמת כדרוש.

סה"כ, יהי $n \in \mathbb{N}_+$, נניח בשלילה ש־$f^{(n)} = id_{\mathbb{Z}}$, נסיק $\lambda x \in \mathbb{Z}.x + 2n = id_{\mathbb{Z}}$, ולפי כלל η לכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים $x + 2n = id_{\mathbb{Z}}(x)$ כלומר $x + 2n = x$, נחבר x משני האגפים ונקבל $2n = 0$, אך ידוע $n > 1$ (לפי $n \in \mathbb{N}_+$), נכפיל את שני האגפים ונקבל $2n > 2$, נציב ונקבל $0 > 2$ המהווה סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף ב׳

נתון: יהי $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

צ.ל.: נוכיח קיום $n \in \mathbb{N}_+$ עבורו $f^{(n)} = id_{\{1,2,3\}}$ (הערה: אפשר להרחיב את ההוכחה לכל קבוצה סופית)

הוכחה: נפלג למקרים:

- שלושה איברים ביחס זהות: בה"כ $f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$: נבחר $n=1$, ולכן $f^{(n)}=f=id_{\{1,2,3\}}$ כדרוש.
- שני איברים ביחס זהות: נניח בשלילה שקיים יחס בו קיימים אך ורק שני איברים ביחס הזהות, בה"כ $f(1)=1,f(2)=2$, לפי ההנחה $f(3)\neq 3$ אך זה גורר $f(3)\notin\{1,2,3\}$ ולכן $\{1,2,3\}$ אינו בטווח ולכן זו סתירה.
- איבר יחיד ביחס הזהות: בה"כ $f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$: נבחר $n=2$, ולכן $f^{(n)}=f\circ f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=id_{\{1,2,3\}}$ כדרוש.
- אפס איברים ביחס הזהות: בה"כ $f=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$: נבחר $n=3$, ולכן:

$$\begin{aligned}f^{(n)}&=(f\circ f)\circ f\\&=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\circ f\\&=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}\\&=id_{\{1,2,3\}}\end{aligned}$$

$\mathscr{Q}.\mathscr{E}.\mathscr{D}.$ ■

~ סוף ~