לינארית 2א ~ תרגיל בית 10

שחר פרץ

10 בינואר 2026

(1)

(א) נוכיח ש־$\mathbb{R}^4 = \text{span}(e_1, e_2) \oplus \text{span}(e_3) \oplus \text{span}(e_4)$.

הוכחה. (תוך שימוש בסעיף ג')

- ראשית נוכיח $\mathbb{R}^4 = \text{span}(e_1, e_2) + \text{span}(e_3) + \text{span}(e_4)$. נבחין ש־$e_1, e_2$ בסיס של $\text{span}(e_1, e_2)$, וכן e_i בסיס של $\text{span}(e_i)$. מכאן ש־(e_1, e_2, e_3, e_4) וקטורים הלקוחים מהמרחבים $\text{span}(e_1, e_2), \text{span}(e_3), \text{span}(e_4)$ ומשום שהם בסיס של $\mathbb{R}^4$ (הבסיס הסטנדרטי הוא בסיס) מכאן שהם פורסים את V, כלומר מצאנו בסיס הלקוח מהמרחבים כנדרש.
- עתה נוכיח שהם זרים. ראשית נוכיח $\text{span}(e_1) \cap (\text{span}(e_3, e_4) + e_2) = \{0\}$. יהי v שנמצא במ"ו, ואז $v = (\alpha, 0, 0, 0) = (0, \beta, 0, 0) + (0, 0, \gamma, \delta)$ עבור $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ כלשהם. מכאן $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ כלומר $v = 0$ כדרוש. באופן דומה $\text{span}(e_2) \cap (\text{span}(e_3, e_4) + e_3) = \{0\}$ וכן $\text{span}(e_3, e_4) \cap (\text{span}(e_1) + \text{span}(e_2)) = \{0\}$.

סה"כ המרחבים יוצרים את $\mathbb{R}^4$ וכן הם זרים בזוגות כלומר $\mathbb{R}^4 = \text{span}(e_1) \oplus \text{span}(e_2) \oplus \text{span}(e_3, e_4)$ כנדרש. ■

(ב) נמצא דוגמה למ"ו V ותמ"ים $U_1 \dots U_k \subseteq V$ כך ש־$V = \sum U_i$ וכן $i \neq j \implies U_i \cap U_j = \{0\}$ על־אף ש־$V \neq \bigoplus U_i$.

דוגמה. נתבונן במ"ו הבא:

$$V = \mathbb{R}^2 \quad U_1 = \text{span}(v_1),\ U_2 = \text{span}(v_2),\ U_3 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

נבחין שהמרחבים זרים בזוגות, על אף ש־$\binom{1}{1} \in \text{span}(U_1, U_2) = \mathbb{R}^2$, כלומר החיתוכים הדרושים אינם זרים, והסכום איננו ישר. ■

(ג) נוכיח ש־$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ אמ"מ $V = \sum_{i=1}^k U_i$ וכן $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$.

הוכחה. אני לא לחלוטין בטוח איך הגדירו סכום ישר בהרצאה, אני מניח שצ.ל. שרשור בסיסי U_i הוא בסיס של V. יהי B_i בסיס של U_i, ונגדיר $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k B_i$. נוכיח שתחת הנתון, $\mathcal{B}$ בסיס של V. הוא פורש ישירות מהנתון $V = \sum_{i=1}^k U_i$, ונותר להראות שהוא בת"ל. ניעזר באינדוקציה על משפט הממדים. עבור $k = 2$, נקבל בסיס $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. משום ש־$U_1 + U_2 = V$ אז $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V$. אך:

$$n := \dim V = \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 + \cancel{\dim(U_1 \cap U_2)}$$

ממשפט סיימנו.

כצעד, נניח באינדוקציה על k ונוכיח $k + 1$. ידוע $U_{k+1} \cup \sum_{i=1}^k U_k = \{0\}$ ולכן מה.א. נקבל:

$$n := \dim V = \dim\left(U_{k+1} \cup \sum_{i=1}^k U_k\right) = \dim U_1 + \dim \sum_{i=1}^k U_k$$

מאותם הנימוקים, בהכרח $\mathcal{B} = B_{k+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k U_i\right)$ קבוצה בת"ל שכן היא פורשת עם n וקטורים (ממשפט) וסיימנו. ■

(2)

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־B הפיכה. נוכיח ש־AB ו־BA אותם ע"עים.

הוכחה.

- יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של BA. מכאן שקיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש־$BAv = \lambda v$.
  - אם $\lambda \neq 0$, בהכרח $Av \neq 0$ שכן אחרת $0 = B(0) = \lambda v \neq 0$ וסתירה. במקרה זה $A(BAv) = A(\lambda v) \implies (AB)Av = \lambda Av$ כלומר Av ו"ע לע"ע λ בעבור AB, וסיימנו.

– אם $\lambda = 0$ אז $B(Av) = 0$, ומשום ש־B הפיכה בהכרח $Av = 0$. עוד משום שהיא הפיכה, קיים w כך ש־$Bw = v$, אזי $ABw = A(Bw) = Av = 0 = \lambda w$ כדרוש.

בשני המקרים הראינו ש־λ ע"ע של AB.

- יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של AB. מכאן שקיים $v \in \mathbb{F}^n$ כך ש־$ABv = \lambda v$. (יש צורך לטפל במקרה זה שכן לא ידוע A הפיכה). משום ש־B הפיכה בהכרח $Bv \neq 0$. עוד נבחין $BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv$, כלומר Bv ו"ע עבור ע"ע λ של BA כדרוש.

סה"כ יש לנו הכלה דו־כיוונית לקבוצת הע"עים של BA ושל AB, משמע יש להם את אותם הערכים העצמיים, כנדרש. ■

(3)

7 תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ ניל' צמודה לעצמה. נוכיח $A = 0$.

הוכחה. ידוע קיום $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$A^k = 0$. משום ש־A צמודה לעצמה, היא לכסינה אורתוגונלית. יהי $e_1 \dots e_n$ בסיס אורתוגונלי מלכסן של A. נסמן ב־λ_i את הע"ע של הו"ע e_i. נקבל ש־:

$$0 = 0e_i = A^k e_i = A(A^{k-1}e_i) = \lambda_i A^{k-1} e_i = \dots = \lambda_i^k e_i$$

משום ש־$e_i \neq 0$, נסיק $\lambda_i^k = 0$ כלומר $\lambda_i = 0$. סה"כ לכל e_i מתקיים $Ae_i = 0e_i = 0$, כלומר A מאפסת את כל איברי הבסיס, דהיינו $A = 0$ כנדרש. ■

(4)

(א) תהי $H \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה צמודה לעצמה עם $H^k = I$ עבור $k \geq 1$ כלשהו. נוכיח ש־$H^2 = I$.

הוכחה. משום ש־H צמודה לעצמה, תחת בסיס אורתונורמלי $e_1 \dots e_n$ קיימים לה ע"עים $\lambda_1 \dots \lambda_n$. נבחין ש־:

$$1v_i = Iv_i = H^k v_i = H(H^{k-1}\lambda_i v_i) = \cdots \lambda_i^k v_i \implies \lambda_i$$

מכאן ש־λ_i הוא שורש יחידה ממעלה k. נסיק ש־$|\lambda_i| = 1$. משום שתחת בסיס **אורתוגונלי**, המטריצה H בעלת ע"עים מגודל 1, נסיק שהיא אוניטרית. משום ש־H צמודה לעצמה, ערכיה העצמיים ממשיים, ומכאן ש־$\lambda = \pm 1$. נבחין שתחת מטריצת מעבר בסיס אוניטרית C שעמודותיה $e_1 \dots e_n$, נקבל:

$$H^2 = (C^* \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)C)^2 = C^* \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)\cancel{CC^*}\operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)C = C^* \operatorname{diag}(\lambda_1^2 \dots \lambda_n^2)C = C^*C = I$$

שכן $\lambda_i^2 = (\pm 1)^2 = 1$, כנדרש. ■

(ב) נוכיח שזה לא נכון באופן כללי בעבור מטריצה H שאיננה צמודה לעצמה.

(5)

(א) נניח ש־$A \in M_n(\mathbb{C})$ מקיימת $\forall v \in \mathbb{C}^n \colon \ \langle Av, v \rangle = 0$. נוכיח ש־$A = 0$.

הוכחה.

$$0 = \langle A(u+v), u+v \rangle = \langle Au, u+v \rangle + \langle Av, u+v \rangle = \cancel{\langle Au, u \rangle} + \langle Au, v \rangle + \cancel{\langle Av, v \rangle} + \langle Av, u \rangle = \langle Au, v \rangle + \langle Av, u \rangle$$

$$0 = \langle A(u+iv), u+iv \rangle = \langle Au, u+iv \rangle + \langle Aiv, u+iv \rangle = \cancel{\langle Au, u \rangle} + \langle Au, iv \rangle + \cancel{\langle Aiv, iv \rangle} + \langle Aiv, u \rangle = -i\langle Au, v \rangle + i\langle Av, u \rangle$$

נחלק ב־i את המשוואה השניה, נקבל:

$$\begin{cases} \langle Au, v \rangle + \langle Av, u \rangle = 0 \\ \langle Av, u \rangle - \langle Au, v \rangle = 0 \end{cases} \implies \cancel{\langle Au, v \rangle - \langle Au, v \rangle} + \langle Av, u \rangle + \langle Av, u \rangle = 0 \implies \langle Av, u \rangle = 0$$

לכל u, v. בפרט עבור $u = Av$ קיבלנו $\langle Av, Av \rangle = 0$ דהיינו $Av = 0$ לכל $v \in V$, כלומר $A = 0$ כדרוש. ■

(ב) נוכיח שהסעיף הקודם לא נכון מעל $\mathbb{R}$. נתבונן במטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon \ \left\langle A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = -ba + ab = 0$$

כנדרש.

(ג) נוכיח שמעל $\mathbb{R}$, A אנטי־סימטרית בתנאים לעיל.

הוכחה.

$$0 = \langle A(u+v), u+v\rangle = \langle Au, u+v\rangle + \langle Av, u+v\rangle = \cancel{\langle Au, u\rangle} + \langle Au, v\rangle + \cancel{\langle Av, v\rangle} + \langle Av, u\rangle = \langle Au, v\rangle + \left\langle A^T u, v\right\rangle$$

סה"כ $\left\langle A^T u + Au, v\right\rangle = 0$. בפרט עבור $v = A^T u + Au$ נקבל:

$$\left\langle A^T u + Au, A^T u + Au\right\rangle = 0 \implies A^T u + Au = 0 \implies Au = -A^T u$$

לכל $u \in \mathbb{R}^n$, כלומר $A = -A^T$ כדרוש.

■

(6)

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה. נוכיח ש־A נורמאלית אמ"מ לכל $v \in \mathbb{C}^n$ מתקיים $||Av|| = ||A^* v||$.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח ש־A נוראמלית, כלומר $AA^* = A^* A$. נסיק ש־:

$$||Av||^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle v, A^* Av\rangle = \langle v, AA^* v\rangle = \langle A^* v, A^* v\rangle = ||A^* v||^2$$

כנדרש.

$\Longrightarrow$ מההנחה $||Av|| = ||A^* v||$ נקבל:

$$\forall v \in V : 0 = \langle Av, Av\rangle - \langle A^* v, A^* v\rangle = \langle v, A^* Av\rangle - \langle v, AA^* v\rangle = \langle v, A^* Av - AA^* v\rangle$$

מהסעיף הראשון של השאלה:

$$A^* A - AA^* = 0 \implies A^* A = AA^*$$

כלומר A נוראמלית כנדרש.

■

(7)

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ משולשית עליונה ונורמאלית. נוכיח ש־A אלכסונית.

הוכחה. נבחין ש־A^* משולשית תחתונה. מכאן ש־:

$$(AA^*)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} A^*_{j,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} A_{i,j} A^*_{j,i}$$
$$(A^* A)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^*_{i,j} A_{j,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} A^*_{i,j} A_{j,i}$$

מכאן נסיק ש־:

$$(AA^*)_{i,i} - (A^* A)_{i,i} = 0 \implies \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} A_{i,j} A^*_{j,i} - \sum_{j=k}^{n} A_{i,j} A^*_{j,i}\right) = 0$$

נבחין ש־$A_{i,j} A^*_{j,i} = A_{i,j}\overline{A_{i,j}} = ||A_{i,j}|| \geq 0$. עבור $i = 1$ נקבל:

$$A_{1,1} A^*_{1,1} - \sum_{i=1}^{n} A_{1,j} A^*_{1,j} = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} ||A_{1,j}|| = 0$$

סכום של מספרים גדולים מ־0 הוא אפס אמ"מ כולם אפס, ולכן $A_{1,j} = 0$. באינדוקציה על i נקבל:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k}}_{A_{i,j}}$$

■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד