אלגברה לינארית 2א $\sim$ תרגיל בית 3

שחר פרץ

21 בנובמבר 2025

(1)

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, וכן $U, W \subseteq V$ תמ"ים כך ש־$V = U \oplus W$. תהי p ההטלה על U ביחס לפירוק $V = U \oplus W$. נוכיח ש־$\ker p = W \wedge \operatorname{Im} p = U$.

הוכחה. נתבונן בהעתקת הסכום $S \colon U \times W \to V$ שהוכח שהיא לינארית. עוד הראינו שמשום ש־$U \cap W = 0$ אז S חח"ע בין מרחבים שווי ממד, ומכאן שהיא הפיכה, וההופכית שלה $D_{U,W}$ מוגדרת היטב ומשרה את ההיטל p_U שמוגדר היטב גם הוא.

נפנה להוכיח את הדרוש מההיטל. יהי $w \in W$, נראה $p_U(w) = 0$. נפרק את w לחלק ב־W וחלק ב־U (קיים ויחיד מהגדרת סכום ישר), ונקבל $w = w_w + u_w$. בהכרח $u_w = 0$ שכן $w, w_w \in W$ ומסגירות $W \ni w - w_w = u_w \in U$ ומחיתוך ריק $u_w = 0$. אז:

$$D_{U,W}(w) = (u_w, w_w) \implies p_U(w) = (\pi_1 \circ D_{U,W})(w) = u_w = 0 \implies w \in \ker p_U$$

כלומר $\ker p = W$ כדרוש. עתה נראה ש־$\operatorname{Im} p = U$. יהי $u \in U$. אז נתבונן בפירוק $u = u_u, w_u$ כך ש־$u_u \in U, w_u \in W$ כך ש־$u = S(u_u, w_u) = u_u + w_u$. מטעמים זהים לאילו לעיל $w_u = 0$ כלומר $u = u_u$. אז:

$$p_U(u) = (\pi_1 \circ D_{U,W})(u) = \pi_1(D_{U,W}(v)) = \pi_1((u_u, w_u)) = u_u = u$$

ומכאן שמצאנו $x \in V$ כך ש־$p_U(x) = u$ (הוא $x = u$) אזי $\operatorname{Im} p = U$ כנדרש. ∎

(2)

יהי $U = \operatorname{span}((1,2)) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(א) נמצא ביטוי מפורש להטלה האורתוגונלית על U.

הראינו בשאלה 8 נוסחה מפורשת להטלה אורתוגונלית. במקרה הזה, נקבל שבעבור $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, מתקבל:

$$p_U(v) = p_U(x,y) = (v \cdot (2,1))(2,1) = (2x+y)(2,1) = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

סה"כ סיימנו.

(ב) נבחר $W \neq U^\perp$ כך ש־$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$. נמצא ביטוי מפורש ל־$p_U$ ביחס לפירוק $U \oplus W$.

נבחר $W = \operatorname{span}(0,1)$. ואכן מתקיים $(2,1), (0,1)$ לא נבדלים בכפל בקבוע, ולכן לא תלויים לינארית, אזי מגדירים בסיס ל־$\mathbb{R}^2$, כלומר $W \oplus U = \mathbb{R}^2$. עוד נבחין $(0,1) \cdot (1,2) = 2 \neq 0$ כלומר $(0,1) \not\perp (1,2)$ דהיינו $(0,1) \notin U^\perp$.

עתה כשמצאנו W מתאים, נפנה למציאת ההיטל הלא אורתוגונלי. בהינתן וקטור $v = (x,y)$, נבחין ש־:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 \\ 2 \cdot x - 2 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies [v]_B = (x, y-2x)$$

כאשר $B = ((1,2),(0,1))$. מאיך שהגדרנו את ההיטל, $p_W(v)$ הוא החלק של W בבסיס, כלומר:

$$p_W(v) = (y-2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y-2x \end{pmatrix}$$

כדרוש.

(3)

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תמ"ו. נוכיח ש־$(U^\perp)^\perp = U$.

הוכחה. נוכיח את השוויון באמצעות הכלה אחת ושוויון ממדים.

- **הכלה:** יהי $u \in U$. נראה ש־$u \in (U^\perp)^\perp$. ידוע $\forall v \in U^\perp : u \cdot v = 0$. מסימטריות של מכפלה סקלרית ומהגדרה $u \in (U^\perp)^\perp$. אזי $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ ז.
- **שוויון ממדים:** ידוע $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^n = \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp$, כי $U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp = \mathbb{R}^n$. מכאן $\dim U = \dim (U^\perp)^\perp$.

סה"כ $U, (U^\perp)^\perp$ שאחד מהם מוכל בשני ושווי ממד, ולכן שווים. ■

(4)

יהיו $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש־$\mathbb{R}^n = U \oplus W$. נוכיח ש־$\mathbb{R}^n = U^\perp \oplus W^\perp$.

הוכחה. למה: בהינתן U, W מרחבים כלשהם, $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ (למעשה מתקיים שוויון חזק).

- $\subseteq$ יהי $v \in (U+W)^\perp$. נתבונן ב־$u \in U$, אז $u \in U+W$ ואז $v \perp u$, כלומר $u \in U^\perp$. יהי $w \in W$, אז $w \in U+W$, ואז $v \perp w$, כלומר $u \in W^\perp$, אזי $u \in W^\perp \cap U^\perp$ וסיימנו.
- $\supseteq$ יהי $v \in U^\perp \cap W^\perp$. יהי $v \in U+W$. יהי $x \in U+W$. בהכרח ניתן לפרק (אך לא בהכרח באופן יחיד) את x לכדי $x = u + w,\ u \in U \wedge w \in W$. נקבל $x \cdot v = (u+w) \cdot v = v \cdot u + v \cdot w$. בגלל ש־$v \perp w \wedge v \perp u$ אז סה"כ נקבל $x \cdot v = 0$ כלומר $v \perp x$ אזי $x \in (U+W) \perp$ וסיימנו.

הראינו את ההכלה הדו־כיוונית. נפנה להוכחת המשפט. יהיו $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש־$\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

- **חיתוך ריק:** ידוע $U \cap W = 0$. נראה ש־$U^\perp \cap W^\perp = 0$. ידוע:

$$U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp = (\mathbb{R}^n)^\perp \overset{(1)}{=} \{0\}$$

כאשר (1) הוכח בשיעורי הבית הקודמים.

- **שוויון ממדים:**

$$\begin{cases} U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n & \implies \dim U + \dim U^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n \implies \dim U^\perp = n - \dim U \\ V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n & \implies \dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^n = n \implies \dim V^\perp = n - \dim V \\ U \oplus V = \mathbb{R}^n & \implies \dim U + \dim V = n \end{cases}$$

בשלב הזה כבר $U^\perp \oplus V^\perp$ מוגדר היטב שכן הראינו שהסכום אכן ישר. מכאן ש־:

$$\dim(U^\perp \oplus V^\perp) = \dim U^\perp + \dim V^\perp = n - \dim U + n - \dim V = 2n - \underbrace{(\dim V + \dim U)}_{n} = n = \dim \mathbb{R}^n$$

סה"כ מטרנזיטיביות $\dim(U^\perp \oplus V^\perp) = \dim(\mathbb{R}^n)$.

- **הכלה:** מהגדרה $U^\perp, V^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$.

סה"כ ממשפט בלינארית 1 נקבל $V = U^\perp \oplus V^\perp$ כדרוש. ■

(5)

נתבונן בוקטורים הבאים:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

הנתונים בקבוצה $S = (v_1, v_2, v_3)$.

(א) נמצא את מטריצת הגרם של S, היא $G(S)$, ונבדוק האם היא הפיכה.

$$[S]=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad G(S)=[S]^T[S]=\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&2&0\\-3&0&3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}5&2&-3\\2&2&0\\-3&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{5}R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{5}&\frac{3}{-5}\\2&2&0\\-3&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{5}&\frac{3}{-5}\\0&\frac{6}{5}&\frac{6}{5}\\0&\frac{6}{5}&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to\frac{5}{6}R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{5}&\frac{3}{-5}\\0&1&1\\0&\frac{6}{5}&\frac{6}{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-\frac{6}{5}R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{5}&\frac{3}{-5}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש כאן שורת אפסים ומכאן ש־$G(S)$ איננה הפיכה, כלומר גם $[S]$ איננה הפיכה ו־S ת"ל.

(ב) יהי $U=\operatorname{span}S$. נמצא בסיס S' של U, וניעזר ב־$G(S')$ כדי לחשב את הפירוק האורתוגונלי של $(0,0,1)$ ביחס ל־U.
נתבונן ב־$[S]^T$ ונדרגה. זאת כי דירוג לא משנה מרחב שורות.

$$[S]^T=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$S'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מכאן ש־S' בסיס ל־U. עתה נחשב את $G(S')$:

$$G(S')=[S']^T[S']=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&2\end{pmatrix}$$

נמצא את ההופכית שלה. לאחר ביצוע אלגוריתם גאוס על דף, נקבל:

$$G(S')^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}$$

לפי משפט מהתרגול $[p_U(v)]_{'S}=G(S')^{-1}[S']^Tv$. נקבל:

$$[p_U(v)]_{S'}=G(S')^{-1}[S']^Tv=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}v=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&1\end{pmatrix}v$$

בפרט, עבור $v=(0,0,1)$ שהתבקשנו לחשב את ההיטל האורתוגונלי שלו על U בתרגיל:

$$[p_U(v)]_{S'}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\implies p_U(v)=\frac{1}{6}(-2S_1+1S_2)=-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

וסיימנו.

(6)

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $p\colon V\to V$ העתקה לינארית כך ש־$p^2=p$.

(א) נראה ש־$V=\operatorname{Im}p\oplus\ker p$.

הוכחה.

- **חיתוך ריק:** יהי $v\in\operatorname{Im}p\cap\ker p$. אז $p(v)=0$ וכן קיים $u\in\mathbb{R}^n=\operatorname{dom}p$ כך ש־$p(u)=v$. מתקיים:

$$v\overset{\text{def}}{=}p(u)\overset{p^2=p}{=}p^2(u)=p(p(u))\overset{p(u)=v}{=}p(v)\overset{v\in\ker p}{=}0$$

כלומר $v=0$ ואכן $\operatorname{Im}p\cap\ker p=\{0\}$ כדרוש.

- **שוויון ממדים:** ממשפט הממדים להעתקות של לינארית 1א ראינו ש־$\dim V = \dim \operatorname{Im} p + \dim \ker p$ לכל p לינארית.
- **הכלה:** מהגדרה $\operatorname{Im} p, \ker p \subseteq V$.

סה"כ $V = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ כדרוש. ■

(ב) נראה ש־p היא ההטלה על התמ"ו $\operatorname{Im} p$ ביחס לפירוק $V = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$.

הוכחה. יהי $v \in V$ ומהגדרת סכום ישר ניתן למצוא באופן יחיד $u \in \operatorname{Im} p, w \in \ker p$ כך ש־$v = u + w$. (S^{-1} קיימת כי הסכום ישר) אז:

$$S(u,w) = v \implies D_{U,W} := S^{-1}(v) = (u,w) \implies (\pi_1 \circ S^{-1}) = p_U$$

כלומר, כדי להראות ש־$p = p_U$, נוכל להראות ש־$p = (\pi_1 \circ S^{-1})$. ואכן, בגלל ש־$p(w) = 0$ כי $w \in \ker p$:

$$p(p(v)) = p^2(v) = p(v) = p(u) + \underbrace{p(w)}_{0} = p(u)$$

תחת הצמצום $p|_{\operatorname{Im} p}$ ההעתקה p בהכרח חח"ע כי $p(\operatorname{Im} p) = \operatorname{Im} p$ (כי אחרת קיים $0 \neq v \in \operatorname{Im} p$ כך ש־$p(v) = 0$ ואז $v \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$ וסתירה) ומכאן ש־$p(v) = u$ (מחד־חד ערכיות $p_{|\operatorname{Im} p}$). אז:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \colon p(v) = u = \pi_1((u,w)) = \pi_1(S^{-1}(v)) \implies p = p_U \quad \top$$

■

(7)

יהיו $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ תמ"וים כך ש־$\mathbb{R}^n = U \oplus W$ ואכן $p \colon \mathbb{R}^n \to U$ היטל על U ביחס לאותו הפירוק.

(א) נוכיח ש־p היטל אורתוגונלי אמ"מ $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \colon p(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot p(v_2)$.

הוכחה.

$\Longleftarrow$ אם p היטל אורתוגונלי, אז $W = U^\perp$, ואז $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2, w_2$ כך ש־$u_1, u_2 \in U \land w_1, w_2 \in W$ באופן יחיד, וכן $p(v_1) = u_1, p(v_2) = u_2$. נקבל:

$$\begin{aligned} p(v_1) \cdot v_2 &= u_1 \cdot (u_2 + w_2) = u_1 \cdot u_2 + \overbrace{u_1 \cdot w_2}^{0} = u_1 \cdot u_2 \\ v_1 \cdot p(v_2) &= (u_1 + w_1) \cdot u_2 = u_1 \cdot u_2 + \underbrace{w_1 \cdot u_2}_{0} = u_1 \cdot u_2 \end{aligned}$$

כלומר $p(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot p(v_2)$ כדרוש.

$\Longrightarrow$ נניח ש־$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \colon p(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot p(v_2)$, ונוכיח ש־$p$ היטל אורתוגונלי. באופן דומה גם כאן נפרק $v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$ כך ש־$u_1, u_2 \in U \land w_1, w_2 \in W$. באופן דומה:

$$u_1 \cdot u_2 + w_1 \cdot u_2 = (u_1 + w_1) \cdot u_2 = v_1 \cdot p(v_2) = p(v_1) \cdot v_2 = u_1 \cdot (u_2 + w_2) = u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot w_2$$

נחסר אגפים ונקבל $w_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot w_2$ לכל v_1, v_2 כלשהם. בהינתן $w_3 = 2w_2$ ו־$v_3 = v_2 + w_3$, נקבל את השוויון $w_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot w_3$. מטרנזטיביות:

$$2(u_1 \cdot w_2) = u_1 \cdot (2w_2) = u_1 \cdot w_3 = u_1 \cdot w_2$$

נניח בשלילה $u_1 \cdot w_2 \neq 0$ אז נחלק אגפים ונקבל $2 = 1$ וסתירה. לכן בהכרח, לכל $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ כלשהם, ה־u_1, u_2, w_1, w_2 שהם משרים מקיימים $u_1 \cdot w_2 = u_2 \cdot w_1 = 0$.

נפנה להוכחת הטענה ש־p היטל אורתוגונלי ישירות. למעשה צ.ל. $W = U^\perp$. ואכן, יהי $w \in W$ ו־$u \in U$, עבור $v = u + w$ מתקיים $u \cdot w = 0$ שכן v משרה $u_1 = u_2 = u, w_1 = w_2 = w$, וסיימנו. ■

(ב) עתה נראה שאם p היטל אורתוגונלי, אז $\forall u \in U, \forall v \in \mathbb{R}^n \colon u \cdot v = u \cdot p(v)$.

הוכחה. ידוע $p(u) = u$ שכן $u \in U$ ו־p היטל על U. מהיותה היטל אורתוגונלי, המשפט מהסעיף הקודם תקף, ואז:

$$u \cdot v = p(u) \cdot v = u \cdot p(v)$$

כנדרש. ■

(8)

תהי $u_1 \dots u_k \subset \mathbb{R}^n$ סדרה אורתונורמלית ואכן $U = \mathrm{span}(u_1 \dots u_k)$ תמ"ו.

(א) יהי $v \in \mathbb{R}^n$, נגדיר $u = \sum_{i=0}^{k}(v \cdot u_i)u_i$. נוכיח ש־$\forall m \in [k] \colon u_m \perp v - u$.

הוכחה. נבחין ש־$u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ כי מהיות $u_1 \dots u_k$ אורתונורמלי, אם $i \neq j$ אז $u_i \perp u_j$, אחרת $i = j$ ואז $u_i \cdot u_j = ||u_i||^2 = 1$.
נתחיל מלהתבונן במכפלה $u_m \cdot u$:

$$u_m \cdot u = u_m \cdot \sum_{i=1}^{k}(v \cdot u_i)u_i = \sum_{i=1}^{k} u_m \cdot ((v \cdot u_i)u_i) = \sum_{i=1}^{k}(v \cdot u_i) \cdot \underbrace{(u_i \cdot u_m)}_{\delta_{im}} \overset{(1)}{=} (v \cdot u_m)$$

כאשר השוויון (1) נכון, כי $\delta_{im} = 1$ אמ"מ $i = m$, אחרת $\delta_{im} = 0$, ולכן כל האיברים בסכום שאינם m יתבטלו.
נתבונן בכפל $u_m \cdot (v - u)$:

$$u_m \cdot (v - u) = u_m \cdot v - u_m \cdot u = u_m \cdot v - u_m \cdot v = 0$$

כלומר $u_m \perp (v - u)$ כדרוש. ■

(ב) נסיק כי ההטלה האורתונורמלית על U נתונה ע"י $p_U(v) = \sum_{i=1}^{k}(v \cdot u_i)u_i$.

הוכחה. בגלל ש־$u_1 \dots u_k$ בסיס אורתונורמלי ל־U, אז $U^{\perp} = (u_1 \dots u_k)^{\perp}$ (טענה משיעורי הבית הקודמים). הראינו ש־$v - u \in (u_1 \dots u_k)^{\perp} = U^{\perp}$. נסמן $w = v - u$, ואז נבחין ש־$u \in U \wedge w \in U^{\perp}$, וגם $v = v - u + u = w + u$! כלומר, לפי הגדרה, $p_U(v) = u$ לכל $v \in V$, אזי, מהגדרת u:

$$\forall v \in V \colon p_U(v) = \sum_{i=1}^{k}(v \cdot u_i)u_i$$

כדרוש. ■