תרגול אחרון

שחר פרץ

24 ביוני 2025

מתרגלת: לילי

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(2022AA(1

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהי $T\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ המוגדרת ע"י $T(x,y,z) = (x+zx, x+y+z)$. מצאו את כל הבסיסים מהצורה:

$$B = \{b_1, b_2, b_3\} := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ C = \{c_1, c_2\} := \left\{ \begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_2 \\ m_2 \end{pmatrix} \right\}$$

כך ש־:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון.

- נמצא תנאים כך ש־$[T]_C^B = \cdots$
- נמצא תנאים כך ש־B, C בסיסים

מהגדרת מטריצה מייצגת:

$$T(b_1) = c_1 + c_2 \tag{1}$$
$$T(b_2) = 3c_1 \tag{2}$$
$$T(b_3) = c_2 \tag{3}$$

נציב b_i, c_i ונכתוב את זה כמערכת משוואות:

$$\text{useless} \tag{1}$$
$$(1 + 2\cdot 1, 1 + 1 + 1) = T(b_2) = 3c_1 = (3n_1, 3m_1) \tag{2}$$
$$(2, 1) = (n_2, m_2) \tag{3}$$

$$\implies n_1 = 1,\ m_1 = 1,\ n_2 = 2,\ m_2 = 1$$

נבחין ונוודא ש־C אכן בסיס. מכאן:

$$(a + 2c, a + b + c) = (1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$$

זה מותיר אותנו עם מערכת משוואות ממנה אפשר למצוא את a, b, c. כמובן שיהיה לפחות משתנה חופשי אחד.

$$\begin{cases} 1a + 0b + 2c = 3 \\ 1a + 1b + 1c = 2 \end{cases} \implies \{(\underbrace{3-2c}_{a}, \underbrace{c-1}_{b}, \underbrace{c}_{c}) \mid c \in \mathbb{F}\}$$

הערה: אנחנו בשדה שרירותי. לכן $1 + 1 = 2,\ 1 + 1 + 1 =: 3$ וכו'. הזהרו מחלוקה בהם כי יכול להיות ש־$2 = 0$. נעבור לתנאי 2 ונדרוש ש־B בסיס. משום שאלו 3 וקטורים די להראות שזו קבוצה פורשת. יש אלגו' סטנדרטי לבדוק את זה. נשים את $b_1 \dots b_3$ בשורות מטריצה:

$$\begin{pmatrix} 3-2c & c-1 & c \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3c-4 & 3c-3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם $3c-4=0$ אז הקבוצה ת"ל ואחרת המטריצה מדורגת. מסקנה:

$$B=\{(3-2c,c-1,c),(1,1,1),(0,0,1)\}\ C=\{(1,1),(2,1)\}$$

מקיימים את התנאי סלהלן לכל $c\neq\frac{4}{3}$ (צריך להניח משהו על המציין של השדה כדי שיהיה אפשר לחלק ב־3, אז צריך גם לפצל למקרים בהתאם למקדם).

(2)

יהיו $0\leq a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך שבדיוק אחד מהם הוא 0. הוכיחו:

$$\det\begin{pmatrix}a&-1&-1&-1\\-1&b&-1&-1\\-1&-1&c&-1\\-1&-1&-1&d\end{pmatrix}<0$$

פתרון. בה"כ $a=0$ והשאר חיוביים. אפשר להניח את זה כי אפשר להחליף שורה ואז עמודה ולהגיע לאותו המקום (וזה פעמיים כפל ב־-1 שמוביל אותנו לאותה הדטרמיננטה בכל מקרה). לדוגמה, אם $c=0$ נחליף $R_1\leftrightarrow R_3$ ו־$C_1\leftrightarrow C_3$, נקבל שני פקטורים של -1 ולכן ה־det לא ישתנה. נוריד מכל העמודות את c_1 ונקבל:

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&b+1&0&0\\-1&0&c+1&0\\-1&0&0&d+1\end{pmatrix}$$

ראינו כבר בתרגול על תמורות איך נראית דטרמיננטה של דבר כזה. אם לא זוכרים את הנוסחה, אפשר להוריד מהעמודה הראשונה את $\frac{1}{b+1}c_2$, $\frac{-1}{c+1}c_3$, $\frac{-c_4}{d+1}$. מותר לעשות זאת כי $0\leq b,c,d$. נקבל:

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{d+1}&-1&-1&-1\\0&b+1&0&0\\0&0&c+1&0\\0&0&0&d+1\end{pmatrix}$$

סה"כ מכפלת איברי האלכסון של המשולשית היא:

$$\det=-(b+1)(c+1)(d+1)\left((b+1)^{-1}+(c+1)^{-1}+(d+1)^{-1}\right)$$

כדרוש.

(3)

יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. נניח כי $T\colon V\to W$ העתקה על המקיימת לכל $K\subseteq V$ סופית, אם $\operatorname{span}(T(k))=W$ אז $V=\operatorname{span}(k)$. הוכיחו ש־T חח"ע.

פתרון. נניח בשלילה שהיא איננה חח"ע. אז ישנו $0\neq v_1\in\ker T$. נשלים אותו לבסיס B של V. הבסיס הזה הוא קבוצה סופית. ממשפט מההרצאה מתאיים:

$$\underbrace{\operatorname{Im}T}_{W}=\operatorname{span}(T(B))=\operatorname{span}(\underbrace{Tv_1}_{0}\dots Tv_n)\implies\operatorname{span}(B\setminus\{b_1\})=V$$

בסתירה לכך ש־B בסיס, כלומר פורש מינימלי. הגרירה נכונה מההנחה של השאלה.

(4)

יהי $\mathbb{F}$ שדה, וכן $n\geq 2$ ותהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נגדיר העתקה לינארית $T\colon M_n(\mathbb{F})\hookleftarrow$ לפי $T(B)=A^TB+B^TA$. הראו ש־T לא חח"ע.

פתרון. נבחין ש־$T(B)$ סימטרית:

$$(T(B))^T=(A^TB+B^TA)^T=B^T(A^T)^T+A^T(B^T)^T=B^TA+A^TB=T(B)$$

לכן $\operatorname{Im}T\subsetneq\operatorname{Sym}(M_n(\mathbb{F}))\subseteq M_n(\mathbb{F})$. לכן $\dim M_n(\mathbb{F})<\dim\operatorname{Im}T$ כי $\dim M_n(\mathbb{F})=n^2,\ \dim\operatorname{Sym}_n=\frac{n^2+n}{2}$. סה"כ:

$$\underbrace{\dim M_n(\mathbb{F})}_{n^2}=\underbrace{\dim\operatorname{Im}T}_{<n^2}+\underbrace{\dim\ker T}_{k}$$

לכן $\dim\ker T>0$ כדרוש.

אלטרנטיבית אפשר לומר ש־T לא על והעתקה ממרחב לעצמו היא על אמ"מ היא חח"ע.

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

יהי V נ"ס מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $T, S\colon V \hookleftarrow$ כך שמתקיים $5T^4 - 2T^2 + 3TS + T - I = 0$.

לול אני מכיר את השאלה הזו.

פתרון. אם S היא פולינום ב־T, T^{-1} אז הטענה תתקיים. לדוגמה $ST = (T^3 + T^{-1} - 2T)T = T(T^3 + T^{-1} - 2T)$. נרצה אם כך לבודד את S בצד אחד של המשוואה. נניח T הפיכה:

$$S = -\frac{1}{3}T^{-1}(5T^4 - 2T^2 + T - I)$$

ואז $TS = ST$. זאת כי:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T^i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T^i\right)T$$

עתה נוכיח ש־T הפיכה. נעביר את I אגף:

$$5T^4 - 2T^2 + 3TS + T = I \implies T(5T^3 - 2T + 3S) = I$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (6) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

תהי $A \in M_5(\mathbb{Z})$ (לא שדה, אך עדיין אפשר להתבונן במטריצות מעליהם) כך שכל שורה ועמודה שלהם מכילה בדיוק את המספרים $1, 2 \dots 5$. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

עתה צריך להראות ש־$\det A$ מתחלקת ב־75.

פתרון. נוסיף לשורה הראשונה את כל השאר:

$$\begin{pmatrix} 15 & 15 & \cdots & 15 & 15 \\ * & * & * & * & * \\ * & & & & \\ * & & & & \\ * & & & & \end{pmatrix} = 15\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & * & * \\ * & & & & \\ * & & & & \\ * & & & & \end{pmatrix}$$

עתה נוסיף לעמודה הראשונה את כל השאר:

$$15\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 15 & * & * & * & * \end{pmatrix} = 15\cdot 5\det\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

ואכן $15 \cdot 5 = 75$ מחלק את הנדרש.

המשך בעמוד הבא

(7)

יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $T,S\colon V \hookleftarrow$ ט"ל כך שמתקיים:

$$V = \operatorname{Im} T + \operatorname{Im} S = \ker T + \ker S$$

הראו שהסכומים להלן ישרים.

פתרון. יהיו הכי קל לעבוד עם ממדים במקום לעבוד ישירות ולהראות שהחיתוך אפס.

$$n = \dim(\operatorname{Im} T + \operatorname{Im} S) = \dim(\ker T + \ker S)$$

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Im} S = n + \dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} S)$$

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \ker S = n + \dim(\ker T + \ker S)$$

ממשפט הממדים להעתקות:

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim \operatorname{Im} S + \dim \ker S = n$$

נסכום את הכל ונקבל:

$$\underbrace{(\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T)}_{n} + \underbrace{(\dim \operatorname{Im} S + \dim \ker S)}_{n} - \dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} S) - \dim(\ker T \cap \ker S) = n + n$$

סה"כ:

$$-\underbrace{\dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} S)}_{\geq 0} - \underbrace{\dim(\ker T \cap \ker S)}_{\geq 0} = 0$$

לכן:

$$\dim(\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Im} S) = 0 \wedge \dim(\ker T + \ker S) = 0$$

כדרוש.

דרך אלטרנטיבית להוכחה.

$$n = \dim V = \underbrace{\operatorname{Im} T}_{k} + \underbrace{\operatorname{Im} S}_{\ell} = \underbrace{\ker T}_{n-k} + \underbrace{\ker S}_{n-\ell}$$

ואז לקבל:

$$n \leq k + \ell,\ \ n \leq n - l + n - \ell = 2n - (l + \ell) \implies n \geq k + \ell$$

וברגע שסכום של שני מרחבים נותן משהו ממד n, בהכרח הסכום סכום ישר (הערה שלי: זו טענה ידועה אבל אפשר להוכיח את זה באמצעות פיתוח בסיסים). זו הוכחה שקולה.

(8)

יהי V מ"ו נ"ס ויהיו U_1, U_2, U_3 תת"מ של V. הוכיחו:

$$\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq \underbrace{\dim U_1}_{n_1} + \underbrace{\dim U_2}_{n_2} + \underbrace{\dim U_3}_{n_3} - 2\underbrace{\dim V}_{n}$$

פתרון. אנו יודעים שעבור זוג מרחבים:

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \geq n_1 + n_2 - n$$

$$\dim((U_1 \cap U_2) \cap U_3) \geq \dim(U_1 \cap U_2) + n_3 - n \geq n_1 + n_2 + n_3 - 2n$$

כדרוש.

(9)

יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $T, S \hookleftarrow$ ט"ל. נוכיח:

$$T(\ker(S \circ T)) = \operatorname{Im} T \cap \ker S$$

פתרון.

$\subseteq$ מכיוון אחד, ברור ש־$T(\ker(S \circ T)) \subseteq \operatorname{Im} T$. יהי $v \in V$ אז ישנו $w \in \ker S \circ T$ כך ש־$v = T(w)$. ולכן:

$$S(v) = S(T(w)) =$$

אוקי היא העבירה דף ולא הספקתי להעתיק את השוויון האחרון.

$\supseteq$ יהי $v \in \operatorname{Im} T \cap \ker S$. מהגדרת $\operatorname{Im} T$ ישנו $w \in V$ כך ש־$v = T(w)$. מהגדרת $\ker S$ מתקיים $0 = S(v) = S(T(w)) \implies w \in \ker(S \circ T)$. נפעיל את T על המשוואה ונקבל $T(w) \in T(\ker(S \circ T))$.

סיימנו את ההכלה הדו־כיוונית כדרוש.

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד