1 סימונים

- **בולד:** הגדרות.
- **כחול:** אקסיומות.
- (AC) משפט תלוי באקסיומת הבחירה.
- $\cancel{(AC)}$ משפט לא תקין בלי הוכחה, תלוי באקסיומת הבחירה.
- אלא אם מצויין אחרת, יהיו $\forall R\subseteq A\times B, f\colon A\to B,\ n\in\mathbb{N}, C, D$.

2 הגדרות ואקסיומות

1. **הכלה:** $A\subseteq B\iff\forall a\in A.a\in B$
2. **שוויון:**
$$A=B\iff x\in A\leftrightarrow x\in B\iff A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$
3. **עקרון ההפרדה:** $a\in\{x\in a\mid\varphi(x)\}\iff a\in A\wedge\varphi(a)$
4. **עקרון ההחלפה:** $a\in\{f(x)\mid x\in A\}\iff\exists x\in A.a=f(x)$
5. **קטעים:**
$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\},\ [a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$$
6. **קבוצת חזקה:** $\mathcal{P}(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$
7. **איחוד מוכלל:** $\bigcup_{X\in A}X=\{x\mid\exists y\in A.x\in y\}$
8. **חיתוך מוכלל:** $\bigcap_{X\in A}X=\{x\mid\forall X\in A.x\in X\}$
9. **איחוד:** $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$
10. **חיתוך:** $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$
11. **הפרש:** $A\setminus B=\{x\in A\mid x\notin B\}$
12. **הפרש סימטרי:** $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
13. **משלים:** $\overline{A}=A^C=\{x\in C\mid x\notin A\}$
14. **קבוצות זרות:** $A\cap B=\varnothing$
15. זהות. אסוציאטיביות:
$$A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C,\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$
16. זהות. קומטטיביות:
$$A\triangle B=B\triangle A,\ A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$$
17. זהות. דיסטרבוטיביות:
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C),\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(B\cup C)$$
18. זהות. הפרש:
$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C),\ A\setminus B=A\cap\overline{B}$$
$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$
19. משפט. חוקי דה־מורגן: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
20. זהות. קבוצה ריקה:
$$A\setminus\varnothing=A,\ A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\triangle\varnothing=A,\ \varnothing\setminus A=\varnothing$$
21. זהות. קבוצה עם עצמה:
$$A\setminus A=\varnothing,\ A\cup A=A,\ A\cap A=A,\ \overline{\overline{A}}=A,\ A\triangle A=\varnothing$$
22. משפט. טענות על הכלה:
$$A\subseteq A\cup B,\ A\cap B\subseteq A,\ A\setminus B\subseteq A$$
$$C\subseteq A\cup B\iff C\subseteq A\wedge C\subseteq B$$
23. משפט. הטענות הבאות שקולות:
$$A\subseteq B\iff A\cap B=A\iff A\setminus B=\varnothing\iff A\cup B=B$$
24. משפט. הטענה המרכזית של n־יה סדורה:
$$\langle a_1,\dots a_n\rangle=\langle b_1,\dots b_n\rangle\iff\forall i\in[n].a_i=b_i$$
25. משפט. $\forall n,m.R^{(m)}\circ R^{(n)}=R^{(n+m)}$

3 יחסים

26. **כפל קרטזי:** יהיו $\{A_i\}_{i\in[n]}$:
$$A_1\times\cdots\times A_n=\{a\ n\text{־יה}\mid\forall 1\le i\le n.a_i\in A_i\}$$
27. **יחס:** $R\subseteq A\times B$
28. **תחום:** $\mathrm{dom}(R)=\{a\in A\mid\exists b\in B.aRb\}$
29. **תמונה:** $\mathrm{Im}(R)=\{y\in B\mid\exists a\in A.aRb\}$
30. **יחס הופכי:** $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle\mid aRb\}$
31. **הרכבת יחסים:** $R\circ S=\{\langle a,c\rangle\in A\times C\mid\exists b\in B.aSb\wedge bRc\}$

3.1 פונקציות

32. **פונקציה:** $\forall a\in A.\exists!b\in B.\langle a,b\rangle\in f$ (f מלא וחח"ע)
33. **יחס מלא:** $\forall a\in A.\exists b\in B.aRb$
34. **יחס ח"ע:** $\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.(aRb_1\wedge aRb_2)\implies b_1=b_2$
35. **הרכבה $R^{(n)}$:** $R^{(0)}=id_A\wedge R^{(n+1)}=R^{(n)}\circ R$
36. משפט. $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$
37. **$f(a)$:** $f(a)=\iota b\in B.\langle a,b\rangle\in f$
38. משפט. שוויון פונקציות:
$$f=g\iff\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)\wedge\forall x\in\mathrm{dom}(f).f(x)=g(x)$$
39. **יחס הזהות:** $id_A=\lambda x\in A.x$
40. משפט. $R\circ id_A=R=id_A\circ R$
41. **פונ' קבועה:** $f=\lambda x\in A.t$
42. **סדרה:** $\mathrm{dom}(f)\subseteq\mathbb{N}$
43. **הפונקציה האופיינית:** $\chi_A^{(E)}=\lambda x\in E.\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$
44. **תמונה:** $f[X]=f(a)\mid a\in X\quad(X\subseteq A)$
45. **קבוצת המקורות:** $f^{-1}[Y]=\{a\in A\mid f(a)\in Y\}\quad(Y\subseteq A)$
46. **תחשיב למדא:**

α. החלפת משתנה: $\lambda x\in A.t=\lambda y\in A.t(^{y}/_{x})$

β. הצבה: $(\lambda x\in A.t)(S)=t(^{S}/_{x})$

η. אסטנציונליות:
$$\lambda x.f(x)=\lambda x.g(x)\iff\forall a\in A.(\lambda x.f(x))(a)=(\lambda x.g(x))(x)$$

47. **חח"ע:** $\forall a_1,a_2\in A.f(a_1)=f(a_2)\implies a_1=a_2$
48. **על:** $\forall b\in B.\exists a\in A.f(a)=b$
49. משפט. בהינתן $f\colon A\to,\ y\colon B\to C$:

א) $g\circ f$ חח"ע $\Longleftarrow$ f חח"ע $\iff$ f הפיכה משמאל $\iff$ f^{-1} חח"ע.

ב) $g\circ f$ על $\Longleftarrow$ g על $\iff$ g הפיכה מימין $\iff$ g^{-1} מלא.

ג) f,g חח"ע $\Longleftarrow$ $f\circ g$ חח"ע.

ד) f,g על $\Longleftarrow$ $f\circ g$ על.

ה) f זיווג $\iff$ f^{-1} פונקציה $\iff$ f הפיכה.

50. **זיווג** אמ"מ חח"ע ועל.
51. הפיכות:

א) f **הפיכה מימין** $\exists y\in B\to A.g\circ f=id_A$

ב) f **הפיכה משמאל** $\exists y\in B\to A.f\circ g=id_A$

ג) f **הפיכה** אמ"מ היא הפיכה מימין ומשמאל.

52. **אקסיומת הבחירה:** עבור $X=\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות, קיימת $f\colon X\to\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha$ כך ש־$\forall\alpha\in I.f(S_\alpha)\in S_\alpha$. (AC)
53. קיימת $f\colon A\to B$ אמ"מ קיימת $f\colon B\to A$ $\cancel{(AC)}$
54. **פונקציית Curry:**
$$\mathrm{Cu}=\lambda f\in(A\times B)\to C.\lambda x\in A.\lambda y\in B.f(\langle x,y\rangle)$$

3.2 יחסי שקילות

55. **רפלקסיביות:** $\forall a \in A.aRa$
56. **סימטריות:** $\forall a, b \in A.aRb \to bRa$
57. **טרנזיטיביות:** $\forall a, b, c \in A.aRb \land bRc \to aRc$
58. **יחס שקילות:** רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.
59. משפט.
    א) R רפלקסיבי $\iff id_A \subseteq R$
    ב) R סימטרי $\iff R^{-1} = R$
    ג) R טרנזיטיבי אמ"ם $R \circ R \subseteq R$
60. **מחלקת שקילות:** $[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$
61. **קבוצת מנה:** $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$
62. משפט. יהיו $a, b \in A$: $[a]_R = [b]_R \lor [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
63. משפט. הטענות הבאות שקולות:
$$b \in [a]_R \iff bRa \iff aRb \iff a \in [b]_R \iff [a]_R = [b]_R$$
64. **מערכת נציגים** T מקיימת את התנאים הבאים:
    א) קיום נציג: $\forall a \in A.\exists x \in T.\langle a, x\rangle \in R$
    ב) יחידות: $\forall a \in A.\forall x, y \in T.(aRx \land aRy) \implies x = y$
65. משפט. T מערכת נציגים אמ"מ: $\forall X \in A/R.X \cap T = 1$.
66. **חלוקה** Π היא קבוצה המקיימת:
    א) ללא קבוצה ריקה: $\varnothing \notin \Pi$
    ב) $\biguplus_{X \in \Pi} X =: \bigcup \Pi = A$
    ג) זרות בזוגות: $\forall x, y \in \Pi.x \cap y = \varnothing \implies x = y$
67. משפט. קבוצת המנה היא חלוקה של A
68. **היחס המשרה:** $R_\Pi = \bigcup_{X \in \Pi}(X \times X)$
69. משפט. R_Π יחס שקילות.
70. משפט. $R_{A/S} = S,\ A/(R_\Pi) = \Pi$
71. **בלתי תלויה בנציג:** $\forall x, y \in A.xRy \implies f(x) = f(y)$
72. משפט. אם פונקציה בלתי־תלויה בנציג אז $\lambda[x]_R \in A/R.f(x)$ היא פונקציה מוגדרת־היטב.

3.3 יחסי סדר

73. **אנטי־סמטרי חלש:** $\forall a, b \in A.(aRb \land bRa) \to a = b$
74. **אנטי־סימטרי חזק:** $\forall a, b \in A.aRb \to \neg bRa$
75. **יחס סדר חלש** הוא טרנזיטיבי, אנטי־סמטרי חלש ורפלקסיבי.
76. **יחס סדר חזק** הוא טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי חזק.
77. **קבוצה סדורה** הוא $\langle A, R\rangle$ כאשר R יחס סדר על A.
78. **ברי־השוואה:** $\forall a, b \in A.a = b \lor aRb \lor bRa$
79. **יחס סדר קווי:** (מלא) כל איבריו ברי השוואה.
80. **יחס הסדר הלקסיקוגרפי:**
$$\langle a, b\rangle <_{lex} \langle c, d\rangle \iff (a < c) \lor (a = c \land b < d)$$
81. משפט. אם R יחס סדר חזק, אז $R \cup id_A$ יחס סדר חלש.
82. משפט. אם R יחס חזק חלש, אז $R \setminus id_A$ יחס סדר חזק.
83. עבור $X \subseteq A,\ x \in X$:
    א) **איבר מינימלי:** $\forall y \in X.(y = x) \lor (\neg yRx)$
    ב) **איבר מקסימלי:** $\forall y \in X.(y = x) \lor (\neg xRy)$
    ג) **איבר גדול־ביותר:** $\forall y \in X.y = x \lor yRx$
    ד) **איבר קטן־ביותר:** $\forall y \in X.y = x \lor xRy$
84. משפט. x איבר גדול ביותר $\impliedby$ x מקסימלי, אמ"מ ביחס סדר קווי.
85. משפט. x איבר קטן ביותר $\impliedby$ x מינימלי, אמ"מ ביחס סדר קווי.
86. בהינתן $\langle A, \leq_A\rangle, \langle B, \leq_B\rangle$ יתקיים f **שומרת סדר** אם:
$$\forall a_1, a_2 \in A.a_1 \leq_A a_2 \iff h(a_1) \leq_B h(a_2)$$

4 עוצמות

87. $\boldsymbol{A = B}$: קיים זיווג $f\colon A \to B$.
88. $\boldsymbol{|A| \leq |B|}$: קיים $f\colon A \to B$ חח"ע.
89. $\boldsymbol{|A| \neq |B|}$: לא קיים $f\colon A \to B$ זיווג.
90. $\boldsymbol{|A| < |B|}$: $|A| \neq |B| \land |A| \leq |B|$.
91. לכל $|A| = a, |B| = b, |C| = c$ עוצמות:
$$a = a,\ A \subseteq B \implies a < b,\ a = b \iff b = a,$$
$$a = b \land b = c \implies a = c,\ a \leq b \land b \leq c \implies a \leq c,$$
$$a = b \land b < c \implies a < c,\ a < b \land b = c \implies a < c$$
92. משפט. $|A| \leq |B|$ אמ"מ קיימת $f\colon B \to A$ על. ~~(AC)~~
93. בהינתן $|A| = |A'|,\ |B| = |B'|$:
$$|A \times B| = |A' \times B'|,\ |A \to B| = |A' \to B'|,\ |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$$
$$|A \times B| = |A' \times B|,\ |A \to B| = |A' \to B|,\ |B \to A| = |B' \to A|$$
$$|A \uplus B| \leq |A' \uplus B|$$
94. משפט. משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב):
$$|A| \leq |B| \land |B| \leq |A| \iff |A| = |B|$$
95. $\mathbb{N}_n$: $\mathbb{N}_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$
96. **סופית:** $\exists n \in \mathbb{N}.|A| = |\mathbb{N}_n|$
97. **אין־סופית:** לא סופית.
98. משפט. $\forall n < m.|\mathbb{N}_n| < |\mathbb{N}_m|$
99. משפט. X סופית ו־$Y \subseteq X$ אז Y סופית.
100. משפט. X סופית ו־$Y \nsubseteq X$ אז $|Y| < |X|$.
101. משפט. לכל A סופית: $\exists! n \in \mathbb{N}.|A| = |\mathbb{N}_n|$
102. $\boldsymbol{|A| \leq n}$: $|A| \leq |\mathbb{N}_n|$
103. $\boldsymbol{|A| < n}$: $|A| < |\mathbb{N}_n|$
104. משפט. לכל $|A|$ סופית: $|A| < \aleph_0$.
105. משפט. לכל A אין־סופית: $\aleph_0 \leq A$. (AC)
106. משפט. לכל A אין־סופית קיימת $B \subseteq A$ כך ש־$|A| = |B|$. (AC)
107. **אלף־אפס:** $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
108. **עוצמת הרצף:** $\aleph = 2^{\aleph_0}$
109. **בת־מנייה:** מעוצמה $\aleph_0$.
110. משפט. הקבוצות $\mathbb{N}_{\text{even}}, \mathbb{N}_{\text{odd}}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^n$ הן בנות מנייה.
111. משפט. איחוד לכל היותר בן מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בן מנייה:
$$\forall |I| = \aleph_0.\forall i \in I.|A_i| \leq \aleph_0 \implies \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \leq \aleph_0 \quad (AC)$$
112. משפט. לכל קבוצה סופית לא ריקה מוכלת בטבעיים קיים מקסימום.
113. משפט. משפט קנטור: $|A| < \mathcal{P}(A)$
114. משפט. $|R| = \aleph$ (עוצמת הרצף).
115. [לא בחומר] $\aleph_1$ היא העוצמה שבאה לאחר $\aleph_0$.
116. **השערת הרצף:** $\nexists X.\aleph_0 < |X| < \aleph$ (כלומר $\aleph_1 = \aleph$).

4.1 חשבון עוצמות

117. חשבון עוצמות:
    א) **חיבור עוצמות:** $|A| + |B| = |(A \times \{0\}) \uplus (B \times \{1\})|$
    ב) **כפל עוצמות:** $|A| \cdot |B| = |A \times B|$
    ג) **חזקת עוצמות:** $|A|^{|B|} = |B \to A|$
118. זהות. יהיו a, b, c עוצמות:
    א) קומטטיביות: $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
    ב) אסוציטיביות: $a + (b + c) = (a + b) + c,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
    ג) דיסטריבוטיביות: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

119. זהות. על עוצמה $0,1$:

$$a+0=a,\ a\cdot 1=a,\ a\cdot 0=0,\ a^0=1,\ 1^a=1, a\neq 0\Longrightarrow 0^a=0$$

120. זהות. $\forall n\in\mathbb{N}_+.\ \underbrace{a+\cdots+a}_{n\text{ times}}=a\cdot n,\ \underbrace{a\cdot\ldots a}_{n\text{ times}}=a^n$

121. משפט. מונוטוניות: לכל $a\leq b, c\leq d$ עוצמות:

$$a+c\leq b+d,\ a\cdot c\leq b\cdot d, a^c\leq a^d,\ a^c\leq b^c$$

122. זהות. חוקי חזקות: לכל a,b,c,d עוצמות:

$$(a^b)^c=a^{b+c},\ (a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c,\ a^{b+c}=a^b\cdot a^c$$

123. משפט.

$$\aleph_0+2^{\aleph_0}=\aleph_0\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$$
$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

124. משפט. לכל עוצמה אינסופית a: $a+\aleph_0=a$

125. משפט. לכל עוצמה אינסופית a: $a+n=a$

ייתכנו שגיאות

שחר פרץ, 2024

sheave.lariat-0h@icloud.com