מתמטיקה B ~ תרגיל בית 2 ~ גבולות, נגזרות ופונקציות היפרבוליות

שחר פרץ

17 ביוני 2024

טענות עזר (לא באמת השתמשתי בהן אבל לא בא לי למחוק)

הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{\cos x}{ax}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

נרצה להוכיח $\tanh x < x < \sinh x$, לכל $x > 0$. ראשית כל נוכיח את אי־השוויון $\tanh x < x$:

$$\begin{aligned}
\tanh x < x &\iff \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} < x && \cdot(e^x+e^{-x})\\
&\Longleftarrow e^x-e^{-x} < e^{x+1}-e^{-x+1} && -e^{x+1}+e^{-x}\\
&\iff e^x-e^{x+1} < e^{-x}-e^{-x+1}\\
&\iff e^x(1-e) < e^{-x}(1-e) && \cdot(1-e)^{-1}\\
&\iff e^x < e^{-x} && \ln\\
&\iff x < -x
\end{aligned}$$

כאשר הא"ש האחרון לכל $x > 0$, כדרוש. ועבור הכיוון השני:

$$x<\sinh x \iff x<\frac{e^x-e^{-x}}{2} \Longleftarrow \frac{1}{2}<e^{x-1}-e^{-x-1}<e^{x-1}-e^{-x+1}=\sinh(x-1)$$

ומשום שיש שוויון הדוק עבור בסיס 0, הטענה תתקיים באינדוקציה לכל $x\in\mathbb{N}$, וממשפט ערך הביניים, לכל $x \geq 0$ כדרוש.

1

נרצה לחשב את הגבולות הבאים:

.a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(0.5x(a+b))\sin(0.5x(a-b)))}{x^2}\\
&= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x0.5(a+b))}{x}\cdot\frac{\sin(x0.5(a-b))}{x}\\
&= -2\lim_{x\to 0}0.5(a+b)\cdot 0.5(a-b)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)}
\end{aligned}$$

.b

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(\sin x)}{1+\cos(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1^2-\cos^2(\sin x)}{x^2(1+\cos(\sin x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin x)}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\sin x)}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)^2 && \ell et\ t:=\sin x\\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(מותר להוציא את הריבוע מהגבול תחת ההנחה שקיים גבול סופי)

.c

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(5x+3)}{\sec(\sqrt{x}+2)}\sin(\cos x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x+3)\cos(\sqrt{x}+2)\sin(\cos x)}{\cos(5x+3)}=\frac{\sin 3+\cos 2+\sin 1}{\cos 3}=\mathbf{0.05}$$

d. נרצה לחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. כדי לפתור את הגבול לעיל, ניעזר בגבול הבא:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} && \text{let } t=\tfrac{1}{x}\\
&=\lim_{t\to\infty} t\cdot\left(\sqrt[t]{e}-1\right) && \text{Since } \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^t=e \implies \sqrt[t]{e}=1+\tfrac{1}{t}\right]\\
&=\lim_{t\to\infty} t\cdot\left(1+\frac{1}{t}-1\right) && \text{Simplification}\\
&=\lim_{t\to\infty} t\cdot\frac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t}=1
\end{aligned}$$

(אני לא יודע, אבל אני מקווה שלהוציא שורש בתוך גבול זה חוקי). נחזור לגבול המקורי:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}\left(e^{(a-b)x}-1\right)}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\underbrace{e^{bx}}_{=1}\cdot(a-b)\frac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x} && \text{let } t=(a-b)x\\
&=\lim_{t\to 0}(a-b)\cdot\frac{e^t-1}{t} && \text{לפי הגבול שכבר הוכח}\\
&=\boldsymbol{a-b}
\end{aligned}$$

e. לפי הסעיף הקודם:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-e^{x\ln b}}{x}=\boldsymbol{\ln a-\ln b}$$

2

a.

$$\begin{aligned}
\tanh(x\pm y)&=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh(x\pm y)}=\frac{\cosh x\sinh y\pm\sinh x\cosh y}{\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y} && \cdot\frac{1}{\cosh x\cosh y}\\
&=\frac{\frac{\sinh y}{\cosh y}\pm\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1\pm\frac{\sinh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}}=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh\tanh y}
\end{aligned}$$

b. נתבסס על הזהות $\sinh(-x)=-\sinh x$, כדי להוכיח את הזהות לחיבור sinh, שמתקיימת כי:

$$\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}=-\sinh x$$

כדי להוכיח את הזהות:

$$\begin{aligned}
&2\sinh\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x\mp y}{2}\right) && \text{לפי הגדרה}\\
&=\left(e^{0.5(x\pm y)}-e^{0.5(-x\mp y)}\right)\left(e^{0.5(x\mp y)}+e^{0.5(-x\pm y)}\right) && \text{גורם משותף}\\
&=e^{0.5(x\mp y)}\left(e^{0.5(x\pm y)}-e^{0.5(-x\mp y)}\right)+e^{0.5(-x\pm y)}\left(e^{0.5(x\pm y)}-e^{0.5(-x\mp y)}\right)\\
&=e^x-e^{\mp y}+e^{\pm y}-e^{-x}=e^x-e^{-x}+e^{\pm y}-e^{\mp y}\\
&=\sinh x+\sinh\pm y && \text{לפי הזהות לעיל}\\
&=\sinh x\pm\sinh y
\end{aligned}$$

c. ניחוש:

$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

(הנוסחה הטרגיונומטרית + החלפת סימן)

.d

$$\operatorname{arccosh} x \overset{!}{=} \ln(x+\sqrt{x^2+1}) := y$$

כדי להוכיח זאת, נגדיר $x=\cosh y$ ו-$y\geq 0$ (כי $\cosh$ פונקציה זוגית, לכן נרצה לבחור מראש תחום לפונקציה ההופכית). נקבל:

$$\cosh y = x \iff \frac{e^y+e^{-y}}{2} = x \iff e^{2y}+1 = 2xe^y$$

משום שהפונקציה $\cosh x$ חח"ע (מהיותה מונוטונית עולה חזק) בתחום $x\geq 0$, אזי אם נציב את ערך y ונקבל טואטולוגיה, נסיק שזהו הערך היחיד שיענה על ההגדרה:

$$\begin{aligned}(x+\sqrt{x^2-1})^2+1 &= 2x(x+\sqrt{x^2-1})\\ x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+1 &= 2x^2+2x\sqrt{x^2-1}\\ 2x^2+2x\sqrt{x^2-1} &= 2x^2+2x\sqrt{x^2-1}\\ 0&=0\end{aligned}$$

ואכן מצאנו טוטולוגיה.

3

.a נגזרת הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ לפי הגדרה:

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\sqrt{x+h}+h\sqrt{x}} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^{-0.5}}\end{aligned}$$

.b נגזרת הפונקציה $f(x)=\cos x$ לפי הגדרה:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+h+(-x)}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-(-x)}{2}\right)}{h} = -\sin(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{=1} = \boldsymbol{-\sin x}$$

4

.1

$$[\ln(\tan x)]' = \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \cot x\sec^2 x$$

.2

$$\left[\sin\left(e^{\cos(x^2)}\right)\right]' = -\cos\left(e^{\cos x^2}\right)e^{\cos x^2}\sin x^2\cdot 2x$$

5

.a צ.ל. $f\colon I\to J\subseteq\mathbb{R}$ גזיקה והפיכה בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$, גורר שהנגזרת בנקודה $y\in J$ של הפונקציה הבאה היא:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))}$$

הוכחה. נוכיח באמצעות הנוסחה להרכבת פונקציות:

$$\begin{aligned}
\left[f(f^{-1}(y))\right]' &= f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) \quad \cdot\tfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\
\frac{[f(f^{-1}(y))]'}{f'(f^{-1}(y))} &= (f^{-1})'(y) \quad \text{Since } f(f^{-1}(x)) = x \\
(f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}
\end{aligned}$$

■

b. נחשב את הנגזרות של ההופכיות לפונקציות הטריגונומטריות וההיפר־טריגונומטריות.

פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}
\mathbf{arcsin'} &= \frac{1}{\sin'(\sin^{-1})}\frac{1}{\cos(\arcsin)} = \sec(\arcsin) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin)}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\
\mathbf{arccos'} &= \frac{1}{\cos'(\cos^{-1})}\frac{1}{-\sin(\arccos)} = -\csc(\arcsin) \\
&= \frac{1}{-\sqrt{\sin^2(\arccos)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos)}} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\
\mathbf{arctan'} &= \frac{1}{\tan'(\tan^{-1})} = \frac{1}{\cos^{-2}(\arctan)} = \cos^2(\arctan) \\
&= \frac{1}{\sec^2(\arctan)} = \frac{1}{\tan^2(\arctan)+1} = \boldsymbol{\frac{1}{x^2+1}}
\end{aligned}$$

פונקציות היפרבוליות:

$$\begin{aligned}
\mathbf{arcsinh'} &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh})} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcsinh})}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsinh})}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \\
\mathbf{arccosh'} &= \frac{1}{\sinh(\operatorname{arccosh})} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{arccosh})}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcsinh})-1}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \\
\mathbf{arctanh'} &= \frac{1}{\operatorname{sech}^2(\operatorname{arctanh})} = \frac{1}{1-\tanh^2(\arctan)} = \boldsymbol{\frac{1}{1-x^2}}
\end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned}
&x^2\tan y + y^{10}\sec x = 2x \\
\Longrightarrow\quad & 2x\tan y + x^2y'\sec^2 y + 10yy'\sec x + y^{10}\tan x\sec x = 2 \\
\Longrightarrow\quad & y'(x^2\sec^2 y + 10y\sec x) = 2 - 2x\tan y - y^{10}\tan x\sec x \\
\Longrightarrow\quad & \boldsymbol{y' = \frac{2-2x\tan y - y^{10}\tan x\sec x}{x^2\sec^2 y + 10y\sec x}}
\end{aligned}$$

שחר פרץ, 2024