שם התלמיד/ה:______________________ **תעודת זהות:** ____________________ **19.12.2022**

מתמטיקה בדידה – פתרון בוחן אמצע סמסטר א'

מרצה: נטלי שלום

הוראות בחינה:

- משך הבחינה: שעתיים (120 דקות).
- אין לצרף דפי עזר לבחינה.
- בבחינה ישנן 4 שאלות עם סעיפים. יש לענות על כל השאלות.
- יש להוכיח כל טענה שלכם, אלא אם כן מצוין בשאלה שלא צריך להוכיח.
- את התשובה לכל שאלה כתבו במקום המיועד לה (בתוך המלבן שמתחת לכל שאלה). בעמודים האחרונים מצורפים דפי "חירום" למקרה הצורך.
- המחברת הנלווית לטופס הבחינה לא תיבדק והיא מהווה דפי טיוטה עבורכם.
  שימו לב: דפי הטיוטה לא ייבדקו!
- **טיפ חשוב:** תתחילו לפתור קודם את השאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח, בנושאים שיותר קלים לכם, ואת השאלות הקשות תשמרו לסוף כדי לא לבזבז עליהן את כל הזמן.
- חובה לקחת נשימה עמוקה לפני תחילת הבחינה ולחשוב על דברים חיוביים.

בהצלחה!!!

	שאלה 1	**שאלה 2**	**שאלה 3**	**שאלה 4**
ציון	א ____ ב ____	א _____ ב _____		א _____ ב _____ ג _____

ציון סופי: ______________

שאלה 1

הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. (8 נק')

$$\bigcap_{k=3}^{\infty} P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right) \subseteq P\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$$

סמנו: הטענה נכונה / לא נכונה. **פתרון:**

הטענה נכונה. נוכיח את ההכלה:

$$\bigcap_{k=3}^{\infty} P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right) \subseteq P\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$$

יהי $x \in \bigcap_{k=3}^{\infty} P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right)$. אז מהגדרת חיתוך מוכלל, לכל $k \geq 3$ מתקיים $x \in P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right)$. בפרט עבור $k=3$ נקבל $x \in P\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$ ומכאן ההכלה.

ב. (8 נק')

$$P([0,1]) \subseteq \bigcup_{k=3}^{\infty} P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right)$$

סמנו: הטענה נכונה / לא נכונה. **פתרון:**

הטענה לא נכונה. למשל: $[0,1] \in P([0,1])$, אבל $[0,1] \notin \bigcup_{k=3}^{\infty} P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right)$. נוכיח זאת: נניח בשלילה שהוא כן שייך, אז קיים $k \geq 3$ כך ש-$[0,1] \in P\left(\left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]\right)$, כלומר $[0,1] \subseteq \left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]$. בפרט $0 \in \left[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right]$, כלומר $\frac{1}{k} \leq 0 \leq 1-\frac{1}{k}$, וזו סתירה כי $\frac{1}{k}$ חייב להיות מספר חיובי.

<u>תזכורת:</u> עבור $a, b \in \mathbb{R}$, מסמנים:

קטע פתוח: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$. קטע סגור: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.

שאלה 2

<u>תזכורת</u>: הרכבת יחסים: $T \circ P = \{\langle a,c\rangle \in A \times C \mid \exists b \in B \ (\langle a,b\rangle \in P \wedge \langle b,c\rangle \in T)\}$

א. נגדיר $S = \{\langle A,B\rangle \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \mid A \subsetneq B\}$. ($\subsetneq$ משמעותו "מוכלת ממש")
הוכיחו/הפריכו: $S \circ S = S$. (10 נקי')

הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $\langle \emptyset, \{1\}\rangle \in S$ כי $\emptyset \subsetneq \{1\}$.
נניח בשלילה ש- $\langle \emptyset, \{1\}\rangle \in S \circ S$. אז יש $B \subseteq \mathbb{N}$ כך ש-$\emptyset \subsetneq B \wedge B \subsetneq \{1\}$.
מכך ש-$\emptyset \subsetneq B$ נובע ש-B לא ריקה, כלומר שקיים $b \in B$. מכך ש-$B \subsetneq \{1\}$ נובע ש-$B \subseteq \{1\} \wedge B \neq \{1\}$.
מההכלה, נובע ש-$b \in \{1\}$ ולכן $b = 1$, כלומר $1 \in B$. מצד שני, זה אומר ש- $\{1\} \subseteq B$ ומהכלה דו כיוונית נובע $B = \{1\}$, וזו סתירה.

ב. נגדיר $R = \{\langle q,q'\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid q < q'\}$. הוכיחו/הפריכו: $R \circ R = R$. (10 נקי')

הטענה נכונה. נוכיח הכלה דו כיוונית:

- $R \subseteq R \circ R$: יהי $\langle q,q'\rangle \in R$, אז $q < q'$. נמצא $b \in \mathbb{Q}$ כך ש-$q < b \ \wedge \ b < q'$. נבחר $b = \frac{q+q'}{2}$ (הממוצע בין q,q'). אז מתקיים:

$$b = \frac{q+q'}{2} < \frac{q'+q'}{2} = \frac{2q'}{2} = q' \ \Rightarrow \ b < q' \ \Rightarrow \ bRq'$$
$$b = \frac{q+q'}{2} > \frac{q+q}{2} = \frac{2q}{2} = q \ \Rightarrow \ b > q \ \Rightarrow \ qRb$$

כלומר $bRq' \ \wedge \ qRb$ ולכן $\langle q,q'\rangle \in R \circ R$.

- $R \circ R \subseteq R$: יהי $\langle q,q'\rangle \in R \circ R$. אז יש $b \in \mathbb{Q}$ כך ש-$bRq' \ \wedge \ qRb$, כלומר כך ש-$q < b \ \wedge \ b < q'$. מטרנזיטיביות היחס $<$ נובע $q < q'$ ולכן $\langle q,q'\rangle \in R$.

סה"כ הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן יש שוויון בין הקבוצות.

שאלה 3

נגדיר את היחסים הבאים מעל $P(\mathbb{R})$:

$$S=\{\langle X,Y\rangle\in P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})\mid X=Y\ \vee\ 0\in X\Delta Y\}$$
$$T=\{\langle X,Y\rangle\in P(\mathbb{R})\times P(\mathbb{R})\mid 0\notin X\Delta Y\}$$

עבור כל אחד מהיחסים, קבעו האם הוא יחס שקילות והוכיחו את קביעתכם. אם היחס הוא יחס שקילות, מצאו מערכת נציגים עבורו (אין צורך להוכיח שזו מערכת נציגים). (30 נק׳)

<u>תזכורת:</u> הפרש סימטרי - $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

S לא יחס שקילות כי הוא לא טרנזיטיבי. דוגמה: נבחר $X=\emptyset,\ Y=\{0\},\ Z=\{1\}$. אז $0\in X\Delta Y\wedge 0\in Y\Delta Z$ ולכן $\langle X,Y\rangle\in S\wedge\langle Y,Z\rangle\in S$. אבל, לא מתקיים $\langle X,Z\rangle\in S$ כי $Z\neq X$ וגם $X\Delta Z=\{1\}\setminus\emptyset=\{1\}$, לכן $0\notin X\Delta Z$.

T יחס שקילות. נוכיח זאת:

<u>רפלקסיבי:</u> לכל $X\in P(\mathbb{R})$ מתקיים $X\Delta X=\emptyset$ ולכן $0\notin X\Delta Z$, ואז $\langle X,X\rangle\in T$.

<u>סימטרי:</u> לכל $X,Y\in P(\mathbb{R})$, אם מתקיים $\langle X,Y\rangle\in T$ אז $0\notin X\Delta Y$ ולכן $0\notin Y\Delta Z$, ואז $\langle Y,X\rangle\in T$.

<u>טרנזיטיבי:</u> נניח $\langle X,Y\rangle\in T\wedge\langle Y,Z\rangle\in T$. אז $0\notin X\Delta Y\wedge 0\notin Y\Delta Z$.

מכך ש-$0\notin X\Delta Y$ נובע $0\notin(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$, ומכך ש-$0\notin Y\Delta Z$ נובע $0\notin(Y\cup Z)\setminus(Y\cap Z)$.

נפריד למקרים:

- אם $0\in X\cup Y$: אז $0\in X\cap Y$ כי אחרת $0\in X\Delta Y$ בסתירה. בפרט, $0\in Y$ ולכן $0\in Y\cup Z$. אז מכך ש-$0\notin Y\Delta Z$ נובע ש-$0\in Y\cap Z$ ובפרט $0\in Z$. סה"כ, נקבל $0\in X\cup Z\wedge 0\in X\cap Z$ ולכן $0\notin(X\cup Z)\setminus(X\cap Z)$, ולכן $0\notin X\Delta Z$ וסה"כ $\langle X,Z\rangle\in T$.
- אם $0\notin X\cup Y$: אז $0\notin Y\wedge 0\notin X$. נוכיח $0\notin Z$. נניח בשלילה ש-$0\in Z$. אז $0\in Z\setminus Y$ ואז $0\in Y\Delta Z$, בסתירה. לכן $0\notin Z$, ואז $0\notin X\cup Z$ ואז $0\notin X\Delta Z$ וסה"כ $\langle X,Z\rangle\in T$.

בשני המקרים הגענו למסקנה $\langle X,Z\rangle\in T$ ולכן T טרנזיטיבי.

סה"כ הוכחנו ש-T יחס שקילות.

מערכת נציגים לדוגמה: $\{\{0\},\emptyset\}$.

שאלה 4

נגדיר פונקציה h באופן הבא:

$$h = \lambda f \in \mathbb{R} \to \mathbb{N}.\ \lambda Y \in P(\mathbb{N}).\ f^{-1}[Y]$$

<u>תזכורת:</u> עבור פונק' g ו-$Y \subseteq Range(g)$, מגדירים: $g^{-1}[Y] = \{x \in dom(g) | g(x) \in Y\}$ (קבוצת מקורות).

א. רשמו תחום וטווח עבור הפונקציה h (אין צורך להוכיח את תשובתכם). (6 נק')
נא לא להשתמש בקבוצה $\mathbb{C}$, אין בה צורך.

$$dom(h) = \mathbb{R} \to \mathbb{N}$$
$$Range(h) = P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{R})$$

ב. חשבו: (אין צורך להוכיח את תשובתכם) (8 נק')
<u>תזכורת:</u> עבור $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil \coloneqq \min\{k \in \mathbb{Z} \mid x \leq k\}$ (הערך השלם העליון של x)

$$h(\lambda x \in \mathbb{R}. |\lceil x \rceil|)(\{0\}) = (-1,0]$$

$$h(\lambda x \in \mathbb{R}. |\lceil x \rceil|)(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}) = (-\infty, 2] \cup (1, \infty)$$

ג. האם הפונקציה h היא חח"ע (חד-חד ערכית)? האם הפונקציה h היא על (ביחס לטווח שרשמתם)?
הוכיחו את קביעותיכם. (20 נק')

h חח"ע: נניח $f_1, f_2 \in \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ שונות. מכיוון שהן פונקציות בעלות אותו תחום, נובע שקיים $x_1 \in \mathbb{R}$ כך ש-$f_1(x_1) \neq f_2(x_1)$ (שני מספרים טבעיים שונים).
נוכיח $h(f_1) \neq h(f_2)$, כלומר שהן שתי פונקציות שונות, כלומר שקיים $A \in P(\mathbb{N})$ כך ש-$h(f_1)(A) \neq h(f_2)(A)$, כלומר כך ש-$f_1^{-1}[A] \neq f_2^{-1}[A]$. נבחר $A = \{f_1(x_1)\}$. אז:

$$x_1 \in \{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) \in A\} = f_1^{-1}[A] = h(f_1)(A)$$

אבל מאחר ש-$f_1(x_1) \neq f_2(x_1)$ מתקיים:

$$x_1 \notin \{x \in \mathbb{R} \mid f_2(x) \in A\} = f_2^{-1}[A] = h(f_2)(A)$$

כלומר, מצאנו איבר x_1 ששייך רק לאחת מהקבוצות $h(f_2)(A), h(f_1)(A)$ ולכן הן שונות, וסה"כ $h(f_1) \neq h(f_2)$ ולכן h חח"ע.

המשך פתרון שאלה 4 סעיף ג' (במידת הצורך)

h **לא על:** דוגמה נגדית: נקח $g = \lambda Y \in P(\mathbb{N}) .\mathbb{R}$ (פונקציה קבועה שמחזירה תמיד $\mathbb{R}$). $g \in P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{R})$
כלומר היא אכן איבר בטווח של h.
נניח בשלילה שקיימת $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ כך ש-$h(f) = g$. כלומר, לכל $Y \in P(\mathbb{N})$ מתקיים $h(f)(Y) = g(Y)$, כלומר

$$\forall Y \in P(\mathbb{N}) .\ f^{-1}[Y] = g(Y) = \mathbb{R}$$

בפרט עבור $Y = \emptyset$ מתקיים $f^{-1}[\emptyset] = \mathbb{R}$, כלומר

$$\mathbb{R} = f^{-1}[\emptyset] = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$$

קיבלנו $\mathbb{R} = \emptyset$ וזו סתירה.

דף "חירום" 1

דף "חירום" 2

דף "חירום" 3