

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 9

ניתן בתאריך 10.1.2024. להגשה עד יום שלישי 16.1.2024 בשעה 23:59.

1. יהיו A, B קבוצות לא ריקות, ותהי $f \in A \rightarrow B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- (א) אם f הפיכה משמאל (כלומר, קיימת $g \in B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = id_A$) אז ההופכית משמאל של f היא יחידה.
 (ב) אם f הפיכה מימין (כלומר, קיימת $g \in B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ g = id_B$) אז ההופכית מימין של f היא יחידה.
 (ג) קיימת פונקציה $g : B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = id_A$ אם ורק אם f הפיכה.
 (ד) קיימת פונקציה $g : B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ g = id_B$ אם ורק אם f הפיכה.
 (ה) f חח"ע אם ורק אם קיימת $g \in B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = id_A$.

2. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות הוכיחו שהיא הפיכה ע"י מציאת פונקציה הופכית (הוכיחו שההרכבה משני הכיוונים עם ההופכית שמצאתם שווה לפונקציית הזהות).

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 1}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{א})$$

$$f = \lambda \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \langle x + y, x - y \rangle, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{ב})$$

$$f = \lambda h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \lambda x \in \mathbb{R}. h(x + 1), f : (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (\text{ג})$$

$$f = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ -\frac{n+1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}, f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad (\text{ד})$$

(ה) פונקציית Curry:

$$Cu : ((A \times B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$Cu = \lambda f \in (A \times B) \rightarrow C. \lambda a \in A. \lambda b \in B. f(\langle a, b \rangle)$$

3. עבור הפונקציות הבאות כתבו: תחום הפונקציה, טווח אפשרי שלה, והאם הפונקציה חח"ע.
 - אם קבעתם שהפונקציה חח"ע, מצאו גם את התמונה שלה (אין צורך להוכיח שזו התמונה), וכתבו את הפונקציה ההופכית לה בכתוב למדא, כאשר תחום הפונקציה ההופכית הוא תמונת הפונקציה הנתונה. הוכיחו שהפונקציה שכתבתם היא אכן ההופכית, ע"י חישוב ההרכבה בשני הכיוונים.
 - אם קבעתם שהפונקציה היא לא חח"ע, הוכיחו זאת.

$$f = \lambda \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{odd}}). A \cup B \quad (\text{א})$$

$$f = \lambda g \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}. \lambda n \in \mathbb{N}. g(\{n\}) \quad (\text{ב})$$

$$f = \lambda h \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}. \lambda n \in \mathbb{N}. \sum_{i=0}^n h(i) \quad (\text{ג})$$

$$f = \lambda g \in (A \rightarrow B) \rightarrow C. \lambda a \in A. \lambda b \in B. g(\lambda a \in A. b), \text{ קבוצות לא ריקות, } A, B, C \quad (\text{ד})$$

4. תהי A קבוצה לא ריקה ונניח כי קיימת פונקציית זיווג $f : A \times A \rightarrow A$. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}_+$ קיימת פונקציית זיווג $f_n \in A^n \rightarrow A$.

$$\text{תזכורת: } A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n = \{\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \forall 1 \leq i \leq n. a_i \in A\}$$

5. לכל אפשרות של A להלן, הוכיחו או הפריכו את הטענה: לכל זיווג $f : A \rightarrow A$ קיים $n \in \mathbb{N}_+$ כך ש- $f^{(n)} = id_A$.

$$A = \mathbb{Z} \quad (\text{א})$$

$$A = \{1, 2, 3\} \quad (\text{ב})$$