לינארית 2א 15

שחר פרץ

9 ביוני 2025

LINEAR TRANSFORMATION ABOUT INNER PRODUCT VECTOR SPACES (1)

הגדרה 1. V ממ"פ ו־$T\colon V\to V$ ט.ל. אז T נקרתא סימטרית ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$) או הרמטית ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$) אם $\forall u,v\in V\langle Tu\mid v\rangle=\langle u,Tv\rangle$ באופן כללי, העתקה כזו תקרא צמודה לעצמה.

דוגמה. עבור $V=\mathbb{R}^n$ ו־$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ מ"פ סטנדרטית, עבור $A\in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $T_A\colon V\to V$ ט"ל. נקרא מתי היא מודה לעצמה – $\langle v\mid u\rangle=v^Tu$:

$$\langle T_Av\mid u\rangle=(Av)^Tu=v^TA^Tu=\left\langle v\,\middle|\,A^Tu\right\rangle$$

ז"א אם $A=A^T$ אז T_A סימטרית, כלומר A מטריצה סימטרית. גם הכיוון השני נכון: אם $T\colon V\to V$ סימטרית אז ע"י בחירת בסיס נקבל $[T]_B^B$ גם היא סימטרית.

משפט 1. העתקה סימטרית אמ"מ היא דומה למטריצה סימטרית.

משפט 2. יהיו $T,S\colon V\to V$ צמודות לעצמן. אז:

1. $\alpha T,T+S$ צמודות לעצמן.
2. המכפלה $S\circ T$ צמודה לעצמה אמ"מ $ST=TS$
3. אם p פולינום מעל $\mathbb{F}$ אז $p(T)$ צמדוה לעצמה.

קל לראות ש־$3\implies 1+2$. 1 נובע ישירות מהגדרה. נוכיח את 2.

הוכחה ל־2. נניח $S\circ T$ צמודה לעצמה. בהנחות המשפט ידוע S,T צמודות לעצמן. נקבל:

$$\langle (S\circ T)v\mid u\rangle=\langle v\mid STu\rangle=\langle Sv\mid Tu\rangle=\langle TSv\mid u\rangle\implies\langle (ST-TS)v\mid u\rangle=0\quad\forall v,u$$

נסיק:

$$\implies\forall v\,\langle (ST-TS)v\mid (ST-TS)v\rangle=0\implies (ST-TS)v=0\implies STv=TSv\implies\top$$

מהכיוון השני:

$$\langle STv\mid u\rangle=\langle S(Tv)\mid u\rangle=\langle v\mid TSu\rangle=\langle v\mid STu\rangle$$

■

הגדרה 2. $T\colon V\to V$ תקרא חיובית/אי־שלילית/שלילית/אי־חיובית אם:

- חיובית: $\langle Tv\mid v\rangle>0$
- שלילית: וכו'

משפט 3. אם T חיובית, אז היא הפיכה (כנ"ל לשלילית)

הוכחה. נניח ש־T לא הפיכה, נקרא שהיא לא חיובית. קיים $0\neq v\in V$. אז $v\in\ker T$, אז $\langle Tv\mid v\rangle=\langle 0\mid v\rangle=0$, בסתירה לכך ש־$T$ חיובית. ■

משפט 4. נניח ש־S צמודה לעצמה, אז S^2 צמודה לעצמה ואי־שלילית.

הוכחה. ממשפט קודם S^2 צמודה לעצמה. נוכיח אי־שלילית:

$$\forall 0\neq v\in V\colon\ \left\langle S^2v\,\middle|\,v\right\rangle=\langle Sv\mid Sv\rangle=||Sv||^2\geq 0$$

■

הגדרה 3. פולינום $p \in \mathbb{R}[x]$ יקרא חיובי אם $\forall x \in \mathbb{R} p(x) > 0$.

מסקנה. נניח $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ חיובי, ו־$T\colon V \to V$ צמודה לעצמה, אז $p(T)$ חיובית גם־כן, וצמודה לעצמה.

למה 1. אם $p \in \mathbb{R}[x]$ חיובי, אז קיימים $g_1 \dots g_k \in \mathbb{R}[x]$ וכן $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש־$p(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i^2(x) + c$

רעיון להוכחת הלמה: מעל $\mathbb{C}$ זה מתפרק, ונוכל לכתוב $p(x) = a_n \prod_{j=1}^{s}(x - i\alpha_j)(x + i\alpha_j)$ (מעל $\mathbb{R}$ כל פולינום מתפרק לגורמים ריבועיים, ואם כל שורשיו מרוכבים, כל גורמיו ריבועיים.). הרעיון הוא להוכיח את הטענה ש־$g^2 h\bar{h} = g_1^2 + g_2^2$.

הוכחה (של המשפט, לא של הלמה). יהי $0 \neq v \in V$. אז:

$$\langle p(T)v \mid v \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{k} g_i^2(T)v \,\middle|\, v \right\rangle}_{\sum_{i=1}^{k} \langle g_i^2(T)v \mid v \rangle \geq 0} + \overbrace{c \langle v \mid v \rangle}^{c||v||^2 > 0} \geq 0$$

■

מסקנה. אם $T\colon V \to V$ צמודה לעצמה ו־$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום חיובי, אז $p(T)$ הפיכה.

הוכחה. "תסתכלו על צד ימין של הלוח" $\sim$ המרצה ■

משפט 5. נניח ש־$T\colon V \to V$ סימטרית (צמודה מעצה מעל $\mathbb{R}$/המייצגת סימטרית) ויהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T. אז m_T מתפרק לגורמים לינאריים. בנוסף, הם שונים זה מזה.

מסקנה. T סימטרית לכסינה.

הוכחה. נניח בשלילה קיום $p \mid m_T$ ו־$\deg p \geq 2$, pאי־פריק. בה"כ נניח ש־p חיובי (אין לו שורש ב־$\mathbb{R}$, לכן נמצא כולו מעל/מתחת לציר ה־x). אז אפשר לכתוב את m_T כ־$m_T = p \cdot g$ כלשהו. ידוע $p(T) \neq 0$ כי m_T מינימלי מדרגה גבוהה יותר. אזי:

$$0 = m_T(T) = \underbrace{p(T)}_{\neq 0} \cdot g(T) \implies g(T) = 0$$

בסתירה למינימליות של m_T. סה"כ m_T אכן מתפרק לגורמים לינארים. עתה יש להראות שהגורמים הלינארים שלו זרים. נניח ש־T סימטרית. ניעזר בלמה המופיע מיד אחרי ההוכחה הזו. נניח בשלילה שהם לא כולם שונים, אז $m_T(x) = (x - \lambda)^2 g(x)$ ואז:

$$0 = m_T(T)v = (T - \lambda I)^2 g(T) \implies \omega = g(T)v,\ (T - \lambda I)^2 \omega = 0$$

לכן בפרט $(T - \lambda I)\omega = 0$ מהסעיף הקודם. סה"כ $\forall v \in V\colon (T - \lambda I)g(T) = 0$ וסתירה למינימליות. ■

למה 2. נניח T סממטרית ו־$\lambda \in \mathbb{R}$, אם $(T - \lambda I)^2 = 0$ אז $T - \lambda I = 0$.

הוכחה. ידוע:

$$\forall v\colon 0 = \left\langle (T - \lambda I)^2 v \,\middle|\, v \right\rangle = \langle (T - \lambda I)v \mid (T - \lambda I)v \rangle = ||(T - \lambda I)v||^2 \implies (T - \lambda I)v = 0$$

■

....