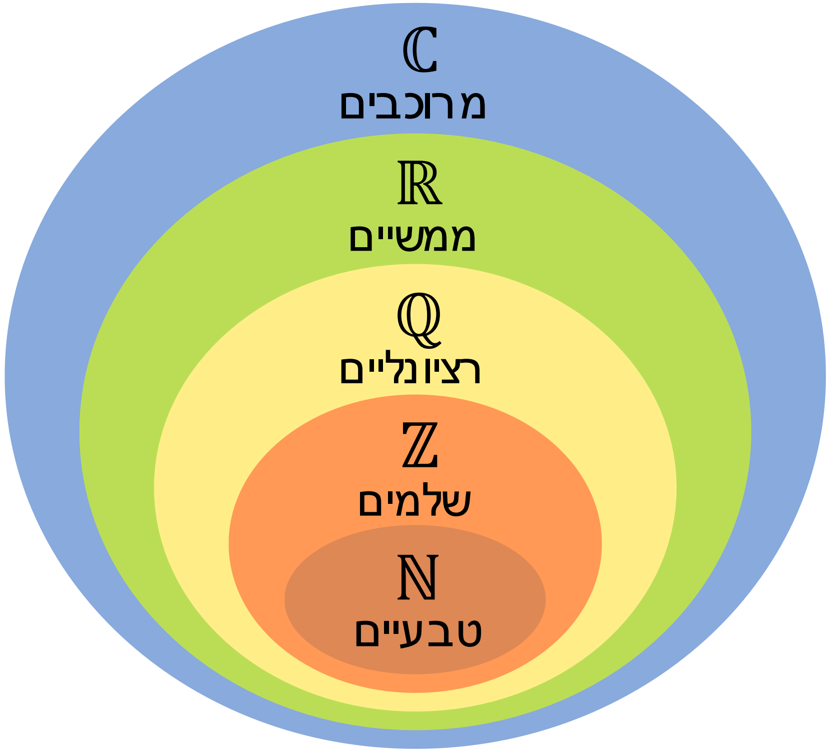
אינדוקציה

אודיסיאה – סייבר שנה א'

מתמטיקה בדידה

תזכורת מהלומדה בלוגיקה



קבוצות בסיסיות של מספרים שעלינו להכיר:

- קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ (המספרים $0,1,2,3,\ldots$)
- קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ (המספרים $\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$)
- קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ (כל המספרים שניתנים להצגה כמנה של שני שלמים, למשל $-\frac{2}{3}$)
- קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ ("כל המספרים על ציר המספרים", בין היתר π)
- קבוצת המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$ - לא נעסוק בזה בקורס.

משתמשים בסימן $\in$ כדי לסמן שייכות לקבוצה. למשל: $8 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

תזכורת מהלומדה בלוגיקה

הצרנה של טענות מתמטיות

- קשרים לוגיים: $\neg$ (שלילה), $\wedge$ (וגם), $\vee$ (או), $\rightarrow$ (גרירה), $\leftrightarrow$ (גרירה דו כיוונית).
- כמתים: $\exists$ (קיים), $\forall$ (לכל).

שימו לב שהקשרים הלוגיים מקשרים בין **פסוקים** בלבד.

<u>למשל:</u> אם נרצה להצרין את הטענה "המספר 5 גדול מהמספר 1 וגם מהמספר 3",

נצרין זאת כך: $\mathbf{5 > 3 \;\wedge\; 5 > 1}$, ולא כך: $\mathbf{5 > 1 \wedge 3}$, כי המספר 3 אינו פסוק.

תזכורת מהלומדה בלוגיקה

הצרנה של טענות מתמטיות - דוגמאות

- p = "קיים מספר טבעי גדול מ 5".

דרך 1: $\exists n.\ n\in\mathbb{N} \wedge n>5$

דרך 2: $\exists n\in\mathbb{N}.\ n>5$

- q = "לכל מספר טבעי יש מספר טבעי שגדול ממנו".

דרך 1: $\forall n.\ n\in\mathbb{N} \to \exists m.\ m>n \wedge m\in\mathbb{N}$

דרך 2: $\forall n\in\mathbb{N}.\ \exists m\in\mathbb{N}.\ m>n$

עיקרון האינדוקציה

אינדוקציה מתמטית היא שיטה (שימושית מאוד) להוכחת טענות מהצורה $\forall n \in \mathbb{N}.\, P(n)$ ("לכל מספר טבעי n מתקיים $P(n)$").

למשל:

- לכל n טבעי מתקיים $0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- לכל n טבעי מתקיים: $n^3 - n$ מתחלק ב 6.

עיקרון האינדוקציה

טכניקת ההוכחה באינדוקציה כוללת שני שלבים:

- **בסיס האינדוקציה:** מוכיחים את $P(0)$.
- **צעד האינדוקציה:** מוכיחים שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים: אם $P(n-1)$ אז $P(n)$.

  במילים אחרות, כדי להוכיח את $P(n)$ (עבור $n \geq 1$) מותר לנו להניח את $P(n-1)$.

  ההנחה $P(n-1)$ נקראת **הנחת האינדוקציה**.

<u>הערה:</u> בצעד האינדוקציה אפשר להוכיח באופן שקול שאם $P(n)$ אז $P(n+1)$, עבור $n \geq 0$.

תרגיל

הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים $0+1+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(<u>הערה:</u> את הסכום $0+1+\cdots+n$ מקובל לכתוב בצורה מקוצרת בעזרת **סימן סכימה**: $\sum_{i=0}^{n} i$).

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n=0$, אכן מתקיים $0=\frac{0(0+1)}{2}$.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$, ונוכיח עבור n:

הנחת האינ': $0+1+\dots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$. נחבר לשני האגפים n:

$$0+1+\dots+(n-1)+n=\frac{(n-1)n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

וסיימנו. ∎

תרגיל

"מחלק את"

הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים שהמספר $n^3 - n$ מתחלק ב 6. (<u>סימון</u>: $6 \mid n^3 - n$).

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n = 0$, מקבלים את המספר $0 = 0 - 0^3$ והוא מתחלק ב 6.

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור n, ונוכיח עבור $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1)\\ &= n^3 + 3n^2 + 2n - n + n\\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n\end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה, $n^3 - n$ מתחלק ב-6. נטען שגם $3n^2 + 3n$ מתחלק ב-6.

$$3n^2 + 3n = 3n(n+1)$$

אם n זוגי אז $6 \mid 3n$, ואם n אי זוגי אז $n+1$ זוגי ואז $6 \mid 3(n+1)$. סה"כ, $3n^2 + 3n$ מתחלק ב-6.

לפיכך, גם $(n+1)^3 - (n+1)$ מתחלק ב-6 בתור סכום של שני מספרים המתחלקים ב-6. כרצוי.

אינדוקציה שלא מתחילה ב $n = 0$

טענה מהצורה: $\forall n \in \mathbb{N}.\, n \geq k \rightarrow P(n)$ ("לכל מספר טבעי n כך ש-$n \geq k$ מתקיים $P(n)$")

גם היא ניתנת להוכחה באינדוקציה.

- **בסיס האינדוקציה:** מוכיחים את $P(k)$.
- **צעד האינדוקציה:** מוכיחים שלכל $n \geq k+1$ טבעי מתקיים: אם $P(n-1)$ אז $P(n)$.

אינדוקציה שלא מתחילה ב $n = 0$

תרגיל: הוכיחו שלכל $n \geq 5$ טבעי מתקיים $2^n > n^2$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה על n.

<u>בסיס:</u> עבור $n = 5$, מתקיים $2^5 = 32 > 25 = 5^2$ ✓

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור n ונוכיח עבור $n+1$. צ"ל: $2^{n+1} > (n+1)^2$.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{לפי הנ"א}}{>} 2 \cdot n^2 \overset{?}{>} (n+1)^2$$

נותר להוכיח שמתקיים $2n^2 > (n+1)^2$,
או באופן שקול: $2n^2 > n^2 + 2n + 1$, כלומר צ"ל: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

ואכן, מתקיים:
$$n^2 - 2n - 1 = \underbrace{n^2 - 2n + 1} - 2 = (\underbrace{n-1}_{\geq 4})^2 - 2 \underset{n \geq 5}{\geq} 4^2 - 2 = 14 > 0$$

לכן $n^2 - 2n - 1 > 0$ וסה"כ $2^{n+1} > (n+1)^2$ וסיימנו.

אינדוקציה שלא מתחילה ב $n=0$

פִי

עיקרון האינדוקציה המאוחרת: בהינתן טענה φ ו-$a \in \mathbb{N}$, **אם** יודעים שמתקיים $\varphi(a)$, ובנוסף שמתקיים $\forall n \in \mathbb{N}.\ n \geq a \land \varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)$, **אז** אפשר להסיק שלכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \geq a$ מתקיים $\varphi(n)$.

בפועל, גם לאינדוקציה כזו אנחנו נקרא "אינדוקציה", למרות שזה לא הניסוח המקורי של עיקרון האינדוקציה.

אז למה זה נכון? - ניעזר בעיקרון האינדוקציה הרגיל כדי להוכיח את נכונות האינדוקציה המאוחרת.

נניח שמתקיים $\varphi(a)$, ובנוסף שלכל $n \in \mathbb{N}$, אם $n \geq a$ ו-$\varphi(n)$ אז $\varphi(n+1)$.

שוויון לפי הגדרה

ניקח את הטענה $\varphi(m+a) := \psi(m)$. פְּסִי נוכיח לכל n טבעי מתקיים $\psi(n)$.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> $\psi(0) = \varphi(a+0) = \varphi(a)$, ומאחר שמתקיים $\varphi(a)$ מתקיים גם $\psi(0)$. ✓

<u>צעד האינדוקציה:</u> יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח שמתקיים $\psi(n)$, כלומר מתקיים $\varphi(n+a)$. צ"ל: $\psi(n+1)$.

נשים לב ש-$n+a \geq a$ ולכן לפי ההנחה מתקיימת הטענה $\varphi(n+a+1)$, שהיא למעשה $\psi(n+1)$.

$=\varphi(n+1+a)=\psi(n+1)$

אינדוקציה שלא מתחילה ב $n = 0$

המשך הוכחת עיקרון האינדוקציה המאוחרת

סך הכל, לפי עיקרון האינדוקציה הרגיל, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\psi(n)$, כלומר $\varphi(n+a)$.

מה שרצינו להוכיח זה שלכל $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$n \geq a$ מתקיים $\varphi(n)$. אך זה נובע בקלות:

$n-a \geq 0$

יהי $n \in \mathbb{N}$, ונניח $n \geq a$. לכן $n - a \in \mathbb{N}$, ולכן לפי הטענה הרגע הוכחנו מתקיים $\psi(n-a)$, כלומר מתקיים $\varphi(n-a+a)$, כלומר $\varphi(n)$. וסיימנו.

אינדוקציה שלמה

טכניקת אינדוקציה נוספת להוכחת טענות מהצורה $\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)$.

- **בסיס האינדוקציה:** מוכיחים את $P(0)$.
- **צעד האינדוקציה:** מוכיחים שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים: אם $P(0), P(1), \dots, P(n-1)$ נכונים אז גם $P(n)$ נכון.

במילים אחרות, כדי להוכיח את $P(n)$ (עבור $n \geq 1$) מניחים את $P(k)$ לכל $0 \leq k < n$.

תרגיל

הוכיחו שכל $n \geq 2$ טבעי ניתן לכתיבה בתור מכפלה של מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה.

<u>בסיס האינד':</u> $n = 2$ הוא מכפלה של הראשוני $p = 2$.

<u>צעד האינד':</u> נניח כי הטענה נכונה לכל k המקיים $2 \leq k \leq n$ ונוכיח עבור $n + 1$.

אם $n + 1$ הוא ראשוני, סיימנו (הוא מכפלה של הראשוני $p = n + 1$).

אחרת, הוא לא ראשוני. אז קיימים a,b טבעיים כך ש-$2 \leq a,b \leq n$ וכך שמתקיים $n + 1 = ab$.

מהנחת האינדוקציה, קיימים ראשוניים $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ כך ש- $b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, ולכן

$$n + 1 = ab = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$$

כרצוי.

תרגיל: אי שוויון ברנולי

הוכיחו שלכל מספר ממשי $x > -1$ מתקיים $(1+x)^n > 1+nx$ לכל $n \geq 1$ טבעי.

הוכחה: יהי $x > -1$ ממשי. נוכיח באינדוקציה שלכל $n \geq 1$ מתקיים $(1+x)^n > 1+nx$.

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$, מתקיים $(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x$.

<u>צעד:</u> נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח שהיא נכונה עבור $n+1$.

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו שאי השוויון מתקיים גם עבור $n+1$ וסיימנו.