לינארית 2א 3

שחר פרץ

31 במרץ 2025

מרצה: בן בסקין

הגדרה 1. בעבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפולינום האופייני של A הוא $f_A(x) = \det(Ix - A)$.

ראינו ש־v ו"ע של A עם ערך עצמי λ אמ"מ $v \in \ker(\lambda I - A)$, וכן λ ע"ע אמ"מ $\dim\ker \lambda - A > 0$.

משפט 1. $f_A(x)$ פולינום מתוקן (מקדם מוביל 1) מדרגה n, המקדם של x^{n-1} הוא $-\operatorname{tr} A$, המקדם החופשי הוא $(-1)^n \det A$
.

הוכחה.

- **תקינות הפולינום.** מבין $n!$ המחוברים, ישנו אחד יחיד שדרגתו היא n. הסיבה היא שמדטרמיננטה לפי תמורות, התמורה היחידה שתתאים היא הזהות שתעבור על האלכסון. באינדוקציה על n, ונקבל:

$$f_A(x) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn}) = x^n + \cdots$$

באופן דומה אפשר להוכיח באינדוקציה באמצעות פיתוח לפי שורות:

$$f_A(x) = (x - a_{11})|A_1 1| + \underbrace{a_{21}|A_2 1| - a_{31}|A_3 1| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1}|A_{n1}|}_{\text{מה.א. דרגה קטנה מ־}n}$$

סה"כ גם כאן הראינו שהדרגה מתקבלת מהפולינום $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$

- **המקדם של $-\operatorname{tr} A$.** ההוכחה המסודרת מופיע העמוד 8 של הסיכום. מקדמי x^{n-1} מגיעים גם הם רק מ־* (הפולינום למעלה) שהם $-\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n -a_{ii}$ המקדם החופשי.
- **המקדם החופשי.** $f_A(0) = \det(I \cdot 0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$.

■

0.1 הפסקה לרגע מלינארית 2א כדי לראות פתרון נורמלי רעיונית אך קצר לשאלה 3 ממועד ב' ללינארית 1א

יהי V מ"ו n ממדי, ו־$0 \neq v \in V$, וסקלרים $(\alpha_i)_{i=1}^n$. הוכיחו שקיים בסיס $(w_1 \dots w_n)$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.

הוכחה. הפתרון של גינסבורג: אם בה"כ $\alpha_1 \neq 0$ אז $w_1 := \alpha_1^{-1}\left(v - \sum_{i=2}^n \alpha_i w_i\right)$ וכזה $(v, w_2 \dots w_n)$ בסיס וכאילו די גמרנו. ■

הוכחה. פתרון נורמלי של המרצה: נרצה למצוא $B_V = (v, v_w \dots v_n)$ כך שבהינתן $B_W = (w_1 \dots w_n)$ כך ש־:

$$[v]_{B_V} = (1, 0, \dots 0),\ [v]_{B_W} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

במילים אחרות, נגדיר איזו' מתאימה לשינוי בסיס. כלומר איזו $\varphi \colon V \to \mathbb{F}^n$ כך ש־$\varphi(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ וכן $\varphi(v_2) = e_2 \dots \varphi(v_n) = e_n$ כך שסה"כ תיארנו העתקה שמזיזה בסיס אחד לאחר וסה"כ סיימנו. ■

0.2 חזרה לקורס

דוגמאות.

א) אם $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ אז $f_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ (נטו מהמשפט הקודם).

ב) אם $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ אז $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

ג) אם $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אז גם כאן $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ אך כדאי לשים לב שמשולשית עליונה לא בהכרח דומה לאלכסונית עם אותם הקבועים.

ד) אם $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$ כאשר B, C בלוקים ריבועיים אז $f_A(x) = f_B(x) \cdot f_C(x)$.

הגדרה 2. בהינתן $T\colon V \to V$

ט"ל נגדיר את הפולינום האופייני שלה (פ"א) באופן הבא: נבחר בסיס B למ"ו V, ונתבונן ב־$A = [T]_B$ ונגדיר את $f_T(x) := f_A(x)$.

"אתה פותר עכשיו שאלה משיעורי הבית" "אל תדאג הבודק כבר שלח פתרון" "מה?!"

טענה. הפ"א של ט"ל מוגדר היטב. למטריצות דומות אותו פ"א. הוכחה. בשיעורי הבית. ויש סיכוי שגם בדף הסיכום.

מטלה. לקרוא בעמוד 10 על שוויון פונ' בין שדות שונים, רלוונטי כדי להראות שלא משנה על איזה שדה אנו מדברים הפולינום האופייני נשאר זהה.

דוגמה. נתבונן בהעתקה $T(f) = f'$ $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x],$ נבחר בסיס $B = (1, x, \dots, x^n)$. אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

אז:

$$f_T(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & & \\ & x & -2 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} = x^{n+1}$$

משפט 2. $T\colon V \to V$ ט"ל, אז λ ע"ע של T אמ"מ $f_T(\lambda) = 0$.

הוכחה. יהא $B \subseteq V$ בסיס של V. אז $A = [T]_B$ ואז $f_T(\lambda) = 0$ אמ"מ $f_A(\lambda) = 0$ אמ"מ λ ע"ע של A. ■

הגדרה. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של T (או A). האיברוי האלגברי של λ הוא החזקה המקסימלית d כך ש־$(x-\lambda)^d \mid f_T(x)$ (חלוקת פולינומים).

דוגמה. בעבור T היא הגזירה, ממקודם: $f_T(x) = x^{n+1}$ ע"ע יחיד הוא 0. הריבוי האלגברי של 0 הוא $n+1$. הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1.

סימון 1. נניח ש־λ ע"ע של T (או A) אז d_λ הריבוי האלגברי של λ ו־r_λ הריבוי הגיאומטרי של λ.

משפט 3. $r_\lambda \le d_\lambda$ ושוויון אמ"מ T (או A) לכסינה.

. . . .

שחר פרץ, 2025