תרגול 5 מרתון

שחר פרץ

5 באוגוסט 2025

מתרגלת: לילי

פתרון. (אסור לצלם ולהקליד את השאלה, ואם אתם רוצים להבין משהו תצטרכו לראות את הדיאגרמות).

נסתכל על מקרים פשוטים. אם Q חד־ממדי, אז כל העתקה לינארית שיוצאת ממנו מוכתבת ע"י איבר בסיס יחיד. נבחר $Q = \operatorname{span}_{\mathbb{F}}(v)$. אז q_1, q_2 הם כל דבר שמקיים את התנאי של שלישייה טובה. $q_1(v) \in V_1, q_2(V) \in V_2$ מגדיר ביחידות את ההעתקות. נדרוש את התנאי של שלישייה טובה: $T_1(q_1 v) = T_2(q_2 v)$. יהי $x \in V_1, y \in V_2$ כך ש־$T_1(x) = T_2(y)$, ואז x, y מגדירים באופן יחיד את q_1, q_2 ע"י $q_1 v = x, q_2 v = y$.

מהגדרת מהממת, ישנה $u \colon Q \to P$ יחידה המקיימת את ההתחלפות לעיל. בפרט בחרנו Q חד ממדי, אז קיים $w \in P$ (שהוא בעצם $u(v)$) המקיים: $p_1(w) = x, p_2(w) = y$. נסמן w זה ב־(x, y). אז ב־P מוכלת $\{(x, y) \colon x \in V_1, y \in V_2, T_1(x) = T_2(y)\}$. האיבר (x, y) מקיים $(T_1 \circ p_1)[(x, y)] = T_1(x)$ וכנ"ל בעבור T_2. מלינאריות של כל העתקות כאן, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

טענה: נגדיר את P להיות תת המרחב של $V_1 \otimes V_2$ (מוגדר לפי כפל קרטזי שלהם, וסכום ישר של $V_1 \times 0$ עם $0 \times V_2$) המוגדר ע"י $\{(x, y) \mid T_1 x = T_2 y\}$. למעשה p_1, p_2 הן מוגדרת ע"פ:

$$p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$$

נטען שזה יעבוד.

מהכלה והדחה, הממד של P צריך להיות $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim U + \dim(\operatorname{Im} T_1 \cap \operatorname{Im} T_2)$ (זה לא עובד אבל הרעיון הוא הכלה והדחה כדי למצוא את כמות הזוגות שעובדות ביחד).

עכשיו נדבר על מטריצות מייצגות

(פאק זה שוב מתחלפות). הדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\mathbb{F}^m \overset{[T]_B^C}{\leftarrow} \mathbb{F}^n \overset{[\cdot]_B}{\leftarrow} V \overset{T}{\rightarrow} U \overset{[\cdot]_C}{\rightarrow} \mathbb{F}^m$$

הגדרה של מטריצה מייצגת: המטריצה היחידה שגורמת לסיפור הזה להתחלף. יתרה מכך: מציאת המטריצה הזו היא איזו, כלומר:

$$[\cdot]_C^B \colon \hom_{\mathbb{F}}(V, U) \to \hom(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$$

היא איזו'.

ואכן הדיאגרמה מתחלפת:

$$v \overset{T}{\rightarrow} Tv \overset{[\cdot]_C}{\rightarrow} [Tv]_C$$

$$v \overset{[\cdot]_B}{\rightarrow} [v]_B \overset{[T]_C^B}{\rightarrow} [T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

עכשיו לנושא החשוב ביותר בלינארית

נעבור לנושא החשוב ביותר בלינארית, דוד גינזבורג. להלן שתי שאלות מאת השטן:

א'

יהיו $v_2 \dots v_n \in \mathbb{F}^n$ בדיוק $n-1$ וקטורים. נגדיר באמצעות העתקה: $T \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \colon T(u) = \det A(u, v_2 \dots v_n)$ כאשר:

$$A(u, v_2 \dots v_n) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

נוכיח שקיים v_0 כך ש־$Tu = v_0^T \cdot u$.

הוכחה. ברור ש־$T(u)$ לינארית מהיות דטרמיננטה מולטינלינארית בעמודות. המטריצה המייצגת של העתקה כזו היא בגודל $n \times 1$, ולכן בהכרח קיים וקטור כזה v_0 וסה"כ סיימנו. מקבלים ש־: $v_0 = \begin{pmatrix} \det(e_1, v_2 \dots v_n) \\ \vdots \\ \det(e_n, v_2 \dots v_n) \end{pmatrix}$ (מהגדרת מטריצה מייצגת) ■

ב'

1. יהי V מ"ו עם $\dim V = n > 1$ ויש $U, W \subseteq V$ תת"מ המקיימים $\dim U + \dim W \geq n$. הוכיחו שישנה $T \colon V \to V$ כך ש־$\ker T \subseteq U \wedge \operatorname{Im} T \subseteq W$.

   הוכחה. נבחר בסיס $B =: b_1 \dots b_k$ של U, ונרחיבו לבסיס B' של V.

   לא נכון להגדיר יהי $w \in W$ ואז $Tb_1 = \dots = Tb_k = 0$ ואז $Tb_{k+1} = \dots = Tb_n = w$, כי אז הקרנל גדל ומכיל דברים כמו $b_k - b_{k+1}$ ולכן נכון יותר להגיד $\ker T \subseteq U$.

   לכן, במקום זאת נבחר בסיס $w_1 \dots w_\ell$ בסיס של W ונגדיר:

   $$Tb_1 = \dots = Tb_k \wedge Tb_{k+1} = w_1 \dots Tb_n = w_{n-k}$$

   נבחין ש־$n - k \geq 0$ מהנתון $\dim U + \dim W = n$.

   ברור ש־$\operatorname{Im} T \subseteq W$, נוכיח $\ker T \subseteq W$. יהי $v \in V$ נין לביטוי ב־B' הבסיס:

   $$T\left(\sum a_i b_i\right) = \sum a_i T b_i = \sum_{i=k+1} a_i T b_i$$

   וזה פחות או יותר מסיים את השאלה. ■

2. יהי $T \colon V \to V$ ונוכיח שישנם $T_1, T_2 \colon V \to V$ איזו' כך ש־$T = T_1 + T_2$. נבחר $T_1 = \lambda I$ ו־$T_2 = T - \lambda I$. נניח בשלילה שישנים $v_1, v_2 \neq 0$ כך ש־$Tv_i = \lambda_i v_i \wedge v_1 = cv_2 \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$. נסיק $\lambda_1 v_1 = \lambda_2 c v_2$. נחלק אגפים ונקבל סתירה. מכאן אפשר להראות שקיים λ כך ש־$T - \lambda I$ איזו', כי הטענה הזו שקולה לכך שקיים $\lambda \neq 0$ כך ש־$\forall v \neq 0 \colon Tv - \lambda v \neq 0$ כלומר $Tv \neq \lambda v$.

   פתרון אחר: יהי $B = \{b_1 \dots b_k\}$ בסיס ל־$\ker T$, נשלימו לבסיס $B' = \{b_1 \dots b_n\}$. בהכרח מתקיים $T_1(b_i) = -T_2(b_i)$ עבור $1 \leq i \leq k$. נגדיר $T_1 b_{k+i} = \frac{1}{2} T b_{k+i}$. נשלים את $\{Tb_{k+1} \dots Tb_n\}$ לבסיס (צריך לנמק במבחן למה הם בת"ל מתכתחילה) הוא $C = \{c_1 \dots c_k, Tb_{k+1} \dots Tb_n\}$ ונגדיר: $T(b_{i \leq k}) = c_i, T_2(b_{i<k}) = -c_i$. ואז T_1, T_2 מקיימות את הנדרש.

תמורות

תמורה: פונקציה חח"ע ועל בין קבוצה לעצמה.

סימון של תמורה σ מוגדר בתור $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{N(\sigma)}$ כאשר $N(\sigma)$ מוגדרת להיות מספר הזוגות שהסדר שלהם מתחלף, כלומר $\#\{i < j \colon \sigma(i) > \sigma(j)\}$.

מתקיים $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \pi A_{i,\sigma(i)}$.

דוגמת שימוש:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{pmatrix}$$

נפתור עם תמורות. לדוגמה, אם נבחר את $1 \mapsto 1$ אז בחרנו את a_1, לכן בהכרח בוחרים את a_2 וסה"כ בחרנו את כל האלכסון בהכרח. באופן כללי אפשר להראות שבהינתן שבחרנו את a_1 בשורה הראשונה נקבל את האלכסון, ואם בחרנו את b_i הבחירה היחידה לא על האלכסון תהיה של c_i. במילים אחרות, נקבל:

$$\prod a_i - \sum_i b_i c_i \prod_{j \neq i,1} a_j$$

(תמיד יש רק החלפה אחת).

....