תרגיל בית

תרגיל 1. יהי $A,B \in M_n(\mathbb{F})$. הוכיחו שמתקיים

$$rank(A+B+AB) \leq rank(A) + rank(B)$$

תרגיל 2. מצאו בסיס למרחב השורות העמודות והמאפס של המטריצה הממשית הנתונה:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ במקרה הצורך חלקו למקרים שונים לפי הערך של λ.

תרגיל 3, ממבחן נניח ש $v_1,...,v_n \in \mathbb{F}^n$ וקטורי עמודה בת"ל ונסמן

$$A = v_1 \cdot v_1^t + ... + v_n \cdot v_n^t$$

הוכיחו ש $rank(A) = n$.

רמז : מצאו את מרחב הפתרונות של A.

תרגיל 4, ממבחן נסמן

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & m-1 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר m מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \in C(A)$$

תרגיל 5 בכל סעיף קבעו האם הפונקציה הנתונה היא העתקה לינארית. במידה וזו העתקה לינארית, מצאו בסיסים לגרעין ולתמונה.

(1) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\|y|\end{pmatrix}$

(2) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\.\\.\\.\\x_{n-1}+x_n\\x_n+x_1\end{pmatrix}$

(3) $T:\mathbb{R}_{\leq n}[x]\to\mathbb{R}_{\leq n}[x]$, $T(p)=p(x)+x^2-x$.

(4) $T:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$, $T(A)=A+A^t$

תרגיל 6. יהיו U,V שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T:V\to U$ העתקה לינארית. הוכיחו:

(1) אם $V\ \subset\ \{v_1,...,v_n\}$ קבוצת וקטורים כך ש $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל אז גם $\{v_1,...,v_n\}$ בת"ל.

(2) אם $\{v_1,...,v_n\}\subset V$ קבוצת וקטורים בת"ל ו T חח"ע, אז גם $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

תרגיל 7. תהי $A\in M_{mxn}(\mathbb{F})$ מטריצה ונסמן $rank(A)=r$. הוכיחו:

א. קיימות מטריצות $A_1,...,A_r\in M_{mxn}(\mathbb{F})$ כך ש $rank(A_i)=1$ לכל i ומתקיים ש $A=\sum_{i=1}^r A_i$.

ב. אם $k<r$ אז לא קיימות מטריצות $A_1,...,A_r\in M_{mxn}(\mathbb{F})$ כך ש $rank(A_i)=1$ לכל i ומתקיים ש $A=\sum_{i=1}^r A_i$.