חדו"א לא 2

שחר פרץ

2 בנובמבר 2025

0.1 מסקנות על מספרים טבעיים בתוך הממשיים

בפעם שעברה דיברנו על אפיון אקסיומתי של $\mathbb{R}$, ובמיוחד אקסיומת השלמות שמייחדת את $\mathbb{R}$ באופן ספציפי. מה שניתן מהשמיים זה $\mathbb{N}$, השאר נבנים ידנית או אקסיומתית.

באופן כללי, אקסיומות שמבטיחות קיום לא קונסטרוקטיבי לכל מיני דברים, כמו אקסיומת המקבילים, אקסיומת הבחירה, וגם אקסיומת השלמות – במקרים רבים "לא באמת נדרשות", וההנחה שלהן מאפשרת קיום מבנים ספציפיים.

הנושא הבא הוא סדרות. לכן לפני כן נדבר על כמה תכונות של המספרים הממשים כת"ק בתוך $\mathbb{R}$.

- **הארכימדיאניות של הטבעיים בממשיים:** $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x > 0 \implies (\exists n \in \mathbb{N}\colon nx > y)$
  למרות שזה נשמע אינטואיטיבי, צריך את אקסיומת השלמות בשביל זה.

  הוכחה. נניח בשלילה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $nx \le y$. נסמן $A := \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$. מהנחת השלילה y חסם מלעיל של A, בפרט $x \in A$ ולכן $A \neq \varnothing$. מאקסיומת השלמות קיים חסם עליון α ל־A. [טיוטה: (I) $\forall a \in A\colon a \le \alpha$ וגם (II) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$a \ge \alpha - \varepsilon$, אין לנו יותר מדי משתנים לעבוד איתם, אז ננסה להתעסק עם x]. נתבונן ב־x. יהי $a \in A$, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = nx$. נבחין ש־$(n+1)x \in A$ ולכן $(n+1)x \le \alpha$ כלומר $nx \le \alpha - x$ ועבור $\varepsilon = x$ מצאנו $a - \varepsilon$ שהוא חסם עליון שקטן מממש מהחסם מלעיל α כלומר סתירה להיות α חסם מלעיל. לכן A אינה חסומה מלעיל, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $nx > y$. ■

  אז, למה צריך את אקסיומת השלמות למרות שזה מתקיים גם ברציונליים? כי ברציונליים הקיום קונסטקרטיבי, והם קשורים הדוקות לטבעיים. בניגוד לקבוצה סגורה מלא כללית.

- **הסדר הטוב של הטבעיים:** לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ אם קיים $A \neq \varnothing$ אז קיים איבר מינימלי ב־A.

  מסקנה 1. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ אם $A \neq \varnothing$ וחסומה מלרע, אז קיים איבר מינימלי ב־A.

  מסקנה 2. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ אם $A \neq \varnothing$ וחסומה מלעיל, אז קיים איבר מקסימלי ב־A.

משפט 1. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists! k \in \mathbb{Z}\colon k \le x < k + 1$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$. נסמן $A = \{m \in \mathbb{Z}\colon m > x\}$. ברור ש־$A \subseteq \mathbb{Z}$, נרצה להראות $A \neq \varnothing$. מארגימדיאניות קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n > x$ ולכן $A \neq \varnothing \implies n \in A$. A חסומה מלרע ע"י x. לכן קיים איבר מינימלי t כלשהו ב־A. נסמן $k = t - 1$. נתבונן ב־k. ידוע $k < t$ ו־k המינימום של A, כלומר $k \notin A$. מכאן $k \le x$. כמו כן $k + 1 = t \in A$ לכן $x < k + 1$. הראינו קיום, עכשיו יש להראות יחידות.

יהי $\ell \in \mathbb{Z}$. נניח $\ell \neq k$, אז $\ell < k \vee k < \ell$.

- אם $\ell < k$ אז $\ell + 1 \le k$ ולכן $\ell + 1 \le x$. בפרט $x \not< \ell + 1$.
- אם $k < \ell$ אז $k + 1 \le \ell$ ולכן $x < \ell$ בפרט $\ell \not\le x$.

סה"כ כל $\ell \neq k$ לא מקיים את הדרוש ולכן ℓ יחיד. ■

סימון 1. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז השלם היחיד k המקיים $k \le x < k + 1$ יסומן ב־$\lfloor x \rfloor$ והוא יקרא ערך שלם תחתון.

באותו האופן ניתן להגדיר ערך שלם עליון, $\lceil x \rceil$.

משפט 2 (צפיפות הממשיים). יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. אם x, y אז קיים $z \in \mathbb{R}$ כך ש־$x < z < y$.

הוכחה. נניח $x < y$. נתבונן ב־$\frac{x+y}{2}$. נסמן $z = \frac{x+y}{2}$ ומתקיים:

$$x = \frac{2x}{2} = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

■

משפט 3 (צפיפות הרציונליים בממשיים). נניח $x < y$. אז $y - x > 0$ ולכן מהארגימדיאניות קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n(y - x) > 1$. במקרה הזה $ny > nx + 1$ ולכן זה לא מפתיע שקיים טבעי באמצע, ואכן נוכל לסמן $m = \lceil yn \rceil - 1$ (שימו לב שבמקרה של yn טבעי, זה לא הערך השלם התחתון). אז:

$$x < y - \frac{1}{n} = \frac{ny - 1}{n} \ge \frac{\lfloor ny \rfloor - 1}{n} < \frac{ny + 1 - 1}{n} = y$$

כמו כן $\frac{\lfloor ny\rfloor-1}{n}\in\mathbb{Q}$.

בתרגול נוכיח את נכונות המשפט עבור $z\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

1 סדרות

אחת ההגדרות האינטואיטיביות לסדרה היא n־יה סדורה, אבל זו יכולה להיות רק סופית.

לכן, נגדיר סדרה ממשית להיות פונקציה שתחומה $\mathbb{N}$ וטווחה $\mathbb{R}$. סדרות נסמן לרוב באותיות a,b,c במקום f,g,h. במקום לסמן $a(n)$ בסימון פונקציות, נסמן a_n.

הגדרה 1. סדרה ממשית היא פונקציה $a(n)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$

הגדרה 2. לעיתים רבות תבחינו שמסמנים סדרות באמצעות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, או $\{a_n\}_{n=1}^{\inf}$, או אפילו סתם a_n.

הגדרה 3. בהינתן סדרה, $a_n:=a(n)$

הגדרה 4. נאמר ש־a_n חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע כאשר הקבוצה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע.

הגדרה 5. אם a_n חסומה מלעיל, נסמן $\sup a_n:=\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n:=\sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה 6. אם a_n חסומה מלרע, נסמן $\inf a_n:=\inf_{n\in\mathbb{N}}a_n:=\inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

סימון 2. הסופרפוס הוא $\sup A$ והוא חסם עליון, והאיפיפיוס $\inf A$ הוא החסם התחתון.

הגדרה 7. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה (או מונוטונית עולה חלש) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m\implies a_n\le a_m$

הגדרה 8. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה ממש (או מונוטונית עולה חזק) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m\implies a_n<a_m$

הגדרה 9. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת (או מונוטונית יורדת חלש) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m\implies a_n\ge a_m$

הגדרה 10. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת ממש (או מונוטונית יורדת חזק) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m\implies a_n>a_m$

הגדרה 11. סדרה תקרא מונוטונית כאשר היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

"אני לא מאמין שעשיתי את זה. מחקתי LIFO. היה לי מרצה שהגדי ללעשות והיה מוחק עם המרפק מה שהוא כתב הרגע"

1.1 גבולות של סדרות

הגדרה 12. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\forall\varepsilon>0.\,\exists N\in\mathbb{N}.\,\forall n\ge N\colon\ |a_n-\ell|<\varepsilon$.

למה 1. $\forall x\in\mathbb{R}.\,(\forall\varepsilon>0\colon\ |x|<\varepsilon)\implies x=0$

למה 2. מאי שוויון המשולש נקבל באופן מיידי:

$$|x-y|\le|x-z|+|y-z|$$

(זה גם ממש כמו המשפט בגיאומטריה לפיו אורך צלע קטנה מסכום האורכי הצלעות במשולש)

משפט 4. תהא a_n סדרה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. אם ℓ גבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אז ℓ גבול יחיד של a_n.

הוכחה. נניח $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־ℓ. יהי $m\in\mathbb{R}$. נניח ש־m גבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. יהי $\varepsilon>0$. אז $\frac{\varepsilon}{2}>0$, ולכן קיים איזשהו $N_1\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N_1$, מתקיים $|a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N_2$, מתקיים $|a_n-m|<\frac{\varepsilon}{2}$. נסמן $N=\max N_1,N_2$. אז $N\ge N_1\wedge N\ge N_2$, ומאי שוויון המשולש:

$$|m-\ell|\le|a_n-\ell|+|a_n-m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן, לפי התרגיל, $m-\ell=0$ כלומר $m=\ell$. ■

הגדרה 13. נאמר כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת כאשר קיים לה גבול $\ell\in\mathbb{R}$

הגדרה 14. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה (היחיד) הוא ℓ, נסמן $\lim_{n\to\inf}a_n=\ell$.

"אבל בפיזיקה עשינו את זה עד עכשיו וזה עבד"

למה 3. קבוצה חסומה אמ"מ $\exists M>0\colon\forall a\in A\colon\ |a|\le M$.

משפט 5. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

הוכחה. מההנחה, קיים ℓ כך ש־$\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$. מהגדרת הגבול קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $|a_n-\ell|<1$. נסמן $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots,|a_{N-1}|,1+|\ell|\}$. זו קבוצה סופית ולכן יש לה מקסימום. יהי $n\in\mathbb{N}$.

- **מקרה 1:** נניח $n<N$. אז $|a_n|\le M$ פחות או יותר מהגדרת מקסימום.
- **מקרה 2:** נניח $n\ge N$. אז $|a_n-\ell|<1$ ולכן $-1<a_n-\ell<1$. נקבל $-|\ell|-1<a_n<\ell+1\le|\ell|+1$ וסה"כ נקבל $|a_n|\le|\ell|+1\le M$.

סה"כ $\forall n\in\mathbb{N}\colon\ |a_n|\le M$ ולכן a_n חסומה. ■

תרגיל: הראו כי:

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

הוכחה. צ.ל. שלכל $\varepsilon>0$ ניתן למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ $\forall n\ge N\colon$. אז יהי $\varepsilon>0$. נבחר $N=\left\lceil\frac{1}{\epsilon}\right\rceil+1$. יהי $n\ge N$. אז:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}=\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1}<\frac{1}{\varepsilon^{-1}}=\varepsilon$$

■

- נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(-1)^n$. נוכיח ש־$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ איננה מתכנסת.

  הוכחה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$ כלשהו. נתבונן ב־$\varepsilon=1$. יהי $N\in\mathbb{N}$. נפרק למקרים על ℓ.
  - אם $\ell\ge0$, נתבונן ב־$n=2N+1$. אז $n\ge N$ וגם $|a_n-\ell|=\left|(-1)^{2N+1}-\ell\right|=|-1-\ell|=\ell+1\ge1$
  - אם $\ell<0$, נתבונן ב־$n=2N$. אז $n\ge N$ וגם $|a_n-\ell|=\left|(-1)^{2N}-\ell\right|=|1-\ell|=1-\ell\ge1$.

  לכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת ל־ℓ ולכן אינה מתכנסת. ■

מתבלבלים עם שלילה של הגדרת הגבול? נוכל להשתמש בחוקי השלילה של כמתים:

$$\neg(\forall\varepsilon>0.\,\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\ge N\colon\ |a_n-\ell|<\varepsilon)\iff(\exists\varepsilon>0.\,\forall N\in\mathbb{N}.\,\exists n\in\mathbb{N}\colon\ |a_n-\ell|\ge\varepsilon)$$

"אין לי שום דבר נגד הוכחות בשלילה. אני תמיד נמנע מהן". "למה את 1◻' – "כי למה לא" – "כי למה לא 1 זה נכון". "וזו ההתייחסות הנכונה להוכחות. אנחנו כותבים שירה". "לאחד חלקי איש יש $\frac{1}{10}$ אצבעות".

משפט 6. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נניח כי $\ell\ne0$ וגם $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$. אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $|a_n|\ge\frac{|\ell|}{2}$.

במילים אחרות – a_n הוא bounded away from zero. באופן כללי אפשר גם להוכיח את זה עם $\frac{|\ell|}{\pi}$ או כל מספר אחר במכנה. אבל הרעיון העקרי הוא, ש־$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא יכול להתקרב ל־0 החל מנקודה כלשהי, אם הסדרה שואפת לנקודה שאיננה אפס.

הוכחה. ידוע $\ell\ne0$ ולכן $|\ell|>0$. דהיינו $\frac{|\ell|}{2}>0$. אז עבור $\varepsilon=\frac{|\ell|}{2}$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $|a_n-\ell|<\frac{|\ell|}{2}$. נתבונן ב־$n$. יהי $n\ge N$' tz:

$$|a_n-\ell|<\frac{|\ell|}{2}\implies-\frac{|\ell|}{2}<a_n-\ell<\frac{|\ell|}{2}$$

אפשר גם להשתמש בא"ש המשולש, אבל זה פחות אינטואיטיבי. נפרק למקרים.

- נניח $\ell>0$. אז $a_n>\ell-\frac{|\ell|}{2}=\frac{|\ell|}{2}$. לכן $|a_n|\ge\frac{|\ell|}{2}$ וסיימנו.
- נניח $\ell<0$. נניח $\ell<0$. ואז $(a_n)_{n=1}^{\infty}<\ell+\frac{|\ell|}{2}=-\frac{|\ell|}{2}<0$. ולכן $|a_n|>\frac{|\ell|}{2}$

אפשר גם להוכיח עם א"ש המשולש, זה יוצא יותר קצר, אבל good luck with that. ■

הערה 1. הערה לעצמי: לעבור על ההוכחה למעלה כשאני ערני. ותוכיח את הטענה לעיל עם א"ש המשולש.

"אל תגידו א"ש המשולש. תגידי לי פד"ח ואני מנשל אותך מהירושה. אנחנו לא אומרים את זה יותר בחדר הזה" $\sim$ המרצה.

1.2 אריתמטיקה של גבולות

זה הקטע שבו אנחנו רואים שגבול הוא לינארי.

משפט 7. תהאנה $(a_n)_{n=1}^{\infty},\mathcal{B}$ סדרות. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$ ממשיים. נניח כי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\wedge\lim_{n\to\infty}b_n=m$. אז:

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\ell+m$$
2. $$\forall\alpha\in\mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty}(\alpha a_n)=a\ell$$
3. $$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\ell\cdot m$$
4. $$m\ne0\implies(\exists N\in\mathbb{N}.\,\forall n\ge N\colon\ b_n\ne0)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ell}{m}\right)$$

נוכיח אחד מהם, השאר לבית.

הערה 2. כדי להגדיר את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, דבר ראשון הראינו שמנקודה מסויימת N מתקיים $b_n \neq 0$. אבל מה קורה לפני N? זה לא כזה משנה, נוכל לצורך הנקודה לקבע את הסדרה:

$$\frac{a_n}{b_n} := \begin{cases} 0 & n < N \\ \frac{a_n}{b_n} & n \geq N \end{cases}$$

בכל מקרה חדו"א מתעסקת במה שקורא החל מנקודה מסויימת, ולא איכפת לנו מה קורה ב־N האיברים הסופיים הראשונים.

הוכחה עבור 3. [טיוטה: $|a_nb_n - \ell m| = |a_nb_n - a_nm - a_nm - \ell m| \leq |a_nb_n - a_nm| + |a_nm - \ell m| = |a_n|\,|b_n - m| + |m|\,|a_n - \ell|$ ואז נקבל $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$, ולגבול השני נבחר חסם בהתאם לגבול]

יהי $\varepsilon > 0$. אז $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ולכן חסומה, כלומר קיים $k > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $|a_n| \leq k$.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־ℓ ולכן עבור $\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} > 0$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כל שלכל $n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$

נבחין ש־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל־m לכן עבור $\frac{\varepsilon}{2k} > 0$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2k}$.

עתה נתבונן ב־$N = \max\{N_1, N_2\}$. יהי $n \geq N$. אז:

$$|a_nb_n - \ell m| = |a_nb_n - a_nm + a_nm - \ell m| \leq |a_nb_n - a_nm| + |a_nm - \ell m| = |a_n|\,|b_n - m| + |m|\,|a_n - \ell|$$

כיוון ש־$n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$, ולכן $|m|\,|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. כיוון ש־$n \geq N_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2k}$ ולכן $|a_n|\,|b_n - m| \leq k\,|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
מכאן $|a_nb_n - \ell m| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \ell m$. ■

לבית תוכיחו את כל השאר. ע"מ הקל עליכם, אפשר להוכיח ב־4 עבור $\frac{1}{b_n}$ ואז להשתמש ב־3.

הגדרה 15. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל־$+\infty$ כאשר: $\forall M > 0.\, \exists N \in \mathbb{N}.\, \forall n \geq N\colon a_n > M$

הגדרה 16. תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אנרמ כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל־$-\infty$ כאשר: $\forall M > 0.\, \exists N \in \mathbb{N}.\, \forall n \geq N\colon a_n < -M$

משפט 8. תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \wedge \lim_{n\to\infty} b_nb_n = +\infty$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$

הוכחה. יהי $M > 0$. קיים $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N_1\colon a_n > M$ וכן $\forall n \geq N_2\colon b_n > M$. נתבונן ב־$N = \max\{N_1, N_2\}$. אז $a_n + b_n > M + M = 2M > M$ וסיימנו. ■

לבית: תעשו אותו הדבר עם כפל. לגבי חיסור וחילוק, אין תוצאה מוגדרת.

שחר פרץ, 2025