

# מתמטיקה B ~ עברי נגר ~ עוד אינטגרלים

שחר פרץ

19 ליוני 2024

## 1 הצבות טריגונומטריות

איך יודעים איזה פונקציות טריגונומטריות אנחנו רצה להציב? לדוגמה, כשהוצג באינטגרל להלן זבוע שעבר:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

הצבנו  $x = a \tan \theta$  ועבור:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

הצבנו  $x = a \sin \theta, a \cos \theta$

"אמור זה שם של משפחת דגים". לדוגמה, בעבור אינטגרל מהצורה  $\sqrt{a^2 - x^2}$ . ידוע  $|x| \leq a$ , כלומר כנראה נרצה להציב  $x = a \sin \theta$ . וכולי. נראה בטבלה:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \quad x = |x| \leq a \quad x = a \sin \theta, a \tanh t \quad (1)$$

$$x^2 + a^2 \quad x \in \mathbb{R} \quad x = a \tan \theta, a \sinh t \quad (2)$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \quad |x| \geq |a| \quad x = a \sec \theta, \cosh t \quad (3)$$

לדוגמה, נתבונן באינטגרל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = a \tan \theta, \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta} \\ dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \end{array} \right] = \int \frac{\frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta}{a \cdot \frac{1}{\cos \theta}} = \int \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

התקדמנו, וזה אינטגרל שאפשר למצוא באמצעות הצבה נוספת. אבל זה עדיין לא אינטגרל פשוט. נעבור לצד האפל של הפונקציות ההיפר-טריגונומטריות.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \left[ \begin{array}{l} x = \sinh t \\ dx = \cosh t dt \end{array} \right] \stackrel{\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t}{=} \int \frac{\cosh t dt}{\cosh^2 t} = \int \frac{dt}{\cosh t} = t + C = \sinh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) + C$$

עוד דוגמה כי למה לא בעצם: אם האינטגרל היה בחילוק  $x$  כנראה לא היה צורך בהצבה טריגונומטרית. אך זה לא המצב. קדימה:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx = \left[ \begin{array}{l} x = 2 \cosh t \ (t \geq 0) \\ dx = 2 \sinh t dt \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{4 \cosh^2 t - 4}}{4 \cosh^2 t} 2 \sinh t dt$$
$$= \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} dt = \left( \int 1 - \cosh^{-2} \right) dt = t + \tanh t + C = \cosh^{-1} \frac{x}{2} - \sqrt{1 - \frac{2^2}{x^2}} + C$$

כאשר התשובה הסופית נתבססת על העבודה כי  $\cosh^{-2} y = 1 - \tanh^2 y \implies \tanh y = \sqrt{1 - \cosh^{-2} y}$

### 1.1 משפט אקראי

אם הפונקציה זוגית/אי-זוגית, לאינטגרל שלה יש את הזוגיות ההפוכה, עד כדי קבוע.

## 2 המשפט היסודי החדו"א

(דומה יחסית למשפט מיוטון-לייבניץ) נרצה לקשר את מושג האנטי-נגזרת לשטח תחת פונקציה. לא נעשה את זה מאוד פורמלי. (ערימה של ציורים על דף) נחלק ל-partitions במיקומים  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ . נרצה למצוא את השטח של פונקציה כללית  $f(x)$  בין הנקודות  $a$  ל- $b$ .

ניעזר במשפט לגראנז': תהי  $F$  קדומה של  $f$  ( $F'(x) = f(x)$ ) בקטע  $[c, d]$ . אז קיים  $c \leq x \leq d$ . כך ש-:

$$f(x) = \frac{F(d) - F(c)}{d - c}$$

כלומר, "לא ייתכן שקיים  $x \in [c, d]$  על  $f(x)$  כך ש- $f(x)$  יתקדם בשיפוע הממוצע" (לא פורמלית).

לכן, נוכל לבחור בכל קטע  $x_k \leq t_k \leq x_{k+1}$  שמקיים  $f(t_k) = \frac{F(x_{k+1}) - F(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$ . כך נוכל לחשב:

$$S_{\approx} = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) \cdot f(t_k) = \sum_{k=0}^n F(x_{k+1}) - F(x_k) = F(x_{n+1}) - F(x_n) + F(x_n) - \dots + -F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = F_b - F_a$$

לרגע נהיה פוליטיקאים. נתעלם מבעיות עד שהן יהיו בעיות גדולות יותר. ואז בשאיפה לאינסוף יתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\approx} = F(b) - F(a)$  ולפי חוק ביביהו זה שווה לשטח במדויק (נתעלם מבעיות).

סה"כ באמצעות מציאת פונקציה קדומה, הצלחנו לקרב את השטח  $S$  במיקומים  $a, b$ . נסמן:

$$S = \int_a^b f(x) dx \stackrel{!}{=} F(b) - F(a), \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

כאשר השוויון המסומן הוא המשפט היסודי של החדו"א.

(וכן זה תלוי באקסיומת הבחירה, או בגרסאות יותר חלשות שלה)

### 2.1 הערות

- שטח מסומן (עם סימן) - בשביל שטח בלי סימן נרצה לקחת את הערך המוחלט. השטח יהיה שלילי אם הגרף מתחת לציר ה- $x$ .
- הסימון הבא:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

ועכשיו נשמיד כליל את הפורמליות:

$$\int_a^{b+\Delta x} f(x) dx = F(b+\Delta x) - F(a) = F(b) - F(a) + \underbrace{F(b+\Delta x) - F(b)}_{\approx \Delta x \cdot f(b)}$$

עכשיו עברי ינסה לשכנע אותנו שכל בליל החוסר פורמליות שלו עובד. כאשר  $\operatorname{argmax}$  הוא הנקודה המקסימלית של הביטוי בפנים.

$$X_k = \operatorname{argmax}_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$$

כלומר  $\forall x \in [x_k, x_{k+1}] F(X_k) \geq f(x)$ . זה לכאורה המקום בו השגירה הכי גדולה. נגדיר:

$$0 \leq f(X_k) - f(t_k) \leq |X_k - t_k| \cdot \max_{x \in [x_k, t_k]} |f'(x)| \leq (x_{k+1} - x_k) \cdot \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|}_M$$

כרגע הטיעון תקף לעבור פונקציה  $f$  בעלת נגזרת  $f'$  חסומה על ידי  $M$ .

$$S_{\approx}(\{X_k\}) - S_{\approx}(\{t_k\}) = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) (f(X_k) - f(t_k)) \leq \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^2 \cdot M = M \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x_k = a + \frac{b-a}{n+1}k \implies M \sum_{k=0}^n (x_{k+1})^2 = M \sum_{k=0}^n \left( \frac{b-a}{n+1} \right)^2 \approx \frac{1}{n} = 0$$

בעצם כאן בחרנו את הגבהים המקסימליים, במקום הגבהים המוזרים שבחרנו קודם. כלומר, ההפרש בין הגבהים המקסימליים (עבורם השטח יותר גדול, לכאורה) לשטח שמצאנו קודם שואף ל-0. באופן דומה, אם היינו לוקחים גבהים מינימליים (עבורם השטח יותר קטן, לכאורה), אז היינו מקבלים שההפרש הוא 0. סה"כ חסמנו את הגבול ומצאנו ש- $F(a) - F(b)$  אכן מתאר באופן טוב את שטח המשולש.