

חדו"א 1א ~ תרגיל בית 5

שר פראץ

6 בדצמבר 2025

(1) . . . . .

נמצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

$$\sqrt[n]{4^2 + 2^n}$$

נקבל מסנדוויץ'

$$2 = 2^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{4^2 + 2^n} \stackrel{x>4}{\leq} \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 2^{\frac{n}{n}} = 2 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$$

ש- $\sqrt[n]{16 + 2^n}$  ופרט הגבול החלקי הוא 2 ויחיד.

$$\frac{n-1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \quad (\text{ב})$$

## נבחן ש-:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \begin{cases} \sin 0 & n \equiv 0 \\ \sin 1 & n \equiv 1 \bmod 3 \\ \sin 2 & n \equiv 2 \end{cases}$$

עוד נבחן ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

ולכן:

$$i \in \{0, 1, 2\}: a_{3n+i} = \frac{3n-1}{3n+1} \cdot \underbrace{\sin(3n+i)}_{\sin i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \sin i = \sin i$$

ממשפט הכיסוי, משום ש- $3n$ ,  $3n+1$ ,  $3n+2$  מוכנסים את  $\mathbb{N}$ , קיבל שהגבולות החלקיים היחידים הם  $\sin 0, \sin 1, \sin 2$ .

$$\frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3} \quad (2)$$

נבחן ט-

$$(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 2 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

כאשר  $I_X$  האינדיקטור על הקבוצה  $X$ . עוד נבהיר ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{1} = 1$$

סה"כ:

$$i \in \{0, 1\}: a_{2n+i} = \frac{2^{2n} + 1}{2^{2n} + 3} (1 - (-1)^{2n+i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}} = 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

סיה"כ נקבע ש- $a_{2n+1} \rightarrow 0$ ,  $a_{2n} \rightarrow 0$ ,  $a_{2n+2} \rightarrow 2n+1$ ,  $a_{2n+3} \rightarrow 2n$ . בגלל ש-

## (2) . . . . .

תהי  $a_n$  סדרה המקיימת  $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{-1, 3\}$ . נגדיר סדרה חדשה  $b_n = |a_n - 1|$ .

הוכחה. למה: כל ת"ס מתכנסת של  $a_n$  מקיימת  $2 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = -1$ . יהי  $a_{n_k}$  תטיסדרה של  $a_n$  כך  $|a_{n_k} - 1| = 2$ . נראה  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$  אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n_k}| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$ . באופן דומה בעברו  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n_k} - 1| = 3$ , נקבל ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = 3$ , כלומר  $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{-1, 3\}$  מהנתנו  $a_{n_k} \rightarrow -1 \vee a_{n_k} \rightarrow 3$ , ואת שני המקרים האלו כיסו והוכחנו שעבורם  $|a_{n_k} - 1| \rightarrow 2$ .

עתה נפנה להראות הכללה דו-כיוונית.

- יהי  $m \in \hat{\mathcal{P}}(b_n)$ . מכאן קיימת  $m$  מתכנסת של  $b_{n_k} \rightarrow a_{n_k}$ , אז קיימת לה ת"ס מתכנסת  $\ell \rightarrow a_{n_k}$  כלשהי. אז

$$\hat{\mathcal{P}}(b_n) = \left| a_{n_k} - 1 \right|$$

- תהי  $-1 \rightarrow a_n$  של  $a_n$  שבכרח קיימת מהנתנו  $b_{n_k} = |a_{n_k} - 1| \rightarrow 2$ . זהינו  $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{-1, 3\}$  מהלמה, כלומר 2 אכן גבול חלקיקי של  $b_n$ , ומכאן ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ .

■ סה"כ הראינו ש- $\hat{\mathcal{P}}(b_n) = \{2\}$ .

## (3) . . . . .

(א) תהי  $M \subseteq \mathbb{R}$  קבועה סופית ולא ריקה. נמצא  $a_n$  כך ש- $s$  מושם  $\min\{|M_i - x| \mid i \in [n]\} = |M| - 1$ . משום ש- $M$  קבועה סופית, אז  $\min\{|M_i - x| \mid i \in [n]\} < \min\{|M_i - x| \mid i \in [n]\}$  סדר טוב עלייה, ולכן ניתן למספר את  $M$  לפי  $M_0, M_1, \dots, M_s$  וכך נסמן  $i \leq s$ . נבחר  $M_i$  יבחר. נבוחן ש- $x < M_i$  או  $x > M_{i+1}$ . נבוחן היטוב ואז ה- $i$  עבורי המרחק  $|M_i - x|$  מינימלי. נבוחן ש- $x < M_i$  או  $x > M_{i+1}$ . נבוחן בשלילה ש- $\varepsilon \geq n$  בהכרח  $|a_n - x| \leq \varepsilon$ , אז סטירה למינימליות של  $M_i$  וסיימנו. מכאן ש- $x$  איננו גבול וקיים סטירה גם כאן. כלומר  $M \subseteq \hat{\mathcal{P}}(a_n)$ , סה"כ הראינו הכללה דו-כיוונית.

■ (ב) תהי  $x_n$  סדרה. נבנה סדרה  $b_n$  כך ש- $x_n \rightarrow x$  גבולות חלקיקים שלה. נבוחן. ניעזר בבנייה דומה לו של הסעיף הקודם:

$$a_n = \underbrace{x_1}_{s_1}, \underbrace{x_1, x_2}_{s_2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}_{s_3}, \dots \underbrace{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}_{s_n} \dots$$

כלומר, בנינו את  $a_n$  מאינסוף חלקיקים  $s_1, s_2, \dots, s_n$  מיל את האיברים  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . יהי  $N \in \mathbb{N}$ , נראה ש- $x_n$  גבול חלקיקי של  $a_n$ . מעצם הגדotta,  $s_n$  בהכרח מופיע לראשונה ב- $a_n$  מתייחסו ( $\binom{n}{2}$  איברים). קבועת תתי-הקבוצות של  $\text{Im } a_n$  הבהא:  $\{s_i \mid i \geq N\}$ , מקיימת שכל אחד מהתתי-הקבוצות הללו  $x_n$  נמצא, כלומר  $x_n$  מופיע באופן שכיח ב- $a_n$ . מהגדירה ש- $x_n$  הוא גבול חלקיקי של  $a_n$ . סה"כ  $\text{Im } a_n = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \hat{\mathcal{P}}(a_n)$  כנדרש.

(ג) נפרק קיוס סדרה עבורה. נראה ש- $0 \geq \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}$ . נראה  $a_n$  סדרה ונניח ש- $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . משום ש- $0 \rightarrow \frac{1}{n}$  מתכנסת, אז קיימים  $N_1$  כך ש- $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$  לכל  $n \geq N_1$ . בגלל ש- $\frac{1}{N_1}$  גבול חלקיקי של  $a_n$ , קיימים  $N_2 > N_1$  כך ש- $\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N_2}$ . סה"כ, מא"ש המשולש:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| > \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{N_1} \right| + \left| \frac{1}{N_1} - 0 \right| > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש. מהגדירה 0 גבול חלקיקי של  $a_n$ , כלומר  $\hat{\mathcal{P}}(a_n) = \{0\}$ . נכפיל את האגפים ב- $n$  וקיים  $1 = 0$ . בסטירה לאקסיומות השדה.

## (4) . . . . .

נפריך את הטענה הבאה: אם  $a_n$  סדרה כך שלכל  $1 < p \in \mathbb{N}$  הת"ס  $(a_{kp})_{k=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז  $a_n$  מתכנסת.

הפרכה. נסמן ב- $\mathbb{P}$  את קבוצת הראשוניים. נתבונן באינדיקטור  $I_n$  ביחס ל- $\mathbb{P}$ , הוא סדרה ממשית. נבחן שלכל  $1 < p \in \mathbb{N}$  מתקיים ש- $a_{pk}$  מתחלק ב- $p$  וב- $k$  ובי- $1$ , לכל  $1 > k$ , דהיינו  $pk$  ראשון, ומכאן שהסדרה בהכרח קבועה ב- $0$  לכל  $1 > k$ , דהיינו  $0 \rightarrow a_{pk}$ . נניח בשלילה שהטענה נכונה, ומכאן ש- $a_{pk}$  מתכנסת. אזי בסביבה  $(0.5, 0.5)$  יש כמות אינסופית של מספרים ומוחץ אליו כמות סופית של מספרים. מהגדרת האינדיקטור, יש כמות סופית של ראשוניים, וסתירה. ■

## (5) . . . . .

תהי  $a_n$  סדרה חיובית כך ש- $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1}$ . נוכיח שאם  $0 < L$  גבול חלקי של  $a_n$  אז  $\frac{1}{L}$  גבול חלקי גם הוא.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי  $0 > \varepsilon$ . מיהו  $L$  גבול חלקי, קיים  $\mathbb{N} \in n$  כך ש- $|a_n - L| < \varepsilon$ . איז ידוע קיום  $N_1$  כך שלכל  $n \geq N_1$  מתקיים  $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}| < \varepsilon$ .

$$|a_n a_{n+1} - 1| < \varepsilon a_n - \varepsilon \implies a_{n+1} < \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_n}$$

לבינתיים, נטפל במקרה בו  $L > 1$ :

$$\left| a_{n+1} - \frac{1}{L} \right| < \left| \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon)L + |L - a_n|}{a_n L} \stackrel{L > 1}{<} \frac{\varepsilon a_n - \varepsilon + |L - a_n|}{a_n L} < \frac{\varepsilon a_n - \varepsilon + \varepsilon}{La_n} = \frac{\varepsilon}{L} < \varepsilon$$

כנדרש. כדי להשמיד את הערכים המוחלטים השתמשנו בחיויבות. במקרה ו- $1 < L$ , נסמן  $\frac{1}{a_n} = m$ , ואז  $m$  גבול חלקי ש- $\frac{1}{a_n}$ , כלומר  $\frac{1}{m}$  גבול חלקי של  $a_n$  כלומר  $\frac{1}{L}$  גבול חלקי של  $a_n$  וסיימנו (זאת מריתמטיקת גבולות). ■

## (6) . . . . .

nocich v'nperik tenuot ul sderot b'kliot.

(א) אם סדרה חסומה כמעט תמיד, אז היא חסומה.

הפרכה. נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחן שלכל  $N$ , עבור  $N > 2n+1$  ביחס  $1 < 0$  כמעט תמיד. עם זאת, יש לה ת"ס  $a_{2N} = 0$ , כלומר  $a_n$  כמעט תמיד, וזו סתירה. ■

(ב) אם סדרה חסומה באופן שכיח, היא חסומה.

הוכחה. נוכיח. תהי  $a_n$  סדרה שניה שהיא חסומה ע"י  $M$  באופן שכיח. איז קיים  $\mathbb{N} \in N$  כך ש- $a_n < M \forall n \geq N$ . נבחן שהקבוצה  $[N]$  סופית. לכן, המקסימום הבא מוגדר היטב:

$$\tilde{M} = \max(\{a_n \mid n \in [N]\} \cup \{M\}) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, M\}$$

nocich shehoo chesum aleion. Ihi  $n \in \mathbb{N}$ .

- אם  $n < N$ , אז מהגדרת מקסימום  $a_n \leq \tilde{M}$ .

- אם  $n > N$ , אז מהגדרת מקסימום ומהנתון  $a_n \leq M \leq \tilde{M}$ .

זה"כ כיסינו את כל המקרים וסיימנו.

(ג) אם סדרה עולה באופן שכיח אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הפרכה. ניעזר באותה הסדרה שהשתמשנו בה בסעיף (א):

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{n-1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

יש לה צ"ס הוא  $a_{2n} = (-1)^n$  שראינו מתכנס בשום מובן, ומכאן שאינה מתכנסת. עם זאת, ה"ט"  $n = a_{2n+1}$  מונוטוני עולה, ומהגדרתת ת"ס מתkowski ש- $a_n$  עולה באופן שכיה. סתריה.

(ד) נוכיח שאם סדרה עולה כמעט תמיד מותכנסת במובן הרחב. הוכחה. נפרק למקרים.

- אם  $a_n$  חסומה, אז ממשפט ויראשטראס הראשון היא מותכנסת ל- $\limsup a_n$  וסימנו.

- אם  $a_n$  אינה חסומה, לכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך  $M < a_{N_1} > 0$ . בפרט עבור 0 נקבל קיומ  $N_1 \in \mathbb{N}$  כך  $0 < a_{N_1} < |a_n|$ . סה"כ לכל  $M \in \mathbb{R}$  נוכל לבחור כך  $N_2 > M$  כך  $|a_{N_2}| > M$  וכן  $N = \max\{N_1, N_2\}$  קיימים מונוטוניות  $a_{N_2} > a_{N_1} > \dots > a_n$  כלומר  $a_n \geq a_{N_2} > M$  ואז מונוטוניות שוב  $a_n \geq a_{N_2} = |a_{N_2}|$ .

(ה) נראה שאם סדרה היא מותכנסת אז היא מונוטונית כמעט תמיד.

הוכחה. למעשה הראיינו בכיתה ש-(1) כל סדרה מותכנסת היא חסומה (כי יש אינסוף איברים בסביבה כלשהי סביב הגבול, וכמוות סופית מחוץ לה, ואז אפשר לחת את המקסיומים) ו-(2) לכל סדרה חסומה יש ת"ס מונוטוניות (זה היה שלב בהוכחה של בולצאנו-ויראשטראס), וזה מהגדרת מסיים את ההוכחה מהגדרתת ת"ס.

## (7)

תהי  $a_n$  סדרה של איברים חיוביים כך  $\limsup a_n \cdot \limsup \frac{1}{a_n} = 1$ . נוכיח ש- $a_n$  מותכנסת.

נוכיח מהיות  $\limsup a_n$ ,  $\liminf a_n$  מקסימום ומינימום בקבוצת הגבולות החלקיים, ש- $s = \limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}$ . נסמן  $\limsup \frac{1}{a_{n_j}} = s$  של  $\frac{1}{a_{n_k}}$  נקבע שקיים  $\frac{1}{a_{n_k}} \geq \limsup \frac{1}{a_{n_j}}$  בהכרח, ושזה הגבול המקסימלי, ככלומר לכל  $\frac{1}{a_{n_j}}$  גבול עליון של  $a_n$ . סה"כ קיבלנו: מאריתמטיקה של גבולות נקבע  $\limsup a_n > \limsup \frac{1}{a_{n_k}} = \frac{1}{s}$ , ומשום ש- $\frac{1}{s}$  גבול עליון של  $a_n$ .

$$\limsup a_n = \frac{1}{s} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{a_{n_k}}} = \frac{1}{\liminf a_n}$$

מכאן, נקבע:

$$1 = \limsup a_n \cdot \limsup \frac{1}{a_n} = \frac{\limsup a_n}{\liminf a_n} \implies \liminf a_n = \limsup a_n$$

כלומר הקבוצה  $\{a_n\}$  חסומה בין שני איברים שווים, ומהיותה לא ריקה, בהכרח יש בה איבר אחד. מכאן שיש גבול חלקי יחיד, ככלומר  $a_n$  מותכנסת אליו, וסימנו.

## (8)

(א) נוכיח שסדרה  $a_n$  אינה חסומה מלעיל אם  $\limsup a_n = \infty$ .

הוכחה. נראה גירה דיסיונית.

$\limsup a_n = \infty \implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ ש-} a_n > M$  הוא בפרט מקסימלי (ולא רק סופרמורום) כמו שהוכחנו בהרצאה, איזי קיימים גבול חלקי  $\rightarrow \infty$ . בפרט, עבור  $M > 0$  כלשהו, בהכרח קיימים  $N \in \mathbb{N}$  כך  $|a_{n_k}| = a_{n_k} > M$ , ככלומר עבור  $n_k = j$  מתקיים  $|a_j| > M$ , ככלומר הראיינו את השיליה של  $a_n$  חסום מלעיל.

$\limsup a_n = \infty \implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ ש-} a_n > M$  נגידר את הפונקציה הבאה:

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Im } a_n) \quad F(n) = \{a_k \in \text{Im } a_n : a_k > n\}$$

נבחן שהקבוצות בתמונה אין ריקות, ישירות מhayot  $a_n$  אינה חסומה מלעיל (נקבל שלכל  $M \in \mathbb{R}$  קיים  $k$  כך  $a_k > M$  ובפרט עבור  $n = m$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  נקבע ש- $a_n > a_m$   $\exists a_k \in \text{Im } a_n \wedge a_k > a_m$ ). מכאן שקיים פונקציית ל- $F$  בחרה  $f: \mathbb{N} \rightarrow \text{Im } a_n$  כלשהי. נבחן ש- $f$  פרמוטציה על ת"ס של  $a_{n_k}$  כלשהי (כך  $\text{Im } a_{n_k} = \text{Im } f$  כלומר  $\text{Im } f \subseteq \text{Im } a_n$ , כי  $\text{Im } f \subseteq \text{Im } a_{n_k}$ ). נבחן שידוע ש- $\infty \rightarrow f$  שכן  $\infty \rightarrow n \rightarrow a_{n_k}$  ואז משפט הפיצה, והראינו בהרצאה שפרמוטציה לא משנה שאיפה לאינסוף, ככלומר  $\infty \rightarrow a_{n_k}$  גם כן. סה"כ מצאנו ת"ס של  $a_n$   $a_{n_k} \geq \limsup a_n \geq \infty$ .

(ב) מצאתי שני תנאים, אני לא סגור מי מהם אתם רוצים או אוכיח את שניהם. אף אחד מהתנאים לא פועל במובן הרחב, בשביל זה צריך

לפרק למקרים.

$$L = \liminf a_n = \inf \mathcal{P}(a_n) \quad (1)$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: a_n - \varepsilon < L \wedge a_n \geq L) \quad (2)$$

$$\iff ((\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: a_n \geq L) \wedge (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N: a_n \leq L)) \quad (3)$$

..... (9) .....

nociah at kritirion abel hachnasot torim. vekel lahatmash bkritirion diricla hachnasot torim.

hochha. yhi  $a_n, b_n$  sderot. nnich sh- $a_n$  matcansat l- $\ell$  monotonit, vnnich sh- $b_n$  matcans. Rashiit cl, nteuk bmkra bo 0. bmkra zah  $\ell = 0$ . bmkra zah  $a_n$  sderha monotonit smatcansat l-0. npatzl lmkrim.

$$\text{am } a_1 = 0 \text{ bchra } a_n = 0 \text{ kboua } -0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \text{siymno.}$$

• am  $0 > a_1$ , az nnich bshilah shia monotonit uolah az  $a_n > a_1 > 0$ , clomr ubor  $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1 = \varepsilon$  nkel sttira lkios  $N \in \mathbb{N}$  cz slcl  $a_n > a_1 = |a_1 - 0| > \varepsilon$ .

sah'c  $a_n$  monotonit chibut yordet l-0, vmahit  $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  matcans, sderha  $b_n$  bfrt chosoma, vsa'h'c siymno mkririon diricla.

• am  $0 < a_1$ , az nnich bshilah shia monotonit yordet az  $a_1 < a_n < 0$ , clomr ubor  $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1 = \varepsilon$  nkel sttira lkios  $N \in \mathbb{N}$  cz slcl  $-a_n > -a_1 = |a_1 - 0| > \varepsilon$ .

sah'c  $a_n$  monotonit shililit uolah l-0. ngdr  $a'_n = -a_n$  matkbel sh- $a'_n$  monotonit chibut yordet l-0, vmahit  $b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n = -\ell$  bfrt chosoma, az  $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n = -\ell$  bfrt chosoma, vsa'h'c siymno. mogdr

utha nteuk bmkra hchl bo la bchra  $= 0$ . vekel hagdr at  $c_n = a_n - \ell$ , vnkbl mairitmitika sh-0. az,  $c_n \rightarrow 0$  matcans mahattuna hakodmot, vnsmn at haivar alio hoa matcans b-q. ydou sh- $c_n = a_n - \ell$  matcans, vhaivar alio hoa matcans nsman b-p. nkel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ell) b_n + \ell b_n \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \ell) b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell (b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + \ell \sum_{n=1}^{\infty} b_n = q + \ell p \in \mathbb{R}$$

■ (caher hshoivon  $\stackrel{!}{=}$  ncnu rk ci haeng hiymi mogdr hitb)

..... (10) .....

nociah slcl  $\mathbb{R}$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vlccl  $n \in \mathbb{N}$  am  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0$  mtakim:

$$\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

hochha. nociah baindokziah:

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

utha, nociah baindokziah:

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

• basim:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + \beta k) &= \sin \alpha \cdot \sum_{k=0}^n \cos(\beta k) + \cos \beta \cdot \sum_{k=0}^n \sin(\alpha k) \\
&= \frac{\cos \alpha \left( \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left( (n + \frac{1}{2}) \beta \right) \right)}{2 \sin \left( \frac{\beta}{2} \right)} + \frac{\sin \beta \left( \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left( (n + \frac{1}{2}) \alpha \right) \right)}{2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \\
&= -\frac{\cos \alpha \cdot \sin((n+1)\beta) \sin(n\beta)}{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)} + \frac{\sin \beta \cdot \cos((n+1)\alpha) \sin(n\alpha)}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)}
\end{aligned}$$

לשדיח נסחף חדשן עדיף לוותר

..... (11) .....

וכיich או נפריך את התכונות הסדרות הבאות באמצעות קритריון קושי.

(א) נפריך את התכונות  $a_n = (-1)^n$

הוכחה. עבור  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $m = N$ ,  $n = N + 1$  מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$$

וזו סתירה לkritריון קושי. סה"כ הרינו את הטענה ההפוכה לkritריון קושי.

(ב) נפריך את התכונות  $a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$

הוכחה. עבור  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n = N + 4$ ,  $m = N' + 4$  מתקיים:

$$1 = \varepsilon > |a_n - a_m| = \left| N' + 4 + \frac{(-1)^{N'+4}}{N'+4} - N' + \frac{(-1)^N}{N'} \right| = \left| 4 + \frac{1}{N'} - \frac{1}{N'+4} \right| > 4$$

כלומר  $4 > 1$ , וסתירה. סה"כ הרינו את הטענה ההפוכה לkritריון קושי.

(ג) נוכיח את התכונות  $a_n = \frac{n+1}{4n^2+3}$

הוכחה. לכל  $n$ :

$$\frac{n}{4n^2+3} - \frac{n+1}{4(n+1)^2+3} = \frac{4n^3 + 8n^2 + 7n - 4n^3 - 3n - 4n^2 - 3}{16n^4 + 32n^3 + 10n^2 + 24n + 21} = \frac{4n^2 + 4n - 3}{16n^4 + 32n^3 + 10n^2 + 24n + 21} > 0$$

כלומר, זהה מונוטונית יורדת עם הפרשים הולכים וקטנים. ידוע שקיימים  $N_1$  כך  $\forall n \geq N_1$   $32n^3 + 10n^2 + 24n + 21 < n^4$ . גם  $N_2$  קיים כך  $\forall n \geq N_2$ :  $4n^2 + 4n - 3 < 4n^2$ . אז עבור  $N = \max \left\{ \sqrt{\frac{4}{17}}\varepsilon, N_1, N_2 \right\}$  ו- $k > 0$  ממונותוניות:

$$|a_{n+k} - a_n| = a_n - a_{n+k} > a_n - a_{n+1} = \frac{4n^2 + 4n - 3}{16n^4 + 32n^3 + 10n^2 + 24n + 21} > \frac{4n^2 + 4n - 3}{17n^4} > \frac{4n^2}{17n^4} = \frac{4}{17n^2} > \frac{4}{17 \cdot \frac{4}{17}\varepsilon} = \varepsilon$$

סה"כ מkritריון קושי הסדרה מתכנסת.