

חדו"א 1א ~ תרגיל בית 5

שחר פרץ

6 בדצמבר 2025

..... (1)

נמצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

$$\sqrt[n]{4^2 + 2^n} \quad (\text{א})$$

נקבל מסנדוויץ':

$$2 = 2^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{4^2 + 2^n} \stackrel{x \geq 4}{\leq} \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 2^{\frac{n}{n}} = 2 \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$$

ש- $2 \rightarrow \sqrt[n]{16 + 2^n}$ ובפרט הגבול החלקי הוא 2 ויחיד.

$$\frac{n-1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \quad (\text{ב})$$

נבחין ש-:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \begin{cases} \sin 0 & n \equiv 0 \\ \sin 1 & n \equiv 1 \pmod{3} \\ \sin 2 & n \equiv 2 \end{cases}$$

עוד נבחין ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

ולכן:

$$i \in \{0, 1, 2\}: a_{3n+i} = \frac{3n-1}{3n+1} \cdot \underbrace{\sin(3n+i)}_{\sin i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \sin i = \sin i$$

ממשפט הכיסוי, משום ש- $3n, 3n+1, 3n+2$ מכסים את \mathbb{N} , נקבל שהגבולות החלקיים היחידים הם $\sin 0, \sin 1, \sin 2$.

$$\frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3} \quad (\text{ג})$$

נבחין ש-:

$$(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 2 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases} = 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

כאשר I_X האינדיקטור על הקבוצה X . עוד נבחין ש-:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{1} = 1$$

סה"כ:

$$i \in \{0, 1\}: a_{2n+i} = \frac{2^{2n} + 1}{2^{2n} + 3} (1 - (-1)^{2n+i}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}} = 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

סה"כ נקבל ש- $a_{2n} \rightarrow 0, a_{2n+1} \rightarrow 2$. בגלל ש- $2n, 2n+1$ מכסים את \mathbb{N} סה"כ הגבולות החלקיים היחידים הם 0, 2

(2)

תהי a_n סדרה המקיימת $\hat{P}(a_n) = \{-1, 3\}$. נגדיר סדרה חדשה $b_n = |a_n - 1|$. נוכיח ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$.
 הוכחה. למה: כל ת"ס a_{n_k} מתכנסת של a_n מקיימת $|a_{n_k} - 1| \rightarrow 2$. יהי a_{n_k} תת-סדרה של a_n כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = -1$. נראה ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n_k} - 1| = 2$. זה נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות וממשפטים שהוכחנו בכיתה (אם $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = |\ell|$). באופן דומה בעבור a_{n_k} ת"ס של a_n כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = 3$, נקבל ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n_k} - 1| = 2$. מאריתמטיקה של גבולות. סה"כ, תהי a_{n_k} ת"ס מתכנסת של a_n , אז בהכרח $a_{n_k} \rightarrow -1 \vee a_{n_k} \rightarrow 3$ מהנתון $\hat{P}(a_n) = \{-1, 3\}$, ואת שני המקרים האלו כיסו והוכחנו שעבורם $|a_{n_k} - 1| \rightarrow 2$.
 עתה נפנה להראות הכלה דו-כיוונית.

- יהי $m \in \hat{P}(b_n)$. מכאן שקיימת $b_{n_k} \rightarrow m$ ת"ס מתכנסת של b_n . נתבונן ב- a_{n_k} , אז קיימת לה ת"ס מתכנסת $a_{n_{k_j}} \rightarrow \ell$ כלשהי. אז $\hat{P}(b_n) = 2$ סה"כ מהלמה.
- תהי $a_{n_k} \rightarrow -1$ ת"ס של a_n שבהכרח קיימת מהנתון $\hat{P}(a_n) = \{-1, 3\}$. דהיינו $|a_{n_k} - 1| \rightarrow 2$ מהלמה, כלומר 2 אכן גבול חלקי של b_n , ומכאן ש- $\{2\} \in \hat{P}b_n$.
- סה"כ הראינו ש- $\hat{P}b_n = \{2\}$ כלומר $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ כדרוש.

(3)

(א) תהי $M \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה. נמצא a_n כך ש- $\mathcal{P}(a_n) = M$.
 בנייה. נסמן $s = |M| - 1$. משום ש- M קבוצה סופית, אז \mathbb{R} סדר טוב עליה, ולכן נוכל למספר את M לפי $M_0, M_2 \dots M_s$ כך $M_i < M_j \iff i < j$ - נגדיר את הסדרה הבאה:

$$a_n = M_{n \bmod s}$$

נבחין שהיא מוגדרת היטב שכן $n \bmod s \in [n]$. עוד נבחין, עבור $a_{n_k} = i + k \cdot s$ היא ת"ס קבועה ב- M_i לכל $i \in [n]$, ומכאן ש- $M_i \in \mathcal{P}(a_n)$. כלומר, $M \subseteq \mathcal{P}(a_n)$. יהי $x \in \mathcal{P}(a_n)$ ונניח בשלילה $x \notin M$, אזי משום ש- M סופית אז $\min\{|M_i - x| \mid i \in [n]\}$ מוגדר היטב ואז i -עבורו המרחק $|M_i - x|$ מינימלי יבחר. נבחין שעבורו $M_i < x < M_{i+1}$ או $M_{i-1} < x < M_i$. יהי נבחר $\varepsilon = \frac{M_i - x}{2}$, נבחר $N = 1$, ועתה נראה שלכל $n \geq N$ בהכרח $|a_n - x| > \varepsilon$. נניח בשלילה ש- $|a_n - x| \leq \varepsilon$, אז סתירה למינימליות של M_i וסיימנו. מכאן ש- x איננו גבול וקיבלנו סתירה גם כאן. כלומר $\mathcal{P}(a_n) \subseteq M$, סה"כ הראינו הכלה דו-כיוונית.

(ב) תהי x_n סדרה. נבנה סדרה b_n כך ש- $\text{Im } x_n$ גבולות חלקיים שלה.
 בנייה. ניעזר בבנייה דומה לזו של הסעיף הקודם:

$$a_n = \underbrace{x_1}_{s_1}, \underbrace{x_1, x_2}_{s_2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}_{s_3}, \dots, \underbrace{x_1, x_2, x_3 \dots x_n}_{s_n} \dots$$

כלומר, בנינו את n מאינסוף חלקים s_1, s_2, \dots מרוצפים אחד אחד השני, כך ש- s_n מכיל את האיברים $x_1 \dots x_n$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נראה ש- x_n גבול חלקי של a_n . מעצם הגדרתה, s_n בהכרח מופיע איפשהו ב- a_n מתישהו (ליתר דיוק, לאחר $N = \binom{n}{2}$ איברים). קבוצת תתי-קבוצות של $\text{Im } a_n$ הבאה: $\{s_i \mid i \geq N\}$, מקיימת שבכל אחד מתתי-קבוצות הללו x_n נמצא, כלומר x_n מופיע באופן שכיח ב- a_n . מהגדרה שקולה, הוא גבול חלקי של a_n . סה"כ $\hat{P}(a_n) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Im } a_n$ כנדרש.

(ג) נפריך קיום סדרה עבורה $\hat{P}(a_n) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

הפרכה. תהי a_n סדרה ונניח ש- $\hat{P}(a_n) = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. נראה ש-0 גם גבול חלקי שלה. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $N > 0$. נמצא n כך ש- $|a_n - 0| < \varepsilon$. משום ש- $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ מתכנסת, אז קיים N_1 כך ש- $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n \geq N_1$. בגלל ש- $\frac{1}{N_1}$ גבול חלקי של a_n , קיים $n > N_1$ כך ש- $|\frac{1}{n} - \frac{1}{N_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$. סה"כ, מא"ש המשולש:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| > \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{N_1} \right| + \left| \frac{1}{N_1} - 0 \right| > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כנדרש. מהגדרה 0 גבול חלקי של a_n , כלומר $0 \in \hat{P}(a_n)$, אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} = 0$. נכפיל את האגפים ב- n וקיבלנו $0 = 1$, בסתירה לאקסיומות השדה.

(4)

נפריך את הטענה הבאה: אם a_n סדרה כך שלכל $p > 1$ $\exists \mathbb{N}$ הת"ס $(a_{kp})_{k=1}^\infty$ מתכנסת, אז a_n מתכנסת.

הפרכה. נסמן ב- \mathbb{P} את קבוצת הראשוניים. נתבונן באינדקסור I_n ביחס ל- \mathbb{P} , הוא סדרה ממשית. נבחין שלכל $p > 1$ $\exists \mathbb{N}$ מתקיים ש- a_{pk} מתחלק ב- p וב- k ו-1, לכל $k > 1$, דהיינו pk איננו ראשוני, ומכאן שהסדרה בהכרח קבועה ב-0 לכל $k > 1$, דהיינו $a_{pk} \rightarrow 0$. נניח בשלילה שהטענה נכונה, ומכאן ש- a_{pk} מתכנסת. אזי בסביבה $(-0.5, 0.5)$ יש כמות אינסופית של מספרים ומחוץ אליה כמות סופית של מספרים. מהגדרת האינדקסור, יש כמות סופית של ראשוניים, וסתירה. ■

(5)

תהי a_n סדרה חיובית כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = 1$. נוכיח שאם $L > 0$ גבול חלקי של a_n אז $\frac{1}{L}$ גבול חלקי גם הוא.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $N \in \mathbb{N}$. מהיות L גבול חלקי, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $|a_n - L| < \varepsilon$. אזי ידוע קיום N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n \cdot a_{n+1} - 1| < \varepsilon a_n - \varepsilon$.

$$|a_n a_{n+1} - 1| < \varepsilon a_n - \varepsilon \implies a_{n+1} < \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_{n+1}}$$

לבינתיים, נטפל במקרה בו $L > 1$:

$$\left| a_{n+1} - \frac{1}{L} \right| < \left| \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon)L + |L - a_n|}{a_n L} \stackrel{L > 1}{<} \frac{\varepsilon a_n - \varepsilon + |L - a_n|}{a_n L} < \frac{\varepsilon a_n - \varepsilon + \varepsilon}{La_n} = \frac{\varepsilon}{L} < \varepsilon$$

כנדרש. כדי להשמיד את הערכים המוחלטים השתמשנו בחיוביות. במקרה ו- $L < 1$, נסמן $m = \frac{1}{L}$, ואז m גבול חלקי ש- $\frac{1}{a_n}$, כלומר $\frac{1}{m}$ גבול חלקי של $\frac{1}{a_n}$, וסה"כ m גבול חלקי של a_n כלומר $\frac{1}{L}$ גבול חלקי של a_n וסיימנו (זאת מאריתמטיקת גבולות). ■

(6)

נוכיח ונפריך טענות על סדרות כלליות.

(א) אם סדרה חסומה כמעט תמיד, אז היא חסומה.

הפרכה. נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחין שלכל N , עבור $2N > N$ בהכרח $0 < 1 = a_{2N} < a_n$ כמעט תמיד. עם זאת, יש לה ת"ס $a_{2n+1} = 2n+1 \rightarrow \infty$, משמע היא איננה חסומה, וזו סתירה. ■

(ב) אם סדרה חסומה באופן שכיח, היא חסומה.

הוכחה. נוכיח. תהי a_n סדרה שגניח שהיא חסומה ע"י M באופן שכיח. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_n < M$ $\forall n \geq N$. נבחין שהקבוצה $[N]$ סופית. לכן, המקסימום הבא מוגדר היטב:

$$\tilde{M} = \max(\{a_n \mid n \in [N]\} \cup \{M\}) = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, M\}$$

נוכיח שהוא חסם עליון. יהי $n \in \mathbb{N}$.

• אם $n < N$, אז מהגדרת מקסימום \tilde{M} $a_n \leq \tilde{M}$.

• אם $n > N$, אז מהגדרת מקסימום ומהנתון $a_n \leq M \leq \tilde{M}$.

סה"כ כיסינו את כל המקרים וסיימנו. ■

(ג) אם סדרה עולה באופן שכיח אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הפרכה. ניעזר באותה הסדרה שהשתמשנו בה בסעיף (א):

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{n-1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

יש לה צ"ס הוא $a_{2n} = (-1)^n$ שראינו מתכנס בשום מובן, ומכאן שאיננה מתכנסת. עם זאת, הת"ס $a_{2n+1} = n$ מונוטוני עולה, ומהגדרת ת"ס מתקבל ש- a_n עולה באופן שכיח. סתירה. ■

(ד) נוכיח שאם סדרה עולה כמעט תמיד אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם a_n חסומה, אז ממשפט וויראשטראס הראשון היא מתכנסת ל- $\sup \text{Im } a_n$ וסיימנו.
- אם a_n איננה חסומה, לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $|a_n| > M$. בפרט עבור $M = 0$ נקבל קיום $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_{N_1} > 0$. סה"כ לכל $M \in \mathbb{R}$ נוכל לבחור N_2 כך ש- $|a_{N_2}| > M$ וכן $N = \max\{N_1, N_2\}$ יקיים ממונוטוניות ש- $a_{N_2} > a_{N_1} > 0$ כלומר $a_{N_2} = |a_{N_2}|$ ואז ממונוטוניות שוב $\forall n \geq N_2: a_n \geq a_{N_2} > M$ וסיימנו מהגדרת שאיפה לאינסוף. ■

(ה) נראה שאם סדרה היא מתכנסת אז היא מונוטונית כמעט תמיד.

הוכחה. למעשה הראינו בכיתה ש- (1) כל סדרה מתכנסת היא חסומה (כי יש אינסוף איברים בסביבה כלשהי סביב הגבול, וכמות סופית מחוץ לה, ואז אפשר לקחת את המקסימום) ו- (2) לכל סדרה חסומה יש ת"ס מונוטונית (זה היה שלב בהוכחה של בולצאנו-וויראשטראס), וזה מהגדרה מסיים את ההוכחה מהגדרת ת"ס. ■

(7)

תהי a_n סדרה של איברים חיוביים כך ש- $\limsup \frac{1}{a_n} = 1$. נוכיח ש- a_n מתכנסת.

הוכחה. נוכיח מהיות \limsup, \liminf מקסימום ומינימום בקבוצת הגבולות החלקיים, ש- $\frac{1}{\liminf a_n} = \limsup \frac{1}{a_n}$. נסמן $\limsup \frac{1}{a_n} = s$. נבחין שקיימת ת"ס של $\frac{1}{a_n}$ כך ש- $\frac{1}{a_{n_k}} \rightarrow s$. בהכרח, ושה הגבול המקסימלי, כלומר לכל $\frac{1}{a_{n_j}}$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_j}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}}$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_j} > \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k}$, ומשום ש- $\frac{1}{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}} = \frac{1}{s}$ אזי $a_{n_k} \rightarrow \frac{1}{s}$ גבול עליון של a_n . סה"כ קיבלנו:

$$\limsup a_n = \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n_k}}} = \frac{1}{\liminf a_n}$$

מכאן, נקבל:

$$1 = \limsup a_n \cdot \limsup \frac{1}{a_n} = \frac{\limsup a_n}{\liminf a_n} \implies \liminf a_n = \limsup a_n$$

כלומר הקבוצה $\mathcal{P}(a_n)$ חסומה בין שני איברים שווים, ומהיותה לא ריקה, בהכרח יש בה איבר אחד. מכאן שיש גבול חלקי יחיד, כלומר a_n מתכנסת אליו, וסיימנו. ■

(8)

(א) נוכיח שסדרה a_n איננה חסומה מלעיל אמ"מ $\limsup a_n = \infty$.

הוכחה. נראה גרירה דו-כיוונית.

\implies נניח $\limsup a_n = \infty$. משום ש- \limsup הוא בפרט מקסימלי (ולא רק סופרמום) כמו שהוכחנו בהרצאה, אזי קיים גבול חלקי $a_{n_k} \rightarrow \infty$. בפרט, בעבור $M > 0$ כלשהו, בהכרח קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $|a_{n_k}| = a_{n_k} > M$. כלומר עבור $j = n_k$ מתקיים $|a_j| > M$, כלומר הראינו את השלילה של חסום מלעיל.

\Leftarrow נניח a_n איננה חסומה מלעיל, ונראה ש- $\limsup a_n = \infty$. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Im } a_n) \quad F(n) = \{a_k \in \text{Im } a_n : a_k > n\}$$

נבחין שהקבוצות בתמונתה אינן ריקות, ישירות מהיות a_n איננה חסומה מלעיל (נקבל שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים k כך ש- $a_k > M$), ובפרט עבור $m = n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נקבל ש- $\exists a_k \in \text{Im } a_n \wedge a_k > n$. כלומר $\exists a_k \in f(n)$. מכאן שקיימת ל- F פונקציית בחירה $f: \mathbb{N} \rightarrow \text{Im } a_n$ כלשהי. נבחין ש- f פרמוטציה על ת"ס של a_{n_k} כלשהי (כך ש- $\text{Im } a_{n_k} = \text{Im } f$, כי $\text{Im } f \subseteq \text{Im } a_n$). נבחין שידוע ש- $f \rightarrow \infty$ שכן $f > n \rightarrow \infty$ ואז משפט הפיצה, והראינו בהרצאה שפרמוטציה לא משנה שאיפה לאינסוף, כלומר $a_{n_k} \rightarrow \infty$ גם כן. סה"כ מצאנו ת"ס של a_n כך ש- $a_{n_k} \rightarrow \infty$ דהיינו $\infty \geq \limsup a_n \geq \infty$ כלומר $\limsup a_n = \infty$. ■

(ב) מצאתי שני תנאים, אני לא סגור מי מהם אתם רוצים אז אוכיח את שניהם. אף אחד מהתנאים לא פועל במובן הרחב, בשביל זה צריך

לפרק למקרים.

$$L = \liminf a_n = \inf \mathcal{P}(a_n) \quad (1)$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: a_n - \varepsilon < L \wedge a_n \geq L) \quad (2)$$

$$\iff ((\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N: a_n \geq L) \wedge (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N: a_n \leq L)) \quad (3)$$

..... (9)

נוכיח את קריטריון אבל להתכנסות טורים. נוכל להשתמש בקריטריון דיריכלה להתכנסות טורים.

הוכחה. יהיו a_n, b_n סדרות. נניח ש- a_n מתכנסת ל- ℓ ומונוטונית, ונניח ש- b_n מתכנס. ראשית כל, נתעסק במקרה בו $\ell = 0$. במקרה זה a_n סדרה מונוטונית שמתכנסת ל-0. נפצל למקרים.

- אם $a_1 = 0$ אז בהכרח $a_n = 0$ קבועה ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ וסיימנו.
- אם $a_1 > 0$, אז נניח בשלילה שהיא מונוטונית עולה ואז $a_n > a_1 > 0$, כלומר עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1$ נקבל סתירה לקיום $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n > a_1 = |a_1 - 0| > \frac{\varepsilon}{2}$.
- סה"כ a_n מונוטונית חיובית יורדת ל-0, ומהיות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, הסדרה b_n בפרט חסומה, וסה"כ סיימנו מקריטריון דיריכלה.
- אם $a_1 < 0$, אז נניח בשלילה שהיא מונוטונית יורדת ואז $a_n < a_1 < 0$, כלומר עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1$ נקבל סתירה לקיום $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $-a_n > -a_1 = |a_1 - 0| > \frac{\varepsilon}{2}$.
- סה"כ a_n מונוטונית שלילית עולה ל-0. נגדיר $a'_n = -a_n$ מתקבל ש- a'_n מונוטונית חיובית יורדת ל-0, ומהיות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, הסדרה b_n בפרט חסומה, ואז $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n$ מתכנס ל- ℓ כלשהו מקריטריון דיריכלה, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מוגדר היטב וסיימנו.

עתה נתעסק במקרה הכללי בו לא בהכרח $\ell = 0$. נוכל להגדיר את $c_n = a_n - \ell$, ונקבל מאריתמטיקה ש- $c_n \rightarrow 0$. אז, $\sum c_n b_n$ מתכנס מהטענה הקודמת, ונסמן את האיבר אליו הוא מתכנס ב- q . ידוע ש- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ואת האיבר אליו הוא מתכנס נסמן ב- p . נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ell) b_n + \ell b_n \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \ell) b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell (b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + \ell \sum_{n=1}^{\infty} b_n = q + \ell p \in \mathbb{R}$$

■ (כאשר השוויון $\stackrel{!}{=}$ נכון רק כי האגף הימני מוגדר היטב)

..... (10)

נוכיח שלכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ אם $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0$ אז מתקיים:

$$\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

עתה, נוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

• בסיס:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + \beta k) &= \sin \alpha \cdot \sum_{k=0}^n \cos(\beta k) + \cos \beta \cdot \sum_{k=0}^n \sin(\alpha k) \\
&= \frac{\cos \alpha \left(\cos \left(\frac{\beta}{2} \right) - \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \right) \right)}{2 \sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} + \frac{\sin \beta \left(\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha \right) \right)}{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \\
&= -\frac{\cos \alpha \cdot \sin \left((n+1)\beta \right) \sin(n\beta)}{\sin \left(\frac{\beta}{2} \right)} + \frac{\sin \beta \cdot \cos \left((n+1)\alpha \right) \sin(n\alpha)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}
\end{aligned}$$

לשדחגיגכךלחדשגכ ןעדיר לוותר

■

..... (11)

נוכיח או נפריך את התכנסות הסדרות הבאות באמצעות קריטריון קושי.

$$a_n = (-1)^n.$$

הוכחה. עבור $\varepsilon > 0$, $1 = \varepsilon$, ויהי $N \in \mathbb{N}$, אזי עבור $n = N + 1, m = N$ מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$$

■

וזו סתירה לקריטריון קושי. סה"כ הראינו את הטענה ההפוכה לקיטריון קושי.

$$a_n = n + \frac{(-1)^n}{n}.$$

הוכחה. עבור $\varepsilon > 0$, $1 = \varepsilon$, ויהי $N \in \mathbb{N}$, נסמן ב- N' את הזוגי מבין $N, N + 1$, ואז עבור $n = N', m = N' + 4$ מתקיים:

$$1 = \varepsilon > |a_n - a_m| = \left| N' + 4 + \frac{(-1)^{N'+4}}{N'+4} - N' + \frac{(-1)^{N'}}{N'} \right| = \left| 4 + \frac{1}{N'} - \frac{1}{N'+4} \right| > 4$$

■

כלומר $1 > 4$, וסתירה. סה"כ הראינו את הטענה ההפוכה לקיטריון קושי.

$$a_n = \frac{n+1}{4n^2+3}.$$

הוכחה. לכל n :

$$\frac{n}{4n^2+3} - \frac{n+1}{4(n+1)^2+3} = \frac{4n^3+8n^2+7n-4n^3-3n-4n^2-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21} = \frac{4n^2+4n-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21} > 0$$

כלומר, זוהי מונוטונית יורדת עם הפרשים הולכים וקטנים. ידוע שקיים N_1 כך ש- $n^4 < 32n^3 + 10n^2 + 24n + 21$ לכל $n \geq N_1$. גם קיים N_2 כך ש- $4n^2 + 4n - 3 < 4n^2 + 4n - 3$ $\forall n \geq N_2$. אז עבור $N = \max \left\{ \sqrt{\frac{4}{17}}\varepsilon, N_1, N_2 \right\}$, נקבל, לכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $k > 0$ ממנוטונית:

$$|a_{n+k} - a_n| = a_n - a_{n+k} > a_n - a_{n+1} = \frac{4n^2+4n-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21} > \frac{4n^2+4n-3}{17n^4} > \frac{4n^2}{17n^4} = \frac{4}{17n^2} > \frac{4}{17 \cdot \frac{4}{17}\varepsilon} = \varepsilon$$

■

סה"כ מקריטריון קושי הסדרה מתכנסת.

.....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-L^AT_EX ווור באמצעות תוכנה חופשית בלבד