חדו"א 1א 6

שחר פרץ

30 בדצמבר 2025

מרצה: ליאור קמה

בהרצאה הזו נדבר עוד על טורים.

תרגיל 1. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

תשובה. הטריק הוא להבין ש־$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-\pi n))$, לכל $n\in\mathbb{N}$. נוסף על כך מכפל בצמוד, $\sqrt{n^2+1}-n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

עוד נבחין ש־$\forall n\in\mathbb{N}\colon 0\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\frac{\pi}{2}$ וגם מונוטוני יורד, כלומר $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ מונוטוני יורד. מכך ש־$\forall x\ge 0\colon\ \sin x\le x$ נובע ש־$0\le\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0$ ולפי סנדוויץ' $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0$. לכן לפי קריטריון לייבניץ $\sum(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}+n))$. ■

תרגיל 2. תהא a_n סדרה חיובית. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. נראה כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}$ מתכנס.

הוכחה. הבעיה היא שלייבניץ לא עובד כאן, כי $\frac{S_n}{n}$ לא בהכרח מונוטונית. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kS_k$. נטען שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה $I\subseteq[n]$ כך ש־$T_n=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i$ (דרך לחסוך פירוק למקרים של זוגי/אי־זוגי). נוכיח את הטענה באינדוקציה.

- עבור $n=1$ ניקח $I=\{1\}$ ונקבל $T_1=-S_1=-a_1=(-1)^1\sum_{i\in I}a_i$.
- יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח קיום $I\in\mathcal{P}([n])$ כך ש־$T_n=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i$. נגדיר $\hat{I}=[n]\setminus I$. נקבל:

$$T_{n+1}=T_n+(-1)^{n+1}S_{n+1}=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i+(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}a_i=(-1)^n\sum_{i\in I}\cancel{(a_i-a_i)}+(-1)^{n+1}\sum_{i\in\hat{I}}a_i=(-1)^{n+1}\sum_{i\in\hat{I}}a_i$$

וסיימנו את האינדוקציה.

מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל $|T_n|\le\sum_{i=1}^{n}a_i=S_n$. ידוע S_n מתכנסת ולכן חסומה. $\frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת ח־0 ולכן לפי קיטריון דיריכלה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}$ מתכנס. ■

שאלה: ומה קורה אם a_n לא בהכרח חיובית? נגדיר לכל $2\le n\in\mathbb{N}$ ש־:

$$S_n=\frac{(-1)^n}{\ln n}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $a_n=S_n-S_{n+1}$. אז S_n סדרת הסכומים החלקיים של a_n. אז $S_n\to 0$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. אבל, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר (כפי שהוכחנו בעבר).

אסוציאטיביות

לעשות אסוציאטיביות של סכום זה כמו לבחור תת־סדרה של סדרת הסכומים החלקיים, ואז לסכום אותה (תחשבו על זה קצת). בניסוח של המרצה, תהא a_n סדרה, ונסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים שלה. אז קיבוץ איברים בסכום פירושו הסתכלות על ת"ס של S_n. כלומר, נגדיר סדרה עולה של טבעיים $n_1<n_2<\cdots$ כך ש־$S_{n_j}=\sum_{\ell=1}^{j}\sum_{k=n_{\ell-1}}^{n_\ell}n_k$ והיינו רוצים ש־S_{n_j}.

טענה: תהא a_n סדרה, נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}$ מתכנס, אז לכל השמה של סוגריים על הסכום, הטור החדש מתכנס.

הוכחה. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. לכל השמה של סוגריים, סדרת הסכומים החלקיים המתאימה היא ת"ס של S_n ולכן מתכנסת, לאותו הגבול של S_n. ■

הכיוון השני לא נכון – זה שהצלנו לפצל לסוגריים ושדברים יתכנסו, לא אומר שאנחנו מתכנס בעצמנו (יידרש מאיתנו להתכנס מתחתחילה). לדוגמה עבור $a_n = (-1)^n$ יש לנו:

$$(-1+1)+(-1+1)+\cdots = -1+1-1+1\cdots = -1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = -1$$

עם זאת, לכל a_n סדרה, ונניח כי קיימת השמה של סוגריים שבה:

- הטור המתאים מתכנס
- בתוך כל סוגריים, כל האיברים בעלי אותו הסימן

הוכחה. השמת הסוגריים מגדירה ת"ס של סדרת הסכומים החלקיים S_n. קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש־$\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \ell$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \geq K$ מתקיים $|S_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. נתבונן ב־$N = n_K$. יהי $n \geq N$. ידוע $\lim_{t\to\infty} n_T = \infty$ ולכן קיים $t \in \mathbb{N}$ כך ש־$n_t \leq n < n_{t+1}$. ידוע $n \geq n_k$ לכן $t \geq K$. מכאן $|S_{n_t} - \ell| < \varepsilon$ וגם $\left|S_{n_{t+1}} - \ell\right| < \varepsilon$. בהכרח $S_{n_{t+1}} - S_{n_t} = \sum_{j=n_t}^{n_t+1} a_j$, ומההנחה זה סכום של איברים שווי סימן. בה"כ נניח שכולם חיוביים. אז:

$$\ell - \varepsilon < S_{n_t} \leq S_{n_t} + a_{n_t} + \cdots a_n \leq S_{n_t} + a_{n_t+1} + \cdots + a)n_{t+1} = S_{n_{t+1}} < \ell + \varepsilon$$

סה"כ נקבל $|S_n - \ell| < \varepsilon$. לכן $S_n \to \ell$. ∎

קומטטיביות

אז איך ננסח במקרה של טור אינסופי קומטטיביות? באמצעות זיווגים/תמורות. תהא a_n סדרה ותהא $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה. אז $a_{\sigma(n)}$ תקרא תמורה של a_n.

משפט 1. תהא a_n סדרה מתכנסת. אז לכל $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$, אז $\hat{\mathcal{P}}(a_{\sigma(n)}) = \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה 1. סדרות זה סקאם. הסדר הוא סתם שטיק איטואיטיבי שלא באמת צריך. ההוכחה פשוטה, כי יש להן את אותה התמונה.

ומה לגבי טורים (כלומר תמורות של איברי הטור)? האם הטור של a_n ו־$a_{\sigma(n)}$ מתכנסים לאותו הגבול? התשובה היא לא. ננסה להגדיר דוגמה קונקרטית. נגדיר $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, ונסמן $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נגדיר:

$$\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \quad \sigma(n) = \begin{cases} 4 \cdot \frac{n}{3} & n \equiv 0 \\ 2 \cdot \frac{n+2}{3} - 1 & n \equiv 1 \bmod 3 \\ 4 \cdot \frac{n+1}{3} - 2 & n \equiv 2 \end{cases}$$

לדוגמה:

$$\begin{array}{cccc} 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 & 7 \mapsto 5 & 10 \mapsto 7 \\ 2 \mapsto 2 & 5 \mapsto 6 & 8 \mapsto 10 & 11 \mapsto 14 \\ 3 \mapsto 4 & 6 \mapsto 8 & 12 \mapsto 12 & 15 \mapsto 16 \end{array}$$

למה 1. $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה

הוכחה. לבית ∎

נסמן $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$. נקבל:

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} a_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{3\ell-2} + a_{3\ell-1} + a_{3\ell-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2\ell-1} \cdot \frac{1}{2\ell-1} + (-1)^{4\ell-2} \cdot \frac{1}{4\ell-2} + (-1)^{4\ell} \cdot \frac{1}{4\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-1}{2\ell-1} + \frac{1}{4\ell-2} + \frac{1}{4\ell} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-1}{2\ell-1} + \frac{1}{2\ell} = \frac{1}{2} S_{2n} \to \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

משום ש־$S \neq 0$ כבר הקיום של גבול חלקי שהולך ל־$\frac{1}{2}S$ מספיק לנו כדי לדעת ששתי הסדרות מתכנסות למקומות שונים. יתרה מכך, אפשר להראות שהוא מתכנס ל־$\frac{1}{2}S$ כי $\hat{S}_{3n+1} = \hat{S}_{3n} + a_{\sigma(3n+1)}$ וכנ"ל עבור $\hat{S}_{3n+2}$, ומאריתמטיקה של גבולות ובגלל ש־$a_n \to 0$ (וכן הגבולות החלקיים) וממשפט הכיסוי $\hat{S}$ מתכנסת ל־$\frac{1}{2}S$. ממש מצאנו סדרה שהתמורה שלה מתכנסת למקום אחר.

(הסיבה ש־S לא מתכנס ל־0, כי הוא תמיד מתחת ל־0, ולכן הוא bound away מ־0. עם זאת הוא בהכרח מתכנס מלייבניץ)

טוב, אז קומטטיביות לא עובד. ננסה למצוא תנאים שבהם זה עובד.

משפט 2. תהא a_n חיובית. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אז כל תמורה של הגבול מתכנסת לאותו הגבול.

הוכחה. תהא $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה. נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $N = \max \operatorname{Im} \sigma$. נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \leq \ell$$

מכאן ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ מתכנס, וכמו כן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \ell$ (כי סדרת הסכומים החלקיים של $a_{\sigma(n)}$ מונוטונית עולה וחסומה ב־ℓ). עכשיו אפשר לדבר על ערך ההתכנסות של התמורה ולסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = m$. מכיוון ש־$\sigma^{-1}$ תמורה, נובע (אותו הטיעון כמו קודם, אבל הפוך):

$$\ell \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq m$$

לכן $m \leq \ell$ וגם $\ell \leq m$ ומכאן $\ell = m$. ■

משפט 3. תהא a_n סדרה. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. אז לכל תמורה σ של a_n, הטור המתאים מתכנס לאותו הסכום.

זה תרגיל לבית.

משפט 4 (משפט רימן)**.** תהא a_n סדרה. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. אז לכל $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ (במובן הרחב) קיימת תמורה $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ כך ש־S_n סדרת הסכומים החלקיים של $a_{\sigma(n)}$, מקיימת:

$$\liminf S_n = \alpha \quad \limsup S_n = \beta$$

צימרמן למה יש לך swastika במחברת.

הוכחה. תהא a_n סדרה. נגדיר שתי סדרות:

$$p_n = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -a_n & a_n < 0 \\ - & \text{else} \end{cases}$$

הם נקראים החלק החיובי והשלילי של a_n. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = p_n - q_n$ ו־$|a_n| = p_n + q_n$. די קל להראות ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסות, כאשר צד אחד טרוויאלי מאריתמטיקה. מהצד השני, אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n + q_n$ מתכנס, וממשפט $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_n - q_n$ מתכנס, ואז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n, q_n$ שניהם מתכנסים מאריתמטיקה.

עתה, תהא a_n סדרה. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$ (מאי־התכנסות בהחלט) וגם $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$ (מהתכנסות a_n).

נראה את קווי ההוכחה למשפט רימן. לא נוכיח אותו עד הסוף. במקרה ש־$\alpha \leq \beta$ מספרים (ולא במובן הרחב), אז קיים n_1 כך ש־$\sum_{i=1}^{n_1} p_n > \beta$, ו־$n_1$ מינימלי כזה (מהסדר הטוב בטבעיים). את האיברים $p_1, \dots p_{n_1}$ נכניס לתחילת הסדרה. באופן דומה הסכום של $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$, ולכן קיים $n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\sum_{i=1}^{n_1} - \sum_{n=1}^{m_1} q_1 < \alpha$. נמשיך את התמורה ע"י $q_1 \dots q_{m_1}$. "בשלב הרקורסיה" יש לנו רישא של $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n_1)}, a_{\sigma(n_1+1)} \dots a_{\sigma(n_1+m_1)}, \dots a_{\sigma(n_{k+1})} \dots a_{\sigma(n_k+1)+1} \dots a_{\sigma(n_{k+1}+m_{k+1})}$. כמו בבסיס, $\sum_{n-n_{k+1}+1}^{\infty} p_n = \infty$ לכן קיים n_{k+2} מינימלי כך ש־:

$$\sum_{n=1}^{n_{k+1}+m_{k+1}} a_{\sigma(n_{k+1}+m_{k+1})} + \sum_{n=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} p_n > \beta$$

ובאופן דומה קיים m_{k+2} מינימלי כך שכל הסיפור מלמעלה פחות $\sum_{n=m_{k+1}+1}^{m_{k+2}} q_n$ קטן מ־α.

התמורה שתתקבל תעבוד. ■

טורי חזקות

טור חֲזָקוֹת הוא הטור הפורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. השאלה היא איזה x־ים אני יכול להציב כך שהחרא יתכנס. זה טור חזקות סביב 0, באופן כללי טור חזקות סביב $a \in \mathbb{R}$ הוא הסכום הפורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-r)^n$.

"אי אפשר שווא נח על הח"ת ולכן יש חטף פתח. מי הביא את הסגול?'.

"בנפרד זה חֲזקות, בסומך זה חֱזקות. אבל פה זה סומך, לא נסמך"

(פורמלי = מה שמגדיר אותו זה המקדמים, לא הפונקציה. כמו בלינארית)

משפט 5. תהא a_n סדרה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ונניח כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ מתכנס. אז לכל $x \in \mathbb{R}$ אם $|x-a| < |x_0-a|$ אז $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח $|x-a| < |x_0-a|$. ואז $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-a)^n$ מתכנס ולכן $\lim_{n\to\infty} a_0(x_0-a)^n = 0$. בפרט היא חסומה ע"י M. נקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_0-a)| \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

הטור מימין הוא טור גיאומטרי עם מנה קטנה מ־1 ולכן מתכנס. לכן $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. ■

משפט 6 (משפט אבל). תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. קיים מספר יחיד $R \geq 0$ כך ש־

1. $\forall x \in (a-R, a+R)\colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ converges}$
2. $x \notin [a-R, a+R]\colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתבדר

החלק הזה נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור, והתחום נקרא תחום ההתכנסות.

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד