לינארית 1א ~ תרגיל בית 10

שחר פרץ

17 ביוני 2025

.... (1) ....

א'

נניח שלפולינומים הבאים:

$$a(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad b(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

שורשים $a(x) = a_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ וכן $b(x) = b_2(x-\beta_1)(x-\beta_2)$ (בהינתן שורשים נוכל לפרק פולינום לגורמסי לינאריים עד לכדי כפל בקבוע).

בין היתר בגלל הפיתוח הבא:

$$\begin{cases} b_0 = b(0) = b_2(0-\beta_1)(0-\beta_2) \\ b_2 + b_1 + b_0 = b(1) = b_2(1-\beta_1)(1-\beta_2) \end{cases} \implies \begin{cases} b_0 = b_2\beta_1\beta_2 \\ b_1 + b_2\beta_1\beta_2 = b_2(1-\beta_1)(1-\beta_2) \end{cases}$$

נצמצם מעט יותר את b_1:

$$b_1 = b_2((1-\beta_1)(1-\beta_2) - \beta_1\beta_2) = b_2(\cancel{\beta_1\beta_2} - \cancel{\beta_1\beta_2} - \beta_1 - \beta_2 + 1) = b_2(1 - \beta_1 - \beta_2)$$

ובאופן דומה:

$$a_0 = a_2\alpha_1\alpha_2 \ \wedge \ a_1 = a_2(1-\alpha_1-\alpha_2) \implies a_1^2 = a_2^2(1 - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2)$$

עתה נמצא את הדטרמיננטה הבאה באמצעות פיתוח לפי העמודה הראשונה:

$$\begin{aligned}
\left|A_{a(x)b(x)}\right| = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} &= a_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} + b_2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \\
&= a_2\left(a_0\begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} + b_0\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}\right) + b_2\left(a_0\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} + b_0\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix}\right) \\
&= a_2\left(a_0(b_1^2 - b_0b_2) + b_0(a_2b_0 - a_1b_1)\right) + b_2(a_0(a_1b_1 - a_0b_2) + b_0(a_1^2 + a_0a_2)) \\
&= a_2(b_1^2a_0 - a_0b_0b_2 + b_0^2a_2 - a_1b_1b_0) + b_2(a_1^2b_0 + b_0a_0a_2 + a_0^2a_1 - a_0b_1b_2) \\
&= a_1^2b_0b_2 + a_1(a_0^2b_2 - a_2b_0b_1) + a_2^2b_0^2 + a_0(a_2b_1^2 - b_1b_2^2)
\end{aligned}$$

מכאן נותרה אלגברה בלבד לצמצם ולקבל את הדרוש:

$$= a_2^2b_2^2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$$

ב'

נוכיח ש־$a(x) = b(x) = 0$ בעל פתרון אמ"מ $\det A_{a(x)b(x)} = 0$.

הוכחה. $\Longleftarrow$ אם קיים פתרון s כלשהו אז $a(x) = a_2(x-s)(?)$ כאשר $(?)$ חייב להיות גורם לינארי אחרת לא פריק, נסמן $a(x) = a_2(x-s)(x-\tilde{a})$. באופן דומה $b(x) = b_2(x-s)(x-\tilde{b})$. נקבל מהסעיף הקודם ש־:

$$\det A_{a(x)b(x)} = a_2^2b_2^2\underbrace{(s-s)}_{=0}(s-\tilde{b})(s-\tilde{a})(\tilde{a}-\tilde{b}) = 0$$

כדרוש.

$\Longrightarrow$ אם הדטרמיננטה אפס, אז בה"כ הפולינומים פריקים מנתוני השאלה, עם פירוק $a(x) = a_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\ b(x) = b_2(x-\beta_1)(x-\beta_2)$. אז נקבל:

$$\det A_{a(x)b(x)} = a_2^2 b_2^2(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2) = 0$$

ידוע $a_2 = 0 \vee b_2 = 0$ כי נתונים שני שורשים, ולכן s $\alpha_j = \beta_i =:$ אזי $a(s) = 0 = b(s)$ כדרוש.

■

ג'

נראה שלמערכת המשוואות הבאה קיים פתרון:

$$\begin{cases} 2x^2+3.66x+1.66=0 \\ 3x^2+8.49x+5.49=0 \end{cases}$$

נתבונן במטריצה:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3.66 & 1.66 & 0 \\ 0 & 2 & 3.66 & 1.66 \\ 3 & 8.49 & 5.49 & 0 \\ 0 & 3 & 8.49 & 5.49 \end{vmatrix}$$

כדרוש.

.... (2) ....

א'

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_{i+1}\to R_{i+1}-R_i]{\forall i\in[3]} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-b & c^2-b^2 & c^3-b^3 \\ 0 & d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c-b & c^2-b^2 & c^3-b^3 \\ d-c & d^2-c^2 & d^3-c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & (c-a)(b+a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ c-b & (c-b)(c+b) & (c-b)(c^2+bc+b^2) \\ d-c & (d-c)(d+c) & (d-c)(d^2+dc+c^2) \end{vmatrix} = \underbrace{(b-a)(c-b)(d-c)}_{A} \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c+b & c^2+bc+b^2 \\ 1 & d+c & d^2+dc+c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{R_3\to R_3-R_2}$$

$$A\begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2+b(c-a) \\ 0 & d-b & d^2-b^2+c(d-b) \end{vmatrix} = A\begin{vmatrix} c-a & (c-a)(b+c+a) \\ d-b & (d-b)(c+d+b) \end{vmatrix} = A\underbrace{(c-a)(d-b)}_{B}\overbrace{\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b+c+a \\ 1 & c+d+b \end{vmatrix}}_{c+d+b-b-c-a=d-a}}^{C}$$

$$= \underbrace{(b-a)(c-b)(d-c)}_{A}\underbrace{(c-a)(d-b)}_{B}\underbrace{(d-a)}_{C} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a) \quad \top$$

ב'

בהקשר הזה, נבחין ש־$a=1,\ b=-1,\ c=3,\ d=4$. זאת כי:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 3^0 & 3^1 & 3^2 & 3^3 \\ 7^0 & 7^1 & 7^2 & 7^3 \end{vmatrix} = (4-3)(4+1)(4-1)(3+1)(3-1)(-1+1) = 0$$

המשך בעמוד הבא

(3)

יהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ומתקיים ש־$\operatorname{rank} A = n-1$. נוכיח $\operatorname{rank}\operatorname{adj} A = 1$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, ונניח $\operatorname{rank} A = n-1$. באופן כללי, ידוע $\forall x \in \operatorname{Col}\operatorname{adj} A$ קיים $\tilde{x}$ כך ש־$x = (\operatorname{adj} A)\tilde{x}$ מהגדרת מטריצה בוקטור. אזי $Ax = A\operatorname{adj} A\tilde{x} = \det A\tilde{x} = 0$ שכן $\det A = 0$. לכן $x \in \ker A$, כלומר $\operatorname{Col}\operatorname{adj} A \subseteq \mathcal{N}(A)$. לכן ממשפט הממדים ומא"ש הכלה־ממדים:

$$\operatorname{rank}\operatorname{adj} A \le \dim \operatorname{Col}\operatorname{adj} A \le \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rank} A = 1$$

עתה נותר להראות $\operatorname{rank}\operatorname{adj} A \neq 0$. משום ש־$\operatorname{rank} A = n-1$, אזי קיימת קבוצה של $v_i \dots v_j$ הן $n-1$ שורות ב־A כך ש־$v_i \dots v_j$ בת"לית (אחרת כל $n-1$ שורות הן ת"ל, נתבונן ב־$n-1$ השורות הראשונות שהן ת"ל ונוסיף להן את השורה האחרונה שבהכרח ת"ל ב־$2 \dots n-2$ השורות הראשונות מההנחה, ואז סה"כ יש לנו שני וקטורים שאפשר להסיר (הראשון והאחרון) ולקבל $n-2$ וקטורים שפורסים את מרחב השורות, וסתירה). משום ש־$v_i \dots v_j$ בתל"ים ויש כאן $n-1$ שורות מתוך n, אפשר לבטא את זה כ־$(v_i)_{i=1}^n \setminus v_k$ כלשהו, ואז $\det A_{kk} \neq 0$ כי A_{kk} שורותיה בת"ל ולכן הפיכה. סה"כ A_{kk} הוא אחד מהקורדינאטות ב־$\operatorname{adj} A$ (עד לכדי כפל ב־-1) כלומר $\operatorname{adj} A \neq 0$ ואז $\operatorname{rank}\operatorname{adj} A \neq 0$. נסכם: $1 \ge \operatorname{rank}\operatorname{adj} A \neq 0$ טבעי, לכן $\operatorname{rank}\operatorname{adj} A = 1$ כדרוש. ■

(4)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית עליונה הפיכה, ונוכיח שההופכית שלה גם משולשית עליונה.

הוכחה.

$$A\operatorname{adj} A = I\det A \implies A \cdot \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = I \implies A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

נוכיח $\operatorname{adj} A$ משולשית עליונה. לכל $i > j$:

$$(\operatorname{adj})_{ij} = (-1)^{i+j}\underbrace{\det A_{ji}}_{=0} = 0$$

השוויון של $\det A_{ji} = 0$ נכון כי מהיותה משולשית עליונה, השורות $(a_1 \dots a_j, a_{j+1}, 0, \dots 0)$, $(a_1 \dots a_j, 0 \dots)$ במינור ה־ji ולכן כאשר נעיף את העמודה ה־j נקבל שתי שורות ת"ל. בגלל ש־$i \neq j$ אף אחת מהשורות האלו לא תוסר, ולכן המינור ת"ל ואפשר לדרג אותו למטריצה עם שורת אפסים כלומר $\det A_{ji} = 0$ כדרוש.

סה"כ $\forall i > j\colon (A^{-1})_{ij} = |A|^{-1}(\operatorname{adj} A)_{ij} = 0 \cdot |A|^{-1} = 0$ כלומר הראינו שכל המשולש העליון של הדטרמיננטה אפסים, כדרוש. ■

(5)

תהי $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ המקיימת $A_{ij} = \pm 1$. נוכיח שהדטרמיננטה שלה מתחלק ב־2^n.

הוכחה. תהי $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ כך ש־$A_{ij} = \pm 1$ לכל $i, j \in [n]$. נכפיל את שורות המטריצה ב־± 1 כך שכל העמודה הראשונה של A יהיו 1. נקבל מטריצה A' כך ש־$\det A' = (-1)^s \det A$ עבור s כלשהו. עתה, נוכל לבצע את הדירוג הבא: $A' \xrightarrow[R_i \to R_i - R_1]{\forall i \in [n] \setminus \{1\}} A''$. משום שפעולות מסוג זה אינן משנות דטרמיננטה, נקבל $\det A'' = \det A'$, ובגלל שכל העמודה הראשונה של A' הייתה 1־ים, נקבל:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & *_{1\times n} \\ 0_{n\times 1} & B \end{pmatrix}$$

כאשר $B \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה המקיימת $\forall i, j \in [n]\colon B_{ij} \in \{0, \pm 2\}$ שכן $B_{ij} = A'_{ij} - A'_{1j}$ וידוע $A_{kl} = \pm 1$, וחיבור של כל קומבינציה מ־± 1 יותיר משהו מ־$\{0, \pm 2\}$. מפיתוח דטרמיננטה לפי השורה הימנית, נקבל $\det A'' = \det B$ (שכן המינורים שהם לא A''_{11} כוללים שורת אפסים ולכן הדטרמיננטה שלהם 0). נבחין ש־:

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \overbrace{\prod_{i=1}^{n} B_{i,\sigma(i)}}^{B_\sigma}$$

נבחין שבהינתן $\sigma \in S_n$ כלשהי, אם $\forall i\colon B_{i,\sigma(i)} \in \pm 2$ אז $B_\sigma = \pm 2^n$. אחרת, קיים i כך ש־$B_{i,\sigma(i)} = 0$ ואז $B_\sigma = 0$ כי כפל ב־0 יביא מכפלה 0. סה"כ $\det B$ הוא סכום של $n!$ פעמים איברים מסוג $\pm 2^n$, כלומר הוא מתחלק ב־2^n. מטרנזטיביות, נקבל $\det A' = \det B$ ולכן מתחלק גם הוא ב־2^n, ובגלל שחלוקה לא תלויה בשינוי הסימן $\det A = (-1)^s \det A'$ אז $\det A$ גם הוא מתחלק ב־2^n כדרוש. ■

(6)

$$\operatorname{adj}\begin{pmatrix}1&0&3\\4&3&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&1\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&2\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&3\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&-5&1\\-2&5&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-5&5\\0&1&1\end{pmatrix}$$

(7)

נגדיר:

$$\operatorname{perm} A=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}$$

1. נראה ש־$\operatorname{perm} A=\operatorname{perm} A^T$.

הוכחה. ידוע שלכל $\sigma\in S_n$ מתקיים:

$$(\cdot)^{-1}\colon [n]^{[n]}\to[n]^{[n]}\quad \sigma(i)\mapsto \iota j\in[n].\,\sigma(j)=i$$

זיווג, וכמו כן:

$$(A)_{i,\sigma^{-1}(i)}=(A^T)_{i,\sigma(i)}$$

כלומר, הקבוצה $S_n^{-1}=\{\sigma^{-1}\mid\sigma\in S_n\}$ מקיימת $S_n=S_n^{-1}$. מכאן נקבל (עד לכדי שינוי סדר סכימה):

$$\operatorname{perm} A=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_n^{-1}}\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma^{-1}(i)}=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n A^T_{i,\sigma(i)}=\operatorname{perm} A^T$$

כדרוש. ■

2. נראה שאם E אלמנטרית מייצגת של $R_i\to\lambda R_i$ אז $\operatorname{perm}(EA)=\lambda\operatorname{perm} A$

הוכחה.

$$\operatorname{perm} EA=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^n(EA)_{j,\sigma(j)}=\sum_{\sigma\in S_n}\lambda A_{i,\sigma(i)}\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}}A_{i,\sigma(i)}=\lambda\sum_{\sigma\in S_n}A_{i,\sigma(i)}\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}}a_{j,\sigma(j)}=\lambda\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^n(A)_{j,\sigma(j)}=\lambda\operatorname{perm} A$$

כדרוש. ■

3. נראה שאם A משולשית תחתונה אז $\operatorname{perm} A=\prod_{i=1}^n a_{ii}$.

הוכחה. לכל $\sigma\in S_n$ כך ש־$\sigma\neq Id_{[n]}$, משובך יונים קיים בהכרח $i\in[n]\colon\sigma(i)>i$ כלומר $A_{i,\sigma(i)}=0$. נסמנו σ^0. סה"כ:

$$\operatorname{perm} A=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}=\prod_{i=1}^n A_{i,Id_{[n]}(i)}+\sum_{Id_{[n]}\neq\sigma\in S_n}\overbrace{A_{\sigma^{(0)},\sigma(\sigma^{(0)})}}^{0}+\prod_{\sigma^{(0)}\neq i\in[n]}A_{i,\sigma(i)}=\prod_{i=1}^n A_{i,i}$$

כדרוש, כאשר השוויון המסומן ל־0 מתקיים כי A משולשית עליונה. ■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד