לינארית 1א

שחר פרץ

6 באוגוסט 2025

. . . . (1) . . . .

יהי $T\colon V\to V$. נניח $\exists v\in V\colon Tv\neq 0\wedge TTv=0$. נוכיח $V\neq \ker T+\operatorname{Im} T$.

הוכחה. נסמן $w=Tv\neq 0$. אז $w\in\operatorname{Im}T$, ו־$w\in\ker T$ מהנתונים. נניח בשלילה שיש שוויון מרחבים, אז ממשפט הממדים הרגיל ביחד עם משפט הממדים להעתקות:

$$n=\dim V=\underbrace{\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T}_{n}-\dim(\ker T\cap\operatorname{Im}T)\implies \dim(\ker T\cap\operatorname{Im}T)=0$$

אך $0\neq w\in \dim\ker T\cap \operatorname{Im} T$, וזו סתירה. ■

. . . . (2) . . . .

נמצא תנאי הכרחי ומספיק לכך ש־$U^0+W^0=(U\cap W)^0$.

יהי $\varphi\in (W\cap U)^0$. נניח ש־$\varphi\neq 0$, אז עד לכדי חברות קיים בדיוק a יחיד כך ש־$\varphi a\neq 0$.

- אם $a\in W$: אם $a\in U$ אז $\varphi(a)=0$ כדרוש. נניח $v\in W\setminus U$. נגדיר $\varphi_2(a)=\varphi(a)$ ו־$\varphi_1=0$. נבחין ש־$\varphi_2(U)=0$ מהגדרתו. עתה נראה $\varphi_1\in W^0\wedge\varphi_2\in U^0$. יהיו $w\in W, u\in U$ אז $\varphi_1(W)=0\wedge\varphi_2(U)=0$ וסה״כ מצאנו פירוק מתאים.
- אם $a\notin U$ מקרה סימטרי.
- אם $a\notin W\cup U$, אז $\varphi(w)\neq 0\implies \varphi(W)\notin\operatorname{span} a$ וכנל מהצד השני וסיימנו.

סה״כ תמיד יש שוויון.

(אחרי ההפסקה נכתוב את זה מסודר יותר)

יהי $\varphi\in(U\cap W)^0$ אז $\dim\ker\varphi=n-1$. לכן $\operatorname{Im}\varphi$ ממימד 1, יהי v בסיס. יהי $\varphi(x)=v$, נפרק למקרים.

- אם $x\in W$, אז $x\notin U$ אחרת $\varphi(x)=0$. יהי $u\in U$ ואז $u\notin\operatorname{span}x$ ולכן $\varphi(u)=0$ ולכן $\varphi\in U^0$ ובפרט $\varphi\in U^0+V^0$.
- אם $x\in U$ שקול.
- אם $x\notin U\cup W$ אז בפרט $x\notin U$ ולכן יהי $u\in U$, ו־$\varphi(u)=0\implies u\notin\operatorname{span}x$. הטענה $\varphi(V)=0$ סימטרית.

. . . . (3) . . . .

השאלה: של לילי, עם ציטוטים של גינגולד

יהיו $T_1\colon V_1\to U\wedge T_2\colon V\to U$ ט״ל. נאמר ש־(P,p_1,p_2) שלשה עבורה P מ״ו, $p\colon P\to V_i$ ט״ל. נאמר ששלשה היא טובה אם $T_1\circ p_1=T_2\circ p_2$. שלשה טובה נקראת פצצתית אם לכל שלשה טובה (Q,q_1,q_2) ישנה $u\colon Q\to P$ (״כוסאמא שלה״) כך ש־$q_i=p_i\circ u$ ($i\in\{1,2\}$).

א. הוכיחו קיום שלשה פצצתית, והראו שלכל זוג שלשות פצצתיות $P_1\cong P_2$.

ב. האם P נוצרת סופית? אם כן, בטאו את הממד.

״זו שאלה זוועה, היא לא קשורה למבחן בשום צורה, בחיים לא ישימו שאלה כזו במבחן״. נבחר:

$$P=\{\langle x,y\rangle\mid T_1x=T_2y\}$$

נוכיח שהיא פצצתית. נבחר $p_1=\pi_1,p_2=\pi_2$ היטלים. ידוע $q_1=p_1u\wedge q_2=p_2u$. לכן נגדיר $u=\langle q_1(Q),q_2(Q)\rangle$. נניח בשלילה שקיימת u אחרת, נאמר $u(Q)=\langle x,y\rangle$. מהמשוואה $q_1(Q)=(p_1\circ u)(Q)$ נקבל $q_1(Q)=p_1(u(Q))=x$ וכנ״ל מהצד השני וסה״כ היא חייבת להיות מה שבחרנו. בכך הראנו קיום (P,p_1,p_2) פצצתית.

ניקח שתי שלשות פצצתיות (P,p_1,p_2) ו־(Q,q_1,q_2). בפרט שתיהן טובות ולכן ישנם u_1,u_2 המקיימים את התנאי $q_1=p_1\circ u_1,q_2=p_2\circ u_1,p_1=q_1\circ u_2,p_2=q_2\circ u_2$. נציג מהמשוואות ונקבל $p_1=p1\circ u_1\circ u_2$ וכן $p_2=p_2\circ u_1\circ u_2$. בעבור ה־$(P,p_1,p_2)$ שבחרנו,

נקבל ש־$u_1 \circ u_2$ הזהות כי אם נציב את Q (זכרו שקיבענו את p_1 לעיל) נקבל $p_1(Q) = p_1(u_1 \circ u_2)(Q)$ וביחד עם המשוואה השנייה נקבל שבהכרח $u_1 \circ u_2$ הזהות (כי p_1, p_2 היטלים, תסתכלו זה די טרוויאלי שזה עובד). אבל! צריך להראות ש־$u_2 \circ u_1$ הזהות כדי לקבל את הנדרש, שכן u_1 לא בהכרח עוברת בין מרחבים זהי ממד (זה מה שצריך להוכיח). ידוע (Q, q_1, q_2) פצצתית:

$$T_1 \circ (p_1 \circ u) = T_2 \circ (p_2 \circ u)$$

מכאן זה אומר שאפשר [כאן ממש מבקשים מהמתרגל להפסיק אז ההוכחה הזו לא תגמר לעולם] להגיד משהו בסגנון ש־q_1, q_2 לא העתקת האפס וסיימנו.

.... (4) ....

תהי $T\colon V \to W$, נניח $v_1 \dots v_k$ בת"ל. נניח $\operatorname{span}(v_1 \dots v_k) \cap \ker T = \{0\}$. נוכיח $Tv_1 \dots Tv_k$ בת"ל.

הוכחה מסובכת. נסתכל על $U = \operatorname{span}(v_1 \dots v_k)$ מיני מ"ו של V. נגדיר $S(v_i) = T_i$ (בניסוח אחר, $S = T_{|U}$). אז $\ker S = \{0\}$ מהנתון די בקלות. לכן S היא איזו' $S\colon U \to \operatorname{Im} S$. וסה"כ $Sv_1 \dots Sv_n$ בסיס וסה"כ $Tv_1 \dots Tv_n$ בת"ל. ■

הוכחה פשוטה. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_k$ קומבינציה לינארית שווה ל־0 של $Tv_1 \dots Tv_i$. אז:

$$T\left(\sum \lambda_i T v_i\right) = 0 \implies \sum \lambda_i T v_i \in \ker T \implies \sum \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0$$

כי $v_1 \dots v_n$ בת"ל. ■

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד