חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א - תרגיל בית 3

שאלות להגשה:

1. הוכיחו לפי **הגדרת הגבול** (כלומר ללא שימוש במשפטים) כי:

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \frac{1}{3}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \neq 1$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+\cos(n)} - n = 0$

(ד) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ כאשר נתון $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. מה קורה אם $a = 0$?

2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל שאינה ריקה. הוכיחו כי קיימת סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$a_n \in A$ לכל n וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

3. הראו כי לכל מספר ממשי קיימת סדרה של רציונאלים המתכנסת אליו, וסדרה של אי־רציונאליים המתכנסת אליו.

4. נניח כי $a_n \to a$, $b_n \to b$, כאשר a, b גבולות סופיים או אינסופיים, כמפורט בכל סעיף. אז מתקיים:

(א) אם $a = \pm\infty$ ו־b סופי או $b = \pm\infty$ אז $a_n + b_n \to \pm\infty$, בהתאמה.

(ב) אם $a = \pm\infty$ ו־ $b > 0$ או $b = \infty$, אז $a_n b_n \to \pm\infty$, בהתאמה.

(ג) אם $a = \pm\infty$ ו־$b < 0$ או $b = -\infty$ אז $a_n b_n \to \mp\infty$, בהתאמה.

(ד) אם $a = b = \pm\infty$ אז $a_n b_n \to +\infty$. אם $a = \infty$ ו־$b = -\infty$ אז $a_n b_n \to -\infty$.

הוכיחו מקרה אחד מכל סעיף.

5. תהי a_n סדרה של מספרים אי שליליים $a_n \geq 0$ המתכנסת לגבול $a \geq 0$. הוכיחו כי $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

6. חשבו בעזרת משפט הסנדוויץ' (או בכל דרך אחרת) את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+\cdots+n\cdot\sin(n)}{n^3}$

(ג) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n-b^n}$ כאשר $a > b > 0$.

(ד) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$

7. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ויהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות של מספרים שלמים, קרי, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \in \mathbb{Z}$ ו־$b_n \in \mathbb{Z}$. הראו כי אם $a_n\alpha + b_n \to 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n\alpha + b_n| > 0$ אז α אי־רציונלי.

8. יהי $\beta \geq 0$ ויהי $s \in (0,1)$. הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת ומצאו את גבולה:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{\beta} s^{n-k}$$

9. בתרגיל זה נוכיח הכללה של משפט צ'זארו לממוצעים משוקללים. תהי x_n סדרת ממשיים המתכנסת לx. תהי $\lambda_n > 0$ סדרה ("סדרת המשקלים") כך ש:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

הוכיחו:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \xrightarrow{n\to\infty} x.$$

האם הטענה מחזיקה גם עבור λ_n שאינן מקיימות את התנאי על $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$?

10. הוכיחו או הפריכו שסדרה חיובית השואפת ל0 היא מונוטונית החל ממקום מסויים.

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. (א) תהי $a_n = (-1)^n$. מצאו סדרה b_n כך שהסדרה $a_n + b_n$ מתכנסת. האם ייתכן ש b_n תתכנס? נמקו.
   (ב) נניח כי a_n ו b_n מתכנסות לאותו הגבול $L \in \mathbb{R}$. הראו כי $(a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$ מתכנסת ל־L.
2. (א) נניח כי $a_n \to \infty$ ו־ $b_n \to -\infty$. מצאו דוגמאות עבורן הסדרה $a_n + b_n$ מתכנסת לגבול ממשי, מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף, או לא מתכנסת במובן הרחב.
   (ב) נניח $a_n \to 0$ ובנוסף $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי עבור $c > 0$ מתקיים $\frac{c}{a_n} \to \infty$.
3. חשבו את הגבולות הבאים:
   (א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
   (ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$
   (ג) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$
   (ד) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$
4. הוכיחו את משפט הסנדוויץ' לגבול אינסופי: אם a_n ו־b_n סדרות כך שהחל ממקום מסוים $a_n \le b_n$ ובנוסף $a_n \to \infty$ אז גם $b_n \to \infty$.
5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרה הבאה אינה מתכנסת:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3k \\ 1 & n = 3k+1 \\ 2 & n = 3k+2 \end{cases}$$

6. חשבו את הגבולות הבאים:
   (א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2-2}$
   (ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$
   (ג) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!}$
7. יהיו $a_1, \ldots, a_k \ge 0$ מספרים ממשיים כלשהם. הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots a_k^n} = \max\{a_1, \ldots a_k\}$$

8. נגדיר סידרה באופן הבא:

$$a_0 = 0, \;\; a_1 = 1, \;\; a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

רמז: הראו כי $a_n = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$..