מתמטיקה בדידה – עוצמות 3

מידע כללי

מרצה:	מאת:	תאריך כתיבה:	סוגריים מרובעות מציינות
נטלי שלום	שחר פרץ	28.2.2024	הערות שאני כתבתי

סיכום – עוצמות 3 (למעשה זה 4)

הגדרנו עוצמות ע"י זיווגים... נזכיר: משפט קש"ב: $|A| \le |B| \wedge |B| \le |A| \implies |A| = |B|$, הגדרה: $\aleph_0$ היא עוצמת הטבעיים (קבוצה בת מניה...), הקבוצות הבאות בנות מניה: $\mathbb{Q}, \mathbb{N}_{\text{even}}, \mathbb{N}_{\text{odd}}, \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_+ . \mathbb{N}^n$.

הוכחה ש־$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$:

נשתמש בקש"ב.

- $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$: מהכלה $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$
- $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{N}|$: באופן שקול, ניתן להוכיח $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+|$. מספיק להראות שקימת פונקציה על בכיוון $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{Q}$ (ע"פ טענה שתלויה ב־AC). נגדיר $f = \lambda \langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ . \frac{m}{n}$. [הערה: אפשר גם בלי אקסיומת הבחירה].

מכיוון ש־$|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_|| = \aleph_0$, נקבל סה"כ מקש"ב $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$

משפט: (AC) – מותר להשתמש בו, למרות התלות ב־AC: איחור לכל היותר בן מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה [="כמות" הקבוצות היא בת מנייה] הוא לכל היותר בן מנייה. פורמלית: אם $\{A_| i \in I\}$ אסוף של קבוצות עבור $|I| \le \aleph_0$ ולכל $i \in I$ מתקיים $|A_i| \le \aleph_0$, אז $|\bigcup_{i\in} A_i| \le \aleph_0$.

חשבו את העוצמה של הקבוצה $A = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid x \text{ is finite}\}$: נשתמש בקש"ב.

- $|A| \ge \aleph_0$: נגדיר פונקציה חח"ע $f \colon \mathbb{N} \to A$. $f = \lambda n \in \mathbb{N} . \{n\}$. זוהי פונקציה חח"ע ולכן $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \le |A|$ כדרוש.
- $|A| \le \aleph_0$: נוכיח כי $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) \subseteq |A|$. תהי $x \in A$. אז $x \subseteq \mathbb{N}$ סופית. נפלג למקרים: אם $x = \emptyset$ אז $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ ולכן $x = \emptyset \in B$. אחרת, $x \ne \emptyset$, ולכן קיים $m := \max x$ אז $x \subseteq \mathbb{N}_m$ ולכן נבחר $n = m + 1 \in \mathbb{N}_+$. הוכחנו את ההכלה ולכן $|A| \le |B| \le \aleph_0$, זאת כי $|B|$ איחוד בן־מניה של קבוצות סופיות (ובפרט בנות מניה), ולכן, לפי משפט היא לכל היותר בת מניה. מטרנזיטיביות $|A| \le \aleph_0$ כדרוש.

תרגיל נוסף: נניח ש־$A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ קבוצה של קטעים פתוחים ולא ריקים. מתקיים

$$c_1, c_2 . c_3 \in A . c_1 \ne c_2 \ne c_3 \implies c_1 \cap c_3 \cap c_3 = \emptyset$$

הוכיחו ש־$|A| \le \aleph_0$. מותר להשתמש אקטיבית באקסיומת הבחירה [=מותר להשתמש באקסיומת הבחירה כמו שהיא].

הוכחה: יהי $c \in A$. c הוא קטע פתוח ולא ריק ולכן קיים $q \in \mathbb{Q} \wedge q \in c$ (מתוך צפיפות הרציונלים בממשיים). נשתמש ב־AC ונבחר לכל $c \in A$ מספר רציונלי $q_c \in A$ [חובה להשתמש כאן באקסיומת הבחירה כי A אוסף של אינסוף קבוצות, כלומר מבצעים כאן אינסוף בחירות]. נגדיר $f = \lambda c \in A.q_c$. f היא לא בהכרח חח"ע. מהנתון, נובע שלכל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $|f^{-1}[\{q\}]| \leq 2$ (הסבר: נניח בשלילה שלא כן, לכן קיימים $c_1, c_2, c_3 \in f^{-1}[\{q\}]$ כאשר c_1, c_2, c_3, כלומר $q = q_{c_1} = q_{c_2} = q_{c_3}$ ואז $q \in c_1 \cap c_2 \cap c_3$ וזו סתירה). משום ש־$f\colon A \to \mathbb{Q}$ וכי f מלאה אז $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}[\{q\}]$ [צריך לנמק יותר בהוכחה בשיעורי הבית], ומשום ש־$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ אז $|A| = |\bigcup \dots|$, וזהו איחוד בן מניה של קבוצות סופיות, ולפי משפט לכל היותר בן־מניה. סה"כ $|A| \leq \aleph_0$ (A לכל היותר בת מניה).

הוכחת המשפט לגבי איחוד לכל היותר בן מניה:

יהי $\{A_i \mid i \in I\}$ אוסף קבוצות עבור $|I| \leq \aleph_0$. ראשית, ניתן להניח ש־$I = \mathbb{N}$ מכיוון שאם $|I| \leq \aleph_0$ אז קיים זיווג $f\colon \mathbb{N} \to I$ על ולכן $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{f(N)}$ ומכאן תסדרו לבד כי זה מספיק פשוט. בנוסף, ניתן להניח ש־$\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ קבוצות זרות בזוגות (לכל $i \neq j$ טבעיים $A_i \cap A_j = \emptyset$), מכיוון שאם נוכיח זאת, אז נוכל לקחת $A_i' := A_i \times \{i\}$, ואז האוסף $\{A_i' \mid i \in \mathbb{N}\}$ הוא של קבוצות זרות בזוגות [וברור כי $|A_i'| = |A_i|$]. לכל $i \in \mathbb{N}$, נבחר (AC) $f_i\colon A_i \to \mathbb{N}$ חח"ע (כי $|A_i| \leq \aleph_0$). נגדיר $F = \biguplus_{i \in I} A_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ע"י $F(x) = \langle f_m(x), m \rangle$ כאשר $m = \iota k \in \mathbb{N}.x \in A_k$. זוהי פונקציה חח"ע [לא הוכח מטעמי זמן] וסה"כ $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ כדרוש.