מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 5

ניתן בתאריך 6.12.23. להגשה עד יום רביעי אחרי חנוכה 20.12.23.
התרגיל הפעם הוא ארוך מהרגיל, לכן התחילו לפתור אותו כמה שיותר מוקדם ותנצלו את משך הזמן הארוך. כידוע, יש לפתור ברצינות את כל השאלות. מוזמנים לשאול שאלות בפורום. תיהנו!

1. כזכור, הגדרנו n־יה סדורה לכל $n \geq 2$ טבעי באופן רקורסיבי: עבור $n = 2$, הגדרנו $\langle a_1, a_2 \rangle = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$, ולכל $n > 2$, הגדרנו $\langle a_1, ..., a_n \rangle = \langle a_1, \langle a_2, ..., a_n \rangle \rangle$.
הוכיחו באינדוקציה את התכונה המרכזית של n־יות סדורות:

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle = \langle b_1, ..., b_n \rangle \iff a_1 = b_1 \wedge ... \wedge a_n = b_n$$

(תוכלו להשתמש בתכונה המרכזית של זוגות סדורים, מבלי להוכיח אותה שוב)

2. יהי R יחס מעל קבוצה A. הוכיחו את הטענות הבאות:
   (א) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$
   (ב) $dom\left(R^{-1}\right) = Im\left(R\right)$
   (ג) $R \circ Id_A = Id_A \circ R = R$

3. יהיו R, S יחסים מעל הקבוצה A. הוכיחו:
   (א) אם $R \subseteq S$ אז לכל יחס Q מעל A מתקיים $R \circ Q \subseteq S \circ Q$.
   (ב) אם $R \subseteq S$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R^{(n)} \subseteq S^{(n)}$. (תזכורת להגדרה של $R^{(n)}$ מופיעה בשאלה 5)

4. תהיינה X, Y, Z קבוצות. יהיו S, T יחסים מ־Y ל־Z, ויהי R יחס מ־X ל־Y.
   (א) הוכיחו: $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$.
   (ב) תנו דוגמה לסעיף הקודם שבה מתקיימת הכלה ממש.
   (ג) הוכיחו: $((S \cup T) \circ R)^{-1} = \left(R^{-1} \circ S^{-1}\right) \cup \left(R^{-1} \circ T^{-1}\right)$.

5. <u>תזכורת:</u> בהינתן יחס R מעל קבוצה A, הגדרנו $R^{(0)} = Id_A$, וברקורסיה לכל $n \in \mathbb{N}$, $R^{(n+1)} = R^{(n)} \circ R$.
   (א) הוכיחו שלכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R^{(n+m)} = R^{(n)} \circ R^{(m)}$.
   <u>הדרכה:</u> התייחסו אל n בתור קבוע ("יהי n") והוכיחו באינדוקציה על m.
   (ב) לכל יחס R, נגדיר את <u>הסגור הטרנזיטיבי</u> שלו R^* להיות:

$$R^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} R^{(i)}$$

   יהי $R = \{\langle n, n+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. מהו R^*? הוכיחו.

6. בכל סעיף, נתבונן ביחס R כלשהו מעל $\mathbb{Z}$. מצאו הצגה פשוטה עבור $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^{(i)}$ והוכיחו את תשובתכם.
   <u>הערה 1:</u> שימו לב שכאן, בניגוד לשאלה הקודמת, האיחוד המוכלל כולל גם את $i = 0$.
   <u>הערה 2:</u> ככל הנראה תצטרכו להשתמש באינדוקציה כדי להוכיח את תשובותיכם.
   (א) $R_1 = \{\langle m, m+5 \rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$
   (ב) $R_2 = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |m - n| = 1\}$ ($|x|$ מסמן את הערך המוחלט של x)
   (ג) $R_3 = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |m - n| \in \{2, 3\}\}$
   (ד) $R_4 = \{\langle m - n, m + n \rangle \mid \langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$

7. יהיו $S \subseteq A \times B$, $R \subseteq B \times C$ יחסים. הוכיחו:

(א) אם S מלא (ב־A) ו־R מלא (ב־B), אז $R \circ S$ מלא (ב־A).

(ב) אם R, S חד־ערכיים, אז גם $R \circ S$ חד־ערכי.

(ג) מסעיפים א' וב' נובע שאם $f \in A \to B$ ו־$g \in B \to C$, אז היחס $g \circ f$ הוא פונקציה $g \circ f \in A \to C$.
הוכיחו שהפונקציה $g \circ f$ מקיימת: לכל $x \in A$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
(הבהרה: עליכם להוכיח שלכל $x \in A$, אם $\langle x, y \rangle \in g \circ f$ אז $y = g(f(x))$.)

8. קבעו לגבי כל אחד מהיחסים הבאים האם הוא חד ערכי והאם הוא מלא. הוכיחו את תשובותיכם.

(א) $R = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \,|\, y = \frac{20x^{2023}+7}{42} \right\}$

(ב) $R = \left\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,|\, x^2 = y^2 \right\}$

(ג) $R = \{ \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid B \subset A \}$ ($\subset$ מסמן הכלה ממש)

(ד) $R = \left\{ \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\{1, 2, ..., 2023\})^2 \mid A \triangle B = \{7,\, 500,\, 1000\} \right\}$

9. נתון היחס $R = \{ \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid B = A \cup \{1\} \}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) היחס R הוא חד ערכי.

(ב) היחס R הוא מלא ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(ג) היחס R^{-1} הוא חד ערכי.

(ד) היחס R^{-1} הוא מלא ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(ה) לכל יחס S מעל קבוצה A מתקיים $S \circ S^{-1} \subseteq Id_A$.

(ו) לכל יחס חד ערכי S מעל קבוצה A מתקיים $S \circ S^{-1} \subseteq Id_A$.

10. תהי A קבוצה כלשהי לא ריקה, ויהיו R, S יחסים מעל A. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם R, S יחסים חד־ערכיים אז $R \cap S$ חד ערכי.

(ב) אם R, S יחסים חד־ערכיים אז $R \Delta S$ חד ערכי.

(ג) אם R, S יחסים חד־ערכיים ומלאים אז $R \times S$ חד־ערכי ומלא מעל $A \times A$.

(ד) אם R, S יחסים חד־ערכיים ומלאים אז $\{ \langle \langle r_1, s_1 \rangle, \langle r_2, s_2 \rangle \rangle \mid \langle r_1, r_2 \rangle \in R \wedge \langle s_1, s_2 \rangle \in S \}$ חד־ערכי ומלא מעל $A \times A$.

11. הוכיחו/הפריכו:

(א) אם $f : A \to C$, $g : B \to C$ שתי פונקציות, אז היחס $f \cup g$ הוא פונקציה $A \cup B \to C$.

(ב) אם $f : A \to C$, $g : B \to C$ שתי פונקציות, ו־A, B קבוצות זרות, אז היחס $f \cup g$ הוא פונקציה ב־ $A \cup B \to C$.

12. נתון היחס

$$g = \{ \langle A, a \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \,|\, a \in A \wedge \forall b \in A.\, a \leq b \}$$

מצאו את $dom(g)$ ואת $Im(g)$ (התחום והתמונה של היחס), והוכיחו שביחס אליהם g היא פונקציה.

13. בכל סעיף, חשבו את $f \circ f \circ f$ עבור פונקציה הנתונה f. לא חובה להוכיח, אבל יש להראות דרך.

(א) $f = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

(ב) $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f(A) = A \cup \mathbb{N}$.

(ג) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x \rangle$.

14. עבור $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ המוגדרות ע"י:

$$f(n) = \{n, n+1\}$$

$$g(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ \min A & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את ההרכבה $g \circ f$. הגיעו לתשובה מפושטת ככל האפשר.
(הבהרה: הפונקציה g מוגדרת בצורה מפוצלת. הכוונה היא ש־$g(\emptyset) = 0$, ולכל $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך ש־$A \neq \emptyset$, $g(A) = \min A$.
לדוגמה, $g(\{7, 2, 100\}) = 2$.)

15. בהינתן קבוצה A ופונקציה $f \in A \to A$, להלן מספר הגדרות:

(א) נאמר ש־f היא <u>אידמפוטנטית</u> אם $f \circ f = f$.

(ב) נאמר ש־f היא <u>עקשנית</u> אם לכל $x \in Im\left(f\right)$ מתקיים $f\left(x\right) = x$.

(ג) נאמר ש־f היא <u>קבועה</u> אם קיים $a \in A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f\left(x\right) = a$.

לכל $\langle \alpha, \beta \rangle \in \{$א,ב,ג$\} \times \{$א,ב,ג$\}$, <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם f מקיימת את הגדרה α, אז f מקיימת את הגדרה β.

16. מצאו את התמונה של הפונקציות הבאות (בצורה מפושטת ככל הניתן) והוכיחו את תשובותיכם.
<u>תזכורת:</u> התמונה של פונקציה $f : A \to B$ היא הקבוצה $Im\left(f\right) = \{f\left(x\right) \mid x \in A\}$.

(א) $f : \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) \to \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right),\ f\left(X\right) = X \cap \mathbb{N}$

(ב) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f\left(\langle n, m \rangle\right) = n + m$

(ג) $f : \mathcal{P}\left(\mathbb{Z}\right) \times \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right) \to \mathcal{P}\left(\mathbb{Z}\right),\ f\left(\langle X, Y \rangle\right) = X \cap Y$

(ד) $f : \left(\mathbb{N} \to \mathbb{R}\right) \to \mathbb{R},\ f\left(g\right) = g\left(0\right)$

(ה) $f : \left(\mathbb{N} \to \mathbb{R}\right) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f\left(\langle g, n \rangle\right) = g\left(n\right)$

17. הוכיחו שקיימת סדרת קבוצות $A_0, A_1, A_2, ...$ שמקיימת לכל n טבעי:

(א) $|A_{n+1}| = 2^{|A_n|}$

(ב) $A_n \in A_{n+1}$

(ג) $A_n \subseteq A_{n+1}$

<u>הדרכה:</u> הגדירו ברקורסיה סדרת קבוצות המקיימת את שלושת התנאים, והוכיחו שהסדרה שהגדרתם עונה על התנאים הללו. ייתכן שתצטרכו להשתמש באינדוקציה על מנת להוכיח.

18. הוכיחו/הפריכו: קיימת סדרה של קבוצות $A_0, A_1, A_2, \ldots$ המקיימת את שלוש הדרישות הבאות:

- הן תתי־קבוצות של טבעיים: $\forall i \in \mathbb{N}.\, A_i \subseteq \mathbb{N}$
- חיתוך של חלק מהקבוצות אינו ריק: לכל $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{N}$ מתקיים $\bigcap_{i \in S} A_i \neq \emptyset$.
- חיתוך כל הקבוצות ריק: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$