תרגיל בית 8, אלגברה לינארית 2א

16 במאי 2025

1. יהי V מ"ו ותהי $T:V\to V$ ה"ל המקיימת $T^5=-T$. הראו כי:

$$V=\textsc{Im}(T)\oplus\ker(T)$$

2. העזרו במשפט המימד להעתקות לינאריות כדי לקבוע בכל סעיף האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנדרש. במידה שקיימת מצאו אחת כזו.
   (א) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\ker T=\textsc{Span}(1,2,1)$, $\textsc{Im}T=\textsc{Span}(1,1,1)$
   (ב) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, $\ker T=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
   (ג) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^5$, $\textsc{Im}T=\mathbb{R}^5$
3. יהיו V,U,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $T:U\to V,S:V\to W$ ה"ל כך שההעתקה $S\circ T:U\to W$ היא איזומורפיזם. הוכיחו:

$$V=\textsc{Im}(T)\oplus\ker(S).$$

4. בסעיפים הבאים חשבו את $[T]_C^B$ עבור T,B,C הנתונים:
   (א) B הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$, $C=\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}$, $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+2c\\3a-2d\\4a-3c-2b+d\end{pmatrix}$$

   (ב) $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B=C=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$T(A)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot A$$

5. תהי $T:V\to V$ ה"ל וB,C זוג בסיסים סדורים של V כך ש$[T]_C^B$ מטריצה משולשית עליונה. הוכיחו כי קיימים זוג בסיסים B',C' כך ש$[T]_{C'}^{B'}$ מטריצה משולשית תחתונה.
6. יהי V מ"ו נ"ס מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U,W,W' תת"מים שלו כך שמתקיים:

$$V=U\oplus W=U\oplus W'.$$

יהי $(u_1,...,u_m)$ בסיס של U ויהיו $(w_1,...,w_k),(w_1',...,w_l')$ בסיסים של W,W' בהתאמה.
   (א) למה $k=l$?
   (ב) הסבירו מדוע $B=(u_1,...,u_m,w_1,...,w_k)$ ו־$B'=(u_1,...,u_m,w_1',...,w_k')$ בסיסים של V
   (ג) הוכיחו שמטריצת המעבר $[id_V]_B^{B'}$ היא מטריצת בלוקים מהצורה $\begin{pmatrix}I_m&X\\0&Y\end{pmatrix}$ כאשר X מטריצה $m\times k$ ו־Y מטריצה הפיכה $k\times k$.