לינארית 1א ~ תרגיל בית 1

שחר פרץ

20 במרץ 2025

.... (1) ....

תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ונניח שסכום כל שורה הוא S. צ.ל. S ע"ע של A, ויש למצוא את הו"ע המתאים.

הוכחה. נתבונן בוקטור $\mathit{1} := (1, 1 \dots 1) \in \mathbb{F}^n$. אז:

$$\mathit{1}' := A\mathit{1},\ \forall i \in [n]\colon (A\mathit{1})_i = \sum_{k=0}^{n} (A)_{ik} \underbrace{(1)_{k1}}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} (A)_{ik} = S = 1 \cdot S = (A)_i \cdot S \implies (A\mathit{1}) = S\mathit{1}$$

סה"כ $\mathit{1}$ ו"ע של A בעבור סקלר S כדרוש. ■

.... (2) ....

יהיו $T, S\colon V \to V$ ט"ל עם ע"ע λ_T, λ_S בהתאמה. נוכיח או נפריך את הטענות הבאות.

א) נפריך את כך ש־$\lambda_T + \lambda_S$ בהכרח ע"ע של $T + S$;

הוכחה. נתבונן בהעתקות $T(a,b) = \underbrace{(a,0)}_{v_a}$ וכן $S(a,b) = \underbrace{(0,b)}_{u_b}$ מעל $\mathbb{R}^2$. אזי $T(v_1) = 1v_1$ כלומר $\lambda_T = 1$ ו"ע של T, ובאופן דומה $S(u_1) = 1u_2$ כלומר $\lambda_S = 1$ ו"ע של S. נניח בשלילה את הטענה, ונקבל $\lambda_S + \lambda_T = 1 + 1 = 2$ ו"ע של $S + T$. נמצא את $T + S$:

$$(T + S)(a,b) = T(a,b) + S(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,b) \implies T + S = I$$

ברור כי הערך העצמי היחיד של T הוא 1 (כי לכל $v \in V$, מתקיים $v = Iv = 1 \cdot v$ ובפרט 1 ערך עצמי של כל וקטור). אך, מהטענה ע"ע של I הוא 2, וזו סתירה. ■

ב) נפריך כי $\lambda_T \cdot \lambda_S$ בהכרח ע"ע של $T \circ S$;

הוכחה. באותן הקשירות והסימנים לעיל: יהי $v \in \mathbb{R}^2$, אזי קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$v = (a,b)$ מהגדרה. בפרט:

$$(T \circ S)(a,b) = T(S(a,b)) = T(0,b) = (0,0) = 0 \implies T \circ S = 0$$

אך לפי המשפט, $\lambda =: \lambda_S \cdot \lambda_T = 1 \cdot 1 = 1$ ע"ע של $T \circ S$. כלומר, קיים $v \neq 0$ ב־$\mathbb{R}^2$ כך ש־$(T \circ S)v = \lambda v$ משמע $0v = 0 = 1v = v$, וקיבלנו $v = 0$ (סתירה). סה"כ המשפט שגוי. ■

ג) נוכיח כי λ_T^2 הוא ע"ע של T^2.

הוכחה. משום ש־λ_T ע"ע של T אז קיים ו"ע $V \ni v \neq 0$ כך ש־$Tv = \lambda_T v$. למען הנוחות נסמן $\lambda = \lambda_T$. נרכיב את שני הצדדים של המשוואה ונקבל:

$$\begin{aligned} T(Tv) &= T(\lambda v) \\ T^2 v &= \lambda T(v) = \lambda \cdot \lambda v \\ T^2 v &= \lambda^2 v \quad \top \end{aligned}$$

■

המשך בעמוד הבא

יהיו $T\colon V \to W,\ S\colon W \to V$ ט"ל. יהי λ ע"ע של $T \circ S$. נוכיח את הטענות הבאות.

1. נניח $\lambda \neq 0$. נראה λ ע"ע של $S \circ T$.

הוכחה. מההנחה, קיים $V \ni v \neq 0$ כך ש־$(T \circ S)v = \lambda v$. אז בגלל ש־λ, v לא אפסים (כסקלר וכוקטור בהתאמה), $\lambda v \neq 0$ כלומר $(T \circ S)v \neq 0$ וממשפט $v \notin \ker S$. על כן $Sv =: u \neq 0$. באופן דומה $Tu = T(Sv) = (T \circ S)v = \lambda v \neq 0$.

נבחין כי:

$$S(T(u)) = S(\lambda v) = \lambda S(v) = \lambda u$$

וסה"כ λ ע"ע של $S \circ T$ בעבור הו"ע Sv, כדרוש. ■

2. נניח $\lambda = 0$. נראה ש־λ לא בהכרח ע"ע של $S \circ T$.

הוכחה. נניח $W = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}$. נתבונן בהעתקות הבאות:

$$S\colon V \to W,\ S(a,b) = a$$
$$T\colon W \to V,\ T(a) = (a,0)$$

אז יתקיים:

$$\forall v \in V\colon (\exists a,b \in \mathbb{R}\colon (a,b) = v) \supset (T \circ S)v = T(S(a,b)) = T(a) = (a,0)$$
$$\forall w \in W\colon (S \circ T)w = S(T(w)) = S(w,0) = w \supset S \circ T = id_W$$

אז $\lambda = 0$ ע"ע של $T \circ S$ בעבור בוקטור $(0,1)$ שיקיים $(T \circ S)(0,1) = 0$ מהנאמר לעיל. אך 0 אינו ו"ע של הזהות (הוכח כבר בסעיפים קודמים) ובפרט לא של $S \circ T$, ולכן λ אינה ו,ע של $S \circ T$ כדרוש. ■

3. נניח $\lambda = 0$. נניח $\dim W \leq \dim V$. נראה λ הוא ע"ע של $S \circ T$.

הוכחה. מהנתון קיים $V \ni v \neq 0$ כך ש־$(T \circ S)v = 0$. נפריד למקרים.

- אם $Sv \neq 0$, אז $T(Sv) = \lambda v = 0v = 0$, כלומר $Sv \in \ker T$. לכן:

$$(S \circ T)(Sv) = S(T(Sv)) = S(0) = 0 = 0 \cdot Sv = \lambda Sv$$

ומשום ש־$Sv \neq 0$, סה"כ λ ע"ע של $S \circ T$ כדרוש.

- אם $Sv = 0$, אז $v \in \ker S$. נניח בשלילה λ אינו ע"ע של $S \circ T$, אז $(S \circ T)v \neq 0 = \lambda v$ לכל $V \ni v \neq 0$, ולכן $\ker(S \circ T) = \{0\}$. משום ש־$\dim W \leq \dim V$ וכן $T\colon V \to W$, אזי T איזו' ממשפט ובפרט על. לכן קיים $w \in W$ כך ש־$Tw = v$. במקרה זה $w \neq 0$ אחרת $0 = T(0) = T(w) = v \neq 0$ וזו סתירה. נקבל:

$$(S \circ T)w = S(Tw) = S(v) = 0 = 0 \cdot w = \lambda w$$

ומשום שהראינו כי $w \neq 0$, אז λ ע"ע של $S \circ T$ כדרוש.

סה"כ הראינו כי בשני המקרים λ הינו ע"ע של $S \circ T$ כנדרש, והטענה הוכחה. ■