תרגול בדידה 1

שחר פרץ

24 ביוני 2024

1

הוכח/הפרך: קיימת $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך ש־$|X| = \aleph_0$ כך שלכל $A, B \in X. A \cap B = \emptyset$ וגם $\mathbb{N} = \bigcup_{A \in X} A$

הוכחה. נסמן $\mathbb{P}$ כקבוצת הראשוניים, ונבחר:

$$A_p = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}_+\},\ X = A_p \mid p \in \mathbb{P}\} \cup \{\mathbb{N} \setminus \bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p\}$$

1. נוכיח $|X| = \aleph_0$. החח"ע הבא:

$$f \colon \mathbb{P} \to X,\ f = \lambda p \in \mathbb{P}.A_p \implies \aleph_0 \leq |X|$$

   כיוון שני מהכלה.

2. זרות בזוגות: הפרדה למקרים + מקרה שני, נניח בשלילה $n \in A_P \cap A_q$ ולכן $n = p^k = p^\ell$ וזו סתירה למשפט הסידוי של האריתמטיקה
3. איחוד טרוויאלי
4. $\forall A \in X. |X| = \aleph_0$: $n \mapsto p^n$ חח"ע ועל, וגם $B = \mathbb{N} \setminus \bigcup_p A_p$ ויתקיים $|B| \leq \aleph_0$ מכלה.

■

2

מצאו את עוצמת הקבוצה:

$$A = \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies f(n) > f(m)\}$$

טענה: אם $f \in A$, יש $n_0 \in \mathbb{N}$ ו־$c \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq n_0. f(n) = c$.
נוכיח $|A| \leq \aleph_0$. נתבונן ב־ $A_{n,c} = \{f \in A \mid \forall k \geq n. f(k) = c\}$ טענה:

$$A = \bigcup_{n,c \in \mathbb{N}} A_{n,c}$$

נרצה להוכיח $|A_{n,c}| \leq \aleph_0$. נראה פונקציה חח"ע $A_{n,c} \to \mathbb{N}^n$:

$$f = \lambda g \in A_{n,c}. \langle g(0), \ldots, g(n-1) \rangle$$

וזו קבוצת בת־מנייה ($|\mathbb{N}^n| = \aleph_0$). מאיחוד לפחות בן־מניה של קבוצות לפחות בנות מניה נקבל את הדרוש.