מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 14 - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך הגשה:	ניתן בתאריך:
334558962	שחר פרץ	27.2.2024	21.2.2024

תרגיל בית 14 - עוצמות

שאלה 1

יהיו A, A', B, B' קבוצות. נניח $|A| = |A'| \land |B| = |B'|$. לכן קיימים זיווגים $h_A \colon A \to A', h_B \colon B \to B'$.

סעיף (א)

נוכיח $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$. נבחר זיווג $h \colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A'), h = \lambda \mathcal{A} \in \mathcal{P}(A).\{h_A(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$. נוכיח שהוא זיווג:

על: תהי קבוצה $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(A)$. נבחר $\mathcal{A}' = \{h_A^{-1}(a) \mid a \in \mathcal{A}\}$ (כאשר ידוע h_A הפיכה כי h_A זיווג), נחשב:

$$h(\mathcal{A}') = \{h_A(a) \mid a \in \{h_A^{-1} \mid a \in \mathcal{A}\}\} = \{h_A(h_A^{-1}) \mid a \in \mathcal{A}\} = \{a \mid a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$$

חח"ע: נניח $h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{B})$, לכן $\{h_A(a) \mid a \in \mathcal{A}\} = \{h_A(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ וסה"כ משוויון קבוצות:

$$b \in \mathcal{B} \land c = h_A(b) \longleftrightarrow a \in \mathcal{A} \land c = h_A(a)$$

ומטרנזיטיביות $\forall a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}.h_A(a) = h_A(b)$ ומשום ש־h_A זיווג חח"ע אז $\forall a \in \mathcal{A} \land b \in \mathcal{B}.a = b$ כלומר $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ כדרוש ■

סעיף (ב)

נניח A, B זרות ונניח A', B' זרות. נוכיח $|A \uplus B| = |A' \uplus B'|$.

נתבונן בזיווג: $h \colon A \uplus B \to A' \uplus B$, $\mathrm{h} = \lambda x \in A \uplus B. \begin{cases} h_A(x) & \text{if } x \in A \\ h_B(x) & \text{if } x \in B \end{cases}$

נוכיח שהוא זיווג.

על: תהי $\mathcal{A} \in A \uplus B$, נבחר $\mathrm{A'} = \{\begin{cases} h_A^{-1}(x) & \text{if } x \in A' \\ h_B^{-1}(x) & \text{if } x \in B' \end{cases} \mid x \in \mathcal{A}\}$. נתבונן ב־$h(\mathcal{A}')$, ומפילוג למקרים (אם $x \in A' \land x \notin B'$ או אם $x \notin A' \land x \in B'$) נמצא $h(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$ כדרוש.

חח"ע: נניח $h(A')=h(B')$. מתקיים באופן מידי מתוך שוויון פונקציות.

שאלה 2

יהיו A,A',B קבוצות. נניח $|A|\le|A'|$, כלומר קיימת $h_A\colon A\to A'$ חח"ע

סעיף (א)

נוכיח $|B\to A|\le|B\to A'|$. נמצא פונקציה $h\colon(B\to A)\to(B\to A')$ חח"ע. נבחר $h=\lambda f\in B\to A.h_A\circ f$. נוכיח ש־$h$ חח"ע. נניח $h(f)=h(g)$, ונניח $f,g\colon B\to A'$. לכן $h_A\circ f=h_A\circ g$, כלומר $\forall x\in B.h_A(f(x))=h_A(g(x))$ ומכיוון ש־h_A חח"ע אז $\forall x\in B.f(x)=g(x)$ ומשוויון פונקציות $f=g$ כדרוש ■

סעיף (ב)

נוכיח $|A\to B|\le|A'\to B|$. נמצא פונקציה $h\colon(A\to B)\to(A'\to B)$ חח"ע. נבחר $h=\lambda f\in B\to A.f\circ h_A$. נוכיח ש־$h$ חח"ע. נניח $h(f)=h(g)$, ונניח $f,g\colon B\to A'$. לכן $f\circ h_A=g\circ h_A$, כלומר $\forall x\in A.f(h_A(x))=g(h_A(x))$ ומכיוון ש־h_A חח"ע אז $\forall x\in B.f(x)=g(x)$ ומשוויון פונקציות $f=g$ כדרוש ■

שאלה 3

סעיף (א)

נוכיח $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}\to\mathbb{N}|$. נבחר פונקציה $h\colon\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\to\mathbb{N}),h=\lambda n\in\mathbb{N}.(\lambda m\in\mathbb{N}.n)$. נוכיח h חח"ע. נניח $h(n)=h(m)$ ונניח $n,m\in\mathbb{N}$. לכן $\lambda x\in\mathbb{N}.n=\lambda x\in\mathbb{N}.m$ ומכלל η סה"כ $\forall x\in\mathbb{N}.n=m$ כלומר $n=m$ כדרוש ■

סעיף (ב)

נוכיח $|\mathbb{R}|\le|\mathbb{R}\to\{0,1\}|$. נבחר פונקציה:

$$\mathrm{h}\,:\mathbb{R}\to(\mathbb{R}\to\{0,1\}),h=\lambda r\in\mathbb{R}.\left(\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases}1 & \text{if } x=r\\ 0 & \text{else}\end{cases}\right)$$

נוכיח h חח"ע. נניח $h(r_1)=h(r_2)$, ונניח $r_1,r_2\in\mathbb{R}$. נסמן $f_1=h(r_1),f_2=h(r_2)$. מכלל η, יהי $x\in\mathbb{R}$, נקבל $f_1(x)=f_2(x)$. נניח בשלילה $r_1\neq r_2$, ונתבונן ב־$x=r_1$. נקבל $f_1(x)=1\wedge f_2(x)=0$ ולכן $f_1(x)\neq f_2(x)$ וזו סתירה. על־כן $x_1=x_2$ כדרוש ■

סעיף (ג)

נוכיח $|\{0,1\}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$ משום ש־ $|\{-1,1\}|=|\{0,1\}|$ נוכל להוכיח באופן שקול $|\{-1,1\},\times\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$. נבחר פונקציה $h\colon\mathbb{Z}\to(\{0,1\}\times\mathbb{N}),h=\lambda z\in\mathbb{Z}.\langle\frac{z}{|z|},|z|\rangle$, ונוכיח h חח"ע ועל.

חח"ע: יהיו $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, נניח $h(z_1) = h(z_2)$ ונוכיח $z_1 = z_2$. מההנחה $\langle \frac{z_1}{|z_1|}, |z_1| \rangle = \langle \frac{z_2}{|z_2|}, |z_2| \rangle$ ומהתכונה המרכזית של זוג סדור $\frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|} \wedge |z_2| = |z_1|$. נכפיל את המשוואות ונקבל $\frac{z_1}{|z_2|}|z_2| = \frac{z_1}{|z_1|}|z_1|$, נחשב ונקבל $z_1 = z_2$ כדרוש.

על: יהי $\langle b, n \rangle \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$, כלומר $b = -1 \vee b = 1 \wedge n \in \mathbb{N}$. נבחר $z = bn$ ונוכיח $h(z) = \langle b, n \rangle$. נחשב ונקבל שצריך להוכיח $\langle \frac{bn}{|bn|}, |bn| \rangle = \langle b, n \rangle$. ידוע $|n| = n$ ומפיצול למקרים $|b| = 1$. לכן, $\frac{bn}{|bn|} = \frac{bn}{n} = b$, וגם $|bn| = 1n = n$ כדרוש מהתכונה המרכזית של זוג סדור ■

שאלה 4

סעיף (א)

צ.ל. $[2, 7] \sim [0, 1]$. נבחר זיווג $h = \lambda x \in [2, 7].\frac{x-1}{6}$. נוכיח ש־$h$ זיווג.

חח"ע: נניח $h(x) = h(y)$, כלומר $\frac{y-1}{6} = \frac{x-1}{6}$. נכפיל את האגפים ב־6 ונוסיף 1. סה"כ $x = y$ כדרוש.

על: יהי $x \in [0, 1]$, נבחר $y = 6x + 1$. $h(y) = \frac{6x+1-1}{6} = x$ כדרוש. ■

סעיף (ב)

צ.ל. $[2, 7] \times [2, 7] \sim [0, 1] \times [0, 1]$. בהתאם לטענה נתונה, תנאי מספיק לכך הוא ש־$[2, 7] \sim [0, 1]$, שהוכחנו בסעיף (א) בלי תלות בסעיף זה ■

סעיף (ג)

צ.ל. $\{5, 6\} \to \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}$. נבחר זיווג

$$h\colon (\{5, 6\} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}), h = \lambda f \in \{5, 6\} \to \mathbb{N}.\langle f(5), 2f(6) \rangle$$

נוכיח ש־h זיווג.

חח"ע: יהיו $f, g \in \{5, 6\} \to \mathbb{N}$, נניח $h(f) = h(g)$. לכן, $\langle f(5), 2f(6) \rangle = \langle g(5), 2g(6) \rangle$ ובאופן שקול $f(5) = g(5) \wedge 2f(6) = 2g(6)$. נחסר 1 ונחלק את האגפים ב־2, נקבל $f(5) = g(5) \wedge f(6) = g(6)$ כלומר $\forall x \in \{5, 6\}.f(x) = g(x)$ ומשוויון פונקציות $f = g$ כדרוש.

על: יהי $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\text{even}}$, כלומר $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. לכן, קיים k טבעי כך ש־$b + 1 = 2k$. נעביר אגפים ונקבל $k = \frac{b}{2}$. נבחר $f = \{\langle 5, a \rangle, \langle 6, k \rangle\}$, ונוכיח $h(f) = \langle a, b \rangle$. נסיק, $\langle f(5), 2f(6) \rangle = \langle a, 2 \cdot \frac{b}{2} \rangle = \langle a, b \rangle$ כדרוש ■

סעיף (ד)

צ.ל. $\mathbb{Z} \times [0, 7) \sim \mathbb{R}$. נבחר בזיווג $h\colon \mathbb{Z} \times [0, 7) \to \mathbb{R}, h = \lambda \langle z, r \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7).z + \frac{r}{7}$. נוכיח h זיווג.

חח"ע: יהי $\langle z_1, r_1 \rangle, \langle z_2, r_2 \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7)$, נניח $h(x_1) = h(x_2)$. לפיכך, $z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7}$. יהי $r \in [0, 7)$, נסיק $0 \le r \wedge r > 7$. נחלק אגפים ב־7 ונקבל $0 \le \frac{r}{7} < 1$ כלומר $\frac{r_1}{7}, \frac{r_2}{7} \in [0, 1)$. נניח בשלילה $z_1 \ne z_2$ ונקבל $z_1 \le z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7} < z_2 + 1$ וגם $z_1 + 1 > z_1 + \frac{r_1}{7} = z_2 + \frac{r_2}{7} \ge z_2$, כלומר $z_1 < z_2 + 1$ ובאופן דומה

$z_2 < z_1 + 1$ וסה"כ $-1 < z_1 - z_2 < 1$ כלומר $-1 < 1$ וזו סתירה. לכן, $z_1 = z_2$. נציב $z_1 + \frac{r_1}{7} = z_1 + \frac{r_2}{7}$, נכפיל אגפים ונחסיר וסה"כ $r_1 = r_2$ כדרוש.

על: יהי $x \in \mathbb{R}$. נבחר $x' = \langle \lfloor x \rfloor, 7(x - \lfloor x \rfloor) \rangle \in \mathbb{Z} \times [0, 7)$. לכן $h(x') = \lfloor x \rfloor + \frac{7(x - \lfloor x \rfloor)}{7} = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor = x$ כדרוש. ■

סעיף (ה)

צ.ל. $\{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_+$. נבחר זיווג $h: (\{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}.h = \langle a, b \rangle \in \{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N}.\sqrt{a} + 4b$. נוכיח h זיווג.

חח"ע: יהי $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in \{1, 4, 9, 16\} \times \mathbb{N}$. נניח $h(\langle a_1, b_1 \rangle) = h(\langle a_2, b_2 \rangle)$ כלומר $\sqrt{a_1} + 4b_1 = \sqrt{a_2} + 4b_2$. נניח בשלילה $a_1 \neq a_2$. נחשב ונקבל ש־$1 \leq \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2} \leq 4$. לכן, $1 + 4b_1 \leq \sqrt{a_1} + 4b_1 = \sqrt{a_2} + 4b_2 \leq 4b_2 + 4$. נקבל את אי־השוויון $1 + 4b_1 \leq 4b_2 + 4$. נעביר אגפים ונקבל $-\frac{3}{4} \leq b_2 - b_1$, בסתירה לכך שחיבור/חיסור של שני טבעיים (ובפרט b_1, b_2) הוא שלם. סה"כ $a_1 = a_2$, ולכן $\sqrt{a_1} + 4b_1 = \sqrt{a_1} + 4b_2$. נחסיר אגפים ונחלק ב־4, סה"כ גם $b_1 = b_2$, אזי, מהמשפט המרכזי של זוג סדור, $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$ כדרוש.

על: יהי $n \in \mathbb{N}_+$. נתבונן ב־$a = (n - 4b)^2$, $b = \lceil \frac{n}{4} \rceil$. נקבל $h(\langle a, b \rangle) = \sqrt{(n - 4b)}^2 + 4b = n - 4b + 4b = n$. נוכיח $a \in \{1, 4, 9, 16\}$ או באופן שקול $n - 4b = \sqrt{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$. ידוע $n - 4b = n - 4 \lceil \frac{n}{4} \rceil = n \bmod 4$, ו־mod מקיים את תחום ההגדרה המתאים כדרוש. ■

סעיף (ו)

צ.ל. $(3, 4) \cup (5, 7] \sim \mathbb{R}$. נבחר זיווג:

$$\mathrm{f} : (3, 4) \cup (5, 7] \to \mathbb{R}.f = \lambda r \in (3, 4) \cup (5, 7]. \begin{cases} \frac{1}{r-4} + 1 & \text{if } r \in (3, 4) \\ \frac{2}{r-5} - 1 & \text{if } r \in (5, 7] \end{cases}$$

נוכיח ש־f זיווג.

על: יהי $x \in \mathbb{R}$, נמצא r בתחום כך ש־$f(r) = x$. נפצל למקרים:

- אם $x < 0$: נמצא $r \in (3, 4)$ מתאים, כלומר:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r-4} + 1 &= x \\ 1 &= (r - 4)(x - 1) \\ 1 &= r(x - 1) - 4x + 4 \\ 4x - 3 &= r(x - 1) \\ \frac{4x-3}{x-1} &= r \end{aligned}$$

כאשר $\frac{4x-3}{x-1}$ מוגדר לכל $x \neq 1$ ו־$r \neq 4$, כששניהם פסוקי אמת תחת ההנחות. נוכיח ש־r בתחום המתאים. נניח בשלילה שהוא אינו, ונגיע לסתירה בכל אחד מהמקרים:

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{x-1} < 4 \\ \frac{4x-3}{x-1} > 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 3 > 4x - 4 \\ 4x - 3 < 3x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -3 > -4 \\ x < 0 \end{cases}$$

[הערה: הסימן הוחלף כי לכל x בתחום ההגדרה $x-1<0$]. סה"כ הגענו לשקילות לפסוקי אמת כדרוש.

- באופן דומה (רק על מספרים אחרים), אם $x\geq 0$ אז נבחר $r=\frac{5x+7}{x+1}$.

חח"ע: יהי $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ונניח $f(x_1)=f(x_2)$. נפלג למקרים:

- אם $x_1\in(3,4)\wedge x_2\in[5,7)$ אז:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1-4}+1&=\frac{2}{x_2-5}-1\\ 1+x_2-5&=2-x_1+4\\ -5&=x_2-x_1\end{aligned}$$

זאת בסתירה לכך ש־$x_2-x_1\leq 3-7=-2$.

- באופן דומה, אם $x_1\in[5,7)\wedge x_2\in(3,4)$ נגיע לסתירה גם כן.
- אם $x_1\in(3,4)\wedge x_2\in(3,4)$ אז $\frac{1}{x_2-4}=\frac{1}{x_1-4}$ ולכן $x_1=x_2$ כדרוש.
- אם $x_1\in[5,7)\wedge x_2\in[5,7)$ אז $\frac{1}{x_2-5}=\frac{1}{x_1-5}$ ולכן $x_1=x_2$ כדרוש.

סה"כ כיסינו את כל המקרים ■

סעיף (ז)

נוכיח $[0,1]\sim[0,1]\cup\{2\}$. נמצא זיווג מתאים. נבחר את הזיווג להלן:

$$\mathrm{f}:[0,1]\cup\{2\}\to[0,1],f=\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases}1 & \text{if } x=2\\ \frac{1}{n+1} & \exists n\in\mathbb{N}.\frac{1}{n}=x\\ x & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח ש־f זיווג. [הערה: הפונקציה מוגדרת היטב כי $x=\frac{1}{n}$ מתאים n באופן חח"ע [מצמצום] לכל x שונה]

חח"ע: יהי $x_1\in\mathbb{R}\wedge x_2\in\mathbb{R}$. נניח $h(x_1)=h(x_2)$. בה"כ, נפלג למקרים (לא אציין מקרים שנכונים באופן ריק).

- אם $x_1=2\wedge\exists n\in\mathbb{N}.\frac{1}{n}=x_2$, נציב בהגדרת הפונקציה לעיל, נסיק $h(x_1):=1=\frac{1}{n+1}:=h(x_2)$. לאחר מעבר אגפים $n+1=1$ כלומר $n=0$, ולכן $x_2=\frac{1}{0}\in\emptyset$ וזו סתירה כי x_2 מוגדר.
- אם $x_1=2\wedge\forall n\in\mathbb{N}.\frac{1}{n}\neq x$, אז $h(x_1):=2=x_2=h(x_2)$ ומטרנזיטיביות $x_2=x_1$ כדרוש.
- אם $\forall n\in\mathbb{N}.\frac{1}{n}\neq x\wedge\exists n\in\mathbb{N}.\frac{1}{n}=x$, ידוע $h(x_1):=\frac{1}{n+1}=x_2:=h(x_2)$, כלומר קיים $n'=n+1\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=\frac{1}{n'}$ וזו סתירה.

על: יהי $x\in[0,1]$. נניח בשלילה שלא קיים $r\in[0,1]\cup\{2\}$ כך ש־$h(r)=x$. נסיק, שכל המקרים אינם תקפים ובפרט המקרה אחרון, כלומר $x\neq r$, בסתירה לכך שזה עובד בעבור $x=r$ (ההנחה בשלילה כאן מאפשרת להתעלם משאר המקרים), כדרוש ■

סעיף (ח)

נוכיח $\mathbb{R}\sim[0,1]\cup\mathbb{N}$. נמצא $f:[0,1]\cup\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ זיווג מתאים.

$$\text{f} = \lambda x \in [0,1] \cup \mathbb{N}. \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{if } x \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2n+1} & \text{if } \exists n \in \mathbb{N}.a = \frac{1}{n} \\ x & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח ש־f זיווג. [הערה: הפונקציה מוגדרת היטב כי $x = \frac{1}{2n+1}$ מתאים n באופן חח"ע [מצמצום] לכל x שונה]

חח"ע: יהי $x_1, x_2 \in [0,1] \cup \mathbb{N}$, נניח $h(x_1) = h(x_2)$. נוכיח $x_1 = x_2$. נפלג למקרים (אתעלם ממקרים הנכונים מסימטריה, וממקרים בעבורם x_1, x_2 מקיימים את אותו התנאי כך שניתן להוכיח בעזרת פישוט אלגברי פשוט):

- אם $x_1 \in \mathbb{N} \land \exists n \in \mathbb{N}.x_2 = \frac{1}{n} \land x_2 \notin \mathbb{N}$ נציב: $h(x_1) := \frac{1}{2x_1} = \frac{1}{2n+1} := h(x_2)$. נעלה את המשוואה ב־$()^{-1}$, נקבל $2x_1 = 2n + 1$. ידוע $n = \frac{1}{x_2}$, וסה"כ $x_1 = \frac{1}{x_2} + 0.5$. משום ש־$x_2 \notin \mathbb{N}$ אז $\frac{1}{x_2}$ לא מתחלק ב־0.5 ולכן הסכום אינו שלם, בסתירה לכך ש־x_1 טבעי.
- אם $\exists n \in \mathbb{N}.\frac{1}{n} = x_1 \land \forall n' \in \mathbb{N}.\frac{1}{2n'+1} \neq x_2 \land x_2, x_1 \notin \mathbb{N}$: אז $h(x_1) := \frac{1}{2n+1} = x_2 := h(x_2)$. נעביר אגפים, נקבל $2x_2n + x_2 = 1$ ומכאן $2x_2n = -x_2$, מההנחות לעיל $x_2 \neq 0$ ולכן נוכל לחלק ב־$2x_2n$, ונקבל $-\frac{1}{n} = \frac{-x_2}{2x_2n} = 1$. נציב ונקבל $-x_1 = 1$ כלומר $x_1 = -1$, ולכן $x_2 = \frac{1}{-2+1} = -1$ וסה"כ $x_1 = x_2$ כדרוש. [וזו גם סתירה אבל זה לא גורע מההוכחה]
- אם $\forall n' \in \mathbb{N}.\frac{1}{2n'+1} \neq x_2 \land x_2 \notin \mathbb{N} \land x_1 \in \mathbb{N}$: אז $h(x_1) := \frac{1}{2x_1} = x_2 := h(x_2)$. משום ש־$2x_1 \in \mathbb{N}$, אזי קיים $n' \in \mathbb{N}$ מתאים וזו סתירה.

סה"כ כיסינו את כל המקרים הלא־טרוויאלים, והגענו לסתירה/פסוק אמת, כדרוש

על: באופן דומה לסעיף (ז) ■

שאלה 5

סעיף (א)

נגדיר:

$$R = \{\langle\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 + y_1 = x_2 + y + 2\}$$

נבחר $h\colon \mathbb{R}^2/R \to \mathbb{R}, h = \lambda[\langle x, y\rangle]_R \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/R.x + y$, פונקציית זיווג מוגדרת היטב. נוכיח זאת:

מוגדרת היטב: יהי $\langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ונניח $\neg\langle x_1, y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle$ כלומר $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$. נחשב ונמצא $h(\langle x_1, y_1\rangle) = x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2 = h(\langle x_2, y_2\rangle)$ כדרוש.

חח"ע: יהי $[\langle x_1, y_1\rangle]_R, [\langle x_2, y_2\rangle]_R \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/R$. נניח אי שקילות, כלומר $x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$. נסיק $h([\langle x_1, y_1\rangle]) = x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2 = h([\langle x_2, y_2\rangle])$ כדרוש.

על: יהי $r \in \mathbb{R}$. נבחר $[\langle 0, r\rangle]$, נסיק $h([\langle 0, r\rangle]) = 0 + r = r$ כדרוש. ■

סעיף (ב)

תהי $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נניח $f = \lambda A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}).A \cup \mathbb{N}$. נגדיר:

$$S = \{\langle A, B\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \mid \min(f(A)) = \min(f(B))\}$$

נבחר $h\colon \mathcal{P}(\mathbb{Z})/S \to \mathbb{N}, h = \lambda[A]_S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}). \min(f(A))$ (הטווח מתאים כי $\mathrm{range}(f) = \mathbb{N}$ וכי $\mathrm{range}(\min(x)) = x$ ולכן $\min(f(A)) = \mathbb{N}$) זיווג מוגדר היטב. נוכיח זאת:

מוגדר היטב: יהי $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, נניח $\neg ASB$ כלומר $\min(f(A)) \neq \min(f(B))$. נחשב ונמצא $h(A) = \min(f(A)) \neq \min(f(B)) = h(B)$ כדרוש.

חח"ע: יהי $[A]_S, [B]_S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})/S$, נניח $h([A]_S) = h([B]_S)$ כלומר $\min(f(A)) = \min(f(B))$. לכן, ASB ובאופן שקול $[A]_S = [B]_S$ כדרוש.

על: יהי $n \in \mathbb{N}$, נבחר $A = [\{n\}]_S$, נסיק $h(A) = h([\{n\}]_S) = \min(f(\{n\})) = \min(\{n\} \cap \mathbb{N}) = \min(\{n\}) = n$ כדרוש ■

סעיף (ג)

נגדיר: $T = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x) = \sin(y)\}$. נוכיח $h\colon \mathbb{R}/T \to [0,1), h = \lambda[x]_T \in \mathbb{R}^2/T. \sin(x)$ זיווג מוגדר היטב.

מוגדר היטב: יהי $[x]_T, [y]_T \in \mathbb{R}^2/T$, נניח $[x]_T \neq [y]_T$ כלומר $\neg xTy$. $h(x) = \sin(x) \neq \sin(y) = h(y)$ כדרוש.

חח"ע: יהי $[x]_T, [y]_T \in \mathbb{R}^2/T$, נניח $h([x]_T) = h([y]_T)$ ונוכיח $[x]_T = [y]_T$. מההנחה $\sin(x) = \sin(y)$ ובאופן שקול xTy כלומר $[x]_T = [y]_T$ כדרוש.

על: יהי $x \in [0,1)$. נבחר $y = \arcsin(x)$, נקבל $h(y) = \sin(\arcsin(x)) = x$ (משפט מקורס מתמטיקה A תחת ההנחה $x \in [0,1)$) כדרוש ■

סעיף (ד)

נגדיר: $R = \{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2 \mid \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)\}$. נבחר זיווג:

$$h\colon (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset), h = \lambda[f]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R.\mathrm{Im}(f)$$

מוגדר היטב: יהי $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$, נניח $[f]_R \neq [g]_R$ כלומר $\neg fRg$, נוכיח $h(f) \neq h(g)$. מההנחה $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g)$. נסיק: $h([f]_R) = \mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g) = h([g]_R)$ כדרוש.

חח"ע: יהי $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$. נניח $h([f]_R) \neq h([g]_R)$ ונוכיח $[f]_R = [g]_R$. מההנחה נקבל $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g)$ ובאופן שקול $\neg fRg$ כלומר $[f]_R \neq [g]_R$ כדרוש.

על: יהי $N \in \mathbb{N} \setminus \emptyset$. משום ש־$N$ לא ריקה, קיים בה לפחות איבר יחיד, נסמנו c. נבחר את הפונקציה:

$$\mathrm{f} = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} n & \text{if } n \in N \\ c & \text{else} \end{cases}$$

ונוכיח $h([f]_R) = N$ באמצעות הכלה דו כיוונית.

- $N \subseteq h([f]_R)$: יהי $n \in N$, ידוע $f(n) = n$ (כי $n \in \mathbb{N}$) ולכן $n \in \mathrm{Im}(f)$, נציב ונקבל $n \in h([f]_R)$ כדרוש.
- $h([f]_R) \subseteq N$: יהי $n \in h([f]_R)$, נסיק $n \in \mathrm{Im}(f)$, ולכן קיים $a \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(a) = n$. נניח בשלילה $n \notin N$. נפצל למקרים: אם $a \in N$ אז $h(a) = a = n$ כלומר $n \in N$ וזו סתירה. אם $a \notin N$ אז $n = h(a) = c \in N$ כלומר $n \in N$ וזו סתירה. סה"כ $n \in N$ כדרוש ■

שאלה 6

יהיו A,B קבוצות ונניח $A \sim B$, ולכן קיימת זיווג $h\colon A \to B$. נוכיח $H(A) \sim H(B)$. נבחר את הזיווג $\varphi\colon (A \to A) \to (B \to B)$ המוגדר לפי $\varphi = \lambda f \in A \to A. h \circ f \circ h^{-1}$. נוכיח שהוא זיווג ע"י כך שנוכיח שהוא הופכי משני הצדדים. נבחר את הפונקציה $\psi\colon (B \to B) \to (A \to A). h^{-1} \circ f \circ h$ ונוכיח שהיא הופכית.

- הופכי מימין: נוכיח $\varphi \circ \psi = id_{B \to B}$:

$$\forall f \in B \to B. (\varphi \circ \psi)(f) = \varphi(\psi(f)) = \varphi(h^{-1} \circ f \circ h) = \underbrace{h \circ h^{-1}}_{id_B} \circ f \circ \underbrace{h \circ h^{-1}}_{id_B} = f$$

- הופכי משמאל: נוכיח $\varphi \circ \psi = id_{A \to A}$:

$$\forall f \in A \to A. (\psi \circ \varphi)(f) = \psi(\varphi(f)) = \psi(h \circ f \circ h^{-1}) = \underbrace{h^{-1} \circ h}_{id_A} \circ f \circ \underbrace{h^{-1} \circ h}_{id_A} = f$$

סה"כ φ הופכית, ולכן זיווג ■

שאלה 7

תהי קבוצה A. נסמן $S(A)$ כקבוצת כל יחסי הסדר החזקים על A וב־$W(A)$ את כל יחסי הסדר החלשים. נוכיח $S(A) \sim W(A)$. נבחר זיווג $F\colon S(A) \to W(A)$ המוגדר לפי $F = \lambda s \in S(A). id_A \cup s$. נוכיח ש־$F$ זיווג.

חח"ע: יהי $s_1, s_2 \in S(A)$, נניח $F(s_1) = F(s_2)$, ונוכיח $s_1 = s_2$. נשתמש בטענות עזר:

- (1) $s \in S(A)$ ו־id_A קבוצות זרות: נניח בשלילה שקיים $x \in s \wedge x \in id_A$, לפיכך קיים $a \in A$ (אם $A \neq \emptyset$, ובמידה ו־$A = \emptyset$ אזי $A = \emptyset \neq \{\emptyset\} = S(A)$ כדרוש) כך ש־$x = \langle a, a \rangle$, ולכן $\langle a,a \rangle \in s$. משום ש־$s$ יחס סדר חזק ובפרט אנטי־סימטרי חזק, אזי $\forall \langle a,b \rangle \in S. \langle b,a \rangle \notin S$, ובפרט עבור $\langle a,a \rangle$ כלומר נגרר $\langle a,a \rangle \notin S$ וזו סתירה. סה"כ $s \cap id_A = \emptyset$ כדרוש.
- (2) נניח $A \cup B = C \cup B$ [1] ונניח A,B ו־A,C זרות זרות [2], נוכיח $A = C$. נשתמש בהכלה דו־כיוונית. נוכיח $A \subseteq C$ ו־$C \subseteq A$ יתקיים באופן דומה. יהי $a \in A$, כלומר $a \in A \cup B$, נגרר $a \in C \cup B$ [1], אם $a \in C$ אז גמרנו, אם $a \in B$ אז $a \in A \wedge a \in B$ כלומר $a \in A \cap B$ ובפרט A, B אינן זרות וזו סתירה [2], לכן סה"כ $A \subseteq C$ ובאופן דומה $C \subseteq A$ כלומר $A = C$ כדרוש.

ידוע $id_A \cup s_1 = id_A \cup s_2$. משום ש־$s_1, s_2 \in S$ אז מ־(1) נקבל $s_1 \cap id_A = \emptyset \wedge s_2 \cap id_A = \emptyset$. סה"כ מטענה (2) נקבל $s_1 = s_2$ כדרוש.

על: יהי $w \in W(A)$, ונבחר $s = w \setminus id_A$. מההנחה w יחס סדר חלש ומטענה נתונה נקבל s יחס סדר חזק. נותר להוכיח $F(s) = w$. נקבל: $F(s) = (w \setminus id_A) \cup id_A$. נוכיח $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$: יהי $x \in (A \setminus B) \cup B$, נמצא שקילות:

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \setminus B) \cup B && (1)\\
\Longleftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B && (2)\\
\Longleftrightarrow\ & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \notin B) && (3)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg((x \notin A \wedge x \notin B) \vee \cancel{(x \in B \wedge x \notin B)}) && (4)\\
\Longleftrightarrow\ & \neg(x \notin A \wedge x \notin B)) && (5)\\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \vee x \in B && (6)\\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \cup B && (7)
\end{aligned}
$$

וסה"כ $F(s) = (w \setminus id_A) \cup id_A = w \cup id_A$. מההנחה $w \in W(A)$ נסיק w יחס סדר חלש ובפרט רפלקסיבי, ולכן $id_A \subseteq w$, באופן שקול $w \cup id_A = w$. מטרנזיטיביות $F(s) = w$ כדרוש ■

~ סוף ~