מתמטיקה ב' ~ עברי נגר ~ חקירה ואינטגרלים

שחר פרץ

17 ליוני 2024

1 הערות אחרונות על חקירה

באמצעות תכונות של חקירת פונקציות ונגזרות נוכל להוכיח אי־שיוויונות! מן הסתם $f'(x) > g'(x) \not\Longrightarrow f(x) > g(x)$. אבל כן נוכל לעשות דברים אחרים.

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad f_1(x) = x \tag{1}$$
$$f'(x) = (x+1)^{-1} \qquad f_1'(x) = 1 \qquad f_1(0) = f(0) = 0 \tag{2}$$
$$f''(x) = -(x+1)^{-2} \qquad f(x) - f_1(x) \tag{3}$$
$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} \qquad f'(x) - f_1'(x) = \qquad f(0) - f_1(0) = 0 \tag{4}$$
$$f^{(n)}(x) = (n-1)!(-1)^{n-1}(x+1)^{-n} \qquad = (x+1)^{-1} - 1 < 0 \tag{5}$$
$$f(x) - f_1(x) < 0 \qquad \Longrightarrow \ln(1+x) < x \tag{6}$$

כי למעשה $f(x)$ ו־$f_1(x)$ שתיהן מתאפסות, אך אחת גדלה לאט יותר מהשנייה (כי חיסור הנגזרות שלהן שלילי). מכאן נסיק את אי־השווין.

עתה נגדיר $f_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$. נקבל:

$$f(0) - f_2(0) = 0,\ f'(0) - f_2'(0) = 0,\ \underbrace{f(x) - f_2(x)}_{g_2(x)}$$

נגזור:

$$g'(x) = f''(x) - f_2''(x) = -(x+1)^{-2} + 1 > 0$$

$$g'(0) = 0 \land g''(x) > 0 \implies g'(x) > 0 \qquad g'(x) > 0 \land g(0) = 0 \implies g(x) > 0$$

נמשיך באופן הזה:

$$f_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

ונסמן

$$g(x) = f(x) - f_3(x) \tag{7}$$
$$g^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3} - 2 < 0 \tag{8}$$

נעשה כמה מעברים:

$$g''(0) = 0 \implies g''(x) < 0 \tag{9}$$
$$g'(0) = 0 \implies g'(x) < 0 \tag{10}$$
$$g(0) = 0 \implies g(x) < 0 \tag{11}$$

משפט: באמצעות שיטות שלמדנו, ו"משפטונון" בחדו"א ("הגיון בריא" לפי עברי), נסיק שאם $f'' < 0$ בקטע אז f קעורה בקטע. (קעור זה מה שלא נראה כמו קערה), ולהיפך.

הוכחה (לא מלאה). נרצה להוכיח כי:

$$f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + tf(y)$$

כאשר $x, y \in I \land t \in (0,1)$. זאת לפי ההגדרה של פונקציה קורה. לשם כך, נשתמש בפונקציה:

$$f(x) = f((1-t)x + ty) - (1-t)f(x) + tf(y)$$

וניעזר איכשהו בנגזרת השנייה שלה כדי להראות שהיא גדולה מ־0. $\blacksquare$

2 אינטגרלים

$$\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int$$

הגדרה: עבור $f(x)$, קדומה שלה $F(x)$ היא פונ' שמקיימת $F'(x)=f(x)$ לדוגמה:

$$f(x)=x \implies F_1(x)=\frac{x^2}{2}, F_2(x)=\frac{x^2}{2}+2\dots$$

טענה: אם F_1, F_2 שתי קדומות של f בקטע, אז קיים קבוע $C\in\mathbb{R}$ כך ש־$F_1-F_2=C$

הוכחה. נסמן $G=F_1-F_2$, אזי $G'(x)=f(x)-f(x)=0$ בכל הקטע כלומר $G(x)$ היא בהכרח קבוע.

הגדרה: אינטגרל (לא מסויים, ולפי x) / אנטי־נגזרת של פונקציה $f(x)$, זה אוסף כל הקדומות של f. נסמן:

$$\text{[אַסְכָּמֶת]}\quad \overbrace{f}^{\text{אינטגרנד}}(x)\mathrm{d}\underbrace{x}_{\text{משתנה אינטגרציה}}=\int f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{F(x)}_{\text{קדומה}}+\underbrace{C}_{\text{קבוע}}$$

אל תכתבו אסכמת דוגמאות מוכרות:

$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{12}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \tag{13}$$

■

If you forget the C you get a C

וגם:

$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x+C$$

אבל זה נכון רק בעבור $x>0$. אם נרצה להרחיב:

$$\begin{cases} x>0 & \ln|x|=\ln x,\ (\ln|x|)'=\frac{1}{x} \\ x<0 & \ln|x|=\ln(-x),\ (\ln|x|)'=-\frac{1}{x}(-1)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

סה"כ:

$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$$

בכל תחום.

2.1 דוגמאות

$$\int(x+2)^3\,\mathrm{d}x=\frac{(x+2)^4}{4}+C \tag{14}$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C \tag{15}$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C \qquad ((a^x)'=\ln a\cdot a^x) \tag{16}$$

$$\int a^x\mathrm{d}a=\frac{a^{x+1}}{x+1}+C \qquad (x\neq -1) \tag{17}$$

"נפשות זה לחלשים!"

2.2 חוקים

ליניאריות:

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x = F+G+C, \qquad \int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x = aF(x)+C \quad (a \text{ const.})$$

טענה:

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}\int F(ax+b)+C$$

2.3 פתרון דוגמאות "קצת יותר מסובכות"

2.3.1

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = \ln(1+x^2)+C \tag{18}$$

איך? פשוט תנחש.

2.3.2

אפשר גם עם טריגו:

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

2.3.3

$$\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin 2s\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

כי למעשה $\cos 2x$ יוציא החוצה קבוע 2, ונצטרך לחלק ב־2 כדי להשמיד אותו. בהכפלה בחצי שבל מקרה יש לנו, הגענו לדרוש. יש דם דרך אחרת:

$$\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin x(\sin x)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

לכאורה, קיבלנו שתי תשובות שונות, אך ההפרש בין שתיהן הוא בדיוק קבוע:

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

2.3.4

תהיה $t(x)$ פונ', נוכל לסמן $t'(x)=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$. בשעתו, דיברנו על כך שהשינוי בציר y הוא Δt ובציר ה־x יהיה Δx. וזה לא בדיוק פורמלי להגיד שיש כאן קו שבר ואז אפשר להכפיל במכנה ולקבל $\mathrm{d}t = t'(x)\,\mathrm{d}x$. אבל trust me bro זה עובד , לדוגמה:

$$t(x)=\sin x,\ \ t'(x)=\cos x,\ \ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$$

וזה יאפשר לנו להשתמש בשיטת ההצבה.

2.4 שיטת ההצבה

שיטת ההצבה:

$$\int f(t(x))t'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

הוכחה. כאשר LHS ו־RHS אגפי המשוואה;

$$(LHS)' = f(t(x))t'(x) \tag{19}$$

$$\underbrace{(RHS)'}_{\frac{d(RHS)}{\mathrm{d}x}} = f'(t)\cdot t'(x) \tag{20}$$

■

2.4.1 דוגמה

$$\int \underbrace{\sin x}_{t} \overbrace{\underbrace{\cos x}_{t'} \,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}t} = \left[\begin{cases} t=\sin x, t'=\cos x \\ \mathrm{d}t = \cos x \,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = \int t\cdot \,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+C = \frac{\sin^2 x}{2}+C$$

2.4.2 דוג' 2

$$\int x\cdot\sqrt{5x^2+3}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} t=5x^2+3 \implies t'=10x \\ \mathrm{d}t = t'\cdot \,\mathrm{d}x = 10x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = \int \sqrt{t}\frac{1}{10}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+C = \frac{(5x^2+3)^{3/2}}{10\cdot 3/2}$$

2.4.3 דוג' 3

$$\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} t=x^2,\ t'=2x \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = \int e^t\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{t+C} = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

$$\int x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} t=\frac{1}{2}e^{x^2},\ t'=xe^{x^2} \\ \mathrm{d}t = xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = \int \,\mathrm{d}t = t+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

2.4.4 דוג' "קצת פחות טרוויאלית"

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} t=\cos x \quad t'=\sin x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|+C = -\ln|\cos x|+C$$

כיוון שפחות עובד:

$$\int \tan\,\mathrm{d}x = \left[\begin{cases} t=\tan x \\ \mathrm{d}t = \sec^2 x\,\mathrm{d}x \end{cases}\right] = ???$$

2.4.5 דוג' ∞

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{cases} t=\sqrt{x} \quad x=t^2 \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{cases}\right] = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t+1}{t+1}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C$$

2.4.6 דוג' $\infty+1$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ du = \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}, \quad \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}du = 2(u-1)du \end{cases}\right] = \int \frac{2(u-1)du}{u}$$

2.4.7 דוג' כאוטי

הצבות כאלו, לשם שינוי, לא צריך לראות:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \left[\begin{cases} x=a\cdot\tan\theta, \quad x'=\frac{1}{\cos^2\theta} \\ \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2\theta\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}\right] = \int \frac{\frac{a}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2} = \int \frac{a\cdot\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2(\tan^2\theta+1)} = \frac{1}{a}\int \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\theta+C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

2.4.8 אהההההה

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{cases} x=a\sin\theta \\ \mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{cases}\right] = \int \frac{a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}} = \int \,\mathrm{d}\theta = \theta+C = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

למעשה עברי טיפה רימה בהנחה ש־$\cos\theta<0$ (כי השורש יפלוט משהו בערך מוחלט). אם נהיה זהירים נבחר את $\arcsin\in(-\pi/2,\pi/2)$.