בדידה ~ קומבינטוריקה ~ סיכום ראשון – עקרון ההכלה וההדחה

שחר פרץ

15 למאי 2024

1 הקדמה לעקרון ההכלה וההדחה

שאלה: כמה מספרים טבעיים יש בין 1 ל־ 300 כולל שמתחלקים ב־2 או ב־3.
פתרון: מתחלקים ב־2: $\frac{300}{2} = 150$. מתחלקים ב־3: $\frac{300}{3} = 100$. אם נחבר נספור פעמיים את מה שמתחלק ב־6, לכן נוריד את כל מה שמתחלק ב־6: $\frac{300}{6} = 50$. סה"כ $150 + 100 - 50 = 200$ אפשרויות.

נקבל תרגיל היום על הכלה והדחה, ובשיעור שלאחר מכן נלמד על שובך היונים. לאחר מכן לא יהיה שיעור, אך יתווספו תרגילים על שובך היונים למודל.

2 עקרון ההכלה וההדחה

עקרון ההכלה וההדחה: כמה איברים יש באיחוד של $\bigcup_{i=1}^n A_i$?
מקרה $n = 2$: יהיה $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
מקרה $n = 3$: יהיה $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ (תציירו דיארגמת ון בשביל להבין, אני לא עומד להתעסק עם tikz).
מקרה כללי:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^n A_i\right|$$

אותו הדבר רק יותר יפה:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{\emptyset \ne I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

הערה: בעזרת עקרון ההכלה וההדחה (הידוע גם בשם עקרון הכלת ההפרדה) וכללי דה־מורגן, אפשר לחשב גם את חיתוך הקבוצות:

$$\overline{A \cup B} = (A \cup B)^C = A^c \cap B^c$$

ובפרט שווי עוצמה. ובאופן שללי [עקרון המשלים]:

$$\bigcap_{i=1}^n \overline{A}_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$$

ובפרט עוצמתן שווה. כלומר, בהינתן u עולם דיון, אז:

$$\left|\bigcap_{i=1}^n A_i^C\right| = |u| - \left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right|$$

2.1 המקרה הסימטרי

אם לכל $1 \le k \le n$ יתקיים ש־$|\bigcap_{i \in I} A_i|$ כך ש־$|I| = k$ הוא קבוע, (כלומר $|A_i \cap A_j| = |A_k \cap A_g|$), אז:

$$\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \binom{n}{k} \cdot \left|\bigcap_{j=1}^k A_j\right|$$

3 תרגילים

שאלה: כמה מספרים זרים יש ל־70 ישנם אשר גדולים ממש מ־1 וקטנים שווים ל־500.
פתרון: מכיוון ש־$70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$, העולם $u = \{2, \ldots, 500\}, |u| = 499$. נגדיר $A_1 =$ מתחלקים ב־2, $A_2 =$ מתחלקים ב־ 5, $A_3 =$מתחלקים ב־7. ידוע $|A_1| = \frac{500}{2}$, $|A_2| = 100' |A_3| = 71$, נחשב את גודל חיתוכי הזוגות, נוסיף את החיתוך של כולם וכו'.

שאלה: ידועה בתור תמורות ללא נקודות שבת / בעית הדוור המבולבל. **ניסוח ראשון:** בהינתן n מעטפות שמיועדות ל־n אנשים שונים, הדבר מעוניין לדעת כמה אפשרויות יש לחלק את המכתבים בלי שאף נמען יקבל את המיועד לו. **ניסוח שני:** כמה תמורות $f\colon [n] \to [n]$ (זיווג) כך שהן ללא נקודות שבת (i נקרא נקודת שבת אמ"מ $f_i = i$ – מלשון לשוב).

הערה: את התשובה לבעיה נסמן ב־$D(n)$, ולפעמים D_n.

תשובה: פתרון: נשתמש בעקרון המשלים. עולם דיון u =כל התמורות על $[n]$, ולכן $|u| = n!$. נגדיר לכל $1 \le i \le n$: $A_i =$ כל התמורות בהן i היא נקודת שבת. רוצים: $|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c|$. לכל $1 \le i \le n$, יתקיים $|A_i| = (n-1)!$. לכל $1 \le iMj \le n$ יתקיים $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$. באופן כללי, נמצא שאנחנו במקרה הסימטרי – אין חישבות למספר הקבוצה (זה לא משנה אם לוקחים את A_1 ו־A_2, לדוגמה, או כל קבוצה אחרת), כלומר, $\forall 1 \le k \le n . \forall I \subseteq [n] . |I| = k . |\bigcap_{i \in I} A_i| = (n-k)!$. לכן;

$$D_n = |\bigcap_{i=1}^{n} A_i^C| = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! \tag{1}$$

$$= n! + \sum_{n}^{k=1} \frac{n!}{k!} \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!} \tag{3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{4}$$

המעבר בין (1) ל־(2) נכון כי $\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot (n-k!) = \frac{n!}{k!}$. המעבר בין (2) ל־(3). המעבר בין (3) ל־(4) נכון כי בחדו"א למדנו כי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, ומכאן נובע כי:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}}_{|\ldots| < \frac{1}{(n+1)!}}$$

לכל $n \ge 2$, נקבל ש־$D(n) \approx \frac{n!}{e}$, וה"שגירה" קטנה מ־$n! \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{3}$. לכן $D(n) = \left[\frac{n!}{e}\right]$ (כאשר [] מסמן עיגול לערך הקרוב).