לינארית 1א ~ תרגיל בית 3

שחר פרץ

22 ביולי 2025

.... (1) ....

1. תהי $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ לא הפיכה, שמקיימת $\text{rank}(7I - A) = 4 \land \text{rank}(-3I - A) = 7$. נוכיח כי A ניתנת ללכסון, ונמצא את הצורה האלכסונית שלה.

   נבחין שהפולינום האופייני $|xI - A|$ בהכרח בעל שורשים ב־$x = -3, 7$ שכן $7, 4 < 10$. לכן, $-3, 7$ ע"ע של A. נבחין ש־:

$$\begin{aligned} d_7 &= \dim \text{sols}(7I - A) &&= \mathcal{N}(7I - A) &&= \dim \mathbb{R}^{10} - \text{rank}(7I - A) &&= 10 - 4 = 6 \\ d_{-3} &= \dim \text{sols}(-3I - A) &&= \mathcal{N}(-3I - A) &&= \dim \mathbb{R}^{10} - \text{rank}(-3I - A) &&= 10 - 7 = 3 \end{aligned}$$

משום שהיא איננה הפיכה, אז $\det A \neq 0$. בפרט $\text{rank}\, A < 10$, כלומר $\text{rank}(0I - A) < 10$. נניח בשלילה $\text{rank}(0I - A) < 9$, אז $d_0 > 2$ ואז $\sum d_\lambda \geq 6 + 3 + 2 = 11$ וזו סתירה לכך ש־$\sum d_\lambda = \dim V = 10$. לכן $\text{rank}(0I - A) = 9$ כלומר $d_0 = 1$. מנימוקים דומים בהכרח אין עוד ע"עים נוספים. לכן, ממשפט A לכסינה בעלת הצורה האלכסונית $\text{diag}(-3, -3, -3, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 0)$.

2. תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$. נניח $\text{tr}\, A = 0 \land \det A < 0$. נוכיח A לכסינה ו־A^2 סקלרית.

הוכחה.

$$A =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det A < 0 \implies ad - bc < 0 \implies ad < bc \quad \text{tr}\, A = 0 \implies a + d = 0 \implies a = -d$$

נציב ונקבל:

$$0 < bc + a^2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \implies p_A(x) = \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -c & x + a \end{vmatrix} = x^2 - a^2 - bc \overset{!}{=} 0 \implies x = \pm\sqrt{a^2 + bc}$$

מהיות $bc + a^2 > 0$, ישנם לפחות שני שורשים לפולינום האופייני, נסמנם $\pm\lambda$ (כאשר $\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$). המרחב האופייני של כל אחד מהם הוא לפחות 1, ואם של אחד מהם הוא יותר מאחד סכום ממדי המרחבים האופייניים גדול מ־2 ואז סתירה, לכן סך ממדי הממדים האופיינים הוא $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ כלומר A לכסינה.

עתה נפנה להראות ש־A^2 סקלרית.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & bc \\ ac & -ac \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ba & -ab \\ bc & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + b) & b(c - a) \\ c(a + b) & a(a - c) \end{pmatrix}$$

■

.... (2) ....

נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, כאשר $a \in \mathbb{R}$. נמצא את הו"ע והע"ע של A ונקבע בעבור אילו $a \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה.

.... (3) ....

יהי $B = \mathbb{C}_n[x]$. נגידר העתקה $T \colon V \to V$ ע"י $(T(p))(x) = p'(x) + p(0) \cdot x^n$. נראה שהיא איננה לכסינה.

.... (4) ....

תהי $T \colon V \to V$ ט"ל ונניח $T^2 = T$. נוכיח ש־T לכסינה.

הוכחה. שיטה מהירה: כי T נורמלית וסיימנו. שיטה מהירה אחרת: כי ריבוע בלוק ג'ורדן לא ייתן את אותו הבלוק.

שיטה נורמלית: נקבל $T(T - I) = 0$. ■

.... (5) ....

.... (6) ....

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד