אלגברה לינארית 2א 13

שחר פרץ

21 במאי 2025

מרצה: בן בסקין

0.1 צורת ג'ורדן למטריצה כללית

צורת ג'ורדן לט"ל כללית: נניח ש־$f_T(x)$ מתפצל לחלוטין. כלומר

$$f_T(x) = \prod_j (x-\lambda_j)^{n_j} = \prod_{i=1}^{k} f_{|_{n_i}}(x)$$

(הערה: u_i מ"ו למרות שהשתמשתי ב־u קטנה) כאשר u_i האי־פריקים ביחס ל־T, ו־T שמורים. היות שהם אי פריקים $f_{T|_{u_i}} = (x-\lambda)^n$. נגדיר $S = T - \lambda I$. אז u_i – T־אינ' אממ הוא S־אינ'. . אז $S_{|_{u_i}}$ היא ניל'. לכן ל־u_i יש בסיס שרשראות B שעבורו $[S_{|u_i}]_B$ מורכבת מבלוקי ג'ורדן ניל' כלומר:

$$\left[S_{|u_i}\right]_B = \begin{pmatrix} \square & & & \\ & \square & & \\ & & \ddots & \\ & & & \square \end{pmatrix}$$

כאשר כל $\square$ מהצורה $J_n(0) \in M_n(\mathbb{F})$. אז:

$$\left[T_{|u_i}\right]_B = \operatorname{diag}\{\square \dots \square\}$$

כאשר כל בלוק מהצורה $J_n(\lambda)$.

(המרצה לא כתב את זה אז אני מוסיף משהו משלי): ומכאן צורת הג'ורדן של המטריצה הזו זה פשוט בלוקים של הצמצומים בבסיס B על גבי עוד מטריצת בלוקים.

משפט 1. צורת ג'ורדן היא יחידה עבור סדר הבלוקים.

אסטרטגיית הוכחה: ניקח צורת ג'ורדן עבור $T\colon V \to V$ ונראה שהיא נקבעת מ־T, V בלבד.

הוכחה. תהא צורת ג'ורדן עבור T. קיים בסיס B שעבורו:

$$[T]_B = \operatorname{diag}\{\square_{\lambda_1} \dots \square_{\lambda_k}\}$$

כאשר $\square_{\lambda_i}$ זו דרך מוזרה לכתוב $J_k(\lambda)$. אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} u_i = \bigoplus \bar{v}_\lambda, \ \bar{v}_\lambda = \bigoplus_{i=s}^{\ell} u_i$$

כאשר $\bar{v}_\lambda$ הוא סכום של אי־פריקים שעבורם $T - \lambda I$ ניל'. תזכורת:

$$\tilde{v}_\lambda := \bar{v}_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon (T-\lambda I)^n v = 0\}$$

מה ניתן להגיד על הממדים של ה־u_i־ים שמרכיבים את $\tilde{v}_\lambda$? הממדים שלהם נקבעים ביחידות, עד כדי סדר, כי היות ש־u_i הם T־אינ' הם גם $(T-\lambda I)$־אינ', ולכן $[S_{|\tilde{v}_\lambda}]_{B_\lambda}$ היא כ'ורדן ניל' ואז:

$$\left[T_{|\tilde{v}_\lambda}\right]_{B_\lambda} = \left[S_{|\tilde{v}_\lambda}\right]_{B_\lambda}$$

■

הגיון: המרחבים v_λ נקבעים ביחידות ללא תלות בפירוק שבחרנו.

הגיון אחר: כל בלוק מורכבת מהעתקות שבהן $T - \lambda I$ ניל' (פירוק פרימרי).

הערה: בהוכחה בסיכום צריך להראות שה־span של הבלוקים הוא באמת $\tilde{v}_\lambda$.

הערה שלי/מרצה ביחס ללמה צריך את זה: כי באיזשהו מקום אם נבחר בסיסים שונים לפירוק אז יכול להיות שדברים מתחרבשים.

0.2 חרבושים של סוף נושא

הסיפור של מה שעשינו עד עכשיו: אנחנו חוקרים אופרטורים לינאריים, בצורה שתהיה נוחה להעלות את האופרטור בחזקה. הגענו למסקנה שהכי נוח כשזה לכסין. כשזה קורה, אנחנו יודעים איך לפרק. ראינו כמה אפיונים לזה – גיאומטרי, אלגברי וכו'. ניסינו לעשות מטריצה עם בלוקים על האלכסון במקום, לשם כך, נסתכל על המרחבים שרלוונטיים לבלוקים האלו בלבד. הבנו שבמקום לחקור את ה־T־אינ', נחקור את ה־S־אינ' (הניל' כמו שהגדרתי למעלה). הבנו שהם מורכבים מבלוקי ג'ורדן ניל' אלמטריים, עד לכדי סדר, ואז הרחבנו לצורה הכללית. עברנו דרך חוגים רק כדי להגיד שחוג הפולינום הוא תחום ראשי, ע"מ שנוכל להגדיר פולינום מינימלי המחלק כל פולינום אחר. לא באמת היה צריך חוגים. סתם המרצה רצה לרצוח אותנו. כל הדיבורים על פולינום מינימלי בזכות משפט קיילי־המילטון.

בסיכום אחר שיעלה למודל, [הזהרת הרבה דברים שהמרצה אמר בעפ ולא באמת הבנתי] מתחילים מלפרק את המרחב למרחבים T־ציקליים שלכולם יש פולינום אופייני משל עצמם. הראינו שאם נציב את האופרטור בפולינום האופייני של המטריצה המצורפת זה יתאפס (מה? איפה עשיתי את זה?). ומכאן הפולינום המינימלי של אופרטור הצמצום על המרחב הציקלי מחלק את הפולינום האופייני של ההעתקה שלו. המרצה: את מי איבדתי בשלב הזה? [כולנו]

עכשיו הוא אומר להראות דרך אחרת לפתח צורת ג'ורדן: בגלל ש־$\mathcal{Z}(T,V) \subseteq V$ תמ"ו, ונוכל לקחת $\mathcal{Z}(T,V) \oplus W = V$ (נסמן $\mathcal{Z}(T,V) = U$) אז $f_T(x) = f_{T_{|U}} \cdot f_{T_{|W}}$ (סוף סוף משפט טרוויאלי) והמטריצה המצורפת האקראית ההיא ש־$f_{T_{|U}}$ הפולינום המינילי גם מאפס את $T_{|U}$ והוא שווה ל־$\prod f_{T_{|U_i}}$ כלשהם. מהכיוון הזה אפשר להראות גם את קיילי המילטון, בלי לעבור דרך פיצול מקרים למשולשית/לא משולשית ומשום מה הרחבת שדות באמצע שאיכשהו גם את זה הוכחנו.

BILINEAR FORMS .... (1)

נושא חדשששששש סוף סוף הזדמנות לא להיות out of the loop לחלוטין בכל מה שקשור לקשור פולינומים בשרשראות מרחב ציקלי משהו

הגדרה 1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. פונקציונל לינארי φ מעל V הוא $\varphi\colon V \to \mathbb{F}$.

הגדרה 2. יהיו V, W מ"וים מעל $\mathbb{F}$. תבנית בי־לינארית על $V \times W$ הינה העתקה $f\colon V \times W \to \mathbb{F}$ כך ש־$\forall v_0 \in V\ \forall w_0 \in W$ כך שהעתקות $w \mapsto f(v_0, w),\ v \mapsto (v, w_0)$ הן פונקציונליים לינאריים.

משפט 2. באופן שקול: $\forall v \in V,\ w \in W,\ \alpha \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}\forall v_1, v_2 \in V\colon f(v_1 + v_2, w) &= f(v, w) + f(v_2, w)\\ \forall w_1, w_2 \in W\colon f(v, w_1, w_2) &= f(v, w_1) + f(v, w_2)\\ f(\alpha v, w) = \alpha f(v, w) &= f(v, \alpha w)\end{aligned}$$

בסופו של יום נתמקד בסוג מסויים של העתקות בילינאריות, הן מכפלות פנימיות.

בשביל העתקות n־לינאריות צריך טנסור $n-1$ ממדי. זה לא נעים ויודעים מעט מאוד על האובייקטים הללו. בפרט, בעבור העתקה בי־לינארית נראה שנוכל לייצג אותה באמצעות מטריצות. בלי טנסורים ובלגנים – שזה נחמד, וזו הסיבה שאנו מתעסקים ספציפית עם העתקות בילינאריות.

דוגמאות.

1. תבנית ה־0: $\forall v, w\colon f(v,w) = 0$
2. נגדיר $V = W = \mathbb{R}^2$, אז $f\left(\binom{x}{y}, \binom{u}{v}\right) = 2xu + 5xv - 12yu$
3. (חשוב) על $\mathbb{F}^n$

הגדרה 3. לכל שדה $\mathbb{F}$ מוגדרת התבנית הבי־לינארית הסטנדרטית היא:

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

4. יהיו $\varphi\colon V \to \mathbb{F},\ \psi\colon W \to \mathbb{F}$ פונקציונליים לינאריים $f(v,w) = \varphi(v) \cdot \psi(w)$
5. הכללה של 4: יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_k\colon V \to \mathbb{F}$ פונקציונליים לינאריים וכן $\psi_1 \ldots \psi_k\colon W \to \mathbb{F}$ פונקציונליים לינארים. אז ההעתקה הבאה בילינארית: $f(v,w) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(v)\psi_i(w)$

הרעיון: ברגע שנקבע וקטור ספציפי נקבל לינאריות של הוקטור השני.

במקרה ש־$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ לעיל, התבנית הבילינארית הסטנדרטית "משרה" את הגיאומטריה האוקלידית. כלומר $f(v,u) = 0 \iff v \perp u$.

הערה: בעתיד נראה שכל תבנית בילינארית נראית כמו 5.

משפט 3. נסמן את מרחב התבניות הבי־לינאריות על $V \times W$ בתור $B(V,W)$. זהו מ"ו מעל $\mathbb{F}$

אני ממש לא עומד להגדיר את החיבור והכפל בסקלר של המשפט הקודם כי זה טרוויאלי והמרצה כותב את זה בעיקר בשביל להטריל אותנו.

דוגמה חשובה אחרת.

משפט 4. נסמן ש־$\dim V = n,\ \dim W = m$ ותהי $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. יהי $\mathcal{A}$ בסיס ל־B, $\mathcal{B}$ בסיס ל־W ("זה $\mathcal{A}$ mathcal, אתם תסתדרו" – המרצה ברגע שיש לו שני A־ים על הלוח)

$$f(u,w) = [v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A[w]_{\mathcal{B}}$$

העתקה בילינארית.

הוכחה. נקבע v כלשהו:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A = B \in M_{1\times m},\ \ g(w) = f(v,w),\ \ g(w_1+w_2) = B[w_1+w_2]_{\mathcal{B}} = B[w_1]_{\mathcal{B}} + B[w_2]_{\mathcal{B}}$$

כנ"ל עבור כפל בסקלר. נקבע w, אז $C = A[w]_{\mathcal{B}} \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$:

$$h(v) = f(v,w)\ \ h(v) = [v]_B^T \cdot C,\ \ h(v_1+v_2) = [v_1+v_2]_{\mathcal{B}}^T = ([v_1]_{\mathcal{B}}^T + [v_2]_{\mathcal{B}}^T)C = h(v_1) + h(v_2)$$

■

בסיכום של הקורס לא הניחו שהעברת וקטור לוקטור קורדינאטות היא ט"ל מסיבה כלשהי.

הגדרה 4. בהינתן תבנית בי־לינ׳ $f\colon V\times W \to \mathbb{F}$ ונניח ש־$\mathcal{A}$ בסיס ל־V, $\mathcal{B}$ בסיס ל־W. נגדיר את המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים $\mathcal{A},\mathcal{B}$ ע"י $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כאשר $(A)_{ij} = f(v_i, w_j)$ (נסמן $\mathcal{B} = (w_i)_{i=1}^m$ $\mathcal{A} = (v_i)_{i=1}^n$)

משפט 5. $f(v,w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A[w]_B$

הוכחה. קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n,\ \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{F}$ כך ש־$v = \sum \alpha_i v_i,\ \ w = \sum b_i w_i$. כלומר:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T = (\alpha_1 \dots \alpha_n),\ \ [w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

ומכאן פשוט נזרוק אלגברה:

$$\begin{aligned}
f(v,w) =& f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,\ w\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i,\ w) \\
=& \sum_{i=1}^n \alpha_i f\left(v,\ \sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_j f(v_i, w_j) \\
=& \sum_{i,j\in[n]\times[m]} \alpha_i f(v_i,w_j)\beta_j \\
=& \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i2}, \vdots, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{im}\right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\
=& (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

נאמץ לסיכום הזה את הסימון $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ עבור המטריצה המייצגת של f בי־לינארית.

משפט 6. עם עותם (ככה המרצה כתב) סימונים כמו קודם:

$$\psi\colon B(v,w) \to M_{n\times m}(\mathbb{F}),\ \ f \mapsto [f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

אז ψ איזו׳!

הוכחה. נסמן את $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = A$ ואת $[g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = B$. אז:

- **לינאריות.**

$$(\mathcal{P}(f+g))_{ij} = (f+g)(v_i,w_j) = f(v_i,w_j)+g(v_i,w_j) = (A)_{ij}+(B)_{ij} = (\psi(f))_{ij}+(\psi(g))_{ij} \implies \psi(f+g) = \psi(f)+\psi(g)$$

באופן דומה בעבור כפל בסקלר:

$$(\psi(\alpha f))_{ij} = \alpha f(v_i,w_j) = \alpha(\psi(f))_{ij} \implies \psi(\alpha f) = \alpha\psi(f)$$

- **חח"ע.** תהי $f \in \ker\psi$, אז: $\forall i,j \in [n]\times[m] \colon f(v_i,w_j) = 0 \implies$ $\psi(f) = 0 \in M_{n\times m}$ ולכן $\forall v\in V, w\in W \colon f(v,w) = \sum_{i,j\in[n]\times[m]} \alpha_i f(v_i,w_j)\beta_j = 0$ (עם אותם הסימונים כמו קודם)
- **על.** תהי $M_{n\times m}(\mathbb{F})\mathrm{n}A$. נגדיר $f(v,w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A[w]_{\mathcal{B}}$ ואכן $f(v_i,w_j) = e_i^T A e_j = (A)_{ij}$.

■

משפט 7. יהיו V,W מ"וים מעל $\mathbb{F}$ נניח $\mathcal{A},\mathcal{A}' \subseteq V$ בסיסים של V וכן $\mathcal{B},\mathcal{B}' \subseteq W$ בסיסים של W. תהי $f \in B(V,W)$. תהי המייצגת של f לפי $\mathcal{A},\mathcal{B}$ היא A ותהי A' המייצגת בבסיסים $\mathcal{A}',\mathcal{B}'$. תהי P מטריצת המעבר מ־$\mathcal{A}$ ל־$\mathcal{A}'$ ו־Q מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$, אז $A' = P^T AQ$.

הוכחה. ידוע:

$$P[v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{A}'},\ Q[w]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'}$$

מצד אחד:

$$f(v,w) = [v]_{\mathcal{A}}^T = [v]_{\mathcal{A}}^T A[w]_{\mathcal{B}} = (P[v]_{\mathcal{A}'})^T AQ[w]_{\mathcal{B}'} = [v]_{\mathcal{A}'}^T\, P^T AQ\, [w]_{\mathcal{B}'} \implies A' = P^T AQ$$

כדרוש. ■

הגדרה 5. עבור $f \in B(V,W)$ נגדיר את $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A$ כאשר A מייצגת אותהת ביחס לבסיסים כלשהם.

משפט 8. $\operatorname{rank} f$ מוגדר היטב

הוכחה. כפל בהפיכה לא משנה את דרגת המטריצה ■

מסקנה 1. תהא $f \in B(V,W)$ ונניח $\operatorname{rank} f = r$. אז קיימים בסיסים $\mathcal{A},\mathcal{B}$ של W,V בהתאמה כך ש־$[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} I_R & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

הרעיון הוא לדרג את כל כיוון, שורות באמצעות transpose ועמודות באמצעות המטריצה השנייה. אפשר גם לקבע בסיס, ולדרג שורות ועמודות עד שיוצאים אפסים (הוכחה לא נראתה בכיתה).

"חצי השעה הזו גרמה לי לשנוא מלבנים בצורה יוקדת" – מעתה ואילך נתעסק במקרה בו $V = W$. נשתמש בבסיס יחיד.

. . . .