תרגיל בית 4 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. יהי $V = [0,1] \to \mathbb{R}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$. יהי U תת־מרחב של V שיש בו רק פונקציות מונוטוניות (שימו לב שלא כל הפונקציות המונוטוניות שייכות ל־U). הוכיחו שהמימד של U הוא לכל היותר 2.
הערה: בשאלה הזאת, הכוונה בפונקציות מונוטוניות היא פונקציות מונוטוניות חלש. כלומר פונקציה היא מונוטונית עולה אם לכל $x \le y$ מתקיים $f(x) \le f(y)$ ופונקציה היא מונוטונית יורדת אם לכל $x \le y$ מתקיים $f(x) \ge f(y)$.
<u>רמז:</u> יהיו $f_1, f_2, f_3 \in U$. הראו שקיים צירוף לינארי לא טריוויאלי $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ כך ש־$g(0) = g(1) = 0$.

2. מצאו בסיס של מרחב הפתרונות U של מערכת המשוואות הבאה

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

ב־$\mathbb{R}^5$. לאחר מכן השלימו אותו לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

3. מצאו בסיס למרחב $\{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = 0\}$ ומצאו את המימד שלו.

4. נתונים שני תתי־מרחבים של $\mathbb{R}^4$:

$$U = \operatorname{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\},\ V = \operatorname{Sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו בסיס ומימד ל־$U, V, U \cap V, U + V$. האם $U + V$ הוא סכום ישר?

5. הוכיחו/הפריכו: אם S מרחב וקטורי נוצר סופית ו־U, V, W הם תתי־מרחבים של S אז

$$\dim(U+V+W) = \dim(U) + \dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W)$$

6. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהיו U, W, W' תתי־מרחבים של V כך ש־$V = U \oplus W$ וגם $V = U \oplus W'$. הוכיחו כי

$$\dim(W \cap W') \ge \dim(V) - 2\dim(U)$$

7. נגדיר העתקה $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2c+2d)x^2 + (2c+2d)x + (a+b)$$

הוכיחו כי T היא העקתה לינארית, ומצאו את התמונה ואת הגרעין שלה.

8. תהי $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $T\left(x+y\right)=T\left(x\right)+T\left(y\right)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי T העתקה לינארית כשמסתכלים על $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$.

<u>הדרכה</u>: למעשה צריך להוכיח שלכל $q\in\mathbb{Q}$ מתקיים $T\left(qx\right)=qT\left(x\right)$. הוכיחו בשלבים: קודם עבור $q\in\mathbb{N}$, אחר כך עבור $q\in\mathbb{Z}$, ואז עבור $q=\frac{1}{m}$ עבור $m\in\mathbb{N}^{+}$, ולבסוף הוכיחו את זה עבור $q=\frac{n}{m}$ עבור $n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}^{+}$.