חדו"א ואו 7

שחר פרץ

7 בדצמבר 2025

תזכורת: משפט אבל

תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. אז קיים ויחיד $R \in [0, +\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$:

1. אם $|x-a| < R$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $|x-a| > R$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתבדר.

תזכורת: קריטריון אבל

יהיו a_n, b_n סדרות. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו־b_n מונוטונית יורדת ומתכנסת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

אבל לא נותן דרך למצוא את ה־R הזה. בשביל זה יש את המשפט הבא, שהוא יותר קונסטרקטיבי.

משפט קושי־הדמרד

משפט 1. תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נסמן $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. אז:

- אם $\omega = 0$, אז $R = +\infty$.
- אם $\omega = +\infty$, אז $R = 0$.
- אחרת $R = \frac{1}{\omega}$.

(זה ה־R היחיד מאבל)

הוכחה.

- נניח ש־$\omega = 0$. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \limsup \sqrt[n]{a_n}\,|x-a| = 0\,|x-a| = 0$$

לפי מבחן השורש, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

- נניח ש־$\omega = +\infty$. יהי $x \in \mathbb{R}$, ונניח $x \neq a$. אז באופן דומה:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} = +\infty$$

ולכן הטור מתבדר. [ידוע רק שטור הערכים המוחלטים מתבדר, כלומר הטור לכאורה יכול להתכנס אבל לא בהחלט. בטורי חזקות נובע שגם הטור הרגיל מתבדר. צ.ל. בבית שבטורי חזקות התכנסות גוררת התכנסות בהחלט]

- נניח $\omega \in (0, +\infty)$. יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח $|x-a| < \frac{1}{\omega}$. אז מנימוקים דומים:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} < 1$$

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ מתכנס. אם $|x-a| > R$ הטור מתבדר.

■

[למי שעשה בדידה 2] כל הנושא של פונקציות יוצרות – זה בדיוק טורי חזקות. הרי $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ יוצרת את a_n כאשר:

$$\exists \delta > 0.\, \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |x| < \delta \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

לנטוש את הבדידות

עתה נתחיל לדבר על פונקציות במשתנה רציף. קודם לכן – נעסוק קצת בטופולוגיה.

קצת טופולוגיה

הגדרה 1. יהי $x \in \mathbb{R}$. לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, יקרה סביבת ε של x.

הערה 1. נבחין ש־$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\}$. קוראים לזה כדור פתוח. זה פשוט המקרה החד־ממדי של כדורים.

הגדרה 2. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא $U \subseteq \mathbb{R}$, ויהי $x \in U$. אז U תקרא סיבה של x אם קיים $\varepsilon > 0$ עבורו U מכילה סביבת ε של x.

הגדרה 3. קבוצה U תקרא פתוחה כאשר היא סביבה של כל אחת מהנקודות שלה.

לדוגמה, $(0,1)$ הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה. יהי $x \in (0,1)$. נסמן $\varepsilon = \min\{x, 1-x\}$. נתבונן ב־$\varepsilon$, ידוע $x > 0 \wedge x < 1$ כלומר $\varepsilon > 0$. עוד נבחין:

$$x + \varepsilon \leq x + 1 - x = 1$$

לכן $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1)$. ■

דוגמה אחרת היא ש־$[0,1)$ קבוצה לא פתוחה.

הוכחה. נתבונן ב־0. יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב־$-\frac{\varepsilon}{2}$. אז:

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \ni -\frac{\varepsilon}{2} \notin [0,1)$$

סתירה לפתיחות. ■

למעשה, קבוצת כל הסביבות (הטופולוגיה של $\mathbb{R}$) נוצרת ע"י איחוד וחיתוך של כדורים פתוחים (הבסיס לטופולוגיה). זו קבוצה סגורה לאיחוד וחיתוך.

הגדרה 4. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא סגורה כאשר $\bar{A}$ פתוחה (עולם דיון $\mathbb{R}$).

משפט 2. A סגורה אם היא סגורה סדרתית.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח A קבוצה. תהא a_n סדרה מתכנסת. נניח $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in A$. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. נניח בשלילה $\ell \in \bar{A}$. אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$ (כי $\bar{A}$ פתוחה). קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$. בפרט $a_N \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$ בסתירה לכך ש־$a_N \in A$ ולכן $\ell \in A$.

$\Longleftarrow$ נניח ש־A סגורה סדרתית. יהי $x \in \bar{A}$. נניח בשלילה שלכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \nsubseteq \bar{A}$. לכל $n \in \mathbb{N}$, קיים $(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \cap \bar{A}$ (זה מתקיים בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{n}$). לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ וכן $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. A סגורה סדרתית, לכן $x \in A$ בסתירה. [למי שלא שם לב, בשביל הטיעון הזה צריך גם ארכימדיאניות שתלויה באקסיומת השלמות וגם את אקסיומת הבחירה]. ■

הגדרה 5. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. אז $x \in \mathbb{R}$ תקרא נקודת־סגור של A, כאשר $\forall \varepsilon > 0\colon (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ (כלומר כל סביבה של x מכילה איבר מ־A)

לדוגמה, 1 נקודת סגור של $[0,1)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $r = \min\{\varepsilon, 1\}$. נתבונן ב־$1 - \frac{r}{2}$. אז $1 \leq 1$ לכן $1 - \frac{r}{2} \geq \frac{1}{2}$. כמו כן $r \geq 0$ לכן $1 - \frac{r}{2} < 1$. מכאן ש־$1 - \frac{r}{2} \in [0,1)$. כמו כן:

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{r}{2} < 1 < 1 + \varepsilon \implies 1 - \frac{r}{2} \in [0,1) \cap (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

כנדרש. ■

משפט 3. A סגורה אמ"מ כל נקודת סגור של A נמצאת ב־A.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח A סגורה. תהא x נקודת סגור של A. נניח בשלילה ש־$x \in \bar{A}$. $\bar{A}$ פתותחה לכן $\exists \varepsilon > 0\colon (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$, כלומר $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \varnothing$ בסתירה. לכן $x \in A$.

$\Longrightarrow$ תהא $x \in \bar{A}$. מההנחה, x אינה נקודת סגור של A. אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \varnothing$, דהיינו $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$. לכן $\bar{A}$ פתוחה, כלומר A סגורה. ■

הגדרה 6. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא קומפקטית כאשר A סגורה וחסומה.

משפט 4. $A \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית אמ"מ לכל סדרה a_n, אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ל־a_n יש ת"ס מתכנסת שגבולה ב־a_n.

הגדרה 7. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא U סביבה של x. אז $U \setminus \{x\}$ נקראת סביבה נקובה של x.

הגדרה 8. תהא $U \subseteq \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ תקרא נקודת הצטברות של A כאשר לכל סביבה **נקובה** U של x, מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$.

אינטואיטיבית, אפשר להתקרב בסביבות נקובות כמה שבא לנו ל־x, אבל אסור לנו לגעת בו.

בקורס שאנו למדנו, כמעט אך ורק נעבוד עם קטעים, ולא עם קבוצות פתוחות כלליות. זה לא בחומר של הקורס.

אם נגדיר $U \subseteq \mathbb{R}$ סביבה של $+\infty$, כאשר קיים $a > 0$ כך ש־$[a, +\infty)$, ו־U סביבה של $-\infty$ כאשר קיים $a > 0$ כך ש־$(-\infty, -a] \subseteq U$, אז לכל $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, נקבל שסדרה a_n שואפת ל־ℓ כאשר לכל סביבה U של ℓ, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_n \in U$.

חומר קריאה: General Topology ~ Stephen Willard

0.0.1 מבוא – פונקציות של משתנה ממשי

סימון 1. בכל קונטקסט בפרק זה, $f\colon A \to \mathbb{R}$ עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ כלשהו.

הגדרה 9. התמונה של f היא $\operatorname{Im} f := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A\colon f(a) = x\}$

הגדרה 10. התחום של f הוא $\operatorname{dom} f = A$.

ניתן להגדיר מנה, כפל, מכפלה, חיבור, חיסור, כפל בקבוע של פונקציות, וכו'.

הגדרה 11. f תקרא חסומה כאשר $\operatorname{Im} f$ חסומה.

הגדרה 12. f תקרא מונוטונית עולה כאשר $\forall x \leq y \in A\colon f(x) \leq f(y)$

בדומה לסדרות, נגדיר עולה ממש, יורדת ויורדת ממש.

תרגיל 1. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהאנה $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ חסומות. אז $f + g$ חסומה ומתקיים:

$$\inf f + \inf g \leq \inf(f + g) \leq \sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

הוכחה. לכל $x \in A$, מתקיים $f(x) \leq \sup f \wedge g(x) \leq \sup g$. לכן $f(n) + g(n) \leq \sup f + \sup g$ ומכאן $\sup f + \sup g$ חסם מלעיל של $f + g$, ובפרט $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ (כי הסופרמום הוא חסם מלעיל מינימלי). האינפימום בדומה, והשוויון האמצעי ידוע על קבוצות. והשטיק של החסימה זו בדיחה שהמרצה לא טרח להוכיח. ∎

השוויונות לא הדוקים. לדוגמה $f(x) = \sin x, g(x) = -\sin x$, אז $\sup f + \sup g = 2$ בזמן ש־$\sup(f + g) = 0$.

גבולות של פונקציות

הגדרה 13. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A, ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של f ב־x_0 כאשר:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A\colon 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

זה לא עובד במובן הרחב. למעשה נצטרך לקחת כל קומבינציה של ℓ, x_0 כאשר אחד באינסוף, אחד ממשי, והאחד במינוס אינסוף, וזה יגרור אותנו ל־9 הגדרות.

לקבוצת הטבעיים של נקודת הצטברות אחת, היא $+\infty$. למעשה סדרות זה מקרה פרטי כאשר $A = \mathbb{N}$.

למה דווקא נקודות הצטברות? כי ככה אנחנו לא מגדירים דברים עבור "קפיצות" ודברים מוזרים כאלו. נגיד עבור $[0, 1] \cup \{2\}$, לא נתעסק עם 2, למרות שהיא נקודת סגור.

דוגמה. נגדיר $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 8 & x = 2 \end{cases}$$

הוכיחו כי 4 הוא גבול של f ב־2.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. נחפש δ בטיוטה. [טיוטה: בסוף נרצה ש־$\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$. נגרר $|x - 2|\,|x + 2| < \varepsilon$. נרצה $|x - 2|\,|x + 2| < \delta < \varepsilon$. נבחר $\delta < 1$ (כלומר ניקח מינימום בסוף), אז ידוע $2 - \delta < x < 2 + \delta$ כלומר $4 - \delta < x + 2 < 4 + \delta$. ואז $|x + 2| < 5$. נסכם] נתבונן ב־$\delta - \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח $0 < |x - 2| < \delta$. אז $x \neq 2$ ולכן $f(x) - x^2$. נקבל:

$$|f(x) - 4| = \left|x^2 - 4\right| = |x - 2|\,|x + 2| < |x + 2|\,\delta$$

ידוע $1 \leq 2 - \delta < x < 2 + \delta \leq 3$ לכן $0 < x + 2 \leq 5$. מכאן $|x + 2|\,\delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$ לכן $|f(x) - 4|$. ∎

משפט 5. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודות הצטברות של A. יהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. אם ℓ גבול של f ב־x_0 וגם m גבול של f ב־x_0 אז $\ell = m$.

לבית: להשלים 8 הגדרות נוספות.

דוגמה: פונקציית דיריכלה. חשובה בעיקר בגלל שהיא דוגמה נגדית ממש כיפית.

$$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

[למי שעשה בדידה] זה האינדיקטור של $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$.

משפט 6. לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, אין ל־D גבול ב־x_0.

הוכחה. נתבונן ב־$\varepsilon = \frac{1}{2}$. יהי $\delta > 0$. בקטע $(x_0, x_0+\delta)$, יש מספר רציונלי x ומספר אי־רציונלי y. אז:

$$1 = |D(x) - D(y)| \leq |D(x) - \ell| + |D(y) - \ell| \leq 0.5$$

לכן $|D(x) - \ell| \geq 0.5$ או ש־$|D(y) - \ell| \geq 0.5$, כלומר ℓ אינו גבול של D ב־x_0. ■

תרגיל 2. נגדיר $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = xD$ לכל $x \in \mathbb{R}$. כאשר D פונקציית דיאיכלה. הראו כי ל־f יש גבול ב־x_0 אמ"מ $x_0 = 0$

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח $x_0 = 0$. יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב־$\delta = \varepsilon$. יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח $0 < |x - 0| < \delta$. ידוע $|D(x)| \leq 1$ לכן $|f(x) - 0| = |xD(x)| = |x|\,|D(x)| < \delta \cdot 1 = \varepsilon$. לכן $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

$\Longleftarrow$ נניח $x_0 \neq 0$. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. נתבונן ב־$\varepsilon = \frac{|x_0|}{2}$. $x_0 \neq 0$ לכן $\varepsilon > 0$. יהי $\delta > 0$. ב־$(x_0, x_0+\delta)$ יש x רציונלי ו־y אי־רציונלי.

$$|x| = |f(y) - f(x)| \leq |f(y) - \ell| + |f(x) - \ell|$$

בקטע $(x_0 - \delta, x_0)$ יש a רציונלי ו־b אי־רציונלי. אז:

$$|a| = |f(b) - f(a)| \leq |f(b) - \ell| + |f(a) - \ell|$$

מתקיים ש־$\max\{|a|, |x|\} \geq |x_0|$ ולכן:

$$\max\{|(|f(a) - \ell), |f(b) - \ell|, |f(a) - \ell|, |f(y) - \ell|\} \geq \frac{|x_0|}{2}$$

ולכן ℓ אינו גבול של f ב־x_0. ■

אם צריך דוגמה נגדית יותר עדינה מדיריכלה הדי כיאוטית, הכירו את פונקציית רימן.

הגדרה 14. פונקציית רימן $R \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_x} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כאשר m_x, n_x הפירוק היחיד של $x \in \mathbb{Q}$ כך ש־$x = \frac{m}{n}$ וגם $\gcd(m,n) = 1$.

משפט 7. לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$.

הוכחה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. ללא הגבלת הכלליות $x_0 \in [0,1]$ (בשאר התחומים היא מתנהגת אותו הדבר). יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{N} < \varepsilon$. נבחין ש־:

$$\left\{x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \mid R(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \subseteq \underbrace{\left\{\frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z}, m \leq n \leq N\right\}}_{A}$$

(בקבוצה מימין לא דרשנו שהשברים יהיו מצומצמים). הקבוצה A סופית! כן נוכל לסמן $\delta = \min\{|x_0 - x| : \in A\}$, והמינימום אכן יהיה קיים. אז $\delta > 0$. נתבונן ב־δ. יהי $x \in [0,1]$, נניח $0 < |x - x_0| < \delta$. אז $x \notin A$ ולכן $|R(x) - 0| < \frac{1}{N} = \varepsilon$. לכן $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$. ■

משפט 8. תהא $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי עבור כל סדרה a_n המקיימת:

1. $\operatorname{Im} a_n \subseteq A$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq x_0$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

את $f(a_n)$ מתכנסת, אז קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך שלכל סדרה a_n המקיימת את 1-3, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

"קרני משהו מטריד אותך?" "בעיקר תרגיל בית 5. אבל כבר ביקשתי הארכה ל־3 ו־4 אז לא נעים לי".

כלומר – אם כל הסדרות שמקיימות את 1-3 מתכנסות לאנשהו, אז כולן מתכנסות לאותו הגבול.

"נקבובית כזו". "סדרה נקובה!".

הוכחה. תהאנה a_n, b_n סדרות המקיימות את 1-3. מההנחה $f(a_n)$ מתכנסת, ונסמן את גבולה ב־ℓ. באופן דומה $m =: f(b_n)$. נגדיר סדרה:

$$c_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ b_{\frac{n-1}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחין ש־c_n מקיימת את 1-3. לכן $f(c_n)$ מתכנסת, ממשפט הכיסוי $\mathcal{P}(c_n) = \{\ell, m\}$, והיא מתכנסת, כלומר $m = \ell$. ■

קיטריון היינה

⟨ ערימה של אנשים הוגים "היינה" במבטא גרמני מזויף כבד ⟩

משפט 9. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. תהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. ל־f יש גבול ב־x_0 אמ"מ לכל סדרה a_n, אם a_n מקיימת את 1-3 מהטענה הקודמת, $f(a_n)$ מתכנסת.

מה זה אומר? גם עבור פונקציות במשתנה רציף, הסדרות מגלמות בתוכן את מה שאנחנו צריכים כדי להגדיר ולעבוד עם גבולות. המשפט הראשון אומר לנו שכל הסיפור הזה לא תלוי בנציג, מה שמאפשר לנו לטעון שהגבול הזה יחיד.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח של־f יש גבול ב־x_0, ונסמנו ℓ. תהא a_n סדרה. נניח כי: (1) $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\in A$ (2) $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\neq x_0$ (3) $\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta>0$ כך ש־$\forall x\in A\colon\ |x-x_0|\in(0,\delta)\implies|f(x)-\ell|<\varepsilon$. לכן קיים $N\in\mathbb{N}$, כך שלכל $n\geq N$, $|a_n-x_0|<\delta$. נתבונן ב־N הזה. יהי $n\geq N$. אז $a_m\in A$ וגם $a_m\neq x_0$. ידוע $0<|a_n-x_0|<\delta$ לכן $|f(a_n)-\ell|<\varepsilon$ סיימנו.

$\Longrightarrow$ נניח כי לכל סדרה a_n המקיימת 1-3, אז $f(a_n)$ מתכנסת. מהטענה הקודמת, קיים $\ell\in\mathbb{R}$ כך שכל הסדרות המצחיקות האלו מקיימות $f(a_n)\to\ell$. נניח בשלילה שהגבול $\lim_{x\to x_0}f(x_0)\neq\ell$. אז קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים $x\in A$ כך ש־$0<|x-x_0|<\delta$, וגם $|f(n)-\ell|\geq\varepsilon$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $a_n\in A$ כך ש־$(0,\frac{1}{n})$ $|a_n-x_0|\in$ וגם $|f(a_n)-\ell|\geq\varepsilon$. לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a_n\in A\wedge a_n\neq a_0$. כמו כן $\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$. אבל $\forall n\in\mathbb{N}\colon\ |f(a_n)-\ell|\geq\varepsilon$. לכן $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\neq\ell$ וסתירה. ■

הערה 2. זה עובד גם במובן הרחב. המרצה לא טרח להוכיח.

זו דרך נוחה להראות שלפונקציה אין גבול בנקודה.

תרגיל 3. נגדיר $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$. אז ל־f אין גבול ב־0.

הוכחה. נגדיר:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$$

אז לכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. עוד נבחין ש־$a_n\neq 0$ ו־$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. אבל, $f(a_n)=(-1)^n\cdot n$, וזו סדרה חסרת גבולות, אפילו במובן הרחב. ■

תרגיל 4. נגדיר $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. ל־f אין גבול ב־0

הוכחה. נגדיר $a_n=\frac{1}{\pi n}$. נגדיר $b_n=\frac{1}{\pi n+\frac{\pi}{2}}$. הן מקיימות את 1-3. נבחין ש־$f(a_n)=0\wedge f(b_n)=(-1)^n$ וזה סתירה. ■