אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 10

~~1.~~ עבור אילו ערכי $a,b,c\in\mathbb{Q}$ המטריצה $\begin{pmatrix}1 & c & 4\\ 0 & 2 & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ לכסינה מעל $\mathbb{Q}$?

~~2.~~ תהי $B\in M_n(F)$ ו־ $a_0,\dots,a_n\in F$. נניח שמתקיים $a_nB^n+\cdots+a_1B+a_0I=0$.

(א) הוכיחו כי אם λ ערך עצמי של B, אז $a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$.

(ב) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה המקיימת $A^2=4A-3I$. הוכיחו כי אם $\lambda\in\mathbb{R}$ ערך עצמי של A אז $\lambda=1$ או $\lambda=3$.

~~3.~~ נאמר ש־ λ הוא ערך עצמי שמאלי של $A\in M_n(F)$ אם קיים $0\neq v\in F^n$ כך ש־ $v^tA=\lambda v^t$, ו־ v כנ"ל ייקרא וקטור עצמי שמאלי (או nיה עצמית שמאלית).

~~(א)~~ הוכיחו או הפריכו: λ הוא ערך עצמי אם ורק אם הוא ערך עצמי שמאלי.

~~(ב)~~ הוכיחו או הפריכו: v הוא וקטור עצמי אם ורק אם הוא וקטור עצמי שמאלי.

~~4.~~ יהי V מ"ו מעל שדה F, יהיו $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות ו־ λ_T,λ_S ע"ע של T,S בהתאמה. הוכיחו או הפריכו:

~~(א)~~ $\lambda_T+\lambda_S$ הוא ע"ע של $T+S$.

~~(ב)~~ $\lambda_T\lambda_S$ הוא ע"ע של $T\circ S$.

~~(ג)~~ λ_T^2 הוא ע"ע של $T^2:=T\circ T$.

~~(ד)~~ $\alpha\lambda_T$ ע"ע של αT לכל $\alpha\in F$.

~~5.~~ יהי $V=\mathbb{C}_n\left[x\right]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n. נגדיר העתקה $T:V\to V$ על ידי $\left(T(p)\right)(x)=p'(x)+p(0)\cdot x^n$. הוכיחו כי העתקה זו לכסינה.

~~6.~~ נגדיר את ההעתקה $T:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ הנתונה על ידי $T(A)=A^t$. הראו כי T לכסינה (רמז: אל תנסו למצוא את הפולינום האופייני של T. מצאו את המרחבים העצמיים של T והראו כי ניתן למצוא ל־$M_n(\mathbb{C})$ בסיס של ו"ע ישירות).

7. עבור המטריצות הבאות קבעו אם הן נורמליות, הרמיטיות(כלומר צמודות לעצמן) או אוניטריות (יכול להיות יותר מאופציה אחת) ואם אפשרי, מצאו בסיס אורתונורמלי מלכסן.

~~(א)~~ $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

~~(ב)~~ $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

~~(ג)~~ $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

~~8.~~ תהי $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ מטריצה עם ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ כך ש $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_n|=1$. האם A אוניטרית?