חדו"א 1א ~ תרגיל בית 8

שחר פרץ

19 בינואר 2025

(1)

נחשב את הגבולות הבאים:

(ב)

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1983}-(1+1983x)}{x^2+x^{1983}}=\lim_{x\to0}\frac{-1+1983x+\sum_{i=0}^{1983}\binom{i}{1983}x^i}{x^{1983}+x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-1^{-1982}+1983x^{-1981}+\sum_{i=0}^{1982}\binom{i}{1983}x^{i-1983}}{1+x^{-1981}}=\frac{1}{1}=1$$

(ד)

$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left((x-1)\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)+\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\cancel{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}\right)=0\cdot0+\frac{2}{\pi}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$

(ו)

$$0=\lim_{x\to0}x=\lim_{x\to0}x\sqrt{-1+2}<\lim_{x\to0}x\sqrt{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2}<\lim_{x\to0}x\sqrt{1+2}=\lim_{x\to0}\sqrt{3}x=0$$

סה"כ מסנדוויץ' הגבול הוא 0.

(ח)

$$1=\frac{1}{1}=\frac{\cancel{\frac{1}{x}}}{1-\cancel{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1}<\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}<\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\cancel{\frac{1}{x}}}{1-\cancel{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1}=1$$

סה"כ מסנדוויץ' הגבול הוא 1.

(ט) יהי $a>0$. נמצא את הגבול:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$$

ראה סעיף י"ח

(י) יהיו $a,b>0$. נתבונן בגבול:

$$\frac{b}{a}=\lim_{x\to0}\frac{b\cancel{x}}{a\cancel{x}}-\cancel{\lim_{x\to0}x}=\lim_{x\to0}\frac{bx-0.5x^2}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{b}{x}-\frac{1}{2}\right)<\lim_{x\to0}\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{b}{x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{bx+0.5x^2}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{b\cancel{x}}{a\cancel{x}}+\cancel{\lim_{x\to0}x}=\frac{b}{a}$$

סה"כ מסנדוויץ' סיימנו.

(יב)

$$\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\log\left((\sin x)^{\frac{1}{\log x}}\right)}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\log\sin x}{\log x}}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\log\sin x}{\log x}}=\cdots$$

נפנה לחשב את הגבול למעלה בנפרד:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x\sin x}{\log x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}+\log\cos x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\sin x+\lim_{x\to 0^+}\log\cos x=0+\log(1)=0$$

סה"כ נקבל שהגבול כולו שווה ל־:

$$\cdots=e^0=1$$

(יד)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^4}}}}{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1$$

(טז) ניעזר בזהות הטריגונומטרית $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin x\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{2\sin^2 x\cdot\cos x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\cdot\sin x}{4\cos^2 x\cdot\sin x-2\sin^3 x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos^2 x\sin x}{\cos^2 x\sin x}-\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x\cdot\sin x}\right)^{-1}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\left(\lim_{x\to 0}2\frac{\cancel{\cos^2 x\sin x}}{\cancel{\cos^2 x\sin x}}\right)+\left(\lim_{x\to 0}\tan^2 x\cdot\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right)\right)^{-1}=\frac{3}{2}+(2+0\cdot 1)^{-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

(יח) יהי $a>0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln a\cdot a^x-0}{1}=\ln a$$

(2)

תהיינה $x_0\neq x_1$ שתי נקודות. נמצא פונקציה $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הרציפה בדיוק ב־x_0,x_1.

הוכחה. יהיו x_0,x_1 כלשהם. משום שנתון $x_0\neq x_1$, בהכרח קיימות סביבות δ_0 ו־δ_1 ל־x_0 ו־x_1 בהתאמה בינהן החיתוך זר (כלומר $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\cap(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)=\varnothing$). נגדיר את הפונקציה f הבאה:

$$f=\begin{cases}D(x)(x-x_0) & x\in(x_0-\delta_0,x+\delta_0)\\ D(x)(x-x_1) & x\in(x_1-\delta_1,x+\delta_1)\\ D(x) & \text{else}\end{cases}$$

נוכיח שהיא מקיימת את הדרוש.

- **רציפה ב־x_0:** הוכחנו ש־$D(x)\cdot x$ רציפה ב־0. מהזזת פונקציות $D(x)(x-x_0)$ רציפה ב־x_0. כלומר היא רציפה בסביבת δ קטן ככל רצוננו ובפרט קטן מ־δ_0 סביב x_0, וסה"כ גם f רציפה ב־x_0 כדרוש.
- **רציפה ב־x_1:** כבר הוכחנו.
- **לא רציפה ב־$\{x_0,x_1\}$ $x\notin$:** עבור x שנמצא בסביבות δ_1,δ_0 של x_1,x_0 בהתאמה, הוכחנו זאת בכיתה כאשר דיברנו על $D(x)x$. כנ"ל בעבור x מחוץ לסביבות ש־f מוגדרת בסביבתו כ־$D(x)$. נצטרך להתעסק ספציפית עם $x=x_0-\delta_0,x_1+\delta_1$, וכו' (קצוות הקטעים) משום ש־f אינה מוגדרת להיות פונקציה שאנו מכירים בסביבת x. נבחין שהגבול מימין ל־x לא קיים במקרה זה, שכן $D(x)$ חסרת גבולות חד־צדדיים בשני צידיה, ו־f מוגדרת להיות $D(x)$ בסביבה חד־כיוונית כלשהי של x.

סה"כ הראינו שהפונקציה מקיימת את הדרוש. ■

(3)

נוכיח ונפריך את הטענות הבאות:

(א) נפריך את שתי הטענות הבאות:

- אם f,g לא רציפות ב־x_0, אז $f+g$ אינה רציפה ב־x_0.

הפרכה. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f = D(x) \quad g = -D(x)$$

בשיעור הראינו ש־f, g אינן רציפות באף נקודה ובפרט ב־x_0. אך $f+g=0$ פונקציה קבועה שרציפה בכל נקודה ובפרט ב־x_0. סה"כ סתירה למשפט. ■

- אם f, g לא רציפות ב־x_0, אז $f \cdot g$ אינה רציפה ב־x_0.

הפרכה. נסתכל על הפונקציה הבאה:

$$f = D(x) = I_{\mathbb{Q}} \quad g = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

כאשר I_X האינדיקטור של הקבוצה X ב־$\mathbb{R}$. נבחין שבכל x מתקיים $g(x) \neq 0 \iff f(x) = 0$, כלומר $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$, ומכאן ש־$(f \cdot g)(x) = 0$ כלומר $f \cdot g$ פונקציה קבועה ב־0. ידוע מההרצאה ש־f לא רציפה בשום נקודה, וההוכחה על g זהה. סה"כ סתירה למשפט משום שהפונקציה הקבועה רציפה בכל נקודה ובפרט ב־x_0. ■

(ב) אם f רציפה בנק' x_0 ו־g אינה רציפה ב־x_0, אז $f+g, f \cdot g$ אינן רציפות ב־x_0.

הוכחה. בנקודות מבודדות הטענה מתקיימת באופן ריק. בנקודה x_0 שאינה מבודדת, כלומר f מוגדרת בסביבתה, נפריד את הרציפות. משום ש־g אינה רציפה ב־x_0, זוהי נקודת אי־רציפות סליקה, או מסוג כלשהו. בהינתן $+$ בה"כ פעולה מחבורת החיבור או מחבורת הכפל ב־$\mathbb{R}$:

- אם זוהי נקודת אי־רציפות סליקה, נקבל בקלות, אז $\lim_{x \to x_0} g(x) = z \neq g(x_0)$ כלשהו, ואז $\lim_{x \to x_0}(f+g)(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = x_0 + z \neq x_0 + x_1$ וסיימנו.
- אם זו נקודת אי־רציפות מסוג ראשון או שני, הגבול $\lim_{x \to x_0} g(x)$ אינו קיים. משום שהנתון הגבול $\lim_{x \to x_0} f(x)$ קיים ושווה ל־$f(x_0)$, מאריתמטיקת גבולות בהכרח $g(x)$ קיים, שכן אחרת:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x) - f(x)) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) - \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$$

כאשר השוויון $\stackrel{!}{=}$ נכון משום ששני הגבולות שמימנו מוגדרים בהתאם לנתון / הנחה בשלילה. מכאן $\lim_{x \to x_0} g(x)$ גבול שקיים וסתירה.

■

(ג) אם $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז היא משיגה ערך מקסימלי/מינימלי ב־$\mathbb{R}$.

הפרכה. נתבונן בפונקציה $f(x) = \arctan x \sin x$. ידוע $\arctan$ פונקציה מונוטונית עולה ממש וחסומה (ב־$\pm\frac{\pi}{2}$) ב־$\mathbb{R}$. מכאן שאין לה מקסימום, כי אם x מקסימום אז $\arctan(x+1) > \arctan(x)$ ומכאן $x+1$ מקסימום – סתירה, בעבור מינימום $x-1$ באופן דומה (ממונוטוניות עולה). עוד ידוע ש־$\tan$ רציפה ומכאן ש־$\arctan$ רציפה (הופכית רציפה היא רציפה) וסה"כ $\arctan$ חסומה ורציפה, אך ללא מקסימום או מינימום. ■

. . . . (4) . . . .

תהי f פונקציה רציפה ב־$[0,1]$ המקיימת $f(x) > x$. נוכיח קיום $h > 0$ כך ש־$f(x) > x + h$ לכל x בתחום ההגדרה.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $g(x) = f(x) - x$. ידוע ש־$g(x)$ רציפה ומוגדרת בקטע סגור, ולכן ממשפט ווירשטראס היא חסומה ומקבלת את חסמיה, ואת המינימום נסמן m. עוד ידוע $g(x) = f(x) - x > 0$ ומכאן ש־$m > 0$ (כי קיים x כך ש־$f(x) = m$ כי f מקבלת את חסמיה, ומכאן $m = f(x) > 0$ וסיימנו). מהיותו מינימום, $g(x) \geq m$. נגדיר $h = \frac{m}{2}$.

$$f(x) - x = g(x) \geq m > h \implies f(x) > x + h$$

משום ש־$m > 0$ גם $h = \frac{m}{2} > 0$. סה"כ מצאנו h מתאים. ■

. . . . (5) . . . .

(א) נבנה פונקציה $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקבלת כל ערך ב־$\mathbb{R}$ שלוש פעמים.

בנייה. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f = \begin{cases} x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor & x \bmod 3 \in [2,3] \uplus [0,1) \\ 2 - x + 4\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor & x \bmod 3 \in [1,2) \end{cases}$$

נוכיח שהיא מקיימת את הדרוש. רציפות לכל $x \not\equiv 1, 2$ טרוויאלית כי x ו־$\lfloor x \rfloor$ רציפות, ולכן גם כפלן והרכבתן. בקצוות בין חיבור הקטעים ניאלץ להוכיח שהפונקציה אכן רציפה.

- עבור $x \equiv 1$, נראה שהיא רציפה: משמאל, רציפה בגלל ש־$\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rceil 4 + x - 2$ רציפה, ומימין נצטרך להראות ידנית. נבחין ש־$\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x-1}{3}$ (בדיוק בגלל ש־$x \equiv_3 1$).

$$\lim_{z\to x^-} f(z) = f(x) = 2 - x + 4\left\lceil \frac{x+1}{3} \right\rceil = 2 - x + 4 \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{6-3x+4x-4}{3} = \frac{x+2}{3}$$

$$\lim_{z\to x^+} f(z) = x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = x - 2 \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{3x-2x+2}{3} = \frac{x+2}{3}$$

מטרנזטיביות הראינו את הדרוש.

- אם $x \equiv 2$, נקבל הוכחה דומה מהכיוון השני: נבחין ש־$\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x+1}{3}$ (כי $x \equiv 2$). ואז נקבל:

$$\lim_{z\to x^+} f(z) = f(x) = x - 2\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = x - 2\frac{x+1}{3} = \frac{3x-2x-2}{3} = \frac{x-2}{3}$$

והגבול מהצד השני:

$$\lim_{z\to x^-} f(z) = 2 - x + 4\left\lceil \frac{x+1}{3} \right\rceil = 2 - x + 4 \cdot \frac{x-2}{3} = \frac{6-3x+4x-4}{3} = \frac{x-2}{3} = f(x)$$

סה"כ משני הכיוונים הגבול הוא ערך הפונקציה, כלומר, ממשפט, גבולה הוא ערך הפונקציה, ולכן היא רציפה. קל לראות שהיא מקבלת שלוש פעמים: משום שהיא פונקציה רציפה עם גבולות $\infty, -\infty+$, מערך הביניים איבר r יתקבל לפחות פעם אחת ע"י x. נבחין שבפעם הראשונה ש־r, $f(x) = f(x+2) = f(x+4)$ (כי בפעם הראשונה נקבל $x \bmod 3 \in [0,1)$). ■

(ב) נוכיח אי־קיום פונקציה רציפה המקבלת כל ערך ב־$\mathbb{R}$ בדיוק פעמיים.

הוכחה. נניח בשלילה קיום $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה כך ש־$\forall r \in \mathbb{R}.\ \exists!(x_0,x_1) \in \mathbb{R}^2\colon f(x_1) = f(x_0) = r$. נתחיל מלהוכיח את הלמה הבאה: פונקציה רציפה f כלשהי לא יכולה לשכן קרן בתוך קטע פתוח, כלומר בהינתן $[a,b]$ כלשהם וקרן $[z,\infty)$ או $(\infty,z]$ כלשהי, בהכרח קיים x בקרן כך ש־$x \notin f([a,b])$. ההוכחה פשוטה: הפונקציה f רציפה ב־(a,b) ובעלת גבולות סופיים בקצוות (מרציפות גם־כן), ולכן ממשפט ויראשטראס f חסומה ב־$[a,b]$, דהיינו $f([a,b])$ הינו קטע סגור, ובפרט בהכרח אינו שווה לקרן, כלומר אכן קיים x בקרן.

נתבונן ב־$r=0$. נניח ש־x_0,x_1 המתאימים לו ובה"כ $x_0 < x_1$. נסמן $x_3 = \frac{x_0+x_1}{2}$, ובה"כ $f(x_3) < 0$ (אחרת ההוכחה זהה אך הפוכה באי־השוויונות). מהלמה, נתבונן ב־$x_2 := x_1 + a$, ובה"כ $f(x_2) < 0$ (זאת משום שאם לא קיים a מתאים כזה, נוכל לבחור $x_2 = x_0 - a$ עבור a אחר, ולפי הלמה בהכרח הקרן $[0,\infty)$ מכילה איבר מחוץ ל־(x_0,x_1) כלומר אכן קיים a מתאים. מקרה זה בו $x_2 < x_0$ לא שובר את ההוכחה). סה"כ יש לנו מספרים $x_0 < x_3 < x_1 < x_2$.

משום ש־$f(x_0) = f(x_1)$, בהכרח $(f(x_3), f(x_1)) = (f(x_3), f(x_1))$ ובגלל ש־$f(x_2) < f(x_1) \wedge f(x_3) < f(x_1)$, בהכרח $(f(x_3), f(x_1) \cap (f(x_2), f(x_1)) \neq \varnothing$. סה"כ קיים $y \in (f(x_3), f(x_1)) \cap (f(x_2), f(x_1)) \cap (f(x_3), f(x_0))$.

ממשפט ערך הביניים f מקיימת את תכונת דרבו.

- **על $\boldsymbol{(f(x_3), f(x_1))}$:** בהכרח קיים $z_1 \in (x_3, x_1)$ כך ש־$f(z) = y$.
- **על $\boldsymbol{(f(x_3), f(x_0))}$:** בהכרח קיים $z_2 \in (x_3, x_0)$ כך ש־$f(z) = y$.
- **על $\boldsymbol{(f(x_2), f(x_1))}$:** בהכרח קיים $z_3 \in (x_2, x_1)$ כך ש־$f(z) = y$.

משום ש־(x_3,x_1), (x_3,x_0) ו־(x_2,x_1) זרים בזוגות, סה"כ z_1,z_2,z_3 שונים בזוגות. כלומר מצאנו שלושה מספרים שונים עבורם f מחזירה את y, בסתירה לכך שקיימים בדיוק שניים. ■

. . . . (6) . . . .

(א) תהי $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה עם $f(0) = f(1)$. נוכיח שמשוואה $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ יש פתרון $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

הוכחה. נסמן $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. נבחין:

$$g(0) = f(0) - f(0.5) = f(1) - f(0.5) \qquad g(0.5) = f(0.5) - f(1) \qquad \implies g(0) = -g(0.5)$$

נפצל למקרים.

- אם $g(0) = 0$ אז $g(0) = f(0) - f(0.5) = 0$ כלומר $f(0) = f(0.5)$ וסיימנו (כי $x \in [0, 0.5]$)
- אחרת $g(0) \neq 0$ ובה"כ $g(0) > 0$ ואז $g(0.5) = -g(0) < 0$, כלומר ממשפט ערך הביניים קיים $x \in (0, 0.5)$ כך ש־$g(x) = 0$ (כי $\{0\} \subsetneq (g(0), g(0.5)) \ni 0$). נבחין כי אז $f(x) - f(x+0.5) = 0$ דהיינו $f(x) = f(x+0.5)$ וסיימנו.

כנדרש בכל המקרים. ■

(ב) יהי $a_1, a_2, a_3 > 0$ ו־$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ מספרים כלשהם. נראה שלמשוואה הבאה בדיוק שני פתרונות:

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$$

הוכחה. נבחין שבהכרח $x \neq \lambda_i$, ולכן נוכל להכפיל את הסיפור ולקבל:

$$f(x) := (x-\lambda_2)(x-\lambda_3)a_1 + (x-\lambda_3)(x-\lambda_1)a_2 + (x-\lambda_2)(x-\lambda_1)a_3 = 0$$

לאחר צמצום:

$$\overbrace{(a_1+a_2+a_3)}^{\alpha} x^2 - \overbrace{(a_1(\lambda_2+\lambda_3) + a_2(\lambda_3+\lambda_1) + a_3(\lambda_1+\lambda_2))}^{\beta} x + \overbrace{(\lambda_2\lambda_3 a_1 + \lambda_3\lambda_1 a_2 + \lambda_2\lambda_1 a_3)}^{\gamma} 1 = 0$$

זוהי משוואה מהצורה $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$, ולפולינום ממעלה שנייה יש לכל היותר שני שורשים.

עתה נוכיח קיום שורשים כלשהם. נתבונן בגבולות הבאים: יהי $i \in [3]$

$$\lim_{x\to\lambda_i^\pm} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to\lambda_i^\pm} \frac{a_1}{x-\lambda_1} + \lim_{x\to\lambda_i^\pm} \frac{a_2}{\lambda_2} + \lim_{x\to\lambda_i^\pm} \frac{a_3}{\lambda_3} = a + b + \lim_{x\to\lambda_i^\pm} \frac{a_i}{x-\lambda_i} = a + b + \pm\infty = \pm\infty$$

כאשר a, b ממשיים כלשהם תוצאות שארית החלוקה (כי $\lambda_i \neq \lambda_j$ ל־$i \neq j$ שונים). מכאן שלכל $i \in [3]$, קיימת סביבת δ_i נקובה של λ_i בה מימין $f(x)$ גדול ככל רצוננו, ומשמאל $f(x)$ קטן ככל רצוננו. כלומר נוכל לבחור:

$$x_1^+ \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1) \quad x_1^- \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2) \quad x_2^+ \in (\lambda_2, \lambda_2 + \delta_2) \quad x_2^- \in (\lambda_3 - \delta_3, \lambda_3)$$

כך ש־$f(x_1^-), f(x_2^-) < 0 \wedge f(x_2^-), f(x_2^+) > 0$. ממשפט ערך הביניים קיימים $c_1 \in (x_1^-, x_1^+)$ ו־$c_2 \in (x_2^-, x_2^+)$, עבורם $f(c_1), f(c_2) = 0$. סה"כ יש שני שורשים (שונים) ל־0, והוכחנו שישנם לכל היותר שני שורשים, כלומר יש בדיוק שני פתרונות ל־$f(x) = 0$ כנדרש.

■

(7)

נתונה $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ רציפה. נוכיח שלכל $n \in \mathbb{N}$ ו־$x_1 \dots x_n \in (a,b)$ קיימת $x \in (a,b)$ כך ש־:

$$f(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) = \mathrm{AM}(x_i)$$

הוכחה. נסמן $x_{\max} = \max(x_i)_{i=1}^n$ ו־$x_{\min} = \min(x_i)_{i=1}^n$. אם $x_{\min} = x_{\max}$ אז x_i קבוע ואז $\mathrm{AM}(x_i) = x_1$ ו־$x_1 \in (a,b)$ יקיים את הדרוש. אחרת $x_{\max} \neq x_{\min}$. ידוע שהממוצע החשבוני של $f(x_i)$ מקיים $\mathrm{AM}(x_i) \in (f(x_{\min}), f(x_{\max}))$ כי ממוצע בין מספרים נמצא בין המקסימום למינימום, ו־$x_{\max} \neq x_{\min}$. סה"כ ממשפט ערך הביניים קיים x כך ש־$f(x) = \mathrm{AM}(x_i)$ כנדרש וסיימנו. ■

(8)

נוכיח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון.

(א) נתבונן במשוואה $(1-x)\cos x = \sin x$. נוכיח שיש לה לפחות פתרון אחד ב־$(0,1)$.

הוכחה. נתבונן בפונקציה $f(x) = (1-x)\cos x - \sin x$, ב־$[0,1]$.

$$f(1) = (1-1) - \sin(1) = 0 - \sin 1 < 0 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0) = (1-0)\cos 0 - \sin 0 = 1 \cdot 1 - 0 = 1$$

ממשפט ערך הביניים קיים $c \in [0,1]$ כך ש־$f(c) = 0$. הראינו ש־$f(1), f(0) \neq 0$ ולכן $c \in (0,1)$. סה"כ:

$$f(c) = 0 \implies (1-c)\cos c - \sin c = 0 \implies (1-c)\cos c = \sin c$$

כלומר c הוא הפתרון שחיפשנו למשוואה, כדרוש. ■

(ב) נתבונן במשוואה $\cot x = \alpha x$ בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(x)=\cot x-\alpha x$. נבחין ש־:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}-\alpha x=\infty-0=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-}\frac{\cos x}{\sin x}-\alpha x=-\infty-\frac{\alpha\pi}{4}=-\infty$$

לכן קיימת סביבה נקובה δ_1 שבה כל $x\in(0,\delta_1)$ גדול ככל רצוננו ובפרט גדול מ־0. נבחר $x=\frac{\delta_1}{2}\in(0,\delta_1)$ ומכאן $f(x)>0$. מנגד קיימת סביבה נקובה ימנית δ_2 של $\frac{\pi}{4}$ שבה כל $x\in\left(\frac{\pi}{4}-\delta_2,\delta_2\right)$ קטן ככל רצוננו ובפרט קטן מ־0. נבחר $y=\frac{\pi}{4}-\frac{\delta_2}{2}$ ונקבל $f(y)<0$. נבחין ש־$x,y\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ולכן ממשפט ערך הביניים קיים $c\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ כך ש־$f(c)=0$. נקבל:

$$f(c)=0\implies \cot c-\alpha c=0\implies \cot c=\alpha c$$

וסה"כ c הוא הפתרון שביקשנו כנדרש.

■

(9)

יהי $P(x)$ פולינום שאינו פולינום האפס. נוכיח שלמשוואה $|P(x)|=e^x$ יש לפחות פתרון ממשי אחד.

הוכחה. יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n עם מקדמים $a_0\dots a_n$. נגדיר $f(x)=|P(x)|-e^x$. ידוע e^x מונוטונית עולה. ידוע $e^0=1$. עוד נבחין ש־$|P(x)|>1$ המ"מ, שכן הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\pm\infty}|P(x)|-1=\lim_{x\to\pm\infty}\left|\sum_{i=0}^{n}a_ix^n\right|-1=\lim_{x\to\pm\infty}\left|(a_i-1)x^{-n}\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-n}\right|\cdot x^n=\lim_{x\to\pm\infty}|a_n|\cdot x^n=|a_n|\cdot\pm\infty=\infty$$

כלומר עבור $x<0$ מתקיים $|P(x)|-1>0$. ממונוטוניות e^x ב־$(-\infty,0]$ בהכרח $|P(x)|-e^x>|P(x)|=e^0>0$ עבור אותו ה־$x<0$. סה"כ מצאנו x כך ש־$f(x)>0$. נסמנו x_1.

הראינו בעבר לסדרות (ואפשר מהיינה + מונוטוניות להראות גם לפונקציות) ש־$\lim_{x\to\infty}\frac{|P(x)|}{e^x}=0$. מכאן (מחסמים אסימפטוטיים) שלכל $c>0$ החל מ־x_0 כלשהו $c|P(x)|<e^x$ ובפרט עבור $c=1$ נקבל $|P(x)|-e^x<0$. סה"כ מצאנו x_0 כך ש־$f(x_0)<0$ ו־x_1 כך ש־$f(x_1)>0$. משום ש־f רציפה מערך הביניים נקבל שקיים $\tilde{x}$ כך ש־$f(\tilde{x})=0$ (כי $0\in(f(x_0),f(x_1))$) וסה"כ $\tilde{x}$ מוכיח את הדרוש. ■

(10)

נוכיח שפונקציה מחזורית ורציפה ב־$\mathbb{R}$ מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה. מהיותה מחזורית קיים r ו־$x_0\in(0,r)$ כך ש־$f(x_0+rk)=f(x_0)$ לכל $k\in\mathbb{Z}$. נסמן $A_k=[x_0+rk,x_0+r(k+1))$ לכל $k\in\mathbb{Z}$. נבחין ש־f רציפה ו־A_0 קומפקטית כלומר ממשפט ווירשטראס f מקבלת מינימום ומקסימום ב־A_0, את המינימום נסמן ב־$x^-\in A_0$ ואת המקסימום ב־$x^+\in A_0$. ממחזוריותה $f\left(A_k\right)=f\left(A_0\right)$ כלומר:

$$\operatorname{Im}f=f(\mathbb{R})=f\left(\biguplus_{k\in\mathbb{Z}}A_k\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}f(A_k)=f(A_0)$$

סה"כ $\operatorname{Im}f$ בעלת מקסימום ומינימום x^+ ו־x^-, כלומר x^+ ו־x^- המקסימום והמינימום של כל f, וסה"כ f מקבלת מקסימום ומינימום מהגדרת תמונה. ■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד