

### תרגיל בית 5 במבני נתונים

על כל התשובות להיות מנומקות. בכל שאלה יש לבחור במימוש היעיל ביותר האפשרי מבחינת סיבוכיות זמן. יש לענות על השאלות במקומות המוגדרים לכך.  
על כל התשובות להיות מנומקות. בכל שאלה יש לבחור במימוש היעיל ביותר האפשרי מבחינת סיבוכיות זמן. יש לענות על השאלות במקומות המוגדרים לכך.

#### שאלה 1

1. נניח שבאלגוריתם הבחירה של "חציון החציונים" היינו מחלקים את המערך לתשיעיות במקום לחמישיות, ובנוסף לבחור את החציון של כל תשיעייה, נבחר את האיבר ה- $i$  בגודלו כאשר  $1 \leq i \leq 9$ . מה הוא ה- $i$  המינימלי כך שזמן הריצה יהיה לינארי?
2. כעת, נניח שבאלגוריתם הבחירה של "חציון החציונים" היינו מחלקים את המערך לשביעיות במקום לחמישיות, ובנוסף לבחור את החציון של כל שביעייה, נבחר את האיבר ה- $i$  בגודלו כאשר  $1 \leq i \leq 7$ . מה הוא ה- $i$  המקסימלי כך שזמן הריצה יהיה לינארי?



## שאלה 2

נתון מערך בגודל  $n$ , המכיל  $n$  איברים ששונים זה מזה.

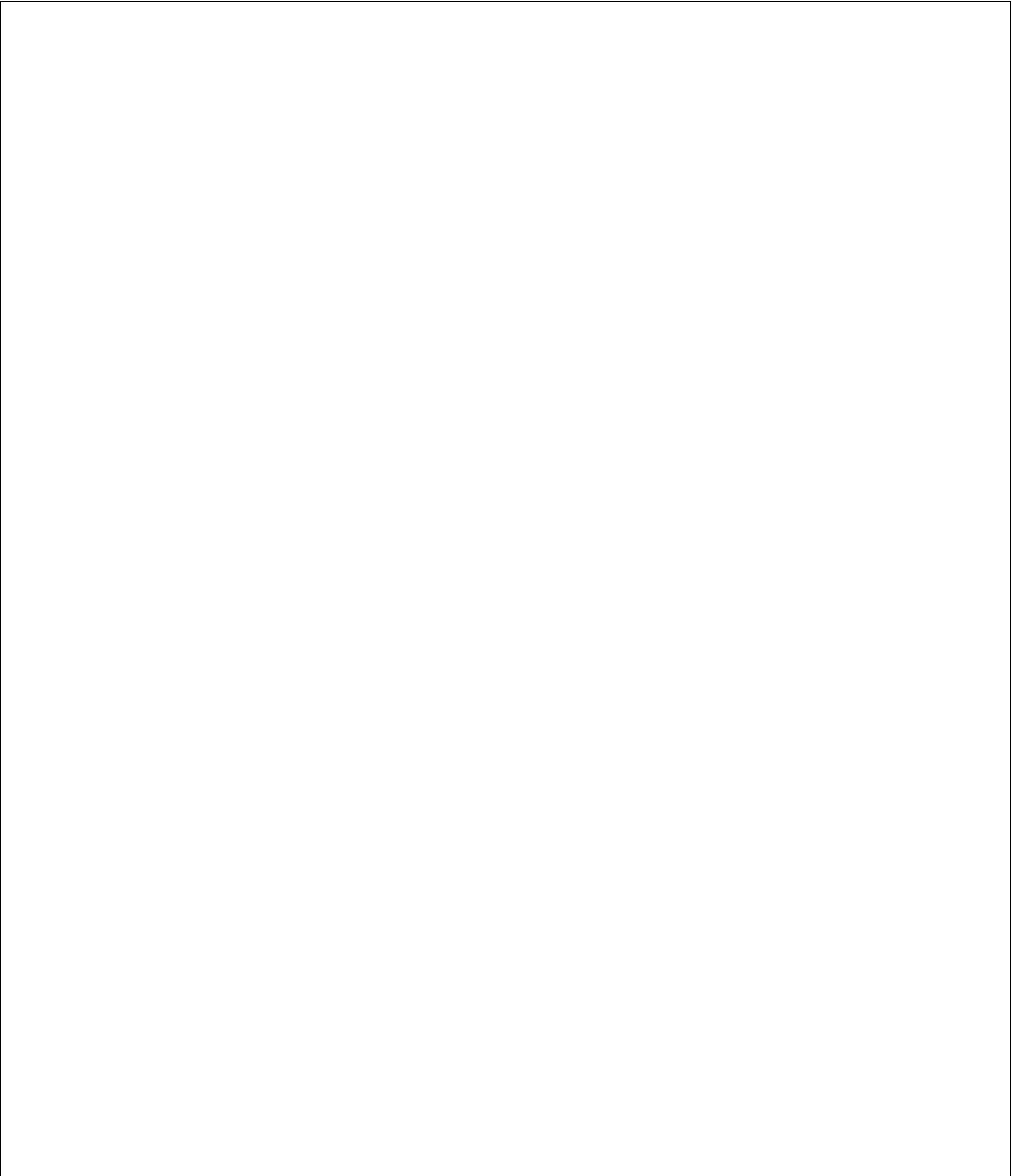
בנוסף, נתון שעבור כל  $i$  בין  $1$  ל- $n$ , האיבר  $i$ -י בגודלו נמצא באחד מהמיקומים:

$$i - k, i - k + 1, \dots, i, \dots, i + k$$

עבור פרמטר  $k$  כלשהו בין  $1$  ל- $n$ . כלומר מרחק האיבר ממקומו הממוין אינו יותר מ- $k$ .

א. הציעו אלגוריתם שממין את המערך בזמן  $O(n \log k)$  במקרה הגרוע.

ב. עבור  $k = \sqrt{n}$  הוכיחו חסם של  $\Omega(n \log n)$  למיון המערך.

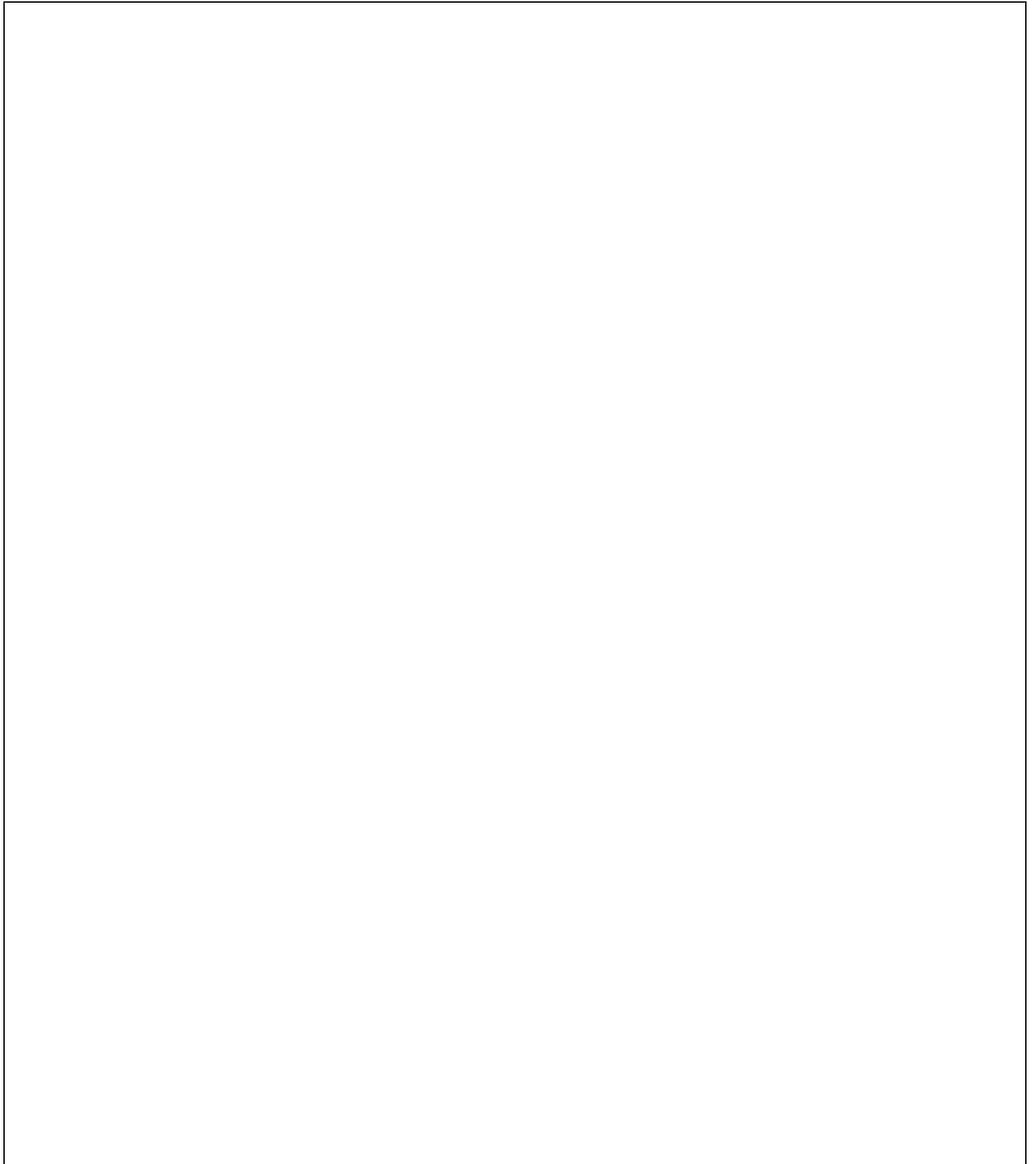


### שאלה 3

בהנתן מערכים  $A, B$  באורך  $n$  המכילים איברים מתחום סדור כלשהו, נרצה לחשב מערך  $C$  בו ערכו של התא  $i$ -הוא מספר האברים ב- $A$  שקטנים או שווים ל- $B[i]$ .

א. הציעו אלגוריתם יעיל ככל האפשר לחישוב מערך  $C$ .

ב. הוכיחו חסם תחתון הדוק במודל ההשוואות לבעיה.



#### שאלה 4

א. להלן ADT עבור מבנה נתונים  $Q$  שמתחזק קבוצת מספרים ומתחיל כקבוצה ריקה:

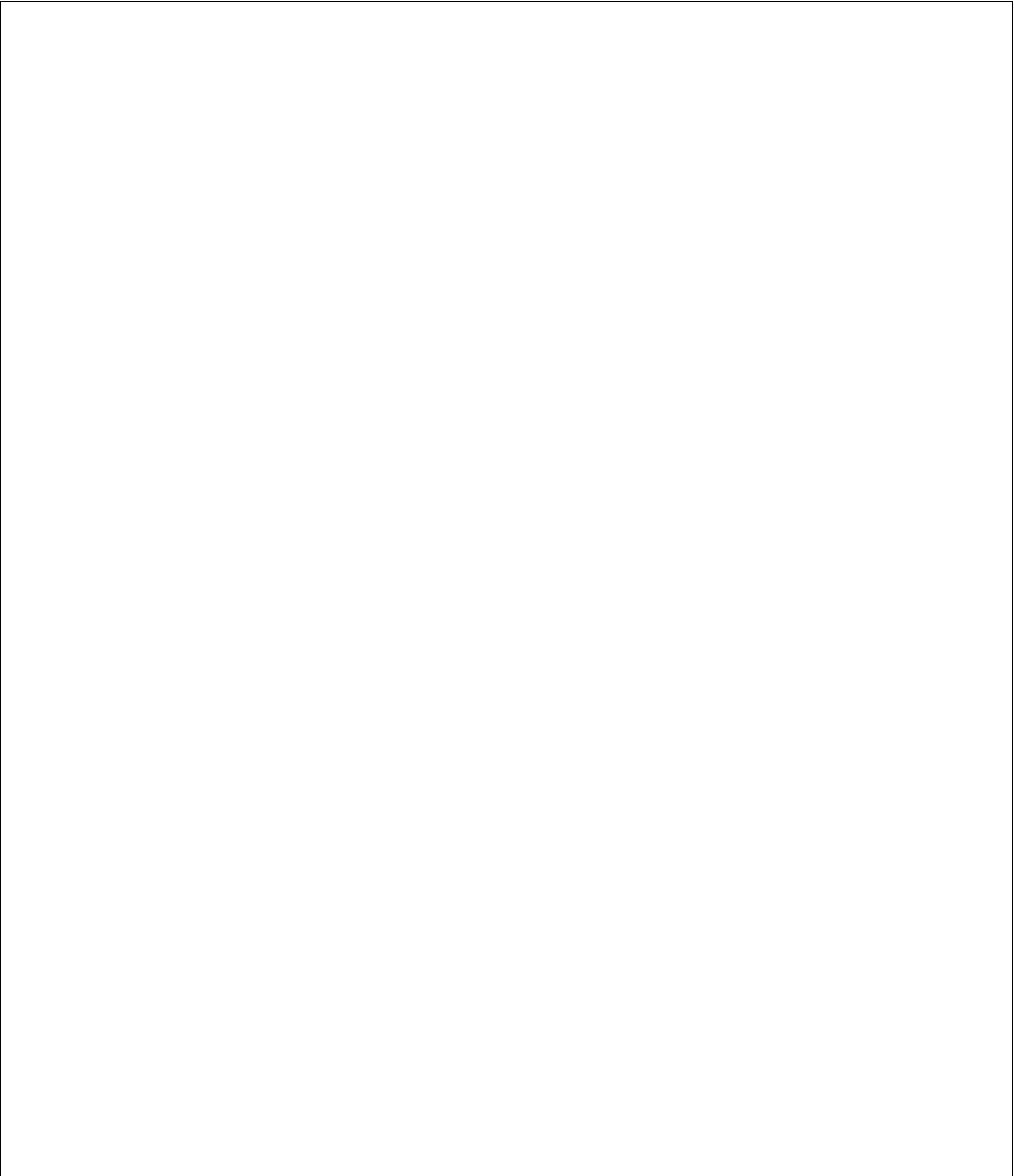
- $Insert(Q, k)$  - הוספת איבר  $x$  עם מפתח  $key = k$  ל- $Q$ .
- $Delete(Q, x)$  - מחיקת האיבר  $x$  מ- $Q$  (יש מצביע ל- $x$ ).
- $ApproxMedian(Q)$  - מחזירה מספר כלשהו  $t$  (לא בהכרח במבנה) הגדול מלפחות  $n/4$  מאיברי  $Q$  וקטן מלפחות  $n/4$  מאיברי  $Q$ , כאשר  $n$  הינו מספר האיברים הנוכחי ב- $Q$ .

תארו מבנה נתונים שמממש את ה-ADT הנ"ל. על כל הפעולות להתבצע בזמן  $O(1)$  אמורטייזד.

ב. להלן ADT עבור מבנה נתונים  $Q$  שמתחזק קבוצת איברים מתחום סדור ומתחיל כקבוצה ריקה:

- $Insert(Q, k)$  - הוספת איבר  $x$  עם מפתח  $key = k$  ל- $Q$ .
- $Median(Q)$  - מחזירה את החציון של  $Q$ .

תארו מבנה נתונים התומך בפעולות הללו בזמן  $O(1)$  אמורטייזד במודל השוואות או הוכיחו שזה לא אפשרי.





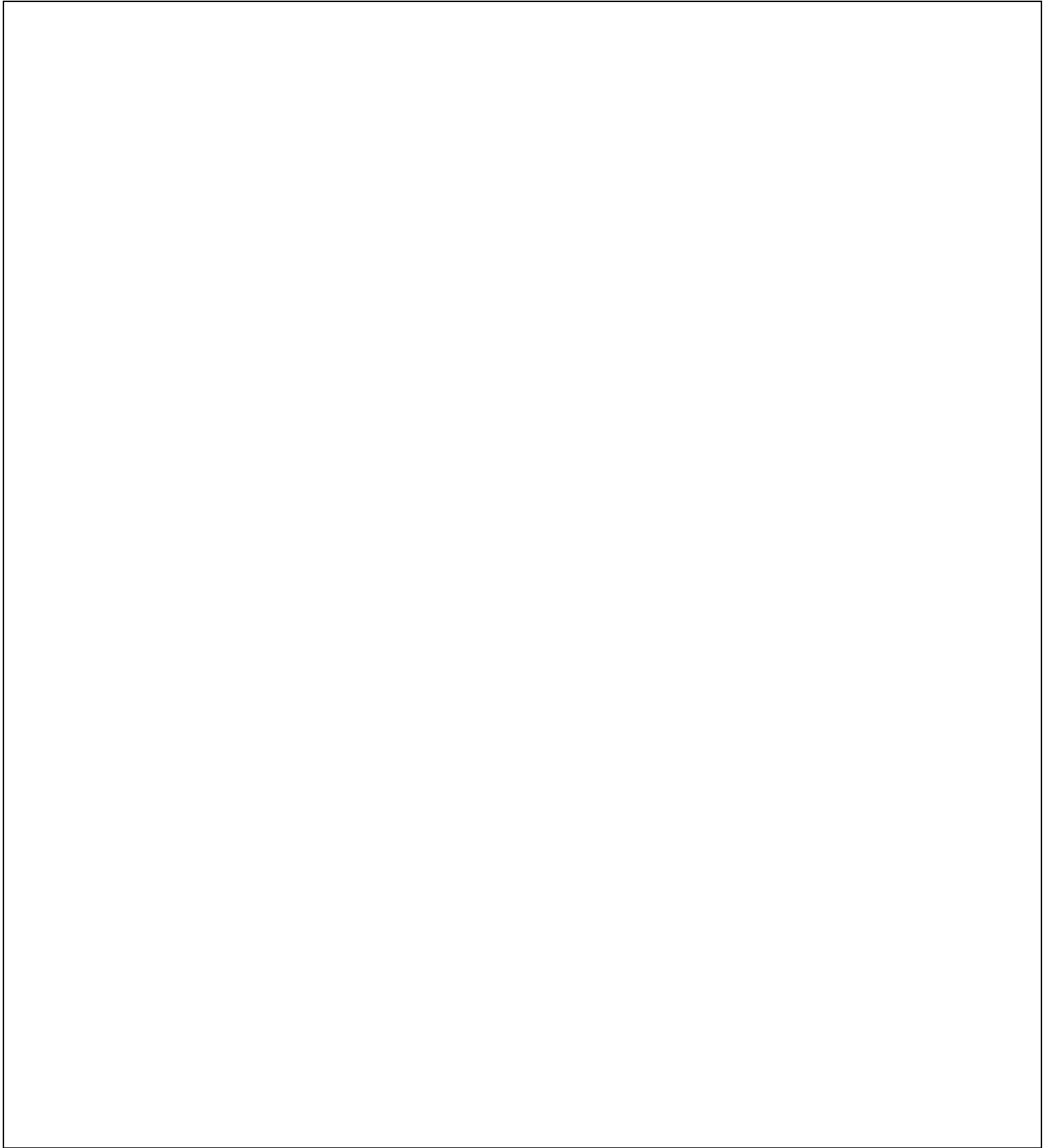
## שאלה 5

א. נתון עץ השוואות המתאים לאלגוריתם הממיינ  $n$  מספרים. ראינו בשיעור שקיים עלה בעומק  $\Omega(n \log n)$  בעץ, עם זאת ייתכן שיש עלים בעומק קטן יותר (שקרובים יותר לשורש). מהו העומק המינימלי של עלה בעץ? הסבירו.

ב. נתון אלגוריתם השוואות המקבל כקלט שתי רשימות ממויינות באורך  $n$  כל אחת וממזג אותן לרשימה ממויינת אחת.

1. הסבירו מדוע מספר העלים בעץ ההשוואות הוא לפחות  $\binom{2n}{n}$ .

2. הסיקו חסם תחתון לזמן הריצה במקרה הגרוע של כל אלגוריתם השוואות לבעיית המיזוג.



## שאלה 6

נתון מערך  $A$  באורך  $n$  המכיל שלמים.

א. נתון כי המספרים מגיעים מהתחום  $\{-n^2, \dots, n^2\}$ . תארו אלגוריתם הבודק האם קיים זוג איברים שונים שהמרחק בין ערכיהם שווה למרחק ביניהם במערך. במילים אחרות, האם קיימים  $i < j$  כך שמתקיים  $j - i = |a_j - a_i|$ .

ב. נוותר על הנתון של הסעיף הקודם באשר לתחום שממנו המספרים מגיעים. תארו אלגוריתם יעיל **בתוחלת** לבעיה הנ"ל.

בשני הסעיפים על האלגוריתמים לעבוד בסיבוכיות מקום (זיכרון) לינארית.

