ליניארית 8

שחר פרץ

16 בינואר 2025

.... (1) ....

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצות. נתבונן ב־:

$$C = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$$

צ.ל. $\operatorname{rank} C \le 2 \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

הוכחה. ידוע קיום $\tilde{A}, \tilde{B}$. ממשפט, לכל מטריצה P קיימת צורה מדורגת קאנונית, נסמנה $\tilde{P}$, וממשפט ידוע $\operatorname{rank} \tilde{P} = \operatorname{rank} P$. נסמן ב־$\operatorname{Col} P$ את מרחב העמודות של P וב־$\operatorname{Row} P$ את מרחב שורותיה. אם P ריבועית, אז ממשפט $\operatorname{Row} P = \operatorname{Col} P = \operatorname{rank} P$.

למה 1. תהי $P = \binom{X}{Y}$ מטריצה, כאשר X, Y ריבועיות. אז $\bar{P} = \binom{\tilde{X}}{\tilde{Y}}$ מקיים

$$\dim \operatorname{Row} P = \dim \operatorname{Row} \bar{P} = \dim \operatorname{Row} \tilde{P} \le \operatorname{rank} X + \operatorname{rank} Y$$

נתבונן ב־$\tilde{P}$. אז כמות שורות שאינן אפסים ב־$\tilde{P}$ היא $\operatorname{rank} \tilde{X} + \operatorname{rank} \tilde{Y} = \operatorname{rank} X + \operatorname{rank} Y$ משום שבצורה מדורגת של מטריצה הדרגה כי כמות השורות שאינן אפסים, ממשפט. מכיוון שבדירוג X, Y בנפרד, למעשה דירגנו את שורותיהם בלבד, ושורותיהם שורות P, ומשום שדירוג הוא הכפלה בהרכבת פעולות אלמנטריות בלבד ממשפט, אז $\bar{P}$ הכפלה בהרכבת שרשור הפעולות האלמנטריות על X, Y (חוקי כי כל אחד בשורות אחרות ולכן הפעולות זרות, והסדר לא משנה), כלומר $\bar{P} \sim P$. ממשפט, $\operatorname{Row} \bar{P} = \operatorname{Row} P$, וכמות הוקטורים (שאינם אפסים, שהם ת"ל בינם לבין עצמם) חסם עליון לגודל מ"ו, כלומר $\dim \operatorname{Row} \bar{P} \le \operatorname{rank} X + \operatorname{rank} Y$. מטרנזיטיביות נקבל את הדרוש.

נתבונן ב־$D = (A, B)$. ניכר כי $D^T = \binom{A^T}{B^T}$. כמו כן ידוע $\operatorname{Col} A = \operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^T = \operatorname{rank} A$ ובאופן זהה בעבור B, ולכן $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A$ וכן על B. מטענות שהוצגו $\operatorname{rank} \tilde{A}^T = \operatorname{rank} A$ וכנ"ל בעבור B. נתבונן ב־$\bar{D} = \binom{\tilde{A}^T}{\tilde{B}^T}$. מלמה 1 ומטרנזיטיביות, $\dim \operatorname{Row} \bar{D} \ge \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

נתבונן ב־$E = (A, A)$. ניכר כי $E^T = \binom{A^T}{A^T}$. אז באופן דומה לנעשה על D, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$. מלמה 1 נקבל $\dim \operatorname{Row} E^T = \dim \operatorname{Row} \bar{E}$, כאשר $\bar{E} = \binom{\tilde{A}^T}{\tilde{A}^T}$. בגלל ש־$\tilde{A}^T = \tilde{A}^T$ אז $\tilde{A}^T \sim \tilde{A}^T$ ולכן שורותיהם תלויות ליניארית, וסה"כ $\dim \operatorname{Row} E^T = \dim \tilde{E}^T = \operatorname{rank} A$.

סה"כ קיבלנו $\dim \operatorname{Col} A \ge \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \wedge \dim \operatorname{Col} E = \operatorname{rank} A$. נסמן $C_1 = (A, A), C_2 = (A, B)$. אז $C = \binom{C_1}{C_2}$.
לכן:

$$\dim \operatorname{Row}$$

באופן דומה ללמה 1, נקבל ש־:

$$\dim \operatorname{Row} C \le \dim \operatorname{Col} C_1 + \dim \operatorname{Col} C_2 \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} A = 2 \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \quad \top$$

■

.... (2) ....

נגדיר:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

א) נחשב את דרגת המטריצה $A = v_1 v_1^T + v_2 + v_2^T + v_3 v_3^T$. ראשית כל, נוכיח שהוקטורים בת"לים. נעשה זאת ע"י דירוג בשורות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

מדורג עם 3 איברים פותחים ולכן פורש מרחב ממימד 3, וישנם 3 וקטורים שפרשו את המרחב ולכן הם בסיס ובפרט בת"ל.

אזי, מסעיף ב', שהוכח באופן בלתי תלוי מסעיף א', נקבל ש־$\operatorname{rank} A = 3$.

ב) תהי $(v_1 \ldots v_k)$ בת"ל. נמצא את דרגת $v_1v_1^T + \cdots + v_kv_k^T$.

הוכחה. **למה 1.** לכל וקטור v, ולכל שורה R ב־vv^T, יתקיים $\exists a \in \mathbb{F}\colon R = av$. יהי v וקטור מאורך n, ו־$A = vv^T$. אז:

$$(A)_{ij} = (vv^T)_{ij} = \sum_{j=1}^{n=1} v_{ij}v_{ji} = v_i \cdot v_j \implies (a_{ij})_{j=0}^n = (v_i \cdot v_j)_{j=0}^n = v_i \cdot (v_j)_0^n = v_iv$$

סה"כ בעבור כל שורה ב־A יתקיים קיום $a \in v_i$ כך ש־$\operatorname{Col} = av$, כדרוש.

תהי $(v_1 \ldots v_k) \in \mathbb{R}^k$ סדרה בת"ל. נסמן $A_k := v_kv_k^T$. נתבונן במטריצה $\Sigma := \sum_{i=1}^k A_k$. נסמן ב־$B_i$ את השורה ה־i במטריצה הכללית B.

$$\exists (a_i)_{i=1}^k \colon (\Sigma)_i = \sum_{i=1}^k (A_k)_i = \sum_{i=1}^k a_iv_k$$

כאשר טענה הקיום נובעת מלמה 1 (באינדוקציה). מצאנו קומבינציה ליניארית של (v_i), היא (a_i) לכל שורות Σ. הקומבינציה הליניארית הזו יחידה משום ש־(v_i) בת"ל, ואם אינה הייתה יחידה, היו בפריסה של (v_i) שני וקטורים עם ייצוג זהה, אך (v_i) בת"ל ופורש את המרחב שהוא עצמו פורש ולכן בסיס, וייצוג איברים מתוך בסיס איזו', ובפרט חח"ע – סתירה.

בגלל שהוקטורים במרחב השורות של Σ ניתנים לייצוג כקומבינציה ליניארית של שורות Σ מהגדרת span, ואלו מוגדרות באופן יחיד מ־(v_i), אז הם ניתנים לייצוג באופן יחיד ע"י וקטורים ב־(v_i). סה"כ, (v_i) בסיס לפי הגדרה למרחב השורות של Σ, שממדו זהה למימד $\operatorname{rank}\Sigma$ לפי הגדרה. בגלל ש־$|(v_i)| = k$ וגם $\Sigma = v_1v_1^T + \cdots + v_kv_k^T$, אז דרגת המטריצה $v_1v_1^T + \cdots + v_kv_k^T$ היא k, כדרוש. ■

(3)

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$\operatorname{rank} A = r$.

א) צ.ל. קיום $B_1 \ldots B_r \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$A = \sum B_i \land \forall 1 \le i \le r\colon \operatorname{rank} B_i = 1$.

הוכחה. תהי $A \in M_{m\times n}$ מטריצה, ונסמן $\operatorname{rank} A = r$. נסמן את קבוצת וקטורי העמודה ב־A ב־$\operatorname{Col} A$. אז מרחב העמודות $\operatorname{span}\operatorname{Col} A$ נפרש ע"י $\operatorname{Col} A$. משום ש־$\dim\operatorname{span}\operatorname{Col} A = \operatorname{rank} A = r$, ובגלל של־$A$ יש n עמודות (כלומר $|\operatorname{Col} A| = n$) אז ממשפט ישנו בסיס בגודל r. ממשפט לכל $r < i \le n$, i. אם לא קיימים r וקטורים בת"ל ב־$\operatorname{Col} A$ אז נפרש מרחב מגודל קטן ממש מ־r על ידי הבסיס, ושאר הוקטורים ת"ל ולא משנים ממד, כלומר ישנם r וקטורים ב־$\operatorname{Col} A$ בסיס של $\operatorname{span}\operatorname{Col} A$, נסמנם B. נסמן גם $\overline{B} = \operatorname{Col} \setminus B$.

משום ש־$|\operatorname{Col} A| = r$ אז קיימת פונ' חח"ע ועל $R_i\colon [r] \to \operatorname{Col} A$ מהגדרת עוצמה. עבור ההופכית לה $f(x)$ נסמן $v_i = f(v) \in [r]$. בה"כ הסדר R_i זהה לסדר השורות המטריצה, משמאל לימין. אז, לכל $v \in \overline{B}$, אז $v \in \operatorname{Col} A$ ולכן ניתן לביטוי כקומבינציה ליניארית עם קבועים שנסמן $(\lambda_j^{v_i})$ (עבור j כך ש־$R_j \in B$). זאת כי:

$$\begin{aligned}
\exists (\tilde{\lambda}_i)_{i=0}^{r+1} \colon 0 &= \tilde{\lambda}_1B_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_rB_r + \lambda_{r+1}v && \big) -\tilde{\lambda}_{r+1}v \\
-\lambda_{r+1}v &= \exists (\tilde{\lambda}_i)_{i=0}^{r+1} \colon \tilde{\lambda}_1B_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_rB_r && \big) \cdot \tfrac{-1}{\tilde{\lambda}_{r+1}} \\
v &= -\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_{r+1}}B_1 - \cdots - \frac{\tilde{\lambda}_r}{\tilde{\lambda}_{r+1}}B_1 \\
&:= \lambda_1B_1 + \cdots + \lambda_rB_r
\end{aligned}$$

קיים זיווג בין $[r]$ לבין $\{i \in [n]\colon R_i \in B\}$ כי יש r וקטורים ב־B, נסמנו $f(i)$. בעבור M מט', נסמן ב־M_i את הטור ה־i ב־M. נבחין שתחת ההגדרה הזו $R_i = A_i$. נתבונן בקבוצת המטריצות הבאה:

$$(P_i)_j = \begin{cases} R_{f(i)} & f(i) = j \\ \lambda_{f(i)}^j R_{f(i)} & R_j \in \overline{B} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נוכיח ש־$\sum P_i = A \land \forall i \in [r]\colon \operatorname{rank} P = 1$.

- **דרגה.** נוכיח ש־$\operatorname{rank} P_i = 1$. ידוע ש־$\operatorname{rank} B = \dim\operatorname{span}\operatorname{Col} P_i$ (הדרגה היא ממד מרחב העמודות). נבחין ש־$\operatorname{Col} B$ הוא פרישה של וקטורים שהם אחד מההבאים:
  - וקטור ה־0, שת"ל ב־$R_{f(i)}$.
  - הוקטור $R_{f(i)}$, שתלוי ליניארית בעצמו.

- וקטור כלשהו $\lambda R_{f(i)}$, שבעבור הקבוע $-\frac{1}{\lambda}$ סכומו עם $R_{f(i)}$ יהיה 0 כלומר הוא ת"ל ב־$R_{f(i)}$.

סה"כ כל הוקטורים שפורשים את המ"ו ת"ל בוקטור שאינו 0 (ובפרט גודל המרחב אינו 0), ולכן גודל המרחב לכל היותר 1, וסה"כ גודל המ"ו $\operatorname{Col} B$ הוא 1, כלומר $\operatorname{rank} P = 1$ כדרוש.

- **סכום.** נוכיח ש־$A = \sum P_i =: \Sigma$. נוכיח שוויון עמודות. נפלג למקרים בעבור העמודה jה ב־A.
  - נניח $j \in \{i \in [n]: R_i \in B\} = \operatorname{Im} f$. אז עבור כל מטריצה P_i, אם $f(i) = j$, אז מהיות f זיווג, i האינדקס של P הוא גם קיים וגם היחיד שיקיים תכונה זו. כמו כן, $j \notin B$ ולכן בשאר המטריצות עמודה זו תהיה 0. סה"כ קיבלנו $0 + \cdots + R_{f(i)} + \cdots + 0 = R_j = A_j$, כדרוש.
  - אחרת, $j \notin \operatorname{Im} f$. לכן בהכרח $R_j \in \overline{B}$ מהגדרת תמונת f. אז:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{f(i)}^{j} R_{f(i)} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{r} \lambda_{f(i)}^{j} R_{f(i)} \overset{(2)}{=} A_j$$

כדרוש. הערות:

(1) נכון מהיות f על + שינוי סדר סכימה.

(2) נכון מהגדרת (λ_i), ע"פ זהות זו בדיוק.

סה"כ הוכחנו שאכן לסכום שווין ל־A, וה־rank של כל מטריצה בסכום הוא 1.

משהוכח לעיל ובגלל ש־$|(P_i)_{i=0}^{r}| = r$, הוכחנו את הדרוש, ו־(P_i) הסדרה המבוקשת. ∎

ב) צ.ל. אי קיום $B_1 \dots B_{r-1} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש־$A = \sum B_i \wedge \forall 1 \le i \le r-1\colon\ \operatorname{rank} B_i = 1$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נסמן $\operatorname{rank} A = r$. נניח בשלילה קיום $B_1 \cdots B_{r-1} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נסמן $B := (B_i)_{i=0}^{r-1}$, כך ש־$A = \sum_{i=1}^{r-1} B_i$. נסמן ב־$\operatorname{Row} P$ את קבוצת וקטורי השורה של המטריצה P.

בגלל ש־$\forall B_i \in B\colon\ \operatorname{rank} B_i = 1 = \dim \operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$, ומשום שקיימת שורה R ב־B_i כך ש־$R \neq 0$ כי אחרת $\operatorname{Row} B = \operatorname{Row} 0 = 0$ ו־$\operatorname{rank} B_i = 0$ סתירה, אז R ב־$\operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$ ואינו 0 כלומר $\operatorname{span}\{R\}$ מממד 1 גם כן, ותמ"ו ב־$\operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$ כי $R \in B_i$, ממשפט תמ"ו של מ"ו זהה ממד הוא שווה מרחב, כלומר $\operatorname{span}\{R\} = \operatorname{span} \operatorname{Row} B_i$. משום שהממד הוא 1 אז $\{R\}$ בסיס ל־$\operatorname{Row} B_i$. נסמן ב־R_i^j את הוקטור ה־j ב־R_i. אז משום ש־R פורש את Row אז קיים λ כך ש־$\lambda R = R_i^j$. נסמן אותו להיות λ_i^j. נסמן את ה־R המתאים לכל מטריצה B_i ב־R_i.

נסמן ב־A_i את השורה ה־i ב־A. סה"כ:

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^{r-1} B_j\right)_i = \sum_{j=1}^{r-1} R_j^i = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j^i R_j$$

לכל $v \in \operatorname{span} \operatorname{Row} A$ יתקיים קיום $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ כך ש־$v = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$. אז:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j^i R_i\right) = \sum_{j=1}^{r-1} \left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_j^i\right)}_{:=\beta_i} R_i\right] = \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i R_i$$

סה"כ, v ניתן לביטוי ע"י קומבינציה ליניארית עם מקדמים (β_i) של $(R_i)_{i=1}^{r-1}$. סה"כ מצאנו בסיס מגודל $r-1$ ל־$\operatorname{span} \operatorname{Row} A$, לכן $\dim \operatorname{span} \operatorname{Row} A = r-1$. בגלל ש־$\operatorname{rank} A = r$ אז $\dim \operatorname{span} \operatorname{Row} A = r$ ומטרנזיטיביות $r = r-1$. נחסיר r משני האגפים ונקבל $0 = 1$, סתירה.

הגענו לסתירה, והנחת השלילה הופרכה. הוכחנו כי אכן לא קיימים $(B_i)_{i=1}^{r-1}$ המקיימים את התנאים לעיל.

∎

.... (4) ....

נתבונן בשלושת הוקטורים הבאים:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},\ \det(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

נביר את $\det(u+v, v, w)$ ואת $\det(u+v, v+w, w+u)$ באמצעות $\det(u,v,w)$.

טענה.

$$
\begin{aligned}
9\det(u+x,v,w) &= \begin{pmatrix} u_1+x_1 & | & | \\ u_2+x_2 & v & w \\ u_3+x_3 & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ u_2+x_2 & v & w \\ u_3+x_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & | & | \\ u_2+x_2 & v & w \\ u_3+x_3 & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ u_2 & v & w \\ u_3+x_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ x_2 & v & w \\ u_3+x_3 & | & | \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ x_2 & v & w \\ x_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ x_2 & v & w \\ u_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & | & | \\ u_2 & v & w \\ x_3 & | & | \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} | & | & | \\ x & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & | & | \\ x_2 & v & w \\ x_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & | & | \\ x_2 & v & w \\ u_3 & | & | \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & | & | \\ u_2 & v & w \\ x_3 & | & | \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

•

$$\det(u+v, v+w, w+u) =$$