**רשימות אלגברה לינארית 2א**

שחר פרץ ~ 2025B

# Introduction . . . 1

## 1.1 ~ הרבה מילים שאפשר לדלג עליהן

סיכום זה לאלגברה לינארית 2א, נעשה במסגרת תוכנית אודיסאה, עם בן בסקין כמרצה. בגלל המון סיבות, כמו זו שאני לא לוקח את הקורס בסמסטר בו אני לומד אותו, והמלחמה עם איראן, הסיכום הזה כולל מגוון מקורות – ההרצאות של בן, הקלטות, סיכומים אחרים, הספר "Linear Algebra Done Right", ותרגולים של עומרי שדה־אור. פרט לכך הוספתי ציטוטים מן ההרצאה שמצאתי משעשעים. שכתבתי לחלוטין את הפרק על צורת ג'ורדן, במטרה לשפר את ההבנה של הקורא על הנושא, תוך הצגת שתי גישות להגדרת צורת ג'ורדן.

כנגד שלושה נושאים דיברה אלגברה לינארית 2א –

1. **אופרטורים ליניארים**, הן העתקות ממרחב לעצמו.
2. **תבניות בי־ליניאריות**, אובייקט מתמטי נוסף שניתן לייצג ע"י מטריצה.
3. **מרחבי מכפלה פנימית**, מרחבים בהם מוגדרת מעין תבנית ססקווי בי־לינארית שמאפשרת תיאור "גודל", ובהם יש ערך לפירוק מטריצות לכפל של מספר מטריצות שונות.

נוסף על שלושת הנושאים ה"רגילים" של הקורס, מופיעה בסוף הרחבה של בן בסקין לגבי מרחבים דואלים. אני ממליץ בחום גם למי שלמד את הנושא בלינארית 1א לקרוא את הפרק עם מרחבים דואלים, משום שהוא קצר, ומראה קשרים חזקים (ומרתקים!) בין החומר הנלמד באלגברה לינארית 2א (כמו מרחבי מכפלה פנימית והעתקות צמודות) למרחבים דואלים. הוספתי בעצמי הרחבה לפירוק SVD.

באופן אישי, אני מוצא את הקורס די מעניין, ובמיוחד את הפרק האחרון בנוגע לפירוקים של מטריצות/העתקות.

הגרסה האחרונה של הסיכום תהיה זמינה בקישור הבא כל עוד מיקרוסופט לא פשטו את הרגל. אם מצאתם בסיכום טעויות (החל בתקלדות, כלה בשגיהוט חטיב, ובטח טעויות מתמטיות) אשמח אם תפנו אלי בטלפון או במייל (perets.shahar@gmail.com), בטלפון (אם יש לכם אותו), או ב־issues ב־github (קישור בתחילת המשפט).

מקווה שתהנו מהסיכום ותמצאו אותו מועיל;

שחר פרץ, 19.7.2025

**אזהרה!** נכון למצב הנוכחי, הסיכום הזה עדיין בעבודה לצריך לעבור הגהה. אתם מוזמנים להשתמש בו, אך אין לראות בו כרגע גרסה סופית ואמינה.

אני לא אחראי בשום צורה על דברים לא נכונים שכתבתי בטעות. פעמים רבות מרצים מדלגים עם שלבים ואני משלים מההבנה שלי, ולמרות שעברתי על הסיכום ואני משתדל שיהיה מדויק ככל האפשר, ייתכן שישנן טעויות.

## 1.2 ~ סימונים

בסיכום הבא נניח את הסימונים הבאים:

- $[n] := \mathbb{N} \cap [0, n]$
- בהינתן $T: V \to W$ העתקה ו־$U \subseteq V$ תמ"ו, נסמן $T(U) := \{Tu \mid u \in U\}$
- בהינתן $T: V \to W$ העתקה ו־$v \in V$, נסמן $Tv := T(v)$
- בהינתן $A$ קבוצה עם יחס שקילות $\sim$, נסמן את קבוצת המנה ב־$A/_\sim$
- בפקולטה למתמטיקה בת"א מקובל להשתמש ב־$(v, w)$ בשביל מכפלה פנימית. בסיכום הזה אשתמש ב־$\langle v \mid w \rangle$, גם כן סימון מקובל (בעיקר בפיזיקה), שאני חושב שנראה מגניב הרבה יותר.

# תוכן העניינים

בתיאבון

# Diagonalization . . . 2

## 2.1 ~ מבוא לפרק

**הגדרה 1.** נאמר ש־$A$ מטריצה אלכסונית, אם:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$$

נאמר שישנה פעולה כשהי שנרצה להפעיל. נרצה לקרות מה יקרה לפעולה לאחר שנפעיל אותה מספר פעמים. כפל מטריצות היא פעולה מסדר גודל של $\mathcal{O}(n^3)$. אך, ישנן מטריצות שקל מאוד להעלות בריבוע, ובכך נוכל להפוך את ההליך לפשוט בהרבה, ואף לנסח אותו בצורה של נוסחה סגורה פשוטה. דוגמה מטריצה כזו היא מטריצה אלכסונית. ננסה למצוא דרך "להמיר" בין מטריצה "רגילה" למטריצה אלכסונית.

**הגדרה 2.** ו־$T$ ההעתקה אלכסונית:

$$T_A^m(A) = A^m(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

למה זה מועיל? נזכר בסדרת פיבונצ'י. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(בהנחת איברי בסיס $a_0 = 0, a_1 = 1$).

ואכן, מה חבל שלא כיף להכפיל את המטריצה $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ בעצמה המון פעמים. מה נוכל לעשות? ננסה למצוא בסיס שבו $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)_B = (v_1, v_2)$ ו־$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = P^{-1}\Lambda P$. [המשמעות של $\Lambda$ היא מטריצה אלכסונית כלשהית] אז נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \left(P^{-1}\Lambda P\right)^n = P^{-1}\Lambda^n P$$

(די קל להראות את השוויון האחרון באינדוקציה). במקרה כזה יהיה נורא נחמד כי אין בעיה להעלות לכסינה בחזקה.

הדבר הנחמד הבא שנוכל ליצור הוא צורת ג'ורדן – מטריצת בלוקים אלכסונית, ככה שנעלה בחזקה את הבלוקים במקום את כל המטריצה. נעשה זאת בהמשך הקורס.

**הגדרה 3.** אופרטור ליניארי (א"ל) הוא ה"ל/טל ממרחב וקטורי $V$ לעצמו.

## 2.2 ~ ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים לאופרטורים ליניארים

**הגדרה 4.** יהי $T\colon V \to V$ א"ל. אז $0 \neq v \in V$ נקרא וקטור עצמי של $T$ (ו"ע) אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש־$Tv = \lambda v$.

**הגדרה 5.** $\lambda$ מההגדרה הקודמת נקרא ערך עצמי (ע"ע) של $T$, המתאים לו"ע $v$.

**שאלה.** יהי $T\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$. נניח ש־$V = (v_1 \ldots v_n)$ בסיס של ו"ע של $\mathbb{F}^n$ [תיאורטית יכול להתקיים באופן ריק כי עדיין לא הראינו שקיים בסיס כזה] אז קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש־$A$ המקיימת $Tv = Av$ לפי הבסיס הסטנדרטי, אז $[T]_B^B = \operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, כאשר $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ ע"ע המתאימים לו"ע $v_1 \ldots v_n$.

"ראיתם את המרחב הומו?". כדאי לדעת כי $\operatorname{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) \approxeq M_{m\times n}(\mathbb{F})$. מה המשמעות של איזומורפי ($\approxeq$)? בהינתן $A, B$ מבנים אלגבריים כלשהם, נסמן $A \approxeq B$ אם קיימת $\varphi\colon A \to B$ העתקה חח"ע ועל שמשמרת את המבנה (כאשר המבנה שלנו מורכב מפעולות חיבור וכפל, העתקה כזו תהיה ליניארית).

**דוגמה.** אם $V, U$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, הם נקראים איזומורפים אם קיימת $\varphi\colon V \to U$ חח"ע ועל המקיימת

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}\, \forall v_1, v_2 \in V\colon \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

כלומר "המרנו" שני מבנים אלגבריים, אבל לא באמת עשינו שום דבר – כל מבנה עדיין שומר על התכונות שלו.

**סימון 1.** בסוף הסיכום מופיעה הרחבה על תופעות מעין אלו.

**הגדרה 6.** יהי $T\colon V \to V$ א"ל, נניח $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע, אז המרחב העצמי (מ"ע) של $\lambda$ הוא:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

**משפט 1.** $V_\lambda$ תמ"ו של $V$.

**הגדרה 7.** יהי $T\colon V\to V$ א"ל, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של $T$. נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$ (ביחס ל־$T$) הוא $\dim V_\lambda$.

**דוגמה.** יהי $V$ מ"ו ממימד $n$, $T\colon V\to V$ א"ל. נניח קיום $v\in V$ המקיים $T^n v=v$, ונניח $\{v,Tv,T^2v,\dots,T^{n-1}v\}$ בסיס של $V$. ננסה להבין מהם הע"ע.

יהי $0\neq u\in V$ ו"ע כך ש־$Tu=\lambda u$. נראה כי $T^n u=u$. ידוע קיום $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}\in\mathbb{F}$ כך ש־$u=\sum\alpha_i T^i(v)$. אז:

$$\lambda^n u=T^n(u)=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\underbrace{T^{n+i}(v)}_{=T^i(T^n v)=T^i v}=u$$

נבחין שהוקטורים העצמיים הם שורשי היחידה. מי הם שורשי היחידה – זה תלוי שדה.

**מסקנה 1.** ערכים עצמיים תלויים בשדה. ערכים עצמיים של מטריצה מעל $\mathbb{R}$ יכולים להיות שונים בעבור אותה המטריצה מעל $\mathbb{C}$. דוגמה יותר פשוטה לכך היא העתקת הסיבוב ב־$\mathbb{R}^2$, שאין לה ו"עים מעל $\mathbb{R}$ אך יש כאלו מעל $\mathbb{C}$.

**משפט 2.** תהי $T\colon V\to V$ א"ל, ונניח $A\subseteq V$ קבוצה של ו"ע של $T$ עם ע"ע שונים, אז $A$ בת"ל. הוכחה בתרגול.

**הגדרה 8.** יהי $T\colon V\to V$ א"ל. נאמר ש־$T$ ניתן לכסון/לכסין אם קיים ל־$V$ בסיס של ו"ע של $T$.

**מסקנה 2.** אם $\dim V=n$ ול־$T$ יש $n$ ע"ע שונים אז $T$ לכסין.

**הערה 1.** שימו לב – ייתכן מצב בו קיימים פחות מ־$n$ ע"ע שונים אך $T$ עדיין לכסין. דוגמה: $id,0$.

**מסקנה 3.** תהי $T\colon V\to V$ א"ל. נניח שלכל $\lambda$ ע"א, ישנה $B_\lambda\subseteq V_\lambda$ בת"ל. אז $B=\bigcup_\lambda B_\lambda$ בת"ל.

הוכחה. ניקח צירוף לינארי כלשהו שווה ל־0:

$$\begin{aligned}\sum_{v_i\in B}\alpha_i v_i=0&\\ &=\sum_\lambda\sum_{\lambda_i}\alpha_i v_{\lambda,i}\\ &\implies\sum_{\lambda_j}\alpha_i v_{\lambda_{ji}}=:u_j\in V_{\lambda_j}\\ &\implies\sum_j u_j=0\end{aligned}$$

קיבלנו צירוף ליניארי לא טרוויאלי של איברים במ"ע שונים (=עם ע"א שונים). אם אחד מהם אינו 0, קיבלנו סתירה למשפט. סה"כ קיבלנו שלכל $j$ מתקיים $\sum\alpha_{ji}v_{ji}=0$. בגלל ש־$v_{ji}\in B_j$ אז בת"ל ולכן כל הסקלרים 0. ■

**הערה 2.** ההוכחה הזו עובדת בעבור ההכללה לממדים שאינם נוצרים סופית

**מסקנה 4.** יהי $T\colon V\to V$ א"ל כך ש־$\dim V=n$. אז:

$$\sum_\lambda\dim V_\lambda\le n$$

שוויון אמ"מ $T$ לכסין.

הוכחה. לכל $\lambda$ יהא $B_\lambda$ בסיס. אז $B=\sum_\lambda B_\lambda$ בת"ל. אז $n\ge|B|=\sum_\lambda\dim V_\lambda$ .

אם $T$ לכסין אז קיים בסיס של ו"ע כך שאכל אחד מהם מבין $V_\lambda$ ושוויון.

מצד שני, אם יש שוויון אז $B$ קבוצה בת"ל של $n$ ו"ע ולכן בסיס ולכן $T$ לכסין. ■

## 2.3 $\sim$ ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים למטריצות

**הגדרה 9.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש־$0\neq v\in\mathbb{F}^n$ הוא ו"ע של $A$ עם ע"ע $\lambda$ אם $Av=\lambda v$.

**משפט 3.** תהי $T\colon V\to V$ א"ל ויהי $B$ בסיס סדור, ו־$V$ נוצר סופי (לעיתים יקרא: סוף־ממדי). נניח $A=[T]_B$. אז $v\neq 0$ וקטור עצמי של $T$ עם ערך עצמי $\lambda$ אמ"מ $[v]_B$ וקטור עצמי של $A$ עם ע"ע $\lambda$.

הוכחה. גרירה דו־כיוונית. נניח $V$ ו"ע של $T$. אז $A[v]_B=[Tv]_B=[\lambda_v]_B\lambda[v]_B$. מהכיוון השני "לכו הפוך". ■

**הגדרה 10.** מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ תקרא לכסינה/נתנת ללכסון אם היא דומה למטריצה $\Lambda\in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית, כלומר קיימת $P\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה שעבורה $\Lambda=P^{-1}AP$.

**משפט 4.** יהיו $A,P\in M_n(\mathbb{F})$. נניח $P$ הפיכה. אז אם $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ אמ"מ עמודות $P$ הן ו"ע של $A$ עם ע"ע $\lambda_1\dots\lambda_n$ בהתאמה.

הוכחה. נסמן $P=(P_1\dots P_n)$ עמודותיה. אז:

$$AP=(AP_1\dots AP_n)=(\lambda_1P_1\dots\lambda_nP_n)=P\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

ולכן:

$$P^{-1}AP=P^{-1}P\Lambda$$

ההוכחה מהכיוון השני היא לקרוא את זה מהצד השני. ■

"אני מקווה שראיתם שכפל מטריצה באלכסונית מתחלף" (הוא לא בהכרח). "אני אמרתי שטות." ~ בן

**משפט 5.** בהינתן העתקות $T,S$ שתיהן לכסינות לפי אותו הבסיס $B$ (לא בהכרח אותם הע"עים), אז $TS=ST$ מתחלפות.

**משפט 6.** המטריצה $\lambda I$ עבור $\lambda\in\mathbb{F}$ דומה רק לעצמה.

הוכחה. בהינתן $P$ הפיכה, הכפל של $P$ עם $\lambda I$ מתחלף בהכרח, ולכן $P^{-1}\lambda IP=PP^{-1}\lambda I=\lambda I$ לכל מטריצה $P^{-1}\lambda IP$ דומה. ■

## 2.4 ~ פולינום אופייני

**תרגיל.** תהי $A=\left(\begin{smallmatrix}-7&8\\6&7\end{smallmatrix}\right)$. מצאו ו"ע וע"ע של $A$ ולכסנו אם אפשר.

**פתרון.** מחפשים $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$ $\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ ו־$\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש־:

$$\begin{aligned}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\lambda I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ \lambda I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=0\\ (\lambda I-A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=0\end{aligned}$$

סה"כ $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ ו"ע עם ע"ע $\lambda$ אמ"מ $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\ker(\lambda I-A)$, אמ"מ $\lambda I-A$ לא הפיכה, אמ"מ $\det(\lambda I-A)=0$ (AKA "הפולינום האופייני"). במקרה הזה:

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda+7&-8\\-6&\lambda-7\end{pmatrix}\implies\det(\lambda I-A)=(\lambda+7)(\lambda-7)=\lambda^2-1$$

לכן הע"ע הם $\pm1$. נמצא את הו"ע. עבור $\lambda=1$, מתקיים:

$$\begin{pmatrix}8&8\\-6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

יש לנו חופש בחירה (ופתרון יחיד עד לכדי כפל בסקלר). במקרה הזה, נבחר $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda=-1$, יתקיים:

$$\begin{pmatrix}6&8\\-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\impliedby b\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

ראינו שהמלכסנת היא העמודות של הו"ע. אז:

$$P=\begin{pmatrix}1&4\\-1&-3\end{pmatrix}$$

וסה"כ $P^{-1}AP=I$. מכאן צריך למצוא את $P^{-1}$.

**משפט 7.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אז $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של $A$ אמ"מ $|\lambda I-A|=0$.

**הגדרה 11.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. הפולינום האופייני של $A$ מוגדר להיות:

$$f_A(x)=|xI-A|$$

**משפט 8.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אז $f_A(x)$ הוא פולינום מתוקן [=מקדם מוביל הוא 1] ממעלה $n$, המקדם של $x^{n-1}$ הוא $-\operatorname{tr}A$ והמקדם החופשי הוא $(-1)^n|A|$.

**הגדרה 12** בעבור $A\in M_n(\mathbb{F})$ הפולינום האופייני של $A$ הוא $f_A(x)=\det(Ix-A)$.

ראינו ש־$v$ ו"ע של $A$ עם ערך עצמי $\lambda$ אמ"מ $v\in\ker(\lambda I-A)$, וכן $\lambda$ ע"ע אמ"מ $\dim\ker\lambda-A>0$.

**משפט 9.** $f_A(x)$ פולינום מתוקן (מקדם מוביל 1) מדרגה $n$, המקדם של $x^{n-1}$ הוא $-\operatorname{tr}A$, המקדם החופשי הוא $(-1)^n\det A$.

הוכחה.

- **תקינות הפולינום.** מבין $n!$ המחוברים, ישנו אחד יחיד שדרגתו היא $n$. הסיבה היא שמדטרמיננטה לפי תמורות, התמורה היחידה שתיצור איבר מסדר $x^n$ היא תמורת הזהות שתעבור על האלכסון. באינדוקציה על $n$, ונקבל:

$$f_A(x)=(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})=x^n+\cdots$$

באופן דומה אפשר להוכיח באינדוקציה באמצעות פיתוח לפי שורות:

$$f_A(x)=(x-a_{11})|A_11|+\underbrace{a_{21}|A_21|-a_{31}|A_31|+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|}_{\text{מה.א. דרגה קטנה מ־}n}$$

סה"כ גם כאן ראינו שהדרגה מתקבלת מהפולינום $\prod_{i=1}^n(x-a_{ii})$, כלומר הפולינום האופייני מתוקן.

- **המקדם של $x^{n-1}$ הוא $-\operatorname{tr}A$.** מקדמי $x^{n-1}$ מגיעים גם הם רק מ־$\prod_{i=1}^n(x-a_{ii})$ (הפולינום למעלה) שהם $\sum_{i=1}^n -a_{ii}=-\operatorname{tr}A$ המקדם החופשי.
- **המקדם החופשי.** מתקבל מהצבת 0. $f_A(0)=\det(I\cdot 0-A)=\det(-A)=(-1)^n\det A$.

■

**דוגמאות.**

א) אם $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ אז $f_A(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$ (נטו מהמשפט הקודם).

ב) אם $A=\operatorname{diag}(\lambda_1\dots\lambda_n)$ אז $f_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$.

ג) אם $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&&*\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$ אז גם כאן $f_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$ אך כדאי לשים לב שמשולשית עליונה לא בהכרח דומה לאלכסונית עם אותם הקבועים.

ד) אם $A=\begin{pmatrix}B&*\\0&C\end{pmatrix}$ כאשר $B,C$ בלוקים ריבועיים אז $f_A(x)=f_B(x)\cdot f_C(x)$.

**הגדרה 13.** בהינתן $T\colon V\to V$ ט"ל נגדיר את הפולינום האופייני שלה (פ"א) באופן הבא: נבחר בסיס $B$ למ"ו $V$, ונתבונן ב־$A=[T]_B$ ונגדיר את $f_T(x):=f_A(x)$.

"אתה פותר עכשיו שאלה משיעורי הבית" "אל תדאג הבודק כבר שלח פתרון" "מה?ם"

**משפט 10.** הפ"א של ט"ל מוגדר היטב. למטריצות דומות אותו פ"א. הוכחה. בשיעורי הבית. ויש סיכוי שגם בדף הסיכום.

**דוגמה.** נתבונן בהעתקה $T(f)=f'$, $\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$. נבחר בסיס $B=(1,x,\dots,x^n)$. אז:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&2&0&\dots&0\\0&0&0&3&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\\0&0&0&0&&\end{pmatrix}$$

אז:

$$f_T(x)=\det\begin{pmatrix}x&-1&0&\dots&\\&x&-2&0&\dots\\&&\ddots&\ddots&\end{pmatrix}=x^{n+1}$$

**משפט 11.** $T\colon V\to V$ ט"ל, אז $\lambda$ ע"ע של $T$ אמ"מ $f_T(\lambda)=0$.

הוכחה. יהא $B\subseteq V$ בסיס של $V$. אז $A=[T]_B$ ואז $f_T(\lambda)=0$ אמ"מ $f_A(\lambda)=0$ אמ"מ $\lambda$ ע"ע של $A$. ■

**הגדרה 14.** יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של $T$ (או $A$). הריבוי האלגברי של $\lambda$ הוא החזקה המקסימלית $d$ כך ש־$(x-\lambda)^d \mid f_T(x)$ (חלוקת פולינומים).

**דוגמה.** בעבור $T$ היא העתקת גזירת פולינום, הפ"ע $f_T(x)=x^{n+1}$ ולכן ע"ע יחיד הוא $0$. הריבוי האלגברי של $0$ הוא $n+1$. הריבוי הגיאומטרי של $0$ הוא $1$.

**סימון 2.** נניח ש־$\lambda$ ע"ע של $T$ (או $A$) אז $d_\lambda$ הריבוי האלגברי של $\lambda$ ו־$r_\lambda$ הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$.

## 2.5 ∼ על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי

**הערה 3.** בדוגמה שבטענה ראינו שמתקיים $\sum d_i=\sum n_i=n$ כאשר $n$ דרגת הפולינום. זה לא תמיד המצב.

דוגמה למצב בו זה לא קורה: $x^2(x^2+1)\in\mathbb{R}[x]$. סכום הריבויים האלגבריים הוא 2, אבל דרגת הפולינום היא 4. זה נכון מעל שדות סגורים אלגברית.

**משפט 12.** תהי $T\colon V\to V$ ט"ל. אזי לכל ע"ע $\lambda$ מתקיים $r_\lambda\le d_\lambda$.

הוכחה. יהי $\lambda$ ע"ע. אז $V_\lambda=\{v\in V\mid Tv=\lambda v\}$. יהי $B_\lambda\subseteq V_\lambda$ בסיס עבור $V_\lambda$. נשלים אותו לבסיס $B$ של $V$.

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\lambda & & 0 & * \\ & \lambda & & \\ 0 & & \ddots & \\ * & & & C\end{pmatrix}$$

ואז:

$$f_T(x)=(x-\lambda)^{r_\lambda}C(x)\implies r_\lambda\le d_\lambda$$

■

**משפט 13.** תהי $T\colon V\to V$ ט"ל עם פ"א $f_T(x)$. אז $T$ לכסינה אמ"מ שתי הטענות הבאות מתקיימות:

1. בעבור $k$ הע"ע שונים, $f_T(x)=\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{n_i}$
2. לכל $\lambda$ ע"ע של $T$ מתקיים $r_\lambda=d_\lambda$

(הבהרה: 1 לא גורר את 2. צריך את שניהם).

הוכחה.

$\Leftarrow$ $T$ לכסינה ראינו ש־1 מתקיים. במקרה שלכסינה ראינו ש־$n=\sum r_{\lambda_i}\le\sum d_{\lambda_i}=n$ ולכן אם לאחד מבין הערכים העצמיים מתקיים $r_\lambda\neq d_k$ אז מתקיים $r_k<d_k$ ונקבל סתירה לשוויונות לעיל.

$\Longrightarrow$

$$1\implies\sum d_{\lambda_i}=n$$
$$2\implies\sum r_{\lambda_i}=\sum d_{\lambda_i}=n$$

וסה"כ $\sum r_{\lambda_i}=n$ אמ"מ $T$ לכסינה. ■

### 2.5.1 פיבונאצ'י בשדה סופי

סדרת פיבונאצ'י:

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}_{=0}^{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

נניח שאנו מסתכלים מעל $\mathbb{F}_p$ כלשהו. אז הסדרה חייבת להיות מחזורית. **שאלה:** מתי מתקיים ש־$A^m=I$ (בעבור $m$ מינימלי)? במילים אחרות, מתי מתחילים מחזור.

היות שמספר הזוגות השונים עבור $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ a_n\end{pmatrix}$ הוא $p^2$, אז $m\le p^2$. עבור $p=7$: $0,1,1,2,3,4,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0,1$
– כלומר עבור $p=7$ יש מחזור באורך $m=16$.

**הערה 4.** תירואטית עם המידע הנוכחי ייתכן ויהפוך למחזורי ולא יחזור להתחלה

**טענה.** אם $p$ ראשוני אז $p \equiv 1 \pmod 5$ אז אורך המחזור חסום מלעיל ע"י $p-1$.

הוכחה. תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לקבלת מחזור באורך $k$ הוא $A^k = I$. אז:

$$f_A(x) = x^2 - x - 1$$

יש דבר שנקרא "הדדיות ריבועית" (חומר קריאה רשות במודל) שמבטיחה שורש לפולינום להלן עבור $p$ כנ"ל. אכן יש לנו שני ע"ע שונים (אם קיים רק אחד אז סתירה מהיות הדיסקרימיננטה $5 = 0$ אך $p \not\equiv 1 \pmod 5$). לכן קיימת $P$ הפיכה כך ש־:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

כך ש־$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. משפט פרמה הקטן אומר ש־$\lambda_1^{p-1} = \lambda_2^{p-1} = 1$. ואז $A^{p-1} = I$. ■

## 2.6 ~ שילוש

**הגדרה 15.** $T \colon V \to V$ ט"ל ניתנת לשילוש אם קיים בסיס $B$ ל־$V$ כך ש־$[T]_B$ משולשית.

**הערה 5.** אם $T$ ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניארים (האם איברי האלכסון של הגרסה המשולשית). יהיה מעניין לשאול אם הכיוון השני מתקיים.

**משפט 14.** $T \colon V \to V$ ט"ל. נניח ש־$f_T(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)$ (ניתנת לפירוק לגורמים ליניאריים) אז $T$ ניתנת לשילוש.

הוכחה. בסיס. $n = 1$ היא כבר משולשית וסיימנו.
צעד. נניח שהטענה נכונה בעבור $n$ טבעי כלשהו, ונראה נכונות עבור $n+1$. אז $f_T$ מתפרק לגורמים ליניאריים, לכן יש לו שורש. יהי $\lambda$ ע"ע של $T$. בסיס $B$ של $V$ מקיים ש־$[T]_B$ משולשית עליונה (נסמן $B = (w_1 \dots w_{n+1})$) $\iff$ אז $T(w_i) \in \operatorname{span}(w_1 \dots w_i)$. נגדיר את $w_1$ להיות ו"ע של $\lambda$. נשלימו לבסיס $B^1$.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & & * & \\ 0 & & \vdots & \\ \vdots & \cdots & C & \cdots \\ 0 & & \vdots & \end{pmatrix}$$

אז ניתן לומר כי:

$$f_T(x) = (x - \lambda) f_C(x)$$

נסמן $w = \operatorname{span}(w_2 \dots w_{n+1})$. קיימת העתקה ליניארית $S \colon W \to W$ כך ש־$f_S(x) = f_C(x)$. לפי ה"א קיים בסיס ל־$W$ הוא $B''$ שעבורו $S$ משולשית עליונה. נטען ש־$B = B'' \cup \{w_1\}$ ייתן את הדרוש.

$$\forall w \in B'' \colon (T - S)(w) = Tw - Sw = aw_1 + S(w) - S(w) = aw_1$$

(כלומר, השורה העליונה של $[T]_B$ "תרמה" את $aw_1$ בלבד) לכן:

$$(T - S)w \subseteq \operatorname{span}(w_1)$$

זה גורר שלכל $w \in W$ מליניאריות מתקיים ש־$(T-S)w \subseteq \operatorname{span}(w_1)$. סה"כ לכל $w \in B'' \cup \{w_1\}$ מתקיים $T(w_i) \in \operatorname{span}(w_1 \dots)$. ■

בהוכחה הזו, בנינו בסיס כך ש־:

$$[T(w) - S(w)]_B = ae_1$$

**הגדרה 16.** מטריצה ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.

**משפט 15.** מטריצה $A$ ניתנת לשילוש, אמ"מ הפ"א האופייני שלה מתפצל לגורמים לינארים.

**המשך בעמוד הבא**

# Cayley–Hamilton Theorem . . . 3

## 3.1 ~ על ההבדל בין פולינום לפולינום

נבחין ש־$\mathbb{F}[x]$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$. וכן $\mathbb{F}[x]$ הוא חוג חילופי עם יחידה. בחוג כפל לא חייב להיות קומטטיבי (נאמר, חוג המטריצות הריבועיות). אומנם קיימת יחידה (פולינום קבוע ב־1) אך אין הופכיים לשום דבר חוץ מלפונ' הקבועות. שזה מאוד חבל כי זה כמעט שדה. בהמשך, נגדיר את אוסף הפונקציות הרציונליות כדי להתגבר על כך.

אם נתבונן במטריצות דומות, יש הבדל בין להגיד $f_A(x) \in \mathbb{F}[x]$, אך אפשר לטעון $f_A(x) = |B|$ כש־$B \in M_n(\mathbb{F}(x))$. למה? כי $xI - A \in M_n(\mathbb{F}(x))$ (זה קצת מנוון כי איברי המטריצה הם או פולינומים קבועים או ממעלה 1). משום שדטרמיננטה שולחת איבר לשדה, אז $|B| \in \mathbb{F}(x)$. כך למעשה נגיע לכך שפולינומים אופייניים שווים כשני איברים בתוך השדה, ולא רק באיך שהם מתנהגים ביחס לקבועיים.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2),\ f(x) = x^3,\ g(x) = x,\ f, g \in \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2 \implies f = g$$

אך:

$$f(A) = A^3 = 0,\ g(A) = A \neq 0$$

זה לא רצוי. נבחין בשני שוויונות שונים – שוויון פונקציות, בהם $f = g$ מעל $\mathbb{F}_2$, ושוויון בשדה – בו $f - g \neq 0$ (כי $-x^2$ לא פולינום האפס, ואף מעל $\mathbb{F}_2$) ולכן ב־$\mathbb{F}_2(x)$ מתקיים $f \neq g$.

## 3.2 ~ מבוא למשפט קיילי־המילטון

**הגדרה 17.** יהי $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$, $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ נ"ס (נוצר סופית) וכן $T\colon V \to V$ ט"ל. נגדיר:

$$f(T) = \sum_{i=0}^{d} a_i T^i,\ T^0 = id,\ T^n = T \circ T^{n-1}$$

כנ"ל עם מטריצות (ראה תרגול)

**טענה.** אם $A = [T]_B$ ו־$f(x) \in \mathbb{F}[x]$, אז $[f(T)]_B = f(A)$. הוכחה נובעת מהתכונות $[TS]_B = AC,\ [T+S]_B = A + C,\ [\alpha T]_B = \alpha A,\ [S]_B = C <\ [T]_B = A$.

**טענה.** אם $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ו־$T\colon V \to V$ ט"ל, אז $(f \cdot g)(T) = f(T) \cdot g(T)$. באופן דומה $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$.

לכן קל לראות ש־$f(A) = 0 \iff f(T) = 0$.

**מסקנה 5.** אם $A, C$ דומות אז $f(C) = 0 \iff f(A) = 0$.

## 3.3 ~ משפט קיילי־המילטון

**משפט קיילי־המילטון.** לכל $T\colon V \to V$ ט"ל ($V$ נוצר סופית) ולכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים:

$$f_T(T) = 0,\ f_A(A) = 0$$

**דוגמה.** (מנוונת) נתבונן ב־$D\colon \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}_n[x]$ אופרטור הגזירה. ראינו $f_D(x) = x^{n+1}$ (הפולינום האופייני). אז נקבל:

$$f_D(D)(p) = p^{(n+1)} = 0 \implies f_D(D) = 0$$

**משפט 16.** **(קיילי המילטון)** תהי $T\colon V \to B$ ט"ל ($V$ נ"ס) או $A \in M_n(\mathbb{F})$, ו־$f_T(x) = f_A(x)$ הפ"א, אז $f_T(T) = 0,\ f_A(A) = 0$.

**משפט 17.** אם $A$ מייצגת של העתקה $T$. ו־$f \in \mathbb{F}[x]$, אז $f(T) = 0 \iff f(A) = 0$.

(באופן כללי, עבור כל פולינום).

הוכחה. נוכיח את המשפט בשלושה שלבים –

- נניח ש־$T$ ניתנת לשילוש. אזי, קיים בסיס $B =: (v_1 \dots v_n)$ כך ש־$[T]_B$ משולשית (עליונה). זאת מתקיים אמ"מ $\forall i \in [n]\colon Tv_i \in \operatorname{span}(v_1 \dots v_i)$. נפנה להוכיח את משפט קיילי־המילטון למקרה זה.

  תת־הוכחה.

  – בסיס: בעבור $n = 1$, אז קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש־$f_T(T) = T - \lambda I = 0$ (העתקה לינארית חד ממדית היא כפל בסקלר). בפרט $\forall v \in V\colon (T - \lambda)v = 0$.

- צעד: נניח ש־$W = \operatorname{span}(v_1 \dots v_n)$ כך ש־$\dim W \leq$ $B = (v_1 \dots v_n, v_{n+1})$ שעבורו $[T]_B$ משולשית. נגדיר תמ"ו $\dim V$, ועבורו נכון $\forall w \in W \colon Tw \in W$ (ניתן להראות שזה נכון עבור וקטורי הבסיס, ונכון לכל $w \in W$ מלינאריות). נגדיר $T|_W \colon W \to W$ את הצמצום של $T$ ל־$W$. ידוע ש־$T|_w$ ניתנת לשילוש ולכן מקיימת את תנאי האינדוקציה. לכן, $\forall w \in W \colon f_{T|_W}(T)(w) = 0$. אזי $f_{T|_W}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ וסה"כ $f_T(x) =$ $(x - \lambda_{n+1}) f_{T|_W}(x)$ וקיבלנו $\forall w \in W \colon f_T(T)(w) = 0$.

מספיק להראות ש־$\forall v \in V \colon (T - \lambda_{n+1}) v \in W$. למה? כי:

$$f_T(T)(v) = \left( \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i) \right) (T - \lambda_{n+1})(v)$$

מלינאריות, מספיק להראות ש־$(T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) \in W$, שכן זה מתקיים על כל בסיס אחר. אך זה ברור – עבור $[T]_B$ העמודה האחרונה היא:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} \implies (T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$$

■

- נוכיח בעבור מטריצה משולשית/ניתנת לשילוש.

תת־הוכחה. אם $A$ משולשית, אז $f_A(x) = f_{T_A}(x)$ כאשר $T_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ המוגדרת ע"י $T_A(v) = Av$, ואז $T_A$ ניתנת לשילוש וסיימנו.

אם $A$ ניתנת לשילוש, אז היא דומה למשולשית, והן בעלות אותו הפולינום האופייני. אז חזרה לתחילת ההוכחה. ■

- עבור $T$ כללית או $A$ כללית.

תת־הוכחה. נניח $A = [T]_B$ עבור בסיס $B$, וידוע $f_T(x) = f_A(x)$. ידוע ש־$A$ ניתנת לשילוש אמ"מ $f_A(x)$ מתפצל. טענה מהעתיד הלא רחוק: לכל שדה $\mathbb{F}$ קיים שדה $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ סגור אלגברית (כל פולינום מעל שדה סגור אלגברית מפתצל). על כן, ניתן לחשוב על $A \in M_n(\mathbb{F})$ כמו $A \in M_n(\mathbb{K})$. הפולינום האופייני מעל $K$ הוא אותו הפולינום האופייני מעל $\mathbb{F}$. לכן הוא מתפצל (מעל $\mathbb{K}$), ולכן הוא דומה למשולשית, ומהמקרה הראשון $f_A(A) = 0$. זאת כי $f_A(A)$ לא תלוי בשדה עליו אנו עובדים, וסה"כ הוכחנו בעבור מטריצה כללית, ולכן לכל ט"ל. ■

■

**הערה על שדות סגורים אלגברית.** (לא נאמר בקורס) העובדה שלכל שדה יש שדה שסגור אלגברית – טענה שתלויה באקסיומת הבחירה. הסגור האלגברי הוא יחיד.

**המשך בעמוד הבא**

# Ring Theory ........ 4

## 4.1 ~ מבוא והגדרות בסיסיות

אז, מה זה אובייקט אלגברי? הרעיון – "Data עם אקסיומות". אנו כבר מכירים רבים מהם: תמורות, חבורות, שדות, מרחבים וקטורים, ועוד. עתה נכיר אובייקט אלגברי בשם חוג.

**הגדרה 18.** חוג עם יחידה הוא קבוצה עם שתי פעולות, כפל וחיבור, ניטרלים לפעולות (0, 1) כך שמתקיימות כל אקסיומות השדה למעט (פוטנציאלית) קיום איבר הופכי, וקומטטיביות הכפל.

אנחנו נתעניין ספציפית בחוגים קומטטיבים, כלומר, בהם הכפל כן קומטטיבי. המטריצות הריבועיות מעל אותו הגודל, לדוגמה, הוא חוג שאיננו קומטטיבי. החוג ה"בסיסי ביותר" – חוג השלמים (אין הופכי) הוא חוג קומוטטיבי. ישנם חוגים בלי יחידה (לדוגמה הזוגיים בלי יחידה), שלא נדבר עליהם כלל.

**הגדרה 19.** תחום שלמות הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה ללא מחלקי 0.

**הגדרה 20.** חוק ייקרא ללא מחלקי 0 אם: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$

דוגמאות לחוגים עם מחלקי 0:

- $M_2(\mathbb{R})$: הוכחה $a \cdot b = 0$, $a = b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ הוכחה $2 \cdot 3 = 0$.

**משפט 18.** בתחום שלמות יש את כלל הצמצום בכפל: אם $ab = ac \wedge a \neq 0$ אז $b = c$.

הוכחה.

$$ab \cdot ac = 0 \implies a(b \cdot c) = 0 \implies a = 0 \vee b - c = 0$$

בגלל ש־$a \neq 0$, אז $b - c = 0$. נוסיף את $c$ הנגדי של $-c$ ונקבל $b = c$. ■

דוגמאות לתחום שלמות:

- שדות
- השלמים
- חוג הפולינומים

## 4.2 ~ ראשוניות ואי־פריקות

**הגדרה 21.** יהי $R$ תחום שלמות, $a, b \in R$. נאמר ש־$b \mid a$ אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש־$ac = b$.

**הגדרה 22.** $u \in R$ נקרא הפיך אם קיים $\alpha \in R$ כך ש־$\alpha u = 1$.

**משפט 19.** יהי $R$ תחום שלמות, $u \in R$ הפיך. יהי $a \in \mathbb{R}$. אז $u \mid a$.

הוכחה. $u \mid 1$, $1 \mid a$. יחס החלוקה טרנזטיבי ולכן $u \mid a$. ■

**סימון 3.** קבוצת ההפיכים מוסמנת ב־$R^x$.

**דוגמאות.**

1. אם $R = \mathbb{F}$, אז $\mathbb{F}^x = \mathbb{F} \setminus \{0\}$
2. אם $R = \mathbb{Z}$ אז $\mathbb{Z}^2 = \{\pm 1\}$
3. אם $R = \mathbb{F}[x]$ אז $R^x = \mathbb{F}^x$ (ההתייחסות לסקלרים $\mathbb{F}$ היא כאל פונקציות קבועות)

**הגדרה 23.** $a, b \in R$ נקראים חברים אם קיים $u \in R^x$ הפיך כך ש־$a = ub$, ומסמנים $a \sim b$

**משפט 20.** יחס החברות הוא יחס שקילות.

הוכחה.

א. $a \sim a$ כי $1 \in R^x$

ב. אם $a \sim b$ אז קיים $u \in R^x$ כך ש־$a = ub$. קיים ל־$u$ הופכי $\alpha$ אז $\alpha a + \alpha u b = b$ ולכן $b \sim a$.

ג. נניח $a \sim b \wedge b \sim c$, כי מכפלת ההופכיים הפיכה $a \sim c$ וסיימנו.

■

"אני אני חבר של עומר, ועומר חבר של מישהו בכיתה שאני לא מכיר, אני לא חבר של מי שאני לא מכיר." המרצה: "למה לא? תהיה חבר שלו".

**משפט 21.** הופכי הוא יחיד

(אותה ההוכחה כמו בשדות. לא בהכרח בתחום שלמות, מעל כל חוג)

הוכחה. יהי $a \in R^x$ ו־$u, u'$ הופכיים שלו, אז:

$$u = u \cdot 1 = u \cdot a \cdot u' = 1 \cdot u' = u'$$

■

**משפט 22.** אם $a \mid b$ וכם $b \mid a$ אז $a \mid b$ (בתחום שלמות).

הוכחה.

$$a \mid b \implies \exists c \in \mathbb{R}\colon ac = b$$
$$b \mid a \implies \exists d \in \mathbb{R}\colon bd = a$$

לכן:

$$ac = b \implies acd = a \implies a(cd-1) = 0 \implies a = 0 \vee cd = 1$$

■

אם $a = 0$ אז $b = 0$ (ממש לפי הגדרה) ו־$\sim$ שקילות (רפליקסיביות). אחרת, $cd = 1$ ולכן $c$ הפיך, סה"כ $b \mid a$.

"אני חושב שבעברית קראו להם ידידים, לא רצו להתחייב לחברות ממש".

**הגדרה 24.** איבר $p \in R$ נקרא אי־פריק אם מתקיים $p = ab \implies a \in R^x \vee b \in R^x$.

**הגדרה 25.** איבר $p \in R$ יקרא ראשוני אם $p \mid (a \cdot b) \implies p \mid a \vee p \mid b$.

**הערה 6.** איברים הפיכים לא נחשבים אי־פריקים או ראשוניים. הסיבה להגדרה: בשביל נכונות המשפט היסודי של האריתמטיקה (יחידות הפירוק לראשוניים).

**משפט 23.** בתחום שלמות כל ראשוני הוא אי פריק.

הערה: שקילות לאו דווקא.

הוכחה. יהי $p \in R$ ראשוני. יהיו $a, b \in R$ כך ש־$p = ab$. בה"כ $p \mid a$. אז קיים $c$ כך ש־$pc = a$ ולכן $pcb = p$. סה"כ $p \neq 0$ ולכן $cb = 1$ (ראה לעיל) ו־$b$ הפיך. ■

**הגדרה 26.** $R$ תחום פריקות יחידה אם $\prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{j=1}^{m} q_i$ עבור $p_i, q_j$ ראשוניים, אז $m = n$, ועד לכדי סידור מחדש, לכל $i \in [n]$ $p_i \sim q_i$

**משפט 24.** נניח שבתחום שלמות $R$, כל אי־פריק הוא גם ראשוני. אז $R$ תחום פריקות יחידה.

ההוכחה: זהה לחלוטין לזו של המשפט היסודי.

הוכחה. באינדוקציה על $n+m$. בסיס: $n+m = 2$ ולכן $n = m = 1$ (כי מעפלה ריקה לא רלוונטית מאוד) אז $p = q$. נעבור לצעד. נניח שהטענה נכונה לכל $n+m < k$. נניח ש־$n+m = k$. אז $p_1 \mid \prod_{j=1}^{m} q_j$. בה"כ $p_1 \mid q_1$. $q_1$ אי־פריק ולא הפיך. $p_1$ לא הפיך. לכן $p_1 \sim q_1$. אז עד כדי כפל בהופכי נקבל ש־$\prod_{i=2}^{n} p_i = \prod_{j=2}^{n} q_j$. הערה: ראשוני כפול הפיך נשאר ראשוני. מכאן הקענו לדרוש וסיימנו (הערה שלי: כאילו תכפילו בחברים ותקבלו את מה שצריך). ■

**הגדרה 27.** יהי $R$ תחום שלמות. תת־קבוצה $0 \neq I \subseteq R$ נקראת אידיאל אם:

A. $\forall a, b \in I\colon a + b \in I$ – סגירות לחיבור.

A. $\forall a \in I \, \forall b \in R\colon ab \in I$ – תכונת הבליעה. [בפרט $0 \in I$]

**דוגמאות:**

1. $0$ תמיד אידיאל, כך החוג תמיד אידיאל.
2. הזוגיים ב־$\mathbb{Z}$.
3. לכל $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ אידיאל ($n$ כפול השלמים). הזוגיים מקרה פרטי.
4. $\langle f \rangle \subseteq \mathbb{F}[x]$ המוגדר לפי $\langle f \rangle := \{g \in \mathbb{F}[x] \mid f | g\}$

5. הכללה של הקודמים: עבור $a \in R$ נסמן $\langle a \rangle := \{a \cdot b \mid b \in R\}$
6. $I = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(0) = 0\}$ (לעיתים מסומן $\forall a \in R\colon aR = \langle a \rangle$)
7. נוכל להכליל את 4 עוד: ("הכללה של הכללה היא הכללה. זה סגור להכללה. זה קורה הרבה במתמטיקה")

$$I = aR + bR = \{ar + bs \mid r, s \in R\}$$

וניתן להכליל עוד באינדוקציה.

**הגדרה 28.** אידיאל $I$ נקרא ראשי אם הוא מהצורה $aR$ עבור $a \in R$ כלשהו.

**הגדרה 29.** תחום שלמות נקרא ראשי אם כל אידיאל שלו ראשי.

**הערה 7.** אנחנו סימנו אידיאל ב־$aR$ ובקורס מסמנים $Ra$, באופן כללי אפשר לדבר על אידיאל שמאלי ואידיאל ימני. תזכורת: $I \subseteq R$ היא אידיאל אם היא סגורה לחיבור ומקיימת את תכונת הבליעה. בתחום ראשי כל אידיאל הוא אידיאל ראשי.

**משפט 25.** ב־$R \neq \{0\}$ תחום ראשי אז כל אי פריק הוא ראשוני.

(תנאי מספיק אך לא הכרחי)

הוכחה. יהי $o$ אי פריק (א"פ). יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$p \mid ab$. תיקון [משבוע שעבר]: במקום $I = Ra + Rb$, נשתמש ב־$I = Ra + Rp$. בגלל ש־$R$ תחום ראשי, קיים $c \in R$ כך ש־$I = Rc$, ו־$a, p \in I$ כלומר $c \mid p \wedge c \mid a$. $p$ א"פ ולכן $p \sim c$ או $c$ הפיך.

- $c$ הפיך $\impliedby \in I \impliedby R = R \cdot 1 \in I \subseteq R \impliedby I = R$. קיימים $r, s \in R$ כך ש־$ra + sp = 1$. נכפיל ב־$b$ ונקבל $b = rab + spb$ וסה"כ $p \mid b$.
- אם $p \sim c$, אז $c \mid a \wedge p \mid c$ ולכן $p \mid a$.

■

**מסקנה 6.** אם $R$ תחום שלמות ראשי אזי יש פריקות יחידה למכפלה של אי פריקים עד כדי חברות.

**משפט 26.** יהיו $a, b \in R$, אז $a, b$ ייקראו זרים אם $\forall c \in R\colon c \mid a \wedge c \mid b \implies c \in R^x$

**הגדרה 30.** יהי $g \in R$ כך ש־:

1. $g \mid a \wedge g \mid b$
2. $\forall \ell \in R\colon \ell \mid a \wedge \ell \mid b$
3. $\ell \mid g$

אז $g$ כנ"ל הוא הגורם המשותף המקסימלי של $a, b$, הוא $\gcd(a, b)$

**משפט 27.** יהי $R$ תחום שלמות ויהיו $a, b \in R$. נניח שקיימים $r, s \in R$ כך ש־$g = ra + sb$ אשר מחלק את $a, b$. אז:

1. $\gcd(a, b) = g$
2. ה־$\gcd$ מוגדר ביחידות עד לכדי חברות.
3. בתחום ראשי, לכל $a, b$ קיים $g$ כנ"ל.

(הערה: רק 3 באמת דורש תחום ראשי)

הוכחה.

1. יהי $\ell \mid a, b$ אז $\ell \mid ra, sb$ וסה"כ $\ell \mid g$.
2. מ־1 (בערך) אם $g, g'$ מקיימים את היותם $\gcd$ אז $g \mid g' \wedge g' \mid g$ ולכן $g \sim g'$.
3. נסמן $I = Ra + Rb$. אז $I = Rg$, וקיימים $r, s \in R$ כך ש־$g = ra + sb$ ולכן $a, b \in I$ אז $g \mid a, b$ וסיימנו מ־1.

■

**מסקנה 7.** בתחום ראשי, אם $a, b$ זרים אז $\exists r, s \in R\colon ra + sb = 1$ (אלגוריתם אוקלידס המורחב).

**משפט 28.** $\mathbb{F}[x]$ תחום ראשי.

הוכחה. יהי $I \subseteq \mathbb{F}[x]$ אידיאל. אם $I = \{0\}$, הוא ראשי. אחרת, $I \neq \{0\}$, ואז: יהי $0 \neq p \in I$ פולינום מדרגה מינימלית, ויהי $f \in I$. אז קיימים $q, r \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$f = qp + r$. ידוע $\deg r < \deg p$. בגלל ש־$p \in I \wedge f \in I$ אז $f - qp \in I$. אם $r$ אינו 0, קיבלנו סתירה למינימליות הדרגה של $p$. ■

הוכחה זהה עובדת בשביל להראות ש־$\mathbb{Z}$ תחום ראשי, אך עם דרגה במקום ערך מוחלט.

**הגדרה 31.** תחום שלמות נקרא אוקלידי אם קיימת $N\colon R\setminus\{0\}\to\mathbb{N}_+$ כך ש־$\forall a,b\in R\setminus\{0\}\colon \exists u,r\in R\colon a=ub+r$ כאשר $r\neq 0$ או $N(b)>N(r)$, ו־$N$ סאב־כפלית כלומר $\forall 0\neq a,b\in R\colon N(a)\le N(ab)$.

ברגע שיש לנו את ההגדרה של תחום אוקלידי, $N$ הפונקציה שתשתמש אותנו בשביל להראות את ההוכחה שכל תחום אוקלידי הוא תחום ראשי (בדומה לערך מוחלט או $\deg$ בהוכחות קודמות). ההפך נכון תחת השערת רימן המוכללת (לא ראיתם את זה צץ, נכון?).

אינטואציה לחוג אוקלידי היא "חלוקה עם שארית", כאשר פונקצית הגודל $N$ דורשת שהשארית תהיה "אופטימלית". בחוג הפולינומים $N=\deg$ (פרטים בהמשך), ובחוג המספרים השלמים $N=|\cdot|$.

דוגמה לחוג שאינו אוקלידי: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ הוא $\{a+b\sqrt{-5}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.

**משפט 29.** חוג אוקלידי $\Longleftarrow$ פריקות יחידה (דומה למשפט היסודי של האריתמטיקה).

**משפט 30.** חוג אוקלידי $\Longleftarrow$ תחום שלמות.

(הוכחה בויקיפדיה)

לדוגמה בחוג לעיל $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$ על אף ש־$2,3$ אי־פריקים וכן $(1+\sqrt{-5}),(1-\sqrt{-5})$ אי פריקים.

**דוגמה** (חוג השלמות של גאוס).

$$R=\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

הנורמה:

$$N\colon\mathbb{R}\to\mathbb{Z}_{\ge 0},\ \ N(a+bi)=a^2+b^2=|a+bi|^2$$

בדומה להוכחה לפיה הערך המוחלט של מורכב הוא כפלי, ניתן להראות ש־$N$ כפלית. מי הם ההפיכים ב־$\mathbb{Z}[i]$? מי שמקיים $\alpha\beta=1$, כלומר:

$$N(\alpha)N(\beta)=1=N(1),\ \ \alpha=a+bi,\ \ a^2+b^2=1\implies a+bi=\pm1,\pm i$$

בהנחה שמוגדרת נורמה כזו, החוג הוא אוקלידי (תנאי זה הכרחי אך לא מספיק).

**משפט 31.** יהי $p\in\mathbb{Z}$ ראשוני. התנאים הבאים שקולים:

- $p$ פריק ב־$\mathbb{Z}[i]$
- $p=m^2+n^2$ עבור $n,m\in\mathbb{Z}$
- $p=2$ או $p\equiv 1 \pmod 4$
- קיימים $r,s\in R$ כך ש־$ra+sb=1$

שימו לב ש־$\mathbb{Z}$ בתוך $\mathbb{Z}[i]$ לא סגורים לבליעה.

**הגדרה 32.** $R\subseteq I$ אידיאל נקרא ראשוני אם $\forall a,b\in R\colon (a\cdot b)\subseteq P$, אז $(a)\in P\vee(b)\in P$.

**הגדרה 33.** אידיאל $I\subseteq R$ נקרא אי־פריק אם $\forall a,b\in R$ אם $I=(a\cdot b)$ אז $I=(a)$ או $I=(b)$.

ראינו, שבתחום ראשי אי פריק=ראשוני. ניתן להראות באופן שקול כי:

**משפט 32.** $R$ תחום ראשי, אז $I$ ראשוני אמ"מ $I$ אי־פריק.

**הגדרה 34.** יהי $R$ תחום שלמות [אפשר להתעסק גם עם אידיאל ימני ושמאלי] ונניח ש־$I\subseteq R$ אידיאל. אז $R/_I:=\{a+I\mid a\in R\}$ הוא חוג (בהגדרת $a+I=\{a+i\mid i\in I\}$ חיבור מנות), כאשר הפעולות:

- $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$
- $(a+I)(b+I)=ab+I$

צריך להוכיח שזה לא תלוי בנציגים (הנציגים $a,b$) והכל אבל בן לא עומד לעשות את זה. נשאר כתרגיל בעבור הקורא.

## 4.3 ~ הרחבת שדות

**משפט 33.** בתחום ראשי $R$, אם $I$ אידיאל אי־פריק, אז $R/_I$ שדה.

**דוגמאות.**

- $\mathbb{Z}/_{\langle p\rangle}$ שדה.
- $\mathbb{R}[x]$ תחום ראשי, ידוע $x^2+1$ אי־פריק. לכן $\mathbb{R}[x]/_{\langle x^2+1\rangle}\cong\mathbb{C}$. הרעיון: נוכל להסתכל על $p$ פולינום המבוטא כמו:

$$p(x)=q(x)\cdot(x^2+1)+ax+b=ax+b+\langle x^2+1\rangle$$

ואם נכפיל שני יצורים כאלו:

$$((ax+b)+I)+(cx+d+I))=acx^2+(ad+bc)x+bd+I$$

אך ידוע ש־$x^2+1=0$ (כי זה האידיאל שלנו) עד לכדי נציג, כלומר מתקיים שוויון ל־$bd-ac+(ad+bc)x+I$ וזהו כפל מרוכבים. אפשר גם להראות קיום הופכי וכו'.

הוכחה. יהי $0\neq a+I\in R/_I$. אם $a\neq 0$, אז ב־$R$ מתקיים $p\nmid a$ אי $p$ א"פ (אם הוא היה מחלק את $a$ אז $a=0$) ולכן $p,a$ זרים (כי האידיאל אי פריק וכו'). אז קיימים $r,s\in R$ כך ש־$ar+ps=1$. סה"כ:

$$ar+ps+I=1+I\implies ar+I=1+I\quad\top$$

לכן $r+I$ הופכי של $a+I$ וסיימנו. ■

(למעשה זה אמ"מ – הכיוון השני תרגיל בעבור הקורא).

**הגדרה 35.** יהי $R$ תחום שלמות, $a_1\dots a_n\in R$ ו־$\ell=\operatorname{lcm}(a_1\dots a_n)$ אמ"מ:

1. $\forall i\in[n]\colon a_i\mid\ell$
2. $\forall b\in R\colon\forall i\in[n]\colon a_i\mid b\longrightarrow\ell\mid b$

**דוגמה.** $R=\mathbb{Z},\ \operatorname{lcm}(2,6,5)=30$.

**משפט 34.** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}[x]$ פולינום אי־פריק ממעלה $\deg f>1$. אז קיים $\mathbb{K}\supseteq\mathbb{F}$ כך שב־$\mathbb{K}$ יש ל־$f$ שורש.

ההוכחה למשפט קונסטרקטיבית, ובה צריך להראות שהקבוצה:

$$\mathbb{K}=\{p(A_f)\mid p\in\mathbb{F}[x]\}$$

עם חיבור וכפל מטריצות, היא שדה. השיכון $\alpha\mapsto\alpha I$ משכן את $\mathbb{K}\mapsto\mathbb{F}$.

**משפט 35.** (ללא הוכחה בקורס) לכל שדה $\mathbb{F}$ קיים ויחיד שדה $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$ סגור אלגברית.

דוגמה: $\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{C}$.

## 4.4 ∼ חוג הפולינומים

(תת־פרק זה לקוח מתרגול בקורס)

**הגדרה 36.** הדרגה של הפולינום היא $\deg(f):=\max\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq 0\}$, ומגדירים $\deg(0)=-\infty$

**משפט 36.**

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g\qquad\deg(d+g)=\max\{\deg f,\deg g\}$$

**הערה 8.** חוג הפולינומים הוא חוג אוקלידי כי $N=\deg f$ מקיימת את התנאי של חוג אוקלידי. לכן ממשפט הוא תחום ראשי.

.

**מסקנה 8.** לכל $f,g\in\mathbb{F}[x]$, אם $g\neq 0$ אז קיימים ויחידים פולינומים $q,r\in\mathbb{F}[x]$ כך ש־$f=qg+r\wedge\deg r<\deg g$

**הגדרה 37.** נאמר שפולינום $q$ מחלק את $f$ אם $r=0$ ומסמנים $q\mid f$.

**מסקנה 9.**

1. $(x-a)\mid f\iff f(a)=0$ (משפט בזו)
2. אם $\deg f=n>-\infty$, ל־$f$ לכל היותר $n$ שורשים כולל ריבוי.
3. נניח ש־$f,g\in\mathbb{F}[x]$ ו־$\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$, כאשר $K$ שדה. אם $f\mid g$ מעל $K$ אז $f\mid g$ מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה.

1. הוכחה למשפט בזו:
   $\Longrightarrow$ נניח $f\mid x-a$. אז קיים פולינום $g$ כך ש־$f=(x-a)g$. אז $f(a)=(a-a)g(a)=0$.
   $\Longleftarrow$ נניח $f(a)=0$. אז קיימים $q,r\in\mathbb{F}[x]$ כך ש־$f=q(x-a)$ ועל כן $0=f(a)=q(a)(a-a)+r(a)=0$ ולכן $r(a)=0$. משום ש־$r$ פולינום קבוע (דרגתו קטנה מ־1, כי חילקנו ב־$(x-a)$ מדרגה 1), אז $r(x)=0$.
2. אינדוקציה
3. נוכיח ב"contrapositive": אנו יודעים ש־$\neg Q\to\neg P\iff P\to Q$. נניח ש־$f\nmid g$ מעל $\mathbb{F}$. קיימים $q,r\in\mathbb{F}[x]$ כך ש־$r\neq 0,\ f=qg+r$. הפירוק הזה הוא גם ב־$\mathbb{K}[x]$. מיחידות $r$, נקבל ש־$f\nmid g$ כל מעל $K$.

■

"לא הנחתי בשלילה, הוכחתי בקונטראפוסיטיב"

**משפט 37.** בהינתן $f \in \mathbb{F}[x]$ ו־$\lambda \in \mathbb{F}, r \in \mathbb{N}$ אז $\lambda$ יקרא שורש מריבוי $r$ של $f$ אם $(x-\lambda)^n \mid f \wedge (x-\lambda)^{n+1} \nmid f$.

**משפט 38.**

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]\colon f(\lambda)=0 \implies \exists g \in \mathbb{F}[x]\colon f(x)=(x-\lambda)g(x)$$

**משפט 39.** (באינדוקציה על הטענה הקודמת) בהינתן $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית:

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]\colon \exists(\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{F}, a_n \in \mathbb{F}\colon a_n \cdot f = \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$$

**משפט 40.** (מסקנה מהטענה הקודמת שניתן להוכיח באינדוקציה ללא הרחבת שדות) לפולינום $f \in \mathbb{F}[x]$ שאינו אפס יש לכל היותר $\deg f$ שורשים.

**הערה 9.** שימו לב! כל המסקנות שלנו על תחומים ראשיים תקפים גם על פולינומים. בפרט, ניתן לכתוב כל פולינום $\mathbb{F}[x]$ כמכפלה של גורמים אי־פריקים ב־$\mathbb{F}[x]$ (אם $\mathbb{F}$ סגור אלגברית, אלו גורמים לינאריים) עד לכדי סדר וחברות (קבועים).

**הערה 10.** שימו לב שחלק ניכר מהמשפטים לעיל נכונים בעבור פולינומים מעל שדה ולא מעל כל חוג (בפרט, המשפט לפיו חוג הפולינומים תחום אוקלידי).

עתה נציג משפט פשוט אך מועיל ממתמטיקה B, שלעיתים משמש לניחוש שורשי פולינום ע"מ לפרקו.

**משפט 41.** יהי $p=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום עם מקדמים שלמים. יהי $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך ש־$p\left(\frac{a}{b}\right)=0$ שורש, ובה"כ $\gcd(a,b)=1$ (אחרת ניתן לצמצם). אזי $a \mid \alpha_0 \wedge b \mid \alpha_n$.

**מסקנה 10.** $\forall A \in M_n(\mathbb{F})\ \forall k \ge n\ \exists p(c) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]\colon A^k = p(A)$.

מסקנה זו נובעת מאלגוריתם לביטוי $A^{n+c}$ כקומבינציה לינארית של $I \cdots A^{n-1}$ שמופיע בסוף הסיכום.

### 4.4.1 פונקציות רציונליות ומספרים אלגבריים

**אינטואציה:** הרעיון של פונקציה רציונלית היא להיות "פולינום חלקי פולינום". נפרמל את הדבר הזה בעבור כל שדה מעל נוכל להגדיר את מרחב הפולינומים.

**משפט 42.** בהינתן $\mathbb{F}$ שדה הקבוצה $\{(f,g) \mid f,g \in \mathbb{F}[x], g \neq 0\}$ משרה את יחס השקילות הבא:

$$(f,g) \sim (\tilde{f},\tilde{g}) \iff f \cdot \tilde{g} = \tilde{f} \cdot g$$

**סימון 4.** נסמן כל איבר במחלקת השקילות ע"י $\frac{f}{g}$ שמייצגים אותו.

**הגדרה 38.** שדה הפונקציות הרציונליות הוא הקבוצה $Q[x]$ היא אוסף מחלקות השקילות של $\sim$ מהמשפט הקודם, עם פעולות החיבור והכפל הבאות:

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{f}}{g\tilde{g}} \wedge \frac{f}{g} + \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{g}+g\tilde{f}}{g\tilde{g}}$$

**למה 1.** הגדרות הפעולות לעיל מוגדרות היטב (כלומר הן לא תלוליות בנציגים)

**משפט 43.** $Q[x]$ שדה, כאשר $\frac{0}{1}$ הניטרלי לחיבור ו־$\frac{1}{1}$ הניטרלי לכפל.

**המלצה.** לקרוא שוב את פרק 2.1, "על ההבדל בין פולינום לפולינום", בו נבחין שלמרות ש־$|\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2| = 4$, ישנם אינסוף פולינומים מעל השדה הזה.

**אינטואציה.** למעשה, נרצה להגיד שדה הפונקציות הרציונליות הוא איזומורפית (קאנונית, ולכן נתייחס אליו כאילו הוא שווה) ל־:

$$Q[x] \cong \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \in \mathbb{F}[x]\right\}$$

כאשר $\mathbb{F}[x]$ חוג הפולינומים מעל השדה $\mathbb{F}$. עוד כדאי לציין ש־$Q[x]$ מכיל עותק של $\mathbb{F}[x]$ (עד לכדי איזומורפיזם) בעבור $g=1$ פולינום היחידה. כמובן ש"איזומורפיזם" בהקשר הזה מדבר על העתקה (לא בהכרח לינארית) שמשמרת את פעולות החוג.

**משפט 44.** לכל $p$ ראשוני $\forall x \in \mathbb{F}_p\colon x^p = x$.

**הערה 11.** זוהי מסקנה ישירה מהמשפט הקטן של פרמה.

**הגדרה 39.** מספר מרוכב $\alpha \in \mathbb{C}$ יקרא מספר אלגברי אם קיים פולינום $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש־$f(\alpha) = 0$.

**הגדרה 40.** מספר מרוכב שאינו אגלברי יקרא מספר טרנסצנדנטי.

**דוגמאות.** נבחין ש־$\sqrt{\alpha}$ הוא אלגברי כי הוא שורש של $x^2 - \alpha$. קיימות הוכחות לפיהן $e$ ו־$\pi$ הם מספרים טרנסצדנטיים.

**משפט 45.** בהניתן $\mathbb{C} \supseteq V \neq 0$ תמ"ו מעל $\mathbb{C}$, אם $\forall x \in \mathbb{C} \colon xV \subseteq V$ אז $x$ אלגברי.

הוכחה. נגדיר $T_x \colon V \to V$ כך ש־$T_x(v) = xv$ (ההעתקה מוגדרת היטב מהנתון). אזי $f_T(T) = 0$. אזי:

$$f_T(t) =: \sum_{i=1}^{n} a_n t^n \implies 0_V = f(T)v = \sum_{i=1}^{n} a_n T^n v = \left(\sum_{i=1}^{n} a_n x^n\right) v = f(x)v$$

בפרט עבור $v \in V \setminus \{0\}$ יתקיים $f(x) = 0$ ולכן $x$ אלגברי. ■

**המשך בעמוד הבא**

# Primary Decomposition . . . . . . . . 5

## 5.1 ∼ מרחבים $T$־שמורים וציקליים

**הגדרה 41.** נניח ש־$V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו־$T\colon V\to V$ ט"ל. אז $U\subseteq V$ תמ"ו נקרא $T$־אינווריאנטי/$T$־שמור/ה אם לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$.

**דוגמאות.** $V,\{0\}$ הם $T$־אינווריאנטים. גם המ"ע (המרחבים העצמיים) הם $T$־אינוואריאנטי.

**הערה 12.** שימו לב: אם $U\subseteq V$ תמ"ו אינווריאנטי, אז $T|_U\colon U\to U$ ט"ל.

**הערה 13.** נניח ש־$u_1\dots u_k$ בסיס ל־$U$ כנ"ל, ו־$W\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$V=W\oplus U$, ונגיד ש־$w_{k+1}\dots w_n$ בסיס ל־$W$, אז $B=(u_1\dots u_k,w_{k+1}\dots w_n)$ מקיים:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T|_U] & A\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

(כאשר $[T|_U]\in M_k$ ו־$B\in M_{k}$). ותחת ההנחה שאכן $T$ הוא $U$־איוואריאנטי ו־$W$־איווריאנטי, אפשר לייצג אותו באמצעות שתי מטריצות מייצגות על האלכסון (ראה הוכחת המשפט הבא)

**משפט 46.** יהי $V$ מ"ו, $U,W$ תמ"וים ונניח $V=U\oplus W$ וגם $U,W$ הם $T$־איוואריאנטים. אז $p_T(x)=p_{T|_U}(x)\cdot p_{T|_W}(x)$

הוכחה. משום ש־$V=W\oplus U$, קיים בסיס $B=(u_1\dots u_k,w_{k+1}\dots w_n)$ כך ש־$u_1\dots u_k$ בסיס ל־$U$ ו־$w_{k+1}\dots w_n$ בסיס ל־$W$. נבחין, שבייצוג תחת הבסיס הזה:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}[T|_U]_B & 0_{n\times(n-k)}\\ 0_{(n-k)\times n} & [T|_W]_B\end{pmatrix}$$

זאת כי לכל $v\in V$ ניתן לייצגו בצורה יחידה כסכום של $u\in U,w\in W$ כך ש־$v=u+w$, כלומר $Tv=Tu+Tw$. ואכן תחת העתקת הקורדינאטות מהגדרת כפל וקטור במטריצה הטענה לעיל מתקיימת. כלומר:

$$p_T(x)=\begin{vmatrix}Ix-[T|_U]_B & 0\\ 0 & Ix-[T|_W]_B\end{vmatrix}=|Ix-[T|_U]_B|\cdot|Ix-[T|_W]_B|=p_{T|_U}(x)\cdot p_{T|_W}(x)$$

כדרוש. ∎

**משפט 47.** בהינתן $U_1\dots U_k$ מרחבים $T$־איוואריאנטים כך ש־$V=\bigoplus_{i=1}^k U_i$, מתקיים $p_T(x)=\prod_{i=1}^k p_{T|_{U_i}}$.

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם. ∎

**הגדרה 42.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $T\colon V\to V$ ט"ל ו־$v\in V$ וקטור. אז תת־המרחב־הציקלי הנוצר מ־$T$ ע"י $T$ הוא

$$\mathcal{Z}(T,v):=\operatorname{span}\{T^k(v)\mid k\in\mathbb{N}_0\}$$

**משפט 48.**

- $\mathcal{Z}(T,v)$ תמ"ו של $V$ – טרוויאלי.
- $\mathcal{Z}(T,v)$ תמ"ו $T$־איוואריאנטי – טרוויאלי גם.

עתה נציג משהו נחמד. אם $V$ נוצר סופית, גם $\mathcal{Z}(T,v)$ נ"ס. נגיד שיהיה $k\in\mathbb{N}_0$ מינימלי, כך שמתקיים $\mathcal{Z}(T,v)=\operatorname{span}\{v,Tv,\dots T^{k-1}v\}$. אז $T^kv\in\mathcal{Z}(T,v)$. לכן קיימים $a_0\dots a_{k-1}$ כך ש־$T^kv+a_{k-1}T^{k-1}v+\dots+a_0v=0$. ניתן לקחת כבסיס את $v,Tv\dots T^{k-1}v$ של $\mathcal{Z}(T,v)$. אז:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\vdots&0&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}$$

כאשר השורה האחרונה כי:

$$T(T^{n-1}v)=-\sum_{k=0}^{n-1}a_kT^kv$$

**הגדרה 43.** $A_f=[T]_B$ היא המטריצה המצורפת לפולינום $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$.

## 5.2 ~ הפולינום המינימלי

דיברנו על הפולינום האופייני $f_A = f_T = \det(Ix - A)$. עוד ציינו בהינתו מטריצה, המטריצה המצורפת $A_f$ מקיימת $f_{A_f} = f(x)$.

**משפט 49.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נביט בקבוצה $I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] \colon p(A) = 0\}$, אז $I_A \subseteq \mathbb{F}[x]$ אידיאל, קיים ויחיד ב־$I_A$ פולינום מתוקן בעל דרגה מינימלית.

**הגדרה 44.** $I_A$ לעיל יקרא הפולינום המיימלי.

הוכחה. נבחין כי $0 \in I_A$. סגירות לחיבור – ברור. תכונת הבליעה – גם ברור. סה"כ אידיאל. $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות ולכן נוצר ע"י פולינום יחיד $I_A = (p)$. אם $I_A = (p) = (p')$ אז $p \sim p'$. אם נקבע אותו להיות מתוקן אז הוא יחיד (חברות בשדה הפולינומים נבדלת ע"י כפל בפולינום קבוע). לפולינום הנ"ל נקרא הפולינום המינימלי של $A$ הוא $m_A$. באותו האופן, עבור ט"ל $T \colon V \to V$ ניתן להגדיר את $M_T$. ■

**סימון 5.** $m_A$ יהיה הפולינום המינימלי של המטריצה $A$.

**הערה 14.** אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ ו־$p \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$p(A) = 0$, אז $p \in I_A$ ומתקיים $m_A \mid p$.

**הערה 15.** אנו יודעים ש־$m_A \mid f_A$ כי ממשפט קיילי המילטון $f_A(A) = m_A(A) = 0$, ו־$f_A \in I_A$ כאשר $I_A$ האידיאל של המאפסים של $A$. מהיות מרחב הפולינומים תחום שלמות, $m_A \mid f_A$ כדרוש.

**דוגמה.** עבור $A = I_n$ אז $f_A = (x-1)^n$ ו־$m_a = (x-1)$. לא בהכרח $m_a = f_a$, אל לפעמים כן – לדוגמה בעבור $D \colon \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ אופרטור הגזירה מתקיים $f_D = x^{n+1}$ וכן $m_D = x^{n+1}$ כי יש פולינומים שנדרש לגזור $n$ פעמים ע"מ לקבל 0, לדוגמה $x^n$.

**משפט 50.** תהא $A = A_f$ המטריצה המצורפת ל־$A$. אז $f_A = m_A$.

**משפט 51.** אם $A$ מייצגת את $T \colon V \to V$ אז $m_A = m_T$ (כלומר, הפולינום המינימלי לא תלוי בבחירת בסיס).

הוכחה. נבחר בסיס ל־$V$, $B$. יהי $p \in \mathbb{F}[x]$. אז $[p(T)]_B = p([T]_B)$. שני האגפים מתאפסים ביחד, ולכן $I_A = I_T$. ■

**הערה 16.** נניח ש־$A$ לכסינה והע"ע השונים הם $\lambda_1 \dots \lambda_k$ (כלומר $f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r^i}$) אז $m_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$.

הוכחה. בה"כ $A$ אלכסונית, $A = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$ עם חזרות. נבחין ש־$\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) = 0$ (הסברים בהמשך). $A$ מייצגת העתקה $T \colon V \to V$ ול־$V$ יש בסיס של ו"עים $B = (v_1 \dots v_n)$. אז $\left(\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)\right)(v_j) = 0$ כי $v_j$ מתאים ל־$\lambda_i$ כלשהו וכך זה מתאפס. ידוע $m_a \mid \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$. אם נוריד את אחד המכופלים אז הע"ע שירד לא יתאפס/לא יאפס את הוקטור העצמי המצאים, כלומר כל הגורמים הלינארים דרושים כדי לאפס את $T$, ומכאן המינימליות והשוויון ל־$m_A$. ■

**הערה 17.** אם $A \in M_n(\mathbb{F})$, ו־$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, אז ניתן לחשוב על $A \in M_n(\mathbb{K})$ ו־$m_A$ לא משתנה ללא תלות בשדה.

**משפט 52.** אם $g, h \in \mathbb{F}[x]$ ו־$T \colon V \to V$ ט"ל אז $g(T), h(T)$ מתחלפות.

הוכחה.

$$\big(g(T) \circ h(T)\big)(v) = (g \cdot h)(T)(v) = (h \cdot g)(T)(v) = \big(h(T) \circ g(T)\big)(v)$$

■

**למה 2** (למת המחלק של פולינום מינימלי)**.** יהי $m_T$ הפולינום המינימלי של ט"ל $T \colon V \to V$. אם $f(x) \mid m_T(x)$ וגם $\deg f > 0$ אז $f(T)$ אינו הפיך.

הוכחה. בכלל ש־$m_T \mid f$ אז קיים $g \in \mathbb{F}[x]$ כך ש־$f \cdot g = m_T$. נניח בשלילה ש־$f(T)$ הפיכה. אז:

$$f(T) \circ g(T) = \underbrace{m_T(T)}_{0} \implies \underbrace{f(T)^{-1} \circ (0)}_{0} = g(T)$$

ידוע:

$$\deg m_T = \underbrace{\deg f}_{>0} + \deg g \implies \deg g < \deg m_T$$

בה"כ $g$ מתוקן וקיבלנו סתירה למינימליות של $m_T$, אלא אם כן $g(x)$ פולינום ה־0 אבל אז $m_T = 0$ בסתירה להגדרתו של פולינום מינימלי. ■

הוכחה זהה עבור מחלק של $m_A$, עבור $A$ מטריצה.

**משפט 53.** אם $\lambda$ ע"ע של $T$ אז בהינתן $p(T)=0$ מתקיים $p(\lambda)=0$.

הוכחה. קיים $v\neq 0$ ו"ע כלומר $Tv=\lambda$, ולכן:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \quad 0=0v=p(T)(v)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_iT^i\right)(v)=\sum_{i=0}^{n}a_iT^i(v)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i\right)v=p(\lambda)v$$

מהיות $v\neq 0$ נקבל $p(\lambda)=0$ כדרוש. ■

"זה טבעוני, זה טבעוני וזה ממשש טבעוני". "מה זה אומר שזה לא טבעוני? יש בזה קצת ביצה".

**משפט 54.** $\lambda$ ע"ע של $T$ אמ"מ $m_T(\lambda)=0$.

הוכחה. כיוון אחד הוא מקרה פרטי של המשפט הקודם. מהכיוון השני, ידוע $m_T(\lambda)=0$. לפי משפט בזו $(x-\lambda)|m_T(x)$. ידוע $m_T|f_T$ וסה"כ $(x-\lambda)|f_T$ וסה"כ $\lambda$ ע"ע של $T$. ■

**משפט 55.**

$$m_A(x)\mid f_A(x)\mid (m_A(x))^n$$

הוכחה. נותר להוכיח $f_A(x)|(m_A(x))^n$ (השאר ממשפטים קודמים). ידוע שפולינום מינימלי/אופייני נשארים זהים מעל כל שדה שמכיל את $\mathbb{F}$. לכן, ניתן להניח שהוא מתפרק לגורמים ליניאריים. ראינו שאם $f,g\in\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$ ומתקיים $g\mid f$ מעל $\mathbb{K}$, אז $g\mid f$ מעל $\mathbb{F}$. אז:

$$\left(\sum n_i=n\right)\qquad f_A=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{n_i},\ m_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{m_i}\quad(1\le m_i\le n_i)\ (m_a(x))^n=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{n|m_i}$$

בגלל ש־$n\le m_i\cdot n \implies 1\le m_i$ אז מצאנו $f_A\mid m_A^n$. ■

הוכחה זהה עבור $T\colon V\to V$ עם $\dim V=n$.

**מסקנה 11** (שימושית!). נניח ש־$g\mid f_A$. נניח ש־$g$ אי פריק. אז $g\mid m_A$.

הוכחה.

$$g\mid f_A\mid (m_A)^n$$

ידוע $g$ אי פריק, ולכן ראשוני (כי $\mathbb{F}[x]$ תחום ראשי) ולכן $g\mid m_A$. ■

**משפט 56.** נניח ש־$A$ בלוקים עם בלוקים על האלכסון, $A=\operatorname{diag}(A_1\dots A_k)$ כך ש־$\sum n_i=n$, $\forall i\in[k]\colon A_i\in M_{n_i}(\mathbb{F})$, אז מתקיים $m_A=\operatorname{lcm}(m_{A_1}\dots m_{A_k})$.

במקרה שלנו, ה־lcm הנ"ל הוא הפולינום בעל הדרגה המינימלית שמתחלק בכל ה־$m_{A_i}(x)$־ים. באופן כללי, $\operatorname{lcm}(m_{a_1}\dots m_{a_n})$ מתקבל כיוצר של אידיאל החיתוך בתחום הראשי. כלומר:

$$I=(\operatorname{lcm}(A_1\dots A_k))=\bigcap_{i=1}^{n}Rm_{a_i}$$

(הבהרת הסימון: $Ra=(a)=\langle a\rangle$).

הוכחה (למשפט לעיל). לכל $g\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים:

$$g(A)=\begin{pmatrix}g(A_1)&&\\&\ddots&\\&&g(A_k)\end{pmatrix}$$

בבירור מתקיים $g(A)=0$ אמ"מ $\forall i\in[k]\colon g(A_i)=0$. לכן $\forall i\in[k]\colon m_{A_i}|g$. מהגדרת ה־lcm סיימנו. ■

**מסקנה 12.** תהי ט"ל $T\colon V\to V$ ו־$V$ מונ"ס, אז בהינתן $U_1\dots U_k$ מרחבים $T$־שמורים כך ש־$V=\bigoplus_{i=1}^{k}U_i$, אזי $m_T=\operatorname{lcm}(\{m_{T|_{U_i}}:i\in[k]\})$.

**משפט 57.** נניח ש־$T,S\colon V\to V$ ט"לים. אז:

1. אם $T,S$ מתחלפות, אז $\operatorname{Im}S,\ \ker S$ הם $T$־אינווריאנטים (ולהפך).
2. אם $T,S$ מתחלפות ו־$W\subseteq S$ תמ"ו הוא $T$־אינוואריאנטי, אז גם $S(W)$ הוא $T$־איוואריאנטי.

3. אם $W_1, W_2 \subseteq V$ הם $T$-איווריאנטי אז גם $W_1 \cap W_2,\ W_1 + W_2$ הם $T$-איווריאנטי.
4. אם $f \in \mathbb{F}[x]$ ו-$W \subseteq V$ תמ"ו $T$-איווריאנטי, אז $W$ גם $f(T)$-איווריאנטי.

הוכחה.

1. יהא $v \in \operatorname{Im} S$, אז קיים $u \in V$ כך ש-$S(u) = v$:

$$Tv = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = (S \circ T)(u) = S(T(u)) \in \operatorname{Im} S \implies Tv \in \operatorname{Im} S$$

ועבור $v \in \ker S$:

$$S(T(v)) = (ST)v = (TS)v = T(S(v)) = T(0) = 0 \implies Tv \in \ker S$$

2. יהי $v \in S(W)$. קיים $w \in W$ כך ש-$v = S(w)$

$$Tv = T(S(w)) = S(T(w)) \in S(W)$$

כי $Tw \in W$.

3. ראינו בתרגול הקודם
4. יהי $w \in W$.

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i,\ \ f(T)w = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right)(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i(w)$$

באינדוקציה $T^i(w) \in W$. $W$ תמ"ו ולכן סגור וסיימנו.

■

## 5.3 ~ ניסוח והוכחת משפט הפירוק הפרימרי

**משפט 58** (מקרה הבסיס של משפט הפירוק הפרימרי). ("מאוד חשוב") יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נניח $T\colon V \to V$ ט"ל. נניח $f(T) = 0$. נניח ש-$f = g \cdot h$ עבור $\gcd(g, h) = 1$. אז:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$$

ואם $f = m_T$, אז $g, h$ הם הפולינומים המינימליים לצמצום $T$ על תת־המרחבים לעיל בהתאמה.

הבהרת הכוונה ב"פולינום המינימלי לצמצום $T$ על תתי המרחבים": בהינתן $T = U \oplus W$, $T_u = T_{|U} \colon U \to U$ ובאופן דומה $T_w$, אז $m_T = m_{T_U} \cdot m_{T_W}$.

הוכחה.

- ידוע $h = g \cdot h$ ולכן $\exists a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-$a(x)g(x) + b(x)h(x) = 1$, כך ש-:

$$\underbrace{(a(T) \circ g(T))(v)}_{\in \ker h(T)} + \underbrace{(b(T) \circ h(T))(v)}_{\in \ker g(T)} = V$$

הטענה ש-$(aT \circ gT)v \in \ker hT$ נובעת מכך ש-:

$$(hT)((aT \circ gT)v) = hT((ag(T))v) = (hag)Tv = ((agh)T)v = ((af)T)v = (aT)(fT)v = (a(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

(זאת כי כפל פולינומים קומטטיבי, כל עולמות הדיון אסוציאטיביים, וכאשר ההעתקה $aT$ תקבל את $fT = 0$ היא תחזיר אפס וסה"כ $0v = 0$ כדרוש). מהכיוון השני:

$$(gT)((bT \circ hT)v) = gT((bh(T))v) = (gbh)Tv = ((bgh)T)v = ((bf)T)v = (bT)(fT)v = (b(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

כלומר אכן $\ker hT \supseteq (aT \circ gT)$ ו-$\ker gT \supseteq (bT \circ hT)$. מהשוויון לעיל סה"כ אכן $V = \ker h(T) + \ker g(T)$. הסכום אכן ישר שכן:

$$\forall v \in \ker gT \cap \ker hT \colon 0 + 0 = (aT \circ gT)v + (bT + hT)v = v$$

דהיינו, $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$ כדרוש מהחלק הראשון של המשפט.

- עתה נוכיח את החלק השני של המשפט. נניח $f = m_T$, ונסמן:

$$W_1 = \ker g(T) \qquad W_2 = \ker h(T)$$
$$T_1 = T|_{W_1} \qquad T_2 = T|_{W_2}$$

וכן $B_1$ בסיס ל-$W_1$, $B_2$ ל-$W_2$. לכן $B = B_1 \uplus B_2$ בסיס ל-$V$. משום שהראינו ש-$W_1, W_2$ הם $T$-אינוואריאנטי (כי $gT, hT$ מתחלפות):

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

מהמשפט שראינו, $m_T = \operatorname{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})$. ברור ש-$m_{T_1}|g$ וגם $m_{T_2}|h$. אז:

$$\deg m_{T_1} = \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} = \deg(m_{T_1} \cdot m_{T_2}) \geq \deg(\operatorname{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})) = \deg m_T$$

ולכן כל ה"אשים לעיל הדוקים ושוויון בכל מקום.

$$\deg m_{T_1} \leq \deg g \wedge \deg m_{T_2} \leq \deg h$$

אם אחד מהשוויונות לא הדוקים, אז:

$$\deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} < \deg g + \deg h$$

וסתירה למה שהראינו. לכן:

$$(m_{T_1}|g \wedge \deg m_{T_1} = \deg g) \implies m_{T_1} \sim g$$

אבל שניהם מתוקנים ולכן שווים. כנ"ל עבור $m_{T_2} = h$.

סה"כ הוכחנו את כל חלקי המשפט, כדרוש. ■

**דוגמה.** נסמן $f(x) = x^2(x-1)^3$, $f(T) = 0$. החלק הראשון של המשפט אומר $V = \ker T^2 \oplus \ker(T-I)^3$. החלק השני אומר שאם $f = m_T$ אז $x^2$ הוא הפולינום המינימלי של $T|_{\ker T^2}$ וכן $(x-1)^3$ המינילי של $T|_{T-I^3}$.

**משפט 59** (משפט הפירוק הפרימרי). יהיו $T\colon V \to V$, $m_T$ הפולינום המינימלי של $T$, ונניח ש-:

$$m_T = g_1 \cdots g_s \quad \forall i \neq j\colon\ \gcd(g_i, g_j) = 1$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$$

ובנוסף $g_i$ הוא הפולינום המינימלי של $T|_{\ker g_i(T)}$.

"יש לו שם מפוצץ אז הוא כנראה חשוב"

הוכחה. באינדוקציה על $s$

בסיס: עבור $s = 2$ המשפט שהוכחנו.

צעד: נסמן:

$$h(x) = g_s(x),\ \ g(x) = \prod_{i=1}^{s-1} g_i(x)$$

ואז:

$$\forall i \neq j\colon\ \gcd(g_i, g_j) = 1 \implies \gcd(g, h) = 1$$

מהמשפט שקיבלנו:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T) \overset{\text{ה.א.}}{\implies} \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$$

וכדי להוכיח את החלק השני של המשפט, נגדיר $m_{T|_{\ker g_i}} = g_i$:

$$\ker h(T) = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T|_{\ker h(T)}) = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$$

■

**הערה 18.** בהתאם למקרה הבסיס, מספיק היה להניח $f = g_1 \cdots g_s$, ולא היה באמת צורך להניח $f = m_T$ ספציפית, אם רק רוצים להראות קיום פירוק (ולא צריך להראות ש־$g_i$ הם הפולינומים המינימליים לצמצום $T$ על התמ"וים). למעשה נשתמש בגרסה מוחלשת זו של משפט הפירוק הפרימרי.

**משפט 60** (תוצאה 1 ממשפט הפירוק הפרימרי)**.** $T$ לכסינה אמ"מ $m_T = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)$ מתפרק לגורמים ליניארים $i \neq j \implies$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ שונים זה מזה.

הוכחה.

$\implies$ לפי המשפט, אם נסמן $g_i = (x-\lambda_i)$:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(T-\lambda_i I)$$

כלומר $V$ סכום ישר של המ"ע של $\lambda_1 \ldots \lambda_s$. לכל מרחב עצמי ממימד $k_i$ קיימים $v_1 \ldots v_{k_i}$ בבסיס כך ש־$Tv_j = \lambda_i v_j$ ($j \in [k_i]$), ומהסכום הישר ידוע $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$ ומהיות איחוד בסיסים של מ"ע גם בסיס (כי המ"ע זרים) מצאנו בסיס מלכסן הוא אוסף הבסיסים של המ"עים.

$\impliedby$ אם $T$ לכסינה, אז הפולינום המינימלי הוא ה־lcm של הפולינומים המינימליים של הבלוקים על האלכסון. הבלוקים על האלכסון הם $\lambda_i$ הע"ע מגודל 1, ולכן ה־lcm שלהם הוא מכפלת $x-\lambda_i$ כאשר $\lambda_i$ הע"עים השונים, וסה"כ $m_T$ מכפלת גורמים ליניאריים שונים.

■

**משפט 61** (תוצאה 2 ממשפט הפירוק הפרימרי)**.** נניח $T\colon V \to V$ לכסינה, וקיים $W \subseteq V$ תמ"ו $T$־שמור. אז $T|_W$ לכסינה.

הוכחה. נסמן $S = T|_W$. אנחנו יודעים $m_T(T) = 0$ ולכן $m_T(S) = 0$. ידוע $m_T = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$ ו־$m_S \mid m_T$ ולכן $m_S$ מתפרק לגורמים ליניארים זרים, סה"כ $S$ לכסינה. ■

**סיכום.** $T\colon V \to V$ ט"ל, ו־:

$$\forall i \neq j\colon\ \gcd(g_i, g_j) = 1 \wedge m_T(x) = \prod_{i=1}^{s} g_i$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(g_i(T)) \wedge \forall i\colon\, m_{T|_{\ker g_i(T)}} = g_i$$

**המשך בעמוד הבא**

# Jordan Form ........ 6

## 6.1 ~ מציאת שורשי פולינום אופייני ממעלה חמישית ואילך

נבחין בבעיה: $A = M_5(\mathbb{Z})$, קבעו אם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

- נחשב את $f_A(x)$
- נמצא שורשים, אלו הם הע"ע
- לכל ע"ע נחשב את $v_\lambda$
- אם סכום הממדים מסעיף ג' הוא 5, אז היא לכסינה
- $T$ לכסינה אמ"מ קיים בסיס ו"ע אמ"מ ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי

אבל (המתמטיקאי, לא מילת הניגוד ולא מילה נרדפת ליגון) הוכיח שאין פתרונות לפולינומים ממעלה חמישית ויותר, וגלואה מצא דוגמאות לפולינומים שאי אפשר לבצע עליהם נוסחאת שורשים ופיתח את התורה של הרחבת שדות לשם כך.

היוונים העתיקים ביססו את הגיאומטריה שלהם באמצעות דברים שאפשר לבדוק עם שדה ומחוגה. באמצעות כלים של גלואה אפשר לראות מה אפשר לעשות עם האמצעים האלו, ולהוכיח שלוש בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור – האם אפשר לרבע את המעגל (האם אפשר לבנות באמצעות שדה ומחוגה ריבוע ששטחו שווה לשטח המעגל), או במילים אחרות, האם אפשר למצוא את $\sqrt{\pi}$ – אי אפשר כי זה לא מספר אלגברי. שאלות אחרות היו, בהינתן קובייה, האם אני יכול למצוא קובייה בנפח כפול? באותה המידה אי אפשר למצוא את $\sqrt{3}$. שאלה אחרת הייתה האם אפשר לחלק זווית ל־3 חלקים שווים.

גלואה הראה שכדי לעשות את זה צריך למצוא שורשים שלישיים של כל מני דברים, שבאמצעות סרגל ומחוגה אי אפשר לעשות זאת. בעיות שהיו פתוחות לעולם המתמטי במשך אלפי שנים נפתרו בעזרת אותן התורות.

אבל ניאלץ להאביל את משפחתו עליו כשמת משחפת בגיל 26. גלואה מת בגיל 21 מדו־קרב.

**מסקנה 13** (מסקנת הבדיעבד של גלואה). לא ללכת לדו־קרב.

הוכחה. ההוכחה מתקדמת ועוסקת בתורת גלואה. ∎

**הגדרה 45.** בהינתן $\forall i \neq j\colon \lambda_i \neq \lambda_j \quad f(x) = \prod_k (x-\lambda_k)^{r_k}$. אז $f^{\text{red}} := \prod_k (x-\lambda_k)$

**משפט 62.**

$$f^{\text{red}} = \frac{f}{\gcd(f, f')}$$

הוכחה. נשאר כתרגיל בעבור הקורא. (נתנו לנו את זה בשיעורי הבית) ∎

**משפט 63.** $A$ לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}}(A) = 0$

**למה 3.** $f_A^{\text{red}} \mid m_A$ ושוויון אמ"מ $A$ לכסינה.

הוכחת הלמה. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_r$ הע"ע של $A$ (אפשר בה"כ להרחיב שדה כדי שהם יהיו קיימים). אז אם $f_A(x) = \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{s_i}$ ומתקיים $m_A(x) = \prod_{i=1}^r (x-\lambda_i)^{r_i}$ וידוע $1 \leq r_i \leq s_i$ ולכן $f_A^{\text{red}} \mid m_A$.

עתה נוכיח את החלק השני של הלמה (השוויון). אם $A$ לכסינה, אז יש בסיס של ו"עים ועם $\lambda$ הוא ע"ע של ו"ע בבסיס $B$ אז $Av_\lambda - \lambda v_\lambda = 0$, ולכן $f_A^{\text{red}}(A) = 0$ וסה"כ $m_A \mid f_A$.

אם $f_A^{\text{red}} = m_A$ אז $m_A$ מכפלה של גורמים לינארית זרים, וראינו גרירה ללכסינות. ∎

הוכחת המשפט באמצעות הלמה. $A$ לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}} = m_A$, ואנחנו יודעים כי $m_A(A) = 0$ ולכן $A$ לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}}(A) = 0$. ∎

## 6.2 ~ צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי נילפוטנטי

### 6.2.1 נילפוטנטיות

**מטרה:** בהינתן $T\colon V \to V$ נרצה לפרק את $V$ לסכומים ישרים של מרחבים $T$־אינווריאנטים, קטנים ככל האפשר.

**הגדרה 46.** יהי $T\colon V \to V$ ט"ל. נאמר ש־$V$ פריק ל־$T$ אם קיימים $U, W \subseteq V$ תמ"וים כך ש:

$$V = U \oplus W \quad \wedge \quad \dim U, \dim W > 0 \quad \wedge \quad U, W \text{ are } T\text{-invariant}$$

**מעתה ואילך** (עד סוף הנושא), נניח ש־$f_T(x)$ מתפצל מעל $f$ לגורמים לינאריים (כלומר, נרחיב לשדה סגור אלגברית).

**הגדרה 47.** $T\colon V\to V$ ט"ל. $T$ נקראת העתקה נילפוטנטית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$T^n=0$. באופן דומה $A$ תקרא מטריצה נילפוטנטית אם $\exists n\in\mathbb{N}\colon A^n=0$.

**הגדרה 48.** עבור $n$ המינימלי שעבורו $T^n=0/A^n=0$, אז $n$ הנ"ל נקרא דרגת הנילפוטנטיות של $T/A$, ומסמנים $n(T)/n(A)$.

"נילפוטנטית באה מלשון null. הרעיון: דבר מה שמתבטל.

**משפט 64** (תוצאה 3 ממשפט הפירוק הפרימרי). בהינתן $V$ אי־פריק ביחס ל־$T$, ובהנחה ש־$f_T(x)$ מתפצל לגורמים ליניאריים, אז $m_T(x)=(x-\lambda)^r$. נוסף על כך $T-\lambda I$ נילפוטנטית ו־$n(T-\lambda I)=r$.

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם $m_T(x)$ לא מתפרק, הוא בהכרח לא קבוע אחרת $m_T(T)\neq 0$ וסתירה, לכן $m_T(x)=(x-\lambda)$ ליניארי כלשהו (אם לא ליניארי ניתן לפרק לגורמים ליניארים ואז $m_T$ מתפרק וסתירה).
- אם $m_T(x)$ מתפרק, אז נוציא גורם ליניארי אחד ונקבל $m_T=g_1\cdots g_i$ כאשר $g$ ליניארי, דהיינו ממשפט הפירוק הפרימרי, נניח בשלילה $g_i\neq g_j$ ומהיות $m_T$ מתוקן נקבל $\gcd(g_i,g_j)=1$ כלומר $V=\ker\bigoplus_{i=1}^{s}\ker g_i(T)$ ולכן $V$ פריק וסתירה. דהיינו $g_i=g_j$ וסה"כ $m_T(x)$ הוא מהצורה $m_T(x)=g_i^s=(x-\lambda)^s$ כדרוש.

עתה ניגש להוכיח את החלק השני של ההוכחה. משום ש־$m_T(x)=(x-\lambda)^r$, אזי $M_T(T)=(T-\lambda I)^r=0$ ולכן $n(T-\lambda I)\le r$, ומהמינימליות של $m_T$ נסיק $n(T-\lambda I)=r$ כדרוש. ■

נסמן $S=T-\lambda I$ בהקשר לעיל. עוד כדאי להבחין ש־$V$ הוא $S$־איווריאנטי (**אך לא בהכרח אי־פריק ביחס ל־$S$**) שכן $S(V)=T(V)-\lambda V\in V$ מסגירות לכפל בסקלר $\lambda$ ולחיבור נגדי.

מה למדנו? שמשום שאנו יכולים לפרק (ממשפט הפירוק הפרימרי) את $T$ למרחבים $T$־איווריאנטיים פריקים מינימליים, אז לכל $U_i$ כזה נוכל להגדיר $S_i=T-\lambda_i I$ כזו כך שהיא נילפוטנטית. אם נוכל להבין טוב מה $S_i$ עושה למרחב שהיא שמורה עליו, נוכל להבין באופן כללי מה ההעתקה $T$ עושה לכל אחד מהמרחבים אליהם פריקנו אותה.

**למה 4.** תהי $T$ העתקה כללית, אז אם $\ker T^i=\ker T^{i+1}$ לכל $j\ge i$ מתקיים $\ker T^i=\ker T^j$.

**למה 5.** תהי $T$ העתקה כללית, אז $\forall i>j\colon\ \ker T^i\supseteq\ker T^j\wedge\operatorname{Im}T^i\subseteq\operatorname{Im}T^j$.

**משפט 65.** תהי $T\colon V\to V$ העתקה מעל מ"ונסים, $\dim V=n$, אז קיים $\mathcal{F}(T)\in[n]$ כך ש־ $\forall i\in\mathbb{N}\colon\ \ker T^{\mathcal{F}(T)}=\ker T^{\mathcal{F}(T)+i}\wedge\operatorname{Im}T^{\mathcal{F}(T)}=\operatorname{Im}T^{\mathcal{F}(T)+i}$.

הוכחה. מלמה 5, בהכרח:

$$\ker T\subseteq\ker T^2\subseteq\ker T^3\subseteq\cdots\subseteq T^i\subseteq\cdots\subseteq V$$

נניח בשלילה שכל ההכלות עד $i=n$ חלשות, ממשפט נסיק:

$$\dim\ker T<\dim\ker T^2<\cdots<\dim\ker T^i\le n$$

כלומר יש $n$ מספרים טבעיים שונים בין $\ker T$ ובין $n$ (לא כולל) ולכן $\dim\ker T<0$ וסתירה. דהיינו קיים $\mathcal{F}(T)$ כך ש־$\ker T^{\mathcal{F}(T)}=\ker T^{\mathcal{F}(T)+1}$ ומלמה 4 נקבל ש־$\forall i\ge\mathcal{F}(T)\colon\ \ker T^{\mathcal{F}(T)}=\ker T^i$. ניכר ש־$\operatorname{Im}T^i\supseteq\operatorname{Im}T^{\mathcal{F}(T)}$ לכל $i\ge\mathcal{F}(T)$, וממשפט הממדים $\dim\operatorname{Im}T^{\mathcal{F}(T)}=\dim\operatorname{Im}T^i$ ולכן $\forall i\ge\mathcal{F}(T)\colon\ \operatorname{Im}T^{\mathcal{F}(T)}=\operatorname{Im}T^i$ כדרוש. ■

**משפט 66.** בהינתן $T$ העתקה נילפוטנטית, אז $\mathcal{F}(T)=n(T)$.

**סימון 6.** $\mathcal{F}(T)$ לעיל סימון (שמקובל אך ורק בסיכום הזה), וקרוי ה־"fitting index" של $T$.

### 6.2.2 שרשאות וציקליות

**הגדרה 49.** קבוצה מהצורה $\{v,Tv\cdots T^kv\}$ כאשר $T^{k+1}v=0$ והוא המינימלי, נקרתא שרשרת.

**משפט 67.** $T\colon V\to V$ נילפוטנטית, אז כל שרשרת היא בת"ל.

הוכחה. יהיו $\alpha_0\ldots\alpha_k\in\mathbb{F}$ כך ש־$\sum_{i=0}^{k}\alpha_iT^{(i)}(v)=0$. נניח בשלילה שהצירוף אינו טרוויאלי. אז קיים $j$ מינימלי שעבורו $\alpha_j\neq 0$. נניח $n$ המקסימלי שלא מאפס. אז:

$$T^{n-j}\left(\sum\alpha_iT^{(i)}(v)\right)=T^{n-j}\left(\sum_{i=j}^{k}\alpha_iT^i(v)\right)=\alpha_jT^{n-1}(v)+0=0$$

אבל $\alpha_j,T^{n-1}\neq 0$ וזו סתירה. ■

**תזכורת.** תמ"ו שקיים לו בסיס שהוא שרשרת, נקרא ציקלי.

**אנטי־דוגמה:** ישנם מ"וים שאינם $T$־ציקליים. למשל:

$$V = \left\{ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P(x) + h(y) \mid n \leq \text{פולינומים ממעלה } p, h \right\}$$

ו־$T$ אופרטור הגזירה הפורמלית. כדי ש־$V$ יהיה ציקלי, צריך למצוא בסיס ציקלי שממדו הוא לכל היותר דרגת הנילפוטנטיות. נבחין ש־$n(T) = n+1$, וידוע ש־$\dim V = 2n+1$, ולכן שרשרת מקסימלית באורך $n+1$ ולכן לא יכול להיות בסיס שרשרת. לכן $V$ אינו $T$־ציקלי.

**הערה 19.** יהי $T\colon V \to V$ נילפוטנטית ו־$\dim V = n$ אז $n(T) \leq n$ וישנו שוויון אמ"מ $V$ ציקלי.

**הערה 20.** אם $T\colon V \to V$ נילפוטנטית ו־$V$ ציקלי אז $V$ אי־פריק ל־$T$.

הוכחה. נניח בשלילה שישנו פירוק לא טרוויאלי של $V$ ל־$T$. אז $V = U \oplus W$ לא טרוויאלים. נסמן $\dim U = k, \dim W = \ell$ וידוע $k, \ell < n$. בה"כ $k \geq \ell$. נסמן $B_v = (v, Tv \dots T^{n-1}v)$. קיימים (ויחידים) $u \in U, w \in W$ כך ש־$v = u + w$. אז:

$$T^k v = T^k u + T^k w$$

אך משום ש־$T$ נילפוטנטית אז $T|_U, T|_W$ נילפוטנטית גם כן. ידוע $n(T|_U), n(T|_W) \leq k$ ולכן בפרט $T^k(u) = T^k(w) = 0$ ולכן $T^k v = 0$ אבל $k < n \wedge T^k(v) \in B_v$. ■

**משפט 68.** תהי $T\colon V \to V$ נילפוטנטית ונניח $U$ תמ"ו של $V$ הוא $T$־אינוואריאנטי וציקלי, אז עבור $S =: T_U$:

1. $\dim U \leq n(T)$
2. $\operatorname{Im}(T_U) = T(U)$ ציקלי ו־$\dim T(U) = \dim U - 1$

הוכחה.

1. $\dim U = n(T_W)$ וגם $n(T) \geq n(T|_U)$
2. $T(u) = T(\operatorname{span}(v, \dots T^k v)) = \operatorname{span}(Tv \dots T(T^k v))$ ז"א $T(U) = \operatorname{span}(Tv \dots T^k v)$, זו קבוצה בת"ל ופורתש את $T(U)$ ולכן $\dim T(U) = \dim U - 1$.

■

**הגדרה 50.** $V \subseteq U$ תמ"ו ציקלי ייקרא ציקלי מקסימלי אם $\dim U = n(T)$.

**משפט 69.** לכל $V$ מ"ו, $T\colon V \to V$ נילפוטנטית קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.

הוכחה. קיים $v \in V$ כך ש־$T^{n(T)-1} v \neq 0$. אז $v \neq 0$ ו־$v, Tv, \dots T^{n(T)-1}$ ומטעה מקודם בת"ל ולכן $\operatorname{span}(v \dots T^{n(T)-1})$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. ■

**משפט 70.** נניח $V \subseteq U$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. אזי:

1. אם $T(U) \subseteq T(V)$ הוא גם ציקלי מקסימלי.
2. $U \cap T(V) = T(U)$

הוכחה.

1. $U$ – ציקלי. לכן $\dim T(U) = \dim U - 1$. טענה:

$$\dim T(U) = n\left(T|_{T(V)}\right) = n(T) - 1$$

וסיימנו.

2. ידוע $T(U) \subseteq U$ כי $U$ ציקלי ולכן שמור, וכן $V \subseteq U$ והסקנו $T(U) \subseteq T(V)$, לכן $T(U) \subseteq U \cap T(V)$

עתה נוכיח שוויון באמצעות שיקולי ממד. אם לא היה שוויון אז:

$$T(U) \subsetneq U \cap T(V) \subseteq U \implies \dim T(U) < \dim(U \cap T(V)) \leq \dim(T(U)) + 1 \implies U \cap T(V) = U$$

זו סתירה כי:

$$U \cap T(V) \subseteq T(V) \implies n(T|_{T(v)}) = n(T) - 1 \implies n(T) = \dim U \leq n(T) - 1$$

■

### 6.2.3 ניסוח צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי

**משפט 71** (המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי). נניח $T\colon V\to V$ ט"ל לינארית נילפוטנטית, $U\subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי אז קיים $W\subseteq V$ תמ"ו $T$־איווריאנטי כך ש־$V=U\oplus W$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n=n(T)$.

בסיס: אם $n(T)=1$ אז $T=0$ אז כל $W\subseteq V$ הוא $T$־איוואריאנטי. והיות שכל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס, אז $U=\operatorname{span}(v)$ אז $W=\operatorname{span}(v_2\dots v_m)$ כאשר $B_V=(v:=v_1\dots v_m)$.

צעד: ("צעד, מעבר, אותו דבר, תקראו לזה איך שבא לכם") נניח שאנו יודעים את נכונות הטענה עבור $n=n(T)-1$. נוכיח עבור $n=n(T)$. נצמצם את $T$ ל־$T|_{T(V)}$. ידוע $T(U)\subseteq T(V)$ ציקלי מקסימלי. לכן, לפי ה.א. קיים $W_1$ הוא $T$־איוואריאנטי כך ש־$T(V)=T(U)\oplus W_1$.

נגדיר $W_2=\{v\in V\mid Tv\in W_1\}$. אז

**למה 6.** ("למה א") $U+W_2=V$ (לאו דווקא סכום ישר) וגם $U\cap W_1=\{0\}$.

**למה 7.** ("למה ב") בהינתן $W_1\subseteq W_2$ ו־$U\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$V=U+W_2$ וגם $U\cap W_1=\{0\}$ אז קיים $W'\subseteq V$ כך ש־$W_1\subseteq W'\subseteq W_2$ וגם $U\oplus W'=V$

נניח שהוכחנו את הלמות. יהי $w\in W_1$ אז $T(w)\in W_1$ ולכן $w\in W_2$ ולכן $W_1\subseteq W_2$. אז מצאנו $W'$ תמ"ו של $V$ כך ש־$W_1\subseteq W'\subseteq W_2$. יהי $w\in W'$ בפרט $w\in W_2$ ולכן $T(w)=W_1\subseteq W'$.

ולכן מש"ל המשפט. ∎

הוכחת למה ב' היא תרגיל רגיל בלינארית 1א שאין ערך להביא את הוכחתו.

הוכחת למה א' גם היא לא מעניינת במיוחד, אבל אותה המרצה כן הוכיח:

הוכחה. יהי $v\in V$, נביט ב־$T(v)$. קיימים $u\in U, w_1\in W_1$ כך ש־:

$$Tv=Tu+w_1\implies Tv-Tu=w_1\implies T(v-u)=w_1\in W_1$$

ידוע $v=v-u+u$. לכן $v-u\in W_2\implies T(v-u)\in W_1$.

אזי משהו $V=U+W_2$ ו־$W_1\subseteq T(V)$ ולכן:

$$U\cap W_1=U\cap(T(V)\cap W_1)$$

ידוע ש־:

$$U\cap W_1=(U\cap T(V))\cap W_1\implies U\cap T(V)=T(U)\implies T(V)=T(U)\oplus W_1\implies U\cap W_1=T(U)\cap W_1=\{0\}$$

∎

**מסקנה 14.** $T\colon V\to V$ ט"ל נילפוטנטית אז $V$ אי־פריק ל־$T$ אמ"מ $V$ ציקלי.

הוכחה.

$\implies$ זהו משפט שכבר הוכחנו

$\impliedby$ נניח $V$ אי־פריק. אז קיים $U\subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. לפי המשפט קיים $W\subseteq V$ תמ"ו $T$־איוואריאנטי כך ש־$T=U\oplus W$. ידוע $U,W$ תמ"וים איוואריאנטי. אם $U=\{0\}$ אז $V=0$ ובפרט ציקלי. אחרת, מאי־פריקות $V$ ל־$T$, נסיק ש־$W=\{0\}$ ולכן $V=U$ ציקלי.

∎

**משפט 72** (משפט ג'ורדן בעבור $T$ נילפוטנטית 1). תהי $T\colon V\to V$ נילפוטנטית אז קיים פירוק של $V$ לסכום ישר של $V=\bigoplus U_i$ כאשר $U_i$ הם $T$־ציקליים.

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם: נמצא ב־$V$ ציקלי מקסימילי כלשהו. אז קיים $W\subseteq V$ תמ"ו $T$־שמור כך ש־$V=U_1\oplus W$. ידוע $T|_W\colon W\to W$ נילפוטנטית, וכעת באינדוקציה שלמה על $\dim V$. ∎

**משפט 73** (משפט ג'ורדן בעבור ט"ל נילפוטנטית 2). עבור $T\colon V\to V$ נילפוטנטית, קיים בסיס $B$ של $V$ שהוא איחוד של שרשראות.

**מסקנה 15.** בעבור $B$ בסיס מג'רדן, נסיק:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \square & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \square \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים הם בלוקי ג'ורדן אלמנטרי. בלוק ג'ורדן מהצורה הבאה יקרא אלמנטרי ויסומן:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(v) & \cdots & T(T^k v) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(יש ספרים בהם זה ה־transpose של זה).

**משפט 74 (יחידות צורת ג'ורדן בעבור ט"ל נילפוטנטית).** עבור $T\colon V \to V$ נילפוטנטית, אז בכל הפירוקים של $V = \bigoplus U_i$ עבור $U_i$ ציקליים (אי־פריקים) אז מספר תתי־המרחב מממיד נתון הוא זהה עבור כל פירוק.

הוכחה. באינדוקציה על $n = n(T)$.

- עבור $n = 1$, העתקת ה־0. $V$ מתפרק לסכום ישר של מרחבים מממד 1.
- צעד, נניח נכונות עבור $n \in \mathbb{N}$. נניח ש־$n(T) = n + 1$. נסמן פירוק:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i = \bigoplus_{i=1}^{\ell} W_i$$

נסדר את $(u_i)_{i=1}^{k}$ לפי גודל מימד, ונניח שרשימת הגדלים היא:

$$(\underbrace{1, 1, \dots 1}_{\times s} < a_1 \le \dots \le a_p) \implies s + p := k$$

רשימת הממדים מגודל 1 ועוד כל השאר. נעשה כנ"ל עבור $(w_i)_{i=1}^{\ell}$ ונקבל:

$$(\underbrace{1, 1, \dots 1}_{\times t} < b_1 \le \dots \le b_r) \implies t + r := \ell$$

ידוע:

$$T(v) = \bigoplus_{i=1}^{k} T(U_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} T(W_i), \quad n\left(T|_{T(v)}\right) = n, \quad p = r, \quad \forall i\colon a_i - 1 = b_i - 1 \implies a_i = b_i$$

(הפירוק ל־$s$ ו־$t$ דרוש כדי שהפירוק לעיל לא יכלול אפסים כאשר מפעילים את $T$) (ידוע $a_i - 1 = b_i - 1$ כי אינדקס הנילפוטנטיות קטן ב־1 בהחלת $T$)

משפט הממדים השני אומר ש־:

$$a_i = \dim U_i = \dim\ker T|_{U_i} + \underbrace{\dim\operatorname{Im} T|_{U_i}}_{a_i - 1} \implies \dim\ker T|_{U_i} = 1$$

מהטענה השנייה בלמה:

$$\begin{aligned} \ker T = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker T|_{U_i} \implies \dim\ker T &= \sum_{i=1}^{k} \dim\ker T|_{U_i} = k \\ &= \sum_{i=1}^{k} \dim\ker T_{W_i} = \ell \end{aligned} \implies k = \ell \implies s = t$$

■

במילים אחרות: כל מטריצה מייצגת של ט"ל נילפוטנטית דומה למטריצת ג'ורדן יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

(למה זה שקול? כי הגודל של בלוק הוא הממד של התמ"ו שנפרש ע"י וקטורי הבסיס שמתאימים לעמודות הללו)

למעשה, בכך הבנו לחלוטין כיצד העתקות נילפוטנטיות מתנהגות. עשינו רדוקציה למקרה הפרטי של נילפוטננטית, ועתה ננסה להבין את המקרה הכללי. ניעזר בתוצאה 3 ממשפט הפירוק הפרימרי לשם כך.

**למה 8.** נניח $V=\bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ כאשר $U_i$ הוא $T$־איווריאנטי (אין צורך להניח נילפוטנטיות), אז:

א.
$$T(V)=\bigoplus_{i=1}^{k} T(U_i)$$

ב.
$$\ker T=\bigoplus_{i=1}^{k} \ker T(U_i)$$

הוכחה: נותר כתרגיל בעבור הקורא.

## 6.3 ~ צורת מייקל ג'ורדן לאופרטור ליניארי כללי

### 6.3.1 בעזרת פירוק פרימרי

**הגדרה 51.** בלוק ג'ורדן אלמנטרי עם ערך $\lambda$ הוא בלוק מהצורה:

$$J_n(\lambda)=J_n(0)+\lambda I_n=J_n(0)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

**הגדרה 52.** בהינתן $T\colon V\to V$, בסיס $B$ נקרא בסיס מג'רדן אם $[T]_B$ היא מטריצה עם בלוקי ג'ורדן מינימליים על האלכסון.

**משפט 75** (משפט ג'ורדן)**.** לכל העתקה $T\colon V\to V$ כאשר $V$ מונ"ס מעל שדה סגור אלגברית $\mathbb{K}$, קיים בסיס מג'רדן.

הוכחה באמצעות פירוק פרימרי. נניח ש־$f_T(x)$ מתפצל לחלוטין. מהגרסה החלשה של משפר הפירוק הפרימרי (ראה הערה תחתיו), ממשפט קיילי־המילטון $f_T$ מאפס את $T$, ותחת הסימון $f_T(x)=:\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{d_\lambda}$ מתקיים:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\underbrace{\ker((T-\lambda_i)^{d_\lambda})}_{U_i}$$

כאשר $U_1\dots U_n$ הם $T$־איווארינאטים. משום ש־$U_i$ האי־פריקים ביחס ל־$T$, ו־$T$ שמורים. היות שהם אי פריקים $f_{T|_{U_i}}=(x-\lambda)^n$. נגדיר $S=T-\lambda I$. אז $U_i$ הוא $T$־איווריאנטי אמ"מ הוא $S$־איווריאנטי (טענה שראינו בעבר). ראינו ש־$S|_{U_i}$ היא נילפוטנטית שכן ממשפט הפירוק $(T-\lambda_i)^{r_i}$ מאפס את $T|_{U_i}$ (אך לא בהכרח מינימלי, שכן $f_T$ לא בהכרח מינימלי) ולכן $(T-\lambda_i)^{r_i}=S^{r_i}=f|_{U_i}(T)=0$, כלומר $S|_{U_i}$ נילפוטנטית. ל־$S|_{U_i}$ הוכחנו קיום צורת ג'ורדן, משמע קיים לה בסיס מג'רדן $\mathcal{B}_i$ כך ש־:

$$[S|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i}=[T|_{U_i}-\lambda I_V]=[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i}-\lambda I\implies [T|_{U_i}]_{B_i}=\operatorname{diag}(J_{a_1}(0)\dots J_{a_n}(0))+\lambda_i I=\operatorname{diag}(J_{\lambda_i}(0)\dots J_{a_n}(\lambda_i))$$

לכן, נוכל לשרשר את הבלוקים הללו ולקבל $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{B}_i$, המקיים:

$$[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}\left\{[T|_{U_1}]_{\mathcal{B}_1}\dots[T|_{U_s}]_{\mathcal{B}_s}\right\}$$

משום שכל אחד מ־$[T|_{U_i}]_{B_i}$ הוא בלוק ג'ורדן בעצמו, סה"כ נקבל:

$$[T]_B=\operatorname{diag}(J_1(\lambda_1)\dots J_n(\lambda_j))$$

זוהי צורת הג'ורדן של מטריצה כללית. ■

במילים אחרות – נעזרנו בפירוק פרימרי ע"מ לפרק את המרחב למרחבים $T$־איווראינטים פריקים מינימליים (בהמשך נראה שאלו המרחבים העצמיים המוכללים של $T$, שמקיימים כל מיני תכונות נחמדות) ואת המרחבים אליהם פירקנו, ניתחנו בעזרת צורת ג'ורדן להעתקות נילפוטנטיות.

**משפט 76** (יחידות צורת ג'ורדן הכללית)**.** צורת ג'ורדן היא יחידה עד כדי סדר בלוקים.

הוכחה. תהא צורת ג׳ורדן עבור $T$ תהא צורת ג׳ורדן עבור $T$. קיים בסיס $B$ שעבורו:

$$[T]_B = \operatorname{diag}\{J_1(\lambda_1)\dots J_k(\lambda_k)\}$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i = \bigoplus \bar{v}_\lambda,\ \bar{v}_\lambda = \bigoplus_{i=s}^{\ell} U_i$$

כאשר $\bar{v}_\lambda$ הוא סכום של אי־פריקים שעבורם $T-\lambda I$ נילפוטנטית.

מה ניתן להגיד על הממדים של ה־$u_i$־ים שמרכיבים את $\tilde{\mathcal{V}}_\lambda$? הממדים שלהם נקבעים ביחידות, עד כדי סדר, כי היות ש־$u_i$ הם $T$־איווריאנטי הם גם $(T-\lambda I)$־איוואריאנטי, ולכן $[S_{|\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}]_{B_\lambda}$ היא ג׳ורדן נילפוטנטית ואז:

$$\left[T_{|\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}\right]_{B_\lambda} = \left[S_{|\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}\right]_{B_\lambda}$$

■

הגיון: המרחבים $v_\lambda$ נקבעים ביחידות ללא תלות בפירוק שבחרנו.

הגיון אחר: כל בלוק מורכבת מהעתקות שבהן $T-\lambda I$ נילפוטנטית (פירוק פרימרי).

### 6.3.2 בעזרת מרחביים עצמיים מוכללים

בגישה הזו נוכל לפתח את צורת ג׳ורדן למטריצה כללית ללא צורך בפירוק פרימרי, פולינום מינימלי, משפט קיילי־המילטון וכו׳. זו גישה יותר אלמנטרית ופשוטה, ואם מבינים אותה האלגוריתם המסורבל למציאת צורת ג׳ורדן הופך לאינטואיטיבי בהרבה.

**הגדרה 53.** המרחב העצמי המוכלל של $\lambda$ הוא מ״ו:

$$\tilde{\mathcal{V}}_\lambda := \bar{\mathcal{V}}_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon (T-\lambda I)^n v = 0\}$$

**משפט 77.** המרחב העצמי המוכלל הוא מ״ו.

**מסקנה 16.** באופן מידי נסיק $V_\lambda \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_\lambda$.

**הגדרה 54.** וקטור עצמי מוכלל הוא וקטור $v \in V$ כך ש־$\exists i \in [n]\colon T^{(i)}v = \lambda v$.

**הערה 21.** החלק הזה ואילך, אז סוף הפרק, הינו הרחבה שלי בלבד ואילו אינם משפטים המופיעים בקורס. עם זאת, המשפטים להלן מאפשרים להבין בצורה הרבה יותר טובה את צורת ג׳ורדן, ולעיתים קרובות תצטרכו להוכיח אותם בעצמכם.

**הערה 22.** מרגישים אבודים? אני ממליץ על הסרטון הבא.

**משפט 78.** תהי העתקה $T$ כללית ו־$\lambda \in \mathbb{F}$ סקלר, אז $\tilde{\mathcal{V}}_\lambda = \mathcal{N}(T-\lambda I)^{\dim V}$ (כאשר $\mathcal{N}$ המרחב המאפס/הקרנל של המטריצה)

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית. הכיוון $\mathcal{N}(T-\lambda I)^{\dim V} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_\lambda$ טרוויאלי. יהי $v \in \mathcal{N}(T-\lambda I)^j$, אם $j < \dim V$ אז $(T-\lambda)^j v = 0$ ולכן $(T-\lambda I)^{\dim V} v = 0$ וסה״כ $v \in \mathcal{N}(T-\lambda I)^{\dim V}$, אחרת $j > \dim V$ ואז הוכחנו $\mathcal{N}(T-\lambda I)^j = \mathcal{N}(T-\lambda I)^{\dim V}$. נסיק מעקרון ההחלפה:

$$\tilde{\mathcal{V}}_\lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(T-\lambda I)^j = \bigcup_{j=1}^{\dim V} \mathcal{N}(T-\lambda I)^j \ \cup \bigcup_{j=\dim V}^{\infty} (T-\lambda I)^j = \mathcal{N}(T-\lambda I)^{\dim V}$$

■

**משפט 79.** בהינתן $v$ ו״ע מוכלל של $T$, קיים (מהגדרה) ויחיד $\lambda_i$ כך ש־$v \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$.

הוכחה. ההוכחה בעיקר אלגברית ולא מעניינת במיוחד, יש צורך לפתח את הבינום של ניוטון. ■

מסתבר, שאפשר לפרק את המרחב למרחביים עצמיים מוכללים, ומשם אפשר להסיק מה קורה בהם ביתר פרטים בעזרת העתקות נילפוטנטיות.

**משפט 80.** הטענות הבאות מתקיימות:

1. $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ הוא $T$־איווריאנטי.
2. $(T-\lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$ נילפוטנטית.
3. מעל שדה סגור אלגברית, הריבוי האלגברי $d_{\lambda_i}$ הוא $\dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$

הוכחה.

1. יהי $v \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$, אז קיים $k \leq \mathcal{F}(T)$ כך ש־$(T-\lambda I)^k v = 0$. נפעיל את $T$ על שני האגפים ונקבל $(T-\lambda I)^{k+1} v = T(0) = 0$ ולכן $Tv \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$. סה"כ $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ הוא $T$־איווריאנטי.
2. נגדיר $S = (T-\lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$. לכן לכל $v \in \operatorname{dom} S = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ מתקיים $\exists k_v \colon (T-\lambda_i I)^{k_v} = S^{k_v} = 0$. משום ש־$k_v \leq \mathcal{F}(T) \leq n$ נוכל לטעון ש־$\forall v \in \operatorname{dom} S \colon S^n v = 0$, ומהגדרה $S$ נילפוטנטית כדרוש.
3. (הוכחה זו נכתבה בעזרתו האדיבה של chatGPT) נסמן $U = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$, ונרחיב את הבסיס של $U$ לבסיס של $V$ כך שנוצר מ"ו $W$ כך ש־$V = U \oplus W$. ממשפט $p_T(x) = p_{T|_W}(x) \cdot p_{T|_U}(x)$. מסעיף קודם ידוע ש־$S := (T-\lambda_i I)$ ש־$S|_U$ נילפוטנטית, לכן $n$ כך ש־$S|_U^n = 0$. נכתוב את $T$ באופן הבא: $T|_U = S|_U + \lambda I \implies S|_U = T|_U - \lambda I$. נקבל שתי הבחנות:

- $\lambda_i$ הוא הע"ע היחיד של $T|_U$, והוא ע"ע $\lambda_i \in U = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ ולכן $\lambda_i$ ע"ע של $T|_U$, והיחידות נובעת מכך שכל ע"ע מוכלל שייך לע"ע יחיד של $T$.
- $S|_W$ הפיכה, שכן בבירור $\ker S|_W \subseteq \ker(T-\lambda_i I) = V_{\lambda_i} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = U$ ולכן $W \supseteq \ker S|_W$ ולכן $\ker S \subseteq W \cap U = \{0\}$.

נסיק משתי הטענות הללו שתי מסקנות:

- מהיות $\lambda_i$ הע"ע היחיד של $T|_U$, ומהיות $\deg p_{T|_U} = \dim U$, ויחדיו עם ההנחה שאנחנו בשדה סגור אלגברית, $p_{T|_U}$ בהכרח מורכב מ־$\dim U$ גורמים לינאריים שהם $(x-\lambda_i)$.
- $\lambda_i$ איננו ע"ע של $T|_W$, בגלל שאם (בשלילה) $\lambda_i$ ע"ע של $T|_W$ עם ו"ע $v$ אז $\lambda_i v = T|_W(v) = Sv + \lambda_i v$ ומחיסור אגפים נקבל $S|_W v = 0$, כלומר $v = 0$ (כי $S|_W$ הפיכה) ואז $v$ לא ו"ע וסתירה.

סה"כ, מהיות $p_T(x) = p_{T|_W}(x) \cdot p_{T|_U}(x)$, נקבל שהריבוי האלגברי של $(x-\lambda_i)$ בא אך ורק מ־$p|_{T|_U}$ ושם הריבוי הוא $\dim U$, כלומר סה"כ הריבוי האלגברי של $\lambda_i$ בהעתקה $T$ הוא $\dim U = \dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ כדרוש.

■

**הגדרה 55.** $v$ הוא ו"ע עצמי מורחב של $\lambda_i$ מדרגה $k$ אם הוא ו"ע עצמי מורחב של $\lambda_i$ כך ש־$v \in \ker(T-\lambda I)^k \setminus \ker(T-\lambda I)^{k-1}$, כאשר בסיס $k = 1$ מוגדר להיות $v \in V_{\lambda_i}$.

**משפט 81** (פירוק המרחב למרחבים עצמיים מוכללים). נניח שאנחנו במ"ו סגור אלגברית (אפשר להרחיב לכזה במידת הצורך). אז ל־$T$ יש ע"עים $\lambda_1 \dots \lambda_k$ כלשהם. בהינתן $V$ מ"ו ו־$T$ העתקה לינארית, מההרחבה יש לה ערכים עצמיים $\lambda_1 \dots \lambda_k$ כלשהם. אזי:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$$

הוכחה. נתחיל מלהוכיח שהחיתוך בין שני מרחבים עצמיים מוכללים ריק. זה נובע ישירות מכך שכל שני ע"ע עצמיים מוכללים שייכים לע"ע רגיל יחיד של $T$. ניעזר בכך ש־$\dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$, ונקבל:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} d_{\lambda_i} = n \\ \forall i \in [k] \colon \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \subseteq V \\ \forall i,j \in [k] \colon \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \cap \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_j} = \{0\} \end{cases}$$

כאשר $d_{\lambda_i}$ הריבוי האלגברי של $\lambda_i$, וידוע סכום הריבויים האלגבריים הוא $n$ שכן $p_T(x)$ פולינום ממעלה $n$. לכן ממשפט יש סכום ישר כדרוש. ■

עתה נוכיח מחדש את משפט ג'ורדן, אך הפעם ללא תלות בפולינום מינימלי ופירוק פרימרי.

הוכחה באמצעות מרחבים עצמיים מוכללים. תהי העתקה $T$. מפריקות הפולינום האופייני יש לה $\lambda_1 \dots \lambda_k$ ע"עים כלשהם. ממשפט:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$$

עוד ידוע שההעתקה $S_i = (T-\lambda_i)_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$ נילפוטנטית. כבר הוכחנו את צורת ג'ורדן עבור העתקות נילפוטנטיות ולכן ל־$S_i$ קיים בסיס מג'רדן $\mathcal{B}_i$. נבחין ש־:

$$T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} = S_i + \lambda_i \implies \left[T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}\right]_{\mathcal{B}_i} = \underbrace{\operatorname{diag}\{J_{a_1}(0) \dots J_{a_\ell}(0)\}}_{[S_i]_{\mathcal{B}_i}} + \lambda I = \operatorname{diag}\left(J_{a_1}(\lambda_i) \dots J_{a_\ell}(\lambda_i)\right)$$

ולכן אפשר לשרשר את הבסיסים לכדי בסיס מג׳ורדן: $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$, ואכן:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}\left(\left[T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}\right]_{\mathcal{B}_i} \mid i \in [k]\right) = \operatorname{diag}\left(J(\lambda_1) \ldots J(\lambda_1) \ldots J(\lambda_k) \ldots J(\lambda_k)\right)$$

שרשור של בלוקי ג׳ורדן. ■

**הערה 23.** מיחידות צורת ג׳ורדן, הצורה המתקבלת מפירוק פרימרי ומפירוק למרחבים עצמיים מוכללים היא זהה. דרך אחרת לראות את זה, היא שהמרחבים אליהם פירקנו פרימרית שהם $(T-\lambda_i)^{d_\lambda} = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ בכל מקרה.

**משפט 82.** כמות בלוקי הג׳ורדן לע״ע $\lambda$ היא הריבוי הגיאומטרי.

**משפט 83.** כמות הוקטורים בבסיס המג׳רדן המשוייכים ל־$\lambda$ הוא הריבוי האלגברי $d_\lambda$ (ניסוח אחר: סכום גדלי הבלוקים השייכים ל־$\lambda$ בצורת הג׳ורדן הוא $d_\lambda$).

הוכחה. ראינו בצורת ג׳ורדן בעזרת פירוק למרחבים עצמיים מוכללים, שמספר הוקטורים השייכים ל־$\lambda$ הוא $\dim \tilde{\mathcal{V}}_\lambda$ וידוע שזה מ״ו ממימד $d_\lambda$. סה״כ הראינו את הדרוש. ■

**משפט 84.** בלוק הג׳ורדן המשויך ל־$\lambda$ הגדול ביותר, הוא הריבוי של $(x-\lambda)$ בפולינום $m_T(x)$.

הוכחה. ראינו שבלוק הג׳ורדן $J_a(\lambda)$ מגיע מפירוק ג׳ורדן של $S = (T-\lambda)_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}$. הבלוק הכי גדול בצורת הגו׳רדן של $S$ של נילפוטנטית, היא השרשרת הכי ארוכה של $S$ ב־$\tilde{\mathcal{V}}_\lambda$. משום ש־$\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = \{\ker S^k \mid k \in [n]\} = S^{n(S)}$, השרשרת הארוכה ביותר האפשרית היא $v, Sv \ldots S^{n(S)}v$ והיא קיימת כי הסדרה הזו בת״ל עבור $v$ כלשהו (אחרת $n(S)$ לא החזקה המינימלית שמאפסת את $S$ וסתירה).

ראינו ש־$m_T$ הוא ה־lcm של הצמצום של $T$ למרחבים $T$־אינווראינטים, ומשום שכל $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_k}$ בעל פולינום אופייני $(x-\lambda_k)^{d_{\lambda_i}}$, ו־$\gcd((x-\lambda_i)^k, (x-\lambda_j)^m) = 1$, ובגלל ש־$m_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x)$ מחלק את $p_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x)$, אז $m_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}}(x) = (x-\lambda)^k$ עבור $k \in [r_\lambda]$ כלשהו. אז:

$$\forall i \neq j \in [k]\colon\ \gcd\left(T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}(x), T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_j}}(x)\right) = 1$$

דהיינו, ה־lcm זה פשוט כפל של הפולינומים המינימליים של $T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}$. לכן, תחת הסימון $m_\lambda$ להיות הריבוי של $\lambda$ בפולינום $m_T$, בהכרח $m_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x) = (x-\lambda)^{m_i}$. מהגדרת פולינום מינימלי, $m_\lambda$ הוא המינימלי כך ש־$(T-\lambda)^{m_i} = 0$ כלומר $m_\lambda$ המינימלי כך ש־$S^{m_\lambda} = 0$. סה״כ $m_\lambda$ דרגת הנילפוטנטיות של $S$. הראנו ש־$n(S)$ השרשרת המקסימלית בצורת הג׳ורדן של $S$, וסה״כ בלוק הגו׳רדן הגדול ביותר של $J(\lambda)$ הוא $m_\lambda$ הריבוי של $(x-\lambda)$ ב־$m_T(x)$. ■

המשך בעמוד הבא

# 7 Bilinear Forms

## 7.1 $\sim$ הגדרות בסיסיות בעבור תבניות בי־לינאריות כלליות

**הגדרה 56.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$. פונקציונל לינארי $\varphi$ מעל $V$ הוא $\varphi\colon V\to\mathbb{F}$.

**הערה 24.** ראה הרחבה על פונקציונלים לינארים ומרחבים דואלים בסוף הסיכום.

**הגדרה 57.** יהיו $V,W$ מ"וים מעל $\mathbb{F}$. תבנית בי־לינארית על $V\times W$ הינה העתקה $f\colon V\times W\to\mathbb{F}$ כך ש־$\forall v_0\in V\ \forall w_0\in W$ כך שהעתקות $(v,w_0)\ \ v\mapsto$ ,$f(v_0,w)$ $w\mapsto$ הן פונקציונליים לינאריים.

אינטואיטיבית, ההעתקה לינארית בכל אחת מהקורדינאטות בנפרד (בדומה לדוגמה לדטרמיננטה, שהיא העתקה מולטי־לינארית ולינארית בכל אחת מהשורות בנפרד)

**משפט 85.** באופן שקול: יהיו $\forall v\in V,\ \ w\in W,\ \ \alpha\in\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}\forall v_1,v_2\in V\colon f(v_1+v_2,w)&=f(v,w)+f(v_2,w)\\ \forall w_1,w_2\in W\colon f(v,w_1,w_2)&=f(v,w_1)+f(v,w_2)\\ f(\alpha v,w)&=\alpha f(v,w)=f(v,\alpha w)\end{aligned}$$

בסופו של דבר נתמקד בסוג מסויים של העתקות בילינאריות, הן מכפלות פנימיות.

בשביל העתקות $n$־לינאריות צריך טנזור $n$ ממדי. זה לא נעים ויודעים מעט מאוד על האובייקטים הללו. בפרט, בעבור העתקה בי־לינארית נראה שנוכל לייצג אותה באמצעות מטריצות. בלי טנזור ובלגנים – שזה נחמד, וזו הסיבה שאנו מתעסקים ספציפית עם העתקות בילינאריות.

**דוגמאות.**

1. תבנית ה־0: $\forall v,w\colon f(v,w)=0$
2. נגדיר $V=W=\mathbb{R}^2$, אז $f\left(\binom{x}{y},\binom{u}{v}\right)=2xu+5xv-12yu$
3. (חשוב) על $\mathbb{F}^n$:

   **הגדרה 58.** לכל שדה $\mathbb{F}$ מוגדרת התבנית הבי־לינארית הסטנדרטית היא:

   $$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$$

4. יהיו $\varphi\colon V\to\mathbb{F},\ \ \psi\colon W\to\mathbb{F}$ פונקציונליים לינאריים $f(v,w)=\varphi(v)\cdot\psi(w)$
5. הכללה של 4: יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_k\colon V\to\mathbb{F}$ פונקציונליים לינאריים וכן $\psi_1\ldots\psi_k\colon W\to\mathbb{F}$ פונקציונליים לינארים. אז ההעתקה הבאה בילינארית: $f(v,w)=\sum_{i=1}^k\varphi_i(v)\psi_i(w)$

הרעיון: ברגע שנקבע וקטור ספציפי נקבל לינאריות של הוקטור השני.

במקרה ש־$\mathbb{F}=\mathbb{R}$ לעיל, התבנית הבילינארית הסטנדרטית "משרה" את הגיאומטריה האוקלידית. כלומר $v\perp u\iff f(v,u)=0$.

**הערה 25.** בעתיד נראה שכל תבנית בילינארית נראית כמו מקרה 5.

**משפט 86.** נסמן את מרחב התבניות הבי־לינאריות על $V\times W$ בתור $B(V,W)$. זהו מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

אני ממש לא עומד להגדיר את החיבור והכפל בסקלר של המשפט הקודם כי זה טרוויאלי והמרצה כותב את זה בעיקר בשביל להטריל אותנו.

**דוגמה חשובה אחרת.**

**משפט 87.** נסמן ש־$\dim V=n,\ \ \dim W=m$ ותהי $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$. יהי $\mathcal{A}$ בסיס ל־$B$, $\mathcal{B}$ בסיס ל־$W$

$$f(u,w)=[v]_{\mathcal{A}}^T\cdot A[w]_{\mathcal{B}}$$

העתקה בילינארית.

הוכחה. נקבע $v$ כלשהו:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T\cdot A=B\in M_{1\times m},\ \ g(w)=f(v,w),\ \ g(w_1+w_2)=B[w_1+w_2]_{\mathcal{B}}=B[w_1]_{\mathcal{B}}+B[w_2]_{\mathcal{B}}$$

כנ"ל עבור כפל בסקלר. נקבע $w$, אז $C=A[w]_{\mathcal{B}}\in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$:

$$h(v)=f(v,w)\ \ h(v)=[v]_{\mathcal{B}}^T\cdot C,\ \ h(v_1+v_2)=[v_1+v_2]_{\mathcal{B}}^T=([v_1]_{\mathcal{B}}^T+[v_2]_{\mathcal{B}}^T)C=h(v_1)+h(v_2)$$

$\blacksquare$

("זה $\mathcal{A}$ mathcal, אתם תסתדרו" – המרצה ברגע שיש לו שני $A$־ים על הלוח)

**הגדרה 59.** בהינתן תבנית בי־לינארית $f\colon V\times W\to\mathbb{F}$ ונניח ש־$\mathcal{A}$ בסיס ל־$V$, $\mathcal{B}$ בסיס ל־$W$. נגדיר את המטריצה המייצגת את $f$ ביחס לבסיסים $\mathcal{A},\mathcal{B}$ ע"י $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כאשר $(A)_{ij}=f(v_i,w_j)$ (נסמן $\mathcal{B}=(w_i)_{i=1}^m$ $\mathcal{A}=(v_i)_{i=1}^n$).

**משפט 88.** $f(v,w)=[v]_{\mathcal{A}}^TA[w]_{\mathcal{B}}$

הוכחה. קיימים ויחידים $\alpha_1\dots\alpha_n,\ \beta_1\dots\beta_m\in\mathbb{F}$ כך ש־$v=\sum\alpha_iv_i,\ w=\sum b_iw_i$. כלומר:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T=(\alpha_1\dots\alpha_n),\ [w]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

ומכאן פשוט נזרוק אלגברה:

$$\begin{aligned}
f(v,w)=&f\left(\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i,\ w\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_if(v_i,\ w)\\
=&\sum_{i=1}^n\alpha_if\left(v,\ \sum_{j=1}^n\beta_jw_j\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left(\sum_{j=1}^m\beta_jf(v_i,w_j)\right)\\
=&\sum_{i,j\in[n]\times[m]}\alpha_if(v_i,w_j)\beta_j\\
=&\left(\sum_{i=1}^n\alpha_ia_{i1},\ \sum_{i=1}^n\alpha_ia_{i2},\ \cdots,\ \sum_{i=1}^n\alpha_ia_{im}\right)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}\\
=&(\alpha_1\dots\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

**סימון 7.** נאמץ לסיכום הזה את הסימון $[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ עבור המטריצה המייצגת של $f$ בי־לינארית.

(זהו **אינו** סימון רשמי בקורס אבל בהחלט צריך להיות)

**משפט 89.** עם אותם הסימונים כמו קודם:

$$\psi\colon B(v,w)\to M_{n\times m}(\mathbb{F}),\ f\mapsto[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$$

אז $\psi$ איזו'.

הוכחה. נסמן את $A=[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ ואת $B=[g]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. אז:

- **ליניאריות.**

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}(f+g))_{ij}&=(f+g)(v_i,w_j)\\
&=f(v_i,w_j)+g(v_i,w_j)\\
&=(A)_{ij}+(B)_{ij}\\
&=(\psi(f))_{ij}+(\psi(g))_{ij}\implies\psi(f+g)\\
&=\psi(f)+\psi(g)
\end{aligned}$$

באופן דומה בעבור כפל בסקלר:

$$(\psi(\alpha f))_{ij}=\alpha f(v_i,w_j)=\alpha(\psi(f))_{ij}\implies\psi(\alpha f)=\alpha\psi(f)$$

- **חח"ע.** תהי $f\in\ker\psi$, אז: $\psi(f)=0\in M_{n\times m}\implies\forall i,j\in[n]\times[m]\colon f(v_i,w_j)=0$ ולכן $\forall v\in V,w\in W\colon f(v,w)=\sum_{i,j\in[n]\times[m]}\alpha_if(v_i,w_j)\beta_j=0$ (עם אותם הסימונים כמו קודם)
- **על.** תהי $M_{n\times m}(\mathbb{F})nA$. נגדיר $f(v,w)=[v]_{\mathcal{A}}^TA[w]_{\mathcal{B}}$ ואכן $f(v_i,w_j)=e_i^TAe_j=(A)_{ij}$.

■

**משפט 90.** יהיו $V,W$ מ"וים מעל $\mathbb{F}$ נניח $\mathcal{A},\mathcal{A}'\subseteq V$ בסיסים של $V$ וכן $\mathcal{B},\mathcal{B}'\subseteq W$ בסיסים של $W$. תהי $f\in B(V,W)$. תהי המייצגת של $f$ לפי $\mathcal{A},\mathcal{B}$ היא $A$ ותהי $A'$ המייצגת בבסיסים $\mathcal{A}',\mathcal{B}'$. תהי $P$ מטריצת המעבר מ־$\mathcal{A}$ ל־$\mathcal{A}'$ ו־$Q$ מטריצת המעבר מ־$\mathcal{B}$ ל־$\mathcal{B}'$, אז $A'=P^TAQ$.

הוכחה. ידוע:

$$P[v]_{\mathcal{A}}=[v]_{\mathcal{A}'},\ \ Q[w]_{\mathcal{B}}=[w]_{\mathcal{B}'}$$

מצד אחד:

$$f(v,w)=[v]_{\mathcal{A}}^T=[v]_{\mathcal{A}}^TA[w]_{\mathcal{B}}=(P[v]_{\mathcal{A}'})^TAQ[w]_{\mathcal{B}'}=[v]_{\mathcal{A}'}^T\,P^TAQ\,[w]_{\mathcal{B}'}\implies A'=P^TAQ$$

כדרוש. ■

**הגדרה 60.** עבור $f\in B(V,W)$ נגדיר את $\operatorname{rank} f=\operatorname{rank} A$ כאשר $A$ מייצגת אותהת ביחס לבסיסים כלשהם.

**משפט 91.** $\operatorname{rank} f$ מוגדר היטב

הוכחה. כפל בהפיכה לא משנה את דרגת המטריצה (ו־transpose של מטריצה הוא הפיך), דהיינו מטריצות שינוי הבסיס לא משנות את דרגת המטריצה. ■

**מסקנה 17.** תהא $f\in B(V,W)$ ונניח $\operatorname{rank} f=r$. אז קיימים בסיסים $\mathcal{A},\mathcal{B}$ של $W,V$ בהתאמה כך ש־$[f]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}=\left(\begin{smallmatrix}I_R&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$

הרעיון הוא לדרג את כל כיוון, שורות באמצעות transpose ועמודות באמצעות המטריצה השנייה. אפשר גם לקבע בסיס, ולדרג שורות ועמודות עד שיוצאים אפסים (הוכחה לא נראתה בכיתה).

"חצי השעה הזו גרמה לי לשנוא מלבנים בצורה יוקדת" – מעתה ואילך נתעסק במקרה בו $V=W$. נשתמש בבסיס יחיד.

## 7.2 ∼ חפיפה וסימטריות

**הגדרה 61.** יהיו $A,A'\in M_n(\mathbb{F})$, נאמר שהן חופפות אם קיימת הפיכה $P\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$A'=P^TAP$.

**משפט 92.** מטריצות חופפות אמ"מ הן מייצגות את אותה התבנית הבילינארית.

**משפט 93.** אם $A,A'$ חופפות, אז:

1. $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} A^T$
2. $\exists 0\neq c\in\mathbb{F}:\ \det A'=c^2\det A$

הוכחה. הגדרנו $\operatorname{rank} f$ כאשר $f$ בילינארית להיות הדרגה של המייצגת את התבנית, וראינו שהיא לא תלויה בבסיס. בכך למעשה כבר הוכחנו את 1.. עבור 2., מתקיים $A'=P^TAP$ ו־$P$ הפיכה (ולמעשה מטריצת מעבר בסיס) ולכן אם נסמן $c=|P|=|P^T|$ מתקיים:

$$|A'|=|P^TAP|=|P^T|\cdot|A|\cdot|P|=|P|^2\,|A|=c^2|A|$$

■

**הערה 26.** יש שדות שמעליהם טענה 2 לא מעניינת במיוחד

**הגדרה 62.** תבנית $f$ מעל $V$ נקראת סימטרית אם: $\forall v,w\in V:\ f(v,w)=f(w,v)$

**הגדרה 63.** תבנית $f$ מעל $V$ נקראת אנטי־סימטרית אם: $\forall v,w\in V:\ f(v,w)=-f(w,v)$

נבחין שאם $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$, ניתן להגדיר את:

$$\varphi(v,w)=\frac{f(v,w)+f(w,v)}{2},\ \ \psi(v,w)=\frac{f(v,w)-f(w,v)}{2}$$

מתקיים ש־$\varphi$ סימ' ו־$\psi$ א־סימ' וכן $f=\varphi+\psi$.

**משפט 94.** תהי $f$ תבנית בילינארית על $V$, ו־$B=(v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל־$B$. נניח $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ המייצגת את $f$ ביחס ל־$B$. אז $f$ סימ'/אסימ' אמ"מ $A$ סימ'/אסימ'.

הוכחה. $\impliedby$ אם $f$ סימ'/אסימ', אז:

$$a_{ij}=f(v_i,v_j)\overset{\text{Sym}}{=}f(v_j,v_i)=a_{ji}$$
$$a_{ij}=f(v_i,v_j)\overset{\text{ASym}}{=}-f(v_j,v_i)=-a_{ji}$$

$\Longleftarrow$ אם $A$ סימ' אז:

$$f(v,w)=[u]_B^TA[w]_B\overset{(1)}{=}([u]_B^TA[w]_B)^T=[w]_B^TA^T([u]_B^T)^T=[w]_B^TA[u]_B=f(w,v)$$

כאשר (1) מתקיים כי transpose למטריצה מגודל $1\times 1$ מחזיר אותו הדבר. וכן במקרה האנטי־סימטרי:

$$f(u,w)=[w]_B^T(-A)[u]_B=-[w]_B^TA[u]_B=-(w,u)$$

■

## 7.3 ~ תבנית ריבועית

**הגדרה 64.** תהא $f$ תבנית על $V$. התבנית הריבועית:

$$Q_p\colon V\to\mathbb{F},\ Q_f(v)=f(v,v)$$

היא לא העתקה לינארית. היא תבנית ריבועית. **דוגמאות:**

- $$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=xv+uy\implies Q\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=xy+yx=2xy$$
- $$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=xv-uy\implies Q\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=xy-yx=0$$
- התבנית הסטנדרטית:
$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)=xu+yv\implies Q_f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+y^2$$

**סימון 8.** עבור תבנית בילינארית $f$ על $V$, נגדיר את $\hat{f}(u,v)=f(v,u)$

אם $f$ סימטרית נבחין ש־$Q_f=Q_{\hat{f}}$

**משפט 95.** תהי $f$ תבנית בילי' סימ' על $V$, ונניח ש־$\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$, אז:

- $$f(v,w)=\frac{Q_f(v+w)-Q_f(v)-Q_f(w)}{2}$$
- אם $f$ איננה תבנית ה־0 אז קיים $0\neq v\in V$ כך ש־$Q_f(v)\neq 0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned}Q_f(v+w)-Q_f(v)-Q_f(w)=&f(v+w,v+w)-f(v,v)-f(w,w)\\=&\quad f(v,v)+f(v,w)\\&-f(w,v)+f(w,w)\\&-f(v,v)-f(w,w)\\\overset{\text{Sym}}{=}&2f(v,w)\end{aligned}$$

■

עבור 1, עתה נוכיח את 2: נניח $\forall v\in V\colon Q_f(v)=0$ אז

$$\forall v,w,\in V\colon f(v,w)=\frac{Q_f(v+w)-Q_f(v)-Q_f(w)}{2}=0$$

למה שונה ממציין 2 חשוב:

$$f(\tbinom{x}{y}),\ \tbinom{u}{v}))=xv+yu\implies Q_f=0\land f\neq 0$$

**הערה 27.** אין ממש טעם להגדיר תבנית ריבועית על תבנית בילינארית שאיננה סימטרית. הסיבה? כל מטריצה יכולה להיות מפורקת לחלק סימטרי וחלק אנטי־סימטרי, החלק האנטי־סימטרי יתאפס (אלכסון אפס) ורק החלק הסימטרי ישאר בכל מקרה. זה לא שאי־אפשר, זה פשוט לא מעניין במיוחד.

**משפט 96.** נניח $\operatorname{char} F \neq 2$, ו־$f$ סימטרית על $V$. אז קיים בסיס ל־$V$ הוא $B=(v_i)_{i=1}^n$ כך ש־$[f]_B$ אלכסונית.

תזכורת: $[f]_B$ סימון המוגדר בסיכום זה בלבד. בקורס מדברים על המטריצה המייצגת של בי־לינארית במילים.

הוכחה. באינדוקציה על $n$. בסיס $n=1$ ברור. אם $f$ תבנית ה־0, אז כל בסיס שנבחר מתאים. אחרת, קיים $0\neq v\in V$ כך ש־$Q_f(v)\neq 0$. נגדיר $U=\{u\in V \mid f(u,v)=0\}$. תמ"ו כי גרעין של ה"ל (כי קיבענו את $v$). מה התמונה של ההעתקה? $f(v,v)=Q_f(v)\neq 0$. לכן תמונת ההעתקה היא כל $\mathbb{F}$, וממדה 1. ידוע $U$ תמ"ו ממימד $n-1$. אז $f_{|U}\colon U\times U\to\mathbb{F}$ לכסינה ולכן קיים בסיס $B_U$ כך ש־$[f_{|U}]$ אלכסונית. נגדיר את $B=\{v\}\cup B_U$ נבחין שהיא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots \\ 0 & [f_{|U}]_B & - \\ \vdots & | & \end{pmatrix}$$

■

## 7.4 ~ הסיגנטורה ומשפט ההתאמה של סילבסטר

**משפט 97.** לכל $f$ תבנית סימ' קיימת מטריצה מייצגת מהצורה $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ כאשר $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ (או סגור אלגברית כלשהו)

.

הוכחה. נסמן את $\dim f=r$. עד כדי שינוי סדר איברי הבסיס, המטריצה המייצגת אלכסונית היא:

$$[f]_B=\begin{pmatrix} \operatorname{diag}(c_1\dots c_r) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

כאשר $c_1\dots c_r\neq 0$, ביחס לבסיס $B=(v_1\dots v_r,\dots v_n)$. באופן כללי לכל $i\in\mathbb{R}$ נוכל להגדיר את $v_i'=\frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$ כך ש־$f(v_i',v_i')=1$ כי $f(v_i,v_i)=c_i$ ומליניאריות בכל אחת מהקורדינאטות. ולכן $B'=(v_1'\dots v_r',v_{r+1}\dots v_n)$ בסיס המקיים את הדרוש.

באותו האופן, אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ (ולא $\mathbb{C}$) אז קיים בסיס שהמטריצה המייצגת לפיו היא:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

בלוקים, כך ש־$r=p+q$. כאן נגדיר:

$$f(v,v)=c<0,\ \ v'=\frac{v}{\sqrt{|c|}},\ \ f(v',v')=\frac{c}{|c|}=-1$$

■

בשיעורי הבית נראה ש־: נניח ש־$f$ אנטי־סימטרית לא מנוונת (לא תבנית ה־0), אז תמיד ישנה מטריצה מייצגת מהצורה (תחפשו "מטריצה סימפלקטית" בגוגל, זה קצת סיוט לעשות את זה בלאטך). הרעיון הוא אם:

$$\hat{I}_n=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix} 0 & & -\hat{I}_n \\ & \ddots & \\ \hat{I}_n & & 0\end{pmatrix}$$

אז $J$ סימפלקטית.

**הגדרה 65.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ו־$f$ תבנית בילינארית מעל $V$. נאמר ש־$f$ חיובית/אי־שלילית/שלילית/אי־חיובית אם $\forall 0\neq v\in V$ מתקיים ש־$f(v,v)>0$/$f(v,v)\geq 0$/$f(v,v)<0$/$f(v,v)\leq 0$

**משפט 98.** תהא $A$ מטריצה מייצגת של תבנית בי־לינארית סימ', עם ערכים $0,-1,1$ בלבד על האלכסון, מקיימת:

- $f$ חיובית אמ"מ ישנם רק 1־ים.
- $f$ אי־שלילית אמ"מ ישנם רק 1־ים ואפסים.
- $f$ שלילית אמ"מ ישנם רק $-1$־ים
- $f$ חיובית אמ"מ ישנם רק $-1$־ים ואפסים.

הוכחה.

$\Longleftarrow$ ברור

- לכל $0 \neq v \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ומתקיים $f(v,v) = \alpha_i^2 f(v_{i,i})$ ולפי המקרה זה יסתדר יפה.

■

**משפט 99** (משפט ההתאמה של סילבסטר)**.** $p,q$ הנ״ל נקבעים ביחידות.

(תחזרו כמה משפטים למעלה למקרה בו $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

גישה שגויה להוכחה. הוכחה באמצעות tr לא עובדת. בניגוד ליחס הדמיון להעתקות לינאריות, ביחס החפיפה להעתקות בי־לינאריות ה־tr לא נשמר. ■

הוכחה תקינה. נסמן $B = (v_1 \dots v_p, u \dots u_q, w_1 \dots w_k)$ וכן $B' = (v_1' \dots v_t', u_1' \dots u_s', w_1 \dots w_k)$ כי $t + s = p + q$. בה״כ $p \leq t$, נניח בשלילה ש־$p < t$. נסמן $U = \operatorname{span}(v_1 \dots v_p)$. ידוע $f$ חיובית על $U$, וכן $\dim U = p$. נתבונן ב־$W = \operatorname{span}(u_1' \dots u_s', w_1 \dots w_k)$. אזי גם $f$ חיובית על $W$, ו־$\dim W = s + k$. בגלל ש־$U \cap W = \{0\}$ (כי אם לא, אז עבור $0 \neq v \in U \cap W$ נקבל $f(v,v) > 0$ כי $v \in U$ וכן $f(v,v) \leq 0$ כי $v \in W$ וסתירה). ידוע ש־$U \oplus W \subseteq V$ תמ״ו וכן $\dim U + \dim W \leq \dim V$. נציב ונקבל $\dim V = t + s + k > p + s + k$, סתירה. לכן $p,q$ נקבעים ביחידות. ■

**סימון 9.** ה־$(p,q)$ לעיל נקראים הסיגנטורה של $f$.

(תזהרו, הסיגנטורה תתקוף אותנו אח״כ)

המשך בעמוד הבא

# 8 Inner Product Vector Spaces

## 8.1 ∼ הגדרה כללית

### 8.1.1 מעל $\mathbb{R}$

**מעתה ועד סוף הקורס,** מתקיים $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. כל עוד נאמר "$\mathbb{F}$", זה נכון בעבור שני המקרים. אחרת, נפצל.

**הגדרה 66.** יהי $V$ מ"ו, מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ היא תבנית בילינארית סימטרית חיובית מעל $V$, ומסומנת $f(v,u) = \langle v, u \rangle$ (ויש ספרים שמסמנים $\langle v \mid u \rangle$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$).

**סימון 10.** בקורס מסמנים $\langle \cdot, \cdot \rangle$ אבל אני מגניב אז אני משתמש ב־$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

**למה 9.** $\forall v \in V\colon\ \langle v \mid v \rangle \geq 0$ ו־$\langle v, v \rangle$ אמ"מ $v = 0$.

הוכחה מסימטריה.

**דוגמה.** (המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$, AKA כפל סקלרי):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

**הגדרה 67.** אם $V$ מ"ו וקיימת $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ מכפלה פנימית אז $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.

**משפט 100.** $V = M_n(\mathbb{R})$, אז $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$ אז $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ.

**דוגמה מגניבה.** בהינתן $V = c[0,1]$, מ"ו הפונקציות הממשיות הרציפות על $[0,1]$, ו־$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$

**משפט 101.** (שהפליצו מחדו"א) אם $f \geq 0$ אינטרבילית (זה נשמע כמו מפלצת) על קטע $[a,b]$ וגם ישנה נקודה חיובית $c \in [a,b]$ שעבורה $f(x) \geq 0$ וגם $f$ רציפה ב־$c$, אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

### 8.1.2 מעל $\mathbb{C}$

ישנה בעיה עם חיובית: אם $v \in V$ כך ש־$\langle v \mid v \rangle \geq 0$ אך $\langle iv \mid iv \rangle = -1 \langle v \mid v \rangle < 0$ סתירה. לכן, במקום זאת, נשתמש בהגדרה הבאה:

**הגדרה 68.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ מקיימת:

- ליניארית ברכיב הראשון: אם נקבע $v$, אז $u \mapsto \langle v \mid u \rangle$ לינארית.
- ססקווי־ליניאריות ברכיב השני: $\langle u_1 + u_2 \mid v \rangle = \langle u_1 \mid v \rangle + \langle u_2 \mid v \rangle \wedge \langle u \mid \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u \mid v \rangle$

  כאשר $\bar{\alpha}$ הצמוד המרוכב של $\alpha$.
- הרמטיות: $\langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$
- $\forall 0 \neq v \in V\colon\ \langle v \mid v \rangle > 0 \wedge \langle 0 \mid 0 \rangle = 0$

למעשה – נבחין שאין צורך בממש ססקווי־ליניאריות ברכיב השני וכן לא בתנאי $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0$, וההגדרה שקולה בעבור חיבוריות ברכיב השני בלבד,. זאת כי:

$$\langle u \mid \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v \mid u \rangle} = \overline{\alpha \langle v \mid u \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\langle v \mid u \rangle} = \bar{\alpha} \langle v \mid u \rangle$$

ומכאן נגרר ססקווי־ליניאריות, וכן $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0$ נובע ישירות מליניאריות ברכיב השני.

(אופס! בן הגדיר את זה לליניארית ברכיב השני, כלומר הפוך, כי ככה עושים את זה בפתוחה. תיקנתי בסיכום אבל יכול להיות שיש משהו הפוך כי פספסתי. זה אמור להיות ליניארי ברכיב השני).

**הגדרה 69.** $\bar{B}^T = B^*$

**הגדרה 70.** יהי ממ"פ $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$. לכל $v \in V$ מגדירים את הנורמה של $v$ להיות $||v|| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$

מאקסיומת החיוביות:

$$||v|| \geq 0 \wedge (||v|| = 0 \iff v = 0)$$

וכן:

$$\left|\left|t \cdot v^2\right|\right| = \langle tv \mid tu \rangle = t\bar{t} \langle v \mid v \rangle = |t|\, ||v|| \implies ||t \cdot v|| = |t| \cdot ||v||$$

## 8.2 ∼ הקשרים גיאומטריים של מכפלה פנימית

**הגדרה 71.** יהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ו־$||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, אז $(V, ||\cdot||)$ יקרא מרחב נורמי.

**משפט 102.** ("נוסחאת הפולריזציה") בהינתן $(V, ||\cdot||)$ מרחב נורמי;

**גרסה מעל $\mathbb{R}$:**

$$\forall v, u \in V\colon\ \langle v \,|\, u\rangle = \frac{1}{4}(||u+v||^2 + ||u-v||^2)$$

**גרסה מעל $\mathbb{C}$:**

$$\langle u \,|\, v\rangle = \frac{1}{4}\Big( ||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i\,||u+iv|| - i\,||u+iv|| \Big)$$

הוכחה. (ל־$\mathbb{C}$).

$$\begin{aligned}
\langle u+v \,|\, u+v\rangle &= ||u||^2 + \langle u \,|\, v\rangle + \langle v \,|\, u\rangle + ||v||^2 \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\Re(\langle v \,|\, u\rangle) \\
\langle v-u \,|\, v-u\rangle &= ||u||^2 + ||v||^2 - 2\Re(\langle v \,|\, u\rangle) \\
\langle u+iv \,|\, u+iv\rangle &= ||u||^2 + ||v||^2 + \langle u \,|\, iv\rangle + \langle iv \,|\, u\rangle \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 - i\,\langle u \,|\, v\rangle + i\overline{\langle u \,|\, v\rangle} \\
&= ||u||^2 + ||v||^2 - i(2\Im\,\langle u \,|\, v\rangle) \\
||u-iv|| &= ||u|| + ||v|| - \langle u \,|\, iv\rangle - \langle iv \,|\, u\rangle \\
&= ||u|| + ||v|| - 2\Im(\langle v \,|\, u\rangle)
\end{aligned}$$

וסה"כ אם נציב בנוסחה, אחרי שחישבנו את כל אבירה, הכל יצטמצם וש־$\langle u \,|\, v\rangle$ אכן שווה לדרוש. ■

מנוסחאת הפולריזציה, נוכל לשחזר באמצעות נורמה את המכפלה הפנימית. במילים אחרות, ממ"פ ומרחב נורמי הם אותו הדבר.

**הגדרה 72.** בהינתן $(v, \langle\cdot \,|\, \cdot\rangle)$ ממ"פ, לכל $v \in V$ נאמר ש־$u$ מאונך ל־$v$ (או אורתוגולי ל־ אם אנחנו מרגישים מפונפנים) ונסמן $v \perp u$ אם $\langle u \,|\, v\rangle = 0$.

**הערה 28.** אם $v \perp u$ אז $u \perp v$. (כי צמוד של 0 הוא 0).

**משפט 103** (משפט פיתגורס)**.** (מאוד מועיל) יהי $V$ ממ"פ כך ש-$v, u \in V$ אורתוגונלים, אז $||v+u||^2 = ||v||^2 + ||u||^2$

הוכחה. משום שהם מאונכים מתקיים $\langle v \,|\, u\rangle = 0$. נפתח אלגברה:

$$||v+u||^2 = \langle v+u \,|\, v+u\rangle = ||v||^2 + \cancel{\langle v \,|\, u\rangle} + \cancel{\langle u \,|\, v\rangle} + ||u^2|| = ||v||^2 + ||u||^2 \quad \top$$

■

**הערה 29.** בעבור $v = \mathbb{R}^n$ מ"פ סטנדרטית אז $||v||$ מזדהה עם מושג הגודל של וקטור בגיאומטריה רגילה.

**הערה 30.** בתוך $\mathbb{R}^n$ הוקטורים הסטנדרטיים מאונכים אחד לשני (במכפלה הפנימית הסטנדרטית) ולכן $\langle e_i \,|\, e_j\rangle = \delta_{ij}$ כאשר $\delta_{ij}$ הדלתא של כרוניקר. באינדוקציה על משפט פיתגורס נקבל ש־:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i \implies ||v|| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

שזה בדיוק מושג הגודל בגיאומטריה אוקלידית.

**הערה 31.** מעל $\mathbb{R}$ מקבלים אמ"מ למשפט פיתגורס, מעל $\mathbb{C}$ לאו דווקא.

**משפט 104.** (אי שוויון קושי־שוורץ)

$$\forall v, u \in V\colon\ |\langle u \,|\, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ושוויון אמ"מ $v, u$ ת"ל.

**הערה 32.** זה בפרט נכון בגיאומטריה סטנדרטית ממשפט הקוסינוסים.

הוכחה. אם $v$ או $u$ הם 0, אז מתקבל שוויון. טענת עזר: קיים איזשהו $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש־$v \perp u - \alpha v$. נסמן $v_u = \alpha v$ כאשר נמצא אותו. הוכחת טענת העזר. נחפש כזה:

$$\langle u - \alpha v \,|\, v\rangle = 0 \impliedby \langle v \,|\, u\rangle - \alpha \left|\left|v\right|\right|^2 = 0 \impliedby \alpha = \frac{\langle v \,|\, u\rangle}{\left|\left|v\right|\right|^2}$$

כדרוש. (מותר לחלק בנורמה כי הם לא 0). ניעזר במשפט פיתגורס:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u - \alpha v \perp v \\ u - \alpha v \perp v \end{cases} \\
\implies &\left|\left|u\right|\right|^2 = \left|\left|(u - \alpha v + \alpha v)\right|\right|^2 = \overbrace{\left|\left|u - \alpha v\right|\right|^2}^{\geq 0} + |\alpha|^2 \left|\left|v\right|\right|^2 \\
&\geq |\alpha| \cdot \left|\left|v\right|\right|^2 = \frac{|\langle v \,|\, u\rangle|^2}{(\left|\left|v\right|\right|^2)^2} = \left|\left|v\right|\right|^2 = \frac{|\langle u \,|\, v\rangle|^2}{\left|\left|v\right|\right|^2} \\
\implies &|\langle v \,|\, u\rangle|^2 \leq \left|\left|v\right|\right| \cdot \left|\left|u\right|\right|
\end{aligned}$$

בפרט $\left|\left|u - \alpha v\right|\right|^2 = 0$ אמ"מ הם תלויים לינארית ומכאן הכיוון השני של המשפט. ■

**הערה 33.** המשפט למעלה לא אומר כלום כי מגדירים קוסינוס לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

**דוגמאות.**

1. ממכפלה פנימית סטנדרטית:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)$$

2. נניח $f, g[0,1] \to \mathbb{R}$ רציפות אז:

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leq \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t$$

כאשר $f^2 = f \cdot f$ (לא הרכבה).

3. אי־שוויון המשולש:

$$\forall u, v \in V\colon\ \left|\left|u + v\right|\right| \leq \left|\left|u\right|\right| + \left|\left|v\right|\right|$$

ושוויון אמ"מ אחד מהם הוא 0 או אם הם כפולה חיובית אחד של השני (לא שקול לתלויים לינארית – יכולה להיות כפולה שלילית).

הוכחה (לאי שוויון המשולש). תזכורת: עבור $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\mathcal{Z}|^2 = (\Re\mathcal{Z})^2 + (\Im\mathcal{Z})^2$

$$\left|\left|u + v\right|\right|^2 = \left|\left|u\right|\right|^2 + \left|\left|v\right|\right|^2 + 2\Re(\langle u \,|\, v\rangle) \leq \left|\left|u\right|\right|^2 + \left|\left|v\right|\right|^2 + 2\,|\langle u \,|\, v\rangle|$$

ושוויון אמ"מ $u$ הוא אפס או כפולה חיובית של $v$. מקושי־שוורץ:

$$\leq \left|\left|u\right|\right|^2 + 2\left|\left|u\right|\right|\left|\left|v\right|\right| + \left|\left|v\right|\right|^2 = (\left|\left|u\right|\right| + \left|\left|v\right|\right|)^2$$

■

## 8.3 ~ אורתוגונליות

**סימון 11.** יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ. יהיו $S, T \subseteq V$. נסמן:

א. $u \in V\colon\ (u \perp S \iff (\forall v \in S\colon u \perp v))$

ב. $S \perp T \iff \forall v \in S\ \forall u \in T\colon v \perp u$

ג. $S^{\perp} := \{v \in V \mid v \perp S\}$

**הגדרה 73.** $T^{\perp}$ הוא תת־המרחב הניצב ל־$T$.

**משפט 105.** יהיו $S, T \subseteq V$ קבוצות, ו־$U, W \subseteq V$ תמ"ים. אז:

א. $v \perp S$ אמ"מ $v \perp \operatorname{span}(S)$

ב. $S^{\perp} \subseteq V$ תמ"ו

ג. אם $S \subseteq T$ אז $T^{\perp} \subseteq S^{\perp}$

ד. $U \oplus U^{\perp} = V$

ה. $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{span} S$

ו. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

ז. $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

הוכחה. (לג')

$$\forall v \perp T\colon c \perp S \implies v \in S^{\perp}$$

■

**הערה 34.** שוויון בג' מתקיים אמ"מ $\operatorname{span} S = \operatorname{span} T$.

**הגדרה 74.** משפחה של וקטורים $A \subseteq V$ נקראת אורתוגונלית אם $\forall u \neq v \in V\colon u \perp v$

**הערה 35.** אם $A$ משפחה אורתוגונלית וגם $0 \notin A$ אז ניתן לייצור ממנה משפחה של וקטורים אורתוגונלים שהם גם וקטורי יחידה, ע"י נרמול.

**הגדרה 75.** משפחה של וקטורים $A \subseteq V$ נקראת אורתונורמלית, אם היא אורתוגונלית ובנוסף כל הוקטורים הם וקטורי יחידה.

**הגדרה 76.** יהי $U \subseteq V$ תמ"ו. יהא $v \in V$. אז ההטלה האורתוגונלית של $V$ על $U$ היא $p_U(v)$ הוא וקטור המקיים:

- $p_U(v) \in U$
- $v - p_U(v) \in U^{\perp}$

**משפט 106.** בסימונים לעיל, $\forall u \in U\colon\ ||v-u|| \geq ||v-p_U(v)||$ ושוויון אמ"מ $u = p_U(v)$.

הוכחה. יהי $u \in U$. ידוע $p_U(v) \in U$. אזי $u - P_u(v) \in U$. כמו כן ידוע $p_U(v) - v \perp u$. אזי בפרט $\langle u - p_U(v) \,|\, p_U(v) - v \rangle$. נתבונן ב־:

$$||u-v||^2 = ||(u-p_U(v)) + (p_U(v)-v)||^2 \overset{\text{פית'}}{=} ||u-p_U(v)||^2 + ||v-p_U(v)||^2$$

וסה"כ $||v-u||^2 \geq ||v-p_U(v)||^2$. ושוויון אמ"מ $||u-p_U(v)|| = 0$ אמ"מ $u = p_U(v)$. ■

עתה נוכיח את יחידות ההטלה האורתוגונלית (קיום נוכיח בהמשך באופן קונסטקרטיבי)

**משפט 107.** ההטלה הניצבת (אם קיימת), היא יחידה.

הוכחה. יהיו $p_U(v)$ וכן $p'_U(v)$ הטלות של $v$ על $U$. מהטענה:

$$||v-p_U(v)|| \leq ||v-p'_U(v)||$$

אבל בהחלפת תפקידים מקבלים את אי־השוויון ההפוך. לכן יש שוויון נורמות. מהמשפט לעיל $p_U(v) = p'_U(v)$. ■

**משפט 108.** תהי $A \subseteq V$ משפחה אורתוגונלית ללא 0. אז היא בת"ל.

הוכחה. יהיו $v_1 \dots v_n \in A$ וכן $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$, כך ש־$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i = 0$. יהי $i \in [n]$. אז:

$$0 = \langle 0 \,|\, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle v_i \,|\, v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{||v_j||^2}_{\neq 0} \implies \alpha_j = 0$$

כאשר השוויון האחרון מהיות הקבוצה אורתוגונלית. ■

**משפט 109** (קיום היטל אורתוגונלי). נניח ש־$u \subseteq V$ תמ"ו. נניח $U$ נ"ס וכן $B = (e_1 \dots e_n)$ בסיס אורתונורמלי של $U$ (כלשהם, לא בהכרח סטנדרטיים כי גם לא בהכרח $\mathbb{F}^n$). אז

$$\forall v \in V\colon p_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v \,|\, e_i \rangle \, e_i$$

הוכחה. צ.ל. $p_U(v) \in U$ וגם $\forall u \in U\colon \ \langle v - p_U(v) \,|\, u\rangle = 0$ אך לגבי התנאי האחרון די להוכיח $\forall j \in [n]\colon \ \langle v_i p_U(v) \,|\, e_j\rangle = 0$. החלק הראשון ברור, נותר להוכיח:

$$\langle v - p_U(v) \,|\, e_j\rangle = \langle v \,|\, e_j\rangle - \langle p_u(v) \,|\, e_j\rangle =: *$$

ידוע:

$$\langle p_U(v) \,|\, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle v_i \,|\, e_i\rangle\, e_i \,\middle|\, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_i \,|\, e_i\rangle \cdot \langle e_i \,|\, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v \,|\, e_i\rangle\, \delta_{ij} = \langle v \,|\, e_j\rangle$$

נחזור לשוויון לעיל:

$$* = \langle v \,|\, e_j\rangle - \langle v \,|\, e_j\rangle = 0$$

כדרוש. ■

(בכך הוכחנו את קיום $p_U(v)$ לכל מ"ו נ"ס, אם נשלב את זה עם המשפט הבא)

**משפט 110** (אלגוריתם גרהם־שמידט). תהי $(b_1 \dots b_k)$ קבוצה סדורה בת"ל של וקטורים בממ"ס $V$. אז בכל משפחה א"נ $(u_1 \dots u_k)$ כך ש־$\operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = \operatorname{span}(u_1 \dots u_k)$.

**מסקנות מהמשפט.** לכל ממ"ס נ"ס קיים בסיס א"נ (=אורתונורמלי). יתרה מזאת, בהינתן בסיס $B = (b_1 \dots b_n)$ ניתן להופכו לבסיס א"נ $(u_1 \dots u_n)$ המקיים $\forall k \in [n]\colon \ \operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = \operatorname{span}(u_1 \dots u_k)$.

הוכחה. בנייה באינדוקציה. נגדיר עבור $k = 1$ את $u_1 = b_1''$. מתקיים $\operatorname{span} u_1 = \operatorname{span} b_1$ וכן $\{u_1\}$ קבוצה א"נ. נניח שבנינו את $k$ האיברים הראשונים, נבנה את האיבר ה־$k+1$ (כלומר את $u_{k+1}$). במילים אחרות, הנחנו $u_1 \dots u_k$ אורתונורמלית וגם $\operatorname{span}(u_1 \dots u_k) = \operatorname{span}(b_1 \dots b_k) = U$.

מהסעיף הקודם $p_U(b_{k+1})$ קיים, וגם $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \neq 0$ מהבנייה. נגדיר $u_{k+1} = (b_{k+1} - p_U(b_{k+1}))$. בצורה מפורשת:

$$u_{k+1} = \frac{b_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1} \,|\, u_i\rangle\, u_i}{\left|\left|b_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1} \,|\, u_i\rangle\, u_i\right|\right|}$$

מהגדרת $p_U(b_{k+1})$, מתקיים $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \in U^\perp$ ולכן גם $u_{k+1} \in U^\perp$ ולכן $(u_1 \dots u_{k+1})$ משפחה א"נ.

$$b_1 \dots b_k = \overbrace{\operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})}^{\text{בת"ל}}$$

נשאר להוכיח ש־$b_{k+1} \in \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. זה מספיק משום שאז נקבל $\operatorname{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. אבל הם שווי ממד ולכן שווים. סה"כ:

$$b_{k+1} = ||b_{k+1} - p_U(b_{b+1})|| \cdot u_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \langle b_{k+1} \,|\, u_i\rangle\, u_i \implies b_{k+1} \in \operatorname{span}(u_1 \dots u_{k+1})$$

מש"ל. ■

**משפט 111.** יהי $V$ מ"ו $U \subseteq V$. נניח שלכל $v \in V$ מוגדר $p_U(v)$ (בפרט כל מ"ו נ"ס). אז $p_U\colon V \to V$ המוגדרת לפי $v \mapsto p_U(v)$ העתקה לינארית.

הוכחה. יהיו $v, v' \in V, \alpha \in \mathbb{F}$. ידוע $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^\perp$ ועל כן:

$$(v - p_U(v)) + \alpha(v' - p_u(v')) \in U^T \implies (v + \alpha v') - (p_U(v) + \alpha p_U(v')) \in U^T \implies (v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v') \in U^T$$

מה מקיים היטל וקטור? ראשית ההיטל ב־$U$, ושנית $v$ פחות ההיטל מאונך. הוכחנו שבהינתן היטל, הוא יחיד. והראינו ש־$(v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v')$ מקיים את זה, ולכן אם יש וקטור אחד אז הוא יחיד, וסה"כ שווים ולינאריות. ■

**משפט 112.** $\min_{u \in U} ||v - u|| = ||v - p_U(v)||$

בניסוח אחר: ההיטל $p_U(v)$ הוא הוקטור הכי קרוב ל־$v$ ב־$U$. בתרגול צוין שזוהי דרך למצוא את הפתרון "הכי קרוב" למערכת משוואות לינארית שאין לה פתרון.

**הגדרה 77.** הפתרון האופטימלי למערכת משוואות $(A \mid b)$ הוא $p_{\operatorname{Col} A}(b)$ (כאשר $\operatorname{Col} A$ מ"ו העמודות).

## 8.4 ∼ צמידות

**הגדרה 78.** $V$ ממ"פ ו־$T\colon V\to V$ ט"ל. אז $T$ נקראת סימטרית ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$) או הרמיטית ($\mathbb{F}=\mathbb{C}$) אם $\forall u,v\in V\langle Tu\mid v\rangle=\langle u,Tv\rangle$ באופן כללי, העתקה כזו תקרא צמודה לעצמה.

**דוגמה.** (המקרה בפרטי בממ"פ המשרה את הגיאו' האוקלידית) עבור $V=\mathbb{R}^n$, $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ מ"פ סטנדרטית, ו־ $A\in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $T_A\colon V\to V$ ט"ל, היא צמודה לעצמה אם: ידוע $\langle v\mid u\rangle=v^Tu$:

$$\langle T_Av\mid u\rangle=(Av)^Tu=v^TA^Tu=\langle v\mid A^Tu\rangle$$

ז"א אם $A=A^T$ אז $T_A$ סימטרית, כלומר $A$ מטריצה סימטרית. גם הכיוון השני נכון: אם $T\colon V\to V$ סימטרית אז ע"י בחירת בסיס נקבל $[T]_B^B$ גם היא סימטרית.

**דוגמה נוספת** (בדמות משפט)

**משפט 113.** ההעתקה $v\mapsto p_U(v)$ עבור $U$ תמ"ו כלשהו, היא ההיטל, צמודה לעצמה.

**משפט 114.** העתקה סימטרית אמ"מ היא דומה למטריצה סימטרית.

**משפט 115.** יהיו $T,S\colon V\to V$ צמודות לעצמן. אז:

1. $\alpha T,T+S$ צמודות לעצמן.
2. המכפלה $S\circ T$ צמודה לעצמה אמ"מ $ST=TS$
3. אם $p$ פולינום מעל $\mathbb{F}$ אז $p(T)$ צמודה לעצמה.

קל לראות ש־$3\implies 1+2$. 1 נובע ישירות מהגדרה. נוכיח את 2.

הוכחה ל־2. נניח $S\circ T$ צמודה לעצמה. בהנחות המשפט ידוע $S,T$ צמודות לעצמן. נקבל:

$$\langle (S\circ T)v\mid u\rangle=\langle v\mid STu\rangle=\langle Sv\mid Tu\rangle=\langle TSv\mid u\rangle\implies\langle (ST-TS)v\mid u\rangle=0\quad\forall v,u$$

נסיק:

$$\implies\forall v\,\langle (ST-TS)v\mid (ST-TS)v\rangle=0\implies (ST-TS)v=0\implies STv=TSv\implies\top$$

מהכיוון השני:

$$\langle STv\mid u\rangle=\langle S(Tv)\mid u\rangle=\langle v\mid TSu\rangle=\langle v\mid STu\rangle$$

■

**הגדרה 79.** $T\colon V\to V$ תקרא חיובית/אי־שלילית/שלילית/אי־חיובית אם:

חיובית: $\langle Tv\mid v\rangle>0$
שלילית: $\langle Tv\mid v\rangle<0$
אי־שלילית: $\langle Tv\mid v\rangle\geq 0$
אי־חיובית: $\langle Tv\mid v\rangle\leq 0$

**משפט 116.** אם $T$ חיובית, אז היא הפיכה (כנ"ל לשלילית)

הוכחה. נניח ש־$T$ לא הפיכה, נקרא שהיא לא חיובית. קיים $0\neq v\in V$. אז $v\in\ker T$, אז $\langle Tv\mid v\rangle=\langle 0\mid v\rangle=0$, בסתירה לכך ש־$T$ חיובית. ■

**משפט 117.** נניח ש־$S$ צמודה לעצמה, אז $S^2$ צמודה לעצמה ואי־שלילית.

הוכחה. ממשפט קודם $S^2$ צמודה לעצמה. נוכיח אי־שלילית:

$$\forall 0\neq v\in V\colon\ \left\langle S^2v\,\middle|\,v\right\rangle=\langle Sv\mid Sv\rangle=||Sv||^2\geq 0$$

■

**הגדרה 80.** פולינום $p\in\mathbb{R}[x]$ יקרא חיובי אם $\forall x\in\mathbb{R}p(x)>0$.

**מסקנה.** נניח $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ חיובי, ו־$T\colon V\to V$ צמודה לעצמה, אז $p(T)$ חיובית גם־כן, וצמודה לעצמה.

**למה 10.** אם $p\in\mathbb{R}[x]$ חיובי, אז קיימים $g_1\dots g_k\in\mathbb{R}[x]$ וכן $0<c\in\mathbb{R}$ כך ש־$p(x)=\sum_{i=1}^k g_i^2(x)+c$

רעיון להוכחת הלמה: מעל $\mathbb{C}$ זה מתפרק, ונוכל לכתוב $p(x)=a_n\prod_{j=1}^s(x-i\alpha_j)(x+i\alpha_j)$ (מעל $\mathbb{R}$ כל פולינום מתפרק לגורמים ריבועיים, ואם כל שורשיו מרוכבים, כל גורמיו ריבועיים. ). הרעיון הוא להוכיח את הטענה ש־$g^2h\bar{h}=g_1^2+g_2^2$.

הוכחה (של המשפט, לא של הלמה). יהי $0 \neq v \in V$. אז:

$$\langle p(T)v \,|\, v\rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^{k} g_i^2(T)v \,\middle|\, v \right\rangle}_{\sum_{i=1}^{k}\langle g_i^2(T)v \,|\, v\rangle \geq 0} + \overbrace{c\,\langle v \,|\, v\rangle}^{c||v||^2>0} \geq 0$$

■

**מסקנה.** אם $T\colon V \to V$ צמודה לעצמה ו־$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום חיובי, אז $p(T)$ הפיכה.

הוכחה. "תסתכלו על צד ימין של הלוח" $\sim$ המרצה ■

**משפט 118.** נניח ש־$T\colon V \to V$ סימטרית (צמודה לעצמה מעל $\mathbb{R}$/המייצגת סימטרית) ויהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של $T$. אז $m_T$ מתפרק לגורמים לינארים. בנוסף, הם שונים זה מזה.

**מסקנה.** $T$ סימטרית היא לכסינה.

הוכחה. נניח בשלילה קיום $p \mid m_T$ ו־$\deg p \geq 2$, $p$אי־פריק. בה"כ נניח ש־$p$ חיובי (אין לו שורש ב־$\mathbb{R}$, לכן נמצא כולו מעל/מתחת לציר ה־$x$). אז אפשר לכתוב את $m_T$ כ־$m_T = p \cdot g$ כלשהו. ידוע $p(T) \neq 0$ כי $m_T$ מינימלי מדרגה גבוהה יותר. אזי:

$$0 = m_T(T) = \underbrace{p(T)}_{\neq 0} \cdot g(T) \implies g(T) = 0$$

בסתירה למינימליות של $m_T$. סה"כ $m_T$ אכן מתפרק לגורמים לינארים. עתה יש להראות שהגורמים הלינארים שלו זרים. נניח ש־$T$ סימטרית. ניעזר בלמה המופיע מיד אחרי ההוכחה הזו. נניח בשלילה שהם לא כולם שונים, אז $m_T(x) = (x-\lambda)^2 g(x)$ ואז:

$$0 = m_T(T)v = (T - \lambda I)^2 g(T) \implies \omega = g(T)v,\ (T-\lambda I)^2\omega = 0$$

לכן בפרט $(T-\lambda I)\omega = 0$ מהסעיף הקודם. סה"כ $\forall v \in V\colon (T-\lambda I)g(T) = 0$ וסתירה למינימליות. ■

**למה 11.** נניח $T$ סמטרית ו־$\lambda \in \mathbb{R}$, אם $(T-\lambda I)^2 = 0$ אז $T - \lambda I = 0$.

הוכחה. ידוע:

$$\forall v\colon 0 = \left\langle (T-\lambda I)^2 v \,\middle|\, v \right\rangle = \langle (T-\lambda I)v \,|\, (T-\lambda I)v\rangle = ||(T-\lambda I)v||^2 \implies (T-\lambda I)v = 0$$

■

**משפט 119.** אם $V$ ממ"פ ו־$T\colon V \to V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז הע"ע של $T$ ממשיים.

הוכחה. יהי $0 \neq v \in V$ ו"ע של $T$ שמתאים לע"ע $\lambda$. נחשב:

$$\lambda v\, ||v||^2 = \langle \lambda v \,|\, v\rangle = \langle Tv \,|\, v\rangle = \langle v \,|\, Tv\rangle = \langle v \,|\, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\, ||v||$$

ידוע $v \neq 0$ ולכן $||v|| \neq 0$ ונסיק $\lambda v = \bar{\lambda}$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

**משפט 120.** אם $V$ ממ"פ ו־$T\colon V \to V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז כל זוג $0 \neq u, v \in V$ ע"ע שונים, המתאימים לערכים $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, מאונכים זה לזה.

הוכחה. למעשה, מהטענה הקודמת $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. כאן $Tu = \alpha u,\ \ Tv = \beta v$, כאשר $\alpha = \beta$. נחשב:

$$\alpha \langle u \,|\, v\rangle = \langle \alpha u \,|\, v\rangle = \langle Tu \,|\, v\rangle = \langle u \,|\, Tv\rangle = \langle u \,|\, \beta v\rangle = \bar{\beta} \langle u \,|\, v\rangle = \beta \langle u \,|\, v\rangle$$

בגלל ש־$\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\beta = \bar{\beta}$. ולכן $(\alpha - \beta)\langle v \,|\, u\rangle = 0$ מהעברת אגף וסה"כ $\langle u \,|\, v\rangle = 0$ ואכן $u \perp v$. ■

**הערה 36.** בחלק הבא יש שימוש קל במרחבים דואלים. בעבור סטונדטים שבעבורם מרחבים דואלים לא נכלל כחלק מלינארית 1א, אני ממליץ לקרוא את החלק הראשון של מרחבים דואלים בסוף הסיכום.

**משפט 121** (משפט ריס)**.** יהי $V$ ממ"פ סופי ויהי $\varphi \in V^*$. אז קיים ויחיד וקטור $u \in V$ שמקיים $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \,|\, u\rangle$.

הוכחה.

**קיום.** יהי $B = (b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתונורמלי של $V$ (הוכחנו קיום בהרצאות קודמות). נסמן $u = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i$. בכדי להראות $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \mid u \rangle$ מספיק להראות תכונה זו לאברי הבסיס $B$, כלומר נראה ש־$\forall 1 \le j \le n\colon \varphi(b_j) = \langle b_j \mid u \rangle$. ואכן:

$$\langle b_j \mid u \rangle = \left\langle b_j \,\middle|\, \sum_{i=0}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\overline{\overline{\varphi(b_i)}}}_{b_i} \underbrace{\langle b_j \mid b_i \rangle}_{ij} = b_j \quad \top$$

**יחידות:** אם קיים וקטור נוסף שעבורו $\forall v \in V\colon \varphi(v) = \langle v \mid w \rangle$ אז בפרט עבור $v = u - w$ נקבל:

$$\begin{aligned} &\varphi(v) = \langle v \mid w \rangle = \langle v \mid u \rangle \\ \implies &\langle v \mid u - w \rangle = 0 \\ \implies &0 = \langle u - w \mid u - w \rangle = ||v - w||^2 = 0 \\ \implies &v - w = 0 \\ \implies &v = w \end{aligned}$$

סה"כ הוכחנו קיום ויחידות כדרוש. ■

**משפט 122.** יהי $V$ ממ"פ מנ"ס ותהי $T\colon V \to V$ לינארית. אז קיימת ויחידה $T^*\colon V \to V$ ומקיימת $\forall u, v \in V\colon \ \langle Tu \mid v \rangle = \langle u \mid T^* v \rangle$.

**הגדרה 81.** ההעתקה $T^*$ לעיל נקראת ההעתקה הצמודה ל־$T$.

הוכחה. לכל $v \in V$, נתבונן בפונקציונל הלינארי $\varphi_V \in V^*$ המוגדר ע"י $\forall u \in V\colon \varphi_V(u) = \langle Tu \mid v \rangle$. ממשפט ריס קיים ויחיד $T^* v \in V$ שעבורו $\forall u \in V\colon \ \langle Tu \mid v \rangle = \varphi_V(u) = \langle u \mid T^* v \rangle$. כלומר, ההעתקה $T^*\colon V \to V$, קיימת ויחידה, ונותר להראות שהיא לינארית. עבור $v, w \in V$ ועבור $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \forall u \in V\colon \quad &\langle u \mid T^*(\alpha v + \beta w) \rangle \\ &= \langle Tu \mid \alpha v + \beta w \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tu \mid v \rangle + \bar{\beta} \langle Tu \mid v \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle u \mid T^* v \rangle + \bar{\beta} \langle u \mid T^* w \rangle \\ &= \langle u \mid \alpha T^* u + \beta T^* w \rangle \end{aligned}$$

מסך נסיק ש־$T^*(\alpha v + \beta w) = \alpha T^* u + \beta T^* w$ מנימוקים דומים. ■

**דוגמאות.** מעל $\mathbb{C}^n$, עם המ"פ הסטנדרטי, נגדיר ט"ל $T_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ מוגדרת ע"י $T_A(x) = Ax$. אז:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n\colon \ \langle T_A(x) \mid y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \overline{(Ax)^T} \cdot y = \overline{x^T} \cdot \overline{A^T} y \cdot = \overline{x^T} T_{\overline{A^T}}(y) = \left\langle x \,\middle|\, T_{\overline{A^T}} y \right\rangle$$

כלומר, $(T_A)^* = T_{A^*}$ כאשר $A^* = \overline{A^T}$, וקראנו לה המטריצה הצמודה.

נבחין שהעתקה נקראת צמודה לעצמה אמ"מ $T = T^*$.

עוד נבחין שעבור העתקה הסיבוב $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ בזווית $\theta$, מתקיים ש־$T^*$ היא הסיבוב ב־$-\theta$, וכן היא גם ההופכית לה. כלומר $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$. זו תכונה מאוד מועילה וגם נמציא לה שם במועד מאוחר יותר.

**משפט 123.** (תכונות ההעתקה הצמודה) יהי $V$ ממ"פ ותהיינה $T, S\colon V \to V$ זוג העתקות לינאריות. נבחין ש־:

(א) $$(T^*)^* = T$$

(ב) $$(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$$

(ג) $$(T + S)^* = T^* + S^*$$

(ד) $$\forall \lambda \in \mathbb{F}\colon (\lambda T)^* = \bar{\lambda}(T^*)$$

"זה אחד וחצי לינאריות"

הוכחה.

א) $$\forall u, v \in V\colon \ \langle T^* u \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid T^* u \rangle} = \overline{\langle Tv \mid u \rangle} = \langle u \mid Tv \rangle \implies (T^*)^* = T$$

ב) $$\langle (T \circ S) u \mid v \rangle = \langle Su \mid T^* v \rangle = \langle u \mid S^* T^* \rangle \implies (TS)^* = T^* S^*$$

ג) $$\langle (T + S) u \mid v \rangle = \langle Tu \mid v \rangle + \langle Su \mid v \rangle = \langle u \mid T^* v \rangle + \langle u \mid S^* v \rangle = \langle u \mid T^* v + S^* v \rangle$$

ד) כנ"ל

■

**סימון 12.** העתקה צמודה לעצמה לעיתים קרובות מסמנים ב־$T$

**משפט 124.** בהינתן $B$ אורתונורמלי של $V$ אז $[T^*]_B = [T]_B^*$ (שימו לב: האחד צמוד מטריציוני, והשני העתקה צמודה)

**משפט 125.** $T$ צמודה לעצמה אמ"מ $\forall v \in V:\ \langle Tv \,|\, v\rangle \in \mathbb{R}$.

הוכחה.

$T$ צמודה לעצמה

$$\begin{aligned}
&\iff T = T^* \iff T - T^* = 0\\
&\iff \forall v \in V:\ \langle (T - T^*)v \,|\, v\rangle = 0\\
&\iff \forall v \in V:\ \langle Tv \,|\, v\rangle - \langle T^*v \,|\, v\rangle = 0\\
&\iff \forall v \in V:\ \langle Tv \,|\, v\rangle - \overline{\langle Tv \,|\, v\rangle} = 0\\
&\iff \forall v \in V: \Re(\langle Tv \,|\, v\rangle) + \Im(\langle Tv \,|\, v\rangle) - \Re(\langle Tv \,|\, v\rangle) + \Im(\langle Tv \,|\, v\rangle) = 0\\
&\iff \forall v \in V: 2\Im(\langle Tv \,|\, v\rangle) = 0 \iff \forall v \in V: \Im(\langle Tv \,|\, v\rangle) = 0 \iff \forall v \in V:\ \langle Tv \,|\, v\rangle \in \mathbb{R} \quad \top
\end{aligned}$$

■

המשך בעמוד הבא

# Decompositions . . . . . . 9

## 9.1 ∼ המשפט הספקטרלי להעתקות

### 9.1.1 ניסוח להעתקות צמודות לעצמן

**משפט 126** (המשפט הספקטרלי להעתקה לינארית צמודה לעצמה). יהי $V$ ממ"פ ממימד סופי, ותהי $T\colon V\to V$ ט"ל צמודה לעצמה. אז קיים ל־$V$ בסיס אורתוגונלי (או אורתונורמלי) שמורכב מו"ע של $T$

הוכחה. יהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של $T$. נציג $m_T(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{d_i}$ כאשר $\lambda_1\dots\lambda_n$ הע"ע השונים של $T$. מהטענה הקודמת $\lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{R}$. [הערה: התמשתנו במשפט היסודי של האלגברה מעל המרוכבים, והסקנו פירוק מעל $\mathbb{R}$]. בכדי להראות ש־$T$ לכסינה, עלינו להוכיח ש־$\forall 1\le i\le m\colon d_i=1$. נניח בשלילה שזה לא מתקיים, אזי $m_T(x)=(x-\lambda)^2\cdot p(x)$ כאשר $\lambda$ ע"ע כלשהו. כעת, לכל $v\in V$ מתקיים מהיות $T$ צמודה לעצמה (כלומר גם $p(T)$ צמוד לעצמו):

$$0=\underbrace{m_T(T)}_{=0}(v)\implies 0=\langle m_T(T)(v)\,|\,p(T)(v)\rangle=\langle (T-\lambda I)(p(T)v)\,|\,p(T)v\rangle=$$

$$\langle (T-\lambda I)(p(T)v)\,|\,(T-\lambda I)(p(T)v)\rangle=\left|\left|(T-\lambda I)^2(p(T)v)\right|\right|^2=0$$

ולכן $(T-\lambda I)(p(T)v)=0$ ולכן $\forall v\in V\colon$ $((x-\lambda)(p(x))(T)=0$ בסתירה למינימליות של $m_T(x)$. נאמר, מכפלת גורמים לינארים שונים, ולכן $T$ לכסינה, ונוכל לפרק את $V$ באמצעות:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{m}\ker(T-\lambda_i I)$$

והמרחבים העצמיים הללו אורתוגונליים זה לזה, מהטענה השנייה שהוכחנו. נבנה בסיס $B_i\subseteq\ker(T-\lambda_i)$ וסה"כ $\bigcup_{i=1}^{m}B_i$ בסיס אורתוגונלי של $T$. ∎

**משפט 127.** יהי $V$ נ"ס מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T\colon V\to V$ ט"ל. אז $T$ צמודה לעצמה אמ"מ קיים לה בסיס אורתוגונלי מלכסן.

הוכחה. מכיוון אחד, הוכחנו באמצעות המשפט הספקטרלי להעתקות לינאריות צמודות לעצמן. מהכיוון השני, נניח שקיים ל־$V$ בסיס אורתוגונלי מלכסן של ו"ע של $T$. ננרמל לבסיס אורתונורמלי $B=(b_i)_{i=1}^{n}$ של ו"ע של $T$, המתאימים ל־$\lambda_1\dots\lambda_n$. עבור $v,u\in V$, נציג:

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ib_i,\ \ v=\sum_{i=1}^{n}\beta_ib_i$$

ונחשב:

$$\langle Tu\,|\,v\rangle=\left\langle T\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_ib_i\right)\middle|\sum_{i=1}^{m}\beta_ib_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\langle Tb_i\,|\,b_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_i\underbrace{\langle b_i\,|\,b_j\rangle}_{\delta_{ij}}=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_i\lambda_i$$

מהצד השני:

$$\langle u\,|\,Tv\rangle=\left\langle \sum_{i=0}^{n}\alpha_ib_i\middle|T\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_ib_i\right)\right\rangle=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_i\langle b_i\,|\,Tb_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_j\underbrace{\langle b_i\,|\,b_j\rangle}_{\delta_{ij}}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_i$$

מטרנזטיביות שוויון, הראינו ש־$\langle Tu\,|\,v\rangle=\langle u\,|\,Tv\rangle$ ולכן $T$ צמודה לעצמה. השוויון לדלתא של קוניקר נכונה מאורתוגונליות איברי הבסיס, והבי־לינאריות כי אנחנו מעל הממשיים. המשפט לא נכון מעל מהרוכבים. ∎

הוכחה שהמשפט לא נכון מעל המרוכבים: ההעתקה $T(x)=ix$ היא העתקה סקלרית לינארית, לכן כל וקטור הוא ו"ע וכל בסיס מלכסן, בסיס אורתונורמלי כלשהו יהיה בסיס מלכסן על אף שההעתקה לא צמודה לעצמה, אלא אנטי־הרמיטית.

מכאן ואילך המרצה מוכיחה את המשפט הספקטרלי ללא המשפט היסודי של האלגברה. לשם כך, צריך להראות שהפולינום המינימלי מתפצל למכפלה של גורמים לינארים מעל המרוכבים.

**משפט 128.** אם $p(x)$ פולינום אי־שלילי, אז נוכל להציגו כ־$p(x)=\sum_{i=1}^{k}g_i(x)^2+c$, כאשר $c\ge 0$, וכמו כן $c>0$ אמ"מ $p(x)$ פולינום חיובי.

### 9.1.2 מבוא למשפט הספקטרלי בעבור העתקה כללית

המטרה: להבין לאילו העתקות בדיוק מתקיים המשפט הספקטרלי. מעל הממשיים, הבנו שאילו העתקות צמודות לעצמן. אז מה קורה מעל המרוכבים?

**משפט 129.** יהי $V$ ממ"פ נ"ס ותהי $T\colon V\to V$ לינאריות. אם $B=(b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתוגונלי לו"ע של $T$, אז $\forall 1\le i\le n$ ו"ע של ההעתקה הצמודה.

כלומר: אם מתקיים המשפט הספקטרלי, אז הבסיס שמלכסן אורתוגונלית את $T$ מלכסן אורתוגונלית את הצמודה.

הוכחה. יהי $i\in[n]$ ונסמן בעבורו את $\lambda_i$ הע"ע המתאים לו"ע $b_i$. עבור $i\ne j\in[n]$ נחשב את $\langle b_i\,|\,T^*b_j\rangle$:

$$\langle b_i\,|\,T^*b_j\rangle=\overline{\langle Tb_i\,|\,b_j\rangle}=\overline{\langle \lambda_i b_i\,|\,b_j\rangle}=\lambda_i\,\langle b_i\,|\,b_j\rangle=0$$

לכן $T^*b_j\in(\operatorname{span}\{b_i\}_{i=1}^n)^\perp\overset{!}{=}\operatorname{span}\{b_j\}$. משיקולי ממדים, הפריסה מממד $n-1$ ולכן המשלים האורתוגונלי שלו מממד 1 ולכן השוויון. סה"כ $T^*b_j\in\operatorname{span}\{b_j\}$ ולכן $b_j$ ו"ע של $T^*$ כדרוש. ■

**מסקנה.** אאם $V$ ממ"פ נ"ס ו־$T\colon V\to V$ ט"ל עם בסיס מלכסן אורתוגונלי, אז $T,T^*$ מתחלפות כלומר $TT^*=T^*T$.

הוכחה. לפי הטענה הקודמת כל $b_i$ הוא ו"ע משותף ל־$T$ ול־$T^*$, ולכן:

$$TT^*(b_i)=T(T^*(b_i))=\beta_iT^*(b_i)=\beta_i\delta_ib_i=\alpha_i\beta_ib_i=\alpha_iT^(b_i)=T^*T(b_i)$$

העתקה מוגדרת לפי מה שהיא עושה לבסיס ולכן $TT^*=T^*T$. ■

**הגדרה 82.** העתקה כזו המקיימת $AA^*=A^*A$ נקראת נורמלית (או "נורמאלית" בעברית של שנות ה־60).

עתה, ננסה להראות שכל העתקה נורמלית מקיימת את התנאי של המשפט הספקטרלי (כלומר ניתן ללכסנה אורתוגונלית)

### 9.1.3 הוכחת המשפט הספקטרלי בעבור העתקה כללית

**משפט 130** (המשפט הספקטרלי) יהי $V$ ממ"פ נוצר סופית מעל $\mathbb{C}$, ותהי $T\colon V\to V$ לינארית. אז קיים בסיס אורתוגונלי של ו"ע של $T$ אמ"מ $T$ נורמלית.

**למה 12.** יהי $V$ ממ"פ ותהיינה $S_1,S_2\colon V\to V$ זוג ט"ל צמודות ולעצמן ומתחלפות (כלומר $S_1S_2=S_2S_1$). אז קיים בסיס אורתוגונלי של $V$ שמורכב מו"עים משופים ל־$S_1$ ול־$S_2$.

הוכחה. ידוע ש־$S_1$ צמודה לעצמה, לכן לפי המשפט הספקטרלי להעתקות צמודות לעצמן (לא מעגלי כי הוכח בנפרד בהרצאה הקודמת), קיים לה לכסון אורתוגונלי ובפרט $S_1$ לכסינה. נציג את $V$ כ־$V=\bigoplus_{i=1}^m\ker(S_1-\lambda_iI)$, כאשר $\lambda_1\ldots\lambda_m$ הע"עים השונים של $S_1$. לכל $1\le i\le m$ מתקיים ש־$V_{\lambda_i}$ (המרחב העצמי) הוא $S_1$־אינוואריאנטי שהרי אם $v\in V_{\lambda_i}$ ונחשב:

$$S_1(S_2v)=S_2(S_1v)=S_2(\lambda_iv)=\lambda_iS_2v\implies S_2v\in V_{\lambda_i}$$

כאשר $S_2|_{V_{\lambda_i}}\colon V_{\lambda_i}\to V_{\lambda_i}$ צמודה לעצמה, ולכן המפשט הספקטרלי לצמודות לעצמן אומר שבתוך $V_{\lambda_i}$ ישנו בסיס אורתוגונלי של ו"עים מ־$S_2$. האיחוד של כל הבסיסים הללו מכל מ"ע של $S_1$ יהיה בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל־$S_1$ ול־$S_2$. ■

הוכחת המשפט הספקטרלי.

$\Longrightarrow$ לפי המסקנה הקודמת, אם ישנו לכסון אורתוגונלי $T$ בהכרח נורמלית.

$\Longleftarrow$ נגדיר $S_1=\frac{T+T^*}{2},\ S_2=\frac{T-T^*}{2i}$. הן וודאי צמודות לעצמן מהלינאריות וכל השטויות ממקודם, והן גם מתחלפות אם תטרחו להכפיל אותן. מהטענה קיים ל־$V$ בסיס אורתוגונלי של ו"עים משותפים ל־$S_1,S_2$ ונסמנו $\{b_i\}_{i=1}^n$ וגם $S_1b_i=\alpha_ib_i,\ S_2b_i=\beta_ib_i$. אפשר גם לטעון ש־$\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$ אבל זה לא מועיל לנו. נשים לב ש־$T=S_1+iS_2$, כלומר $\forall i\in[n]\colon T(b_i)=S_1(b_i)+iS_2(b_i)=\alpha_ib_i+i\beta_ib_i=(\alpha+i\beta_i)b_i$ וזהו בסיס אורתוגונלי של ו"עים של $T$.

■

למעשה, הבנו מהפירוק של $S_1,S_2$ ש־$S_1$ נותנת את החלק הממשי של הע"ע ו־$S_2$ את החלק המדומה.

"אגב – לא השתמשתי במשפט היסודי של האלגברה"

**נסכם:** יש לנו שתי גרסאות של המשפט הספקטרלי:

**משפט.** (המשפט הספקטרלי מעל $\mathbb{R}$) $T$ סימטרית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

**משפט.** (המשפט הספקטרלי מעל $\mathbb{C}$) $T$ נורמלית אמ"מ קיים בסיס א"נ של ו"ע.

משום שמטריצה הרמיטית (וצמודה לעצמה באופן כללי) היא בפרט נורמלית כי מטריצה מתחלפת עם עצמה, ולכן נסיק שלצמודה לעצמה קיים בסיס אורתוגונלי מלכסן (הכיוון ההפוך לא נכון מעל המרוכבים).

## 9.2 ~ צורה קאנונית למטריצות נורמליות מעל הממשיים

תזכורת: $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראית סימטרית אמ"מ $A = A^T$ והרמיטית אם $A = A^*$, ונורמלית אמ"מ $AA^* = A^*A$.

**משפט 131.** תהי $T\colon V \to V$ ט"ל, ו־$V$ ממ"פ מעל $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ויהי $B$ בסיס א"נ של $V$. אזי אם $A = [T]_B$:

$$[T^*]_B = A = ([T]_B)^*$$

הוכחה. נזכר ש־:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [Te_1]_B & \cdots & [Te_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

נסמן $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ בסיס. נבחין ש־:

$$Te_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} e_i, \ \ a_{ij} = \langle Te_j \,|\, e_i \rangle$$

נסמן ב־$C$ את המטריצה המייצגת $[T^*]_B$:

$$c_{ij} = \langle T^* e_j \,|\, e_i \rangle$$

ונחשב:

$$c_i j = \langle T^* e_j \,|\, e_i \rangle = \langle e_j \,|\, Te_i \rangle = \overline{\langle Te_i \,|\, e_j \rangle} = a_{ij}$$

■

**מסקנה:** אם $A$ נורמלית אז $T_A$ נורמלית מעל $\mathbb{F}^n$ אם הסטנדרטית. בפרט מתקיים עליה המשפט הספקטרלי. גם אם $A$ ממשית, הע"ע עלולים להמצא מעל $\mathbb{C}$ (אלא אם היא צמודה לעצמה, ואז הם מעל $\mathbb{R}$).

משהו על אינטרפולציות:

**משפט 132.** יהיו $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$. נניח $x_i \neq x_j \implies i \neq j\colon \forall i,j \in [n]$. אז $\exists! p \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]\colon \forall i \in [n]\colon p(x_i) = y_i$ עד לכדי חברות (באופן שקול: נניח $p$ מתוקן)

(הערה מהידע הכללי שלי: זהו פולינום לגראנג' והוא בונה אינטרפולציה די נחמדה.)

הוכחה. ידוע שהפולינום מהצורה $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = (1, x, x^2, \dots x^{n-1})(a_0 \dots a_{n-1})^T$. למעשה, נקבל את מטריצת ונדרמונד:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

וידוע שהדטרמיננטה של ונדרמונד היא $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ וזה איכשהו אמור לגמור את ההוכחה.

אם $x_i = y_i$ בפולינום לעיל, אז $f \in \mathbb{R}[x] \implies \forall a \in \mathbb{C}\colon f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$. הוכחה: נניח בשלילה, אז $\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\colon f(\alpha) = 0$ כך ש־$f(\bar{\alpha}) = 0$. אזי $0 \neq f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} = 0$ וזו סתירה. ■

**משפט 133.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ נורמלית, אז קיים פולינום $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־$A^* = f(A)$.

הערה: באופן כללי **לא** נכון שאם $A, B$ מתחלפות אז $\exists f(x) \in \mathbb{F}[x]\colon f(A) = B$.

הוכחה. עבור $A$ נורמלית מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי מלכסן ולכן קיימת $P$ הפיכה כך ש־$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. לכן $P^{-1}A^*P = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$. נשתמש במשפט לפיו יש פולינום $f \in \mathbb{R}[x]$ כך ש־$f(x_i) = \bar{x}_i$ ובפרט עבור $x_i = \lambda_i$ קיים פולינום עבורו $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$. אזי

$$f(\operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \operatorname{diag}(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)) = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1} f(A) P = P^{-1} A^* P \implies f(A) = A^*$$

עוד נבחין ש־$\deg f = n - 1$. ■

ננסה להבין מי הן $A\in M_2(\mathbb{R})$ שהן נורמליות. מעל $\mathbb{C}$ הן פשוט לכסינות. נבחין ש־:

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ A^*=f(A)\in\mathbb{R}_{\le1}[x]=\alpha A+BI,\ A=\alpha A^T+\beta I=\alpha(\alpha A+\beta I)+\beta I$$

$$\implies\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2a+\beta(\alpha+1)&\alpha^2b\\\alpha^2c&\alpha^2d+\beta(\alpha+1)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}(b\wedge c\ne0)\quad\alpha=1\implies A=A+2\beta I\implies\beta=0,\ A=A^T\cancel{+\beta I}\\(b\wedge c\ne0)\quad\alpha=-1\implies A^T=-A+\beta I\implies A+A^T=\begin{pmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{pmatrix}\implies b=-c,\ A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\\(b\vee c=0)\implies A=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\end{cases}$$

המקרה השני – זה פשוט סיבובים, אבל בניפוח (כי הדטרמיננטה היא $a^2-b^2$).

בכל מקרה, מסקנה מהמשפט הקודם.

**משפט 134.** אם $T\colon V\to V$ נורמלית, אז $\exists f\in\mathbb{R}[x]\colon f(T)=T^*$.

הוכחה. נבחר בסיס א"נ $A=[T]_B\ \Longleftarrow\ A^*=[T^*]_B$. כבר הוכחנו שאם $T$ נורמלית אז $A$ נורמלית ולכן מהמשפט הקודם קיים $f$ מתאים כך ש־$[T^*]_B=A^*=f(A)=f([T]_B)=[f(T)]_B$. סה"כ $[T^*]_B=[f(T)]_B$ ומחח"ע העברת בסיס $T^*=f(T)$ כדרוש. ■

אם $T\colon V\to V$ ט"ל, $U,W\subseteq V$ תמ"וים $T$־איוונריאנטי כך ש־$B=U\oplus W$. אם $\mathcal{B}$ בסיס של $V$, כאשר קישא של הבסיס הוא הבסיס של $U$ אז:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[T|_U]_{\mathcal{B}}&\\&[T|_W]_{\mathcal{B}}\end{pmatrix}$$

בפרט בעבור ניצבים $V=U\oplus U^\perp\implies U\subseteq V$. ניעזר בכך כדי להוכיח את המשפט הבא:

**משפט 135.** אם $U\subseteq V$ תמ"ו אינוואריאנטי ביחס ל־$T$ אז $U^\perp$ הוא $T^*$־אינוואריאנטי.

הוכחה. יהי $w\in U^\perp$. רוצים להראות $T^*w\in U^\perp$. יהי $u\in U$ אז:

$$\langle T^*w\,|\,u\rangle=\langle w\,|\,Tu\rangle=\langle w\,|\,u'\rangle,\ u'\in U\implies\langle w\,|\,u'\rangle=0\quad\top$$

■

**משפט 136.** בעבור $T\colon V\to V$ נורמלית, אם היא $U$־אינוואריאנטי אז גם $T^*$ הוא $U$־אינווארינטי

הוכחה. נבחין ש־$T^*=f(T)$ כלשהו, וכן $U$ הוא $T$־אינוואריאנטי ולכן $U$ הוא $f(T)$־איוו' וכאן די גמרנו את ההוכחה. ■

מסימטריות $U^\perp$ הוא $T^*$, מהמשפט גם $(T^*)^*$ איוו' ולכן $T$־אינוואריאנטי.

**משפט 137.** יהי $V$ מעל $\mathbb{R}$ מ"ו וכן $T\colon V\to V$ ט"ל. אז קיים $U\subseteq V$ שהוא $T$־איוו' וממדו לכל היותר $T$.

הערה: מעל $\mathbb{C}$ "זה מטופש" כי הפולינום מתפרק (ואז המרחב העצמי יקיים את זה).

הוכחה. נפרק ל־$m_T(x)$ מינימלי ו־$g(x)$ גורם אי־פריק כך ש־$m_T(x)=g(x)h(x)$. לכל $g$ אי פריק ב־$\mathbb{R}$ הוא ליניארי הוא ממעלה 2, מהמשפט היסודי של האלגברה ומהעובדה ש־$m_T(\bar{x})=0\implies m_T(x)=0$.

- אם $g$ ליניארי אז יש ע"ע ממשי של $T$ מה שנותא $U$ (שנפרש ע"י הו"ע) ממד 1.
- אם $\deg g=2$ כמובן שניתן להניח $g$ מתוקן. ז"א $g(x)=x^2+ax+b$ אז $g(T)$ אינו הפיך (מלמת החלוקה לפולינום מינימלי) כלומר $\exists0\ne v\in\ker g(T)$. לכן:

$$(T^2+aT+bI)v=0\implies T^2v=-aTv-bv$$

ולכן $U=\operatorname{span}(v,Tv)$ תמ"ו עם ממד לכל היותר 2 וגם נשמר תחת $T$.

■

הערה: בעבור נורמלית הטענה נכונה ללא תלות במשפט היסודי של האלגברה.

לכן, בעבור נורמליות, מהמשפט הספקטרלי ומטענות קודמות, עבור $T\colon V\to V$ ממשית קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ של $V$ שבעבורו המטריצה המייצגת של $T$ היא מטריצת בלוקים $2\times 2$ מצורה של $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -a_k & b_k \end{pmatrix},\ \lambda_1 \cdots \lambda_m\right)$$

כאשר כמובן $2k+m=n$.

## 9.3 $\sim$ מטריצות אוניטריות

**הגדרה 83.** יהי $V$ ממ"פ. אז $T\colon V\to V$ תקרא אוניטרית (אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) או אורתוגונלית (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) אם $T^*T=I$ או במילים אחרות $T^*=T^{-1}$ (מהגדרת הפיכה).

ברור שט"ל כזו היא נורמלית. **דוגמה.** עבור $T_\theta$ הסיבוב ב־$\theta$ מעלות, במישור $\mathbb{R}^2$, אז $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = T_\theta^{-1}$. **דוגמה.** עבור $T$ שיקוף מתקיים $T^2=I$ וכן $T^*=T$ וסה"כ $T^*=T=T^{-1}$.

**משפט.** $T$ איזומטריה אמ"מ מתקיים אחד מבין הבאים:

1. (ההגדרה) $\quad T^*=T^{-1}$
2. $TT^* = T^*T = I$
3. $\forall u,v\in V\colon\ \langle Tu\,|\,Tv\rangle = \langle u\,|\,v\rangle$
4. $T$ מעבירה כל בסיס א"נ של $V$ לבסיס א"נ של $V$
5. $T$ מעבירה בסיס א"נ אחד של $V$ לבסיס א"נ של $V$ [מקרה פרטי של 4 בצורה טרוויאלית, אך גם שקול!]
6. $\forall v\in V\colon\ ||Tv|| = ||v||$

כלומר: היא משמרת זווית (העתקה פנימית) וגודל.

**הגדרה 84.** העתקה $T\colon V\to V$ (כאשר $V$ ממ"פ) תקרא איזומטריה אם $\forall v\in V\colon\ ||v|| = ||Tv||$

באופן כללי אוניטרית/אורתוגונלית שקולות לאיזומטריה לינארית (כלומר שם כללי לאורתוגונליות/אוניטריות יהיה איזומטריות).

**הערה 37.** איזומטריה, גם מחוץ לאלגברה לינארית, היא פונקציה שמשמרת נורמה/גודל.

**הערה 38.** אפשר להסתכל על מתכונה 4 על איזומטריות לינאריות כעל איזומורפיזם של ממ"פים.

הוכחה. נפרק לרצף גרירות

$1\to 2$
$$T^* = T^{-1} \implies \langle Tv\,|\,Tu\rangle = \langle v\,|\,T^*Tu\rangle = \langle v\,|\,u\rangle$$

$2\to 3$ נאמר ש־$(v_1\dots v_n)$ א"נ. צ.ל. $(Tv_i)_{i=1}^n$ א"נ. לשם כך נצטרך להוכיח את שני התנאים – החלק של האורתו והחלק של הנורמלי. בשביל שניהם מספיק להוכיח ש־: $\langle Tv_i\,|\,Tv_j\rangle = \langle v_i\,|\,v_j\rangle = \delta_{ij}$

$3\to 4$ טרוויאלי

$4\to 5$ יהי $(v_1\dots v_n)$ בסיס א"נ כך ש־$(Tv_1\dots Tv_n)$ א"נ. אז:

$$v=\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \implies ||v||^2 = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i\right\rangle = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2$$
$$||Tv||^2 = \left\langle T\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i\right) \,\middle|\, T\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i) \,\middle|\, \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i)\right\rangle = \sum |\alpha_i|^2$$

$5\to 1$ מניחים $\forall v\in V\colon\ ||Tv|| = ||v||$. ידועות השקילויות הבאות:

$$T^*=T^{-1} \iff T^*T = I \iff T^*T - I = 0$$

בעבר ראינו את הטענה הבאה: נניח ש־$S$ צמודה לעצמה וכן ש־$\forall v\colon\ \langle Sv\,|\,v\rangle = 0$, אז $S=0$. במקרה הזה:

$$S := T^*T - I \implies S^* = (T^*T-I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = S \implies S^*=S$$

והיא אכן צמודה לעצמה. עוד נבחין ש־:

$$\langle Sv\,|\,v\rangle = \langle (T^*T-I)v\,|\,v\rangle = \langle T^*Tv\,|\,v\rangle - \langle v\,|\,v\rangle = \langle Tv\,|\,Tv\rangle - \langle v\,|\,v\rangle = ||Tv||^2 - ||v||^2 = 0$$

השוויון האחרון נכון מההנחה היחידה שלנו ש־$||Tv|| = ||v||$. סה"כ $TT^*-I=0$. סה"כ הוכחנו $TT^*-I=0$ שזה שקול ל־$T^*=T^{-1}$ מהשקילויות לעיל כדרוש.

■

**משפט 138.** תהי $T\colon V\to V$ אוניטרית/אורתוגונלית, ו־$\lambda$ ע"ע של $T$. אז $|\lambda|=1$

הוכחה. יהי $v$ ו"ע של הע"ע $\lambda$. אז:

$$|\lambda|^2\langle v\,|\,v\rangle=\lambda\bar\lambda\langle v\,|\,v\rangle=\langle Tv\,|\,Tv\rangle=\langle v\,|\,v\rangle$$

■

**הגדרה 85.** תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אז $A$ תיקרא אוניטרית/אורתוגונלית אם $A^*=A^{-1}$.

**משפט 139.** אוניטרית אמ"מ $A\overline{A^T}=I$.

**משפט 140.** אורתוגונלית אמ"מ $AA^T=I$.

**הערה 39.** אוניטרית בה מלשון unit – היא שומרת על הגודל, על וקטורי היחידה (ה־unit vectors).

**משפט 141.** יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ של $V$ ו־$T\colon V\to V$ אז $T$ אוניטרית/אורתוגונלית אמ"מ $A=[T]_B$ אוניטרית/אורתוגונלית.

הוכחה.

$$AA^*=[T]_{\mathcal{B}}[T^*]_{\mathcal{B}}=[TT^*]_{\mathcal{B}},I=AA^*\iff[TT^*]_{\mathcal{B}}=I\iff TT^*=I$$

■

"היה לי מרצה בפתוחה שכתב דבר לא מדויק בסיכום, ואז הוריד נקודות לסטודנטים שהסתמכו על זה. הוא אמר שזה מתמטיקה, אתם אחראים להבין מה נכון או לא – גם אם כתבתי שטויות."

**סימון 13.** א"נ = אוניטרית בהקשר של מטריצות (בהקשר של מרחבים – אורתונורמלי)

**משפט 142.** התנאים הבאים שקולים על $A\in M_n(\mathbb{F})$.

1. $A$ א"נ
2. שורות $A$ מהוות בסיס א"נ של $\mathbb{F}^n$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)
3. עמודות $A$ מהוות בסיס א"נ של $\mathbb{F}^n$.
4. $\forall u,v\in\mathbb{F}^n\colon\ \langle Au\,|\,Av\rangle=\langle u\,|\,v\rangle$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)
5. $\forall v\in\mathbb{F}^n\colon\ ||Av||=||n||$ (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

הערה שלא קשורה למשפט: נאמר ש־$[T^*]_B=[T]_B^*$ אמ"מ $B$ בסיס **א"נ**. עבור בסיס שאינו א"נ זה לא בהכרח מתקיים.

הערה נוספת: זה בערך אמ"מ כי יש כמה מקרי קצה כמו מטריצת האפס.

הוכחה.

$1\leftrightarrow 2$ נוכיח את הגרירה הראשונה

$$\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & v_n & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}| & & |\\ \bar v_1^T & \cdots & \bar v_n^T\\ | & & |\end{pmatrix}=AA^*=I\iff A\text{ א"נ}\implies v_i\bar v_j^T=\delta_{ij}$$

הטענה האחרונה שקולה לכך ש־$v_1\dots v_n$ בסיס א"נ (ביחס למ"פ הסטנדטית של $\mathbb{F}^n$)

$1\leftrightarrow 3$ מספיק להוכיח $A$ א"נ אמ"מ $A^T$ א"נ. מסימטריה ($(A^T)^T=A$) למעשה מספיק להוכיח $A$ א"נ גורר $A^T$ א"נ. נוכיח:

$$A^*A=I\implies A^T\bar A=I\implies(A^T)^*=\bar A\implies A^T(A^T)^*=I$$

$1\leftrightarrow 4$ נתבונן ב־$T_A\colon\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ כאשר $\mathcal{E}$ הבסיס הסטנדרטי. אז $A=[T_A]_{\mathcal{E}}$. אז $T_A$ א"נ אמ"מ $A=:[T_A]_{\mathcal{E}}$. אז:

$$\langle Au\,|\,Av\rangle=\langle T_Au\,|\,T_Av\rangle=\langle u\,|\,v\rangle$$

$1\leftrightarrow 5$ אותה הדרך כמו קודם.

■

### 9.3.1 צורה קאנונית למטריצה אוניטרית

**שאלה.** מהן המטריצות $A \in M_2(\mathbb{R})$ האורתוגונליות?

התשובה. בהינתן $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ מהיות העמודות והשורות מהוות בסיס א"נ:

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ a^c+c^2=1 \end{cases} \implies a=\cos\theta,\ b=\sin\theta$$

עוד נבחין ש־$ac+bd=0$ כי:

$$AA^T=I \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = I$$

סה"כ מכך ש־$a^c+c^2=1$ ו־$b^2+d^2=1$ נקבל שתי צורות אפשריות:

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \vee A_2 := A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

נבחין ש־$A_2$ הוא סיבוב ב־$\theta$, ו־$A_1$ שיקוף ניצב ביחס ל־$\frac{\theta}{2}$. זה לא מפתיע שכן $\det A_1=-1,\ \det A_2=1$. ■

"דרך נוספת לראות את זה":

$$a=\cos\theta \implies b=\sin\theta,\ c=\sin\varphi \implies d=\cos\varphi$$

אז (עד לכדי סיבוב)

$$\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi \implies \sin(\theta+\varphi)=0 \implies \theta+\varphi=0 \vee \theta+\varphi=\pi$$

במקרה הראשון ש־$\varphi=\theta$ קיבלנו סיבוב, ובמקרה השני נקבל ש־$\varphi=\pi-\theta$ ואז $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ כדרוש.

ננסה להבין יותר טוב למה הן מסובבות בצורה הזו. $A_2$ מטריצה מוכרת אך $A_1$ פחות. נתבונן בפולינום האופייני שלה:

$$f_{A_1}(x) = \begin{vmatrix} x-\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & x+\cos\theta \end{vmatrix} = x^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta = (x+1)(x-1)$$

אזי הע"ע $-1,+1$ (שימו לב ש־$A_2$ לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$).

$$A\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta-\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{\theta}{2} \mapsto \frac{\theta}{2}+\pi\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

[אני ממש חלש בטריגו ואני מקווה שאני לא מסכם דברים לא נכונים. תבדקו אותי פעמיים כאן בחלק הזה. גם המרצה עשה את ההחלפה המוזרה של $\theta/2 \to \theta/2+\pi/2$].

"אם הייתם רוצים תקופות מבחנים נורמליות הייתם צריכים להיוולד בזמן אחר"

"ומה, אתם חושבים שאחרי שהפקולטה דחתה בשבוע [את המבחנים] היא תיאמה את זה עם הפקולטות האחרות? הם דיברו איתם כמה ימים אח"כ"

**מסקנה 18** (הצורה הנורמלית של ט"ל אורתוגונלית). תהי $T\colon V\to V$ אורתוגונלית. אז קיים בסיס א"נ של $V$, שביחס אליו המטריצה המייצגת את $T$ היא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} A_{\theta_1} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && A_{\theta_n} &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&& -1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& -1 \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$A_{\theta_i}=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$$

(אוניטרית לא מעיינת כי היא לכסינה)

**הגיון:**

אורתוגונלית, לכן נורמלית, לכן נראית בצורה של בלוקים $2\times 2$ של ע"ע. הע"ע מגודל $1$ כי היא אורתוגונלית, והם חייבים להיות ממשיים על מעגל היחידה הממשי. המטריצה $A_\theta$ חייבת להיות אורתוגונלית מגודל $2\times 2$ כי כל תמ"ו שם הוא $T$-אינוואריאנטי, כלומר אפשר לחלק את $T$ לבלוקים מתאימים ובפרט $T$ המצומצמת גם אורתוגונלית, ולכן $A_\theta$ סה"כ אורתוגונלית. כאשר $A_{\theta_i}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ ו־$b\neq 0$ נשארנו עם המטריצות הללו.

הוכחה. ידוע עבור נורמלית:

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix} &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \begin{pmatrix}a_m & b_m\\ -b_m & a_m\end{pmatrix} &&& \\ &&& \lambda_1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \lambda_k\end{pmatrix}$$

נסמן $\square_i=\left(\begin{smallmatrix}a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{smallmatrix}\right)$. במקרה הזה משום שהיא אורתוגונלית על $\mathbb{R}$ אז $\lambda_i=\pm 1$ כי $|\lambda_i|=1$. נתבונן במטריצה $\square_i$ כלשהי, אז $\square_i$ הנפרש ע"י $U=: u_k,u_{k+1}$ מקיים:

$$[T_{|U}]_{B_U}=\square_i=\begin{pmatrix}a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{pmatrix}\quad [Tu_k]_{U_B}=\begin{pmatrix}a\\ -b\end{pmatrix},\quad [Tu_{k+1}]=\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$$

ומשום שהצמצום של אורתוגונלית על מ"ו $T$-אינוואריאנטי היא עדיין אורתוגונלית, והיא בהכרח מהצורה של מטריצת הסיבוב לעיל. המטריצה של שיקוף וסיבוב ב־$\frac{\theta}{2}$ לכסינה ולכן להפוך לע"ע $\lambda_1\dots\lambda_n$ (עד לכדי סדר איברי בסיס) שהם בהכרח מגודל $\pm 1$ בכל מקרה, ויבלעו בשאר הע"ע, ובכך סיימנו. ■

אבל האם הייצוג יחיד? ננסה להבין את יחידות הייצוג עבור נורמלית כללית, ומשם לגזור על אורתוגונלית.

**משפט 143.** כל שתי מטריצות בצורה לעיל שמייצגות את אותה $T\colon V\to V$ נורמלית, שוות עד כדי סדר הבלוקים על האלכסון.

(יש כאן מה להוכיח רק בעבור $\mathbb{R}$, שכן מעל $\mathbb{C}$ לכסין).

הוכחה. ידוע שבעבור $\lambda_1\dots\lambda_k$ ע"עים:

$$f_T(x)=\left(\prod(x-\lambda_i)\right)\left(\prod(x^2-2a_ix+a_i^2+b_i^2)\right)$$

כאשר המכפלה הראשונה באה מהע"עים והשניה מהריבועים $\square_i$. נבחין שלכל תמ"ו $a_i$ נקבבע ביחידות, ולכן $b_i$ נקבל ביחידות עד כדי סימן (נסיק זאת מהפולינום האופייני). ברור שהע"עים נקבעים ביחידות עוד מההרצאות הראשונות. ■

אז מאיפה בה שינוי הכיוון של $b$, בעבור מטריצות אורתוגונליות? כלומר, מדוע $A_{\theta_i}$ שקולה ל־$A_{-\theta_i}$? זאת כי הן דומות באמצעות ההעתקה שהופכת את הצירים, מה ששקול ללהחליף את עמודות $A_{\theta_i}$.

**תרגיל.** חשבו: (כולל פתרון)

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

מכאן נסיק שאכן המטריצות להלן דומות עד לכדי שינוי בסיס, וזו הסיבה שלא איכפת לנו מהסימן של $b$.

**הערה 40.** למעשה, משום שהמטריצות $\square_i$ אינן פריקות למרחבים אינווראינטים קטנים יותר, ומיחידות הפירוק של הפולינום האופייני, הצורה הקאנונית שהוצגה לעיל היא צורת הג'ורדן שלה, ודי בכך כדי להוכיח את היחידות (כי הוכחנו את יחידות צורת ג'ורדן).

### 9.3.2 המשפט הספקטלי בניסוח מטריציוני

**משפט 144 (המשפט הספקטרלי "בשפה קצת מטרציונית").** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה סימטרית (מעל $\mathbb{R}$)/נורמלית (מעל $\mathbb{C}$). אז קיימת מטריצה $P$ אורתוגונלית/אוניטרית (בהתאם לשדה ממנו יצאנו), ומטריצה אלכסונית $D$ כך ש־ $A = P^{-1}DP$

כלומר – מטריצת מעבר הבסיס של המשפט הספקטרלי, שמעביר אותנו לפירוק הספקטרלי, היא איזומטריה. למעשה חיזקנו את המשפט הספקטרלי – המעבר לבסיס המלכסן, מסתבר להיות מיוצג ע"י מטריצות איזומטריות.

המרצה מדגיש שלא השתמשנו במשפט הזה בכלל על בסיסים ועל וקטורים – אפשר לתאר עולם הדיון של המטריצות, משום שהוא עולם דיון הומורפי להעתקות ולמרחבים וקטורים, בלי לדבר בכלל על העתקות ומרחבים וקטורים. המשפט מתאר באופן טהור מטריצות בלבד.

**למה 13.** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית, וכן $\{e_1 \dots e_n\}$ בסיס א"נ של $V$. נניח ש־$A$ היא מטריצת המעבר מבסיס $\{e_1 \dots e_n\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. אז $A$ איזומטריה אמ"מ $\{v_1 \dots v_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

הוכחת המשפט. תהי $T_A \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ כך ש־$T_A(x) = Ax$. אז $A = [T_A]_{\mathcal{E}}$ כאשר $\mathcal{E} = \{e_1 \dots e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי. ידוע של־$T_A$ יש בסיס אורתונורמלי מלכסן, כלומר קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ כך ש־$[T_A]_{\mathcal{B}} = D$ כאשר $D$ אלכסונית כלשהית. נבחין ש־$[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}[T_A]_{\mathcal{E}}[Id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$, נסמן $P = [Id]^{\mathcal{E}}_{B}$ ונבחין ש־$[T_A]_{\mathcal{B}} = PAP^{-1}$ ומהלמה $P$ מטריצת מעבר מבסיס א"נ לבסיס א"נ ולכן איזומטריה. נכפיל בהופכיות ונקבל $A = P^{-1}DP$. ■

"יאללה הפסקה? לא!"

## 9.4 ~ פירוק פולארי

### 9.4.1 מבוא, וקישור לתבניות בי־לינאריות

**הערה 41.** במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נקבל ש־

$$A = P^{-1}DP \implies PP^T = I \implies P^{-1} = P^T \implies A = P^TDP$$

מה שמחזיר אותנו לתבניות בילינאריות. נוכל לקשר את זה לסינגטורה. זאת כי $A$ לא רק דומה, אלא גם חופפת ל־$D$. גם מעל $\mathbb{C}$ נקבל דברים דומים, אך לא במדויק, שכן מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ היא ססקווי־בילינארית ולא בילינארית רגילה.

**משפט 145.** עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית, אז

- $A^* = A$ (צמודה לעצמה) אמ"מ כל הע"עים שלה ממשיים.
- $A^* = A^{-1}$ אמ"מ כל הע"ע שלה מנורמה 1.

את הכיוון $\Longleftarrow$ כבר הוכחנו. נותר להוכיח את הכיוון השני.

- נניח שכל הערכים העצמיים ממשיים, ו־$A$ נורמלית. נוכל להשתמש במשפט הספקטרלי עליה: לכן קיימת מטריצה אוניטרית $P$ ואלכסונית $\Lambda$ כך ש־$A = P^{-1}\Lambda P$. ידוע $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ כי אלו הע"ע מההנחה. נבחין ש־:
$$A^* = P^*\Lambda^*(P^{-1})^* = P^{-1}\Lambda P = A$$
כי $PP^* = I$ ו־$\Lambda$ אוניטרית (אז ה־transpose לא עושה שום דבר) מעל $\mathbb{R}$ (אז ההצמדה לא עושה שום דבר).
- נניח $A$ נורמלית וכל הע"ע מנורמה 1. נוכיח $A$ אוניטרית. בעבור הפירוק הספקטרלי לעיל $A = P^{-1}\Lambda P$ נקבל כאן ש־$\Lambda$ אוניטרית, ומהמשפט הספקטרלי $P$ אונטרית גם כן. $A$ מכפלה של 3 אוניטריות ולכן אוניטרית.

(הסיבה שמכפלה של אוניטריות היא אונטרית: בעבור $A, B$ א"נ מתקיים
$$\forall v \in V \colon \ \langle ABv \,|\, ABv\rangle = \langle Bv \,|\, Bv\rangle = \langle v \,|\, v\rangle$$
משמרת מכפלה פנימית, וזה שקול להיותה אוניטרית ממשפט לעיל)

**תזכורת:** אם $V$ ממ"פ מעל $\mathbb{F}$, אז $T \colon V \to V$ תקרא חיובית או אי־שלילית (וכו') אם $T = T^*$ וגם $\forall v \neq 0 \colon \ \langle Tv \,|\, Tv\rangle \geq / > 0$.

**משפט 146.** נניח ש־$A = A^* \in M_n(\mathbb{F})$, אז התנאים הבאים שקולים (קיצור מוכר: TFAE, the following are equaivlent):

1. $T_A$ חיובית/אי שלילית על $\mathbb{F}^n$.
2. לכל $T \colon V \to V$ ובסיס א"נ $B$ כך ש־$A = [T]_B$, $T$ חיובית/אי שלילית.
3. קיימים $T \colon V \to V$ חיובית/אי שלילית ו־$B$ בסיס, כך ש־$A = [T]_B$.
4. הע"ע של $A$ (יודעים ממשיים כי צמודה לעצמה) חיובים/אי שליליים.

הוכחה. מספיק לטעון זאת כדי להוכיח את השקילויות של 1, 2, 3:

$$\langle Tv \,|\, v\rangle_V = \langle [Tv]_B \,|\, [v]_B\rangle_{\mathbb{F}^n} = \langle A[v]_B \,|\, [v]_B\rangle_{\mathbb{F}^n}$$

בשביל $2 \to 1$, ידוע שהאגף הימני גדול מ־$0$ מההנחה שהיא חיובית/אי שלילית על $\mathbb{F}^n$, ומכאן הראנו שהמיוצגת בכל בסיס חיובית כדרוש. בשביל $3 \to 1$, נפעיל טיעונים דומים מהאגף השמאלי במקום. הגרירה $2 \to 3$ ברורה. סה"כ הראינו את $3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1$.

עתה נוכיח שקילות בין $1$ ל־$4$.

$1 \to 4$ יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ע"ע של $A$ (נוכל להניח ממשי כי $A$ צמודה לעצמה)

$$\langle Av \mid v \rangle = \lambda \left|\left|v\right|\right|^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

$4 \to 1$ יהי $B = (v_1 \dots v_n)$ בסיס א"נ של ו"ע, ויהי $V \ni v = \sum \alpha_i v_i$. נקבל:

$$\langle T_A v \mid v \rangle = \langle Av \mid v \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0$$

■

**תזכורת:** מעל $\mathbb{R}$, הוכחנו שלכל תבנית סימטרית, יש ייצוג יחיד באמצעות מטריצה אלכסונית עם $-1, 1, 0$ על האלכסון.

**סימון 14.** הסיגנטורה של $f$ תסומן ע"י $\sigma_-(f), \sigma_0(f), \sigma_+(f)$ כמספר האפסים, האחדים וה־$-1$ ב־$f$.

**המשך תזכורת:** כל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה לעיל.

**משפט 147.** נניח ש־$A$ מייצגת את התבנית הסימטרית $f$ (עולם הדיון מעל $\mathbb{R}$). אז, אם הסיגנטורה $\sigma_+ = \#(\lambda \mid \lambda > 0)$ עבור $\lambda$ ע"ע עם חזרות. באופן דומה $\sigma_- = \#(\lambda \mid \lambda < 0)$ וכו'.

הוכחה. משום ש־$A$ מייצגת סימטרית אז $A$ סימטרית. לפי המשפט הספקטרלי קיימת $P$ אורתוגונלית ו־$\Lambda$ אלכסונית כך ש־$A = P^{-1}\Lambda P = P^T \Lambda P$. $A$ דומה לאלכסונית וחופפת אליה. בעזרת נרמול המטריצה האלכסונית $\Lambda$ (ניתן לבצע תהליך נרמול באמצעות פעולות שקולות תחת חפיפה), היא חופפת למטריצה מהצורה $\mathrm{diag}(1 \dots 1, -1 \dots -1, 0 \dots 0)$ כאשר הסימן נקבע לפני הנרמול. ■

**משפט 148.** תהי $T \colon V \to V$ צמודה לעצמה ואי שלילית $\langle Tv \mid v \rangle \geq 0$, אז קיימת ויחידה $R \colon V \to V$ אי־שלילית צמודה לעצמה כך ש־$T = R^2$.

הוכחה. **קיום.** מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס א"נ של ו"ע להעתקה אי־שלילית כל הע"ע הם אי־שליליים.

$$[T]_B^B = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad [R]_B^B = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$$

(ראינו זאת בתרגול). עוד נבחין ש־$R$ צמודה לעצמה כי ע"ע ממשיים.

**יחידות.** נבחין שכל ו"ע של $T$ הוא ו"ע של $R$: יהי $i \in [n]$, ו־$B = (e_1 \dots e_n)$ בסיס מלכסן, ואז עבור $R$ צמודה לעצמה כלשהי מתקיים: אז ו"ע של $R$ עם ע"ע $\sqrt{\lambda}$ הוא ו"ע של $T$ עם ע"ע $\lambda$ כי:

$$\lambda v = R^2 v = Tv \implies Rv = \sqrt{\lambda}$$

הגרירה נכונה מאי־שליליות $R$ שהמשפט מניח עליה יחידות. כלומר הערכים העצמיים של $R$ כלשהי (לא בהכרח זו שברחנו בהוכחת הקיום) נקבעים ביחידות מע"ע של $T$. בסיס של ו"ע של $T$ הוא בסיס ו"ע של $R$, סה"כ ראינו איך $R$ פועלת על בסיס ו"ע כלשהו של $T$ מה שקובע ביחידות את $R$. ■

**סימון 15.** את ה־$R$ לעיל נסמן $R := \sqrt{T}$.

**מסקנה 19** (פירוק שולסקי). לכל $A$ צמודה לעצמה ואי־שלילית חיובית קיים פירוק של מטריצה $R$ משולשית עליונה כך ש־$A = RR^*$. בעזרת פירוק פולארי שנראה במשפט הבא, נוכל להראות ש־$R$ משולשית עליונה.

### 9.4.2 ניסוח פירוק פולארי בעבור העתקות

**משפט 149** (פירוק הפולארי). תהי $T \colon V \to V$ הפיכה, אז קיימות $R \to V \to V$ חיובית וצמודה לעצמה ו־$U \colon V \to V$ אוניטרית כך ש־$T = RU$.

**הערה 42.** לא הנחנו $T$ צמודה לעצמה. הפירוק נכון להעתקה הפיכה כללית.

הוכחה. נגדיר $S = TT^*$. נבחין ש־$S$ צמודה לעצמה וחיובית:

$$\forall V \ni v \neq 0 \colon \langle Sv \mid v \rangle = \langle TT^* v \mid v \rangle = \langle T^* v \mid T^* v \rangle = ||T^* v|| > 0$$

האי־שוויון האחרון נכון כי $\ker T = \{0\}$, ממשפט קודם $\ker T^* = \ker T = \{0\}$, ו־$v \neq 0$. יצא שזה חיובי ולכן בפרט ממשי, כלומר היא צמודה לעצמה וחיובית.

קיימת ויחידה $R\colon V\to V$ צמודה וחיובית כך ש־$S=R^2$. כל ערכיה העצמיים של $R=\sqrt{S}$ אינם 0, ולכן היא הפיכה (ראינו בהוכחה של קיומה שהיא לכסינה יחדיו עם $S$).

נגדיר $U=R^{-1}T$. נותר להראות ש־$U$ אוניטרית.

$$U^*U=(R^{-1}T)^*(R^{-1}T)=T^*\underbrace{(R^{-1})^*}_{R^{-1}}R^{-1}T=T^*(R^{-1})^2T=T^*S^{-1}T=T^*(TT^*)^{-1}T=I$$

כדרוש. הטענה $(R^{-1})^*=R^{-1}$ נכונה משום ש־$R$ צמודה לעצמה. ■

**הערה 43** (לגבי יחידות). אם $T$ אינה הפיכה, מקבלי ש־$R$ יחידה אבל $U$ אינה. בשביל לא הפיכות נצטרך להצטמצם לבסיס של התמונה ועליו לפרק כמתואר לעיל. במקרה של הפיכות אז $T=RU=R\tilde{U}$ ואז נקבל $R$ הפיכה כלומר $U=\tilde{U}$ וגם $U$ הפיכה.

עתה נראה ש־$R$ נקבעת ביחידות (בניגוד ליחידות $U$ – יחידות $R$ נכונה גם בעבור פירוק פולארי של העתקה שאיננה הפיכה):

הוכחה.

$$TT^*=RU(RU)^*=RUU^*R^*=R^2$$

כלומר $R$ היא בכל פירוק שורש, והראינו קודם את יחידות השורש. ■

**הערה 44.** קיים גם פירוק כנ"ל מהצורה $T=UR$.

הוכחה. באותו האופן שפירקנו את $T$, נוכל לפרק את $T^*=\tilde{R}\tilde{U}$ פירוק פולארי. נפעיל $*$ על שני האגפים ונקבל:

$$T^*=\tilde{R}\tilde{U}\implies T=(T^*)^*=\tilde{U}^*\tilde{R}^*=\tilde{U}^{-1}\tilde{R}$$

נסמן $\tilde{U}^{-1}=:U$, $\tilde{R}=:R$ וסה"כ $T=UR$ כדרוש. ■

**למה 14.** עבור $T\colon V\to V$ אז ל־$T^*T$, $TT^*$ נגדיר $S=TT^*$. נבחין ש־$S$ צמודה לעצמה וחיובית:

$$\forall V\ni v\neq 0\colon\ \langle Sv\,|\,v\rangle=\langle TT^*v\,|\,v\rangle=\langle T^*v\,|\,T^*v\rangle=||T^*v||>0$$

יש אותם הערכים העצמיים.

הוכחה. ניעזר בפירוק הפולארי:

$$\begin{aligned}TT^*&=RUU^*R^*\\&=R^2\\TT^*&=U^{-1}R^2U\end{aligned}$$

סה"כ $T^*T$, $TT^*$ הן העתקות דומות ולכן יש להן את אותם הערכים העצמיים. ■

**הערה 45.** אז איך זה קשור לפולארי? $R$ האי־שלילית היא "הגודל", בעוד $U$ האוניטרית לא משנה גודל – היא ה"זווית".

### 9.4.3 ניסוח פירוק פולארי בעבור מטריצות

**משפט 150.** (פירוק פולארי עבור מטריצות) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז קיימות $U,R\in M_n(\mathbb{F})$ כאשר $U$ א"נ ו־$R$ חיובית צמודה לעצמה כך ש־$A=UR$.

הוכחה. נסתכל על $A^*A$. היא חיובית וצמודה לעצמה (בדומה לעיל). אז $A^*A=P^{-1}DP$, כאשר $D$ אלגסונית חיובית. כאשר $R^2=AA^*$, $R=P^{-1}\sqrt{D}P$. היא קיימת ויחידה מאותה הוכחה בדיוק להעתקות. ■

## 9.5 ~ פירוק SVD

**הערה 46.** SVD הינו קיצור של Singular Value Decomposition.

**משפט 151.** (פירוק לערכים סינגולריים למטריצה – SVD) לכל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ קיימות מטריצות אוניטריות $U,V$ ומטריצה אלכסונית עם ערכים אי־שליליים כך ש־$A=UDV$.

הוכחה. ידוע שניתן לכתוב $A=\tilde{U}R$ פירוק פולארי. משום ש־$R$ צמודה לעצמה, ניתן לפרקה ספקטרלית ל־$V$ אוניטרית ו־$D$ אלכסונית אי־שלילית (כי $R$ אי־שלילית) כך ש־$R=V^{-1}DV$. סה"כ:

$$A=\underbrace{\tilde{U}V^{-1}}_{=:U}DV=UDV \quad \top$$

כי $\tilde{U}V^{-1}$ מכפלה של אוניטריות ולכן $U$ אוניטרית כנדרש. ∎

**הערה 47.**

$$AA^*=(UDV)V^*D^*U^*=UD^2U^{-1}$$
$$A^*A=V^{-1}D^2V$$

**הגדרה 86.** הערכים העצמיים האי־שליליים של $A^*A$ נקראים הערכים הסינגולריים והם נקבעים ביחידות ע"י $A$.

הערכים הסינגולרים הם גם הע"ע של $R^2$ הפירוק בפולארי וכן הע"ע של $D^2$ בפירוק SVD.

**הערה 48.** פירוק SVD יחיד למטריצה הפיכה.

**הערה 49.** במסדרת הקורס הזה, ראינו פירוק SVD של מטריצה ריבועית בלבד. חלק מהחוזקה של פירוק SVD נובע מקיומו למטריצות שאינן בהכרח ריבועיות, דהיינו, לכל מטריצה סופית. יש לו מגוון רחב של שימושים במדעי המחשב.

**הערה 50.** כאן בערך נגמר החומר בקורס. עם זאת, חסר מאוד הסברים על השימושים של פירוק SVD ועל מסקנות די חשובות ממנו. לכן הוספתי קצת הרחבות עליו, תוך הסתמכות על הספר "Linear Algebra Done Right".

המשך בעמוד הבא

# 10 Common Algorithms

בניגוד לפרק הבא, הפרק הזה לא מעניין בכלל. הוא מסכם בקצרה אלגוריתמים מועילים שרואים בתרגולים וכדאי לזכור (**אין** כאן סיכום מלא של התרגולים).

## 10.1 $\sim$ אלגוריתמים מרכזיים

### 10.1.1 לכסון

**שלבים:** בהינתן $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה.

- נחשב את $f_A$
- נמצא את שורשי $f_A$. אם אנו מתקשים למצוא את שורשי הפולינום, נמצא את $f^{\text{red}}$.
- לכל ע"ע $\lambda_i$, נמצא בסיס למרחב העצמי באמצעות חישוב $\mathcal{N}(\lambda_i I - A)$. איברי הבסיס יהיו הו"עים בעבור הע"ע $\lambda_i$.
- סה"כ $\operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ המטריצה האלכסונית המתקבלת ע"י מטריצת מעבר הבסיס הנתונה ע"י הו"עים מהשלב הקודם.

### 10.1.2 ג'ירדון

**ג'רדון מטריצה כללית** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה $f_A(x) = \prod_{j=1}^m (x-\lambda_j)^{r_j}$ (בה"כ מתקיים מעל הרחבה לשדה סגור אלגברית). לכל $j \in [m]$ נבצע את הפעולות הבאות:

- נמצא את הפולינום $f_A(x)$ האופייני ונפרק אותו לכדי גורמים לינאריים.
- נחשב את $V_{\lambda_j}^{(i)} := \mathcal{N}((A-\lambda_j)^{\ell_j})$ עד שנקבל $\dim\left(V_{\lambda_j}^{(\ell_j)}\right) = m_i$ (המרחב העצמי המוכלל).

  הערה: אפשר באופן חלופי לחשב את הפולינום המינימלי, שכן ראינו ש-$m_i$ הריבוי של $\lambda_i$ ב-$m_T(x)$.
- נחזור על האלגו' למציאת צורת ג'ורדן למטריצה נילפוטנטית:
  - נגדיר $B_{\lambda_j} = \varnothing$
  - לכל $i \in [\ell_j]$ נבצע:
    * נמצא בסיס כלשהו $C_{\lambda_j}^{(i)-}$ של $V_{\lambda_j}^{(i-1)}$.
    * נוסיף ל-$C_{\lambda_j}^{(i)-}$ את $B \cap (V_{\lambda_j}^{(i)} \setminus V_{\lambda_j}^{(i-1)})$
    * נשלים את $C_{\lambda_j}^{(i)-}$ לבסיס של $V_{\lambda_j}^{(i)}$. נסמן ב-$C_{\lambda_j}^{(i)+}$.
    * נוסיף ל-$B_{\lambda_j}$ את $\left\{(A-\lambda_j I)^k v \mid 0 \le k < i,\ v \in C_{\lambda_j}^{(i)+}\right\}$.
  - נגדיר $B = \bigcup_{j=1}^m B_{\lambda_j}$ הבסיס המג'רדן.

**מציאת $J_n(\lambda)^m$:** ידוע $J_n(\lambda) = \lambda I_n + J_n(0)$ ולכן מהיות $\lambda I, J_n(0)$ מתחלפות נקבל מנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(J_n(\lambda)^m)_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 0 & j < i-m \\ \binom{m}{i-j}\lambda^{m-(i-g)} & \text{else} \end{cases}$$

דהיינו:

$$J_n(\lambda)^m = \begin{pmatrix} \binom{m}{0}\lambda^m & & & & & \\ \binom{m}{1}\lambda^{m-1} & \binom{m}{0}\lambda^m & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \binom{m}{m}\lambda^0 & \binom{m}{m-1}\lambda^1 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \binom{m}{m}\lambda^0 & \cdots & \ddots & \binom{m}{0}\lambda^m & \\ \vdots & 0 & \binom{m}{m}\lambda^0 & \cdots & \binom{m}{m-1}\lambda^1 & \binom{m}{0}\lambda^m \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

### 10.1.3 אלגוריתם גראם־שמידט

נרצה למצוא בסיס אורתונורמלי/אורתוגונלי לממ"פ כלשהו. יהי בסיס $B = v_1 \dots v_n$ של $V$.

- **למציאת בסיס אורתוגונלי:** נגדיר לכל $i \in [n]$

$$\tilde{v}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i \mid \tilde{v}_i \rangle}{\langle \tilde{v}_i \mid \tilde{v}_j \rangle} \cdot \tilde{v}_j$$

ואז $(\tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_n)$ בסיס אורתוגונלי (הבחנה: התהליך רקורסיבי, נתחיל מ־$i = 1$ ונסיים ב־$i = n$). במידת הצורך נוכל לנרמל בסוף ע"י הגדרת:

$$\bar{v}_i = \frac{\tilde{v}_i}{||\tilde{v}_i||}$$

ואז $(\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n)$ אורתונורמלי מסיבות ברורות.

- **מציאת בסיס אורתונורמלי:** (פחות יציב נומרית מאשר למצוא אורתונורמלי ואז לנרמל, אך יותר קל חישובית) נגדיר לכל $i \in [n]$:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{||v_i||} \left( v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i \mid \bar{v}_i \rangle \cdot \bar{v}_i \right)$$

בצורה זו נוכל לנרמל תוך כדי התהליך.

## 10.2 ~ מספר אלגוריתמים נוספים

- **אלגוריתם אוקלידס לתחום ראשי** (בפרט בעבור פולינומים):
- **נרמול וקטור:** נגדיר $v = \frac{v}{||v||}$ הוא $v$ מנורמל.
- **בדיקת $T$־איווריאנטיות:** בהינתן $B$ בסיס של $W \subseteq V$ נחשב את $T(B)$ ונבדוק האם $T(B) \subseteq W$ ע"י מעבר על כל איבר בסיס ודירוג.
- **חישוב $A^{-1}, A^{n+c}$ באמצעות משפט קיילי־המילטון:** ידוע $f_A(A) = 0$, ואם נשאר גורם חופשי $\alpha_n A^n + \cdot \alpha_0 A^0 = 0$ אז נוכל להעביר אגפים ולקבל: $I = A^0 = A\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A^{k-1}}{\alpha_0}\right)$ ולכן $A^{-1} = \frac{1}{\alpha_0}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A^{k-1}\right)$. כדי לחשב את $A^{n+c}$ תחילה נחשב את $A^n$ באמצעות העברת אגפים וקבלת $A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ (כי $\alpha_n = 1$ כי הפולינום מתוקן). עתה, נכפול ב־$A$ בדיוק $c$ פעמים, ומשום שידוע $A^n$, בכל חלוקה שבא נקבל $A^{n+1}$ נוכל להוציא גורם משותף ולקבל $A(A^n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k A^k$ ביטוי שהכפל הגבוהה ביותר בו תמיד $A^{n-1}$. סה"כ נוכל לבטא את $A^{n+c}$ כקומבינציה לינארית של $I \cdots A^{n-1}$, שעבור מספרי $n$ קטנים קל לחשב.
- **ייצוג בבסיס אורתוגונלי:** לכל $u \in V$ בהינתן $(v_1 \dots v_n)$ בסיס אורתוגונלי, מתקיים $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u \mid v_i \rangle}{||v_i||^2} \cdot v_i$ (אין צורך לחלק בנורמה בעבור אורתונורמלי).
- **מציאת היטל אורתוגונלי:** בהינתן $(u_1 \dots u_n)$ בסיס אורתוגונלי של $U$ תמ"ו, אז $p_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v \mid u_i \rangle}{||u_i||^2} u_i$ (גם כאן אין צורך לחלק בנורמה בעבור בסיס אורתונורמלי).
- **מציאת ללכסון אוניטרי/אורתוגונלי** (אם קיים ממשפט הפירוק הספקטרלי):
  - נמצא את הע"ע של ההעתקה.
  - לכל ע"ע, נמצא בסיס עצמי של ו"ע ואז נבצע עליו בראם־שמידט כדי לקבל וקטורים אורתוגונליים/אורתונורמליים.
  - נשרשר את הבסיסים לקבלת בסיס אורתוגונלי/אורתונורמלי מלכסן.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# סוף הקורס ~ 2025B

הסיכום לא נגמר – יש הרחבה על דואלים בעמוד הבא

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד

# Dual Spaces ........ 11

## 11.1 ~ הגדרות בסיסיות

**הגדרה 87.** בהינתן $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$, נגדיר $V^*=\hom(V,F)$.

**הבנה.** אם $\dim V=n$ אז $\dim V^*=n$. לכן $V\cong V^*$. לא נכון במקרה הסוף ממדי.

**למה 15.** יהי $B=(v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל־$V$. אז $\forall i\in[n]\colon \exists\psi_i\in V^*\colon \forall j\in[n]\colon \psi_i(v_j)=\delta_{ij}$

**משפט 152.** יהי $V$ נ"ס ו־$B=(v_i)_{i=1}^n$ אז קיים ויחיד בסיס $B^*=(\psi_i)_{i=1}^n$ המקיים $\forall i,j\in[n]\colon \psi_i(v_j)=\delta_{ij}$.

הוכחה. נבחין שהבדרנו העתקה לינארית $\varphi\colon B\to V^*$ והיא מגדירה ביחידות $\psi$ לינארית $\psi\colon V\to V^*$ המקיימת את הנרש. ברור שהבנייה של $\varphi_i$ קיימת ויחידה כי היא מוגדר לפי מה קורה לבסיס. נותר להוכיח שזה אכן בסיס. יהיו $\alpha_1\dots\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש־$\sum\alpha_i\psi_i=0$. (האפס הזה הוא פונקציונל האפס). יהי $j\in[n]$. אז $0(v_j)=0=\left(\sum_{i=0}^n\alpha_i\psi_i\right)v_j=\sum_{i=0}^n\alpha_i\psi_i(v_j)=\sum\alpha_i\delta_{ij}=\alpha_j$ וסה"כ $\alpha_j=0$. ■

נבחין שאפשר להגדיר:

**הגדרה 88.** $V^{**}=\hom(V^*,\mathbb{F})$

ואכן $\dim V<\infty$ אז:

$$V\cong V^*\cong V^{**}$$

במקרה הזה, בניגוד לאיזו' הקודם, יש איזו' "טבעי" (קאנוני), כלומר לא תלוי באף בסיס.

**משפט 153.** קיים איזומורפיזם קאנוני בין $V$ ל־$V^{**}$.

הוכחה. נגדיר את האיזו' הבא:

$$\psi\colon V\to V^{**}\quad \psi(v)=:\bar{v}\quad \forall\psi\in V^*\colon \bar{v}(\psi)=\psi(v)$$

נוכיח שהוא איזו':

- **ט"ל:** יהיו $v,u\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. אז:

$$\psi(\alpha v+\beta u)=\overline{\alpha v+\beta u}\overset{!}{=}\alpha\bar{v}+\beta\bar{u}$$

נוכיח זאת:

$$\overline{\alpha v+\beta u}(\varphi)=\varphi(\alpha v+\beta u)=\alpha\varphi(v)+\beta\varphi(u)=\alpha v(\varphi)+\beta\bar{u}(\varphi)=(\alpha\bar{v}+\beta\bar{u})(\varphi)=(\alpha\psi(v)+\beta\psi(u))(\varphi)$$

- **חח"ע:** יהי $v\in\ker\psi$. רוצים להראות $v=0$.

$$\forall\varphi\in V^*\colon \bar{(}\varphi)=0\implies \forall\varphi\in V^*\colon \varphi(v)=0$$

אם $v$ אינו וקטור האפס, נשלימו לבסיס $V=(v_i)_{i=1}^n$ ואם $\varphi_1\dots\varphi_n$ בסיס הדואלי אז $\varphi_1(v)=1$ אבל אז $0=\bar{v}(\varphi_1)=1$ וסתירה.

- **על:** משוויון ממדים $\dim V^{**}=\dim V$.

■

כלומר, הפונקציונלים בדואלי השני הם למעשה פונקציונלים שלוקחים איזשהו פונקציונל בדואלי הראשון ומציבים בו וקטור קבוע.

## 11.2 ~ איזומורפיות למרחבי מכפלה פנימית

### 11.2.1 העתקה צמודה (דואלית)

**סימון 16.** לכל $v\in V$ ו־$\varphi\in V^*$ נסמן $\varphi(v)=(\varphi,v)$

**הערה 51.** סימון זה הגיוני משום שהכנסת וקטור לפונרציונל דואלי איזומורפי למכפלה פנימית.

**משפט 154.** יהיו $V,W$ מ"וים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, $T\colon V\to W$. אז קיימת ויחידה $T^*\colon W^*\to V^*$ כך ש־$(\psi,T(v))=(T^*(\psi),v)$.

אם לצייר דיאגרמה:

$$V \xrightarrow{T} W \cong W^* \xrightarrow{T^*} V^* \cong V$$

(תנסו לצייר את זה בריבוע, ש־$V, W$ למעלה ו־$V^*, W^*$ למטה, כדי להבין ויזואלית למה זה הופך את החצים)

ברמה המטא־מתמטית, בתורת הקטגוריות, יש דבר שנקרא פנקטור – דרך לזהות בין אובייקטים שונים במתמטיקה. מה שהוא עושה, לדוגמה, זה להעביר את $\hom(V, W)$ – מרחבים וקטרים סוף ממדיים – למרחב המטריצות. הדבר הזה נקרא פנקטור קו־וראיינטי. במקרה לעיל, זהו פנקטור קונטרא־ווריאנטי – שימוש ב־$T^*$ הופך את החצים. (הרחבה של המרצה)

אז אפשר להגדיר פנקטור אבל במקום זה נעשה את זה בשפה שאנחנו מכירים – לינארית 1א. בהינתן $\psi \in W^*$, נרצה למצוא $T^*(\psi) \in V^*$. נגדיר:

$$T^*(\psi) = \psi \circ T$$

ברור מדוע $T^* : W^* \to V^*$. בעצם, זהו איזומורפיזם ("בשפת הפנקטורים") קאנוני. עוד קודם לכן ידענו (בגלל ממדים) שהם איזומורפים, אך לא מצאנו את האיזומורפיזם ולא ראינו שהוא קאנוני.

$$\tau : \hom(V, W) \to \hom(W^*, V^*) \quad \tau(T) = T^*$$

היא איזומורפיזם.

(הערה: תודה למרצה שנענה לבקשתי ולא השתמש ב־phi/אחרי שעשיתי {/renewcommand/phi{/varphi)

הוכחת לינאריות. יהיו $T, S \in \hom(V, W)$, $\alpha \in \mathbb{F}$. אז:

$$\tau(\alpha T + S) = (T + \alpha S)^*$$

יהי $\psi \in W^*$, אז:

$$(T + \alpha S)^*(\psi) = \psi \circ (T + \alpha S)$$

יש למעלה פונקציונל ב־$V^*$. ננסה להבין מה הוא עושה על $V$. יהי $v \in V$:

$$\begin{aligned}[\psi(T + \alpha S)](v) &= \psi((T + \alpha S)v) \\ &= \psi(T)v + \alpha\psi(S)(v) = (\psi \circ T + \alpha\psi \circ S)(v) \\ &= ((T^* + \alpha S^*) \circ (\psi))v \\ &= (\tau(T) + \alpha\tau(S))(\psi)(v)\end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו לינאריות:

$$\tau(T + \alpha S) = \tau(T) + \alpha\tau(S)$$

■

נוכל להוכיח זאת יותר בפשטות עם הנוטציה של "המכפלה הפנימית" שהגדרנו לעיל, $(\varphi, v)$. עתה נוכיח ש־$\tau$ לא רק לינארית, אלא מוגדרת היטב.

הוכחה.

- **חח"ע:** תהי $T \in \ker\tau$, אז $\tau(T) = T^* = 0_{\hom(W^*, V^*)}$. נרצה להראות ש־$T$ העתקה האפס. נניח בשלילה ש־$T \neq 0$. אז קיים $v' \in V$ כך ש־$T(v') \neq 0$. נשלימו לבסיס – $(T(v) = w_1, w_2 \dots w_n)$ בסיס ל־$W$. יהי $(\psi_1 \dots \psi_n)$ הבסיס הדואלי. אז:

$$\tau(T)(\psi_1) = T^*(\psi_1) = \psi_1$$

אז:

$$0 = \tau(T)(\psi_1)(v') = T^*(\psi_1)(v') = \psi_1 \circ T(v') = \psi_1(w_1) = 1$$

סתירה. לכן $\ker\tau = \{0\}$ ולכן $\tau$ חח"ע.

- **על:** גם כאן משוויון ממדים

■

**שאלה ממבחן שבן עשה.** ("את השאלה הזו לא פתרתי בזמן המבחן, ואני די מתבייש כי אפשר לפתור אותה באמצעות כלים הרבה יותר פשוטים" "חח חח" "לא חח"ע זה חד־חד ערכי") יהיו $V, W$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־$(w_1 \dots w_n)$ בסיס של $W$. תהי $T\colon V \to V$. הוכיחו שקיימים $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V^*$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$T(v) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(v) w_i$$

**שימו לב:** בניגוד למה שבן עשה במבחן, $V$ לא בהכרח נוצר סופית.

הוכחת ראש בקיר. לכל $v \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ כך ש־$T(v) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i w_i$. נגדיר $\forall i \in [n]\colon \varphi_i(v) = \alpha_i$. זה ליניארי. ■

הוכחה "מתוחכמת". "אני אהבתי את ההוכחה שלי": נתבונן בבסיס הדואלי $B^* = (\psi_1 \dots \psi_n)$ שמקיים את הדלתא של קרונקר והכל. נגדיר $\varphi_i =\colon T^*(\psi_i)$. יהי $v \in V$. קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ כך ש־$T(v) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i w_i$. אז:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(v) w_i = \sum T^*(\psi_i)(v) w_i$$

צ.ל. $\alpha_i = T^*(\psi_i)(v)$. אך נבחין שהגדרנו:

$$T^*(\psi_i)(v) = \psi_i(T(v)) = \psi_i\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_j w_j\right) = \alpha_j$$

■

"הפכת למרצה במתמטיקה כדי להתנקם באחותך?" "כן."

### 11.2.2 המאפס הדואלי ומרחב אורתוגונלי

**הגדרה 89.** יהי $V$ מ"ו נוצר סופית. יהי $S \subseteq V$ קבוצה. נגדיר $S^0 \subseteq V^* =\colon \{\varphi \in V^* \mid \forall v \in S\colon \varphi(v) = 0\}$.

**דוגמאות.**
$$\{0\}^0 = V^*, \ \ V^0 = \{0\}$$

**משפט 155.**

1. $S^0$ תמ"ו של $V^*$.
2. $$(\operatorname{span} S)^0 = S^0$$
3. $$S \subseteq S' \implies S'^0 \subseteq S^0$$

**משפט 156.** יהי $V$ נ"ס, $U \subseteq V$ תמ"ו. אז $\dim U + \dim U^0 = n$

באופן דומה אפשר להמשיך ולעשות:

$$\dim U^0 + \dim U^{**} = n$$

וכן:

$$U \cong U^{**}$$

איזומורפיזם קאנוני. זאת כי:

$$\forall \varphi \in U^0 \, \forall u \in U\colon \varphi(u) = 0$$

ומי אלו הוקטורים שיאפסו את $\varphi$ שמאפס את $u$? הוקטורים ב־$U$ עד לכדי האיזומורפיזם הקאנוני מ־$U$ ל־$U^{**}$.

נבחין ש־:

$$[T^*]^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{A}^*} = ([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^T$$

כאשר $\mathcal{A}$ בסיס ל־$V$, $\mathcal{A}^*$ ל־$V^*$, $\mathcal{B}$ ל־$W$, $\mathcal{B}^*$ ל־$W^*$.

"כוס אמא של קושי" – בן על זה שקושי גילה משפט כלשהו לפניו.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**שחר פרץ, 2025**

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד