LaTeX preamble

Shahar Perets

26 באוגוסט 2025

(1)

נניח $A\in M_n(\mathbb{F})$ נילפוטנטית ולכסינה. נוכיח $A=0$.

הוכחה. נניח A ניל' לכסינה. אז קיים $k>0$ כך ש־$A^k=0$, וכן קיימת הפיכה $P\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש־$A=P\Lambda P^{-1}$ כאשר Λ אלכסונית. דהיינו $A^k=P^k\Lambda P^{-k}=0$. משום ש־P הפיכה אז P^k הפיכה ובאופן דומה $(P^{-1})^k$ הפיכה. נקבל $\operatorname{rank}(P^k\Lambda(P^{-1})^k)=\operatorname{rank}(0)=0$ כלומר $\operatorname{rank}(\Lambda)=0$. מכאן $\Lambda=0$ וסה"כ $A=P0P^{-1}=0$ כדרוש. ■

(2)

אין לי עצבים לזה אבל זה פשוט קיילי המילטון

(3)

א) נוכיח ש־$1,0$ מספרים אלגבריים. הוכחה: נציב ב־$f(x)=x-1, g(x)=x$ ונקבל שהם שורשים של פולינום ובפרט פונקציה רציונלית.

ב) נניח α מספר אלגברי, נוכיח $-\alpha,\alpha^{-1}$ אלגבריים.

הוכחה. ידוע שקיים $f\in\mathbb{Q}[x]$ כך ש־$f(\alpha)=0$. מהגדרת פונקציה רציונלית, ניתן לבטא את f כמו בצורה של $f=\frac{q}{p}$ כאשר $p,q\in\mathbb{Z}[x]$. נגדיר $f_1(x)=\frac{q(-x)}{p(-x)}, f_2(x)=\frac{q(\frac{1}{x})}{p(\frac{1}{x})}$. קל להראות ש־$p(\frac{1}{x})$ מהבינום של ניוטון, ובאופן דומה $q(\frac{1}{x})$ רציונלית. עוד נבחין ש־$p(-x)$ פולינום ולכן $f_1(x)$ רציונלית מהגדרה. $f_2(x)$ רציונלית כי חלוקה של רציונליות היא רציונלית מהיות שדה הפונקציות הרציונליות שדה. סה"כ $f_1(-\alpha)=f(--\alpha)=f(\alpha)=0$ וגם $f_2(\frac{1}{\alpha})=f(\alpha^{-1})^{-1}=f(\alpha)=0$ כדרוש. ■

ג) עתה נראה שאם α,β אלגברים, אז $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta$ אלגברים.

הוכחה. נוכיח את הלמה הבאה: בהינתן α מספר אלגברי, אז לכל $0\neq V\subseteq\mathbb{C}$ תמ"ו $\alpha V\subseteq V$. נגדיר את ההעתקה $T_x(\alpha)=\alpha v$, $T_x\colon V\to\alpha V$. נוכיח $\operatorname{Im}T_x=V$. ממשפט קיילי המילטון קיים פולינום מדרגה סופית f כך ש־$f(T)=0$. אז נקבל:

$$f(Tv)=\sum_{i=0}^{n}a_i\underbrace{\alpha^iv^i}_{T^iv^i}=\sum_{i=0}^{n}a_iT^iv^i=f(T)v^i=0v=0$$

סה"כ f מאפס את Tv. נראה ש־f רציונלי.

בהנחה שהצלחתי להוכיח את הלמה, נסיק שבהינתן תמ"ו המספרים האלגברים V, וזוג מספרים אלגבריים α,β, נקבל $\alpha V\subseteq V$, ובפרט $\beta\alpha\in V$. כדי להגדיר בכלל את התמ"ו הזה צריך להראות ש־$\alpha+\beta$ אלגברי. לשם כך אפשר להגדיר $f(x)=f_\alpha(x-\beta)f_\beta(x-\alpha)$ ואין לי כוח להוכיח שזה רציונלי. ■

(4)

נקרא לפולינום "פולינום מיוחד" אממ הוא מתוקן במקדמים שלמים, וכל שורשיו המרוכבים הם מגודל 1. סקלר $\alpha\in\mathbb{C}$ יקרא מיוחד אם הוא שורש של פולינום ממעלה n. נוכיח שאם α מיוחד אז הוא שורש יחידה.

הוכחה. א) ראשית, נוכיח שבהינתן מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם פולינום אופייני $f_A(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-\lambda_j)$. נבחין שהפולינום האופייני של A^k הוא מכפלת הגורמים הלינארים הבאים:

ב) נוכיח שאם α מיוחד אז לכל $k\in\mathbb{N}$ α^k מיוחד ממעלה n.

הוכחה. בהינתן $f(\alpha)=0$ כך ש־$f=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ כאשר $|a_i|=1$. אז A_f המטריצה בעלת הפולינום האופייני f וידוע A_f^k מטריצה עם פולינום אופייני ■

■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד