תרגיל בית 1 $\sim$ אלגברה ליניארית 1א

שחר פרץ

3 באפריל 2025

.... (1) ....

יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ מרוכבים. אזי מהיותם מרוכבים, קיימים ויחידים $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש־$z=a+bi,\ \ w=c+di$. נוכיח את הטענות להלן.

(א) צ.ל. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

הוכחה.

$$\overline{z\cdot w}=\overline{(a+bi)(c+di)}=\overline{ac+bci+adi-bd}=\overline{(ac-bd)+(bc+ad)i}=ac-bd-bci-adi=(a-bi)(c-di)=\bar{z}\cdot\bar{w}$$

■

(ב) צ.ל. $z\in\mathbb{R}\iff z=\bar{z}$

הוכחה.

$$z=\bar{z}\iff(a+bi)=(a-bi)\iff bi=-bi$$

$\Longleftarrow$ נניח $z\in\mathbb{R}$, נראה $bi=-bi$. משום ש־$b=\Im z=0$ אז $0\cdot i=-0\cdot i=0$ כדרוש.

$\Longrightarrow$ נניח $bi=-ib$, נראה $z\in\mathbb{R}$. נניח בשלילה $z\notin\mathbb{R}$, אז $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ולכן $b=\Im z\neq 0$ וסה"כ נוכל לחלק ב־0 את שני האגפים ולשמור על שקילות, כלומר $i=-i$ וסה"כ סתירה. אזי $z\in\mathbb{R}$ כדרוש.

■

(ג) צ.ל. $\Re z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$

הוכחה.

$$\Re z=a=\frac{1}{2}(2a)=\frac{1}{2}(a+bi+a-bi)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

■

(ד) צ.ל. $\Im z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

הוכחה.

$$\Im z=b=\frac{1}{2i}(2bi)=\frac{1}{2i}(a+bi-a+bi)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

■

.... (2) ....

יהיו $a_0,d\in\mathbb{C}$ ונגדיר את האוסף $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ לפי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+d$. נראה כי $\forall n\in\mathbb{N}\colon\ \sum_{i=0}^{n}a_i=\frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2}$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n את הטענה.

- בסיס. $n=0$ ולכן:

$$\sum_{i=0}^{0}a_i=a_0=\frac{2a_0}{2}=\frac{(0+1)\cdot(a_0+a_0)}{2}\quad\top$$

- צעד. נניח באינדוקציה את נכונות הטענה בעבור n ונוכיח בעבור $n+1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1}a_i=a_{n+1}+\sum_{i=0}^{n}a_i\overset{\text{ה.א.}}{=}a_{n+1}+\frac{(n+1)\cdot(a_0+a_n)}{2}$$

לשם ההמשך, נוכיח באינדוקציה למת עזר: לפיה, $a_n=a_0+nd$.

- בסיס. $n=0$ ואכן מתקיים $a_0 = a_0 + 0d$ מהיות הזהות יחס רפלקסיבי.
- צעד. נניח את נכונות הטענה בעבור n ונוכיח בעבור $n+1$. אז מכלל הנסיגה:

$$a_{n+1} = a_n + d \overset{\text{ה.א.}}{=} a_0 + nd + d = a_0 + (n+1)d \quad \top$$

נחזור להוכחה. נקבל את השוויון:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} a_i &= a_0 + (n+1)d + \frac{(n+1)(a_0+a_n)}{2} = \frac{2a_0 + 2(n+1)d + (n+1)(a_0 + a_0nd)}{2}\\ &= \frac{2a_0 + 2nd + 2d + na_0 + a_0n^2d + a_0 + a_0nd}{2} = \frac{na_0 + n(a_0 + (n+1)d) + a_0 + a_0 + (n+1)d}{2}\\ &= \frac{na_0 + na_{n+1} + a_0 + a_{n+1}}{2} = \frac{(n+1)(a_0 + a_{n+1})}{2}\end{aligned}$$

כדרוש.

בכך, השלמנו את בסיס וצעד האינדוקציה וטענת האינדוקציה הוכחה. $\blacksquare$

(3)

נמצא את הפתרונות המרוכבים של מהשוואות הבאות. בכל שאלה, יהי $z \in \mathbb{C}$, אזי קיימים $a := \Re z,\ b := \Im z$ כך ש־$z = a + bi$.

(א)

$$\begin{aligned}(1+i)z &= 2+i\\ (1+i)(a+bi) &= 2+i \implies \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=b+2 \\ 2b+2=1 \end{cases} \implies \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}\\ (a-b)+(a+b)i &= 2+i\end{aligned}$$

לכן $z = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$.

(ב)

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+2i)z &= (\sqrt{2}-1)i\\ (\sqrt{3}+2i)(a+bi) &= (\sqrt{2}-1)i + 0 \implies \begin{cases} \sqrt{3}a - 2b = 0 \\ 2a + \sqrt{3}b = \sqrt{2}-1 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ (2+\frac{3}{2})a = \sqrt{2}-1 \end{cases} \implies \begin{cases} b \approx 0.1025 \\ a \approx 0.1183 \end{cases}\\ (\sqrt{3}a - 2b) + (2a + \sqrt{3}b)i &= (\sqrt{2}-1)i + 0\end{aligned}$$

לכן $z \approx \mathbf{0.1183 + 0.1025}\boldsymbol{i}$.

(ג)

$$\begin{aligned}(3-2i)(5+i)z &= 1+2i\\ (17-7i)(a+bi) &= 1+2i \implies \begin{cases} 17a+7b=1 \\ -7a+17b=2 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{1-17a}{7} \\ (-7 + \frac{-17^2}{7})a + \frac{17}{7} = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{41}{338} \\ a = \frac{-\frac{3}{7}}{-7-\frac{17^2}{7}} = \frac{3}{388} \end{cases}\\ (17a+7b) + (-7a+17b)i &= 1+2i\end{aligned}$$

וסה"כ $z = \boldsymbol{\frac{3}{388} + \frac{41}{338}i}$.

(4)

נמצא את הייצוגים הפולאריים של המספרים הבאים:

(א) נתבונן ב־$z := 1 + i$. אז $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. נמצא את הזווית: $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. סה"כ $z = |z|e^{\theta i} = \boldsymbol{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}$.

(ב) נתבונן ב־$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. אז $|z| = \sqrt{(1/\sqrt{0.5})^2 + (-1/\sqrt{0.5})^2} = 1$. וכן $\theta = \arctan\left(\frac{1/\sqrt{2}}{-1\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$. וסה"כ $z = e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

(ג) נתבונן ב־$z = -1 + 2i$. אז $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. אז $\theta = \pi + \operatorname{atan2}(-1, 2) \approx -\arctan(0.5) + \pi \approx -0.4636$. סה"כ $z \approx \sqrt{5}e^{(-0.4636+\pi)i}$.

(5)

נמצא את הייצוג האלגברי של המספרים הבאים (ניעזר בנוסחאת אוילר):

(א)

$$5e^{\frac{\pi}{3}i} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 5\left(0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{2.5 + 2.5\sqrt{3}}\boldsymbol{i}$$

(ב)

$$e^{-\pi i}/2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\pi\right) + i\sin\left(-\pi\right)\right) = \frac{1}{2}(-1+0i) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

. . . . (6) . . . .

יהי $(a_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R}$ אוסף של $n+1$ סקלרים ממשיים. נגדיר לפיהם $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ פולינום ממשי. נניח ש-$z_0 \in C$ שורש של p. צ.ל. $\bar{z}_0$ שורש.

הוכחה. למען הנוחות, נסמן $z = z_0$ ונראה $p(\bar{z}) = 0$. נראה באינדוקציה על k ש-$\overline{z^k} = (\bar{z})^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$. בסיס: ידוע $z^0 = 1 = (\bar{z})^0$. צעד: נניח נכונות בעבור k, נוכיח בעבור $k+1$. אז:

$$\overline{(z^{k+1})} = \overline{z \cdot z^k} \overset{\text{שאלה 1א'}}{=} \bar{z} \cdot \overline{(z^k)} \overset{\text{ה.א.}}{=} \bar{z} \cdot (\bar{z})^k = (\bar{z})^{k+1} \quad \top$$

ובכך הלמה הוכחה. ראינו כי $\forall w, x \in \mathbb{C}\colon \overline{w+x} = \bar{w} + \bar{x}$ (ישירות מדסטריבוטיביות). על כן:

$$p(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n a_k(\bar{z})^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$$

ומהגדרה $\bar{z}$ שורש של הפולינום, ולכן $\bar{z}_0$ שורש של הפולינום כדרוש. ■

. . . . (7) . . . .

יהיו $a_0, d \in \mathbb{C}$, ונגדיר את $(a_i)_{i=0}^\infty$ לפי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n \cdot d$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נראה כי $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot \frac{d^{n+1}-1}{d-1}$.

הוכחה. ראשית כל נוכיח את הזהות $a_i = a_0 d^i$ באינדוקציה על $i \in \mathbb{N}$. בסיס $i = 0$ כך ש-$a_0 = a_0 \cdot d^0$. בעבור הצעד נניח באינדוקציה בעבור i ונוכיח על $i+1$, ואכן מכלל הנסיגה ומה.א. $a_{i+1} = a_i \cdot d = d \cdot a_0 d^i = a_0 d^{i+1}$ כדרוש.

נוכיח את הטענה המקורית באינדוקציה על n.

- בסיס: אז $n = 0$, כלומר:

$$\sum_{i=0}^0 a_i = a_0 = a_0 \cdot 1 = a_0 \cdot \frac{d^{0+1}-1}{d-1}$$

- צעד: נניח באינדוקציה על n ונוכיח על $n+1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i = a_{n+1} + \sum_{i=0}^n a_i = a_0 \cdot d^n + a_0\frac{d^n-1}{d-1} = a_0\frac{(d^n)(d-1) + d^n - 1}{d-1} = a_0\frac{d^{n+1} - d^n + d^n - 1}{d-1} = a_0\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$$

כדרוש.

סה"כ הראינו את נכונות הצעד והבסיס ולכן האינדוקציה הושלמה. ■

. . . .