חדו"א 1א 10

שחר פרץ

4 בינואר 2026

נדבר על... דברים אני מניח. יאי 2026. שנה חדשה. יאי.

שנה שעברה עסקנו בתכונות גלובליות של פונקציות רציפות. עתה נתחיל לדבר על הנושא המכעט אחרון, גזירות.

גזירות

"למי אתה מאמין? לניוטון או לייבניץם'

"אני לא זוכר איך קוראים לך, כי אתה אף פעם לא מדבר איתי אלא רק עם האנשים הקרובים אליך"

אז מכאן התחיל החדו"א. האינטואציה הגיאומטרית הוא מציאת ה־slope של המשיק בנקודה מסוימת.

הגדרה 1. בהינתן $f\colon I \to \mathbb{R}$, וכן $x_0 \in I$ בפנים הקטע (איננה נקודת קצה). נאמר ש־f גזירה ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הערה 1. גזירות היא תכונה נקודית, לוקאלית.

סימון 1. בהנחה שהגבול ב־x_0 של הפונקציה f קיים, נסמן $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ או $f'(x_0)$.

משפט 1. f גזירה ב־x_0 אמ"מ קיים וסופי:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

"עוד הגדרה שקשורה לזה שבמממד אחד היא לא ממש makes sense"

הגדרה 2. תהי $f\colon I \to \mathbb{R}$ וכן $x_0 \in I$ בפנים הקטע. f תקרא דיפרנציאבילית ב־x_0 כאשר קיימת העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת שהגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.

בממד אחד זה לא ממש מעניין. מה זה אומר? נתחיל מהגבול של $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = 0$, שאומר שבגבול הן הולכות לאותו המקום. זה אומר שאפשר לעשות "משפט השוואה", אפשר להציב באחת ולקבל קירוב של השנייה. גם בהגדרה של דיפרנציאביליות יש לנו שתי פונקציות. מה המשמעות של כך ש־:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-f(x)}{x-x_0}$$

אומרת? זה אומר שלא רק ש־g קירוב טוב ש־f, אלא גם שכאשר מחלקים ב־$x-x_0$ ששואף ל־0 הקירוב נשאר טוב. הקירוב הזה הולך לאפס יותר מהר מזה ש־$x-x_0$ הולך לאפס. ההגדרה של דיפרנציאביליות אומרת שאפשר לקרב את f בנקודה ע"י פונקציה לינארית, והקירוב הזה יותר מהיר מ־$x-x_0$.

במשתנה אחד, f גזירה ב־x_0 אמ"מ f דיפרנציאבילית. ההעתקה הלינארית T הזו נקראת הזיפרנציאל של f ב־x_0.

משפט 2. תהי $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהי $x_0 \in I$ בפנים הקטע. אם f גזירה ב־x_0 אז f רציפה ב־x_0.

הוכחה. נניח ש־f גזירה ב־x_0 ונגדיר $h\colon I \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

לכל $x \in I$. נבחין ש־f גיזרה ב־x_0 ולכן:

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = h(x)$$

לכן h רציפה ב־x_0. מאריתמטיקת גבולות נקבל:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} h(x)(x-x_0)$$

ומכאן ש־f רציפה ב־f_0. ■

דוגמאות.

- נתבונן בפונקציה $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^n$. נבחין שלכל $x_0 \in \mathbb{R}$ מתקיים ש־f גיזרה בו ומתקיים $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

הוכחה. לול ראיתי את ההוכחה הזו במכינה של אודיסאה בכיתה ח'. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. ניעזר בבינום של ניוטון, אריתמטיקה ורציפות פולינומים.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \lim_{x\to x_0} x^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

■

- נבחין ש־sinM גזירה בכל $\mathbb{R}$ ונגזרתה cos.

הוכחה. יהי x_0. לכל $x \neq x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\frac{x+x_0}{2}$$

מהרציפות של cos ב־x_0 ומהגבולות וההרכבה $\lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$ ומהרציפות של $\frac{\sin x}{x}$ ב־0 ומגבולות וההרכבה $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{\frac{x-x_0}{2}} = 1$ ומאריתמטייקה גבולות, נקבל:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0$$

■

- **דוגמה 3.** יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נמצא את הנגזרת של e^x ב־x_0.

הוכחה. האמת את ההוכחה הזו ראיתי בכיתה ט' במתמטיקה ב'. יש לי אותה מוקלדת עם יותר פירוט בסיכום של e במתמטיקה B. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נבחין ש־:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

ובפרט:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(כי ראינו את שיעור שעבר) ומגבולות והרכבה $\lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$. מאריתמטיקה סיימנו. ■

- נגדיר $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = xD(x)$. נוכיח ש־f אינה גזירה באף נקודה ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. לכל $x_0 \neq 0$, הראינו ש־f אינה רציפה ב־x_0. לכן היא אינה גזירה ב־x_0. נטפל עתה ב־0 (נראה שהיא אומנם רציפה אך לא גזירה בו). נתבונן ב־$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ויהי $\delta > 0$. בקטע $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ יש רציונלי x ורציונלי y כך ש־:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(y) - f(0)}{y - 0}\right| = |D(x) - D(y)| = 1 \geq \varepsilon_0$$

מקריטריון קושי לא קיים $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. ■

- עבור $x^2 D(x)$, היא אומנם עדיין לא רציפה ב־$x_0 \neq 0$, אבל ב־0 יקרו דברים קצת פחות מנוונים:

הוכחה. הראינו ש־$\lim_{x\to x_0} xD(x) = 0$ והראינו ש־$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2D(x)}{x} = \lim_{x\to x_0} xD(x) = 0$. ■

נגזרות חד־צדדיות

הגדרה 3. תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ המקיימת $\exists \delta > 0\colon (x_0 - \delta, x_0) \subseteq I$. אז נאמר שנאמר ש־$f$ גזירה משמאל ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הגדרה 4. גגזרת פימין מוגדרת באופן דומה

סימון 2. נסמן את הגזירה משמאל ב־$f'_-(x_0)$ ומימין $f'_+(x_0)$.

אריתמטיקה של גזירות

משפט 3. יהיו $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ותהי $x_0 \in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f, g גזירות ב־x_0. אז:

- לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha f + \beta g$ גזירה ב־x_0 וכן $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ (הנגזרת לינארית)
- מתקיים ש־fg גזירה ב־x_0 ומתקיים ש־$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x) + f(x_0)g'(x_0)$.
- אם $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה ב־x_0 ומתקיים:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

נוכיח את (2) ואת השאר לבית.

הוכחה. לכל $x \neq x_0$ מתקיים ש־:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ידוע ש־f גזירה ב־x_0 ולכן רציפה ב־x_0. לכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. g גזירה ב־x_0 ולכן $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$. מאריתמטיקה קיבלנו:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)g(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0)$$

מאריתמטיקה סיימנו:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{x - x)} = f(x_0)g'(x_0) + g'(x_0)g(x_0)$$

■

"זהו אתה פורשם'

כלל השרשרת

משפט 4. תהא $f\colon I \to J$ ותהא $g\colon J \to \mathbb{R}$. נניח $x_0 \in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f גזירה ב־x_0 וגם g גזירה ב־x_0. אז $g \circ f$ גיזרה ב־x_0 וכן $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

הוכחה שגויה, ידועה בכינוייה הוכחהחהחה.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מה הבעיה בהוכחהחהחה? שלא מובטח ש־$f(x) - f(x_0) \neq 0$. מותר להניח $x \neq x_0$ (כי אנחנו בגבול), אבל הטענה השנייה לא עובדת. לדוגמה עבור פונקציה קבועה ההוכחהחהחה לא עובדת. יש כאן עוד בעיה. במשפט של הרכבה, דרשנו שהגבול של הפונקציה הפנימית מקיימת כל מני דברים. לכן נצטרך לעשות חלוקה למקרים. ■

הערה 2. שיגאות מעין אילו הרבה פעמים חומקות מתחת לרדאר. אבל גם הוכחה שגויה אפשר לתקן – אם נפצל למספיק מקרים נוכל לטפל בבעיה.

הוכחה נכונה.
- במקרה הראשון, $f'(x_0) \neq 0$. ואז הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ומכאן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ ובפרט $f(x) \neq f(x_0)$. בקטע הזה אפשר לבצע את ההוכחהחהחה – מתקיימים תנאי המשפט על גבולות והרבה, ולכן הגבול:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y\to x_0} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

f גזירה ב־f_0 ולכן $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. מאריתמטיקה קיבלנו $\lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$.
- אם $f'(x) = 0$. במקרה זה, לביטוי:

$$\lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

קיים וסופי (הגדרת הנגזרת). לכן קיים $M>0$ כך שקיים $\delta>0$ כך שלכל $y\in(f(x_0)-\delta,f(x_0)+\delta)$, מתקיים ש־$\left|\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}\right|<M$ (ברה יכולת פשוט להגיד שהדבר הזה חסום ע"י M בסביבת δ נקובה ולגמור עניין). יהי $\varepsilon>0$. אז קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, מתקיים $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<\frac{\varepsilon}{M}$ (הגדרת הגבול). f רציפה ב־x_0 ולכן קיים $\delta_3>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\delta$. נסמן ב־$\eta=\min\{\delta_2,\delta_3\}$ ויהי $x\in(x_0-\eta,x_0+\eta)$. נחלק למקרים.

- אם $f(x)=f(x_0)$, אז $\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\right|=0<\varepsilon$ וסיימנו.
- אחרת:

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{|x-x_0|}=\left|\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

סה"כ:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=0=g'(f(x_0))f'(x)$$

■

מסקנות נוספות

משפט 5. תהא $f\colon I\to J$ פונקציה חח"ע ועל, כאשר I,J קטעים פתוחים (אך לא בהכרח, סתם למרצה לא בא להתעסק עם הקצוות). אז f^{-1} גזירה בכל נקודה ב־J ומתקיים $\forall y\in J\colon (f^{-1}(y))(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

הוכחהההחה. ידוע שלכל $x\in J$ מתקיים $(f\circ f^{-1})(x)=x$. מכלל השרשרת נקבל $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)=1$. נחלק ונקבל את הדרוש.
מה הבעיה בהוכחהההחה? כלל השרשרת דרש שהפונקציה גזירה בנקודה. לא הראינו את זה. ■

הוכחה נכונה. יהי $y\in J$. נניח $f^{-1}(f'(y_0))\neq 0$. מסמן $x_0=f^{-1}(f'(y_0))$. ידוע $f'(x_0)\neq 0$, לכן קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שבה לכל $x\in U$ מתקיים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq 0$. נגדיר $g\colon U\to\mathbb{R}$. לכל $x\in U$ מתקיים:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} & x\neq x_0\\ \frac{1}{f^{-1}(x_0)} & x=x_0\end{cases}$$

ניתן להבחין ש־g רציפה, ובפרט רציפה ב־x_0. f^{-1} רציפה ב־y_0. לכן $g\circ f^{-1}$ רציפה ב־y_0. כלומר:

$$\lim_{y\to y_0}(g\circ f^{-1})(y)=(g\circ f^{-1})(y_0)=g(x_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

מצד שני,

$$\lim_{y\to y_0}(g\circ f^{-1})(y)=\lim_{y\to y_0}\frac{f'(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$$

לכן f^{-1} גזירה ב־y_0 ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

וסיימנו. ■

דוגמה. יהי $n\in\mathbb{N}^+$, ונגדיר $f(x)=\sqrt[n]{x}$ לכל $x\in(0,\infty)$. נשים לב ש־$\mathrm{Range}f=(0,\infty)$. נגדיר $g\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ על ידי $g(x)=x^n$ לכל $x\in(0,\infty)$. אז $f=g^{-1}$. לכן f גזירה בכל נקודה $(0,\infty)$ ומתקיים לכל $y\in(0,\infty)$ ש־$f'(y)=\frac{1}{g'(f(y))}$. סה"כ:

$$f'(y)=\frac{1}{g'(f(y))}=\frac{1}{n\cdot(f(y))^{n-1}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

דוגמה. יהיו $m,n\in\mathbb{N}^+$. נגדיר $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ ע"י $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$. אז אפשר לנסח $f(x)=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ומכלל השרשרת נקבל ש־$f(x)=m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$. סה"כ באופן כללי $(x^q)'=qx^{q-1}$ לכל $q\in\mathbb{Q}_+$.

לבית, להוכיח ל־$\mathbb{Q}_-$ וכן ל־$\mathbb{R}$, ש־$(x^r)'=rx^{r-1}$ לכל $r\in\mathbb{R}$.

דוגמה. יהי $a>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נקבל $f(x)=e^{x\ln a}$ ומכלל השרשרת קיבלנו (הבהרה, לא גזרנו $\ln$, גזרנו קבוע) $f'(x)=e^{x\ln a}\ln a=$ $.a^x\ln a$

דוגמה. נגדיר $f(x)=\ln x$ לכל $x\in(0,\infty)$. נסמן $g(x)=e^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נבחין ש־$f=g^{-1}$ וכן g' אינה מתאפסת באף נקודה. מכאן ש־:

$$f'(x)-\frac{1}{g'(f(x))}=\frac{1}{e^{f(n)}}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

דוגמה. נגדיר $f(x)=\arctan x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נבחין $g(x)=\tan x$ לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. אז $f=g^{-1}$ ולכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$. לכן f גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיים:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\arctan(x)}}=\frac{1}{1+x^2}$$

תכונות גלובליות של פונקציות גזירות

משפט 6 (המשפט הלא אחרון של פרמה)**.** תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in I$ בפנים הקטע. נניח f גזירה ב־x_0 ונניח של־f יש קיצון מקומי ב־x_0. אז $f'(x_0)=0$.

הערה 3. המשפט הזה הוא חד־כיווני. לא כל נקודה סטרציונרית היא נקודת קיצון.

הגדרה 5. ל־f יש מקסימום מקומי ב־x_0 כאשר קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $f(x)\le f(x_0)$.

הגדרה 6. מינימום מקומי בדומה.

הוכחה למשפט פרמה הלא אחרון. נניח x_0 מקסימום מקומי (ההוכחה עבור מינימום בדומה). x_0 פנימית בקטע ולכן מוגדרות (הנחת גזירות ושוות הנגזרות החד־צדדיות בנקודה. קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $f(x)\le f(x_0)$. לכן לכל $x\in(x-\delta,x+\delta)$ נקבל:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

(משפט לפיו גבול משמר א"ש חלש). לכן $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. באופן דומה מימין נקבל $f'(x_0)$. לכן $f'(x_0)$. ■

המשפט היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי (להבדיל מהמשפט היסודי של החד"א)

משפט 7 (משפט רול)**.** תהא $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. נניח ש־$f$ רציפה בקטע ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b), $f(a)=f(b)$. אז קיימת $c\in(a,b)$ שבה $f'(c)=0$.

הוכחה.
1. מקרה ראשון: נניח f קבועה ב־$[a,b]$. נתבונן ב־$c=\frac{a+b}{2}$ ובסביבת c היא קבועה כלומר $f'(c)=0$ וסיימנו.
2. במקרה השני, קיים $x\in(a,b)$ כך שלכל $f(x)\neq f(a)$, בה"כ $f(x)>f(a)$, f רציפה ב־$[a,b]$ ולכן לפי ויראשטראס יש לה מקסימום בקטע, כלומר קיימת $c\in[a,b]$ כך שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f(x)\le f(c)$. ידוע $f(c)\ge f(x_0)>f(a)$ לכן $c\neq a$ וגם $c\in(a,b)$ ולכן לפי פרמה מכיוון ש־f גזירה ב־c נובע ש־$f(c)=0$'.

■

משפט 8 (משפט ערך הביניים של לגראנג')**.** תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b). אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הערה 4. מקרה פרטי של רול, עבור $a=b$.

הוכחה. נגדיר: (נחסר את המיתר כדי להשתמש ברול)

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

מאריתמטיקה h רציפה ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b). כמו כן $h(a)=h(b)=0$. לכן h מקיימת את תנאי משפט רול ב־$[a,b]$ כלומר קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$h(c)=0$, ומתקיים:

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כנדרש. ■

משפט 9. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I וכי לכל $x\in I$ מתקבל $f'(x)=0$. הראו כי f קבועה.

הוכחה. יהיו $x,y\in I$ ונניח $x<y$. בקטע $[x,y]$ f רציפה. בקטע (x,y) f גזירה. לכן קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

ו־$f'(c)=0$ כלומר $f(x)=f(y)$. ∎

הערה 5. הוכחה דומה מראה שאם f' שלילית אז f יורדת ואם f' חיובית אז f עולה.

משפט 10. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I. הראו ש־f עולה ב־I אמ"מ $\forall x\in I\colon f'(x)\geq 0$.

הוכחה. $\Leftarrow$ אותה הפריקינג הוכחה. יהיו $x,y\in I$ ונניח $x<y$. f רציפה ב־$[x,y]$ וכן גיזרה ב־(x,y). מכאן ש־f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' וקיימת $c\in(x,y)$ כך ש־:

$$0\leq f'(x)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

כלומר $f(x)\leq f(y)$ וסיימנו.

$\Longrightarrow$ יהי $x_0\in I$. קיים $\delta>0$ כך ש־$I\supseteq(x_0-\delta,x_0+\delta)$. מהגדרה $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ידוע $f(x)\leq f(x_0)$ כי הנחנו שהיא עולה, ואז לכל $x\in(x_0-\delta,x_0)$ קיבלנו $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. מכאן $f'(x_0)\geq 0$. ז ∎

. . . .