מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 7 - שחר פרץ

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

תאריך הגשה: 31.4.2024

~~~ תרגיל בית 7 ~~~

שאלה 1

סעיף (א)

נתונה הפונקציה:

$$H = \lambda f \in \mathbb{Z} \to \{0,1\}.\lambda n \in \mathbb{N}_+.f(n) + f(-n)$$

תחום: $\text{dom}(h) = \mathbb{Z} \to \{0,1\}$. טווח: $\text{range}(H) = \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$

סעיף (ב)

טענה: H לא חח"ע

הוכחה: נניח בשלילה ש־H הוא חח"ע. נראה דוגמה נגדית.

$$f_1 = \mathbb{Z}_{\leq 0} \times \{1\} \cup \mathbb{Z}_{>0} \times \{0\}$$

$$f_2 = \mathbb{Z}_{\leq 0} \times \{0\} \cup \mathbb{Z}_{>0} \times \{1\}$$

$$H(f_1) = \lambda n \in \mathbb{N}_+.f(n) + f(-n) = 0 + 1 = 1$$

$$H(f_2) = \lambda n \in \mathbb{N}_+.f(n) + f(-n) = 0 + 1 = 1$$

$$H(f_1) = H(f_2) \land f_1 \neq f_2 \qquad \mathscr{Q.E.D.}\ \blacksquare$$

סעיף (ג)

טענה: H לא על $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$

הוכחה: נראה שאחת ההכלות המהוות תנאי הכרחי לשוויון לא מתקיימת.

נבחר $f = \lambda n \in \mathbb{N}_+.3 \in \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$, נניח בשלילה שקיים $f \in \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ כך ש־$\lambda \mathbb{N}_+.f(n) + f(-n)$ הוא f. יהי $g \in \mathbb{Z} \to \{0,1\}$. נפלג למקרים:
~~~

- אם $f(n)=0$: אם $f(-n)=0$ אז $f(n)+f(-n)=0$, ואם $f(-n)=1$ אז $f(n)+f(-n)=1$.
- אם $f(n)=1$: אם $f(-n)=0$ אז $f(n)+f(-n)=1$, ואם $f(-n)=1$ אז $f(n)+f(-n)=2$.

סה"כ $\mathrm{range}(g)=\{0,1,2\}$, בפרט $3\notin\mathrm{range}(g)$, וזו סתירה להיות $f=g$.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

שאלה 2

נתון

נתון $A,B,C\neq\emptyset$, ונתון $g\in B\to C\wedge f\in A\to B$.

סעיף (א) - סתירה

נתון: $g\circ f$ חח"ע

צ.ל.: g לא חח"ע

הוכחה: נראה דוגמה נגדית להיות g חח"ע. נבחר:

$$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{1\}$$

$$f=\{\langle 1,1\rangle\},g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

נתבונן ב־$g\circ f=\{\langle 1,1\rangle\}$, שהוא חח"ע באופן ריק, כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב) - הוכחה

נתון: $g\circ f$ חח"ע, f על

צ.ל.: g חח"ע

הוכחה: נניח בשלילה ש־g חח"ע, כלומר קיימים $b_1,b_2\in B$ כך ש־$g(b_1)=g(b_2)$, אך $b_1\neq b_2$. כבר הוכחנו ש־f חח"ע תחת הנתונים, כלומר f^{-1} חח"ע, ומשום ש־f על אז f^{-1} מלאה (ב־B), וסה"כ f^{-1} פונקציה חח"ע. נתבונן ב־$a_1=f^{-1}(b_1),a_2=f^{-1}(b_2)$. לפי היות f^{-1} חח"ע, נסיק $a_1\neq a_2$. נסיק:

$$(g\circ f)(a_1)=g(f(a_1))=g(b_1)=g(b_2)=g(f(a_2))=(g\circ f)(a_2)$$

כלומר סה"כ $(g\circ f)(a_1)=(gf)(a_2)$ אך $a_1\neq a_2$, וזו סתירה לנתון, כלומר הנחת השלילה לא נכונה ו־g חח"ע כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ג) - הוכחה

נתון: $g\circ f$ על

צ.ל.: g על

הוכחה: יהי $c \in C$, נוכיח קיום $b \in B$ כך ש־$g(b) = c$. נתון שקיים $a \in A$ כך ש־$(g \circ f)(a) = c$, כלומר $g(f(a)) = c$. נבחר $b = f(a)$, ולפי מה שהוכח אותו b מקיים את מה שהיה להוכיח.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ד) - סתירה

נתון: $f \circ g$ על

צ.ל.: f לא על

הוכחה: נראה דוגמה נגדית להיות f על:

$$A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$$

$$f = \{\langle 1,1 \rangle\}, g = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$$

נתבונן ב־$g \circ f = \{\langle 1,1 \rangle\}$, אשר על C כדרוש. לעומת זאת, f לא על, וזו סתירה.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ה) - לעשות

נתון:

שאלה 3

סעיף (א)

נתון: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f = \lambda n \in \mathbb{N}.n^2 - 6n + 8$

חח"ע: הפונקציה לא חח"ע כי $f(2) = f(4)$ אך $2 \neq 4$ ■

על: הפונקציה לא על כי $n^2 - 6n + 8 = -2 \implies n^2 - 6n + 10 = 0 \implies n = 3 \pm i \notin \mathbb{N}$ ■

סעיף (ב)

נתון: $f\colon \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) f = \lambda \langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}).A \cap B$

חח"ע: הפונקציה לא חח"ע כי $f(\langle \{0\}, \{1\} \rangle) = f(\langle \{1\}, \{2\} \rangle) = \emptyset$ אך $\langle \{1\}, \{2\} \rangle \neq \langle \{0\}, \{1\} \rangle$ ■

על: הפונקציה על; יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, צריך להוכיח קיום $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ כך ש־$f(B) = A$. נבחר $B = \langle A, A \rangle$, ומשום ש־$A \cap A = A$ אז $f(B) = A$ כדרוש ■

סעיף (ג)

נתון: $f\colon (\mathbb{R} \to \mathbb{R})^2 \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}), f = \lambda \langle g, h \rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R}).g \circ h$

חח"ע: הפונקציה לא חח"ע, דוגמה נגדית: $f(\langle\{\langle 1,1\rangle\},\{\langle 1,1\rangle\}\rangle) = h(\langle\{\langle 1,2\rangle\},\{\langle 2,1\rangle\}\rangle) = \{\langle 1,1\rangle\}$ ■

על: הפונקציה על; יהי $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, צ.ל. להוכיח קיום זוג סדור x המקיים $f(x) = g$. נבחר $x = \langle g, id_{\mathbb{R}}\rangle$, ומשום ש־ $g \circ id_{\mathbb{R}} = g$ אז $f(x) = g$ כדרוש ■

סעיף (ד)

נתון: $f\colon \mathbb{N} \to (\mathbb{R} \to \mathbb{N}), f = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda x \in \mathbb{R}.n$

חח"ע: הפונקציה חח"ע. יהי $f(a) = f(b)$. צ.ל. $a = b$. ידוע $\lambda n \in \mathbb{N}.a = \lambda n \in \mathbb{N}.b$, כלומר לפי כלל η $(\lambda x.a)(n) = (\lambda x.b)(n)$ ולפי כלל β מתקבל $x = a = b$, כדרוש ■

על: הפונקציה לא על. הוכחה: נראה נניח בשלילה שהיא על ונראה דוגמה נגדית. נבחר $g = \lambda x.|\lfloor x\rfloor|$. אם הפונקציה הייתה על, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ ככה שלפי כלל β מתקיים $f_1 := \lambda x \in \mathbb{N}.n = f_2 := \lambda x.|\lfloor x\rfloor x|$. נשלול שוויון בין פונקציות תוך שימוש בכלל η. לפי הכלל, $f_1(n+1) = f_2(n+1)$ כלומר $n = |\lfloor n+1\rfloor|$, ומשום ש־$n \in \mathbb{N}$ אז $n = |n+1|$, וזו סתירה ■

סעיף (ה)

נתון: $f\colon (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f = \lambda g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}.g(0)$

חח"ע: הפונקציה לא חח"ע. ראה דוגמה נגדית: נתבונן ב־$f(\lambda x \in \mathbb{R}.x) = f(\lambda x \in \mathbb{R}.0) = 0$ אך $\lambda x \in \mathbb{R}.x \neq \lambda x \in \mathbb{R}.0$.

על: הפונקציה על. יהי $x \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח קיום $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש־$f(g) = x$. נבחר $g = \lambda y \in \mathbb{R}.x$, כלומר נפעיל פעמיים את כלל β ונקבל $f(g) = g(0) = x$, כדרוש ■

סעיף (ו)

נתון: $f\colon ((\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f = \lambda g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.g(r)$

חח"ע: הפונקציה לא חח"ע. נראה דוגמה נגדית: $f(\langle(\lambda x \in \mathbb{R}.x), 0\rangle) = f(\langle(\lambda x \in \mathbb{R}.0), 1\rangle) = 0$ אך $\langle \lambda x \in \mathbb{R}.x, 0\rangle \neq \langle \lambda x \in R.0, 1\rangle$ כי $0 \neq 1$.

על: הפונקציה על. יהי $x \in \mathbb{R}$. צריך להוכיח קיום $\langle g, y\rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ כך ש־$f(g) = x$. נבחר $g = \lambda p \in \mathbb{R}.p$, $y = x$, ונפעיל פעמיים את כלל β כדי לקבל $f(\langle g, y\rangle) = g(y) = x$, כדרוש ■

שאלה 4

סעיף (א)

נתון:

$$F = \lambda g \in \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R}).\lambda x \in \mathbb{N}.g(x)(x)$$

טווח ותחום אפשרי ל־F:

$$\mathrm{dom}(F)=\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\to\mathbb{R}),\mathrm{range}(F)=\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

סעיף (ב)

נחשב לפי כלל β:

$$\begin{aligned}
&F(\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda m\in\mathbb{N}.n+1)(0)\\
=&(\lambda x\in\mathbb{N}.(\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda m\in\mathbb{N}.n+1)(x)(x))(0)\\
=&(\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda m\in\mathbb{N}.n+1)(0)(0)\\
=&(\lambda m\in\mathbb{N}.0+1)(0)\\
=&0
\end{aligned}$$

סעיף (ג)

צ.ל.: F לא חח"ע

הוכחה: נבחר f_1,f_2 כך ש־$f_1\neq f_2$ אך $F(f_1)=F(f_2)$:

$$\begin{aligned}
f_1&=(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\lambda n\in\mathbb{N}.n)\cup\{\langle 0,\{\langle 0,0\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\}).0\rangle\}\\
f_2&=(\mathbb{N}\setminus\{1\})\times(\lambda n\in\mathbb{N}.n)\cup\{\langle 1,\{\langle 1,1\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{1\}).0\rangle\}
\end{aligned}$$

ראשית, נוכיח שאכן $f_1,f_2\in(\mathbb{N}\to\mathbb{R})$. נוכיח בה"כ על פונקציה f מהצורה:

$$f=(\mathbb{N}\setminus\{t\})\times(\lambda n\in\mathbb{N}.n)\cup\{\langle t,\{\langle t,t\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{t\}).0\rangle\}$$

במילים אחרות, צ.ל. $\forall x_1\in\mathbb{N}.\exists y\in(\mathbb{N}\to\mathbb{R}).f(x)=y$. יהי $x\in\mathbb{N}$. נפלג למקרים:

- אם $x\notin\{t\}$, אז $x\in\mathbb{N}\setminus\{t\}$ כלומר נוכל לבחור $y=\lambda n\in\mathbb{N}.n$ שמקיים $y\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ כי $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$, וזה יעבוד לפי כפל קרטזי.
- אם $x\in\{t\}$ נגרר $x=t$. נבחר $y=\{\langle t,\{\langle t,t\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{t\}).0\rangle\}$, המקיים לפי פילוג למקרים $y\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. סה"כ לפי התכונה המרכזית של זוג סדור $\langle x,y\rangle=\{\langle t,\{\langle t,t\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{t\}).0\rangle\}$, ולפי הגדרת $\cup$ וסימון $f(x)$, נסיק $f(x)=y$, כדרוש.

עכשיו, נותר להוכיח $F(f_1)\neq F(f_2)$. נשתמש בכלל β כדי למצוא את ערכם:

$$\begin{aligned}
F(f_1)&=\lambda x\in\mathbb{N}.f_1(x)(x)\\
F(f_2)&=\lambda x\in\mathbb{N}.f_2(x)(x)
\end{aligned}$$

לפנות כל, נוכיח טענה שנכנה טענה (1): בה"כ $x\notin\{t\}$ אז $x\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\wedge x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ כלומר $f(x)=\lambda n\in\mathbb{N}.n$ ולפי כלל β נסיק $f(x)(x)=x$.

לפי כלל η, יהי $x\in\mathbb{N}$, צ.ל. $f_1(x)(x)=f_2(x)(x)$. נפלג למקרים:

- אם $x\in\{0\}$: לפי כללים α,β נסיק $f_1(x)=f_1(0)=\langle 0,\{\langle 0,0\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{0\}).0\rangle$ כלומר $f_1(x)(x)=f(0)(0)=0$. נפצל למקרים:
  - אם $x\notin\{1\}$ אז לפי טענה 1: $f_2(x)(x)=x=0$ וסה"כ $f_1(x)(x)=f_2(x)(x)$.

- אם $x\in\{1\}$: לפי כללים α,β נסיק $f_2(x)=f_2(0)=\langle 1,\{\langle 1,1\rangle\}\cup\lambda n\in(\mathbb{N}\setminus\{1\}).1\rangle$ כלומר $f_2(x)(x)=f_2(0)(0)=0$, וסה"כ $f_1(x)(x)=f_2(x)(x)$.

- אם $x\notin\{0\}$: אזי לפי טענה 1: $f_1(x)(x)=x=0$, נקבל פילוג למקרים זהה למה שהיה קודם וסה"כ $f_1(x)(x)=f_2(x)(x)$ כדרוש.

סה"כ הוכח $f_1=f_2\wedge F(f_1)\neq F(f_2)$ כלומר הפונקציה לא חח"ע.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

שאלה 5

סעיף (א)

טענה: $\forall X\subseteq A.f^{-1}[f[X]]=X$ אמ"מ f חח"ע.

הוכחה: נוכיח כל אחת מהגרירות בנפרד;

- נניח $\forall X\subseteq A.f^{-1}[f[X]]=X$, נוכיח f חח"ע. נניח בשלילה ש־f לא חח"ע, כלומר קיימים $a_1,a_2\in A$ המקיימים $a_1\neq a_2$ וגם $f(a_1)=f(a_2)$. כדי להראות דוגמה נגדית להנחת השלילה, נבחר $X=\{a_1\}\subseteq A$. נכמת את $f[X]$, ואת $f^{-1}[\{f(a_1)\}]$;

  - לפי עקרון ההחלפה, יהי $a\in X$ (כלומר $a=a_1$), ומשום שלפי היות f ח"ע $f(a_1)$ הוא האיבר היחיד (מכאן מגיעה הגרירה הדו־כיוונית) שווה ל־$f(a)$, אז $f[X]=\{f(a_1)\}$.
  - נרצה להוכיח $\{a_2\}\subseteq f^{-1}[\{f(a_1)\}]$. באופן שקול, $a_2\in A\wedge f(a_2)\in\{f(a_1)\}$. התנאי הראשון נתון לפי הגדרת a_2, והתנאי השני שקול לכך ש־$f(a_2)=f(a_1)$ וזה נתון מתוך הנחת השלילה.

  סה"כ נציב ונקבל $\{a_2\}\in f^{-1}[f[X]]=X$, אך $\{a_2\}\notin X$ כלומר ישנה סתירה להנחת השלילה, לכן f חח"ע כדרוש.

- נניח f חח"ע, נוכיח $\forall X\subseteq A.f^{-1}[f[X]]=X$. נוכיח בהכלה דו־כיוונית.

  - יהי $x\in X$, נוכיח $x\in f^{-1}[f[X]]$. במילים אחרות, צ.ל. $x\in X$ (שכבר נתון לנו) וגם $f(x)\in f[X]$. הטענה הזו נכונה כי ע"פ בעקרון ההחלפה $\forall x\in X.f(x)\in f[X]$, ולכן הטענה נכונה באופן טריוויאלי.
  - יהי $x\in f^{-1}[f[X]]$, נוכיח $x\in X$. לפי הגדרת קבוצת המקורות של f על X, ידוע $f(x)\in f[X]$, ובשילוב של הגדרת התמונה ועקרון ההפרדה, נסיק שקיים $a\in X$ כך ש־$f(a)=f(x)$. f חח"ע, אזי $a=x$, כלומר $x\in X$ כדרוש.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

טענה: $\forall Y\subseteq B.f[f^{-1}[Y]]=Y$ אמ"מ f על.

הוכחה: נוכיח כל אחת מהגרירות בנפרד.

- נניח f על, נוכיח $\forall Y\subseteq B.f[f^{-1}[Y]]=Y$ באמצעות הכלה דו כיוונית. יהי $Y\subseteq B$:

- ◦ יהי $y \in Y$, נוכיח $y \in f[f^{-1}[Y]]$, או באופן שקול (ובה"כ), צ.ל.:

$$\begin{aligned} & y \in f[f^{-1}[Y]] \\ \iff & \exists x \in f^{-1}[Y].f(x) = y && (f[X] \text{ definition}) \\ \iff & \exists x.x \in A \land f(x) \in Y \land f(x) = y && (f^{-1} \text{ definition}, A \land A \leftrightarrow A, \exists \text{ syntax}) \end{aligned}$$

משום שידוע $y \in Y \land f(x) = y$ אז $f(x) \in Y$, ולכן צ.ל. $\exists x.x \in A \land f(x) = y$. הטענה הזו פסוק אמת כי f על B ו־$Y \subseteq B$, כדרוש.

- ◦ יהי $y \in f[f^{-1}[Y]]$, נוכיח $y \in Y$. באופן שקול, הוכחנו כבר שנתון $\exists x.x \in A \land f(x) \in Y \land f(x) = y$ כלומר נגרר לפי טרנזיטיביות $y \in Y$ כדרוש.

- נניח $\forall Y \subseteq X.f[f^{-1}[Y]] = Y$, ונוכיח f על. נניח בשלילה ש־f לא על, כלומר קיים $b \in B$ עבורו $\nexists a \in A.f(a) = b$. נראה דוגמה נגדית להנחת השלילה. נבחר $Y = B$. לפי ההנחה נגרר $f[f^{-1}[B]] = B$, או כפי שכבר הוכח, $\forall b \in B.\exists x.x \in A \land f(x) = b$, כלומר $\forall b \in B.\exists x \in A.f(x) = b$, וזו סתירה להנחת השלילה (שאומרת שקיים b עבורו הטענה הזו לא מתקיימת), כלומר f על.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

שאלה 6

הגדרה

תהי פונקציה f. נגדיר שתי פונקציות:

$$f_{\rightarrow} \in \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B),\ f_{\rightarrow} = \lambda U \in \mathcal{P}(A).f[U]$$
$$f_{\leftarrow} \in \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A),\ f_{\leftarrow} = \lambda V \in \mathcal{P}(B).f^{-1}[V]$$

סעיף (א) - הוכחה

צ.ל.: f חח"ע גורר $f_{\rightarrow}$ חח"ע

הוכחה: נניח f חח"ע, נוכיח $f_{\rightarrow}$ חח"ע. באופן שקול, יהי $a_1, a_2 \in \mathcal{P}(A)$, כך ש־$a_1 \neq a_2$, נניח בשלילה $f_{\rightarrow}(a_1) = f_{\rightarrow}(a_2)$ ונראה סתירה. לפי הנחת השלילה, תוך שימוש בכלל β, נגרר $f[a_1] = f[a_2]$. באופן שקול, תוך שימוש בהגדרת תמונה, נסיק $\{f(x) \mid x \in a_1\} = \{f(x) \mid x \in a_2\}$ או באופן שקול:

$$\forall y.(\exists x_1 \in a_1.f(x_1) = y) \iff (\exists x_2 \in a_2.f(x_2) = y)$$

משום ש־f חח"ע, אז $x_1 = x_2$, ולכן לפי טרנזיטיביות אם קיים איבר ב־a_1 באופן שקול האיבר קיים ב־a_2, כלומר $\forall y.y \in a_1 \iff a \in a_2$, וסה"כ $a_1 = a_2$, בניגוד להנחת השלילה, כדרוש.

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב) - הוכחה

נתון: f על B, כלומר $\forall b \in B.\exists a \in A.f(a) = b$

צ.ל.: $f_{\rightarrow}$ על $\mathcal{P}(B)$, כלומר $\forall b \in \mathcal{P}(B). \exists a \in \mathcal{P}(A). f_{\rightarrow}(a) = b$

הוכחה: יהי $p_b \in \mathcal{P}(B)$, נוכיח קיום $p_a \in \mathcal{P}(A)$ כך ש־$f_{\rightarrow}(p_a) = p_b$. נבחר $p_a = f^{-1}[p_b]$. נסיק, $\forall x \in p_a . x \in A \wedge f(x) \in p_b$. נתבונן ב־$f[p_a]$, כלומר ב־$\{f(x) \mid x \in p_a\}$. נקבל את הקבוצה $C := \{f(x) \mid x \in A \wedge f(x) \in p_b\}$. נוכיח שוויון לקבוצה p_b באמצעות גרירה דו כיוונית;

- יהי $y \in C$, נוכיח $y \in p_b$. ידוע $\exists x . f(x) = y \wedge x \in A \wedge f(x) \in p_b$ מתוך עקרון ההחלפה, כלומר נוכל להציב ולקבל $y \in p_b$ כדרוש.
- יהי $y \in p_b$, נוכיח $y \in C$, כלומר את קיום $\exists x . f(x) = y \wedge x \in A \wedge f(x) \in p_b$. משום שמתוך המליאות של f ומהיות $y \in p_b$, אז קיים $z \in A$ כך ש־$f(z) = y$, וגם $f(z) \in p_b$ כלומר $y \in f(z)$ נבחר $x = z$, עליו כבר הוכח כל אשר הכרחי.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ∎

סעיף (ג) - סתירה

צ.ל.: לסתור f חח"ע גורר $f_{\leftarrow}$ חח"ע

הוכחה: נבחר:

$$A = \{0\}, B = \{0, 1\}, f = \{\langle 0, 0 \rangle\}$$

כמובן ש־f חח"ע כי הוא יחס זהות. עם זאת $f^{-1}[\{0\}] = \{0\} = f^{-1}[\{0, 1\}]$ אך $\{0\} = \{0, 1\}$ גורר $0 = 1$ וזה פסוק שקר.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ∎

סעיף (ד) - סתירה

צ.ל.: לסתור שבהינתן f על, אז $f_{\rightarrow}$ ח"ע

הוכחה: נבחר:

$$A = \{0\}, B = \{0, 1\}, f = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 0 \rangle\}$$

משום ש־f על, אז התנאי מתקיים. נמצא את $f_{\rightarrow}$: $f_{\rightarrow} = \{\langle \{0\}, \{0\} \rangle, \langle \{1\}, \{0\} \rangle, \langle \{0, 1\}, \{0\} \rangle\}$, שכמובן לא חח"ע.

$\mathcal{Q.E.D.}$ ∎

סעיף (ה) - הוכחה

צ.ל.: בהינתן f חח"ע, $f_{\leftarrow}$ על $\mathcal{P}(A)$.

הוכחה: נוכיח ש־$f_{\leftarrow}$ על $\mathcal{P}(A)$, כלומר יהי $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(A)$, נוכיח קיום $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(B)$ כך $f_{\leftarrow}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. לפי כלל β, צ.ל. $f_{\leftarrow}(\mathcal{B}) = f^{-1}[\mathcal{B}] = \mathcal{A}$. לפי הגדרת קבוצת המקורות, $f^{-1}[\mathcal{B}] = \{a \in A \mid f(a) \in \mathcal{B}\}$. נבחר את $\mathcal{A}$ להיות $\mathcal{B} = f[\mathcal{A}]$. לאחר הצבה, נוכיח בהכלה דו כיוונית ש־$\mathcal{A} = \{a \in A \mid f(a) \in f[\mathcal{A}]\}$.

- יהי $a \in \mathcal{A}$. נוכיח $a \in A \wedge f(a) \in f[A]$. התנאי הראשון מתקיים לפי הגדרה. נוכיח את התנאי השני, כלומר לפי הגדרת תמונה של קבוצה צ.ל. $f(a) \in \{f(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$ או לפי עקרון ההחלפה צ.ל. $\exists x \in \mathcal{A} . f(a) = f(x)$, נבחר $x = a$, נקבל $f(a) = f(a)$ שמתקיים לפי ח"ע של הפונקציה f.

- יהי $a \in \{a \in A \mid f(a) \in f[\mathcal{A}]\}$, כלומר $a \in A$ וגם $f(a) \in f[\mathcal{A}]$, נגרר ישירות $a \in A$ כדרוש.

שאלה 7

נתון

תהי A, B, C קבוצות לא ריקות. נתון:

$$H\colon ((B \cup C) \to A) \to ((B \to A) \times (C \to A))$$
$$H = \lambda h \in (B \cup C) \to A.\langle h|_B, h|_C \rangle$$

סעיף (א)

צ.ל.: H חח"ע

הוכחה: ויהי $x_1, x_2 \in B \cup C$. נניח $H(h_1) = y \wedge H(h_2) = y$, נוכיח $x_1 = x_2$. נתבונן בנתון $H(h_1) = H(h_2)$:

$$\begin{aligned}
& H(h_1) = H(h_2) \\
\iff & \langle h_1|_B, h_1|_C \rangle = \langle h_2|_A, h_2|_B \rangle && (\beta \text{ rule}) \\
\iff & h_1|_B = h_2|_B \wedge h_1|_C = h_2|_C && (\times \text{ definition}) \\
\iff & \forall x.(x \in h_1|_B \longleftrightarrow x \in h_2|_B) \wedge (x \in h_1|_C \longleftrightarrow x \in h_2|_C) && (A = B \text{ definition}) \\
\iff & \forall \langle x, y.(h_1(x) \in B \wedge f(x) = y \longleftrightarrow h_2(x) \in B \wedge f(x) = y \in B) \wedge [...] && (|_X \text{ definition}) \\
\iff & \forall \langle x, y \rangle.(h_1(x) \in B \longleftrightarrow h_2(x) \in B) && (\text{logic rules}) \\
\iff & \forall \langle x, y \rangle.h_1(x) = h_2(x) = y \\
\iff & h_1 = h_2 && (A = B \text{ definition})
\end{aligned}$$

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

סעיף (ב)

צ.ל.: H על אם ורק אם $B \cap C = \emptyset$

הוכחה: נפצל לשתי גרירות;

- נניח $B \cap C = \emptyset$. נוכיח H על. יהי $\langle f_1, f_2 \rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$, נוכיח קיום $h \in ((B \cup C) \to A)$ כך ש־$H(h) = \langle f_1, f_2 \rangle$. נבחר $h = f_1 \cup f_2$. נוכיח ש־h פונ׳, ונוכיח שהיא מקיימת את התנאי:
  - h פונ׳: נוכיח מליאות וחד ערכיות;
    - מליאות ב־$(B \cup C)$. יהי $x \in B \cup C$, נוכיח קיום $y \in A$ כך ש־$\langle x, y \rangle \in h$. נפצל למקרים: אם $x \in B$, נבחר $y = f_1(x) \in B$ כך ש־$\langle x, f_1(x) \rangle \in f_1 \cup f_2$ לפי הגדרה, ובאופן דומה במקרה השני נבחר $y = f_2(x)$.
    - חד־ערכיות: יהי $x \in B \cup C$, ויהי y_1, y_2 כך ש־$\langle x, y_1 \rangle \in h \wedge \langle x, y_2 \rangle \in h$. נוכיח $y_1 = y_2$. נניח בשלילה שלא כן. נפצל למקרים:
      - אם $x \in B \setminus C$, אז $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \notin f_2$ ולכן הם ב־f_1, ומשום ש־f_1 ח"ע אז $y_1 = y_2$.

- אם $x \in C \setminus B$, אז $\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \notin f_1$ ולכן הם ב־f_2, ומשום ש־f_1 ח"ע אז $y_1 = y_2$.
- אם $x \in C \cap B$ אז $x \in \emptyset$ והטענה נכונה באופן ריק.

◦ h מקיימת $H(h) = \langle f_1, f_2\rangle$: נשתמש בכלל β וכלל α, נקבל שצ.ל.:

$$\langle (f_1 \cup f_2)|_B, (f_1 \cup f_2)|_C\rangle = \langle f_1, f_2\rangle$$

שמתקיים באופן ברור (אפשר להוכיח את זה אבל זה נראה לי די מיותר), בהתחשב בזה שהתחומים של f_1 ו־f_2 הם A, B בהתאמה שהן קבוצות זרות.

- נניח H על, נוכיח $B \cap C = \emptyset$. נניח בשלילה שלא כן, ונראה דוגמה נגדית. לפי השקילות הלוגית $(\forall x.A) \wedge (\forall x.B) \iff \forall x.A \wedge B$, ניתן לבחור A, B, C עבור שאלה זו. נבחר:

$$A = \{0, 3\}, B = \{0, 1\}, C = \{1, 2\}$$

לפי היותה על, לכל $\langle f_1, f_2\rangle \in (B \to A) \times (C \to A)$ קיימת h כך ש־$H(h) = \langle f, f_2\rangle$. כחלק מהדוגמה הנגדית שלנו, נבחר $f_1 = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ ו־$f_2 = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle\}$. בניגוד לכך, קיום h כזו יגרור שחלק ממנה (הצמצום ב־A ששווה ל־f_1) יכלול $\langle 1, 3\rangle$, אך הצמצום ב־B יכלול $\langle 1, 0\rangle$, כלומר $\langle 1, 3\rangle \in h \wedge \langle 1, 0\rangle \in h$ וזו סתירה להיות h פונקציה (כלומר ח"ע).

$\mathscr{Q.E.D.}$ ■

~ סוף ~