לינארית 1א 4

שחר פרץ

20 בנובמבר 2024

MEANING OF MANY SOLUTIONS .... (1)

בשיעורים הקודמים דיברנו על שדה, מטריצות, ואז על משוואות ליניאריות. שמנו לב שכל מטריצה היא שקולה למטריצה מדורגת קאנונית. היום נתבונן במערכות משוואות בהן קבוצת הפתרונות יכולה להיראות כמו $\{(4-3t,t)\}$, או $\{4,x,y\}$. נוכל להסתכל על זה כקבוצה על $\mathbb{R}^3$, שנצייר אותה כמישור על המרחב התלת ממדי. במקרה הזה, מישור שמקביל למישור של y,z. ניזכר במשפט מהשיעור הקודם. **משפט.** בהינתן מערכות משוואות שיותר נעלמים ממשוואות אז:

1. אין פתרונות, או:
2. מספר הפתרונות לפחות $|\mathbb{F}|$.

הוכחה. נחלק למקרים. תהי A המטריצה המתאימה למערכת המשוואות. אזי קיימת B שקולת שורות קאנונית בָּ־A בעלת אותה מרחב פתרונות, ולכן נראה עבור B. אם שורה אחרונה שאיננה אפסים היא $0\dots1$, אז אין פתרונות (כי $1\neq0$). אחרת, קיימת שורה עם שני משתנים (משובך היונים – יש יותר משתנים ממשוואות). כלומר, קיים משתנה חופשי. כעת, נראה $|\mathbb{F}|$ פתרונות. לכל $x\in\mathbb{F}$ נבחן עבור המשתנה החופשי את הערך x ונפתור – נוכל לפתור בכלל שכל משוואה היא מהצורה $x+\sum\alpha_ix_i=b$, סה"כ $||\mathbb{F}|$ פתרונות.

■

מסקנה. בהינתן מערכת משוואות, אחד מהבאים מתקיים:

1. אין פתרונות
2. יש בדיוק פתרון אחד
3. יש לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

הוכחה. נסתכל על A קאנונית שקולה. אם יש שורה $(0,0,\dots,1)$ $\Longleftarrow$ אין פתרון.

אחרת, אם יש משתנה חופשי $\Longleftarrow$ לפחות $|\mathbb{F}|$ פתרונות.

אחרת, אין משתנה חופשי, והמטריצה מהצורה:

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&b_1\\0&1&\cdots&0&b_2\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&b_n\end{pmatrix}$$

והמשוואות הן $x_m=b_m$ ולכן פתרון יחיד. ■

הגדרה. מערכת משוואות שכל מקדמיה החופשיים הם 0 היא מערכת הומוגנית. [כלומר, ערכי ה־b הן 0]

הגדרה. הפתרון $x_1\dots x_n=0$ הוא הפתרון הטרוויאלי. [למערכת משוואות הומוגנית]

מסקנה(ות).

- למערכת הומוגנית [המורה מסמן ב"הומו'"] שבה מספר נעלמים גדול מהמשוואות, יש $|\mathbb{F}|<$ פתרונות.
- למערכת משוואות הומו' יש רק פתרון טרוויאלי או $|\mathbb{F}|$ לפחות.

INTRO. TO VECTORIC FIELDS .... (2)

הגדרה. בהינתן $\mathbb{F}$ שדה, מרחב וקטורי (לעיתים קרוי מרחב ליניארי) הוא $\langle V,\, a\colon V\times V\to V,\, m\colon\mathbb{F}\times V\to V\rangle$ כאשר a נקראן חיבור ו־m כפל בסקלר, המקיים תכונות:

1. חילופיות חיבור
2. אסוציאטיביות חיבור

3. קיום איבר אפס ניטרלי לחיבור (יסומן ב־0_V ולפעמים בתור 0)
4. קיום נגדי לחיבור (נסמן אותו ה־$-v$ לכל $v \in V$).
5. דיטרבוטיביות 1: $\forall\lambda \in \mathbb{F}.u, v \in V\colon \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
6. דיסטרבוטיביות 2: $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V\colon (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda v + \mu v$
7. אסוציאטיביות של כפל: $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{F}, v \in V.(\lambda\mu)v = \lambda(uv)$
8. לאיבר יחידה: $\forall v \in V.1 \cdot v = v$

סימון. $\lambda v = \lambda \cdot v = m(\lambda, v)$

2.1 דוגמאות

2.1.1 פתיחה

נסתכל על מרחב ה־n ־יות מעל $\mathbb{F}^n$. נגדיר:

$$\begin{aligned} g, x \in \mathbb{F}^n\colon\ & x + y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \\ & \lambda \cdot x = (\lambda x, \ldots, \lambda x_N) \\ & 0_r = (0\ldots0) \end{aligned}$$

זה לא שדה כי אין הופכי. נאמר שכל $v \in V$ הוא וקטור, ו־$c \in \mathbb{F}$ סקלר.

2.1.2 דוג' 2

גם $M_{n\times n}(F)$ הוא מרחב וקטורי (הדבר הזה של המטריצות).

2.2 הרחבות

הגדרה. בהינתן $w \subseteq V$, ו־V מ"ו (מרחב וקטורי), אז W תת פרחב וקטורי ביחס לפעולות המושרות מ־V אם:

(א) $0 \in W$

(ב) W שגורה לחיבור

(ג) W סגורה לכפל

טענה. תת מרחב וקטורי הוא מרחב וקטורי.

ניזכר בקבוצת הפתרונות $\{(x,y,0)\}$ שראינו קודם. או ב־$\{(x,x,0)\}$. הם כולם תת־מרחבים וקטורים של $\mathbb{R}^3$. ברור כי כל אחד מהצירים הוא גם מרחב וקטורי.

משפט. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית היא תת מרחב וקטורי ב־$\mathbb{F}^n$

אינטואיציה: נתבונן המערכת הבאה:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & c & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב הפתרונות הוא $\sum x_i\alpha a_i = 0$ לכל שורה. הוא סגור לחיבור; ax_1+by_1, ax_2, by_2 נקודות (x_1, y_1) וכו', נקבל $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)$.

2.3 המשך דוגמאות

2.3.1 דוג' 5

תהי $A \neq 0$ קבוצה. נגדיר $Funct(a,f) = \{f\colon A \to f\}$. נסמנה ב־$T$. T היא מרחב וקטורי מעל F עם הפעולות:

$$(f_1 = f_2)(a) := f_1(a) + f_2(a),\ (\lambda)f)(a) := \lambda f(a),\ 0_V(a) = 0$$

2.3.2 דוג' 6

פולינומים במשתנה אחד היא: $F[x] = \{a_nx^n + \cdots a_1x_1 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{F}\}$. גם הוא מרחב וקטורי.

הערה לגבי פולינומים: הוא לא תת קבוצה של $Funct(F,F)$ כי $x^p - x \equiv 0 \mod p$, הוא $0_{Funct(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)}$ (כלומר, זה לא עובד על F סופי).

טענה. יהי V מ"ו.

1. אם $\forall u, v, w \in V. u + v = u + w \implies v = w$
2. איבר האפס יחיד.
3. לכל $v \in V$, נגדי יחיד, ונסמן בתור $(-v)$.

הוכחה (1).

$$v = v + 0 = v + w - w = u + w - w = u$$

מותר להשתמש ב־$-w$ כי קיים הופכי, גם אם לא הוכחנו עדיין יחידות. ∎

הוכחה (2). נוכיח שאיבר האפס יחיד. יהיו w, w' איברי אפס. בכלל ש־w' נטירלי, ו־w ניטרלי, אז:

$$w = w + w' = w'$$

∎

הוכחה (3). יהי $v \in V$. יהיו m, w נגדיים. ידוע $m = w$ מטענה 1.

$$v + m = 0 = v + w$$

∎

טענה. יהי V מרחב וקטורי:

1. $\forall \lambda \in F \quad \lambda \cdot 0v = 0_v$
2. $\forall v \in V \quad 0 \cdot v = 0$
3. $\lambda v = 0 \implies \lambda = 0 \vee v = 0_V$
4. $\forall v \in V \quad -v = (-1)v$

הוכחה. 1. יהי $\lambda \in F$. יתקיים:

$$(\lambda \cdot 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_v + \lambda 0_v) \implies (0 = \lambda 0_V)$$

2.

$$0_F v = (0_F + 0_F)v = 0_F v + 0_F v \implies (0 = 0_F v)$$

3. נניח $\lambda v = 0$. אם $\lambda = 0$, סיימנו. אחרת

$$v = \lambda^{-1} \cdot \lambda 0 = \lambda^{-1} 0 = 0$$

4. נראה $(-1)v + v = 0$. ואכן,

$$-1 \cdot v + v = (-1 + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

מתוך דיסטריבוטיביות.

∎

DEVELOPING ON VECTORIC FIELDS .... (3)

משפט. יהי V מ"ו מעל שדה F, ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V. אזי, $U \cap W$ תמ"ו, ו־$U \cup W$ תמ"ו אמ"מ $U \subseteq W \vee W \subseteq U$.

הוכחה.

1. נראה ש־$T := U \cap W$ מקיים תחונות תמ"ו. ואכן $0 \in W \cap U \implies 0 \in W, 0 \in U$. בנוסף $\forall x, y \in Y. x + y \in V \wedge x + y \in W \implies x + y \in W \cap U$, כי $x, y \in W, x, y \in V$
   יהי $\lambda \in F$, $x \in T$. אזי:

$$\lambda x \neq 0, \lambda x \in w \implies \lambda x \in U \cap W = T$$

2. מכיוון אחד. בה"כ $U \subseteq W$, אז $T := V \cup W = W$ שהוא תמ"ו. מהכיוון השני, נניח $U \cup W$ תמ"ו. אם $U \subseteq W$, סיימנו. אחרת, $U \nsubseteq W$. אזי $\exists u \in U. u \neq w$. יהי $w \in W$. מסגירות, $u + w \in T$. נראה כי $u + w \notin W$. נניח בשלילה זאת, נקבל $u + w - w \in W$ כי W סגור לחיבור. סה"כ $u \in W$, וזו סתירה. לכן, $u + w \in U$. נגרר $u + w - u \in U$, מסגירות. לכן $w \in U$ ולכן $U \subseteq W$ כדרוש.

■

הגדרה. V מ"ו מעל F. $VW \in V$ תמ"ו. נגדיר $U + W = \{u + w \mid u \in V, w \in W\}$, אם $U \cap W = \{0\}$, נאמר שסכום זה הוא סכום ישר ונסמן $V \oplus W$.

משפט. V מו מעל שדה F, $U, W \subseteq V$ תמ"ו. נגרר $U + W$ תמ"ו של V.

הוכחה. נדע $0 \in V + W$ כי:

$$0_V + 0_W = 0$$

סגירות מתקיימת: קיימים $u_1, u_2 \in U$ ו־$w_1, w_2 \in W$ מתאימים כך ש־:

$$\forall x, y \in U + W. x = u_1 + w_1, y = u_2 + w_2 \implies x + y = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W}$$

וגם:

$$\exists u' \in U, w' \in W \quad x + y = u' + w'$$

סגורות לסלקר:

$$\lambda \in F, u + w = x \in U + w \implies \lambda x = \lambda(u + w) = \underbrace{\lambda u}_{\in U} + \underbrace{\lambda w}_{\in W}$$

■

טענה. V מ"ו מעל F, $U, W \subseteq V$. אזי $V + W$ סכום ישר אמ"מ כל וקטור בסכום ניתן להגדיר בצורה יחידה ע"י וקטור מ־U ווקטור מ־W.

הוכחה.

$\implies$ יהי $v \in V + W$. נניח $u + w = v,\ u' + w' = v$ כך ש־$u', u \in U,\ w, w' \in U$. מההנחה,

$$u' + w' = v = u + w \implies U \ni u - u' = w - w' \in W$$

לכן:

$$u - u' = w - w' \in W \cap U = \{0\}$$

ולכן $u = u',\ w = w'$.

$\impliedby$ יהי $x \in U \cap W$, נוכיח $x = 0$. נשים לב:

$$x = x + 0,\ x \in U, 0 \in W$$
$$x = 0 + x,\ x \in W, 0 \in U$$

מהיחידות נובע ש־$x = 0 \implies x = 0 \wedge 0 = x$.

■

BASE AND DIMENSSION .... (4)

הגדרה. $0 \leq S \ni \mathbb{Z}$, וקטורים $v_1 \dots v_s \in V$ וסקלרים $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{F}$. הצירוף הליניארי של $v_1 \dots v_s$ עם המקדמים $\lambda_1 \dots \lambda_s$ וה הוקטור:

$$\sum_{i=0}^{s} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s$$

אם $\lambda_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq s$ אז זהו צירוף טרוויאלי. אם $s = 0$ הצירוף הוא 0.

הגדרה. יהי $B = (v_1 \dots v_s) \in V^s$. V מ"ו. אז B בסיס אם לכל $v \in V$ קיים ויחיד צירוף ליניארי מהוקטורים ב־B. כלומר:

$$\exists! \lambda_1 \dots \lambda_s \in F \colon v = \sum x_i \lambda_i$$

אפשר גם להגדיר למרחבים אינסופיים. נראה הרחבה כזו בהמשך הקורס.

הגדרה. $e_i \in F^n$ מוגדר להיות $e_i \equiv (0, \dots 1, \dots 0)$ כאשר 1 רק בקורדינאטה ה־i. נאמר ש־$\{e_1 \dots e_n\}$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

משפט. V מ"ו מעל שדה F ו־V בסיס, אם יש לו בסיס B. אם B_1, B_2 בסיסים, אז $|B_1| = |B_2|$.

הגדרה. בעבור V מ"ו עם בסיס B, $\dim V := |B|$ (מוגדר היטב מהמשפט). בשיעור הבא נוכיח את המשפט.