מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 11

ניתן בתאריך 24.1.24. להגשה עד יום שלישי 30.1.24.

1. <u>הוכיחו/הפריכו:</u>

(א) עבור היחס $R_2 = \left\{\langle\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\rangle \in A^2 \,|\, ad = cb\right\}$ מעל $A = \left\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}^2 \,|\, b > 0\right\}$, הקבוצה הבאה היא מערכת נציגים:

$$\{\langle a,1\rangle \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\langle 1,b\rangle \mid b \in \mathbb{Z} \wedge b > 0\}$$

(ב) עבור היחס $R_3 = \left\{\langle f,g\rangle \in (\mathbb{R}\to\mathbb{R})^2 \mid \exists\delta > 0.\, \forall x \in (-\delta,\delta)\,.\, f(x) = g(x)\right\}$ מעל $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, הקבוצה הבאה היא מערכת נציגים:

$$\{f \in \mathbb{R}\to\mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}\setminus(-1,1)\,.\, f(x) = 0\}$$

2. כל אחד מהיחסים הבאים הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח). מצאו עבור כל אחד מהם מערכת נציגים, והוכיחו זאת.

(א) היחס Res על המספרים הממשיים, המוגדר באופן הבא: עבור $a,b \in \mathbb{R}$,

$$\langle a,b\rangle \in Res \iff b - a \in \mathbb{Z}$$

(כלומר $Res = \left\{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 \,|\, b - a \in \mathbb{Z}\right\}$)

(ב) עבור $E \subseteq \mathbb{N}$ קבועה, היחס $R_1 = \left\{\langle C,D\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid C \cap E = D \cap E\right\}$ מעל $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3. יהי S יחס שקילות (אין צורך להוכיח) מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המוגדר באופן הבא:

$$S = \left\{\langle\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle\rangle \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\right\}$$

(א) מהי מחלקת השקילות של $\langle 2,3\rangle$? פשטו את הקבוצה. מה היא מתארת?

(ב) מצאו את החלוקה של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המושרית מ-S. כלומר, כתבו מהי הקבוצה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/S$ ללא שימוש בסימון של מחלקת שקילות ובסימן S.
<u>הבהרה:</u> הכוונה היא שתמצאו כיצד נראות כל מחלקות השקילות. לדוגמה, החלוקה של $\mathbb{Z}$ המושרית מיחס השקילות $\equiv_3$ היא $\{\{3k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\}\}$.

(ג) מצאו מערכת נציגים ליחס השקילות S.

4. תהיינה Π_1, Π_2 שתי חלוקות של אותה קבוצה A. הוכיחו כי אם $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ אז $\Pi_1 = \Pi_2$.

5. הוכיחו את המשפטים הבאים שהיו בהרצאה:

(א) תהי Π חלוקה של קבוצה $A \neq \emptyset$.

i. היחס המושרה מ-Π הוא יחס שקילות על A.
<u>תזכורת:</u> היחס המושרה מחלוקה Π מוגדר באופן הבא: $R_\Pi = \bigcup_{X\in\Pi}(X \times X)$.

ii. החלוקה המושרית על A מהיחס המושרה מ-Π היא Π עצמה.
כלומר, הוכיחו $A/(R_\Pi) = \Pi$. אין צורך להוכיח שהחלוקה המושרית היא אכן חלוקה, הוכחנו זאת בהרצאה וניתן להסתמך על כך.

(ב) יהי S יחס שקילות מעל קבוצה A. אז יחס השקילות המושרה מהחלוקה המושרית מ־S הוא S עצמו. כלומר, הוכיחו $R_{A/S} = S$.

6. תהי X קבוצה כלשהי, ויהיו S, T חלוקות של X.

(א) הוכיחו כי $U = \{A \cap B \colon\ A \in S \wedge B \in T\} \setminus \{\emptyset\}$ חלוקה של X.

(ב) יהיו R_S, R_T, R_U יחסי השקילות המושרים מהחלוקות S, T, U בהתאמה. הוכיחו ש-$R_S \cap R_T = R_U$.

7. בהינתן S, T שתי חלוקות של קבוצה A, נאמר ש־S היא <u>עידון</u> של T אם לכל $X \in S$ קיים $Y \in T$ כך ש־$X \subseteq Y$.

(א) תנו דוגמה לשתי חלוקות שונות Π_1, Π_2 של הקבוצה $\{1,2,3,4\}$ כך ש־Π_1 היא עידון של Π_2.

(ב) יהיו R_1, R_2 יחסי שקילות מעל קבוצה A. הוכיחו: A/R_1 היא עידון של A/R_2 אם ורק אם $R_1 \subseteq R_2$.

8. (רשות) מצאו יחס שקילות על $\mathbb{N}$ שיש לו אינסוף מחלקות שקילות, כל אחת מהן אינסופית.