נוסחאות, משפטים והגדרות לחדו"א 1א

שחר פרץ

26 לאוקטובר 2025

הערה: עבור סטודנטים שלא למדו מהי נקודת התכנסות, אפשר להתייחס אליה כנקודה בה הגבול מוגדר (לדוגמה, לא בקצה קטע סגור).

הגדרה 1. $\mathbb{F}$ נקרא שדה אם יש לו פעולות $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו־$\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימות:

1. קומטטיביות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x+y=y+x$
2. אסוציאטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x+(y+z)=(x+y)+z$
3. קיום איבר 0 (יחידת חיבור): $\exists 0\in\mathbb{R}\colon \forall x\in\mathbb{R} x+0=x$
4. קיום נגדי (הופכי לחיבור): $\forall x\in\mathbb{R}\colon \exists y\in\mathbb{R}\colon x+y=0$
5. קומוטטיביות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x\cdot y=y\cdot x$
6. אסוציאטיביות: $\forall x,y,z,\in\mathbb{R}\colon (xy)z=x(yz)$
7. קיום ניטרלי לחיבור (קיום יחידה בכפל): $x\cdot 1=x$
8. קיום הופכי בכפל: $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\colon \exists y\in\mathbb{R}\colon xy=1$
9. דיסטרבוטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x(y+z)=xy+xz$

משפט 1. לכל $x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x+y=z+y) \implies x=z$

מסקנה 1. לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש־$x+y=0$.

סימון 1. יהי $x\in\mathbb{R}$. את המספר y המקיים $x+y=0$ נכנה הנגדי של x ונסמן $-x$.

משפט 2. לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$, אם $0\neq y\wedge xy=zy$ אז $x=z$.

מסקנה 2. לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ קיים $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ יחיד, כך ש־$xy=1$.

סימון 2. יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, את המספר המקיים $y\neq 0\wedge xy=1$ נכנה ההופכי של x ונסמן x^{-1}.

משפט 3. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x\cdot 0=0$.

משפט 4. $\forall x\in\mathbb{R}\colon (-1)\cdot x=-x$.

הגדרה 2. $\mathbb{F}$ נקרא שדה סגור מלא אם הוא שדה $(\mathbb{F},+,\cdot,<)$ כאשר $<$ מקיים:

1. אנטי־סימטריות חזקה: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y \implies x\not< y$
2. טרנזטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\wedge y<z) \implies x<z$
3. מליאות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y\vee x=y\vee y<x$
4. אדטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x<y \implies x+z<y+z$
5. ססקווי־כפליות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\wedge 0<z)\implies xz<yz$

משפט 5. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אם $x<y$ אז $-y<-x$.

משפט 6. לכל $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, אם $x<y\wedge z<w$ אז $x+z<y+w$.

הגדרה 3. תהא $A\subset\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלעיל של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq\alpha$.

הגדרה 4. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלרע של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $\alpha\leq a$.

הגדרה 5. A תקרא חסומה מלעיל כאשר קיים לה חסם מלעיל.

הגדרה 6. A תקרא חסומה מלרע אם קיים לה חסם מלרע.

הגדרה 7. A תקרא חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

הגדרה 8. α ייקרא חסם עליון (סופרמום) כאשר:

1. α חסם מלעיל, כלומר $\forall a\in A\colon a\leq\alpha$
2. החסימה הדוקה, כלומר $\forall\varepsilon>0\,\exists a\in A\colon a>\alpha-\epsilon$

משפט 7. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. אם יש ל־A חסם עליון, יש לה חסם עליון יחיד.

סימון 3. תהר $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נסמן את החסם העליון של A ב־$\sup A$.

סימון 4. חסם תחתון יקרא אינפימום ויסומן ב־$\inf A$.

הגדרה 9. שדה $\mathbb{F}$ יקרא $\mathbb{R}$ (ממשיים) אם הוא מקיים את אקסיומת השלמות (או אקסיומת החסם העליון): לכל $A\subseteq\mathbb{R}$. אם $A\neq\varnothing$ וגם A חסומה מלעיל, אז ל־A קיים חסם עליון.

למה 1. לכל $x\in\mathbb{Q}$, $x^2\neq 2$.

למה 2. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$, אם $x>0\wedge y>0\wedge x^2<y^2$ אז $x<y$.

משפט 8. $(\mathbb{Q},\cdot,+,<)$ אינה מקיימת את אקסיומת השלמות.

משפט 9. לכל $x\in\mathbb{R}$, אם $x>0$ אז קיים $y\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y>0$ וגם $y^2=x$.

משפט 10. לכל $x\in\mathbb{R}$, ולכל $n\in\mathbb{N}_+$, אם $x>0$ אז קיים $y\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y>0$ וגם $y^n=x$.

סימון 5. נסמן את ה־y היחיד שמקיים את המשפט לעיל ב־$\sqrt[n]{x}$.

משפט 11 (הארכימדיאניות של הטבעיים בממשיים).

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x>0 \implies (\exists n\in\mathbb{N}\colon nx>y)$$

משפט 12 (הסדר הטוב של הטבעיים בממשיים). לכל $A\subseteq\mathbb{N}$ אם קיים $A\neq\varnothing$ אז קיים איבר מינימלי ב־A.

מסקנה 3. לכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{Z}$ אם $A\neq\varnothing$ וחסומה מלרע, אז קיים איבר מינימלי ב־A.

מסקנה 4. לכל קבוצה $A\subseteq\mathbb{Z}$ אם $A\neq\varnothing$ וחסומה מלעיל, אז קיים איבר מקסימלי ב־A.

משפט 13. $\forall x\in\mathbb{R}.\,\exists! k\in\mathbb{Z}\colon k\leq x<k+1$

סימון 6. יהי $x\in\mathbb{R}$. אז השלם היחיד k המקיים $k\leq x<k+1$ יסומן ב־$\lfloor x\rfloor$ והוא יקרא ערך שלם תחתון.

משפט 14 (צפיפות הממשיים). יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אם x,y אז קיים $z\in\mathbb{R}$ כך ש־$x<z<y$.

משפט 15 (צפיפות הרציונליים בממשיים). יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אם x,y אז קיים $z\in\mathbb{Q}$ כך ש־$x<z<y$.

משפט 16 (א"ש ברנולי). $\forall x>-1.\,\forall n\in\mathbb{N}\colon (1+x)^n\geq 1+nx$

משפט 17 (זהות פסקל).

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

הגדרה 10. סדרה ממשית היא פונקציה $a(n)\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

הגדרה 11. לעיתים רבות תבחינו שמסמנים סדרות באמצעות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, או $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, או אפילו סתם a_n.

הגדרה 12. בהינתן סדרה, $a_n:=a(n)$

הגדרה 13. נאמר ש־a_n חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע כאשר הקבוצה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע.

הגדרה 14. אם a_n חסומה מלעיל, נסמן:

$$\sup a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

הגדרה 15. אם a_n חסומה מלרע, נסמן:

$$\inf a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

סימון 7. הסופרמום הוא $\sup A$ והוא חסם עליון, והאינפימום $\inf A$ הוא החסם התחתון.

הגדרה 16. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה (או מונוטונית עולה חלש) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m \implies a_n\le a_m$

הגדרה 17. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה ממש (או מונוטונית עולה חזק) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m \implies a_n< a_m$

הגדרה 18. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת (או מונוטונית יורדת חלש) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m \implies a_n\ge a_m$

הגדרה 19. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת ממש (או מונוטונית יורדת חזק) כאשר לכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים $n<m \implies a_n> a_m$

הגדרה 20. סדרה תקרא מונוטונית כאשר היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

הגדרה 21. תהא a_n סדרה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של a_n כאשר $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N\colon\ |a_n-\ell|<\varepsilon$.

למה 3. $\forall x\in\mathbb{R}.(\forall\varepsilon>0\colon\ |x|<\varepsilon)\implies x=0$

משפט 18 (א"ש המשולש).

$$||x|-|y||\le|x+y|\le|x|+|y|$$

מסקנה 5. תוצאה מא"ש המשולש

$$|x-y|\le|x-z|+|y-z|$$

משפט 19. תהא a_n סדרה. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. אם ℓ גבול של a_n אז ℓ גבול יחיד של a_n.

הגדרה 22. נאמר כי סדרה a_n מתכנסת כאשר קיים לה גבול $\ell\in\mathbb{R}$

הגדרה 23. אם a_n מתכנסת וגבולה (היחיד) הוא ℓ, נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$.

למה 4. קבוצה חסומה אמ"מ $\exists M>0\colon\forall a\in A\colon\ |a|\le M$.

משפט 20. תהא a_n סדרה. אם a_n מתכנסת, אז a_n חסומה.

משפט 21. תהאנה $a_n,\mathcal{B}$ סדרות. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$ ממשיים. נניח כי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\wedge\lim_{n\to\infty}b_n=m$. אז:

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\ell+m$$
2. $$\forall\alpha\in\mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty}(\alpha a_n)=a\ell$$
3. $$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\ell\cdot m$$
4. $$m\neq0\implies (\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N\colon b_n\neq0)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ell}{m}\right)$$

הגדרה 24. תהא a_n סדרה. נאמר כי a_n שואפת ל־$+\infty$ כאשר: $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N\colon a_n>M$

הגדרה 25. תהא a_n סדרה. נאמר כי a_n שואפת ל־$-\infty$ כאשר: $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N\colon a_n<-M$

משפט 22. תהיינה a_n,b_n סדרות. נניח $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty\wedge\lim_{n\to\infty}b_nb_n=+\infty$. אז $\lim_{n\to\infty}a_n+b_n=+\infty$

משפט 23. תהא a_n סדרה, יהי $\ell\in\mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\ell|$.

משפט 24. תהאנה a_n,b_n,c_n סדרות. נניח כי־:

1. $$\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N\colon a_n\le c_n\le b_n$$
2. $$\lim_{n\to\infty}a_n=\ell=\lim_{n\to\infty}b_n$$

אז $\lim_{n\to\infty}c_n=\ell$

משפט 25. תהנא a_n,b_n סדרות. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$. נניח כי:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a_n<b_n$. (הערה: מספיק גם אם החל מ־N כלשהו התנאי הזה מתקיים)

(2) מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$

(3) מתקיים $\lim_{n\to\infty}b_n=m$

משפט 26 (משפט ויירשטראס הראשון). תהא a_n סדרה. אם a_n מונוטונית וחסומה, אז a_n מתכנסת.

הגדרה 26. סדרה a_n תקרא בעלת גבול במובן הרחב אם $(\exists\ell\in\mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty}a_n=\ell)\vee\lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$.

משפט 27. בהינתן סדרה מונוטונית לא חסומה, היא שואפת ל־$\pm\infty$.

מסקנה 6. תהי a_n מונוטונית. אז ל־a_n יש גבול במובן הרחב.

משפט 28. נגדיר $a_n=\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ו־$b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. אז:

1. a_n חסומה, מונוטונית עולה וחסומה ב־3.
2. b_n חסומה, ומונוטונית עולה.
3. $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\le b_n$
4. $\forall n\in\mathbb{N}.\exists k>n\colon b_n\le a_{n+k}$

הגדרה 27. נסמן:

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

הגדרה 28. תהי פונקציה $n_k\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ סדרה עולה ממש של טבעיים, ותהא a_n סדרה. אז הסדרה $a_{(n_k)}$ נקראת תת־סדרה של a_n. פורמלית, זוהי הרכבה $a_n\circ n_k$.

הגדרה 29. ℓ יקרא גבול חלקי של ℓ כאשר קיימת ת"ס של a_n המתכנסת ל־ℓ.

הגדרה 30. $\pm\infty$ יקרא גבול חלקי של a_n, כאשר קיימת ת"ס השואפת ל־$\pm\infty$.

משפט 29 (משפט הרקורסיה). תהא $f\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. יהי איזשהו $a\in\mathbb{R}$. אז קיימת סדרה יחידה a_n המקיימת:

$$\begin{cases}a_0=a\\ \forall n\in\mathbb{N}\colon a_{n+1}=f(n,a_n)\end{cases}$$

משפט 30 (משפט בוצלנו־וייראסטראס). לכל סדרה חסומה, יש ת"ס מתכנסת.

למה 5. תהא a_n סדרה. נניח של־a_n אין איבר מקסימלי. אז יש לה תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

למה 6. תהא a_n סדרה שבה אינסוף איברים שונים. אם ל־a_n אין ת"ס מונוטונית עולה ממש, אז יש לה ת"ס מונוטונית יורדת ממש.

משפט 31. $\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\ge N\colon\ |a_n-\alpha|<\varepsilon$ אמ"מ לקבוצה יש גבול חלקי ב־α.

מסקנה 7. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

משפט 32. סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

משפט 33. תהא a_n סדרה חסומה ויהי $\ell\in\mathbb{R}$. נניח כי כל ת"ס מתכנסת של a_n מתכנסת ל־ℓ. אז $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$.

סימון 8. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים של a_n נסמן $\hat{P}(a_n)$.

סימון 9. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים הסופיים (כלומר לא $\pm\infty$) של a_n נסמן $P(a_n)$.

מסקנה 8. לכל a_n סדרה, $\hat{P}(a_n)\neq\varnothing$.

משפט 34 (סגירות סדרתית של קבוצת הגבולות החלקיים). תהא a_n סדרה, חסומה. תהא b_n סדרה, המקיימת:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ש־$b_n \in P(a_n)$
2. b_n מתכנסת ל־ℓ

אז $\ell \in P(a_n)$.

משפט 35. תהא a_n חסומה. אז ל־P יש מקסימום ומינימום.

משפט 36. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \varnothing$. אם A חסומה מלעיל, אז קיימת סדרה $a_n \colon \mathbb{N} \to A$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

סימון 10. תהי a_n סדרה. נסמן ב־$\limsup_{n\to\infty} a_n$ את הגבול החלקי הגדול ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבול עליון.

סימון 11. תהי a_n סדרה. נסמן ב־$\liminf_{n\to\infty} a_n$ את הגבול החלקי הקטן ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבו לתחתון.

משפט 37. תהא a_n חסומה מלעיל. בהינתן $\ell \in \mathbb{R}$ הגבול העליון של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

1. $a_n < \ell + \varepsilon$ כמעט תמיד.
2. $a_n > \ell - \varepsilon$ שכיח.

משפט 38. תהא a_n סדרה חסומה. אז לכל $\varepsilon > 0$ כמעט תמיד:

$$\liminf a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

סימון 12. בהינתן $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ כלשהי:

$$\inf_n F(n) = \inf\{F(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \sup_n F(n) = \sup\{F(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הגדרה 31. תהא a_n סדרה. נאמר ש־a_n סדרת קושי, כאשר:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N \colon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

הגדרה 32. פונקציה $N \colon X \times X \to \mathbb{R}$ נקראת נורמה אם:

1. **אי־שליליות ולא מנוונת:** לכל $x, y \in \mathbb{R} \colon N(x,y) \geq 0$ ו־$N(x,y) = 0$ אמ"מ $x = y$.
2. **סימטריות:** $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon N(x,y) = N(y,x)$
3. **א"ש המשולש:** $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon N(x,z) \leq N(x,y) + N(y,z)$

משפט 39. תהא a_n סדרה. אז a_n מתכנסת אמ"מ a_n סדרת קושי.

משפט 40. תהא a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־0. אז $\forall x > 0 \colon \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = 1$.

משפט 41. תהא a_n סדרת רציונלים מתכנסת. אז לכל $x \geq 0$ הסדרה x^{a_n} מתכנסת.

משפט 42. בהינתן a_n, b_n סדרות רציונליים שתיהן מתכנסות לאותו הגבול, אז $\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{b_n}$.

הגדרה 33. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ו־$x > 0$. נגדיר $x^\alpha := \lim_{n\to\infty} x^{a_n}$ כאשר a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־α.

משפט 43. תהא a_n סדרה (לא בהכרח סדרת רציונליים) ויהי $x > 0$. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אמ"מ $\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = x^a$.

משפט 44. חזקות ממשיות מקיימות חוקי חזקות.

משפט 45. אם $\lim_{n\to\infty} a_n \to L$ אז $\lim_{n\to\infty} |a_n| \to L$.

משפט 46 (עקרון המקוננים של קנטור). תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. $\forall n \in \colon a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$
2. $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

אז:

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

משפט 47 (מבחני התכנסות לסדרות).

- **מבחן המנה הגבולי:** תהא a_n חיובית ונניח $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ell$. אם $\ell < 1$ אז $a_n \to 0$, ואם $\ell > 1$ אז $a_n \to \infty$.
- **מבחן המנה המוכלל:** בהינתן a_n חיובית, אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שהמ"מ $a_{n+1} < La_n$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- **מבחן השורש:** תהא a_n סדרה חיובית. נניח $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. אם $\ell < 1$ אז $a_n \to 0$, ואם $L > 1$ אז $a_n \to \infty$.
- **הלמה של שטולץ:** תהאנה a_n, b_n סדרות ונניח ש־b_n מונוטונית ממש ו־$b_n \to +\infty$. אם קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ אז קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ וגבולותיהם שווים (לופיטל 2 בדיד).

משפט 48. לכל $a, b > 0$, אם $a \neq 1$ אז קיים ויחיד $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$a^x = b$.

מסקנה 9. הפונקציה $\log_a(x)$ מוגדרת היטב.

הגדרה 34. תהא a_n סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של a_n להיות:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

סימון 13. תהא a_n סדרה. תהי ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. אז אם S_n מתכנסת לגבול $\ell \in \mathbb{R}$ נאמר כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, ונסמן:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

משפט 49 (קריטריון קושי להתכנסות טורים). תהא a_n סדרה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \forall N \leq n \leq m \colon \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

מסקנה 10. תהא a_n סדרה. אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

משפט 50. הטור הוא לינארי, כלומר יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים.

הגדרה 35. תהא a_n סדרה. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט 51. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא בפרט מתכנס.

משפט 52. תהא a_n סדרה, ונניח ש־$\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \geq 0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

משפט 53 (קריטריוני השוואה להתכנסות טורים).

1. **מבחן ההשוואה הראשון:** תהיינה a_n, b_n סדרות אי־שליליות. נניח כי כמעט תמיד $a_n \leq b_n$. אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. **מבחן ההשוואה הגבולי:** נניח $\forall n \in \mathbb{N} \colon b_n > 0$ (חיובית ממש!) ונניח $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to \ell$ וכמו כן $\ell > 0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
3. **מבחן השורש:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח כי קיים $q \in (0,1)$ כך ש־$\forall n \in \mathbb{N} \colon \sqrt[n]{a_n} \leq q$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
4. **מבחן השורש הגבולי:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח ש־$\exists q \in [0,1) \colon \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} < q$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5. **מבחן המנה:** נניח $a_n > 0$ כמעט תמיד ויהי $q \in (0,1)$, ונניח $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ (כמעט תמיד) אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
6. **מבחן המנה הגבולי:** יהי $0 < a_n$. נסמן $\ell = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ו־ $m = \liminf n \to \infty \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז אם $\ell < 1$ אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס, ואם $m > 1$ אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר.
7. **מבחן העיבוי:** תהא a_n סדרה מונוטונית יורדת ואי־שלילית אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסת אמ"מ $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2n}$ מתכנסת.

משפט 54 (קירוב סטרלינג).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{e\pi n}} = 1$$

משפט 55. הטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אמ"מ $\alpha > 1$.

משפט 56 (משפט לייבניץ). תהא a_n סדרה חיובית ומונוטונית יורדת שגבולה 0. אז:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$$

מתכנס.

משפט 57 (קריטריון אבל להתכנסות). תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. b_n מונוטונית (יורדת) (אבל לא בהכרח גבול 0).
2. נניח $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

אז $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ מתכנס.

משפט 58 (התכנסות טור גיאומטרי). (התכנסות אמ"מ $|r| < 1$):

$$\sum_{k=0}^n a_0 r^k = a_0 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a_0}{1-r}$$

משפט 59.

$$\sum_{k=1}^n k = \binom{n}{2} \qquad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

משפט 60 (קריטריון דיריכלה להתכנסות). תהאנה a_n, b_n סדרות.

1. b_n מונוטונית (יורדת) וגבולה 0.
2. סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל־a_n חסומה (אבל לא בהכרח מתכנסת).

אז $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ מתכנס.

משפט 61. תהא a_n סדרה, נניח כי הטור $\sum_{n=1}^\infty$ מתכנס, אז לכל השמה של סוגריים על הסכום, הטור החדש מתכנס.

משפט 62. לכל a_n סדרה, ונניח כי קיימת השמה של סוגריים שבה:

- הטור המתאים מתכנס
- בתוך כל סוגריים, כל האיברים בעלי אותו הסימן

השמת הסוגריים לא תשנה את הגבול.

משפט 63. תהא a_n סדרה מתכנסת. אז לכל $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$, אז $\hat{\mathcal{P}}(a_{\sigma(n)}) = \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

משפט 64. תהא a_n חיובית. נניח ש־$\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס. אז כל תמורה של הגבול מתכנסת לאותו הגבול.

משפט 65. תהא a_n סדרה. נניח כי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס בהחלט. אז לכל תמורה σ של a_n, הטור המתאים מתכנס לאותו הסכום.

משפט 66 (משפט רימן). תהא a_n סדרה. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס בתנאי. אז לכל $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$ (במובן הרחב) קיימת תמורה $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ כך ש־S_n סדרת הסכומים החלקיים של $a_{\sigma(n)}$, מקיימת:

$$\liminf S_n = \alpha \qquad \limsup S_n = \beta$$

משפט 67. תהא a_n סדרה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ונניח כי $\sum_{n=0}^\infty a_n(x_0-a)^n$ מתכנס. אז לכל $x \in \mathbb{R}$ אם $|x-a| < |x_0 - a|$ אז $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ מתכנס.

משפט 68 (משפט אבל). תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. קיים מספר יחיד $R \ge 0$ כך ש־

1. $\forall x \in (a-R, a+R)\colon \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ converges
2. $x \notin [a-R, a+R]\colon \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ diverges

החלק הזה נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור, והתחום נקרא תחום ההתכנסות.

משפט 69. תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נסמן $\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. אז:

- אם $\omega = 0$, אז $R = +\infty$.
- אם $\omega = +\infty$, אז $R = 0$.
- אחרת $R = \frac{1}{\omega}$.

(זה ה־R היחיד מאבל)

הגדרה 36. יהי $x \in \mathbb{R}$. לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, יקרה סביבת ε של x.

הגדרה 37. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא $U \subseteq \mathbb{R}$, ויהי $x \in U$. אז U תקרא סיבה של x אם קיים $\varepsilon > 0$ עבורו U מכילה סביבת ε של x.

הגדרה 38. קבוצה U תקרא פתוחה כאשר היא סביבה של כל אחת מהנקודות שלה.

הגדרה 39. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא סגורה כאשר $\bar{A}$ פתוחה (עולם דיון $\mathbb{R}$).

משפט 70. A סגורה אמ"מ היא סגורה סדרתית.

הגדרה 40. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. אז $x \in \mathbb{R}$ תקרא נקודת־סגור של A, כאשר $\forall \varepsilon > 0\colon (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \ne \varnothing$ (כלומר כל סביבה של x מכילה איבר מ־A)

משפט 71. A סגורה אמ"מ כל נקודת סגור של A נמצאת ב־A.

הגדרה 41. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא קומפקטית כאשר A סגורה וחסומה.

משפט 72. A קומפקטית אמ"מ לכל כיסוי שלה יש תת־כיסוי סופי.

משפט 73. $A \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית אמ"מ לכל סדרה a_n, אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ל־a_n יש ת"ס מתכנסת שגבולה ב־a_n.

הגדרה 42. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא U סביבה של x. אז $U \setminus \{x\}$ נקראת סביבה נקובה של x.

הגדרה 43. תהא $U \subseteq \mathbb{R}$. $x \in \mathbb{R}$ תקרא נקודת הצטברות של A כאשר לכל סביבה **נקובה** U של x, מתקיים $U \cap A \ne \varnothing$.

הגדרה 44. התמונה של f היא $\operatorname{Im} f := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A\colon f(a) = x\}$

הגדרה 45. התחום של f הוא $\operatorname{dom} f = A$.

ניתן להגדיר מנה, כפל, מכפלה, חיבור, חיסור, כפל בקבוע של פונקציות, וכו'.

הגדרה 46. f תקרא חסומה כאשר $\operatorname{Im} f$ חסומה.

הגדרה 47. f תקרא מונוטונית עולה כאשר $\forall x \le y \in A\colon f(x) \le f(y)$

בדומה לסדרות, נגדיר עולה ממש, יורדת ויורדת ממש.

הגדרה 48. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות

של A, ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של f ב־x_0 כאשר:

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists \delta > 0.\, \forall x \in A\colon 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

משפט 74. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודות הצטברות של A. יהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. אם ℓ גבול של f ב־x_0 וגם m גבול של f ב־x_0 אז $\ell = m$.

(יש 8 הגדרות נוספות שמרחיבות את המושג לאינסוף)

משפט 75. לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, אין ל־D גבול ב־x_0.

הגדרה 49. פונקציית רימן $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_x} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כאשר m_x, n_x הפירוק היחיד של $x \in \mathbb{Q}$ כך ש־$x = \frac{m}{n}$ וגם $\gcd(m, n) = 1$.

משפט 76. לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$.

משפט 77. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי עבור כל סדרה a_n המקיימת:

1. $\operatorname{Im} a_n \subseteq A$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq x_0$
3. $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

את $f(a_n)$ מתכנסת, אז קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך שלכל סדרה a_n המקיימת את 1-3, $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.

משפט 78. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. ל־f יש גבול ב־x_0 אמ"מ לכל סדרה a_n, אם a_n מקיימת את 1-3 מהטענה הקודמת, $f(a_n)$ מתכנסת.

משפט 79. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. אם קיים ל־f גבול סופי ב־x_0, קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה f חסומה.

משפט 80. תהאנה $f, g \in A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ונניח כי A אינה חסומה מלעיל [כלומר אינסוף הוא נקודת הצטברות]. נניח כי g חסומה וכי הגבול $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$. אז $\lim_{x \to \infty} f(x) + g(x) = -\infty$.

משפט 81. תהאנה $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x, $f(x) \leq g(x)$. נניח כי $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

משפט 82. תהנה $f, g, h\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. נניח $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$. אז $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

משפט 83. תהאנה $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. נניח $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = m$.

1. אם קיימת סביבה של x_0, כל שלכל x בה $f(x) \leq g(x)$ אז $\ell \leq m$.
2. אם $\ell < m$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x בה $f(x) < g(x)$.

משפט 84. תהאנה $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R},\ g\colon B \to \mathbb{R}$. תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהיו $y_0, \ell \in \mathbb{R}$. נניח כי:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
2. קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל $f(x) \neq y_0$.
3. $\lim_{x \to y_0} g(x) = \ell$

אז $\lim_{x \to x_0} g \circ g(x) = \ell$.

הערה 1. גם כאן המרצה עשה עברה – יש כאן הנחה ש־y_0 נקודת הצטברות של B. זה בסדר, כי באמצעות 1 ו־2 אפשר להראות ש־y_0 נקודת הצטברות של B בכל מקרה.

הגדרה 50. תהא $f\colon A \to B$ פונקציה. תהי ת"ק $C \subseteq A$. נגדיר $g\colon C \to B$ על־ידי $g(x) = f(x)$ לכל $x \in B$. g נקראת הצמצום של f ל־C ומסמנים $g = f|_C$.

משפט 85.
1. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $B \subseteq A$ ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$. אם x_0 נקודת הצטברות של B אז $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
2. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהאנה $B, C \subseteq A \setminus \{x_0\}$ כך ש־$A = B \cup C$. אם $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A אז x_0 נקודת הצטברות של B או ש־x_0 נקודת הצטברות של C (ה"או" לא בהכרח xor).

מה שנעשה עכשיו על ת"קים ספציפיים, היה אפשר לעשות על כל תת־קבוצה.

נגדיר את הסימון הבא לסיכום הזה בלבד (הוא לא מקובל). תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נסמן $A_{x_0^+} :== A \cap (x_0, +\infty)$. נגדיר את $A_{x_0^-} :== A \cap (-\infty, x_0)$.

מהמשפט הקודם, אם x_0 נקודת הצטברות של A, אז x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן של $A_{x_0^-}$.

הגדרה 51. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $\{x \in A \mid x > x_0\}$ וגם קיים הגבול של $f|_{\{x \in A \mid x > x_0\}}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

הגדרה 52. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $\{x \in A \mid x < x_0\}$ וגם קיים הגבול של $f|_{\{x \in A \mid x < x_0\}}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

משפט 86. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהי $\ell \in \mathbb{R}$ ונניח $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$. אז אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$, אז $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$, אז $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

משפט 87. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהי $\ell \in \mathbb{R}$.

1. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$, אז $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ גורר ש־$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

אחרת [כלומר x_0 אינה נקודת הצטברות של אחת מהקבוצות]:

2. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$ אז $\lim_{x \to x_0^-} = \ell$ גורר $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד השלילי – זה יקבע את הגבול]
3. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ אז $\lim_{x \to x_0^+} = \ell$ גורר $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד החיובי – זה יקבע את הגבול]

משפט 88. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. ל־f יש גבול סופי ב־x_0 אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$, כך שלכל $x, y \in A$ אם $0 < |x - x_0| < \delta$ וגם $0 < |y - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

הגדרה 53. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in A$. נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם:

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists \delta > 0.\ \forall x \in A\colon\ (|x - x_0| < \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

משפט 89. תהא $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in A$. אם $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A, אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

הגדרה 54. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$. נניח ש־f אינה רציפה בה. אז:

- אם 1-2 מתקיים (מהמיון לעיל) אז x_0 תקרא אי־רציפות סליקה.
- אחרת, אם רק 1 מתקיים, x_0 תקרא אי־רציפות מסוג ראשון.
- אחרת, רק 2 מתקיים, ו־x_0 תקרא אי־רציפות מסוג שני.

משפט 90. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה. אז לכל $x_0\in I$, יש ל־f גבול סופי משמאל ב־x_0 וגם גבול סופי מימין.

משפט 91 (אריתמטיקה של רציפות). תהאנה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$. נניח כי f רציפה ב־x_0 וכן g רציפה ב־x_0. אז:

- $f\pm g$ רציפה ב־x_0
- $f\cdot g$ רציפה ב־x_0.
- אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0.

משפט 92. תהאנה $f\colon A\to B$ ו־$g\colon B\to\mathbb{R}$, ותהא $x_0\in A$. נניח כי f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$f(x_0)$. אז $g\circ f$ רציפה ב־x_0.

משפט 93.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

משפט 94.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

משפט 95.
$$\frac{e^x-1}{x}=1$$

הגדרה 55. פונקציה f היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

משפט 96. תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$. אז f רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}$ קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}$ כך ש־$A\cap U=f^{-1}(V)$.

הגדרה 56. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ כאשר I קטע. נאמר כי f מקיימת תכונת דרבו כאשר לכל $a,b\in R$ כך ש־$a<b$, לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ בין $f(a)\leq\lambda\leq f(b)$. קיים $c\in[a,b]$ כך ש־$f(x)=\lambda$.

משפט 97 (משפט ערך הביניים). פונקציה רציפה מקיימת את תכונת דרבו.

משפט 98 (משפט ויירשטראס (עוד אחד)). תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$ רציפה. אם A קומפקטית (סגורה וחסומה) אז f חסומה ומשיגה את חסמיה (יש לה מינימום ומקסימום).

משפט 99. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת תכונת דרבו. אז ל־f אין נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג ראשון.

מסקנה 11. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$. אם f מקיימת תכונת דרבו ומונוטונית, היא בהכרח רציפה.

הגדרה 57. f רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in A$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

משפט 100. אם f רציפה במידה שווה ב־A אז f רציפה ב־A.

משפט 101. תהאנה $f,g\colon A\to\mathbb{R}$. נניח כי f רציפה במידה שווה ב־A וגם g רציפה במידה שווה ב־A. אז:

- $f\pm g$ רציפה במידה שווה ב־A.
- אם f ו־g חסומות ב־A, אז fg רציפה במידה שווה.

משפט 102 (משפט קנטור). תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$. אם f רציפה ב־A וגם A קומפקטית, אז f רציפה במידה שווה ב־A.

משפט 103. יהיו $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. נניח $a<b$. יהי $a<c<b$. תהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה במידה שווה ב־$(a,c]$ וכן f רציפה במידה שווה ב־$[c,b)$, אז f רציפה במידה שווה ב־(a,b).

משפט 104. הפונקציה $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[0,\infty)$.

משפט 105. תהא $f\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח f רציפה וגם קיים וסופי $\lim_{x\to\infty}f(x)$. הראו כי f רציפה במ"ש ב־$[a,\infty)$.

משפט 106. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ונניח $a<b$. תהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה. אז f רציפה במידה שווה ב־(a,b) אמ"מ קיימים ל־f הגבולות ב־a וב־b והסם סופיים.

הגדרה 58. בהינתן $f\colon I\to\mathbb{R}$, וכן $x_0\in I$ בפנים הקטע (איננה נקודת קצה). נאמר ש־f גזירה ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

סימון 14. בהנחה שהגבול ב־x_0 של הפונקציה f קיים, נסמן $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ או $f'(x_0)$.

משפט 107. f גזירה ב־x_0 אמ"מ קיים וסופי:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

הגדרה 59. תהי $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$ בפנים הקטע. f תקרא דיפרנציאבילית ב־x_0 כאשר קיימת העתקה לינארית $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת שהגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{x-x_0}=0$.

משפט 108. פונקציה היא דיפרנציאבילית ב־x_0 אמ"מ היא גזירה ב־x_0 (ב־$\mathbb{R}$).

משפט 109. תהי $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in I$ בפנים הקטע. אם f גזירה ב־x_0 אז f רציפה ב־x_0.

הגדרה 60. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ המקיימת $\exists\delta>0\colon(x_0-\delta,x_0)\subseteq I$. אז נאמר שנאמר ש־$f$ גזירה משמאל ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הגדרה 61. גגזרת מימין מוגדרת באופן דומה

סימון 15. נסמן את הגזירה משמאל ב־$f'_-(x_0)$ ומימין $f'_+(x_0)$.

משפט 110. יהיו $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f,g גזירות ב־x_0. אז:

- לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים $\alpha f+\beta g$ גזירה ב־x_0 וכן $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$ (הנגזרת לינארית)
- מתקיים ש־fg גזירה ב־x_0 ומתקיים ש־$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x)+f(x_0)g'(x_0)$.
- אם $g(x_0)\neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה ב־x_0 ומתקיים:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

משפט 111. תהא $f\colon I\to J$ ותהא $g\colon J\to\mathbb{R}$. נניח $x_0\in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f גזירה ב־x_0 וגם g גזירה ב־x_0. אז $g\circ f$ גיזרה ב־x_0 וכן $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.

משפט 112. תהא $f\colon I\to J$ פונקציה גזירה חח"ע ועל, כאשר I,J קטעים פתוחים (אפשר להכליל לקטעים אחרים). אז f^{-1} גזירה בכל נקודה ב־J ומתקיים:
$$\forall y\in J\colon(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

משפט 113 (המשפט הלא אחרון של פרמה). תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in I$ בפנים הקטע. נניח f גזירה ב־x_0 ונניח של־f יש קיצון מקומי ב־x_0. אז $f'(x_0)=0$.

הגדרה 62. ל־f יש מקסימום מקומי ב־x_0 כאשר קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $f(x)\leq f(x_0)$.

הגדרה 63. מינימום מקומי בדומה.

משפט 114 (משפט רול). תהא $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. נניח ש־$f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b), $f(a)=f(b)$. אז קיימת $c\in(a,b)$ שבה $f'(c)=0$.

משפט 115 (משפט ערך הביניים של לגראנג'). תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b). אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

משפט 116. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I וכי לכל $x\in I$ מתקבל $f'(x)=0$. הראו כי f קבועה.

משפט 117. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I. הראו ש־f עולה ב־I אמ"מ $\forall x\in I\colon f'(x)\geq 0$.

משפט 118 (משפט דרבו). תהא $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה ב־(a,b). אז $f'\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ מקיימת את תכונת דרבו.

משפט 119 (משפט קושי). יאי עוד משפט קושי. תהאנה $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי שתיהן רציפות ב־$[a,b]$, שתיהן גזירות ב־(a,b), ולכל $x\in(a,b)$, מתקיים $g'(x)\neq 0$. אז $g(b)\neq g(a)$ וגם קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

משפט 120 (משפט לופיטל 1). תהאנה $f,g\colon T\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$. נניח ש־$a$ נקודת הצטברות של $I\setminus\{a\}$. עוד נניח ש־f,g רציפות ב־$I\setminus\{a\}$ וכן f,g גזירות ב־$I\setminus\{a\}$. נניח ש־$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ (במקרים האחרים אפשר פשוט להשתמש בכללי גבולות כרגיל), וכן קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$. תחת כל התנאים הללו $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ (כאשר a ו־ℓ מוגדרים במובן הרחב).

משפט 121 (משפט לופיטל 2). תהאנה $f,g\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ כאשר I קטע ו־a נקודת הצטברות. נניח ש־f,g גזירות ב־$I\setminus\{a\}$ ו־$\forall x\in I\setminus\{a\}\colon g'(x)\neq 0$. עוד נניח ש־$\lim_{x\to a}|g(x)|\to\infty$ (המקרה היחיד שבאמת מעניין אותנו זה כשגם f שואף לאינסוף בנקודה) וקיים $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$. אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וערכו ℓ.

הגדרה 64. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. ניתן להגדיר רקורסיבית את $f^{(n+1)}(x_0):=(f^{(n)}(x_0))'$ כאשר $f^{(0)}=f$ בסיס. נבחין שלשם כך נדרוש ש־$f^{(n)}$ מוגדרת בסביבה של x_0.

סימון 16. לעיתים $f^{(n)}$ תסומן גם ב־$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$.

הגדרה 65. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. נגדיר את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0 ע"י:

$$T_n(x):=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

ואת השארית להיות:

$$R_n(x):=f(x)-T_n(x)$$

1. T_n גזירה מכל סדר
2. R_n גזירה n פעמים ב־x_0
3. לכל $i\in[n]\cup\{0\}$ בהכרח $R_n(x_0)=0$ וכן $T_n(x_0)=f^{(n)}(x_0)$

משפט 122. מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

מסקנה 12. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. אז קיימת $\omega\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת $\omega(x_0)=0$ ו־ω רציפה בנקודה x_0, וגם:

$$R_n(x)=\omega(x)(x-x_0)^n$$

למה 7. בהינתן $f,g\colon A\to\mathbb{R}$ וכן x_0 נקודת הצטברות של A, אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell>0$ וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$ אז מתקיים $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\ell^m$.

משפט 123. תהא $f(x)\colon I\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ב־I ו־$x_0\in I$ (בפנים הקטע). נניח כי $f'(x_0)=0$. אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 מינימום. אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום.

משפט 124. יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ גזירה $n+1$ פעמים ב־x_0. נניח $f^{(i)}(x_0)=0$ וגם $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. אז אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אז יש ל־f מינימום ב־x_0. אם $f^{(n+1)(x_0)<0}$ אז יש ל־f מקסימום ב־x_0. באותם התנאים, אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אז אין קיצון, יש פיתול.

משפט 125. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ נקודת ספנים. נניח f גזירה n פעמים ב־x_0. נסמן ב־T_n את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0. נסמן ב־R_n את השארית המתאימה. אז:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

סימון 17. נגדיר את $C^{(n+1)}(A)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות ב־I.

משפט 126. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ בפנים הקטע. נניח כי f גזירה $n+1$ פעמים בכל I ונגזרותיה רציפות (כלומר $f\in C^{(n+1)}$). לכל $x\in I$ קיים c בין x_0 ל־x כך ש־:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

הגדרה 66. מסמנים ב־$C^\infty(A)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות (ובפרט רציפות) מכל סדר ב־A.

משפט 127. תהא $f\in C^\infty(A)$. אם קיים $M>0$ כך ש־$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in I\colon \left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ ("הנגזרות חסומות באופן אחיד"), אז טור טיילור של f מתכנס ל־f בכל I.

משפט 128. יהי $\leq p\leq n+1$ ונתבונן בפונקציה $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ פנימית. יהי $n\in\mathbb{N}^+$ ונניח כי f גזירה $n+1$ פעמים ב־I. אז לכל $x\in I$ קיים c בין x_0 ל־x כך ש־$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{p\cdot n!}(x-x_0)^p(c-x_0)^{n+1-p}$.

משפט 129.

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$