לינארית 2א 18 ~ המשפט הספקטרלי להעתקות צמודות לעצמן

שחר פרץ

22 ביוני 2025

מבוסס על הקלטה 17, אלגברה לינארית 2א 2024-2025

מרצה: ענת אמיר

משפט 1. אם V ממ"פ ו־$T\colon V\to V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז הע"ע של T ממשיים.

הוכחה. יהי $0\neq v\in V$ ו"ע של T שמתאים לע"ע λ. נחשב:

$$\lambda v\,||v||^2=\langle\lambda v\,|\,v\rangle=\langle Tv\,|\,v\rangle=\langle v\,|\,Tv\rangle=\langle v\,|\,\lambda v\rangle=\overline{\lambda}\,||v||$$

ידוע $v\neq 0$ ולכן $||v||\neq 0$ ונסיק $\lambda v=\bar{\lambda}$ ולכן $\lambda\in\mathbb{R}$. ■

משפט 2. אם V ממ"פ ו־$T\colon V\to V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז כל זוג $0\neq u,v\in V$ ע"ע שונים, המתאימים לערכים $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, מאונכים זה לזה.

הוכחה. למעשה, מהטענה הקודמת $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. כאן $Tu=\alpha u,\ Tv=\beta v$, כאשר $\alpha=\beta$. נחשב:

$$\alpha\,\langle u\,|\,v\rangle=\langle\alpha u\,|\,v\rangle=\langle Tu\,|\,v\rangle=\langle u\,|\,Tv\rangle=\langle u\,|\,\beta v\rangle=\bar{\beta}\,\langle u\,|\,v\rangle=\beta\,\langle u\,|\,v\rangle$$

בגלל ש־$\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים $\beta=\bar{\beta}$. ולכן $(\alpha-\beta)\,\langle v\,|\,u\rangle=0$ מהעברת אגף וסה"כ $\langle u\,|\,v\rangle=0$ ואכן $u\perp v$. ■

משפט 3. (המשפט הספקטרלי להעתקה לינארית צמודה לעצמה) יהי V ממ"פ ממימד סופי, ותהי $T\colon V\to V$ ט"ל צמודה לעצמה. אז קיים ל־V בסיס אורתוגונלי (או אורתוגונלי) שמורכב מו"ע של T

הוכחה. יהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T. נציג $m_T(x)=\prod_{i=1}^m(x-\lambda_i)^{d_i}$ כאשר $\lambda_1\dots\lambda_n$ הע"ע השונים של T. מהטענה הקודמת $\lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{R}$. [הערה: התמשתנו במשפט היסודי של האלגברה מעל המרוכבים, והסקנו פירוק מעל $\mathbb{R}$]. בכדי להראות ש־T לכסינה, עלינו להוכיח ש־$\forall 1\leq i\leq m\colon d_i=1$. נניח בשלילה שזה לא מתקיים, אזי $m_T(x)=(x-\lambda)^2\cdot p(x)$ כאשר λ ע"ע כלשהו. כעת, לכל $v\in V$ מתקיים מהיות T צמודה לעצמה (כלומר גם $p(T)$ צמוד לעצמו):

$$0=\underbrace{m_T(T)}_{=0}(v)\implies 0=\langle m_T(T)(v)\,|\,p(T)(v)\rangle=\langle(T-\lambda I)(p(T)v)\,|\,p(T)v\rangle=$$

$$\langle(T-\lambda I)(p(T)v)\,|\,(T-\lambda I)(p(T)v)\rangle=\left|\left|(T-\lambda I)^2(p(T)v)\right|\right|^2=0$$

ולכן $\forall v\in V\colon(T-\lambda I)(p(T)v)=0$ ולכן $((x-\lambda)(p(x))(T)=0$ בסתירה למינימליות של $m_T(x)$. נאמר, מכפלת גורמים לינארים שונים, ולכן T לכסינה, ונוכל לפרק את V באמצעות:

$$V=\bigoplus_{i=1}^m\ker(T-\lambda_i I)$$

והמרחבים העצמיים הללו אורתוגונליים זה לזה, מהטענה השנייה שהוכחנו. נבנה בסיס $B_i\subseteq\ker(T-\lambda_i)$ וסה"כ $\bigcup_{i=1}^m B_i$ בסיס אורתוגונלי של T. ■

משפט 4. יהי V נ"ס מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T\colon V\to V$ ט"ל. אז T צמודה לעצמה אמ"מ קיים לה בסיס אורתוגונלי מלכסן.

הוכחה. מכיוון אחד, הוכחנו באמצעות המשפט הספקטרלי להעתקות לינאריות צמודות לעצמן. מהכיוון השני, נניח שקיים ל־V בסיס אורתוגונלי מלכסן של ו"ע של T. ננרמל לבסיס אורתונורמלי $B=(b_i)_{i=1}^n$ של ו"ע של T, המתאימים ל־$\lambda_1\dots\lambda_n$. עבור $v,u\in V$, נציג:

$$u=\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i,\ \ v=\sum_{i=1}^n\beta_i b_i$$

ונחשב:

$$\langle Tu \,|\, v\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i b_i\right) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}\beta_i b_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j \langle Tb_i \,|\, b_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_i \underbrace{\langle b_i \,|\, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\beta_i\lambda_i$$

מהצד השני:

$$\langle u \,|\, Tv\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n}\alpha_i b_i \,\middle|\, T\left(\sum_{i=0}^{n}\beta_i b_i\right)\right\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_i \langle b_i \,|\, Tb_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_j \underbrace{\langle b_i \,|\, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda_i$$

מטרנזטיביות שוויון, הראינו ש־$\langle Tu \,|\, v\rangle = \langle u \,|\, Tv\rangle$ ולכן T צמודה לעצמה. השוויון לדלתא של כקוניקר נכונה מאורתוגונליות איברי הבסיס, והבי־לינאריות כי אנחנו מעל הממשיים. המשפט לא נכון מעל מהרוכבים. ■

הוכחה שהמשפט לא נכון מעל המרוכבים: ההעתקה $T(x) = ix$ היא העתקה סקלרית לינארית, לכן כל וקטור הוא ו"ע וכל בסיס מלכסן, בסיס אורתונורמלי כלשהו יהיה בסיס מלכסן על אף שההעתקה לא צמודה לעצמה, אלא אנטי־הרמיטית.

מכאן ואילך המרצה מוכיחה את המשפט הספקטרלי ללא המשפט היסודי של האלגברה. לשם כך, צריך להראות שהפולינום המינימלי מתפצל למכפלה של גורמים לינארים מעל המרוכבים.

משפט 5. אם $p(x)$ פוליגום אי־שלילי, אז נוכל להציגו כ־$p(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 + c$, כאשר $c \geq 0$, וכמו כן $c > 0$ אמ"מ $p(x)$ פוליגום חיובי.

הוכחה. נבחין ש־$p(x)$ בהכרח ממעלה זוגית מהיותו אי־שלילי, כי לפולינום אי־זוגי מתקיים שהגבולות באינסוף מחליפים סימן. נוכיח באינדוקציה

טוב כאן נאמס לי, אני עובר להקלטה הבאה. TODO: להשלים את ההוכחה הזו. ■

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד