

אלגברה לינארית 1א

תרגיל בית מספר 1 - מספרים מרוכבים

1. יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ זוג מספרים מרוכבים. הוכיחו את הטענות הבאות:

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad (\text{א})$$

$$z = \bar{\bar{z}} \quad (\text{ב})$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad (\text{ג})$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (\text{ד})$$

2. הוכיחו את הנוסחה לחישוב סכום של סידרה חשבונית: נניח $a_0, d \in \mathbb{C}$, ו- $a_{n+1} = a_n + d$ ו- $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d$. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים:

$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{(n+1) \cdot (a_0 + a_n)}{2}$$

3. מצאו את הפתרונות המרוכבים של המשוואות הלינאריות הבאות והביעו אותם בצורה $a + bi$:

$$(1+i)z = 2+i \quad (\text{א})$$

$$(\sqrt{3}+2i)z = (\sqrt{2}-1)i \quad (\text{ב})$$

$$(3-2i)(5+i)z = 1+2i \quad (\text{ג})$$

4. מצאו את הייצוגים הפולרים של המספרים המרוכבים הבאים:

$$1+i \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad (\text{ב})$$

$$-1+2i \quad (\text{ג})$$

5. מצאו את הייצוג האלגברי של המספרים המרוכבים הבאים:

$$5e^{\frac{\pi i}{3}} \quad (\text{א})$$

$$e^{-\pi i/2} \quad (\text{ב})$$

6. יהי $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ פולינום עם מקדמים ממשיים, כלומר a_0, a_1, \dots, a_n כולם ממשיים. נניח ש $z_0 \in \mathbb{C}$ הוא שורש של הפולינום, כלומר $p(z_0) = 0$. הוכיחו ש \bar{z}_0 גם שורש של הפולינום.

7. נניח ש $a_0, d \in \mathbb{C}$ וש $a_{n+1} = a_n \cdot d$ $\forall n \in \mathbb{N}$. הוכיחו באינדוקציה כי
לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים ש

$$\sum_{i=0}^n a_i = a \cdot \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}$$