

רשימות אלגברה לינארית 2
שחור פרץ ~ 2025B

גרסה 1.3.0

תאריך קיימפואל: 10 בפברואר 2026

Introduction 0.1

רישיון ~ License ~ 0.1.1

The following summary is provided under the GNU General Public License version 3 (GPLv3). It can be distributed and/or modified under the terms of the license, or any later version of it. Additional information can be found [here](#).

הסיכום להלן מסופק תחת רישיון התוכנה החופשית של גנו גרסה 3 (GPL version 3). ניתן להעתיקו ו/או להפיצו תחת GPLv3 או גרסה מאוחרת יותר. מידע נוסף אפשר למצוא [כאן](#).

0.1.2 ~ הרגה מייליס שאפשר לדלג עליו

הסיכום להלן נוצר משלוב של ארבעת המקורות הבאים:

- מסקנות מהספר "(עם הוכחות אני כתבתי)" "Linear Algebra Done Right"
- הרצאות בפקולטה
- הרצאות באודיסאה של בן בסקין
- תרגולים של עומר שדה-אור

בנגד שלושה נושאים דיברה אלגברה לינארית 2א –

1. אופרטורים לינארים, הן העתקות ממרחבי לעצמו.
2. תבניות בי-לינאריות, אובייקט מתמטי נוסף שנitin ליצג ע"י מטריצה.
3. מרחבי מכפלת פנימית, מרחבים בהם מוגדרת מעין תבנית סטוקוי בי-לינארית שמאפשרת תיאור "גודל", וביהם יש ערך לפירוק מטריצות לכפל של מספר מטריצות שונות.

הgrסה האחרונה של הסיכום תהיה זמינה [בקישור הבא](#) כל עוד מיקרוסופט לא פשטו את הרgel. אם מצאתם בסיכום טיעויות (חחל בתיקות, כלה בשגיאות חטיב, וכמובן טיעות מתמטיות) אש mach אם תפנו אליו במייל (perets.shahar@gmail.com), בטלפון (אם אתם מכירים אותו) ויש לכם אותו), או באמצעות GitHub Issues (קישור בתחילת המשפט).

מקווה שתהנו ממהסיכום ותמצאו אותו מועיל;

שחר פרץ, 19.7.2025

אחריה. הסיכום הזה מכיל בחלקו הוכחות אני כתבתי ולא הופיעו בהרצאה. השימוש בסיכום על אחריות המשתמש ואני לא ערַב לנכונות המידע.

0.1.3 ~ סימוניים

בסיכום הבא נניח את הסימוניים הבאים:

- $[n] := \mathbb{N} \cap [0, n]$
- בהינתן $T: V \rightarrow W$ העתקה ו- $V \subseteq U$ תמי'ו, נסמן $\{Tu | u \in U\}$
- בהינתן $T: V \rightarrow W$ העתקה ו- $v \in V$, נסמן $Tv := T(v)$
- בהינתן A קבוצה עם יחס שקילות \sim , נסמן את קבוצת המנה ב- A/\sim
- בפקולטה למתמטיקה בת"א מקובל להשתמש ב- (w, v) בשבייל מכפלת פנימית. בסיכום זהה משתמש ב- $\langle w | v \rangle$, גם כן סימון מקובל (בעיקר בפיזיקה), שאינו חשוב שנדראה מגניב הרבה יותר.
- נסמן שחלוף (transpose) ב- A^T ולא $.A^t$.
- הטבעיים כוללים את 0 , ו- \mathbb{N}_+ ("הטבעיים החיוביים") אינם.
- ט"ל הוא קישור לתרנספורמציה לינארית.

0.1.4 ~ רשימת נושאים שהוסיפו לסיום נוסף על החומר של הקורס

- מציאת צורת ג'ordan באמצעות מרחבים עצמיים מרחבים (עוזר מאד להבין מהו צורת ג'ordan שהוא).
- תוצאות מצורת ג'ordan (מופיע בסיסטרים קודמיים וברמה הפרקטית חומר ל מבחן).
- הרחבה על הרדיוקלים של תבניות בילינאריות (סתם כי זה מגניב).
- הרחבת פירוק SVD להעתקות שאין אופרטורים (מועיל לממד"חיסיטים).
- מסקנות מ-SVD ושימוש הקונספט של ערכים סינגולריים.

תוכן העניינים

2	מבוא	0.1
2	רישיון	0.1.1
2	הרבה מילימ שאפשר לדלג עליהם	0.1.2
2	סימונים	0.1.3
3	רשימת נושאים שהוספה לסקום נוספת על החומר של הקורס	0.1.4
6	1 חקר אופרטורים לינאריים וצורת ג'ורדן	
7	לכsoon	1.1
7	מבוא לפרק	1.1.1
7	ערכים עצמיים וקטורים עצמיים לאופרטורים לינאריים	1.1.2
9	ערכים עצמיים וקטורים עצמיים למטריצות	1.1.3
10	פוליאום אופיני	1.1.4
12	על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי	1.1.5
12	1.1.5.1 פיבונאצ'י בשדה סופי	1.1.5.1
13	שילוש	1.1.6
14	על ההבדל בין פולינום לפוליאום	1.1.7
14	משפט קייל-המילטון	1.1.8
16	תורת החוגים	1.2
16	מבוא והגדרות בסיסיות	1.2.1
16	ראשוניות ואי-פריקות	1.2.2
19	הרחבת שדות	1.2.3
20	חוג הפולינומים	1.2.4
21	1.2.4.1 פונקציות רציניות ומספרים אלגבריים	1.2.4.1
23	פירוק פרימרי	1.3
23	מרחבים \mathbb{Z} -شمורים וציקליים	1.3.1
24	הפולינום המינימלי	1.3.2
26	ניסוח והוכחת משפט הירוק הפרימרי	1.3.3
29	צורת ג'ורדן	1.4
29	מציאת שורשי פולינום אופיני ממולה חמשית ואילך	1.4.1
30	צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי נילפוטנטי	1.4.2
30	1.4.2.1 נילפוטנטיות	1.4.2.1
31	1.4.2.2 שרשאות וציקליות	1.4.2.2
32	1.4.2.3 ניסוח צורת מיקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי	1.4.2.3
34	צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי	1.4.3
35	1.4.3.1 בעזרת פירוק פרימרי	1.4.3.1
35	1.4.3.2 בעזרת מרחבים עצמיים מוכלים	1.4.3.2
37	תוצאות מצורת ג'ורדן	1.4.4
39	2 הגדרת וחקר מרחבי מכפלה פנימית	
40	tabniot bimilneariot	2.1
40	הגדרות בסיסיות בעבר tabniot bimilneariot كلויות	2.1.1
42	חפיפה וסימטריות	2.1.2
44	tabniot ribouiyot	2.1.3
45	משפט ההתאמה של סילבסטטר	2.1.4
47	מרחבי מכפלה פנימית	2.2

47	הגדירה כללית	2.2.1
47	מעל \mathbb{R}	2.2.1.1
47	מעל \mathbb{C}	2.2.1.2
48	אורותוגונליות, זהויות ואי-שוויונות של המכפלה הפנימית	2.2.2
49	2.2.2.1 משפט פיתגורס ותוצאותיו	2.2.2.1
50	2.2.2.2 מרחבים ניצבים והיטלים	2.2.2.2
52	2.2.3.1 אלגוריתם גראמס-שמידט	2.2.3.1
53	2.2.4 צמידות ודואליות	2.2.4
53	2.2.4.1 העתקות צמודות לעצמן, והעתקות חיוביות	2.2.4.1
56	2.2.4.2 ההעתקה הצמודה	2.2.4.2
58	2.3 פירוקים	2.3
58	2.3.1 המשפט הספקטרלי להעתקות	2.3.1
58	2.3.1.1 ניסוח המשפט הספקטרלי להעתקות צמודות לעצמן	2.3.1.1
59	2.3.1.2 ניסוח המשפט הספקטרלי בעבר העתקה כללית	2.3.1.2
60	2.3.1.3 תוצאות ממשפט הפירוק הספקטרלי	2.3.1.3
63	2.3.2 מטריצות אוניטריות	2.3.2
65	2.3.2.1 צורה נורמלית למטריצה אורותוגונלית	2.3.2.1
66	2.3.2.2 המשפט הספקטרלי בניסוח מטריציוני	2.3.2.2
67	2.3.3 פירוק פולארי	2.3.3
67	2.3.3.1 מבוא, וקשרו לבניות ביילינאריות	2.3.3.1
68	2.3.3.2 ניסוח הפירוק הפולארי	2.3.3.2
69	2.3.4 פירוק SVD	2.3.4
69	2.3.4.1 ניסוח והוכחת SVD	2.3.4.1
70	2.3.4.2 הרחבת SVD להעתקות שאין אופרטורים	2.3.4.2
73	2.3.4.3 נורמת האופרטור	2.3.4.3
75	3 נספחים	
76	3.1 מרחבים דואליים	3.1
76	3.1.1 הגדרות בסיסיות	3.1.1
77	3.1.2 איזומורפיות למרחבי מכפלה פנימית	3.1.2
77	3.1.2.1 העתקה צמודה (دواלית)	3.1.2.1
78	3.1.2.2 המאפס הדואלי למרחב אורותוגונלי	3.1.2.2
80	3.2 סיכום תוצאות מרכזיות	3.2
80	3.2.1 סיכום פירוק פרימרי וצורת ג'ורדן	3.2.1
80	3.2.2 סיכום בניוון ביילינאריות	3.2.2
81	3.2.3 סיכום נושא הפירוקים	3.2.3
82	3.3 אלגוריתמים	3.3
84	3.4 תרגילים מומלצים	3.4

בתיאכו

פרק 1

חקר אופרטורים לינאריים וצורות גיורדו

Diagonalization 1.1

1.1.1 ~ מכוון לפיק

הגדה 1. נאמר ש- A מטריצה אלכסונית, אם:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

נאמר שינה פועלה כשיי שנרצה להפעיל. נרצה לקרות מה יקרה לפועלה לאחר שנפעיל אותה מספר פעמים. כפל מטריצות היא פועלה מסדר גודל של $(n^3)\mathcal{O}$. אך, ישן מטריצות שקל מאוד להעלות בربיע, ובכך נוכל להפוך את ההליך לפשטוט בהרבה, ואך לנוכח אותו בוצרה של נוסחה סגורה פשוטה. דוגמה מטריצה כזו היא מטריצה אלכסונית. ננסה למצוא דרך, להמיר" בין מטריצה "רגילה" למטריצה אלכסונית.

נבחן מטריצה לכיסינה:

$$T_A^m(A) = A^m(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

למה זה מועיל? נזכר בסדרת פיבונצ'י. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(בහנחת איברי בסיס $a_0 = 0, a_1 = 1$).

ואכן, מה חבל שלא כיף להכפיל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ בעצמה המון פעמיים. מה נוכל לעשות? ננסה למצוא בסיס שבו $(v_1, v_2) = P^{-1}\Lambda P$ ו- $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. [המשמעות של Λ היא מטריצה אלכסונית כלשהיא] אז נקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (P^{-1}\Lambda P)^n = P^{-1}\Lambda^n P$$

(די קל להראות את השווון האחרון באינדוקציה). במקרה זה נראה נחמד כי אין בעיה להעלות לכיסינה בחזקה. הדבר הנחמד הבא שנוכל ליצור הוא צורת גירדן – מטריצת בלוקים אלכסונית, ככה שנעלתה בחזקה את הבלוקים במקומות את כל המטריצה. נעשה זאת בהמשך הקורס.

הגדה 2. אופרטור לiniاري (א"ל) הוא ה"ל/ט"ל מרחב וקטורי V לעצמו.

1.1.2 ~ ערכים עצמיים וקטוריים עצמיים לאופרטורים לiniאריס

הגדה 3. هي $T: V \rightarrow V$ א"ל. אז $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T (ו"ע) אם קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $Tv = \lambda v$.

הגדה 4. λ מההגדה הקודמת נקרא ערך עצמי (ו"ע) של T , המותאים לו"ע v .

כדי לזכור מלינארית 1 א כי $\text{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) \cong M_{m \times n}(\mathbb{F})$. מה המשמעות של איזומורפי (\cong)? בהינתן A, B מבנים אלגבריים כלשהם, נסמן $N \cong B$ אם קיימת $\varphi: A \rightarrow B$ העתקה חד"ע ועל שומרת את המבנה (כאשר המבנה שלו מורכב מפעולות חיבור וכפל, העתקה כזו תהיה לiniארית).

הגדה 5. יהיו U, V מ"ו מעל \mathbb{F} , הם נקראים איזומורפיים אם קיימת $\varphi: V \rightarrow U$ חד"ע ועל המקיים:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}, \forall v_1, v_2 \in V: \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

כלומר "המרנו" שני מבנים אלגבריים, אבל לא באמת עשינו שום דבר – כל מבנה עדיין שומר על התכונות שלו.

הערה 1. בסוף הסיכום מופיע הרחבה על תופעות מעין אלו.

הגדה 6. هي $T: V \rightarrow V$ א"ל, נניח $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע, אז המרחב העצמי (מ"ע) של λ הוא:

$$\mathcal{N}_\lambda := \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$$

משפט 1. \mathcal{N}_λ תמי"ו של V .

הגדה 7. יהיו $T: V \rightarrow V$ א"ל, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ לא"ע של T . נגדיר את הרוכוי הגיאומטרי של λ (ביחס ל- T) להיות $\mathcal{N}_\lambda = \text{ker } T - \text{dim } V$. נניח קיום $v \in V$ המקיים $T^n v = u$, ונניח $\{v, T v, T^2 v, \dots, T^{n-1} v\} \subseteq V$ בסיס של V . ננסה להבין מהם הע"ע. יהיו $u = \sum \alpha_i T^i(v) = \lambda u = \sum \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$. נראה כי $u = \sum \alpha_i T^i(v) = \sum \alpha_i T^n v = \sum \alpha_i u = 0$. אז:

$$\lambda^n u = T^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underbrace{T^{n+i}(v)}_{=T^i(T^n v)=T^i v} = u$$

ובחין שהערכים העצמיים הם שורשי היחידה λ (כלומר $1 = \lambda^{-1}$). מי הם שורשי היחידה – זה תלוי שדה! מעל \mathbb{R} זה 1 ו- -1 – אם n זוגי, אך מעל \mathbb{C} קיימים n כללו.

מסקנה 1. ערכים עצמיים תלויים בשדה. ערכים עצמיים של מטריצה מעלה \mathbb{R} יכולים להיות שונים בעבור אותה המטריצה מעלה \mathbb{C} . דוגמה יותר פשוטה לכך היא העתקת הסיבוב ב- \mathbb{R}^2 , שאין לה ו"ע מעלה \mathbb{R} אך יש כללו מעלה \mathbb{C} .

משפט 2. תהי $T: V \rightarrow V$ א"ל, ונניח $A \subseteq V$ קבוצה של ו"ע של T עם ו"ע שונים, אז A בת"ל.

הוכחה. יהיו v_1, \dots, v_k ו"ע של T , עבור הע"עים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הזרים בזוגות, כולם $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$. ניקח $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ כleshho המאפס את A , כולם:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \quad (\text{I}) \qquad \implies \qquad \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i v_i = 0 \quad (\text{II})$$

נסיק מ-(I):

$$0 = T(0) = T\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^k T(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i v_i \quad (\text{III})$$

עתה נוכל לחסר את (II) מ-(III) ולקבל:

$$0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^k \lambda_k \alpha_i v_i = (\lambda_k - \lambda_k) \alpha_k v_k + \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) \alpha_i v_i$$

מה.א. v_1, \dots, v_{k-1} בת"ל ולכן באג' הימני נתון ע"י קומבינציה לינארית טרויאלית. ס"כ $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$. מההנחה שהע"עים שונים, מתקבל $\lambda_k - \lambda_k \neq 0$ ולכן $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$. הראיינו בלינארית 1 או שבשדה $a = b = 0$ ומכאן $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$. נציג הכל חזרה ב-(I): נקבל ש- $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$.

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \alpha_k v_k + \sum_{i=1}^{k-1} 0 \cdot v_i = \alpha_k v_k$$

אם $\alpha_k \neq 0$ אז $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ צירוף לינארי טרויאלי וס"כ $v_k = 0$ וזה סתירה משום ש- $v_k \neq 0$. ומהגדה לא אפשר, וסיימנו. ■

הגדה 8. תהי $T: V \rightarrow V$ א"ל. נאמר ש- T ניתן לכטוז/לכסיז אם קיים ל- V בסיס של ו"ע של T .

מסקנה 2. אם $n = \text{dim } V$ ול- T יש n ו"ע שונים אז T לכטיז.

הערה 2. שימו לב – יתכן מצב בו קיימים פחות מ- n ו"ע שונים אך T עדין לכטיז. דוגמה: $0 = id$.

מסקנה 3. תהי $T: V \rightarrow V$ א"ל. נניח שלכל λ ו"ע, ישנה $\mathcal{N}_\lambda \subseteq B_\lambda$ בת"ל. אז $\bigcup_\lambda B_\lambda = V$.

הוכחה. ניקח צירוף לינארי כלשהו שווה ל-0:

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i &= 0 \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_i} \alpha_i v_{\lambda_i} \\ \implies \sum_{\lambda_j} \alpha_i v_{\lambda_j} &=: u_j \in V_{\lambda_j} \\ \implies \sum_j u_j &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טרווייאלי של איברים ב- \mathbb{F}^n שעונים (=עם ע"א שונים). אם אחד מהם אינו 0, קיבלנו סתירה למשפט. ■

סה"כ קיבלנו שלכל j מתקיים $0 = \sum \alpha_{ji} v_{ji} \in B_j$ אז בת"ל ולכן כל הסקלרים 0.

הערה 3. ההוכחה הזאת עובדת בעבר החקלאה לממדים שאינם נוצרים סופית.

מסקנה 4. יהי $A \in \mathbb{F}^n$. אם $T: V \rightarrow V$ מקיים $\dim V = n$ אז:

$$\sum_{\lambda} \dim \mathcal{V}_{\lambda} \leq n$$

שווין אם"מ T לכסין.

הוכחה. לכל λ יהא B_{λ} בסיס. אז $B = \sum_{\lambda} B_{\lambda}$ בת"ל. אם $\mathcal{V}_{\lambda} = \{0\}$ אז $\dim \mathcal{V}_{\lambda} = 0$ ו"ע λ אחד מהם מבין λ ושוינו.

מצד שני, אם יש שוויון אז B קבוצה בת"ל של n ו"ע ולכן בסיס ולכן T לכסין. ■

1.1.3 ~ ערכים עצמיים וקטוריים עצמיים למטריצות

הגדרה 9. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש- $v \in \mathbb{F}^n \neq 0$ הוא ו"ע של A אם $Av = \lambda v$ ואם v מקיים בסיס B בסיס סדור, ו- V נוצר סופי (לעתים יקראו: סופי-ممדי). נניח $A = [T]_B$. אז $0 \neq v$ וקטור עצמי של T עם ערך עצמי λ אם"מ $[v]_B$ וקטור עצמי של A עם ע"ע λ .

הוכחה. גירירה דוכיונית. נניח V ו"ע של T . אז $A[v]_B = [Tv]_B = [\lambda v]_B = \lambda [v]_B$. מהכיוון השני "לכו הפוך". ■

הגדרה 10. מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תקרא לכסינה/נתנת לכסון אם היא דומה למטריצה $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית, כלומר קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה שubahora $\Lambda = P^{-1}AP$.

משפט 4. יהיו $P \in M_n(\mathbb{F})$, $A, P \in M_n(\mathbb{F})$. נניח $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. אז אם P عمودות P הן ו"ע של A עם ע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ בהתאם.

הוכחה. נסמן $P = (P_1 \dots P_n)$ عمודותיה. אז:

$$AP = (AP_1 \dots AP_n) = (\lambda_1 P_1 \dots \lambda_n P_n) = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

ולכן:

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\Lambda$$

ההוכחה מהכיוון השני היא לקרה את זה מהצד השני. ■

"אני מוקוה שראיתם שכפל מטריצה אלכסונית מתחלף" (הוא לא בהכרח). "אני אמרתי שיטות". ~ בן "אני מוקוה שראיתם שכפל מטריצה אלכסונית מתחלף" (הוא לא בהכרח). "אני אמרתי שיטות". ~ בן

משפט 5. בהינתן העתקות S, T , שתיهن לכיסינות לפי אותו הבסיס B (לא בהכרח אותן הע"עים), אז $TS = ST$ מתחלפות.

משפט 6. המטריצה I עברו $\lambda \in \mathbb{F}$ דומה רק לעצמה.

הוכחה. בהינתן P הפיכה, הכפל של P עם λI מתחלף בהכרח, ולכן $\lambda I = PP^{-1}\lambda I = P\lambda IP = P^{-1}\lambda IP$ לכל מטריצה P כפולה. ■ דומה.

1.1.4 ~ פולינוס אופייני

תרגיל. תהי $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. מצאו ו"ע וע"ע של A ולכסנו אם אפשר.

פתרון. מחפשים $\lambda \in \mathbb{R}$ ו- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך ש-:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

סה"כ ו"ע עם ו"ע λ אם ומ"מ לא הפיכה, אם ומ"מ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\lambda I - A)$ הפולינום AKA $\det(\lambda I - A) = 0$ (האופייני). במקרה זהה:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -8 \\ -6 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \implies \det(\lambda I - A) = (\lambda + 7)(\lambda - 7) = \lambda^2 - 1$$

לכן הע"ע הם $1, -1$. נמצא את הוע"ע. עבור $\lambda = 1$, מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

יש לנו חופש בחירה (ופתרון יחיד עד לכדי כפל בסקלר). במקרה זהה, נבחר $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

עבור $\lambda = -1$, מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ראינו שהמלכשנת היא העמודות של הוע"ע. אז:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ושה"כ $P^{-1}AP = I$. מכאן צריך למצוא את P^{-1} .
משפט 7. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז $\lambda \in \mathbb{F}$ אם ומ"מ $\lambda I - A = 0$ וע"ע של A מוגדר להיות:

הגדרה 11. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. הפולינום האופייני של A מוגדר להיות $f_A(x) = \det(Ix - A)$.

$$f_A(x) = |xI - A|$$

משפט 8. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז $f_A(x) = \det(xI - A)$ הוא פולינום מותוקן [מקדם מוביל הוא 1] ממעלה n , המקדים של x^{n-1} הוא $(-1)^n |A|$.

הגדרה 12. עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפולינום האופייני של A הוא $f_A(x) = \det(Ix - A)$.

ראינו ש- v ו"ע של A עם ערך עצמי λ אם ומ"מ $\lambda \in \ker(\lambda I - A)$ וכן λ ע"ע אם ומ"מ $\dim \ker(\lambda I - A) > 0$.

משפט 9. פולינום מותוקן (מקדם מוביל 1) מדרגה n , המקדים של x^{n-1} הוא $(-1)^n \det A$.

הוכחה.

- **תקינות הפולינום.** מבין n המוחברים, ישנו אחד ייחד שדרגתתו היא n . הסיבה היא שמדטרמיננטה לפי תמורות, התמורה היחידה שתיצור איבר מסדר n היא תמורה זהה שתעבור על האלכסון. באינדוקציה על n , ונקבל:

$$f_A(x) = (x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn}) = x^n + \cdots$$

באופן דומה אפשר להוכיח באינדוקציה באמצעות פיתוח לפי שורות:

$$f_A(x) = (x - a_{11})|A_11| + \underbrace{a_{21}|A_21| - a_{31}|A_31| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|}_{\text{מה. דרגה קטינה מ-} n}$$

סח"כ גם כאן ראיינו שהדרגה מתקבלת מהפולינום $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$, כלומר הפולינום האופייני מותוקן.

- **המקדם של x^{n-1} הוא $\text{tr } A$.** מקדמי x^{n-1} מגיעים גם הם רק מ- $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$ (הפולינום לעילו) שהם

$$\cdot f_A(0) = \det(I \cdot 0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A. 0$$

■

דוגמאות.

א) אם $f_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ אז $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (נתו מהמשפט הקודם).

ב) אם $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ אז $A = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

ג) אם $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ אז נסמן $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ דומה לאלכסונית עם אותן הקבועים.

ד) אם $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$ כאשר B, C בלוקים ריבועיים אז $f_A(x) = f_B(x) \cdot f_C(x)$

הגדלה 13. בהינתן $T: V \rightarrow V$ נגידר את הפולינום האופייני שלה (פ"א) באופן הבא: נבחר בסיס B למ"ו V , ונתבונן ב- $f_T(x) := [T]_B$ ונגדיר את $A = [T]_B$

"אתה פותר עכשו שאלה משיעורי הבית" "אל תdag הבודק כבר שלח פתרון" "מה??"
משפט 10. הפ"א של ט"ל מוגדר היטב. למטריות דומות אותו פ"א. הוכחה. בשיעורי הבית. ויש סיכוי שגם בדף הסיכום.

דוגמה. נתבונן בהעתקה $f' = f'$ של $B = (1, x, \dots, x^n) \in \mathbb{R}_n[x]$. נבחר בסיס $T(f) = \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$. אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

:
א:

$$f_T(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & x & -2 & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} = x^{n+1}$$

$$\cdot f_T(\lambda) = 0 \text{ ט"ל, או } \lambda \text{ ע"ע של } T: V \rightarrow V \text{ למ"מ}$$

הוכחה. יהא $B \subseteq V$ בסיס של V . אז $f_A(\lambda) = 0$ אם λ ע"ע של A .

הגדלה 14. יהיו $\lambda \in \mathbb{F}$ ו- $T: V \rightarrow V$ (או A). הריבוי האלגברי של λ הוא החזקה המקסימלית d כך ש- $(x - \lambda)^d | f_T(x)$ (חלוקת פולינומים).

דוגמה. בעבור T היא העתקת גזירת פולינום, הפ"ע $f_T(x) = x^{n+1}$ ולכן ע"ע יחיד הוא 0. הריבוי האלגברי של 0 הוא $n+1$. הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1.

סימון 1. נניח ש- λ ע"ע של T (או A) אז d הריבוי האלגברי של λ ו- r_λ הריבוי הגיאומטרי של λ .

1.1.5 ~ על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי

הערה 4. במקרים רבים $n = \sum d_i$ כאשר d_i דרגת הפולינום. זה לא תמיד נכון. דוגמה לדוגמה בו זה לא נכון: $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$. סכום הריבויים האלגבריים הוא 2, אבל דרגת הפולינום היא 4. זה נכון מעש שדות סגורים אלגבריים.

משפט 12. תהי $T: V \rightarrow \mathbb{C}$. אז לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $r_\lambda \leq d_\lambda$.

הוכחה. יהיו $\lambda \in \mathbb{C}$, אז $\{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{v \in V \mid T(v) - \lambda v = 0\} = \{v \in V \mid (T - \lambda I)(v) = 0\} = \mathcal{N}_\lambda$. נשלים אותו לבסיס B של V .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ & \ddots & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$$

אז:

$$f_T(x) = (x - \lambda)^{r_\lambda} C(x) \implies r_\lambda \leq d_\lambda$$

■

משפט 13. תהי $T: V \rightarrow \mathbb{C}$ עם פ"א $f_T(x)$. אז T לכיסינה אם ו רק אם שתי הטענות הבאות מתקיימות:

1. עבור k הע"ע שונים, $f_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{d_{\lambda_i}}$ (הפולינום מתרפרק לגרומים לינאריים).
2. לכל $\lambda \in \mathbb{C}$ מתקיים $r_\lambda = d_\lambda$ (ריבוי גיאומטרי שווה לריבוי אלגברי).

(הבהרה: 1 לא גורר את 2. צריך את שניים).

הוכחה.

לכיסינה ראיינו ש-1 מתקיים. במקרה של לכיסינה ראיינו ש- $n = \sum r_{\lambda_i} \leq \sum d_{\lambda_i} = n$ ולכן מבחן הערכים העצמיים מתקיים $r_\lambda \neq d_\lambda$ אז מתקיים $r_k < d_k$ ונקבל סתירה לשווונות לעיל.

\implies

$$\begin{aligned} 1 &\implies \sum d_{\lambda_i} = n \\ 2 &\implies \sum r_{\lambda_i} = \sum d_{\lambda_i} = n \end{aligned}$$

■

וסה"כ $\sum r_{\lambda_i} = n$ אם ו רק אם T לכיסינה.

1.1.5.1) פיבונאצ'י בשדה סופי

סדרת פיבונאצ'י:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח שאנו משתמשים מעל \mathbb{F}_p בלבד. אז הסדרה חייבת להיות מחזורה. **שאלה:** מתי מתקיים ש- $I = A^m = I$ (בעבור m מינימלי)? במילים אחרות, מתי מתחילהים מחזור.

היות שמספר הזוגות השונים עבור $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ הוא p^2 , אז $p^2 \leq m$. עבור $p = 7$: $m = 49$. קלומר עבור $p = 7$ יש מחזור באורך $m = 16$.

הערה 5. תירוקטית עם המידע הנוכחי יתכן ויהפוך למוחזר ולא יחזר להתחלה

טענה. אם p ראשוני אז $p \equiv 1 \pmod{5}$ או אורך המוחזר חסום מלעיל ע"י $p - 1$.

הוכחה. תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לקבלת מוחזר באורך k הוא $A^k = I$. א.ז.:

$$f_A(x) = x^2 - x - 1$$

יש דבר שנקרא "הדיות ריבועית" (חומר קרייה רשות במודול) שמשמעותו שורש לפולינום להלן עבור p כנ"ל. אכן יש לנו שני ע"ע שונים (אם קיימים רק אחד אז סתירה מהיות הדיסקרימיננטה $5 = 5 \equiv 1 \pmod{p}$). לכן קיימת P הפיכה כך ש-:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

כך ש- $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. משפט פרמה הקטן אומר ש- $\lambda_1^{p-1} = 1$ ו- $\lambda_2^{p-1} = 1$.

1.1.6 ~ שילוש

הגדרה 15. $T: V \rightarrow V$: T ניתנת לשילוש אם קיימים בסיס B של V כך ש- $[T]_B$ מושלשית.

הערה 6. אם T ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים ליניארים (האם איברי האלכסון של הגרסה המושלשית). יהיה מעניין לשאול אם הכיוון השני מתקיים.

משפט 14. $T: V \rightarrow V$: נניח ש- $f_T(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ (ניתנת לפירוק לגורמים ליניארים) אז T ניתנת לשילוש.

הוכחה. נז' $n = 1$ היא כבר מושלשית וסיימנו.
ע"ז. נניח שהטענה נכונה בעבור n טبعי כלשהו, ונראה נכונות עבור $n+1$. אז f_T מתפרק לגורמים ליניארים, שכן יש לו שורש. יהיו λ ו- w של T . בסיס B של V מקיים $[T]_B$ מושלשית עליונה (נסמן $(B = (w_1 \dots w_{n+1})) \iff$ או $(B = \text{span}(w_1 \dots w_{n+1}))$. נגידיר את w_1 להיות ו"ע של λ . נשלימו לבסיס B' [בעתיד נראה שכאן ניתן להפוך את הבסיס לאורתונורמלי באמצעות גראט-شمידט ולקבל את פירוק שור. כרגע זה לא אומר לנו כלום].

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & * & & \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \dots & C & \dots \\ 0 & & \vdots & \end{pmatrix}$$

אז ניתן לומר כי:

$$f_T(x) = (x - \lambda)f_C(x)$$

נסמן $W = \text{span}(w_2 \dots w_{n+1})$. קיימות העתקה ליניארית $f_S: W \rightarrow W$ כך ש- $f_S(x) = f_C(x)$. לפי ה"א קיימים בסיס $S: W \rightarrow W$ שעבורו S מושלשית עליונה. נטען ש- $B'' = B'' \cup \{w_1\}$ ייתן את הדרוש.

$$\forall w \in B'': (T - S)(w) = Tw - Sw = aw_1 + S(w) - S(w) = aw_1$$

(כלומר, השורה העליונה של $[T]_B$ "תרמה" את aw_1 בלבד) לכן:

$$(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$$

זה גורר שלכל $w \in W$ מליינiarיות מתקיים ש- $(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$. סה"כ לכל $w \in B'' \cup \{w_1\}$ $(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$. ■

בhocחה זו, בנינו בסיס כך ש-:

$$[T(w) - S(w)]_B = ae_1$$

הגדרה 16. מטריצה יותנת לשילוש אם היא דומה למושלשית.
משפט 15. מטריצה A ניתנת לשילוש, אם ומ"מ האופייני שלו מתפרק לגורמים ליניארים.

המשך בעמוד הבא

1.1.7 ~ על ההבדל בין פוליאוֹס לפוליאוֹנוֹס

נבחן ש- $[x]$ הוא מ"ז מעל \mathbb{F} . וכן $[x] \in \mathbb{F}[x]$ הוא חוג חילופי עם יחידה. בוחג כפלי לא חייב להיות קומוטטיבי (נאמר, חוג המטריצות הריבועיות). אומנם קיימת יחידה (פוליאוֹס קבוע ב- x) אך אין הופכיים לשום דבר חוץ מלפוני הקבועות. זהה מאוד חבל כי זה כמעט שדה. בהמשך, נגידר את אוסף הפונקציות הרצינליות כדי להתגבר על כך.

אם נתבונן במטריצות דומות, יש הבדל בין להגיד $f_A(x) \in \mathbb{F}[x]$, אך אפשר לטעון $|B| = f_A(x) = |A|$ (כש- $(\mathbb{F}(x))$ כי $xI - A \in M_n(\mathbb{F}(x))$ זה קצת מנוגן כי איברי המטריצה הם או פוליאוֹומיים קבועים או ממעלה 1). משום שדטרמיננטה שלחמת איבר לשדה, אז $(x) \in \mathbb{F}[B]$. כך למעשה נגע לכך שפוליאוֹומיים אופייניים שווים כשי איברים בתוך השדה, ולא רק באיך שהם מתנהגים ביחס לקבועים.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2), \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = x, \quad f, g \in \mathbb{F}_2[x] \rightarrow \mathbb{F}_2 \implies f = g$$

אך:

$$f(A) = A^3 = 0, \quad g(A) = A \neq 0$$

זה לא רצוי. נבחן בשני שוויונות שונים – שוויון פונקציות, בהם $f = g$ מעל \mathbb{F}_2 , ושוויון בשדה – בו $f - g \neq 0$ (כי $x^2 - 1$ פוליאוֹס האפס, ולאחר מכן $\mathbb{F}_2[x]$ מתקיים $f \neq g$).

1.1.8 ~ משפט קוילוי-המילטון

הגדרה 17. שדה \mathbb{F} נקרא סגור אלגברי אם כל פוליאוֹס f ב- $\mathbb{F}[x]$ ניתן לבטא כמכפלה של גורמים לינאריים ($a - x$) כאשר $a \in \mathbb{F}$, עד לכדי כפל בסקלר.

הגדרה 18. יהי V מ"ז מעל \mathbb{F} נ"ס (נווצר סופית) וכן $T: V \rightarrow V$: ט"ל. נגידר:

$$f(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i, \quad T^0 = id, \quad T^n = T \circ T^{n-1}$$

כנ"ל עם מטריצות (ראה תרגול)

лемה 1. אם $A = [T]_B$ ו- $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ אז $f(A) = [f(T)]_B = f(B)$

הוכחה נובעת מהתכונות $[TS]_B = AC$, $[T + S]_B = A + C$, $[\alpha T]_B = \alpha A$, $[S]_B = C$, $[T]_B = A$ של מטריצות. $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$ ו- $f(T) + g(T) = f(T) \cdot g(T)$ בואפן דומה.

лемה 2. אם $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ו- $T: V \rightarrow V$ אז $f \cdot g(T) = f(T) \cdot g(T)$.

לכן קל לראות ש- $0 = f(T) = 0 \iff f(A) = 0$

מסקנה 5. אם A, C דומות אז $f(A) = f(C)$

דוגמה. (מנownת) נתבונן ב- $D: \mathbb{F}_n[x] \rightarrow \mathbb{F}_n[x]$ אופרטור הגזירה. ראיינו $f_D(x) = x^{n+1}$ (הפוליאוֹס האופייני). אז נקבל:

$$f_D(D)(p) = p^{(n+1)} = 0 \implies f_D(D) = 0$$

משפט 16 (משפט קוילוי-המילטון). תהי $f_A(x) = f_T(x)$, $A \in M_n(\mathbb{F})$ והפ"א, ו- $T: V \rightarrow V$ ט"ל (n נ"ס) או $.0, f_A(A) = 0$

הערה 7. Cayley–Hamilton, באנגלית,

הוכחה. נוכיח את המשפט בשלושה שלבים –

- נניח ש- T ניתנת לשילוש. אז, קיימים בסיס $(v_1 \dots v_n)$ של T מושולשית (עליזונה). זאת מתקיים אם "מ

$\forall i \in [n]: Tv_i \in \text{span}(v_1 \dots v_i)$

תת-הוכחה.

- גטיש: בעבור $n = 1$, אז קיימים $\mathbb{F} \in \lambda$ כך $\lambda I = T - \lambda I = 0$ (העתקה לינארית חד ממדית היא כפל בסקלר). בפרט $0 = (T - \lambda)v = \lambda v$.

- צעד: נניח ש- $B = (v_1 \dots v_n, v_{n+1})$ שעבורו $T[B]_B$ מושולשית. נגידר תם"ו $W = \text{span}(v_1 \dots v_n)$ כך $W \leqslant W$ (נניח $w \in W$ ו- $\forall w \in W: Tw \in W$). נניח להראות שהוא נכון עבור וקטורי הבסיס, ונוכיח לכל $w \in W$ $\dim V$

mlinariot). נגיד $T|_W: W \rightarrow W$ את הצמצום של T ל- W . ידוע ש- $|_w T$ ניתנת לשילוש ולכן מקיימת את תנאי האינדוקציה. לכן, $f_{T|_W}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ $\forall w \in W: f_{T|_W}(T)(w) = 0$. איז $\forall w \in W: f_T(w) = 0$ וקיבלנו $f_T(x) = (x - \lambda_{n+1})f_{T|_W}(x)$ מספיק להראות ש- $v \in W$ $(T - \lambda_{n+1})(v) = 0$. למה? כי:

$$f_T(T)(v) = \left(\prod_{i=1}^n (T - \lambda_i) \right) (T - \lambda_{n+1})(v)$$

mlinariot, מספיק להראות ש- $(T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = 0$, שכן זה מתקיים על כל בסיס אחר. אך זה ברור – עבר $[T]_B$ העמודה האחורונה היא:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} \implies (T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in W$$

■

- נוכיח בעבור מטריצה משולשית/ניתנת לשילוש.

תת-הוכחה. אם A משולשית, אז $f_A(x) = Av$ כאשר $f_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ המוגדרת ע"י $f_A(x) = A(x)$ ו- A ניתנת לשילוש וסימנו.

אם A ניתנת לשילוש, אז היא דומה למשולשית, והן בעלות אותו הפולינום האופייני. אז חזרה לתחילת ההוכחה. ■ עבור T כללית או A כללית.

תת-הוכחה. נניח $A = [T]_B$ עבור בסיס B , ידוע $f_T(x) = f_A(x)$. ידוע ש- A ניתנת לשילוש אם ומן $f_A(x)$ מטפל. טענה מהעתידי הלא נכון: לכל שדה \mathbb{F} קיים שדה \mathbb{K} סגור אלגברית (כל פולינום מעל שדה סגור אלגברית מפותץ). על כן, ניתן לחשב על $(A \in M_n(\mathbb{K}))$ $f_A(A) = 0$ כמו $f_A(A) = 0$ הוא אותו הפולינום האופייני מעל \mathbb{F} . לכן הוא מטפל (מעל \mathbb{K}), וכך הוא דומה למשולשית, ומהמקרה הראשון $f_A(A) = 0$. זאת כי $f_A(A) = 0$ לא תלוי בשדה עליו אנו עוסדים, וסה"כ הוכחנו בעבור מטריצה כללית, ולכן לכל ט"ל. ■ ■

משפט 17. אם A מייצגת של העתקה T , ו- $f \in \mathbb{F}[x]$, אז $f(A) = 0 \iff f(T) = 0$.

הערה 8 (בנוגע לשדיות סגורים אלגברית). הטענה שלכל שדה יש שדה סגור אלגברית – טענה שתלויה באקסiomות הבחירה. הסגור האלגברי הוא היחיד. **הטענה זו לא נאמרת באופן רשמי בקורס** על אף שהרבה לשדה סגור אלגברית מועילה מאוד בlinearית 2א באופן כללי. הסגור האלגברי של \mathbb{R} הוא \mathbb{C} .

המשך בעמוד הבא

1.2 Ring Theory..... 1.2

1.2.1 ~ מוכוא והגדירות בסיסיות

از, מה זה אובייקט אלגברי? הרעיון – "Data עם אקסימות". אנו כבר מכירים רבים מהם: תמורות, חבורות, שדות, מרחבים וקטורים, ועוד. עתה נזכיר אובייקט אלגברי בשם חוג. מקובל לסמן חוג בתור השלישי הסדורה $(\cdot, +, R)$ כאשר $\cdot : R \times R \rightarrow R$ ו- $+ : R \times R \rightarrow R$: הפעולות הבינאריות בחוג R , וכן $+$ קומוטטיבי וקיים נגיד, וכן הפעולות הבינאריות דיסטרוביטיביות.

הדרה 19. חוג עס ייחודה הוא קבוצה עם שתי פעולות, כפל וחיבור, ניטרלים לפעולות $(0, 1)$ כך שמתקיימות כל אקסימות השדה למעט (פוטנציאלית) קיום איבר הופכי, וקומוטטיביות הכפל.

אנחנו נתעניין ספציפית בחוגים קומוטטיבים, כלומר, בהם הכפל כן קומוטטיבי. המאפייניות הריבועיות מעלה אותו הוגדל, לדוגמה, הוא חוג שאינו קומוטטיבי. העבודה איתם במרקמים רבים דומה, אך דורשת קצת יותר עבודה שחורה והגדירות זהירות יותר. החוג ה"בסיסי ביזטור" – חוג השלמים (אן הופכי) הוא חוג קומוטטיבי. ישנים חוגים בלי ייחידה (לדוגמה המספרים הזוגיים), שלא לדבר עליהם כלל.

הדרה 20. חוג יקרא לא מחלקי 0 אם:

דוגמאות לחוגים עם מחלקוי 0:

- $a = b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \cdot b = 0$: $M_2(\mathbb{R})$ הוכחה

- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = 0 \cdot 3 = 0$

הדרה 21. תחום שלמות הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה ללא מחלקוי 0.

הערה 9. באנגלית, Integral Domain

משפט 18. בתחום שלמות יש את כלל הצטומים בכפל: אם $0 \neq a \wedge ab = ac \wedge a \neq c$ אז $b = c$. בוגר ש-0, אז $a \neq 0$. נסיף את c הנגדי של $-c$ ונקבל $.b = c - b = c$.

הוכחה.

$$ab \cdot ac = 0 \implies a(b \cdot c) = 0 \implies a = 0 \vee b - c = 0$$

בגלל ש-0, אז $a \neq 0$. נסיף את c הנגדי של $-c$ ונקבל $.b = c - b = c$.

דוגמאות לתחום שלמות:

• שדות

• השלמים

• חוג הפולינומיים

1.2.2 ~ ראשונות ואי-פריקות

הדרה 22. יהיו R תחום שלמות, $a, b \in R$. נאמר ש- b מחלק a אם קיים $c \in R$ כך ש- $b \mid a$.

הדרה 23. יהיו $u \in R$ ו- $\alpha \in R$ אם קיים $\alpha \in R$ כך ש- $u = \alpha u$.

משפט 19. יהיו R תחום שלמות, $u \in R$ הפיק. יהיו $a, b \in R$ כך ש- $u \mid a$ ו- $u \mid b$.

הוכחה. $1 \mid a, u \mid 1$. יחס החלוקה טרנזיטיבי ולכן $1 \mid a$.

סימון 2. קבוצת הפיכים מוסמנת ב- R^x .

דוגמאות.

$$\mathbb{F}^x = \mathbb{F} \setminus \{0\} . 1. \text{ אם } R = \mathbb{F}, \text{ אז } R^x = \mathbb{F}^x$$

$$2. \text{ אם } R = \mathbb{Z}, \text{ אז } R^x = \mathbb{Z}^2 = \{\pm 1\}$$

3. אם $R = \mathbb{F}[x]$ אז $R^x = \mathbb{F}^x$ (התהייחסות לסקלרדים \mathbb{F} היא כל פונקציות קבועות)

הדרה 24. נזכיר חוגים אם קיים $u \in R^x$ ו- $a, b \in R$ הפיק כך ש- $ub = ua$, ומסומנים $a \sim b$.

משפט 20. יחס החבירות הוא יחס שקילות.

הוכחה.

$$a \sim a \text{ כי } 1 \in R^x$$

- ב. אם $b \sim a$ אז קיים $u \in R^x$ כך ש- $ub = u \cdot a = a\alpha + \alpha ub = b$. קיימים α, α' ו- $a \sim b$ ו- $\alpha \neq \alpha'$.
- ג. נניח $c \sim b \wedge b \sim a$, כי מכפלת ההופכיים הפיכה $c \sim a$ וסימנו.

"אני אני חבר של עומר, ועומר חבר של מישהו בכיתה שאני לא מכיר, אני לא חבר של מי שאני לא מכיר." המרצה: "למה לא? תהיה חבר שלו".

משפט 21. הופכי הוא יחיד.

(אותה הוכחה כמו בשדות)

הוכחה. יהיו $a \in R^x$ ו- $u, u' \in R$ הופכיים שלו, אז:

$$u = u \cdot 1 = u \cdot a \cdot u' = 1 \cdot u' = u'$$

הערה 10. המשפט להלן נכון רק בתחום שלמות, אלא בכלל חוג **משפט 22.** בהינתן תחום שלמות R ו- $a, b \in R$, אז $a | b$ ו- $a \sim b$ (ביחס החברות).

הוכחה.

$$\begin{aligned} a | b &\implies \exists c \in R: ac = b \\ b | a &\implies \exists d \in R: bd = a \end{aligned}$$

לכן:

$$ac = b \implies acd = a \implies a(cd - 1) = 0 \implies a = 0 \vee cd = 1$$

אם $a = 0$ אז $b = 0$ (ממש לפי הגדרה) ו- \sim שקילות (רפליקטיביות). אחרת, $1 = cd$ ו- $c, d \in R$.

"אני חושב שב[אוניברסיטה העברית קרואו להם ידדים, לא רצוי להתחייב לחברות ממש]."

מסקנה 6. ב- R יחס החלוקה הוא יחס סדר חלקי חזק.

הגדירה 25. איבר $p \in R$ נקרא אוירווייך אם מתקיים $p = ab \implies a \in R^x \vee b \in R^x$.

הגדירה 26. איבר $p \in R$ נקרא ראשוני אם $p | ab \implies p | a \vee p | b$.

הערה 11. איברים הפיכים לא נחכמים או-פריקאים או ראשוניים. הסיבה להגדירה: בשביל נכונות המשפט היסודי של האריתמטיקה (יחidot הפירוק לראשוניים).

משפט 23. בתחום שלמות כל ראשוני הוא או-פריק.

הערה 12. שיקולות לאו דווקא.

הוכחה. יהיו $p \in R$ וראשוני. יהיו $a, b \in R$ כך ש- $ab = p$. בה"כ $a | p$. אז קיימים $c, d \in R$ כך ש- $p = cd$ ו- $a | c$ ו- $b | d$. לכן $p = cd$ (כי תחום שלמות מקיים את כלל הוצמצום בכפוף ו- $1 \cdot p = p$ ו- $b \cdot p = p$).

הגדירה 27. R תחום פריקות יהיה אם $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{j=1}^m q_j$ עבור p_i, q_j ראשוניים, אז $n = m$, וуд לכדי סידור מחדש, לכל $i \in [n]$ $p_i \sim q_i$.

הערה 13. באנגלית, Unique Factorization Domain.

משפט 24. נניח שבתחום שלמות R , כל או-פריק הוא גם ראשוני. אז R תחום פריקות ייחידה.

הוכחה: זהה לחלוטין לזו של המשפט היסודי של האלגברה.

הוכחה. באינדוקציה על $m + n$. בסיס: $n + m = 2$ ו- $1 = m = n$ (כי מעפלה ריקה לא רלוונטיות מיותר) אז $q = p$. נבעור לפחות. נניח שהטענה נכונה לכל $k \leq m + n$. נניח ש- $k < m + n$. אז $q_1 | p_1 \dots p_k$. בה"כ $q_1 | p_1 \dots p_k$ ואילו $q_1 | p_1$ לא הפיך. לכן $q_1 \sim p_1$. אז עד כדי כפוף בהופכי קיבל ש- $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_m$. הערת: ראשוני כפול הפיך נשאר ראשוני. מכאן הראיינו לדרש וסימנו (תכפילו בחברים ותקבלו את מה שצריך).

הגדירה 28. יהי R תחום שלמות. תת-קובוצה $I \subseteq R$ נקראת איזיאלי אם:

א. סגירות לחברות.

ב. $[0] \in I$ – תכונת הבליעה. [בפרט $ab \in I \forall a \in I \forall b \in R$]

דוגמאות:

1. 0 תמיד אידיאל, וכן החוג כולו תמיד אידיאל.
2. הזוגים ב- \mathbb{Z} .
3. לכל $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ אידיאל (n כפול השלמים). הזוגים לדוגמה, מקרה פרטי הוא 22.
4. $\langle f \rangle := \{g \in \mathbb{F}[x] \mid f|g\} \subseteq \mathbb{F}[x]$ המוגדר לפי $\{f\}$.
5. הכללה של הקודמים: עבור $a \in R$ נסמן $aR := \langle a \rangle := \{a \cdot b \mid b \in R\}$ הוא אידיאל.
6. $I = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(0) = 0\}$.
7. נוכל להזכיר את 4 עוד: "(הכללה של הכללה היא הכללה. זה סגור להכללה. זה קורה הרבה במתמטיקה")

$$I = aR + bR = \{ar + bs \mid r, s \in R\}$$

וניתן להכליל עוד באינדוקציה.

הגדה 29. אידיאל I נקרא ראשי אם הוא מהצורה aR עבור $a \in R$ כלשהו.

סימון 3. $Ra =: (a) =: \{ar \mid r \in R\}$

הגדה 30. תחום שלמות נקרא תחום ראשי אם כל אידיאל שלו ראשי.

הערה 14. באנגלית, Principal Ideal Domain, או בקיצור PID. עצה מפורסמת מהרוביוטיקה היא לא לחפש "PID" בgoogle.

הערה 15. אנחנו סימנו אידיאל שנוצר ע"י $a \in R$ ב- aR ובקורסוס מסוימים, Ra , באופן כללי אפשר לדבר על אידיאל שמאל שמאלי ואידיאל ימני. תחת ההנחה שהחוג קומטיבי שני הסימונים שולטים בכל מקרה.

משפט 25. $b - R \neq \{0\}$ תחום ראשי אז כל אי פריק הוא ראשוני.

(את הכוון השני כבר הוכחנו בעבר תחומי שלמות באופן כללי)

הוכחה. יהי o אי פריק (א"פ). יהי $a, b \in R$ כך $ab \mid p$. ניעזר באידיאל $I = Ra + Rp$. במקרה ראשי, קיים $c \in R$ כך $ab \mid c$ ו- $a, p \in I$, $I = Rc$. כלומר $a \mid c$ או $p \mid c$ או $a \mid p$.

• היפך $c \in I \subseteq R \subseteq I \subseteq R \subseteq R \cdot 1 \in I \subseteq R \subseteq R \cdot 1 \in I \subseteq R \subseteq R \cdot 1 \in I \subseteq R$. נכפיל ב- b ונקבל $ra + sp = 1$.

• אם $p \mid a$ אז $a \mid p$ ולכן $a \mid c$ ו- $c \sim a$.

מסקנה 7. אם R תחום שלמות ראשי אז יש פריקות ייחודית למיניהם עד כדי חבורות.

משפט 26. יהיו $a, b \in R$, אז a, b זרים אם $\forall c \in R: c \mid a \wedge c \mid b \implies c \in R^x$.

הגדה 31. יהי $g \in R$ כך ש-:

1. $g \mid a \wedge g \mid b$

2. $\forall \ell \in R: \ell \mid a \wedge \ell \mid b \implies \ell \mid g$

אז g הנ"ל הוא הגורם המשותף המקסימלי של a, b , והוא $\gcd(a, b)$. עבור $a, b \in R$ זרים, $\gcd(a, b) = 1$.

מסקנה 8. עבור $a, b \in R$ זרים, $\gcd(a, b) = 1$.

משפט 27. יהי R תחום שלמות ויהי $r, s \in R$ כך $ra + sb = g$ אשר מחלק את a, b . אז:

1. $\gcd(a, b) = g$

2. ה- \gcd מוגדר ביחידות עד לכדי חבורות.

3. בתחום ראשי, לכל a, b קיים g כנ"ל.

הוכחה.

1. יהי $\ell \mid a, b$ אז $\ell \mid ra, sb$ ו- $\ell \mid g$.

2. מ-1 (בערך) אם g, g' מקיימים את היותם \gcd אז $g \mid g'$ ו- $g' \mid g$ ולכן $g = g'$.

3. נסמן $I = Rg$. אז $I = Ra + Rb$ וקיים $r, s \in R$ כך $ra + sb = g$ וסיימו מ-1.

גם הכוון השני נכון:

משפט 28. יהי R תחום שלמות ויהי $a, b \in R$. נסמן $g = \gcd(a, b)$, אז קיימים $r, s \in R$ כך $ra + sb = g$.

מסקנה 9 (אלגוריתם אוקלידי המורחב). בתחום ראשי, אם a, b זרים אז $\exists r, s \in R: ra + sb = 1$.

משפט 29. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ הוא תחום ראשי.

הוכחה. יהי $I \subseteq \mathbb{F}[x]$ אידיאל. אם $I = \{0\}$, הוא ראשוני. אחרת, $\{0\} \neq p \in I$, אז: יהי $f \in I$, והוא פולינום מדרגה מינימלית, ויהי $f = qp + r$, $q, r \in \mathbb{F}[x]$, $\deg r < \deg p$. ידוע ש- I -deg $r < I$ -deg p . בפרט $f \in I \wedge p \in I \Rightarrow f = qp \in I$. אם $f = qp \in I$, אז $qp \in I$, $q, p \in \mathbb{F}[x]$. קיבלו סטירה למינימליות הדרגה של p .

הוכחה זהה עובדת בשבייל להראות ש- \mathbb{Z} תחום ראשי, אך עם דרגה במקומ ערך מוחלט. למעשה, מכיוון ניתן לקבל את ההכללה הבאה:

הגדרה 32. תחום שלמות נקרא אוקלידי אם קיימת $N_+ : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_+$ כך ש- $\forall a, b \in R \setminus \{0\} : \exists u, r \in R : a = ub + r$ ואו $a, b \in R : N(a) \leq N(ab)$.

ברגע שיש לנו את ההגדרה של תחום אוקלידי, N הפונקציה שתשתמש אותנו בשבייל להראות את ההוכחה שכל תחום אוקלידי הוא תחום ראשי (בדומה לערך מוחלט או \deg בהוכחות קודמות). ההפך נכון תחת השערת רימן המוכללת (לא רואים את זה צץ, נכון?).

איןנו אציה לחוג אוקלידי היא "חלוקת עם שארית", כאשר פונקציית הנadol N דורשת שהשארית תהיה "אופטימלית". בחוג הפולינומיים $N = \deg$ (פרטים בהמשך), ובchein המספרים השלמים $| \cdot |$.

דוגמה לחוג שאינו אוקלידי: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ הוא $\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

משפט 30. חוג אוקלידי \iff תחום פריקות יחידה (גרסה מוכללת של המשפט היסודי של האריתמטיקה).

משפט 31. חוג אוקלידי \iff תחום ראשי.

(הוכחה בוויקיפדיה)

לדוגמה בחוג לעיל $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ אי פריקים.

דוגמה (חוג השלמות של גאוס).

$$R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

הנורמה:

$$N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad N(a + bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$$

בדומה להוכחה לפיה הערך המוחלט של מושג הוא כפלי, ניתן להראות ש- N כפלי. מי הם ההפרכים ב- $\mathbb{Z}[i]$? מי שמקיים $\alpha\beta = 1$:

$$N(\alpha)N(\beta) = 1 = N(1), \quad \alpha = a + bi, \quad a^2 + b^2 = 1 \implies a + bi = \pm 1, \pm i$$

בנחתה שמדוברת נורמה צו, החוג הוא אוקלידי (תנאי זה הכרחי אך לא מספיק).

הערה 16. למספרים הראשוניים בחוג השלמות של גאוס קוראים "ראשוניים גאוסיאניים", והם מקיימים תכונות מעניינות. בפרט אפשר להוכיח ש- p הוא ראשוני בחוג השלמות של גאוס אם $N(p) = 4n + 3$ או $p \equiv 1 \pmod{4}$ כאשר \equiv יחס החברים.

שימו לב ש- \mathbb{Z} בתוך $\mathbb{Z}[i]$ לא סגורים לבלתי.

הגדרה 33. $I \subseteq R$ אידיאל נקרא ראשוני אם $\forall a, b \in R : (a \cdot b) \subseteq I \iff a \in I \text{ או } b \in I$.

הגדרה 34. אידיאל $I \subseteq R$ נקרא אירירוק אם $\forall a, b \in R : (a \cdot b) \subseteq I \iff a \in I \text{ או } b \in I$.

רلينו, שבתחום הראשוני פריך אם ורק אם ראשוני. ניתן להראות דומה ניתן לטעון ש-:

משפט 32. R תחום ראשי, אז I ראשוני אם ורק אם I אירירוק.

הגדרה 35. יהיו R תחום שלמות [אפשר להעסיק גם עם אידיאל ימני ושמאלי] ונניח ש- $I \subseteq R$ אידיאל. אז $|I| = R/I := \{a + I \mid a \in R\}$ הוא חוג (בגדרת $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$ כאשר הפעולות:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \bullet$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I \bullet$$

עקרונית צריך להוכיח שהחיבור/כפל לא תלוי בנציגים a, b כדי שהחוג יהיה מוגדר היטב (זה כמובן מתקיים בתחום ראשי).

1.2.3 ~ הרחבה שורות

משפט 33. בתחום ראשי R , אם I אידיאל אירירוק, אז R/I שדה. דוגמאות.

$\mathbb{Z}/\langle p \rangle$ • שדה.

תחום ראשי, ידוע $x^2 + 1$ אי-פריק. לכן $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}$. הרעיון: נוכל להסתכל על p פולינום המבוטא כמו:

$$p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b = ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle$$

ואם נכפיל שני יצורים כאלו:

$$((ax + b) + I) + (cx + d + I)) = acx^2 + (ad + bc)x + bd + I$$

אך ידוע $bd - ac + (ad + bc)x + I = x^2 + 1$ כי זה האידיאל שלנו עד לכדי נציג, ככלומר מותקים שווין $I - I$ כפל מרוכבים. אפשר גם להראות קיום הופכי וכו'.

הוכחה. יהיו $a, b \in R/I$, אזי $a \neq 0$. אם $a \mid p$ אזי $p \in I$ (אם הוא היה מחלק את a אז $a = 0$) ולכן $ar + ps = 1$. סה"כ:

$$ar + ps + I = 1 + I \implies ar + I = 1 + I \quad \top$$

■

לכן $I + r$ הופכי של $I + a$ וסיימנו.

(למעשה זה אמ"מ – הכוון השני תרגיל בעבר הקורא).

הגדלה 36. יהיו R תחום שלמות, $a_1 \dots a_n \in R$ ו- $\ell = \text{lcm}(a_1 \dots a_n)$ אמ"מ:

$$\forall i \in [n]: a_i \mid \ell \quad .1$$

$$\forall b \in R: \forall i \in [n]: a_i \mid b \implies \ell \mid b \quad .2$$

דוגמה. $R = \mathbb{Z}$, $\text{lcm}(2, 6, 5) = 30$. משפט 34. יהיו $f \in \mathbb{F}[x]$ פולינום אי-פריק ממעלה 1. אזי קיים $\ell \in \mathbb{K}$ כך $\ell \mid f$ שורש.

הוכחה למשפט קונסטקרטיבית, ובה צריך להראות שהקבוצה:

$$\mathbb{K} = \{p(A_f) \mid p \in \mathbb{F}[x]\}$$

עם חיבור וכפל מטריצות, היא שדה. השיכון $\alpha: \mathbb{F} \mapsto \mathbb{K}$ משליך את \mathbb{K} ל- \mathbb{F} (ללא הוכחה בקורס, תלוי באקסימות הבחירה) לכל שדה \mathbb{F} קיים ויחיד שדה $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ סגור אלגברית.

דוגמה. \mathbb{R} ו- \mathbb{C} .

1.2.4 ~ חוג הפולינומיים

(ת-פרק זה לקוח מתרגול בקורס)

הגדלה 37. הדרגה של הפולינום היא $\deg(0) = -\infty$, $\deg(f) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$, ומגדירים

משפט 36.

$$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g \quad \deg(d + g) = \max\{\deg f, \deg g\}$$

הערה 17. חוג הפולינומיים הוא חוג אוקלידי כי פונקציית הגודל $N = \deg f$ מקיימת את התנאי של חוג אוקלידי. לכן ממשפט ההוא תחום ראשי.

מסקנה 10. לכל $f, g \in \mathbb{F}[x]$, אם $g \neq 0$ אז קיימים ייחדים פולינומיים $q, r \in \mathbb{F}[x]$ כך $q \mid f$ ו- $r = f - qg$.

הגדלה 38. נאמר שפולינום q מחלק את f אם $r = 0$ ומסמנים $f \mid q$.

מסקנה 11.

$$f(a) = 0 \iff (x - a) \mid f \quad .1$$

בשדה סגור אלגברי \mathbb{K} , אם $\deg f = n > -\infty$, אז f ל- n שורשים כולל ריבוי.

3. נניח ש- $f, g \in \mathbb{F}[x]$ כאשר $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ ושדה. אם $f \mid g$ מעל \mathbb{F} אז $f \mid g$ מעל \mathbb{K} .

הוכחה.

1. הוכחה למשפט בזו:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \text{נניח } f(a) = 0. \text{ אז קיימים פולינום } g \text{ כך ש-}g \cdot f = (x-a)g(x), \text{ קרי} \\ & \Leftarrow \text{נניח } 0 = f(a) = q(a)(a-a) + r(a) = r(a) \text{ וולכן } f = q(x-a). \text{ מושם ש-}r \text{ פולינום קבוע (דרגתו קטנה מ-1, כי חילקו ב-} (x-a) \text{ מדרגה 1), אז} \\ & \quad r(x) = 0. \end{aligned}$$

2. אינדוקציה

3. נוכחות ב- $\neg f$: אנו יודעים ש- $\neg P \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$. קיימים $g, r \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $0^r = f \cdot g$. הפירוק הזה הוא גם ב- $\mathbb{K}[x]$. מיחידות r , נקבל ש- $0^r \neq g$ כל מעלה K .

משפט 37. בהינתן $f \in \mathbb{F}[x]$ ו- $\lambda \in \mathbb{F}$ אז λ יקרא שורש מריבוי r של f אם $(x - \lambda)^n \mid f$ ואם $(x - \lambda)^{n+1} \nmid f$.

משפט 38. לא הנחתי בשיליה, הוכחתי בקונטראפוזיטיב ("הערת הכותב: ברמת כללי החיסק/גיזרה, קונטראפוזיטיב "שкол" להנחה בשיליה")

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]: f(\lambda) = 0 \implies \exists g \in \mathbb{F}[x]: f(x) = (x - \lambda)g(x)$$

משפט 39. (באינדוקציה על הטענה הקודמת) בהינתן \mathbb{F} שדה סגור אלגברית:

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]: \exists (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{F}, a_n \in \mathbb{F}: a_n \cdot f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

משפט 40. (מסקנה מהטענה הקודמת שנitin להוכיח באינדוקציה ללא הרחבת שדות) לפולינום $f \in \mathbb{F}[x]$ שאינו אפס יש לפחות אחד משורשיהם.

הערה 18. שימו לב! כל המסקנות שלנו על תחומיים אוקלאדיים ובפרט ראשיים תקפים גם על פולינומים. בפרט, ניתן לכתוב כל פולינום $[x] \in \mathbb{F}$ כמכפלה של גורמים איד-פרקיים ב- $\mathbb{F}[x]$ (אם \mathbb{F} סגור אלברית, אלו גורמים לינאריים) עד לכדי סדר וחברות (קבועים).

הערה 19. שימו לב שהחקיק נזכיר מהמשפטים לעיל נכונים בעבר פולינומיים מעל שדה ולא מעל כל חוג (בפרט, המשפט לפחות לפיו חוג הפולינומיים בתחום אוקלידי).

עתה נציג משפט פשוט אחד מועלם מתמטיקה B, שלעיטאים ממשמש לנויחס שורשי פולינום u^m לפרקנו.

מסקנה 12. $\forall A \in M_n(\mathbb{F}). \forall k \geq n. \exists p(c) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]: A^k = p(A)$ (אחרת ניתן $\gcd(a, b) = 1$ ואזי $a \mid \alpha_0 \wedge b \mid \alpha_n$ ולכן n מחלק את k).

ממסקנה זו נובע האלגוריתם לביטוי A^{n+c} כהומוגניתה ליניארית של $A^{n-1} \cdots A^1$ שמופייע בסוף הסיקום.

(1.2.4.1) פונקציות רצינליות ומספרים אלגבריים

אין-טואצ'יה: הרעיון של פונקציה רצינלית היא להיות "פוליגום חלקי פוליגום". נפרמל את הדבר הזה בעבר מרחב פוליגומים מעל כל שדה.

משפט 42. בהינתן \mathbb{F} שדה הקבוצה $\{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{F}[x], g \neq 0\}$ משירה את יחס השקילות הבא:

$$(f, g) \sim (\tilde{f}, \tilde{g}) \iff f \cdot g = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$$

סימון 4. נסמן כל איבר בחלוקת השקלות ע"י $\frac{f}{g}$ שמייצגים אותו.

הגדלה 39. שזה הפונקציות הרציניות הוא הקבוצה $[x]_Q$ היא אוסף מחלקות השקילות של ~ מהמשפט הקודם, עם פעולות החיבור והכפל הבאות:

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{f}}{g\tilde{g}} \wedge \frac{f}{g} + \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{g} + g\tilde{f}}{g\tilde{g}}$$

למה 3. הגדרות הפעולות לעיל מוגדרות היטב (כלומר הן לא תלויות בנסיבות)

משפט 43. $Q[x]$ שדה, כאשר $\frac{0}{1}$ הניטרלי לחברו ו- $\frac{1}{1}$ הניטרלי לכפל.

המלה. לקרווא שוב את פרק 2.1, "על ההבדל בין פולינום לפולינום", בו נבחן שלמרות ש- $4 = |\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2|$, ישנו אינסנס פולינומים מעל השדה הזה.

אינטואציה. למעשה הגדיר שדה הפסיכיות הרציניות הוא איזומורפית (אנוגנית), ולכן נתייחס אליו כאילו הוא שווה ל-**ל:**

$$Q[x] \cong \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \in \mathbb{F}[x] \right\}$$

כאשר $\mathbb{F}[x]$ חוג הפולינומיים מעל השדה \mathbb{F} . עוד כדאי לציין ש- $\mathbb{Q}[x]$ מכיל עותק של $\mathbb{F}[x]$ (עד לכדי איזומורפיזם) בעבר $1 = g$ פולינום היחידה. כמובן ש"איזומורפיזם" בהקשר זהה מדבר על העתקה (לא בהכרח ליניארית) ששמירת את פעולות החוג.

משפט 44. לכל p ראשוני $x \in \mathbb{F}_p : x^p = \forall x \in \mathbb{F}_p$.

הערה 20. זהה מסקנה ישירה מהמשפט הקטן של פרמה.

הגדירה 40. מספר מרוכב $\alpha \in \mathbb{C}$ נקרא טופר אלגברי אם קיים פולינום $f \in \mathbb{Q}[x] \neq 0$ כך ש- $0 = f(\alpha)$.

הגדירה 41. מספר מרוכב שאינו אלגברי נקרא מספר טורנשצנדי.

דוגמאות. עבור $\alpha \in \mathbb{Q}$, נבחן ש- $\sqrt{\alpha}$ הוא אלגברי כי הוא שורש של $\alpha - x^2$. קיימות הוכחות (מסובכות מאוד, שבחלט לא בוחמן של הקורס) לפיהן e ו- π הם מספרים טורנשצנדנטיים.

משפט 45. בהינתן $V \subseteq \mathbb{C} : xV \subseteq V \neq 0$ תמיד, אם ורק אם x אלגברי.

הוכחה. נגדיר $T_x : V \rightarrow V$ כך ש- $T_x(v) = xv$ (ההעתקה מוגדרת היטב מהנתון). מקיים-המילטון $0 = f_T(T) = T_x(v) = xv$. אז:

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^n a_n t^n \implies 0_V = f(T)v = \sum_{i=1}^n a_n T^n v = \left(\sum_{i=1}^n a_n x^n \right) v = f(x)v$$

בפרט עבור $v \in V \setminus \{0\}$ יתקיים $f(x) = 0$ ולכן x אלגברי. ■

המשך בעמוד הבא

Primary Decomposition 1.3

1.3.1 ~ מרחבים T -שמורים וציקליות

הגדלה 42. נניח ש- V מעל \mathbb{F} , ו- $V \rightarrow U$ ט"ל. אז $U \subseteq V$ נקרא T -איווריאנטי/ T -שמור אם לכל $u \in U$ מתקיים $T(u) \in U$.

דוגמאות. $V, \{0\}$ הם T -איווריאנטיים. גם המ"ע (המרחבים העצמיים) הם T -איווריאנטיים.

הערה 21. שימו לב: אם $U \subseteq V$ ט"ל איווריאנטי, אז $T|_U : U \rightarrow T|_V$ ט"ל.

הערה 22. נניח ש- $u_k \dots u_1$ בסיס ל- U כי"ל, ו- $V \subseteq W$ ט"ל, ונגדיר ש- $w_n \dots w_{k+1} \dots w_1$ בסיס ל- W , אז $B = (u_1 \dots u_k, w_{k+1} \dots w_n)$ מקיים:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U] & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(כאשר $k \in M_k$ ו- $B \in M_{n-k}$). ותחת ההנחה שאכן T הוא U -איווריאנטי ו- W -איווריאנטי, אפשר לייצג אותו באמצעות שתי מטריצות מייצגות על האלבסן (ראאה הוכחת המשפט הבא)

משפט 46. יהיו V ט"ל, U, W ו- $U \oplus W = V$ ט"ל, U, W הם T -איווריאנטיים. אז (x) מתקיים:

הוכחה. משום ש- $V = U \oplus W$, קיימים בסיסים $(u_1 \dots u_k, w_{k+1} \dots w_n)$ ל- U ו- $(w_n \dots w_{k+1}, u_1 \dots u_k)$ ל- W . נבחין, שביצוע תחת הבסיס הזה:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & 0_{n \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times n} & [T|_W]_B \end{pmatrix}$$

זאת כי לכל $v \in V$ ניתן לייצgo בצורה ייחודית כסכום של $u \in U, w \in W$ כך $w - v = u + w$, כלומר $Tv = Tu + Tw$. ואכן תחת העתקת הקורדינאיות מהגדרת כפל וקטור במטריצה הטענה לעיל מתקיימת. כלומר:

$$p_T(x) = \begin{vmatrix} Ix - [T|_U]_B & 0 \\ 0 & Ix - [T|_W]_B \end{vmatrix} = |Ix - [T|_U]_B| \cdot |Ix - [T|_W]_B| = p_{T|_U}(x) \cdot p_{T|_W}(x)$$

כדרוש.

משפט 47. בהינתן $U_1 \dots U_k$ מרחבים T -איווריאנטיים כך ש- $U_i = \bigoplus_{i=1}^k U_i$, מתקיים

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם.

הגדלה 43. יהיו V ט"ל מעל \mathbb{F} , $T : V \rightarrow V$ ט"ל ו- $v \in V$ וקטור. אז תת-המרחב-הציקלי הנוצר מ- T ע"י v הוא

$$\mathcal{Z}(T, v) := \text{span}\{T^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

משפט 48.

• $\mathcal{Z}(T, v)$ של V – טרוויאלי.

• $\mathcal{Z}(T, v)$ ט"ל – טרוויאלי גם.

עתה נציג ממשהו נחמד. אם V נוצר סופית, גם $\mathcal{Z}(T, v)$ נ"ס. נגיד שהיה $k \in \mathbb{N}_0$ מינימלי, כך שמתקיים $T^k v + a_{k-1} T^{k-1} v + \dots + a_0 v = 0$. לכן קיימים לא טרוויאים כך $T^k v + a_{k-1} T^{k-1} v + \dots + a_0 v = 0$. איז $\mathcal{Z}(T, v)$?

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כאשר השורה الأخيرة כי:

$$T(T^{n-1}v) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k v$$

הגדה 44. $A_f = [T]_B$ לעיל היא המטריצה המצורפת לפולינום $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$.

הערה 23. "Companion Matrix", ולוועטים קרויה בעברית "מטריצה מלואה".

הערה 24. למעשה, ככה ניתן להוכיח את קייל-המילטון: אפשר לפרק אינדוקטיבית את המרחב לתמ"ווים ציקליים, שהצמצום עליהם יתנהג כמו המטריצה המלאה. ההוכחה זו לא דורשת הרחבות שדות והיא אינטואיטיבית יותר.

1.3.2 ~ הפולינום המינימלי

דיברנו על הפולינום האופייני ($f_A = \det(Ix - A)$). עוד ציינו בהינתו מטריצה, המטריצה המצורפת מקיימת $f_{A_f} = f(x)$.

משפט 49. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נביט בקבוצה $I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] : p(A) = 0\}$ איז אידיאל, קיים וייחיד ב- I_A פולינום מתוקן בעל דרגה מינימלית.

הגדה 45. לעיל יקרא הפולינום המינימלי.

הוכחה. נבחן כי $I_A \subseteq 0$. סגירות לחיבור – ברור. תוכנות הבליעה – גם ברור. סה"כ אידיאל. $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות ולכן נוצר ע"י פולינום יחיד $(p) = p' \sim p$. אם $p' \in I_A$ אז $p \in I_A$. אם נקבע אותו להיות מתוקן אז הוא היחיד (חברות בשדה הפולינומים נבדلت ע"י כפל בפולינום קבוע). לפולינום הנ"ל נקרא הפולינום המינימלי של A והוא m_A . באותו האופן, עבור ■ $T: V \rightarrow V$ ט"ל נתן להגדר את M_T .

טעمين 5. יהיה הפולינום המינימלי של המטריצה A .

הערה 25. אם $p \in \mathbb{F}[x]$ כך $p(A) = 0$, אז $p \in I_A$ ומתקיימים $m_A \mid p$.

הערה 26. אנו יודעים ש- $m_A \mid f_A(A) = m_A(A) = 0$, וכך $f_A \in I_A$ כי ממשפט קיילי המילטון $f_A(A) = 0$ כאשר I_A האידיאל של המאפיינים של A . מוהיו מרחיב הפולינומים תחום ראשי, $m_A \mid f_A$ כדרושים.

דוגמה. עבור $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז $f_A = (x-1)^m$. לא בהכרח $m_a = f_a = (x-1)^m$, אך לפחות $m_a \mid f_a$ – לדוגמה בעבור אופרטור הגזירה מתקיים $D: \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$ $m_D = x^{n+1}$ כי יש פולינומים שנדרש לכזכור n פעמים ע"מ x לקבלת 0 , לדוגמה ■.

משפט 50. תהא $A = A_f$ המטריצה המצורפת ל- A . אז $f_A = m_A$.

משפט 51. אם A מייצגת את $T: V \rightarrow V$ אז $m_A = m_T$ (כלומר, הפולינום המינימלי לא תלוי בבחירה בסיס).

הוכחה. נבחר בסיס V, B . יהיו $p \in \mathbb{F}[x]$ ו- $I_A = I_T$. שני האגפים מותאמים ביחד, ולכן ■.

הערה 27. נניח ש- A אלכסונית, והע"ע השוניים הם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (כלומר $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$) אז $f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$.

הוכחה. בה"כ A אלכסונית, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (המספרים בהמשך). מיצגת העתקה $T: V \rightarrow V$ ייש בסיס של ו"עימם $B = (v_1, \dots, v_n)$. איז $(\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)) (v_j) = 0$. אז v_j מותאים ל- λ_i קלשו וכך זה מותאמת. ידוע $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$. אם נוריד את אחד המכופלים אז הע"ע שירד לא יתאפשר/לא יאפשר את הוקטור העצמי המזמין, כלומר כל הגורמים הלינארים דרושים כדי לאפס את T , ומכאן המינימליות והשווון ל- m_A . ■

הערה 28. אם $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$, איז ניתן לחשב על $m_A \mid A \in M_n(\mathbb{K})$ ולא משתנה ללא תלות בשדה.

משפט 52. אם $T: V \rightarrow V$ ט"ל $g(T), h(T) \in \mathbb{F}[x]$ ו- $g \circ h = h \circ g$ ■.

הוכחה.

$$(g(T) \circ h(T))(v) = (g \cdot h)(T)(v) = (h \cdot g)(T)(v) = (h(T) \circ g(T))(v)$$

лемה 4 (למת המחלק של פולינום מינימלי). יהיו m_T הפולינום המינימלי של $T: V \rightarrow V$ ו- $f(x) \mid m_T(x)$ ו- $\deg f > 0$ איז $f(T) \neq 0$.

הוכחה. משום ש- $f \mid m_T$ איז קיים $g \in \mathbb{F}[x]$ כך $f \cdot g = m_T$. נניח בשילhouette ש- $f(T) \neq 0$. אז:

$$f(T) \circ g(T) = \underbrace{m_T(T)}_0 \implies \underbrace{f(T)^{-1} \circ (0)}_0 = g(T)$$

ידוע:

$$\deg m_T = \underbrace{\deg f + \deg g}_{>0} \implies \deg g < \deg m_T$$

בה"כ g מתוקן וקיים סטירה למינימליות של m_T , אלא אם כן (x) פולינום ה-0 אבל אז $m_T = 0$ בסטירה להגדתו של פולינום מינימי.

הוכחה זהה עבור מחלק של m_A , עבור A מטריצה.
משפט 53. אם λ ע"ע של T אז בהינתן $p(T) = 0$ מתקיים $p(\lambda) = 0$

הוכחה. קיימים $v \neq 0$ ו"ע כלומר λ , $Tv = \lambda v$ ולבסוף:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad 0 = 0v = p(T)(v) = \left(\sum_{i=0}^n a_i T^i \right) (v) = \sum_{i=0}^n a_i T^i(v) = \left(\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \right) v = p(\lambda)v$$

מהיות $0 \neq v$ קיבל $0 = p(\lambda)$ כדרوش.

"זה טבעי, זה טבעי וזה ממשש טבעי". מה זה אומר שזה לא טבעי? יש בזה קצת ביצה".
משפט 54. אם λ ע"ע של T אז $m_T(\lambda) = 0$

הוכחה. כיון אחד הוא מקרה פרטי של המשפט הקודם. מהכיוון השני, ידוע מושפט בז' $m_T(\lambda) = 0$. לפי מושפט בז' $m_T(x - \lambda) | f_T(x - \lambda)$ וסה"כ λ ע"ע של T .

$$m_A(x) | f_A(x) | (m_A(x))^n \quad \text{משפט 55}$$

הוכחה. נותר להוכיח $f_A(x) | (m_A(x))^n$ (השאר משפטיים קודמים). ידוע שפולינום מינימי/אופייני נשארים מעל כל שדה שמכיל את \mathbb{F} . לכן, ניתן להניח שהוא מתפרק לגורמים לינאריים. ראיינו שאם $f, g \in \mathbb{F}[x] \subseteq \mathbb{K}$ ומתיקיים $f | g$ מעל \mathbb{F} . אז $f | g$ מעל \mathbb{K} .

$$\left(\sum n_i = n \right) \quad f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}, \quad m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \quad (1 \leq m_i \leq n_i) \quad (m_A(x))^n = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n|m_i}$$

בגלל ש- $n \leq 1$ אז $m_i \leq n$ $\implies n \leq m_i \cdot n$

הוכחה זהה עבור $T: V \rightarrow V$ עם $\dim V = n$. נניח ש- $g | f_A$. אז g פריק. **מסקנה 13** (שימושית!). נניח ש- g אי פריק.

הוכחה.

$$g | f_A | (m_A)^n$$

ידוע g אי פריק, ולכן ראשוני (כי $\mathbb{F}[x]$ תחום ראשי) ולכן $g | m_A$.

משפט 56. נניח ש- A בלוקים עם בלוקים על האלכסון, כך $A = \text{diag}(A_1 \dots A_k)$ אז מתקיים $m_A = \text{lcm}(m_{A_1} \dots m_{A_k})$.

במקרה שלנו, הנ"ל הוא הפולינום בעל הדרגה המינימלית שמתחלק בכל ה- A_i -ים. באופן כללי, מתקבל כיוצר של אידיאל החיתוך בתחום הראשי. ככלומר:

$$I = (\text{lcm}(A_1 \dots A_k)) = \bigcap_{i=1}^n Rm_{a_i}$$

(הבררת הסימון: $(Ra = (a)) = \langle a \rangle$)

הוכחה (למשפט לעיל). לכל $g \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים:

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}$$

בבירור מתקיים $g(A) = 0$ אם ורק אם $\text{lcm}_{i=1}^k m_{A_i} | g$. לכן $g(A_i) = 0 \forall i \in [k]$.

מסקנה 14. בפרט הע"ם הם שורשים של m_T הפוליאנום המינימלי.

מסקנה 15. תהי ט"ל $T: V \rightarrow V$ ור' V מונ"ס, אז בהינתן U_1, \dots, U_k מרחבים T -שמורים כך ש- $m_T = \text{lcm}(\{m_{T|_{U_i}} : i \in [k]\})$ נניח ש- $T, S: V \rightarrow V$ ט"לים. אז:

1. אם T, S מתחלפות, אז $\text{Im } S, \ker S$ הם T -איינוערייאנטים (ולחפץ).

2. אם T, S מתחלפות ו- $W \subseteq S$ תמי' הוא T -איינוערייאנטי, אז גם $S(W)$ הוא T -איינוערייאנטי.

3. אם T -איינוערייאנטים אז $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ הם T -איינוערייאנטים.

4. אם $f(T) = f(W)$ תמי' T -איינוערייאנטי, אז W גם $f(T)$ -איינוערייאנטי.

הוכחה.

1. יהא $v \in V$ כך ש- $v \in \text{Im } S$, אז קיים $u \in \text{ker } S$ כך ש-

$$Tv = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = (S \circ T)(u) = S(T(u)) \in \text{Im } S \implies Tv \in \text{Im } S$$

ובoor

$$S(T(v)) = (ST)v = (TS)v = T(S(v)) = T(0) = 0 \implies Tv \in \ker S$$

2. יהי $w \in W$ כך ש- $w \in S(W)$. קיים $v \in V$ כך ש-

$$Tv = T(S(w)) = S(T(w)) \in S(W)$$

כי

3. ראיינו בתרגול הקודם

4. יהי $w \in W$

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad f(T)w = \left(\sum_{i=0}^n a_i T^i \right) (w) = \sum_{i=0}^n a_i T^i(w)$$

באינדוקציה W תמי'ו ולכון סגור וסימנו.

1.3.3 ~ ניסוח והוכחת משפט הפירוק הפרימרי

משפט 58 (מקרה הבסיס של משפט הפירוק הפרימרי). ("מאוד חשוב") יהיו $V \rightarrow V$ מ"ו מעל \mathbb{F} . נניח $T: V \rightarrow V$ ט"ל. נניח $f(T) = 0$ עבור $\text{gcd}(g, h) = 1$.

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$$

ואם $f = m_T$, אז g, h הם הפוליאנומים המינימליים לצמצום T על תת-המרחבים לעיל בהתאם.

הבררת הכוונה ב"פוליאום המינימלי לצמצום T על תת-המרחבים": בהינתן $T_u = T|_U: U \rightarrow U$, $T = U \oplus W$ ובאופן דומה $m_T = m_{T_U} \cdot m_{T_W}$.

הוכחה.

- ידוע $h = g \cdot h$ ולכן $\exists a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-:

$$\underbrace{(a(T) \circ g(T))(v)}_{\in \ker h(T)} + \underbrace{(b(T) \circ h(T))(v)}_{\in \ker g(T)} = V$$

הטענה ש- $(aT \circ gT)v \in \ker hT$ נובעת מכך ש-[כasher פועלות הפעולות בין פולינומים מוגדרת להיות הרכבה]:

$$(hT)((aT \circ gT)v) = hT((ag(T))v) = (hag)Tv = ((agh)T)v = ((af)T)v = (aT)(fT)v = (a(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

(אאת כי הרכבת פולינומים קומוטטיבי, כל עולמות הדין אסוציאטיביים, וכאשר ההעתקה aT מקבל את 0 היא תחזיר אפס וסה"כ $0v = 0$ כדרכו). מהכיוון השני:

$$(gT)((bT \circ hT)v) = gT((bh(T))v) = (gbh)Tv = ((bf)T)v = (bT)(fT)v = (b(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

כלומר אכן $(bT \circ hT)(v) \in \ker gT$ ו- $(aT \circ gT)(v) \in \ker hT$. מהשוינו לעיל סה"כ אכן (m_T אינואריAnti כי הסכום אכן ישר שכן):

$$\forall v \in \ker gT \cap \ker hT: 0 + 0 = (aT \circ gT)v + (bT \circ hT)v = v$$

זהינו, $V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$.

- עתה נוכיח את החלק השני של המשפט. נניח $f = m_T, g = m_T$, ונסמן:

$$\begin{array}{ll} W_2 = \ker h(T) & W_1 = \ker g(T) \\ T_2 = T|_{W_2} & T_1 = T|_{W_1} \end{array}$$

וכן B_1 בסיס ל- W_1 , B_2 ל- W_2 . לכן $B = B_1 \uplus B_2 = B_1 \cup B_2$. משום שהראינו ש- W_1, W_2 הם T -אינואריAnti (כי gT, hT מותחלפות):

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

מהמשפט שראינו, $m_{T_1} | g$ ו- $m_{T_2} | h$. ברור ש- $m_T = \text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})$.

$\deg m_{T_1} = \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} = \deg(m_{T_1} \cdot m_{T_2}) \geq \deg(\text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})) = \deg m_T$ ולכן כל ה"אשים לעיל הדוקים ושווין בכל מקום.

$$\deg m_{T_1} \leq \deg g \wedge \deg m_{T_2} \leq \deg h$$

אם אחד מהשוינות לא הדוקים, אז:

$$\deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} < \deg g + \deg h$$

וסתירה למה שהראינו. לכן:

$$(m_{T_1} | g \wedge \deg m_{T_1} = \deg g) \implies m_{T_1} \sim g$$

אבל שניהם מתוקנים ולכן שוויים. כנ"ל עבור h .

סה"כ הוכחנו את כל חלקי המשפט, כדרכו. ■

דוגמה. נסמן $V = \ker T^2 \oplus \ker(T - I)^3$. החלק הראשון של המשפט אומר $f(T) = 0$, $f(x) = x^2(x - 1)^3$. החלק השני אומר שאם $f = m_T$ אז x^2 הוא הפולינום המינימלי של $T|_{\ker T^2}$ וכן $(x - 1)^3$ המינימלי של $T|_{\ker(T - I)^3}$. **משפט 59 (משפט הפירוק הפרימרי).** יהיו $T: V \rightarrow V$ והפולינום המינימלי של T , m_T , ונניח ש-:

$$m_T = g_1 \cdots g_s \quad \forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

ובנוסף g_i הוא הפולינום המינימלי של $T|_{\ker g_i(T)}$

"יש לו שם מפוצץ אז הוא כנראה חשוב"

הוכחה. באינדוקציה על s

- **בסיס:** עבור $s = 2$ המשפט שהוכחנו.

- **צעד:** נסמן:

$$h(x) = g_s(x), \quad g(x) = \prod_{i=1}^{s-1} g_i(x)$$

ואז:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \implies \gcd(g, h) = 1$$

מהמשפט שקיבלנו:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T) \stackrel{\text{נק}}{\implies} \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

וכדי להוכיח את החלק השני של המשפט, נגדיר

$$\ker h(T) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T|_{\ker h(T)}) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

■

הערה 29. בהתאם למקרה הבסיס, מספיק היה להניח $f = g_1 \cdots g_s = f$, ולא היה באמת צורך להניח $f = m_T$ ספציפית, אם רק רוצים להראות קיום פירוק (ולא צריך להראות שה g_i הם הפולינומיים המינימליים לצמצום T על התמ"דים). למעשה השתמש בגרסה מוחלשת זו של משפט הפירוק הפרימרי.

משפט 60 (תוצאה 1 ממשפט הפירוק הפרימרי). T לכיסינה אמ"מ $m_T = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)$ מתפרק לגורמים לינאריים $\lambda_i \neq \lambda_j$ שווים זה לזה. $\implies \lambda_i \neq \lambda_j$

הוכחה.

לפי המשפט, אם נסמן (λ_i) :

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(T - \lambda_i I)$$

כלומר V סכום ישיר של המ"ע של $\lambda_s, \dots, \lambda_1$. לכל מרחב עצמי מממד k_i קיימים v_1, \dots, v_{k_i} בסיס כך ש- $v_j \in [j]$, ומהסכום היישר ידוע $\sum_{i=1}^s k_i = n$ ומהיות איחוד בסיסים של מ"ע גם בסיס (כי המ"ע זרים) מצאנו בסיס מלכון הוא אוסף הבסיסים של המ"עים.

אם T לכיסינה, אז הפולינום המינימי הוא $\text{lcm}(k_i)$ של הפולינומיים המינימיים של הבלוקים על האלכסון. הבלוקים על האלכסון הם λ_i הע"ע מוגדל 1, ולכן $\text{lcm}(k_i)$ שלהם הוא מכפלת $\lambda_i - x$ כאשר $\lambda_i - x$ הע"עים השונים, ושה"כ m_T מכפלת גורמים לינאריים שונים. ■

משפט 61 (תוצאה 2 ממשפט הפירוק הפרימרי). נניח $T: V \rightarrow V$ לכיסינה, וקיים $W \subseteq V$ תמי"ז-שמור. אז $T|_W$ לכיסינה.

הוכחה. נסמן $S = T|_W$. אנחנו יודעים $m_T(S) = 0$ ולכן $m_T(T) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i) \cdot m_S$ ולכן m_S מתפרק לגורמים לינאריים זרים, סה"כ S לכיסינה. ■

סיכום. $T: V \rightarrow V$ ט"ל, ו-:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \wedge m_T(x) = \prod_{i=1}^s g_i$$

ואז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(g_i(T)) \wedge \forall i: m_{T|_{\ker g_i(T)}} = g_i$$

המשך בעמוד הבא

1.4 Jordan Form

1.4.1 ~ מיציאת שורשי פולינום אופייני ממולה חמיישית ואילך

נבחן בבעיה: $M_5(\mathbb{Z}) = A$, קבעו אם היא לכסינה מעל \mathbb{C} .

- נחשב את $f_A(x)$
- נמצא שורשים, אלו הם הע"ע
- לכל ע"ע נחשב את λ
- אם סכום הממדים מסעיף ג' הוא 5, אז היא לכסינה
- T לכסינה אם קיים בסיס ו"ע אם ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי

אבל (המתמטיקאי, לא מילת הניגוד ולא מילה נרדפת ליגון) הוכח שאין פתרונות לפולינומים ממולה חמיישית יותר, וגולואה מצא דוגמאות לפולינומים שאյ' אפשר לבצע עליהם נוסחת שורשים ופיתח את תורה להרחבת שדות לשם כך (תורת גלוואה). הינו הטעקים ביססו את הגיאומטריה שלהם באמצעות דברים שאפשר לבדוק עם שדה ומוחגה. באמצעות כלים של תורה גלוואה אפשר לראות מה אפשר לעשות עם האמצעים הללו, ולהוכיח שלוש בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור – האם אפשר לרבע את המעגל (האם אפשר לבנות באמצעות שדה ומוחגה ריבוע שישתו שווה לשטח המעגל), או במילים אחרות, האם אפשר למצוא את $\sqrt{\pi}$ – אי אפשר כי זה לא מספר אלגברי. שאלות אחרות היו, בהינתן קוביה, האם אני יכול למצוא קוביה בונפח כפול? באותה מידת' אי אפשר למצוא את $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$. שאלת אחרת הייתה האם אפשר לחלק זווית ל-3 חלקים שווים.

גולואה הראה ש כדי לעשות את זה צריך למצוא שורשים של של כל מני דברים, ושבאמצעות סרגל ומוחגה אי אפשר לעשות זאת. בעיות שהיו פותחות לעולם המתמטי במשך אלפי שנים נפתרו בעזירת אותן התורות. בכלל שאין אלגוריתם למציאת פולינום ממולה חמיישית ואילך, ננסה לפתח כלים נוספים שיעזרו לנו למצוא שורשים לפולינומים הללו במקרים פרטיים.

אבל ניאלץ להabil את משפטה עליו כשות משלחת בגיל 26. גלוואה מת בגיל 21 מדו-krab.

מסקנה 16 (מסקנת הבדיקה של גלוואה). לא לכת לדווידרב.

■ הוכחה. ההוכחה מתקדמת ועוסקת בתורת גלוואה.

הגדרה 46. בהינתן $A \in M_n(\mathbb{C})$ נסמן $f_A^{\text{red}} := \prod_k (x - \lambda_k)^{r_k}$ כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j \iff \lambda_i \neq \lambda_j$.
משפט 62. f_A^{red} משלמת A .

$$f_A^{\text{red}} = \frac{f}{\gcd(f, f')}$$

■ הוכחה. נשאר כתרגיל בעבר הקורא. (נתנו לנו את זה בשיעורי הבית)

משפט 63. $f_A^{\text{red}}(A) = 0$ לכסינה אם $A = 0$.
лемה 5. $f_A^{\text{red}} \mid m_A$ לכסינה.

הוכחת הלמה. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ השורשים של A (אפשר בה"כ להרחיב שדה כדי שהם יהיו קיימים). אז אם λ_i ומתקיים $f_A^{\text{red}} \mid m_A$ אז $m_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{s_i}$

עתה נוכיח את החלק השני של הלמה (השווון). אם A לכסינה, אז יש בסיס של ו"עים ועם λ הוא ע"ע של ו"ע בבסיס B אז $m_A \mid f_A^{\text{red}}(A)$ וסה"כ $A v_\lambda - \lambda v_\lambda = 0$.

אם $m_A \mid f_A^{\text{red}}$ אז m_A מכפלה של גורמים לינארית זרים, וראינו גירירה לכלסיניות.

הוכחת המשפט באמצעות הלמה. A לכסינה אם $m_A(A) = f_A^{\text{red}}$,我们知道 $m_A(A) = 0$ ולכן A לכסינה אם $f_A^{\text{red}}(A) = 0$.

משום ש- f_A^{red} כולל את כל הגורמים הלינאריים של f_A , עבור $\deg f_A > 4$ נוכל למצוא את f_A^{red} באמצעות משפט 62, אגניו אויקלדי, וחילוקת פולינומים) ולקיים שהוא ממולה קטנה יותר, ואז נפרק גורמים לינאריים ל- f_A^{red} במקומות, ואז כבר יהיה קל למצוא את הריבוי כי נוכל להוציא מ- f_A^{red} גורמים לינאריים כגורם משותף החוצה.

1.4.2 ~ צורת ג'ירזון לאופרטור לינארו נילפוטנטי

(1.4.2.1) נילפוטנטיות

מטרה: בהינתן $T: V \rightarrow V$ נרצה לפרק את V לרכיבים ישרים של מרחבים T -איורייאנטים, קטנים ככל האפשר. **הגדרה 47.** יהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל. נאמר ש- V פריך ל- T אם קיימים כך ש:

$$V = U \oplus W \quad \wedge \quad \dim U, \dim W > 0 \quad \wedge \quad U, W \text{ are } T\text{-invariant}$$

הגדרה 48. יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור וכן $W \subseteq V$ אי-פריך ביחס ל- T אם הוא לא פריך ל- T .

מעטה ואילך (עד סוף הנושא), נניח ש- $f_T(x)$ מתפצל מעל f לגורמים לינאריים (כלומר, נרחיב לשדה סגור אלגברית). **הגדרה 49.** $T: V \rightarrow V$ נקראת העתקה נילפוטנטית אם קיימים $\mathbb{N} \ni n$ כך ש- $0^n = T^n$. באופן דומה תקרה מטריצה נילפוטנטית אם $0^n = A^n \in \mathbb{N}$.

הגדרה 50. עבור n המינימלי שעבורו $0 = 0/A^n = T^n$, אז n נקרא דרגת הנילפוטנטיות של T/A , ומסמנים $n(T)/n(A) = (x - \lambda)^r$ נילפוטנטית בא מושן פה. הרעיון: דבר מה שמתבטל.

משפט 64 (תוצאה 3 ממשפט הפירוק הפרימרי). בהינתן V אי-פריך ביחס ל- T , ובנήחה ש- $f_T(x)$ מתפצל לגורמים לינאריים, אז $n(T - \lambda I) = (x - \lambda)^r$. נוסף על כך $T - \lambda I$ נילפוטנטית ו- $r = m_T(x) = (x - \lambda)^r$.

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם $m_T(x) = (x - \lambda)^r$ לא מתפרק, הוא בהכרח לא קבוע אחרת $0 \neq m_T(T) = (x - \lambda)^r$ לינארי כלשהו (כי אם לא לינארי ניתן לפרק לגורמים לינאריים ואז $m_T = 1$ מתפרק וסתירה). סימנו עבור g_i

- אם $m_T(x) = (x - \lambda)^r$ מתפרק, אז נפרק לגורמים לינאריים (הנחנו שאנו מעל שדה סגור אלגברית) ונקבל $m_T = g_1 \cdots g_r$ כאשר g_i לינאריים, דהיינו ממשפט הפירוק הפרימרי, נניח בשיליה $g_i \neq g_j$ ומיהו $m_T = \text{מתקון } \text{gcd}(g_i, g_j) = 1$ מתקון נקבע $m_T(x) = g_i^r$ הוא מהצורה $(x - \lambda)^r$.

עתה ניגש להוכיח את החלק השני של הוכחה ($T - \lambda I$ מדרגה r). משום ש- r מיל' מדרגה r . מושם ש- $r \leq n$ ($T - \lambda I$) r ולכן $r \leq n$, ומהמינימליות של m_T נסיק r כדריש.

נסמן $I - T = S = T - \lambda I$ בקשר לעיל. עוד כדאי לבדוק ש- V הוא S -איורייאנטי (אך לא בהכרח אי-פריך ביחס ל- S) שכן $S(V) = T(V) - \lambda V \in V$

מה למדנו? שימוש שאנו יכולים לפרק (משפט הפירוק הפרימרי) את T למרחבים T -איורייאנטים פריקים מינימליים, או לכל U_i כזה נוכל להציג $I - \lambda_i I = S_i = T$ כזו כך שהיא נילפוטנטית. אם נוכל להבין טוב מה S_i עשויה למרחב שהוא שמורה עליו, נוכל להבין באופן כללי מה ההעתקה T עשויה לכל אחד מהמרחבים אליהם פריקנו אותן.

למה 6. תהי T העתקה כללית, אז אם $\ker T^i = \ker T^{i+1}$ לכל $i \geq j$ מתקיים $\ker T^i = \ker T^j$.

למה 7. תהי T העתקה כללית, אז $\ker T^i \supseteq \ker T^j \wedge \text{Im } T^i \subseteq \text{Im } T^j$ לכל $i > j$: $\ker T^i \supseteq \ker T^j \wedge \text{Im } T^i \subseteq \text{Im } T^j$.

משפט 65. תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה מעל מ"ונסים, $\dim V = n$, אז קיים $\mathcal{F}(T) \in [n]$ כך ש- $\ker T^{\mathcal{F}(T)+i} \wedge \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+i} = \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+i}$

הוכחה. מלמה 7, בהכרח:

$$\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \cdots \subseteq T^i \subseteq \cdots \subseteq V$$

נניח בשיליה שכל ההכלות עד $i = n$ הן נילפוטנטיות.

$$\dim \ker T < \dim \ker T^2 < \cdots < \dim \ker T^i \leq n$$

כלומר יש n מספרים טבעיים שונים בין $\ker T$ ובין 0 (לא כולל) ולכן $\dim \ker T < 0$. דהיינו קיימים כך $\mathcal{F}(T) \in [n]$ מתקיים $\ker T^{\mathcal{F}(T)+1} \supseteq \ker T^{\mathcal{F}(T)}$ ומלה $\mathcal{F}(T) \geq \mathcal{F}(T)$: $\ker T^{\mathcal{F}(T)} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+1} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+2} = \cdots$. ניכר ש- $\ker T^{\mathcal{F}(T)+i} \supseteq \ker T^{\mathcal{F}(T)+j}$ לכל $i > j$: $\ker T^{\mathcal{F}(T)+i} \supseteq \ker T^{\mathcal{F}(T)+j} \wedge \ker T^{\mathcal{F}(T)+i} \supseteq \ker T^{\mathcal{F}(T)+i-1} \supseteq \cdots \supseteq \ker T^{\mathcal{F}(T)+1} = \ker T^{\mathcal{F}(T)}$.

משפט 66. בהינתן T העתקה נילפוטנטית, אז $\mathcal{F}(T) = n(T)$.

סימון 6. $\mathcal{F}(T)$ לעיל סימנו (שמקבול אך ורק בסיכון זהה), וקרויה *"fitting index"* של T .

1.4.2.2) שרשאות וציקליות

הגדה 51. קבוצה מהצורה $\{v, T_1v, \dots, T^{k-1}v\}$ כאשר $T^{k+1}v = 0$ והוא המינימלי המקיים זאת, נקראת שרשota באורך k .
משפט 67. $V \rightarrow T: V \rightarrow V$ נילפוטנטית, אז כל שרשota בת"ל.

הוכחה. יהיו $\alpha_k \in \mathbb{F}$ כך $\sum_{i=0}^k \alpha_i T^{(i)}(v) = 0$. נניח בשיילה שהצירוף אינו טרויאלי. אז קיים j מינימלי שעבורו $\alpha_j \neq 0$. נניח n המקסימלי ש- T^n לא מאפס את v . אז:

$$T^{n-j} \left(\sum \alpha_i T^{(i)}(v) \right) = T^{n-j} \left(\sum_{i=j}^k \alpha_i T^i(v) \right) = \alpha_j T^{n-1}(v) + 0 = 0$$

אבל $0 \neq \alpha_j, T^{n-1}$ וזה סתירה. ■

תזכורת. תמ"ו שקיימים לו בסיס שהוא שרשota, נקרא ציקלי.

אנטידוגמה: ישנו מ"ווים שאינם T -ציקליים. למשל:

$$V = \left\{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = p(x) + h(y) \mid n \geqslant 0 \right\}$$

ו- T אופטור הגירה הפורמלית. כדי ש- V יהיה ציקלי, נדרש למצוא בסיס ציקלי שמדובר הוא לכל היותר דרגת הנילפוטנטיות. נניח ש- $n(T) = n+1$, וידוע ש- $\dim V = 2n+1$, ולכן $\dim V = n+1$ ולכן לא יכול להיות בסיס שרשota. לכן V אינו T -ציקלי.

הערה 30. هي $T: V \rightarrow V$ נילפוטנטית ו- $n \leqslant \dim V = n$ אז $n \leqslant n(T)$ וישנו שווין אמ"מ V ציקלי.
משפט 68. אם $T: V \rightarrow V$ נילפוטנטית ו- V ציקלי אז V אידי-פריק ל- T .

הוכחה. נניח בשיילה שישנו פירוק לא טרויאלי של V ל- T . אז $V = U \oplus W$ לא טרויאליים. נסמן $u \in U, w \in W$ כך $u = u + w$. וידוע $n < n(U) + n(W)$. בה"כ $\ell \geqslant \dim U + \dim W$. נסמן $B_v = \{v, T_1v, \dots, T^{n-1}v\}$.

$$T^k v = T^k u + T^k w$$

אך משום ש- T נילפוטנטית אז $n(T|_U), n(T|_W) \leqslant k$. ידוע $n(T|_U), n(T|_W) < k$ ולכן $T^k v \in B_v$ אבל $T^k v = 0$. ■

משפט 69. תהי $T: V \rightarrow V$ נילפוטנטית ונניח U תת-מרחב של V הוא T -אנוואריאנטי וציקלי, אז עבור $S = T|_U$:

$$\dim U \leqslant n(T). \quad 1.$$

$$\dim T(U) = \dim U - 1 \quad \text{Im}(T|_U) = T(U). \quad 2.$$

הוכחה.

$$\dim U = n(T|_U) \text{ וגם } n(T) \geqslant n(T|_U). \quad 1.$$

$T(U) = \text{span}(T_1v, \dots, T^k v)$ וא"ז $T(u) = T(\text{span}(v, \dots, T^k v)) = \text{span}(T_1v, \dots, T^k v)$ זו קבוצה בת"ל ופורש ■
את (U) ולכן $\dim T(U) = \dim U - 1$

הגדה 52. $U \subseteq V$ תמ"ו ציקלי יקרא ציקלי מקסימלי אם $\dim U = n(T)$.
משפט 70. לכל V מ"ו, $V \rightarrow T: V \rightarrow V$ נילפוטנטית קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.

הוכחה. קיימים $v \in V$ כך $0 \neq v \neq T_1v, \dots, T^{n-1}v$ ומטענה מקודם בת"ל ולכן ■
תמ"ו ציקלי מקסימלי.

משפט 71. נניח $U \subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. אז:

1. אם $T(U) \subseteq T(V)$ הוא גם ציקלי מקסימלי.

$$U \cap T(V) = T(U). \quad 2.$$

הוכחה.

1. $T(U) = \dim U - 1$. טענה:

$$\dim T(U) = n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1$$

וסייםמו.

2. ידוע $T(U) \subseteq U \cap T(V)$ כי $T(U)$ ציקלי ולכן שמור, וכן $T(V) \subseteq U$ והסקנו:

עתה נוכיח שווין באמצעות שיקולי ממד. אם לא היה שווין אז:

$$T(U) \subsetneq U \cap T(V) \subseteq U \implies \dim T(U) < \dim(U \cap T(V)) \leq \dim(T(U)) + 1 \implies U \cap T(V) = U$$

וזו סתריה כי:

$$U \cap T(V) \subseteq T(V) \implies n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1 \implies n(T) = \dim U \leq n(T) - 1$$

■

1.4.2.3) ניסוח כורת מייקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי

משפט 72 (המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי). נניח $T: V \rightarrow V$ ט"ל לינארית נילפוטנטית, $V \subseteq U$ תמ"ו ציקלי מקסימלי אז קיימים $W \subseteq V$ תמ"ו T -איוואריאנטי כך ש- $W = U \oplus W'$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n = n(T)$.

בבסיס: אם $n(T) = 1$ אז כל $W \subseteq V$ הוא T -איוואריאנטי. והיות שכל קבוצה בת"ל ניתנת להשלה לבסיס, אז $W = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ כאשר $B_V = (v := v_1, \dots, v_m)$.

צעד: ("עד", מעבר, אותו דבר, תקרוו להアイ שבא לכט") נניח שאנו יודעים את נכונות הטענה עבור $n(T) - 1$. נוכיח עבור $n(T) = n$. נצמצם את $T|_{T(V)}$ ציקלי מקסימלי. לכן, לפי ה.א. קיימים W_1 והוא T -איוואריאנטי כך ש- $T(V) = T(U) \oplus W_1$.

נגידיר $W_2 = \{v \in V \mid Tv \in W_1\}$. אז

лемה 8. ("למה א") לאו דוקא סכום ישר) וגם $U \cap W_1 = \{0\}$.

лемה 9. ("למה ב") בהינתן $U \subseteq V$ ו- $W_1 \subseteq W_2 \subseteq V$ ו- $U + W_2 = V$ וגם $U \cap W_1 = \{0\}$ אז קיימים $U \oplus W' = V$ ו- $W_1 \subseteq W_2 \subseteq W'$.

נניח שהוכחנו את הلمות. יהיו $w \in W_1$ ו- $w \in W_2$ ולכן $w \in W$. אז מצאנו W' תמ"ו של V כך ש- $W' \subseteq W_2$ ו- $W_1 \subseteq W'$. ■

הוכחת למה ב' היא תרגיל רגיל בלינארית 1A שאין ערך להביא את הוכחתו.

הוכחת למה א' גם היא לא מעניינת במיוחד, אבל אותה המרצה כן הוכחיה:

הוכחה. יהיו $v, u \in V$, נביט ב- $T(v - u) \in U$, $w_1 \in W_1$ כך ש-:

$$Tv = Tu + w_1 \implies Tv - Tu = w_1 \implies T(v - u) = w_1 \in W_1$$

ידוע $v - u \in W_1$ לכן $v = v - u + u$.

אי מששו $W_1 \subseteq T(V)$ ו- $V = U + W_2$ ולכן:

$$U \cap W_1 = U \cap (T(V) \cap W_1)$$

ידוע ש-:

$$U \cap W_1 = (U \cap T(V)) \cap W_1 \implies U \cap T(V) = T(U) \implies T(V) = T(U) \oplus W_1 \implies U \cap W_1 = T(U) \cap W_1 = \{0\}$$

■

מסקנה 17. ט"ל נילפוטנטית אז V אי-פריק ל- T אם"מ V ציקלי.

הוכחה.

\implies זה משפט שכבר הוכחנו

\Leftarrow נניח V איד-פריק. אז קיימים $U \subseteq V \subseteq W$ תמי'ו ציקלי מקסימלי. לפי המשפט קיימים $V \subseteq W$ תמי'ו T -איוואריאנטי כך ש- U, W תמי'ום איוואריאנטי. אם $\{0\} = U = V = 0$ ובפרט ציקלי. אחרת, מאיד-פריקות V $\neg T$, נסיק ש- $W = \{0\}$ ולכן $V = \{0\}$ ציקלי. ■

משפט 73 (משפט ג'ורדן בעבר ט"ל נילפוטנטית 1). תהי $V \rightarrow T: V$. נילפוטנטית אז קיים פירוק של V לסכום ישיר של $V = \bigoplus U_i$ כאשר U_i הם T -ציקליים.

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם: נמצא ב- V ציקלי מקסימלי כלשהו. אז קיים $W \subseteq V$ תמי'ו T -שמור כך ש- $=$ ■. ידוע $W \rightarrow T|_W: W \rightarrow U_1 \oplus W$.

משפט 74 (משפט ג'ורדן בעבר ט"ל נילפוטנטית 2). עבור $V \rightarrow T: V$ נילפוטנטית, קיימים בסיס B של V שהוא איחוד של שרשראות.

מסקנה 18. בעבר B בסיס מג'ורדן, נסיק:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \square & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \square \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים הם בלוקי ג'ורדן אלמנטרי. בלוק ג'ורדן מהצורה הבאה יקרא אלמנטרי ויסומן:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} | & & & \\ T(v) & \cdots & T(T^k v) & \\ | & & | & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

יש ספרים בהם זה heißt transpose של זה.

משפט 75 (יחידות צורת ג'ורדן בעבר ט"ל נילפוטנטית). עבור $V \rightarrow T: V$ נילפוטנטית, אז בכל הפירוקים של $V = \bigoplus U_i$ ציקליים (איד-פריקים) איז מספר התיא-המרבב מממד נתון הוא זהה עבור כל פירוק.

הוכחה. באינדוקציה על $n = n(T)$.

• עבור $n = 1$, העתקת ה- 0 . V מתפרק לסכום ישיר של מרחבים מממד 1.

• צעד, נניח נכונות עבור $\mathbb{N} \in n$. נניח ש- $n+1 = n(T)$. נסמן פירוק:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^\ell W_i$$

נסדר את $(u_i)_{i=1}^k$ לפי גודל ממך, ונניח שרשימת הגודלים היא:

$$(1, 1, \dots, 1 \underset{\times s}{<} a_1 \leq \dots \leq a_p) \implies s + p := k$$

רשימת הממדים מוגדל 1 ועוד כל השאר. נעשה כנ"ל עבור $(w_i)_{i=1}^\ell$ (ונקבל:

$$(1, 1, \dots, 1 \underset{\times t}{<} b_1 \leq \dots \leq b_r) \implies t + r := \ell$$

ידוע:

$$T(v) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) = \bigoplus_{i=1}^k T(W_i), \quad n(T|_{T(v)}) = n, \quad p = r, \quad \forall i: a_i - 1 = b_i - 1 \implies a_i = b_i$$

(הפרקן ל- s ו- t דרוש כדי שהפרקן לעיל לא כולל אפסים כאשר מפעלים את T) ידוע $a_i - 1 = b_i - 1$ כי אינדקס הנילפוטנטיות קטן ב-1 בהחלת T

משפט המודדים השני אומר ש-:

$$a_i = \dim U_i = \dim \ker T|_{U_i} + \underbrace{\dim \text{Im } T|_{U_i}}_{a_i-1} \implies \dim \ker T|_{U_i} = 1$$

מהטענה השנייה בלמה:

$$\begin{aligned} \ker T = \bigoplus_{i=1}^k \ker T|_{U_i} &\implies \dim \ker T = \sum_{i=1}^k \dim \ker T|_{U_i} = k \\ &\implies k = \ell \implies s = t \\ &= \sum_{i=1}^k \dim \ker T_{W_i} = \ell \end{aligned}$$

■

במילים אחרות: כל מטריצה מייצגת של T נילפוטנטית דומה למטריצת ג'ורדן יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.
 (למה זה נכון? כי הגודל של בלוק הוא הממד של התמ"ו הציקלי שנפרש ע"י וקטורי השרשראת שמתאימים לעמודות הללו)
 למעשה, בכך הבנו לחולוטן כיצד העתקות נילפוטנטיות מתנהגות. עשינו רצוקציה למקורה הפרטני של נילפוטנטיות, ועתה ננסה להבין את המקורה הכללי. ניעזר בתוצאה 3 משפט הפירוק הפרימרי לשם כך.

מסקנה 19. כל פירוק אינוריאנטי של T נילפוטנטית הוא איחוד של מרחבים ציקליים הניטנים ע"י איזשו בסיס מג'ורדן.

הוכחה. תהי T נילפוטנטית מעל V והוא פירוק T -אינוואריאנטי. אז $|T|_{W_i}$ נילפוטנטית, וממשפט נתנו לפරקה $B_j^i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} Z_j^i$ שמדובר T -ציקליים ובפרט T -ציקליים. סה"כ פירוק T -ציקלי של V , ולכן בהינתן בסיס של W_j^i קיבל ש- $\bigoplus_{i=1}^k B_j^i$ בסיס מג'ורדן. וסה"כ W_i ניתן ע"י איחוד של מרחבים ציקליים מצורת הג'ורדן.

■
лемה 10. נניח $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ כאשר U_i הוא T -אינוואריאנטי (או נדרש להניח נילפוטנטיות), אז:

$$T(V) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) \quad \text{א.}$$

$$\ker T = \bigoplus_{i=1}^k \ker T(U_i) \quad \text{ב.}$$

הוכחה: יותר כתרגיל בעבר הקורא.

1.4.3 ~ צורות ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי

הגדרה 53. בלוק ג'ורדן אלמנטרי עם ערך λ הוא בלוק מהצורה:

$$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I_n = J_n(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

הגדרה 54. בהינתן $V \rightarrow T$, בסיס B נקרא T -בסיס מג'ורדן אם $[T]_B$ היא מטריצה עם בלוקי ג'ורדן מינימליים על האלכסון.

משפט 76 (משפט ג'ורדן). לכל העתקה $T: V \rightarrow V$ מונ"ס מעל שדה סגור אלגברית \mathbb{K} , קיים בסיס מג'ורדן.

מה עומד לקרות?

1. נפרק את המרחב V לתתי-מרחבים, שכל אחד מהם משוויך לערך עצמי λ . נעשה זאת בשתי גישות – הראשונה באמצעות משפט הפירוק הפרימרי, והשנייה באמצעות פירוק למרחבים עצמיים מוכללים (שיי הפירוקים מניבים את אותן המרחבים).

2. נתבונן על המרחבים האלו, ונסיק שיש העתקה ציקלית עליהם, שאנו חנו כבר מכירים את צורת הג'ורדן שלה. היא תאפשר לנו לפרק את המרחבים שקיבלו לתתי-מרחבים ציקליים, עם בסיס שרשראת שנזון לנו צורת ג'ורדן.

1.4.3.1) בעזרת פירוק פרימרי

ראשית כל, נוכיח את משפט ג'ורדן באמצעות משפט הפירוק הפרימרי שכבר ראיינו.

הוכחה באמצעות פירוק פרימרי. נניח ש- $f_T(x)$ מתפרק לחלוטין. מהגרסה החלה של משפר הפירוק הפרימרי (ראה הערכה תחתיה), ממשפט קיילי-המילטון f_T מופיע את T , ותחת הסימון $f_T(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{d_\lambda}$ מתקיים:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \underbrace{\ker((T - \lambda_i)^{d_\lambda})}_{U_i}$$

כאשר $U_n \dots U_1$ הם T -איווריאנטיים. מושם ש- U_i האידי-פריקים ביחס ל- T , ו- T שמורים. היות שהם אי-פריקים $S|_{U_i} = T - \lambda I$. נגיד $I - \lambda I$ הוא T -איווריאנטי אם והוא S -איווריאנטי (טענה שראינו בעבר). ראיינו ש- $S|_{U_i}$ היא נילפוטנטית שכן ממשפט הפירוק $(T - \lambda_i)^{r_i}$ מופיע את $T|_{U_i}$ ($T - \lambda_i$ לא בהכרח מינימלי, שכן f_T לא בהכרח מינימלי) ולכן $0 = f|_{U_i}(T) = (T - \lambda_i)^{r_i} = S^{r_i}$, כלומר $S|_{U_i}$ נילפוטנטית. לכן $S|_{U_i}$ קיום צורת ג'ורדן, משמע קיים לה בסיס מג'ורדן \mathcal{B}_i כך ש-:

$$[S|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} = [T|_{U_i} - \lambda I] = [T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} - \lambda I \implies [T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} = \text{diag}(J_{a_1}(0) \dots J_{a_n}(0)) + \lambda_i I = \text{diag}(J_{\lambda_i}(0) \dots J_{a_n}(\lambda_i))$$

לכן, נוכל לשדר את הבלוקים הללו ולקבל $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{B}_i$, המקיימים:

$$[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \{ [T|_{U_1}]_{\mathcal{B}_1} \dots [T|_{U_s}]_{\mathcal{B}_s} \}$$

מושום שכל אחד מ- $[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i}$ הוא בלוק ג'ורדן בעצמו, סה"כ נקבל:

$$[T]_B = \text{diag}(J_1(\lambda_1) \dots J_n(\lambda_j))$$

זהי צורת הג'ורדן של מטריצה כללית.

במילים אחרות – נעזרנו בפירוק פרימרי "מ' לפרך את המרחב למרחבים T -איווריאנטיים פריקים מינימליים (בשימוש נראת שאלות המרחבאים העצמיים המוכלים של T , שקיימים כל מיני תוכנות נחמדות) ואת המרחבאים אליהם פירקנו, ניתחנו בעזרת צורת ג'ורדן להעתיקות נילפוטנטיות.

משפט 77. צורת ג'ורדן היא ייחידה עד כדי סדר בלוקים.

1.4.3.2) בעזרת מרוחבים עצמיים מוכלים

בגישה זו נוכל לפתח את צורת ג'ורדן למטריצה כללית ללא צורך בפירוק פרימרי, פולינום מינימלי, ממשפט קיילי-המילטון וכו'. זו גישה יותר אלמנטרית ופשטית, ואם מבינים אותה האלגוריתם המסורבל למציאת צורת ג'ורדן הופך לאינטואיטיבי בהרבה.

הגדרה 55. המרחב העצמי המוכל של λ הוא מ"ז:

$$\tilde{\mathcal{N}}_\lambda := \bar{\mathcal{N}}_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}: (T - \lambda I)^n v = 0\}$$

משפט 78. המרחב העצמי המוכל הוא מ"ז.

מסקנה 20. באופן מיידי נסיק $\tilde{\mathcal{N}}_\lambda \subseteq \mathcal{N}_\lambda$.

הגדרה 56. וקטור עליי מוכל הוא וקטור $v \in V$ כך ש- $\forall i \in [n]: T^{(i)} v = \lambda v$.

הערה 31. החלק הזה ואילך, איז סוף הפרק, הינו הרחבה של בלבד ואילו אינם משפטיים המופיעים בקורס. עם זאת, המשפטים להלן מאפשרים להבין הרבה יותר טובות את צורת ג'ורדן, ולעתים קרובות ת策רכו להוכיח אותם בעצמכם.

הערה 32. מרגשימים אבודים? אני ממש ממליץ על **הסדרה** הבאה (פרק 36-42) (שליחה למי שהמליץ לי על זה במקור, אני לא זכר ממי זה היה אז אני לא אוכל לתת קרדיט).

משפט 79. תהי העתקה T כללית ו- $\mathbb{F} \in \lambda$ סקלר, אז $\tilde{\mathcal{N}}_\lambda = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ (כאשר \mathcal{N} המרחב המופיע/הקרナル של המטריצה)

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית. הכוון $\lambda \in \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}_\lambda$ טרויאלי. יהיו $v \in \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ ו- $\lambda \in \mathcal{N}(T - \lambda I)^j$ ($j > \dim V$) (ולכן $(T - \lambda I)^{\dim V} v = 0$ ו- $(T - \lambda)^j v = 0$). נסיק מעקרון ההחלפה: $\mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V} = \mathcal{N}(T - \lambda I)^j$

$$\tilde{\mathcal{N}}_\lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(T - \lambda I)^j = \bigcup_{j=1}^{\dim V} \mathcal{N}(T - \lambda I)^j \cup \bigcup_{j=\dim V}^{\infty} (T - \lambda I)^j = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$$

משפט 80. בהינתן $v \in \ker(T - \lambda_i I)^k \setminus \ker(T - \lambda_i I)^{k-1}$, קיימים (מהגדירה) ייחודי λ_i כך ש- $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \in \mathcal{V}_{\lambda_i}$.

הוכחה. ההוכחה עיקר אלגברית ולא מעניינת במיוחד, יש צורך לפתח את הבינו של ניוטון.

מסתבר, שאפשר לפרק את המרחב למרחבים עצמאיים מוכללים, ומשם אפשר להסיק מה קורה בהם ביתר פרטיהם בעזרת העתקות נילפוטנטיות.

משפט 81. הטענות הבאות מתקיימות:

1. $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ הוא T -איווריאנטי.

2. $(T - \lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$ נילפוטנטית.

3. מעל שדה סגור אלגברית, הריבוי האלגברי d_{λ_i} הוא $\dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$

הוכחה.

1. יהיו $v \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$, אז קיימים $k \leq \mathcal{F}(T - \lambda_i I)^k v = 0$. נפעיל את T על שני האגפים ונקבל $T(0) = 0$ ולבן $Tv \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$. סה"כ $Tv \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ והוא T -איווריאנטי.

2. נגדיר $S := (T - \lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$. לכן לכל $v \in \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ מתקיים $S^k v = 0$. משום $\exists k_v : (T - \lambda_i I)^{k_v} = S^{k_v} = 0$. מטעון $S \subseteq \text{dom } S = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ ו $S^n v = 0 \forall v \in \text{dom } S$. ומהגדירה S נילפוטנטית כדרוש.

3. (הוכחה זו נכתבת בעזרתו האדיבה של chatGPT) נסמן $U = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$, ונוכיח את הבסיס של U על לבסיס של V כך שנוצר $M \oplus W = V$ כך ש- $S|_U = T|_U$. ממשפט $p_T(x) = p_{T|_W}(x) \cdot p_{T|_U}(x)$ מסעיף קודם ידוע ש- $S|_U = (T - \lambda_i I)|_U$. נקבע $S|_U = T|_U - \lambda I \implies T|_U = S|_U + \lambda I$. נקבע $S|_U^n = 0$. נסיק מטעון $S|_U$ נילפוטנטית כדרוש. שתי הבחנות:

- λ_i הוא הע"ע היחיד של $T|_U$, והוא ע"ע של λ_i ולבן λ_i ע"ע של $T|_U$, והיחידות נובעת מכך שככל ע"ע מוכלל שקיים לע"ע היחיד של $T|_U$.

- $\ker S \subseteq W \cap U = \{0\}$ ולבן $\ker S|_W \subseteq \ker(T - \lambda_i I) = V_{\lambda_i} = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ ולבן $\ker S|_U = \{0\}$.

נסיק משתי הטענות הללו שתיהן מסקנות:

- מהיות λ_i הע"ע היחיד של $T|_U$, ומיהו $\deg p_{T|_U} = \dim U$, ויחדיו עם ההנחה שאנו ב庆幸 סגור אלגברית, $p_{T|_U}(x - \lambda_i)$ בchnerה מורכב מ- U גורמים לינאריים שהם $(x - \lambda_i)$.

- איןנו ע"ע של $T|_W$, בגלל שאמ (בשלילה) λ_i ע"ע של $T|_W$ עם v אז $\lambda_i v = T|_W(v) = Sv + \lambda_i v$ ומחיסור אגפים נקבל $0 = Sv$, כלומר $v \in \ker S|_W$ (כי $S|_W$ הפיכה) ואז v לא ע"ע וסתירה.

סה"כ, מהיות $(x - \lambda_i)$ פולינומיאלי של x בא \mathbb{A} ורק מ- $|T|_U$ ושם הריבוי הוא U , ככלומר $\dim U = \dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ כדרוש.

■

הגדה 57. $v \in \ker(T - \lambda_i I)^k \setminus \ker(T - \lambda_i I)^{k-1}$ אם והוא ע"ע עצמי מורחב של λ_i וכך ש- $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}$ כאשר בסיס $k = 1$ מוגדר להיות $v \in V_{\lambda_i}$.

משפט 82 (פירוק המרחב למרחבים עצמאיים מוכללים). נניח שאנו במו"ז סגור אלגברית (אפשר להרחיב לכך במידת הצורך). אז $L-T$ יש ע"ים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ כלשהם. בהינתן V מ"ו ו- T העתקה לינארית, מההרכבה יש לה ערכים עצמאיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ כלשהם. אזי:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$$

הוכחה. נתחיל מלhocיך שהחיתוך בין שני מרחבים עצמאיים מוכללים ריק. זה נובע ישירות מכך שככל שני ע"ע עצמאיים מוכללים שייכים לע"ע רגיל היחיד של T . ניעזר בכך ש- $\dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$, ונקבל:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n d_{\lambda_i} = n \\ \forall i \in [k] : \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \subseteq V \\ \forall i, j \in [k] : \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} \cap \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_j} = \{0\} \end{cases}$$

כאשר d_{λ_i} הריבוי האלגברי של λ_i , וידוע סכום הריבויים האלגבריים הוא n שכו $p_T(x)$ פולינום ממעלה n . לכן משפט יש ■ סכום ישיר כדרוש.

עתה נוכח מחדש את משפט ג'ורדן, אך הפעם ללא תלות בפולינום מינימלי ופירוק פרימרי.

הוכחת ג'ורדן באמצעות מרחבים עצמיים מוכלים. תהי העתקה T . מפריקות הפולינום האופייני יש לה $\lambda_1 \dots \lambda_k$ ע"ם כלשהם. משפטו:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$$

עוד ידוע שההעתקה $S_i = (T - \lambda_i)_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$ נילפוטנטית. כבר הוכחנו את צורת ג'ורדן עבור העתקות נילפוטנטיות ולכן S_i קיים בסיס מג'ורדן \mathcal{B}_i . נבחן ש-■

$$T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} = S_i + \lambda_i \implies \left[T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} \right]_{\mathcal{B}_i} = \underbrace{\text{diag}\{J_{a_1}(0) \dots J_{a_\ell}(0)\}}_{[S_i]_{\mathcal{B}_i}} + \lambda I = \text{diag}(J_{a_1}(\lambda_i) \dots J_{a_\ell}(\lambda_i))$$

ולכן אפשר לשרר את הבסיסים לכדי בסיס מג'ורדן: $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$, ואנו:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \left(\left[T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} \right]_{\mathcal{B}_i} \mid i \in [k] \right) = \text{diag}(J(\lambda_1) \dots J(\lambda_1) \dots J(\lambda_k) \dots J(\lambda_k))$$

שרשור של בלוקי ג'ורדן. ■

הערה 33. מיחידות צורת ג'ורדן, הצורה המתבקשת מפירוק פרימרי ומפירוק למרחבים עצמיים מוכלים היא זהה. דרך אחרת לראות את זה, היא שהמרחבים אליהם פירקנו פרימריה שהם $(T - \lambda_i)^{d_\lambda} = \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$ בכל מקרה.

1.4.4 ~ תוצאות מיוחדות ג'ורדן

משפט 83. כמוות בלוקי הג'ורדן לע"ע לא היא הריבוי הגיאומטרי.

הוכחה. נראה שהריבוי הגיאומטרי λ שווה לכמות בלוקי הג'ורדן השיערים ל- λ . בוחינתן בלוקי ג'ורדן $(\lambda) \dots (\lambda)$ השיערים ל- λ , ידוע שלכל אחד מהם קיים בסיס שרשראת $\{v, (\tilde{T})v, \dots, (\tilde{T})^{k_i}v\}$ כאשר $B_i = \{v, (\tilde{T})v, \dots, (\tilde{T})^{k_i}v\} = T - \lambda I$. כמו כן ידוע $\tilde{T}w_i = 0$ בلتוי תלויים לニアרית כך $\tilde{T}w_i = \lambda w_i$, $w_i \in \ker \tilde{T}$ כלומר $Tw_i = \lambda w_i$, ומכאן $w_1 \dots w_{r_\lambda} \dots w_{r_\lambda}$

- **חסם עליון:** לכל k_i ידוע ש- $(\tilde{T})^{k_i+1}v = 0$ (ולומר $T((\tilde{T})^{k_i}v) = (\tilde{T})^{k_i+1}v = 0$) והוא המקסימלי שלא מופיע את v , משוםSCP שכל השרשאות בלתי תלויות לニアרית (אחרת השרשור שלhn לא יהיה בסיס), בהכרח $\tilde{T}w_i \in \ker \tilde{T} = \mathcal{V}_{\lambda_i}$ קבוצה בלתי תלوية לニアרית וה- $\text{span}\{(\tilde{T})^{k_i}w_i\}_{i=1}^{\ell} \subseteq \mathcal{V}_{\lambda_i}$.

- **חסם תחתון:** מהחסם העליון, כל w_i יכול להיות סיום של שרשראת, וכך יש לפחות r_λ שרשאות שונות (שים לב: יש לנו חופש בבחירה הבסיס $\{w_i\}_{i=1}^{r_\lambda}$, ומכאן החסם התחתון). ■

משפט 84. כמוות הוקטורים בסיס המג'ורדן המשויכים ל- λ הוא הריבוי האלגברי d_{λ} (ניסוח אחר: סכום גדי הבלוקים השיערים ל- λ בצורת הג'ורדן הוא d_{λ}). ■

הוכחה. ראיינו בצורת ג'ורדן בעזרת פירוק למרחבים עצמיים מוכלים, שמספר הוקטורים השיערים ל- λ הוא $\dim \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda}$ ידוע ■ שהוא מ"ז מממד d_{λ} . סה"כ הראינו את הדורש.

משפט 85. בלוק הג'ורדן המשויך ל- λ הגדול ביותר, הוא הריבוי של $(\lambda - x)$ בפולינום $m_T(x)$.

הוכחה. ראיינו שבבלוק הג'ורדן $J_a(\lambda)$ מגע מפירוק ג'ורדן של $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda} = (T - \lambda)S$. הבלוק הכי גדול בצורת הג'ורדן של S נילפוטנטית, היא השרשת הכל ארכואה של S ב- $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda}$. משום ש- $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda} = \{\ker S^k \mid k \in [n]\} = S^{n(S)}$, השרשת הארכואה ביותר האפשרית היא $Sv \dots S^{n(S)}v$ והיא קיימת כי הסדרה זו בת"ל עברו v כלשהו (אחרת $(S)^n v$ לא החזקה המינימלית שמאפסת את S וסתירה).

ראינו ש- m_T הוא lcm של הצמצום של T למרחבים T -איינוראינטיים, ומשום שכל \tilde{N} בעל פולינום אופייני $(x - \lambda_k)^{d_{\lambda_i}}$ בטל $m_T|_{\tilde{N}}(x) = (x - \lambda)^k$, ובגלל ש- $\gcd(m_T|_{\tilde{N}}, (x - \lambda_i)^k, (x - \lambda_j)^m) = 1$ כלשהו. איזו:

$$\forall i \neq j \in [k]: \gcd(T|_{\tilde{N}_{\lambda_i}}(x), T|_{\tilde{N}_{\lambda_j}}(x)) = 1$$

דיהינו, lcm הוא פשוט כפל של הפולינומים המינימליים של T . לכן, תחת הסימון m_λ להיות הריבוי של λ בפולינום m_T , בהכרח $m_T(x) = (x - \lambda)^{m_i}$. מהגדרת פולינום מינימי m_λ הוא המינימי כך $\text{lcm}(T - \lambda)^{m_i} = 0$ ככלומר $(T - \lambda)^{m_i}$ בлок ג'ירדן הנדרן ביותר של S . הראנו ש- S השרשת המקסימלית בצורה הג'ירדן של S , ושה"כ בлок הג'ירדן הנדרן ביותר של $J(\lambda)$ הוא m_λ הריבוי של $(x - \lambda)$ ב- $J(x)$. ■

משפט 86. תהי $A \in M_n(\mathbb{K})$ מטריצה, כאשר \mathbb{K} סגור אלגברי. אז $A \sim A^T$

הוכחה. ממשפט ג'ירדן ל- A יש צורת ג'ירדן Λ , ככלומר קיימת P הפיכה כך $P^{-1}\Lambda P = A$ ו- Λ מטריצה אלכסונית עם בלוקי ג'ירדן. נבחין בכך ש- $A^T = (P^{-1}\Lambda P)^T = P^T\Lambda^T(P^{-1})^T = A$. ככלומר $\Lambda \sim \Lambda^T$ ו- $A \sim A^T$ ו- $\Lambda \sim \Lambda^T$. נותר להוכיח $(e_1 \dots e_n) \rightarrow (e_n \dots e_1)$. ככלומר, כל בלוק ג'ירדן $J_i(\lambda) \sim J_i(\lambda)^T$. טענה זו אכן מתקיימת מעבר לבסיס הסדור $(e_1 \dots e_n) \rightarrow (e_n \dots e_1)$. ■

הערה 34. למעשה כדי להוכיח $J_n(0)^T \sim J_n(0)$ אפשר לעשות משהו אפילו יותר פשוט. קל לראות ש- $=$

$J_n(0)^T = x^n$ וכן שניתן נילפוטנטיות, שכן צורת הג'ירדן של $J_n(0)$ היא

משפט 87. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה מעל \mathbb{F} שדה. אז בהינתן $\lambda_1 \dots \lambda_k$ הערכים העצמיים של A מעל \mathbb{K} הרחבה \mathbb{F} לסוגר אלגברי, אז $\det A = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{d_{\lambda_i}}$.

הוכחה. ידוע של- \mathbb{F} קיימת הרחבה ל- \mathbb{K} . מעל \mathbb{K} , ל- A יש צורת ג'ירדן $A = P^{-1}NP$ כך $\text{lcm}(P^{-1}NP) = P^{-1}N$ מטריצת בלוקים הכללת לפחות k בלוקים, כאשר הבלוק \square_i יסומן להיות הבלוק הכלול את בלוקי הג'ירדן המשויכים לע"ע λ_i . איזי \square_i מטריצה משולשית עליונה מוגולד d_i (ממשפט קודם, לפחות הוקטורים המשויכים לע"ע λ היא d_λ) עם λ_i על האלכסון ולכן $\det \square_i = \lambda_i^{d_i}$. מדרומיננטה של מטריצת בלוקים נסיק:

$$\det A = \det P^{-1}NP = \underbrace{\det P^{-1}P}_1^I \cdot \det N = \prod_{i=1}^k \det \square_i = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{d_i}$$

כדרוש. ■

המשך בעמוד הבא

פרק 2

הגדות וחקר מרחבי מכפלה פנימית

2.1 Bi-Linear Forms

2.1.1 ~ הדרות בסיסיות בעבור תכונות בי-לינאריות כלליות

הדרה 58. יהיו V מ"ו מעל \mathbb{F} . פונקציונל לינארי φ מעל V הוא $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$.

הערה 35. ראה הרחבה על פונקציונלים לינארים ומרחבים דו-אלים בסוף הסיכום.

הדרה 59. יהיו V, W מ"ים מעל \mathbb{F} . תבנית בי-לינארית על $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ כך ש- $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ כך שהעתקות $(v, w) \mapsto f(v, w)$, $v \mapsto w$ הן פונקציונלים לינאריים.

אינווטיאטיבית, זו העתקה לינארית בכל אחת מהקורדיינאות בנפרד (בדומה לדוגמה לדטרמיננטה, שהיא העתקה מולטי-לינארית ולינארית בכל אחת מהשורות בנפרד)

משפט 88. הטענה הבאה נכונה לכל ש- f בי-לינארית. יהי \mathbb{F} :

$$\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1 + v_2, w) = f(v, w) + f(v_2, w)$$

$$\forall w_1, w_2 \in W: f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$$

$$f(\alpha v, w) = \alpha f(v, w) = f(v, \alpha w)$$

שביל העתקות a -לינאריות צריך טנזור a ממדי. זה לא נעים וידועים מעט מאוד על האובייקטים הללו. בפרט, בעבור העתקה בי-לינארית נראה שnochכל לייצג אותה באמצעות מטריצות, בלי טנзор ובלגנים – שזה נחמד, וזה אחת הסיבות שאנו מתעסקים ספציפית עם העתקות בי-לינאריות (פרט לכך שמאוחר יותר נעסוק גם במקפלות פנימיות, וחלק מהתוצאות על ההעתקות בי-לינאריות יעזרו לנו להגדיר דברים על מטריצות).

דוגמאות.

1. **תבנית ה-0:**

2. **נדיר** $V = W = \mathbb{R}^2$, אז

3. (חשוב) על \mathbb{F}^n :

הדרה 60. לכל שדה \mathbb{F} מוגדרת התבנית הבי-לינארית הסטנדרטית היא:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

4. יהיו $\varphi: W \rightarrow \mathbb{F}$, $\psi: V \rightarrow \mathbb{F}$, φ פונקציונלים לינאריים:

5. הכללה של 4: יהיו $\varphi_1, \dots, \varphi_k: W \rightarrow \mathbb{F}$ פונקציונלים לינאריים וכן $\psi_1, \dots, \psi_k: V \rightarrow \mathbb{F}$ פונקציונלים לינאריים. אז $f(v, w) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(v) \psi_i(w)$

הרעיון: ברגע שנקבע וקבעו ספציפי נקבל לינאריות של הווקטור השני.

הערה 36. במקרה ש- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ לעיל, התבנית הבילינארית הסטנדרטית משרה את הגיאומטריה האוקlidית. קלומר \perp v $\iff f(v, u) = 0$

הערה 37. בעתיד נראה שכל התבנית בי-לינארית נראה כmo מקרה 5.

משפט 89. נסמן את מרחיב התבניות הבילינאריות על $W \times V$ בטור $(B(V, W), B)$. זה מ"ו מעל \mathbb{F} .

אני מושך לא לעמוד להגדיר את החיבור והכפל בסקלר של המשפט הקודם כי זה טרויאלי והמטרה כתובות את זה בעיקר בשביל להטריל אותנו.

דוגמה חשובה אחרת.

משפט 90. נסמן ש- $\mathcal{A} \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ ותהי $\dim V = n$, $\dim W = m$. \mathcal{A} בסיס ל- \mathbb{F}^n , \mathcal{B} בסיס ל- \mathbb{F}^m . אז:

$$f(u, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$

העתקה בי-לינארית.

הוכחה. נקבע v כלשהו:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A =: B \in M_{1 \times m}, g(w) := f(v, w) = B[w]_{\mathcal{B}}$$

nocich ש- g לינארית:

$$\begin{aligned} \forall w_1, w_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}: g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) &= B[\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2]_{\mathcal{B}} = \lambda_1(B[w_1]_{\mathcal{B}}) + \lambda_2(B[w_2]_{\mathcal{B}}) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2) \\ h(v) := f(v, w) &= [v]_B^T C \text{ ו } C = A[w]_{\mathcal{B}} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F}) \\ \forall v_1, v_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}: h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2]_{\mathcal{B}}^T = \lambda_1([v_1]_{\mathcal{B}}^T C) + \lambda_2([v_2]_{\mathcal{B}}^T C) = h(v_1) + h(v_2) \end{aligned}$$

■

“זה \mathcal{A} , אתם تستדרו” – המרצה ברגע שיש לו שני A -ים על הלוח
הגדלה 61. בהינתן תבנית בי-לינארית $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ בסיס \mathcal{A}, \mathcal{B} בסיס V, W . נגידר את המטריצה המייצגת את f ביחס לבסיסים ע”י $(A)_{ij} = f(v_i, w_j)$ כאשר $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$, $\mathcal{A} = (v_i)_{i=1}^n$, $\mathcal{B} = (w_i)_{i=1}^m$ (תחת הסימונים \mathcal{A}, \mathcal{B} כאותיות).
משפט 91. $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$ כאשר A המייצגת.

הוכחה. קיימים וחידים $v = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum b_i w_i$ כך $\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{F}$. כמובן:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T = (\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad [w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

ומכאן פשוט נדרש אלגברה:

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i, w) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f\left(v, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m \beta_j f(v_i, w_j)\right) \\ &= \sum_{i,j \in [n] \times [m]} \alpha_i f(v_i, w_j) \beta_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{im}\right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

סימון 7. נමץ לסייע הזה את הסימון $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ עבור המטריצה המייצגת של f בי-לינארית.

(זהו אינו סימון רשמי בקורס אם כי בהחלה צריך להיות)

משפט 92. עם אותן הסימונים כמו קודם:

$$\psi: B(v, w) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{F}), \quad f \xrightarrow{\psi} [f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$$

או ψ איזו?

הוכחה. נסמן את $[g]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = B$ ואת $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = A$ אז:

• **לינאריות.**

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(f + g))_{ij} &= (f + g)(v_i, w_j) \\ &= f(v_i, w_j) + g(v_i, w_j) \\ &= (A)_{ij} + (B)_{ij} \\ &= (\psi(f))_{ij} + (\psi(g))_{ij} \implies \psi(f + g) \\ &= \psi(f) + \psi(g) \end{aligned}$$

באופן דומה בעבר כפל בסקלר:

$$(\psi(\alpha f))_{ij} = \alpha f(v_i, w_j) = \alpha(\psi(f))_{ij} \implies \psi(\alpha f) = \alpha\psi(f)$$

- **חח"ע.** תהי $\psi(f) = 0 \in M_{n \times m}$ וולכן $\forall i, j \in [n] \times [m]: f(v_i, w_j) = 0$, $f \in \ker \psi$ ומכאן $\forall v \in V, w \in M_{n \times m} \implies \psi(f) = 0$ איז $f \in \ker \psi$ ומכאן $\psi(\alpha f) = \sum_{i,j \in [n] \times [m]} \alpha_i f(v_i, w_j) \beta_j = 0$

- **על.** תהי $f(v_i, w_j) = e_i^T A e_j = (A)_{ij}$ ואכן $f(v, w) = [v]_A^T A [w]_B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$.

תזכורת (מלינארית 1). מטריצת המעבר מבסיס \mathcal{B} לבסיס \mathcal{C} מוגדרת להיות $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, היא מטריצה הפיכה, ומתקיים השוויון $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.
משפט 93. יהי V, W מ"מ מעל \mathbb{F} ועל \mathbb{F} מ"מ מעל \mathbb{F} . תהי $P \in B(V, W)$ בבסיסים של V ו W . תהי $A, A' \subseteq V$ ו $B, B' \subseteq W$ בסיסים של A, A' ו B, B' המיצגת של f לפ"א A, B והמייצגת בבסיסים A', B' . תהי M מטריצת המעבר מ- A ל- A' ו- Q מטריצת המעבר מ- B ל- B' , אז $A' = P^T A Q$ ו- $B' = P^T B Q$.

הוכחה. ידוע:

$$P[v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{A}'}, \quad Q[w]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'}$$

ואכן:

$$f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}} = (P[v]_{\mathcal{A}'})^T A (Q[w]_{\mathcal{B}'}) = [v]_{\mathcal{A}'}^T (P^T A Q) [w]_{\mathcal{B}'} \implies A' = P^T A Q$$

- **כדרוש.**

- **הגדרה 62.** עבור $f \in B(V, W)$ נגידר את A מייצגת אותה ביחס לבסיסים כלשהם.
משפט 94. $\text{rank } f = \text{rank } A$ מוגדר היטב.

הוכחה. כפל בהפיכה לא משנה את דרגת המטריצה (וז"ט transpose של מטריצה הוא הפיך), ומטריצת שינוי הבסיס הפיכה, דהיינו כפל מטריצות שינוי הבסיס לא משנה את דרגת המטריצה ולכן לכל שני נציגים אותה הדרגה.

מסקנה 21. תהא $f \in B(V, W)$ ו- $\text{rank } f = r$. אז קיימים בסיסים \mathcal{A}, \mathcal{B} של V, W בהתאם לכך ש- $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ הרעיון הוא לדרג את כל כיון, שורות באמצעות transpose ועמודות באמצעות המטריצה השנייה. אפשר גם לקבוע בסיס, ולדרוג שורות ועמודות עד שייצאים אפסים (הוכחה לא נראית בכתיה).
"חזי השעה הזו גורמה לי לשנוו מלבנים בצורה יוקדת" – מעתה ואילך נתעסק במקרה בו $V = W$. נשתמש בסיס יחיד.

2.1.2 ~ חיפוי וסימטריות

- **הגדרה 63.** יהי $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$, נאמר שהן חופפות אם קיימת הפיכה $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $A' = P^T A P$.
- **משפט 95.** מטריצות חופפות אם ומין מיניהן את אותה התבנית הבילינארית.
- **משפט 96.** אם A, A' חופפות, אז:

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T \quad .1$$

$$\exists 0 \neq c \in \mathbb{F}: \det A' = c^2 \det A \quad .2$$

הוכחה. הנדרנו $\text{rank } f$ כאשר f בילינארית להיות הדרגה של המייצגת את התבנית, וראינו שהיא לא תלואה בסיס. בכך למעשה כבר הוכחנו את 1. עבור 2, מתקיים $A' = P^T AP$ ו- P הפיכה (ולמעשה מטריצת מעבר בסיס) ולכן אם נסמן $c = |P| = |P^T|$ מתקיים:

$$|A'| = |P^T AP| = |P^T| \cdot |A| \cdot |P| = |P|^2 |A| = c^2 |A|$$

הערה 38. יש שדות שימושיים טענה 2 לא מעניינת במיוחד (שדות עבורם יש שורש לכל מספר, כמו \mathbb{C}). אך שימוש לב שוויא לא נכוונה לכל שדה כללי.

הגדרה 64. תבנית f מעל V נקראת סימטרית אם:
הגדרה 65. תבנית f מעל V נקראת אנטיסימטרית אם:

משפט 97 (פירוק תבנית בילינארית לחלק סימטרי וחלק אנטי-סימטרי). אם $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$, בהינתן התבנית $f: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$. נקבע $\varphi, \psi: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ על ידי $\varphi = f + \psi$ ו- $\psi = f - \varphi$. f בילינארית, קיימות φ, ψ סימטריות, ψ אנטי-סימטרית ו- $\varphi + \psi$ בילינארית.

הוכחה. נבחן שאם $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$, ניתן להגדיר את:

$$\varphi(v, w) = \frac{f(v, w) + f(w, v)}{2}, \quad \psi(v, w) = \frac{f(v, w) - f(w, v)}{2}$$

מתקיים φ סימטרי ו- ψ אנטי-סימטרי וכן $\psi = \varphi + \psi$.

משפט 98. תהי f תבנית בילינארית על V , ו- $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל- B . נניח $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ המייצגת את f ביחס ל- B . אז f סימטרית/אנטי-סימטרית אם A סימטרית/אנטי-סימטרית.

הוכחה.

אם f סימטרית/אנטי-סימטרית, אז:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{Sym}}{=} f(v_j, v_i) = a_{ji} \\ a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{ASym}}{=} -f(v_j, v_i) = -a_{ji} \end{aligned}$$

אם A סימטרית אז:

$$f(v, w) = [u]_B^T A [w]_B \stackrel{(1)}{=} ([u]_B^T A [w]_B)^T = [w]_B^T A^T ([u]_B^T)^T = [w]_B^T A [u]_B = f(w, v)$$

כאשר (1) מתקיים כי למטריצה מגודל 1×1 מוחזר אותו הדבר. וכן אם A אנטי-סימטרית:

$$f(u, w) = [w]_B^T (-A) [u]_B = -[w]_B^T A [u]_B = -(w, u)$$

הגדרה 66. בעבר תבנית בילינארית, הרואיזיקאל הימני שלה מוגדר להיות $\text{rad}_r(f) = \{x \in V \mid \forall w \in W: f(x, w) = 0\}$

הגדרה 67. בעבר תבנית בילינארית, הרואיזיקאל השמאלי שלה מוגדר להיות $\text{rad}_\ell(f) = \{x \in W \mid \forall v \in V: f(v, x) = 0\}$

משפט 99. הרדיקלים מרחבים וקטוריים.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{F}$ וכן $\lambda \in \mathbb{F}$. נראה ש- $\lambda x + y \in \text{rad}_r(f)$. אכן, מילינאריות, מתקיים:

$$\forall v \in V: f(\lambda x + y, v) = f(\lambda x, v) + f(y, v) = \underbrace{\lambda f(x, v)}_0 + \underbrace{f(y, v)}_0 = \lambda 0 + 0 = 0$$

כדروש. ההוכחה זהה לרדיקל השמאלי.

משפט 100. בהינתן תבנית סימטרית, $\text{rad}_r(f) = \text{rad}_\ell(f)$.

הוכחה. יהיו $x, v \in V$. לכל $y \in \mathbb{F}$ מתקיים $f(x, y) = 0 \iff f(x, v) = 0$. סה"כ $\text{rad}_r(f) = \text{rad}_\ell(f)$.

משפט 101. לכל תבנית $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$, מתקיים $\dim \text{rad}_r(f) = \dim \text{rad}_\ell(f)$.

הוכחה. בהינתן בסיסים \mathcal{B}, \mathcal{C} ננדיר $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. נבחן ש-:

$$\begin{aligned} \text{rad}_r(f) &\cong \{x \in \mathbb{F}^n \mid \forall v \in \mathbb{F}^m: v^T A x = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \forall i \in [n]: \underbrace{e_i^T A x}_{(Ax)_i} = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} = \mathcal{N}(A) \\ \text{rad}_\ell(f) &\cong \{x \in \mathbb{F}^m \mid \forall v \in \mathbb{F}^n: x^T A v = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid \forall i \in [m]: \underbrace{x^T A e_i}_{x^T \text{Row}_i(A)} = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid A^T x = 0\} = \mathcal{N}(A^T) \end{aligned}$$

ידוע המשפט הדרגה ש- $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(A^T) = \text{rank } A^T = \text{rank } A$ וממשפט הממדים $\dim \mathcal{N}(A^T) = \dim \text{rad}_\ell(f)$.

הערה 39. ניתן להוכיח את הטענה באופן כללי למרחבים לא נוצריים סופית באמצעות שימוש במרחבים דואליים ומרחבי מנה.

הגדרה 68. תבנית בילינארית f נקראת לא-סימטרית או גולרית או לא-טיגריאלית אם $\text{rad}(f) = \{0\}$.

הגדה 69. תבנית בי-לינארית f נקראת מינוגת או סיגולרית אם היא לא-מנונת.

הערה 40. אין צורך לציין איזה רדייקל שווה לאפס, שכן הם שווים מודulos.

הערה 41. מטריצה הפיכה לעיטים קרואה "לא-סינגולרית ומטריצה שאינה הפיכה "סינגולרית".

מסקנה 22. תבנית בי-לינארית היא לא-סינגולרית אם ומטריצה המיצגת שלה (בסיסו קלשוי) היא לא-סינגולרית.

הוכחה. כבר הראינו (בוחכת המשפט הקודם) שביחסון A מטריצה מינוגת, ומכאן $\dim \text{rad}_r(f) = \dim \mathcal{N}(A)$. הראיינו בלינארית 1 וא' ש- $\mathcal{N}(A)$ אטומית A אינה סינגולרית. אז משורר אטומית A לא סינגולרית אם ומטריצה כדרוש. ■

2.1.3 ~ תכניות ריבועיות

הגדה 70. תהא f התבנית על V . התבנית הריבועית:

$$Q_f: V \rightarrow \mathbb{F}, Q_f(v) = f(v, v)$$

היא לא העתקה לינארית. היא התבנית ריבועית. **דוגמאות:**

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy + yx = 2xy \quad \bullet$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv - uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy - yx = 0 \quad \bullet$$

• **התבנית הסטנדרטיבית:**

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xu + yv \implies Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$

סימון 8. עבור התבנית בי-לינארית f על V , נגדיר את $\hat{f}(u, v) = f(v, u)$.

אם f סימטרית נבחן ש- $\hat{f} = Q_f$

משפט 102 (שחזור התבנית בי-לינארית מתבנית ריבועית). תהא f התבנית ביליארית על V , ונניח ש- $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$, אז:

$$f(v, w) = \frac{Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} \quad .1$$

2. אם f אינה התבנית ה-0 אז קיים $v \in V$ כך ש- $v \neq 0$ ו- $Q_f(v) \neq 0$.

הוכחה.

$$\begin{aligned} Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w) &= f(v + w, v + w) - f(v, v) - f(w, w) \\ &= f(v, v) + f(v, w) \\ &\quad - f(w, v) + f(w, w) \\ &\quad - f(v, v) - f(w, w) \\ &\stackrel{\text{Sym}}{=} 2f(v, w) \end{aligned}$$

ובכך הוכחנו את 1. עתה נוכיח את 2. נניח אז $\forall v \in V: Q_f(v) = 0$

$$\forall v, w \in V: f(v, w) = \frac{Q_f(v + w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} = 0$$

וז

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + yu \implies Q_f = 0 \wedge f \neq 0$$

■

הערה 42. אין ממש טעם להגדיר התבנית ריבועית על התבנית בי-לינארית שאינה סימטרית. הסיבה? כל מטריצה יכולה להיות מפרקת לחולק סימטרי וחולק אנטי-סימטרי, החלק האנטי-סימטרי לא ישפיע על התבנית הריבועית (כי אלכסון אפס במטריצה המיצגת) ורק החלק הסימטרי ישאר בכל מקרה. זה לא שאי-אפשר, זה פשוט לא מעניין במיוחד.

2.1.4 ~ משפט ההתאמה של סילבסטר

משפט 103. נניח $2 \neq \text{char } F$, ו- f סימטרית על V . אז קיימים בסיס $\{v_i\}_{i=1}^n$ והוא $B = \text{כך ש-} [f]_B$ אלכסונית. אם

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אז האיברים על האלכסון יהיו $\{1, -1, 0\}$ ולא רק $\{1, 0\}$.

תזכורת: $[f]_B$ סימנו המונדר ביטויים זה בלבד. בקורס מדברים על "המטריצה המייצגת של בילינארית" במילים מפורשות.

הוכחה. באינדוקציה על n . בסיס $1 = n$ ברור. אם f תבנית ה-0, אז כל בסיס שנבחר מותאים. אחרת, קיימים $V \in \mathbb{F}$ כך $v \in V$ כך $0 \neq f(v) \neq 0$. נגדיר $\{u \in V \mid f(u, v) = 0\}$. תמי'ו כי גרעין של ה" f " (כי קיבענו את v). מה התמונה של העתקה? $f|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{F}$. לכן תומנות העתקה היא כל \mathbb{F} , ומזהה 1. ידוע U תמי'ו מממד $n - 1$. אז $0 \neq f(v, v) = Q_f(v)$. נבחין מהצורה: $f|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{F}$. נגידר את $B = \{v\} \cup B_U$ כך ש- $[f]_B$ אלכסונית. נגידר את B_U כך ש- $[f|_U]_{B_U}$ אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & & \cdots \\ 0 & [f|_U]_{B_U} & - & \\ \vdots & | & & \end{pmatrix}$$

סיה"כ מהנחת האינדוקציה צעד האינדוקציה הושם כדרוש. ■

משפט 104. לכל f תבנית סימטרית קיימת מטריצה מייצגת מהצורה $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $\mathbb{C} = \mathbb{F}$ (או סגור אלגברית כלשהו). אינטואיציה להוכחה. נ normals את המטריצה, נבחן שחולקה ב- c של השורה ה- i -ן ניאlez להפעיל גם עם העמודה ה- i , כלומר את $a_{i,i}$ נחלק ב- c^2 בדומה זו (זאת כי כאשר $P^T AP$ הגדרת חפיפה, ו- P מדרגת שורות, P^T מדרגת עמודות).

הוכחה. נסמן את $r = \dim f$. עד כדי שינוי סדר איברי הבסיס, המטריצה המייצגת אלכסונית היא:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \text{diag}(c_1 \dots c_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $0 \neq c_1 \dots c_r$, ביחס לבסיס $(v_i)_{i=1}^r$. באופן כללי לכל $i \in \mathbb{R}$ נוכל להגיד את כך $v'_i = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$ כי $f(v_i, v_i) = c_i$ ומליניאריות בכל אחת מהקוודינאות. בשל כך $B' = (v'_1 \dots v'_r, v_{r+1} \dots v_n)$ בסיס המקיים את הדרישות.

באותנו האופן, אם $\mathbb{C} \neq \mathbb{F}$ (ולא), אז קיים בסיס שהמטריצה המייצגת לפיו היא:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בלוקים, כך ש- $r = q + p$. כאן נגדיר:

$$f(v, v) = c < 0, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{|c|}}, \quad f(v', v') = \frac{c}{|c|} = -1$$

הגדרה 71. יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} ו- f תבנית בילינארית מעל V . נאמר ש- f מוגדרת חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם $\forall v \in V$ מתקיים ש- $0 > f(v, v) \geqslant 0 / f(v, v) \leqslant 0 / f(v, v) < 0$ (בהתאם לשם).

הערה 43. באנגלית: "Positive/Negative Definite matrix".

משפט 105. תהא A מטריצה מייצגת של תבנית בילינארית סימטרית, עם ערכי $1, -1, 0$, בלבד על האלכסון, מקיימת:

- f מוגדרת חיובית אם ישנים רק 1-ים.
- f מוגדרת אי-שלילית אם ישנים רק 1-ים ואפסים.
- f מוגדרת שלילית אם ישנים רק 1-ים וmins.
- f מוגדרת אי-חיובית אם ישנים רק 1-ים ואפסים.

הוכחה.

טרויאלי \iff

\iff לכל $v \in V$ קיימים וחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ו- $f(v, v) = \alpha_1^2 f(v_1, v_1) + \dots + \alpha_n^2 f(v_n, v_n)$ ולפי המקירה ■

משפט 106 (משפט ההתאמה של סילבستر). q, p עבורם המטריצה הסימטרית חופפת ל- $\text{diag}(I_p, I_{-q}, 0)$ נקבעים ביחידות.

(תזכירו כמה משפטיים מעלה במקרה בו $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

גישה שגואה להוכחה. הוכחה באמצעות tr לא עובדת. בנויגוד ליחס הדמיון להעתקות לינאריות, ביחס החפיפה להעתקות בילינאריות ה- tr לא נשמר. ■

. $t + s = p + q$ כי $B' = (v'_1 \dots v'_t, u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k) = (v_1 \dots v_p, u \dots u_q, w_1 \dots w_k)$ וכן $B = (v_1 \dots v_p, u \dots u_q, w_1 \dots w_k)$ נסמן $t \leq p$, $s \leq q$, n נניח בשילילה ש- $p < t$. $U = \text{span}(v_1 \dots v_p)$ ו- $\dim U = p$. ידוע f חיובית על U , וכן $W = \text{span}(w_1 \dots w_k)$ ו- $\dim W = k$. אזי גם f חיובית על W , ו- $\dim W = k$. בגלל ש- $U \cap W = \{0\}$ (כי אם לא, אז עבור $W \cap U \neq \{0\}$ נקבל $v \in W$ כי $f(v, v) \leq 0$ וכן $v \in U$ כי $f(v, v) > 0$ ו- $v \in U \cap W$ ו- $f(v, v) = 0$ ו- $v \in V$ ו- $V = U \oplus W$ תם"ז) וכן $\dim U + \dim W \leq \dim V$. ■

סימון 9. ה- (q, p) לעיל נקבעים הסינגטורוה של f .

סימון זה רלוונטי בעיקר למטריצה שאינה מנומנת, שלא קיימים לה אפסים על האלכסון בצורה הקאנונית. **הערה 44.** לעיתים משפט סילבستر נקרא משפט ההתאמה או משפט האיזוריה.

(תזכירו, הסינגטורה תתקוף אותנו אח"כ)

המשך בעמוד הבא

2.2 Inner Product Vector Spaces

2.2.1 ~ הגדירה כללית

(2.2.1.1) מעל \mathbb{R}

מעטה ועד סוף הקורס, מתקיים $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. כל עוד נאמר " \mathbb{F} ", זה נכון בעבר שני המקרים. אחרת, נפרט.

הגדרה 72. יהיו V מ"ז, מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} היא תבנית ביילינארית סימטרית חיובית מעל V , ומוסומנת $f(v, u) = \langle v, u \rangle$ (ויש ספרים שמוסמנים $\langle u | v \rangle$) $: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

מסקנה 23. התבנית f היא מ"פ אם ומ"ם המיצגת שלה A בסיס כללי, היא סימטרית חיובית.

סימון 10. בקורס מסמנים $\langle \cdot | \cdot \rangle$ אבל אני מוגניב אז אני משתמש ב- $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

лемה 11. $0 \geqslant \langle v | v \rangle \quad \forall v \in V : \langle v | v \rangle = 0 \iff v = 0$. $\langle v | v \rangle \geqslant 0$ מושתמש ב- $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

הוכחה מסימטריה.

דוגמה. המכפלה הפנימית הסטנדרטית על \mathbb{R}^n , AKA כפל סקלרי:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

הגדרה 73. אם V מ"ז וקיימת $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ המכפלה הפנימית אז $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.

משפט 107. $M_n(\mathbb{R})$ הוא $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^T)$.

דוגמה מגניבה. בהינתן $V = [0, 1]$, מ"ז הפונקציות הממשיות הרציפות על $[0, 1]$, ו- $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ מושפט 108. (שהפליציו מחדו"א) אם $f \geqslant 0$ אינטגרבילית על קטע $[a, b]$ ווגם ישנה נקודה חיובית $c \in [a, b]$ שעבורה $0 \geqslant \int_a^b f(x) dx$ ווגם f רציפה ב- c , אז $0 > \int_a^b f(x) dx$.

(2.2.1.2) מעל \mathbb{C}

ישנה בעיה עם חיוביות: אם $v \in V$ כך ש- $0 \geqslant \langle v | v \rangle \geqslant -1 \langle v | v \rangle < 0$ אז $\langle v | v \rangle < 0$ סתירה. לכן, במקום זאת, נשימוש בהגדירה הבאה:

הגדרה 74. יהיו V מ"ז מעל \mathbb{C} . מכפלה פנימית $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ מקיימת:

- ליניאריות ברכיב הראשון: אם נקבע v , אז $\langle u | v \rangle \mapsto u$ לינארית.

• ססקווילינאריות/אנטי-לינארית ברכיב השני (במקום לינאריות): $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$ ו- $\langle u | \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u | v \rangle$

כאשר $\bar{\alpha}$ הצמוד המרוכב של α .

$\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

• הרמיטיות (במקום סימטריות):

• חיוביות ואנאיוטרופיות: $\forall 0 \neq v \in V : \langle v | v \rangle > 0 \wedge \langle 0 | 0 \rangle = 0$

למעשה – נבחן שאין צורך במש ססקווילינאריות ברכיב השני וכן לא בתנאי $0 = \langle 0 | 0 \rangle$, והגדירה שcolaה עבור חיוביות ברכיב השני בלבד, זאת כי:

$$\langle u | \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v | u \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle v | u \rangle} = \bar{\alpha} \langle v | u \rangle$$

ומכאן נגרר ססקווילינאריות, וכן $0 = \langle 0 | 0 \rangle$ נובע ישרות מלינאריות ברכיב השני.

הערה 45. באוניברסיטאות אחרות מקובל להגדיר לינאריות ברכיב השני ולא בראון. זה לא באמת משנה.

מסקנה 24. נוכל להגיד מטודיצה A מיצגת של התבנית f ססקווילינארית, באופן דומה להגדירה והגילה, ואז להבחן שגם A סימטרית חיובית אם f מ"פ. עוד נבחן ש:

$$\langle v | u \rangle = f(v, u) = v A u^* = v A \bar{u}^T$$

הגדרה 75. למטריצה המיצגת של המכפלה הפנימית קוראים מטריצת גראם או גראמיון.

הגדרה 76. הצמוד למטריצה B מוגדר להיות: $\overline{B^T} := B^*$

הגדרה 77 (הגדרה נחמדה). היא מ"פ V מ"ז מעל \mathbb{F} . לכל $v \in V$ מוגדרים את הנורמה של v להיות $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$

משפט 109. הנורמה כפלית וחיבורית.

הוכחה. מאקסימות החיבוריות:

$$\|v\| \geq 0 \wedge (\|v\| = 0 \iff v = 0)$$

וכן:

$$\|t \cdot v^2\| = \langle tv | tu \rangle = t\bar{t} \langle v | v \rangle = |t| \|v\| \implies \|t \cdot v\| = |t| \|v\|$$

■

הגדלה 78. هي V מ"ו מעל \mathbb{F} , ו- $\mathbb{R}_{\geq 0}$: $\| \cdot \|, \text{או } (V, \|\cdot\|)$ יקרא מרחך נורמי.

משפט 110. ("גיאומטריה הפלוריזציה") בהינתן $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, ניתן לשחזר את המכפלה הפנימית, באמצעות הנוסחה הבאה:

גרסה מעל \mathbb{R} :

$$\forall v, u \in V: \langle v | u \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$$

גרסה מעל \mathbb{C} :

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + iv\| - i \|u - iv\| \right)$$

הוכחה (ל \mathbb{C}):

$$\begin{aligned} \langle u + v | u + v \rangle &= \|u\|^2 + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle v | u \rangle) \\ \langle v - u | v - u \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\Re(\langle v | u \rangle) \\ \langle u + iv | u + iv \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u | iv \rangle + \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i \langle u | v \rangle + i \overline{\langle u | v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i(2\Im(\langle u | v \rangle)) \\ \|u - iv\| &= \|u\| + \|v\| - \langle u | iv \rangle - \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\| + \|v\| - 2\Im(\langle v | u \rangle) \end{aligned}$$

■

ותה"כ אם נציב בנוסחה, אחרי שהיחסנו את כל אבירה, הכל יצטמצם וש- $\langle v | u \rangle$ אכן שווה לדorous.

במילים אחרות, באותה המידה שתבניות שמתבססות בילינאריות ותבניות ריבועיות אפשר להסיק אחת מהשנייה, אפשר גם מכפלה פנימית להסיק נורמה ולהפוך. או, מ"פ ומרחוב נורמי הם דיסקלים. זה לא מפותע, בהתחשב bahwa ככל תבנית סימטרית לא-מנוענת משרה באופן ייחיד תבנית ריבועית, ולהפוך (במאפיין שונה מ-2).

הערה 46. למעשה מעל \mathbb{R} לא באמת היינו צרכים להוכיח כלום: הנורמה במקורה היא שורש של התבנית הריבועית המשוררת ע"י המכפלה הפנימית (שהיא תבנית בילינארית). מחוקיות אפשר להעלות בריבוע את הנורמה ולשחזר את התבנית הריבועית שכבר הוכחנו שיכולה לשחזר התבנית ריבועית.

2.2.2 ~ אורתוגונליות, זהויות ואי-שוויונות של המכפלה הפנימית

הגדלה 79. בהינתן $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מ"פ, לכל $v \in V$ נאמר ש- v מאוקץ ל- v (או אורתוגוני ל- v) אם אנחנו מרגשים מפונפנים) ונסמן $v \perp u$ אם $\langle u | v \rangle = 0$.

הערה 47. אם $v \perp u$ אז $u \perp v$. (כי צמוד של 0 הוא 0).

(2.2.2.1) משפט פיתגורס ותוצאותיו

משפט 111 (משפט פיתגורס). (מאוד מועיל) יהיו V מ"פ כך ש- $v, u \in V$ אורתוגונליים, אז $\|v+u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$

הוכחה. משום שהם מאונכים מתקיים $0 = \langle v+u | u \rangle$. נפתח אלגברת:

$$\|v+u\|^2 = \langle v+u | v+u \rangle = \|v\|^2 + \langle v | u \rangle + \langle u | v \rangle + \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \quad \square$$

הערה 48. בtower \mathbb{R}^n הוקטורים הסטנדרטיים מאונכים אחד לשני (במכפלה הפנימית הסטנדרטית) ולכן $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ כאשר $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ הדרטה של קרונקר. בהינתן $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ קיבל ש- $v = \sum \alpha_i e_i$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \implies \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

שהה בדיק מושג הנadol בגיאומטריה אוקלידית.

הערה 49. מעל \mathbb{R} מקבלים אמ"מ למשפט פיתגורס, מעל \mathbb{C} לאו דווקא.

משפט 112. (אי שוויון קושי-שווורץ)

$$\forall v, u \in V: |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ושוויון אמ"מ v, u ת"ל.

הוכחה. אם v או u הם 0, אז מתקבל שוויון. טענה עיר: קיים איזשהו $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש- $v - \alpha v \perp u$. נסמן $\alpha v = u$ כאשר נמצא אותו. הוכחת טענה העיר. נחפש כזה:

$$\langle v - \alpha v | v \rangle = 0 \iff \langle v | u \rangle - \alpha \|v\|^2 = 0 \iff \alpha = \frac{\langle v | u \rangle}{\|v\|^2}$$

כדרوش. (אפשר לחלק בנורמה כי הם לא 0). משום ש- $v - \alpha v \perp u$ נוכל להיעזר במשפט פיתגורס עליהם:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|(u - \alpha v + \alpha v)\|^2 = \overbrace{\|u - \alpha v\|^2}^{\geq 0} + |\alpha|^2 \|v\|^2 \\ &\geq |\alpha|^2 \cdot \|v\|^2 = \frac{|\langle v | u \rangle|^2 \cdot \|v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{|\langle v | u \rangle|^2}{\|v\|^2} \\ &\implies |\langle v | u \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 \\ &\implies |\langle v | u \rangle| \leq \|v\| \|u\| \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נכון משום ש- $0 \geq |\langle v | u \rangle|, |\langle v | u \rangle|, \|v\|, \|u\|$, ולכן ניתן להוציא שורש לאי השוויון. בפרט 0 $\leq \alpha v$ הם תלויים לינארית ומכאן שיש שוויון אמ"מ v, u ת"ל.

הערה 50. למשה v הוא היטל u על v . אבל את זה נראה רק בהמשך.

הערה 51. זה לא מדויק להגיד שהוא נגרר ממשפט הקוסינוסים מעל \mathbb{R}^n , משום שהגדרת הזווית בין v, u בגיאומטריה האוקלידית מבוצעת כדלקמן:

$$\widehat{u, v} = \arccos \left(\frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \|v\|} \right)$$

וב- \arccos מוגדר לפי טיילור.

דוגמאות.

1. ממכפלה פנימית סטנדרטית:

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)$$

2. נניח $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות אז:

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \cdot \int_0^1 g^2(t) dt$$

כאשר $f \cdot f = f^2$ (לא הרכבה).

3. המשפט הבא:
משפט 113 (אי-שוויון המשולש).

$$\forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ושווין אם "מ אחד מהם הוא 0 או אם כפולה חיובית אחד של השני (לא שקול לתלויים לינארית – יכולה להיות כפולה שלילית)."

הוכחה (לאו שווינו המשולש). תזכורת: עבור $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\mathcal{Z}|^2 = (\Re \mathcal{Z})^2 + (\Im \mathcal{Z})^2$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle u | v \rangle) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u | v \rangle|$$

ושווין אם "מ u הוא אפס או כפולה חיובית של v . מקושי-שוויון":

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

■ **משפט 114 (משפט הקוסינוסים).** בהינתן $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ מ"פ, מתקיים:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \cos(\widehat{u, v})$$

הוכחה. פשוטו נפתח אלגברה:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \cos(\widehat{u, v}) &= \langle u | u \rangle^2 + \langle v | v \rangle^2 + 2\|u\|\|v\| \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\|\|v\|} \\ &= \langle u | u \rangle + 2\langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \langle u | u + v \rangle + \langle v | u + v \rangle \\ &= \langle u + v | u + v \rangle = \|u + v\|^2 \end{aligned}$$

■ **הערה 52.** מעל המרכיבים אין לנו את הסימטריות הדרושים. במקומות זאת, מתקיים:

2.2.3 ~ מרחבים ניצבים והיטליס

סימון 11. יהיו $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מ"פ. יהיו $S, T \subseteq V$. נסמן:

$$u \in V: (u \perp S \iff (\forall v \in S: u \perp v))$$

א.

$$S \perp T \iff \forall v \in S \ \forall u \in T: v \perp u$$

ב.

$$S^\perp := \{v \in V \mid v \perp S\}$$

ג.

הגדרה 80. T^\perp הוא תת-המרחב הניצב ל- T .
משפט 115. יהיו $S, T \subseteq V$ קבוצות, ו- $V \subseteq U, W \subseteq V$ תמי'ים. אז:

$$v \perp \text{span}(S)$$

$$S^\perp \subseteq V$$

$$T^\perp \subseteq S^\perp \text{ או } S \subseteq T^\perp$$

ד.

$$U \oplus U^\perp = V$$

ה.

$$(S^\perp)^\perp = \text{span } S$$

ו.

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$$

.‡

הוכחה (לג').

$$\blacksquare \quad \forall v \perp T: c \perp S \implies v \in S^\perp$$

הערה 53. שווין בג' מתקיים אם $\text{span } S = \text{span } T$

הגדלה 81. משפחה שלקטורים $A \subseteq V$ נקראת אורתוגונלית אם $v \perp u \in V: u \neq v \in V$.

הערה 54. אם A משפחא אורתוגונלית וגם $A \neq 0$ אז ניתן ליזור ממנה משפחא שלקטורים אורתוגונליים שהם גם וקטורי ייחידה, ע"י נרמול.

הגדלה 82. משפחא שלקטורים $V \subseteq A$ נקראת אורתוגונרמאלית, אם היא אורתוגונלית ובנוסף כל הוקטורים הם וקטורי ייחידה, ביחס אחר, לכל $v_i, v_j \in A$ מתקיים $\delta_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle = 0$.

הגדלה 83. יהי $U \subseteq V$ תמי"ז. יהא $v \in V$. אז ההטלה האורתוגונלית של V על U היא $p_U(v)$ והוא וקטור המקיים:

$$\begin{aligned} p_U(v) &\in U \\ v - p_U(v) &\in U^\perp \\ u = p_U(v) &\in U: \|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\| \end{aligned}$$

-
-

משפט 116. בסימונים לעיל, $\|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\|$ הוכחה. יהי $U \subseteq V$. ידוע $u \in U$. כמו כן ידוע $v - p_U(v) \in U$. אזי בפרט $\langle u - p_U(v) | p_U(v) - v \rangle = 0$. מכאן $u \perp p_U(v) - v$.

וסה"כ $\|v - u\|^2 = \|(u - p_U(v)) + (p_U(v) - v)\|^2 \stackrel{\text{טיפ}}{=} \|u - p_U(v)\|^2 + \|v - p_U(v)\|^2$.
 $u = p_U(v)$ ושוין אם $\|u - p_U(v)\| = 0$. ושוין אם $\|v - p_U(v)\| = 0$.

עתה נוכח את ייחדות ההטלה האורתוגונלית (קיים נוכח בהמשך באופן קונסטרוקטיבי)
משפט 117. ההטלה הניצבת, היא ייחידה.

הוכחה. יהו $p_U(v)$ וכן $p'_U(v)$ הטלות של v על U . מהטענה:

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - p'_U(v)\|$$

■ אבל בהחפה תפקיים מקבילים את אי-השוויון הפוך. לכן יש שוויון נורמות. מהמשפט לעיל $\langle p_U(v) | p'_U(v) \rangle = 0$. אז היא בת"ל.
משפט 118. תהי $A \subseteq V$ משפחא אורתוגונלית ללא 0. אז היא בת"ל.

הוכחה. יהו $v_1, \dots, v_n \in A$ ונניח $\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i = 0$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. אזי:

$$0 = \langle 0 | v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \middle| v_j \right\rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \underbrace{\|v_i\|^2}_{>0} \implies \alpha_j = 0$$

כאשר השוויון האחרון מוכיח הקבוצה אורתוגונלית.

משפט 119 (קיים היטל אורתוגונלי). נניח $V \subseteq U$ תמי"ז. נתנו $B = (e_1, \dots, e_n)$ בסיס אורתונורמלי של U (כלשהו, לא בהכרח סטנדרטי) וגם לא בהכרח $V = \mathbb{F}^n$. אז

$$\forall v \in V: p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle e_i$$

הוכחה. א.ל. $\langle v_i - p_U(v) | e_j \rangle = 0$ וגם $\langle v - p_U(v) | u \rangle = 0$ הוכחה. א.ז. $\langle v - p_U(v) | u \rangle = 0$ הוכח בברור, נותר להוכיח:

$$\langle v - p_U(v) | e_j \rangle = \langle v | e_j \rangle - \langle p_U(v) | e_j \rangle =: *$$

ידע:

$$\langle p_U(v) | e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle e_i \middle| e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle \cdot \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle \delta_{ij} = \langle v | e_j \rangle$$

נחזיר לשווין לעיל:

$$* = \langle v | e_j \rangle - \langle v | e_j \rangle = 0$$

כך.

(2.2.3.1) אלגוריתם גראט-שמידט

משפט 120 (אלגוריתם גראט-שמידט). תהי $(b_1 \dots b_k)$ קבוצה סדורה בת"ל של וקטורים בממ"ס V . אז בכל משפחה א"נ $\text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$ כך ש- $\text{span}(u_1 \dots u_k) = \text{span}(b_1 \dots b_k)$.

מסקנות מהמשפט. לכל ממ"ס נ"ס קיים בסיס א"נ (=אורותונורמלי). יתרה מזאת, בהינתן בסיס $B = (b_1 \dots b_n)$ ניתן להפכו לבסיס א"נ $(u_1 \dots u_n)$ המקיים $\forall k \in [n]: \text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$.

הוכחה. בניה באינדוקציה. נגדיר עבור $k = 1$ את $b'_1 = u_1$. מתקיים $\text{span} b_1 = \text{span} b'_1$ וכן $\{u_1\}$ קבוצה א"ג. נניח שבינוי את k האיברים הראשונים, נבנה את האיבר $-k+1$ b_{k+1} (כלומר את $k+1$ מילימ"ס אחרים, הנחנו $u_1 \dots u_k$ אורותונורמלית ווגם $\text{span}(u_1 \dots u_k) = \text{span}(b_1 \dots b_k)$).

מההסעיף הקודם $p_U(b_{k+1})$ קיים, וגם $0 \neq p_U(b_{k+1}) - p_U(b_{k+1}) = 0$. בדומה מפורשת:

$$u_{k+1} = \frac{b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i}{\|b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i\|}$$

מהגדרת $p_U(b_{k+1})$, מתקיים $b_{k+1} \in U^\perp$ וכן $u_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \in U^\perp$.

$$b_1 \dots b_k = \overbrace{\text{span}(u_1 \dots u_{k+1})}^{\text{בת"ל}}$$

נשאר להוכיח ש- $\text{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. זה מספיק משום שאז נקבל $b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$. אבל הם שווים ממד ולכן שווים. סה"כ:

$$b_{k+1} = \|b_{k+1} - p_U(b_{k+1})\| \cdot u_{k+1} + \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i \implies b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$$

מש"ל.

מסקנה 25. מצאנו נוסחה סגורה ל- p_U בהינתן בסיס אורותונורמלי, וכן מצאנו אלגוריתם למציאת בסיס אורותונורמלי לכל מ"ז נ"ס. מכאן ש- p_U אכן קיימת לכל מ"ז נ"ס, והוא פונקציה מוגדרת היטב.

משפט 121. יהיו $V \subseteq U$. נניח שלכל $v \in V$ מוגדר $p_U(v)$ (בפרט כל מ"ז נ"ס). אז $V \rightarrow U$ המוגדרת לפי $v \mapsto p_U(v)$ העתקה לינארית.

הוכחה. יהיו $v, v' \in V, \alpha \in \mathbb{F}$. ידוע $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^\perp$. ועל כן:

$$(v - p_U(v)) + \alpha(v' - p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - (p_U(v) + \alpha p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v') \in U^\perp$$

מה מקיים היטל וקטורי? ראשית ההיטל ב- U , ושנית v פחות ההיטל מאונך. הוכחנו שהינתן היטל, הוא ייחיד. והראינו ש- $(v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v')$ מקיים את זה, ולכן אחד הוא ייחיד, ושה"כ שווים ולינארית.

$$\min_{u \in U} \|v - u\| = \|v - p_U(v)\|.$$

בניסוח אחר: ההיטל p_U הוא הווקטור הכי קרוב ל- v ב- U . בתרגום צוון שזהו דרך למצוא את הפתרון "הכי קרוב" למערכת המשוואות לינארית שאין לה פתרון.

הגדרה 84. הפתרון האופטימלי למערכת משוואות $(A | b)$ הוא $p_{\text{Col } A}(b)$ (כאשר $\text{Col } A$ מ"ז העמודות).

2.2.4 ~ צמירות ודו-אליות

(2.2.4.1) העתקות צמודות לעצמן, והעתקות חיוביות

הגדלה 85. $\forall u, v \in V \langle Tu | v \rangle = \langle v | T^*v \rangle$. או $T: V \rightarrow V$ מ"פ ו- $T^*: V \rightarrow V$ מ"פ. נקראת סימטרית ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) או הרטיט ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) אם $\langle u | T^*v \rangle = \langle T^*u | v \rangle$ באופן כללי, העתקה כזו תקרא צמודה לעצמה.

דוגמה. ($A \in M_n(\mathbb{R})$) המקרה הפרטי במ"פ המשרה את הגיאומטריה האוקלידית) עבור $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ מ"פ סטנדרטיב, ו- $\langle v | u \rangle = v^T u$ מתקיים $T_A: V \rightarrow V$ ט"ל, היא צמודה לעצמה אם: ידוע $\langle A^T u | v \rangle = \langle v | A^T u \rangle$

$$\langle T_A v | u \rangle = (Av)^T u = v^T A^T u = \langle v | A^T u \rangle$$

ז"א אם T_A א-סימטרית, כלומר $A = A^T$ מטריצה סימטרית. גם הכיוון השני נכון: אם $T: V \rightarrow V$ סימטרית אז ע"י בחירת בסיס נקבע $[T]_B^B$ גם היא סימטרית.

דוגמה נוספת (בדומות משפט) **משפט 123.** העתקה $p_U: U \rightarrow U$ מ"ז כלשהו, היא היטל, צמודה לעצמה.

הוכחה. יהיו V ו- U . ניעזר בעובדה לכל $u \in U$ $p_U(u) + p_{U^\perp}(u) = u$. עוד נבחן שמכיוון $\text{Im } p_U = U \wedge \text{Im } p_{U^\perp} = U^\perp$ מתקיים $p_U(u) \in \text{Im } p_U$.

$$\begin{aligned} \langle p_U(v) | u \rangle &= \langle p_U(v) | p_U(u) + p_{U^\perp}(u) \rangle \\ &= \langle p_U(v) | p_U(u) \rangle + \underbrace{\langle p_U(v) | p_{U^\perp}(u) \rangle}_0 \\ &= \langle p_U(v) | p_U(u) \rangle + \overbrace{\langle p_{U^\perp}(v) | p_U(u) \rangle}^0 \\ &= \langle p_U(v) + p_{U^\perp}(v) | p_U(u) \rangle \\ &= \langle v | p_U(u) \rangle \quad \top \end{aligned}$$

■

משפט 124. יהיו $T, S: V \rightarrow V$ צמודות לעצמן. אז:

1. $\alpha T, T + S$ צמודות לעצמן.

2. המכפלה $S \circ T$ צמודה לעצמה אם S צמודה לעצמן.

3. אם p פולינום מעל \mathbb{F} אז $p(T)$ צמודה לעצמה.

כל לראות ש- $3 \Rightarrow 1 + 2 \Rightarrow 1$. נובע ישירות מהגדלה. 1 טרויאלי. נוכיח את 2.

הוכחה ל-2. נניח $S \circ T$ צמודה לעצמה. בהנחה המשפט ידוע S, T צמודות לעצמן. נקבע:

$$\langle (S \circ T)v | u \rangle = \langle v | STu \rangle = \langle Sv | Tu \rangle = \langle TSv | u \rangle \implies \langle (ST - TS)v | u \rangle = 0 \quad \forall v, u$$

נסיק:

$$\implies \forall v \langle (ST - TS)v | (ST - TS)v \rangle = 0 \implies (ST - TS)v = 0 \implies STv = TSv \implies \top$$

מהכיוון השני, אם $TS = ST$ אז $TS = ST$ צמודות לעצמן:

$$\langle STv | u \rangle = \langle S(Tv) | u \rangle = \langle Tv | Su \rangle = \langle v | TSu \rangle = \langle v | STu \rangle$$

■

הגדלה 86. העתקה $T: V \rightarrow V$ חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיוביית אם לכל $v \in V$:

אי-שלילית: $\langle Tv v \rangle \geq 0$ אי-חיובי: $\langle Tv v \rangle \leq 0$	חיובי: $\langle Tv v \rangle > 0$ שליל: $\langle Tv v \rangle < 0$
---	---

הערה 55. באופן כללי, אין קשר הדוק בין ההגדלה זו לבין הגדרת חיוביות של מבנים בילינאריים. המושגים יתקשרו אחד לשני בהמשך רק בהקשר של העתקות צמודות לעצמן.

משפט 125. אם T חיובית/שלילית, אז היא הפיכה.

הוכחה. נניח ש- T לא הפיכה, נניח בשלילתה שהיא חיובית. קיים $v \in V$ אז $v \in \ker T$. איז $v \neq 0$. איז $\langle T v | v \rangle = \langle 0 | v \rangle = 0$.

בסתירה לכך ש- T חיובית.

משפט 126. נניח ש- S צמודה לעצמה, אז S^2 צמודה לעצמה ואי-שלילית.

הוכחה. ממשפט קודם S^2 צמודה לעצמה. נוכיח אי-שליליות:

$$\forall 0 \neq v \in V: \langle S^2 v | v \rangle = \langle S v | S v \rangle = \|S v\|^2 \geq 0$$

הגדלה 87. פולינום $p \in \mathbb{R}[x]$ יקרא חיובי אם $\forall x \in \mathbb{R}: p(x) > 0$.

משפט 127. נניח $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ חיובי, ו- $V \rightarrow V$: $T: V \rightarrow V$ צמודה לעצמה, אז $\langle T | p(T) \rangle$ חיובית בסיס-קן, וצמודה לעצמה.

лемה 12. אם $p \in \mathbb{R}[x]$ חיובי, אז קיימים $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[x]$ ו- $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $c + \sum_{i=1}^k g_i^2(x) \geq 0$ ו- $c \neq 0$.

הערה 56. למעשה הטענה נכונה גם אם n נדרש $k = 2$.

реально для доказательства леммы: над \mathbb{C} это матпрак, и можно записать $p(x) = a_n \prod_{j=1}^s (x - i\alpha_j)(x + i\alpha_j)$ (над \mathbb{R} все полиномы матпрак для корней вещественных и комплексных). Важно показать, что утверждение верно для $g^2 h \bar{h} = g_1^2 + g_2^2$.

הוכחה (של המשפט, לא של הלמה). יהיו $v \in V$ כך $0 \neq v$:

$$\langle p(T)v | v \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^k g_i^2(T)v \mid v \right\rangle}_{\sum_{i=1}^k \langle g_i^2(T)v \mid v \rangle \geq 0} + \overbrace{c \langle v | v \rangle}^{c \|v\|^2 \geq 0} \geq 0$$

מסקנה 26. אם $T: V \rightarrow V$ צמודה לעצמה ו- $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום חיובי, אז $\langle T | p(T) \rangle$ הפיכה.

משפט 128. נניח ש- $V \rightarrow T: V \rightarrow V$ סימטרית (צמודה לעצמה מעל \mathbb{R} /הטריציה המיצגת סימטרית) ויהי $m_T(x)$ הפולינום המינימלי של T . אז m_T מתפרק לגורמים לינארים. בנוסף, הם שונים זה מזה.

הוכחה. נניח בשלילתה קיומ $m_T | p$ ו- $\deg p \geq 2$. בה"כ נניח ש- p חיובי (אין לו שורש ב- \mathbb{R} , שכן נמצא לפחות מעלה/מתחית לציר $\text{Re } x$). אז אפשר לכתוב את $m_T = p \cdot g$ כאשר $m_T \neq 0$ כי m_T מינימלי מדרגה גבוהה יותר. אז:

$$0 = m_T(T) = \underbrace{p(T) \cdot g(T)}_{\neq 0} \implies g(T) = 0$$

בסתירה למינימליות של m_T . מה"כ m_T אכן מתפרק לגורמים לינארים. עתה יש להראות שהגורמים הלינארים שלו זרים. נניח ש- T סימטרית. ניעזר בלמה המופיע מיד אחרי ההוכחה זו. נניח בשלילתה שהם לא כולם שונים, אז $(x - \lambda)^2 g(x) = 0$.

$$0 = m_T(T)v = (T - \lambda I)^2 g(T) \implies \omega = g(T)v, \quad (T - \lambda I)^2 \omega = 0$$

לכן בפרט $(T - \lambda I)\omega = 0$ וסתירה למינימליות.

מסקנה 27. T סימטרית היא לכיסינה.

זכרו מסקנה זו להמשך. היא תאפשר להיות להגיוונית כאשר נדבר על המשפט הספקטורי מעל \mathbb{R} .

лемה 13. נניח T סימטרית ו- $\lambda \in \mathbb{R}$, איז $(T - \lambda I)^2 = 0$ איז $(T - \lambda I) = 0$.

הוכחה. ידוע:

$$\forall v: 0 = \langle (T - \lambda I)^2 v | v \rangle = \langle (T - \lambda I)v | (T - \lambda I)v \rangle = \|(T - \lambda I)v\|^2 \implies (T - \lambda I)v = 0$$

משפט 129. אם V ממ"פ ו- $V \rightarrow T: V \rightarrow V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז הע"ע של T ממשיים.

הוכחה. יהיו $v \in V$ ו- $u \neq 0$ ו- u של T שמתאים לע"ע. נחשב:

$$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v | v \rangle = \langle T v | v \rangle = \langle v | T v \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

ידוע $u \neq v$ ולכן $0 \neq \|u\|^2$ ונמצא $\lambda v = \bar{\lambda} u$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$.

משפט 130. אם V ממ"פ ו- $T: V \rightarrow V$ ט"ל צמודה לעצמה, אז כל זוג $u, v \in V$ $\neq 0$ ע"ע שונים, המותאיםים לערכים $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, מאונכים זה זה.

הוכחה. למעשה, מהטענה הקודמת $\alpha u = \beta u$, $Tv = \beta v$. לכן $\alpha = \beta$. נחשב:

$$\alpha \langle u | v \rangle = \langle \alpha u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle = \langle u | \beta v \rangle = \bar{\beta} \langle u | v \rangle = \beta \langle u | v \rangle$$

בגלל ש- β מתקיים $\alpha - \beta = 0$. ולכן $\langle u | v \rangle = 0$ ו- $\alpha = \beta$.

הערה 57. בחלק הבא יש שימוש קל במרחבים דו-אלים. בעבר סטודטיכים שבעורם מוחטים דו-אלים לא כלל כחלק מלינארית אן, אני ממליץ לקרוא את החלק הראשון של מרחבים דו-אלים בסוף הסיכום. משפט ריס מחייב כאן משהו יותר מעוניין: הוא מגדיר פונקטור קווריאנטי בין המרחב הדו-אלי למרחב המכפלות הפנימיות המקובעת ברכיב הראשוני.

משפט 131 (משפט ריס). ידי V ממ"פ סופי וכי $V^* \in V$. אז קיים יחיד וקטור $v \in V$ שמקיים $\varphi(v) = \langle v | u \rangle \forall u \in V$:

הוכחה.

קיום. ידי $B = (b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתונורמלי של V (הוכחנו קיום בהרצאות קודמות). נסמן $\varphi(b_i) = \langle b_j | u \rangle$ ו- $\delta_{ij} \leq n$: $\varphi(b_j) = \langle b_j | u \rangle$. כמובן $\varphi(b_i) = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(b_j)} b_i$. ב כדי להראות

$$\langle b_j | u \rangle = \left\langle b_j \left| \sum_{i=0}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\overline{\varphi(b_i)}}_{b_i} \underbrace{\langle b_j | b_i \rangle}_{\delta_{ij}} = b_j \quad \top$$

יחידות: אם קיים וקטור w נוסף שעבורו $\varphi(v) = \langle v | w \rangle = \langle v | u \rangle$ אז בפרט עבור $w - u = v$ נקבל:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \langle v | w \rangle = \langle v | u \rangle \\ \implies \langle v | u - w \rangle &= 0 \\ \implies 0 &= \langle u - w | u - w \rangle = \|v - w\|^2 = 0 \\ \implies v - w &= 0 \\ \implies v &= w \end{aligned}$$

זה"כ הוכחנו קיום ויחידות כדרוש.

הגדרה 88. מטריצה תקרא חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם לכל $v \in \mathbb{F}^n$:

$$\begin{array}{ll} \text{חיובית: } & \langle Av | v \rangle > 0 \\ \text{אי-שלילית: } & \langle Av | v \rangle \geq 0 \\ \text{אי-חיובית: } & \langle Av | v \rangle \leq 0 \\ & \langle Av | v \rangle < 0 \\ & \text{שלילית: } \langle Av | v \rangle < 0 \end{array}$$

כאשר $\langle \cdot | \cdot \rangle$ המ"פ הסטנדרטי מעל \mathbb{F}^n . **הערה 58.** זהו אינה הגדרה נפוצה. לרוב מדברים רק על מטריצה מוגדרת חיובית. במקרה ההגדירה מוקדם על העתקות.

ההגדירות מתלויות במקרה של צמודה לעצמה. (TFAE, the following are equivalent: $A = A^*$, וא"ז התנאים הבאים שקולים (קיצור מוכר):

1. $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ חיובית.

2. לכל $V: T \rightarrow V$ ולכל בסיס אורתונורמלי B כך $T|_B = A|_B$ חיובית.

3. קיימים $T: V \rightarrow V$ חיובית/אי-שלילית ו- B בסיס אורתונורמלי, כך $T|_B = A|_B$ חיובית.

4. הע"ע של A של חיובים (הם בהכרח ממשיים כי היא צמודה לעצמה).

הוכחה. מספיק לטעון זאת כדי להוכיח את השקילויות של 1, 2, 3:

$$\langle Tv | v \rangle_V = \langle [Tv]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n} = \langle A[v]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n}$$

בשביל 2 \rightarrow 1, ידוע שהאנג'ה הימני גדול מד-0 מההנחה שהיא חיובית/אי-שלילית על \mathbb{F}^n , ומכאן הרינו שהמיוצגת בכל בסיס חיובית כדרוש. בשביל 1 \rightarrow 3, נפעיל טיעונים דומים מהאנג'ה השמאלי במקומות. הגרירה 3 \rightarrow 2 ברורה. זה"כ הרינו את .1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3

עתה נוכחים שקולות בין 1 ל-4.

$1 \rightarrow 4$ יהיו $\lambda \in \mathbb{R}$ של A (נוכל להניח λ ממשי כי A צמודה לעצמה)

$$\langle Av | v \rangle = \lambda ||v||^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

$4 \rightarrow 1$ יהיו $v = \sum \alpha_i v_i$ בסיס א"ן של V , ויהי $B = (v_1 \dots v_n)$. נקבל:

$$\langle T_A v | v \rangle = \langle Av | v \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0$$

הערה 59. ההוכחה עובדת באוותה הzcורה בעבור A אי-שלילית, שלילית או א-יחסיבית, ולמען נוחות הוכחנו בעבור העתקה חיובית בלבד.

(2.2.4.2) ההעתקה הצמודה

משפט 133. יהיו V ממ"פ מנ"ס ותהי $T: V \rightarrow V$ לינארית. אז קיימת ויחידה $T^*: V \rightarrow V$ מושפטת ריש קיימים $\langle u | T^*v \rangle$.

הוכחה. לכל $v \in V$, נתבונן בפונקציונל הלינארי $\varphi_V(u) = \langle Tu | v \rangle \in V^*$ המוגדר ע"י $\varphi_V \in V^*$. מושפטת ריש קיימים ייחיד $T^*v \in V$ שעבורו $\langle Tu | v \rangle = \varphi_V(u) = \langle u | T^*v \rangle$. כאמור, ההעתקה T^* , $T^*: V \rightarrow V$ קיימת ויחידה, ונותר להראות שהיא לינארית. עבור $v, w \in V$ ועבור $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} \forall u \in V: \quad & \langle u | T^*(\alpha v + \beta w) \rangle \\ &= \langle Tu | \alpha v + \beta w \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tu | v \rangle + \bar{\beta} \langle Tu | w \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle u | T^*v \rangle + \bar{\beta} \langle u | T^*w \rangle \\ &= \langle u | \alpha T^*v + \beta T^*w \rangle \end{aligned}$$

מස' נסיק ש- $T^*(\alpha v + \beta w) = \alpha T^*v + \beta T^*w$ מוגדרת ע"י מונחים דומים.

הגדרה 89. ההעתקה T^* לעיל נקראת ההעתקה הצמודה ל- T .

דוגמאות. מעל \mathbb{C}^n , עם המ"פ הסטנדרטי, נגדיר $T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ על ידי $T_A(x) = Ax$ מוגדרת ע"י $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n: \langle T_A(x) | y \rangle = \langle Ax | y \rangle = \overline{(Ax)^T} \cdot y = \overline{x^T} \cdot \overline{A^T} y = \overline{x^T} T_{A^T}(y) = \langle x | T_{A^T} y \rangle$$

כלומר, $A^* = \overline{A^T}$, וקראונו לה המטריצה הצמודה.

נבחן שהעתקה נקראת צמודה לעצמה אם $T^* = T$.

עוד נבחן שעבור העתקה הסיבוב $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ בזווית θ , מתקיים $T^* = T_{-\theta}$ היא הסיבוב ב- $-\theta$, וכן היא גם ההפכית לה. ככלומר $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$.

משפט 134 (תכונות ההעתקה הצמודה). יהיו V ממ"פ ותהינה $T, S: V \rightarrow V$ זוג העתקות לינאריות. נבחן ש-:

$$(T^*)^* = T \tag{א}$$

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* \tag{ב}$$

$$(T + S)^* = T^* + S^* \tag{ג}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}: (\lambda T)^* = \bar{\lambda}(T^*) \tag{ד}$$

הוכחה.

$$\forall u, v \in V: \langle T^*u | v \rangle = \overline{\langle v | T^*u \rangle} = \overline{\langle Tv | u \rangle} = \langle u | Tv \rangle \implies (T^*)^* = T \tag{א}$$

$$\langle (T \circ S)u | v \rangle = \langle Su | T^*v \rangle = \langle u | S^*T^*v \rangle \implies (TS)^* = T^*S^* \tag{ב}$$

$$\langle (T + S)u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle + \langle Su | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle + \langle u | S^*v \rangle = \langle u | T^*v + S^*v \rangle \tag{ג}$$

$$\langle (\lambda T)u | v \rangle = \lambda \langle Tu | v \rangle = \lambda \langle u | Tv \rangle = \langle u | (\bar{\lambda}T)v \rangle \tag{ד}$$

סימון 12. העתקה צמודה לעצמה לעיתים קרובות (בעיקר בפיזיקה) מסומנים ב- T^\dagger . באופן דומה גם מטריצה צמודה מסומנים ב- A^\dagger .

משפט 135. בהינתן B אורתונורמלי של V אז $[T^*]_B = [T]_B^*$ (משמעותו לב: האחד צמוד מטריציוני, והשני העתקה צמודה)

משפט 136. כי V מ"ו מעל \mathbb{C} . אז T צמודה לעצמה אם $\forall v \in V: \langle T v | v \rangle \in \mathbb{R}$

הוכחה.

צמודה לעצמה T

$$\begin{aligned} &\iff T = T^* \iff T - T^* = 0 \\ &\iff \forall v \in V: \langle (T - T^*)v | v \rangle = 0 \\ &\iff \forall v \in V: \langle T v | v \rangle - \langle T^* v | v \rangle = 0 \\ &\iff \forall v \in V: \langle T v | v \rangle - \overline{\langle T v | v \rangle} = 0 \\ &\iff \forall v \in V: \Re(\langle T v | v \rangle) + \Im(\langle T v | v \rangle) - \Re(\langle T v | v \rangle) + \Im(\langle T v | v \rangle) = 0 \\ &\iff \forall v \in V: 2\Im(\langle T v | v \rangle) = 0 \iff \forall v \in V: \Im(\langle T v | v \rangle) = 0 \iff \forall v \in V: \langle T v | v \rangle \in \mathbb{R} \quad \square \end{aligned}$$

■

משפט 137. התנאים הבאים שקולים:

1. T צמודה לעצמה.

2. לכל בסיס \mathcal{E} אורתונורמלי מתקיים $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$.

3. $\exists T$ קיים בסיס אורתונורמלי \mathcal{E} כך $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$.

הוכחה. את השקילות 2 \iff 1 הוכיחנו במשפט הקודם. עתה נראה 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1. ניעזר בכך שידוע שלכל \mathcal{E} אורתוגונלי מתקיים $[T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$.

1 \rightarrow 2 ידוע שלכל \mathcal{E} אורתוגונלי מתקיים $[T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ וכן $T = T^*$ מהנתון, כלומר $[T]_{\mathcal{E}} = [T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$. סה"כ $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ לכל \mathcal{E} אורתוגונלי.

2 \rightarrow 3 מאלו גראם-שmidt, בהכרח קיים \mathcal{E} אורתוגונלי כלשהו. לכן מ-4 בפרט הוא מקיים $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ כדרוש. לכן מ-3 ידוע קיום \mathcal{E} כך $[T]_{\mathcal{E}}^* = [T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}$. לכן מהיות \mathcal{E} העתקת הקורדינטות לבסיס איזומורפיים, בהכרח $T = T^*$.

הערה 60. כאן מתקשר השם "סימטרי" לאופרטור סימטרי, כי למעשה משום שמטריצה סימטרית מקיימת $A = A^T = \overline{A^T}$ מעל \mathbb{R} , העתקה היא סימטרית אם המיצגת (תחת בסיס אורתוגונלי) סימטריה.

המשך בעמוד הבא

2.3 Decompositions

אלגברה. ראיינו לכsoon – ניסיון למצוא מטריצה אלכסונית דומה. ה”בעיה” בלבכון, ובמטריצות מעבר באופן כללי, זה שהן לא שומרת את כל תכונות המרחב הוקטורי – הן לא שומרות את הנורמה. לכן, בחולק זהה של הקורס, נגיד “מטריצה מעבר מיוחד” שמשמעותו נורמה, כלומר $\|Av\| = \|Bv\|$. בניסוח אחר, ננסה למצוא בסיס אורתונורמלי שבו הלכsoon מותקיים. על התנאי הזה בדיק נלמד כאשר דבר על משפט הפירוק הספקטורי.

לצערנו, בדיק כמו שלא יכולנו למצוא כל מטריצה, נוכל ללכsoon אורתונורמלית עוד פחות מטריצות. לכן, לאחר מכון העוסק במושג “התאמת המטריצות” – בהינתן מטריצה A , נאמר שהיא למטריצה B אם¹ קיימות מטריצות מעבר בסיסים P, Q כך $Q^{-1}PAP^T = B$. כמובן, זה נראה תנאי חלש יותר. ואכן, אפשר להראות שהוא באמת חלש, ו- A מתאימה ל- B אם² $\text{rank } A = \text{rank } B$. אך מסתבר שאם נגביל את B להיות אלכסונית, ומטריצות המעבר שלנו נדרש לא לשנות את הנורמה (דהיינו $\|Bv\| = \|Av\|$), אז מצאנו פירוק מאוד פשוט $A = P B Q^{-1}$. פירוק לערכים סינגולריים, והוא מאפשר לנו להגיד הרבה על ה”גדלים” שהמטריצה משנה, כי אנחנו מתחאים אותה למטריצה אלכסונית (שאוד נוח לעובד איתה) בעוד מטריצות המעבר לא באמת מופיעות על הנורמות (הגדלים) של הדברים. על המצב הזה נדבר בהקשר של פירוק SVD, המקראה המוכלל של פירוק ספקטורי.

ישנו פירוק נוסף, הפירוק הפלורי. מסתבר, שבאופן דומה לכך שאפשר לפרק וקטור פולאריט (לזווית ולגודלה) מעלה ממ”פים, אפשר לפרק העתקה ”פולארית“ – להרכבת העתקות, כך שהראשונה ”חויבית“ ומשנה את הגדים, והשנייה רק מסובבת (או באופן שקול, לא משנה גודל).

2.3.1 ~ המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן

(2.3.1.1) ניסוח המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן

משפט 138 (המשפט הספקטורי להעתקה לינארית צמודה לעצמה). יהי V ממ”פ ממימד סופי, ותהי $T: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ צמודה לעצמה. אז קיים $L \subset V$ בסיס אורתוגונלי (או אורתונורמלי) שמורכב מ- n וקטורים:

הוכיח. יהי (x) המפולינים המיניימלי של T . נציג $m_T(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{d_i}$ כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם השוניים של T . מהטענה הקודמת $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. [הערה: התמשכנו במשפט היסודי של האלגברה מעלה המרכיבים, והסקנו פירוק מעלה \mathbb{R}]. ב כדי להראות ש- T לכסינה, علينا להוכיח $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. נניח בשילhouette שזה לא מתקיים, אז $(x - \lambda)^2 = 0$ כאשר λ ע”ע כלשהו.Cut, לכל $v \in V$ מתקיים מהיות T צמודה לעצמה (כלומר גם $p(T) = p$ צמוד לעצמו):

$$0 = \underbrace{m_T(T)}_{=0}(v) \implies 0 = \langle m_T(T)(v) | p(T)(v) \rangle = \langle (T - \lambda I)^2(p(T)v) | p(T)v \rangle = \\ \langle (T - \lambda I)(p(T)v) | (T - \lambda I)(p(T)v) \rangle = \|(T - \lambda I)^2(p(T)v)\|^2 = 0$$

ולכן $(v) = 0$ ו- $(T - \lambda I)(p(T)v) = 0$ בסתירה למינימליות של $m_T(x)$. נאמר, מכפלת גורמים לינארים שונים, ולכן T לכסינה, ונוכל לפרק את V באמצעות:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m \ker(T - \lambda_i I)$$

והמרחבים העצמיים הללו אורתוגונליים זה לזה, כי הוכחנו שכל זוג ו”ע”ים של T צמודה לעצמה הם אורתוגונליים. נבנה בסיס $\bigoplus_{i=1}^m B_i$ של $\ker(T - \lambda_i I)$ בסיס אורתוגונלי מלכsoon של T .

משפט 139. יהי V נ”ס מעל \mathbb{R} ותהי $T: V \rightarrow \mathbb{C}^n$. אז T סימטרית אם³ קיימת לה בסיס אורתוגונלי מלכsoon.

הוכיחו אחד, הוכחנו באמצעות המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן. מהיוון השני, נניח שקיים $L \subset V$ בסיס אורתוגונלי מלכsoon של T . נורמל לבסיס אורתונורמלי $B = (b_i)_{i=1}^n$ של T , המתאיםים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. עברו $u, v \in V$, נציג:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$$

ונחשב:

$$\langle Tu | v \rangle = \left\langle T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) \middle| \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle Tb_i | b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_i \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i \lambda_i$$

מהצד השני:

$$\langle u | Tv \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i b_i \middle| T \left(\sum_{i=0}^n \beta_i b_i \right) \right\rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i | Tb_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_j \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_i$$

מטריצתיות שווין, הראיינו ש- $\langle Tu | Tv \rangle = \langle u | T v \rangle$ ולכן T צמודה לעצמה. השוויון לדלתא של קוגניקר נcona מאורתוגונליות איברי הבסיס, והביליאריות כי אנחנו מעלה המשמשים. המשפט לא נכון מעלה מהרוכבים. ■

הוכחה שהמשפט מתקיים בהכרח מעלה המרוכבים: העתקה סקלרית לינארית, לכן כל וקטור הוא "ע" וכל בסיס מלכון, בסיס אורתוגונמלי כלשהו יהיה בסיס מלכון על אף שההעתקה לא צמודה לעצמה, אלא אנטי-הרטמיות.

(2.3.1.2) ניסוח המשפט הספקטרלי בעבר העתקה כללית

המטרה: להבין לאילו העתקות בדיקת מתקיים המשפט הספקטרלי. מעלה המשמשים, הבנו שאילו העתקות צמודות לעצמן. אז מה קורה מעלה המרוכבים?

משפט 140. יהי V ממ"פ נ"ס ותהי $V \rightarrow V$: אם $B = (b_i)_{i=1}^n$ בסיס אורתוגונלי לו"ע של T , אז $n \leq i \leq 1$ b_i ו"ע של T^* .

כלומר: אם מתקיים המשפט הספקטרלי, אז הבסיס שמלכון אורתוגונלית את T מלכון אורתוגונלית את הצמודה.

הוכחה. יהי $i \in [n]$ ונסמן בעברו את λ_i הע"ע המתאים לו"ע b_i . בעבר $[n] \ni j \neq i$ נחשב את $\langle b_i | T^* b_j \rangle$:

$$\langle b_i | T^* b_j \rangle = \overline{\langle Tb_i | b_j \rangle} = \overline{\langle \lambda_i b_i | b_j \rangle} = \lambda_i \langle b_i | b_j \rangle = 0$$

לכן $\{b_j\}_{j=1}^n$ משיקולי ממדיים, הפרישה מממד $1 - n$ ולכן המשלים האורתוגונלי שלו מממד 1 ולכן השווין. סה"כ b_j ולכן $T^* b_j \in \text{span}\{b_j\}$ ו"ע של T^* כדרוש. ■

מסקנה 28. אם V ממ"פ נ"ס ו- $V \rightarrow V$: ט"ל עם בסיס $B = (b_i)_{i=1}^n$ מלכון אורתוגונלי, אז T, T^* מתחלפות ככלומר $TT^* = T^*T$

הוכחה. לפי הטענה הקודמת כל b_i הוא ו"ע משותף ל- T ול- T^* , וכך:

$$TT^*(b_i) = T(T^*(b_i)) = \beta_i T^*(b_i) = \beta_i \delta_i b_i = \alpha_i \beta_i b_i = \alpha_i T(b_i) = T^*T(b_i)$$

העתקה מוגדרת לפי מה שהיא עשויה לבסיס ולכן $TT^* = T^*T$

הגדרה 90. העתקה כזו המכויימת $AA^* = A^*A$ נקראת נורמלית (או "נורמאלית" בעברית של שנות ה-60).
למה 14. T היא העתקה נורמלית אם ו惩 $\forall v \in V: ||Tv|| = ||T^*v||$.

הוכחה.

אם T נורמלית, אז $TT^* = T^*T$ ואז:

$$||Tv||^2 = \langle Tv | Tv \rangle = \langle T^*Tv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = ||T^*v||^2$$

אם $\forall v \in V: ||Tv|| = ||T^*v||$ אז $||Tv|| = ||T^*v||$ ⇐

$\forall v \in V: 0 = ||Tv||^2 - ||T^*v||^2 = \langle Tv | Tv \rangle - \langle T^*v | T^*v \rangle = \langle T^*Tv | v \rangle - \langle TT^*v | v \rangle = \langle (T^*T - TT^*)v | v \rangle$

נבחין ש-:

$$(T^*T - TT^*)^* = T^*(T^*)^* - (T^*)^*T^* = T^*T - TT^* =: \varphi$$

כלומר, φ צמודה לעצמה. משפט שהוכחנו $0 = \varphi$, כלומר $T^*T = TT^*$ כדרוש. ■

מעתה ואילך, ננסה להראות שכל העתקה נורמלית מקיימת את התנאי של המשפט הספקטרלי (כלומר ניתן ללכונה אורתוגונלית)

משפט 141 (משפט הפירוק הספקטורי מעל \mathbb{C}). יהיו V ממ"פ נוצר סופית מעל \mathbb{C} , ותהי $T: V \rightarrow V$: לינארית. אז קיים בסיס אורתוגונלי של V של T אמ"מ T נורמלית.
лемה 15. יהיו V ממ"פ ותהיינה $S_1, S_2: V \rightarrow V$ צמודות לעצמן וمتחלפות (כלומר $S_1S_2 = S_2S_1$). אז קיים בסיס אורתוגונלי של V שמורכב מ"ע"ים שותפים ל- S_1 ול- S_2 .

הוכחת הлемה. ידוע ש- S_1 צמודה לעצמה, לכן לפי המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן (לא מעגלי כי הכוח בפרד בהרצאה הקודמת), קיים לה לבסן אורתוגונלי ובפרט S_1 לבסינה. נציג את V כ- $\bigoplus_{i=1}^m \ker(S_1 - \lambda_i I)$, כאשר $V = \bigoplus_{i=1}^m \ker(S_1 - \lambda_i I)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ הע"ים השוניים של S_1 . לכל $m \leq i \leq 1$ מתקיים ש- V_{λ_i} (המרחב העצמי) הוא S_1 -אינויאנטיlicher אם $v \in V_{\lambda_i}$ ונחשב:

$$S_1(S_2v) = S_2(S_1v) = S_2(\lambda_i v) = \lambda_i S_2v \implies S_2v \in V_{\lambda_i}$$

כאשר $S_2|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \rightarrow V_{\lambda_i}$ צמודה לעצמה, ולכן המשפט הספקטורי לצמודות לעצמן אומר שבתוך V_{λ_i} ישנו בסיס אורתוגונלי של "יעים מ- S_2 . האיחוד של כל הבסיסים הללו מכל מ"ע של S_1 יהיה בסיס אורתוגונלי של "יעים משותפים ל- S_1 ול- S_2 . ■

הוכחת המשפט הספקטורי.

לפי המסקנה הקודמת, אם ישנו לבסן אורתוגונלי T בהכרח נורמלית. \implies

נגיד $T = \frac{T+T^*}{2}$, $S_1 = \frac{T-T^*}{2i}$, $S_2 = \frac{T-T^*}{2i}$. הן וודאי צמודות לעצמן מהLINאריות וכל השתוויות ממוקדים, והן גם מתחלפות אם תטורו להכפיל אותן. מהטענה קיים L בסיס אורתוגונלי של "יעים משותפים ל- S_1, S_2 ונסמן $\{b_i\}_{i=1}^n$ ו- $S_1b_i = \alpha_i b_i$, $S_2b_i = \beta_i b_i$. אפשר גם לטעון ש- $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ אבל זה לא מועיל לנו. נשים לב ש- $T = S_1 + iS_2$, כלומר $T(b_i) = S_1(b_i) + iS_2(b_i) = \alpha_i b_i + i\beta_i b_i = (\alpha + i\beta_i) b_i$. ■

למעשה, הבנו מהפירוק של S_1, S_2 ש- S_1 נותנת את החלק המשמי של הע"ע ו- S_2 את החלק המודומה. זהו פירוק מועיל שכדי לאזכור.

נסכם: יש לנו שתי גרסאות של המשפט הספקטורי:

משפט (המשפט הספקטורי מעל \mathbb{R}). T סימטרית אם קיים בסיס א"נ של ו"ע.

משפט (המשפט הספקטורי מעל \mathbb{C}). T נורמלית אם קיים בסיס א"נ של ו"ע.

משמעותה הרמטרית (צמודה לעצמה באופן כללי) היא בפרט נורמלית כי מטריצה מתחלפת עם עצמה, נסיק שלצמודה לעצמה קיים בסיס אורתוגונלי מלכון (בעמוד ההפוך לא נכון מעלה המרוכבים, שם ההעתקה יכולה להיות נורמלית ולא סתם הרמטרית).

הערה 61. המשפט הספקטורי מעלה לא אומר שהעתקה/מטריצה סימטרית היא לבסינה מעלה \mathbb{R} , משום שהבסיס האורתונורמלי המלכון המדובר הוא בסיס מעלה \mathbb{C} (בעוד ההעתקה/מטריצה מעלה \mathbb{R}). לדוגמה, סיבוב ב- 90° לא לבסין ב- \mathbb{R} אך צמוד לעצמו.

(2.3.1.3) תוצאות משפטי הפירוק הספקטורי

משפט 142. תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל, ומ"פ מעלה \mathbb{F} בסיס א"נ של V . אז אם

$$[T^*]_B = A = ([T]_B)^*$$

הוכחה. נזכיר ש-:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} & & \\ [Te_1]_B & \cdots & [Te_n]_B \\ & & \end{pmatrix}$$

נסמן $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ בסיס. נבחן ש-:

$$Te_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} e_i, \quad a_{ij} = \langle Te_j | e_i \rangle$$

נסמן ב- C את המטריצה המייצגת $[T^*]_B$:

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle$$

ונחשב:

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle = \langle e_j | T e_i \rangle = \overline{\langle T e_i | e_j \rangle} = a_{ij}$$

■

מסקנה: אם A נורמלית אז T_A נורמלית מעל \mathbb{F}^n אם הSTE. בפרט מתקיים עלייה המשפט הספקטורי. גם אם A ממשית, הע"ע עלולים למצאה מעל \mathbb{C} אלא אם היא צמודה לעצמה, אז הם מעל \mathbb{R} .
משפט 143. יהו $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. אז $\exists! p \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]: \forall i, j \in [n]: i \neq j \implies x_i \neq x_j \text{ ו } p(x_i) = y_i$ עד לכדי חברות (באופן שקול: נניח p מותוקן)

הוכחה. ידוע שהפולינום הוא אובייקט מהצורה $(a_0 \dots a_{n-1})^T$. נחפש את $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})(a_0 \dots a_{n-1})^T$. נקבל את מטריצת ונדרמוני: $a_0 \dots a_{n-1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_y$$

ידוע שהדטרמיננטה של V היא מטריצת ונדרמוני $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$, שאינה אפס מההנחה $x_i \neq x_j$, ולכן המושוואות $(y | V)$ קיימים ויחיד פתרון, הוא a , שמנדרט באופן יחיד את מקדמי הפולינום.
■ אם $\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: f(\alpha) = \overline{f(\alpha)}$ $\implies f \in \mathbb{R}[x]$. הוכחה: נניח בשלילה, אז $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)} \neq 0$ וזו סתירה.

הערה 62. הפולינום שמקיים זאת נקרא פולינום לוגראגי והוא בונה אינטראפלציה די נחמדה אך יקרה חישובית. ניתן לחשב את הפולינום מפורשות באופן הבא:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left(y_i \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

משפט 144. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ נורמלית, או קיים פולינום $\exists f(x) \in \mathbb{R}[x]: A^* = f(A)$.
הערה: באופן כללי התנאי ש- $B = f(A)$ זהה משפט **אך לא הכרחי** לכך ש- B מתחולפות.

הוכחה. עבור A נורמלית מהמשפט הספקטורי קיימים בסיס אורתונורמלי המכון ולכון קיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$. כלומר $P^{-1}A^*P = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. נשתמש במשפט לפיו יש פולינום $f \in \mathbb{R}[x]$ כך ש- $\bar{x}_i = f(x_i)$ ובירת $f(\bar{x}_i) = \bar{f}(x_i) = \bar{\lambda}_i$. אזי $x_i = \lambda_i$ קיימים פולינום עבורו $f(\lambda_i) = \bar{f}(\bar{\lambda}_i) = \bar{\lambda}_i$.

$$f(\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \text{diag}(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)) = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P = P^{-1}A^*P \implies f(A) = A^*$$

■

עוד נבחן ש- $1 \cdot \deg f = n - 1$

משפט 145. אם $T: V \rightarrow V$ נורמלית, אז $\exists f \in \mathbb{R}[x]: f(T) = T^*$

הוכחה. נבחר בסיס א"ג $A^* = [T^*]_B$. $\iff A = [T]_B$. $[T]_B = [T^*]_B$. ס"כ $[T^*]_B = f(T) = f([T]_B) = [f(T)]_B$ ומהמשפט הקודם קיימים f מותאים כך ש- $f(T) = T^*$. מוח"ע העברת בסיס $T^* = f(T)$.
■ כorrect.

אם $V \rightarrow T: V \rightarrow U, W \subseteq V$ תמי"ם T -איוונריאנטי כך ש- $U = B \oplus W = B \oplus V$. אם B בסיס של V , כאשר קישא של הבסיס הוא הבסיס של U :

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & \\ & [T|_W]_B \end{pmatrix}$$

בפרט עבור ניצבים $U \subseteq V \implies V = U \oplus U^\perp$. ניעזר בכך כדי להוכיח את המשפט הבא:

משפט 146. אם $U \subseteq V$ תמי'ו איננו-אוריינטי ביחס ל- T אז U^\perp הוא $*T$ -אינו-אוריינטי.

הוכחה. יהי $w \in U^\perp$. רוצים להראות $T^*w \in U^\perp$. יהי $u \in U$ אז:

$$\langle T^*w | u \rangle = \langle w | Tu \rangle =: \langle w | u' \rangle, \quad u' \in U \implies \langle w | u' \rangle = 0 \quad \top$$

משפט 147. בעבור $T: V \rightarrow V$ נורמלית, אם היא $*T$ -אינו-אוריינטי אז גם T הוא $*T$ -אינו-אוריינטי

הוכחה. נבחן ש- $f(T) = T^*$ קלשו, וכן U הוא $*T$ -אינו-אוריינטי ולכון U הוא ($T-f$)-איו' וכן די גמרנו את ההוכחה.

מסימטריות U^\perp הוא $*T$, מהמשפט גם $*T$ איו' ולכן $*T$ -אינו-אוריינטי.

משפט 148. יהי V מעל \mathbb{R} מ"ז וכן $T: V \rightarrow V$ ט"ל. אז קיים $U \subseteq V$ שהוא $*T$ -אינו-אוריינטי וממדיו לכל היותר 2. הערה: מעל \mathbb{C} זה מטופש כי הפולינום מתפרק (ואז המרחב העצמי של ע"ע קלשו יקיים את זה).

הוכחה. נפרק $L(x) = m_T(x)$ גורם אי-פריק כך $L(x) = g(x)h(x)$. לכל g אי פריק ב- \mathbb{R} מתקיים $2 \leq \deg g \leq \deg L$. כי אם g ממעלה אחת סיימנו, אחרת הוא ממעלה 2 לפחות כי בהינתן שורש מרוכב a פולינום $m_T(x)$ גם \bar{a} שורש, ואז דהינו כל שורש מרוכב משוייך לפחות ממשי ריבועי לכל היותר, ומשום ש- $m_T(x) = (x-a)(x-\bar{a}) = (x^2 - |a|^2)$ מתפרק מעל המרוכבים, ניתן לסכם ש- g מדרגה 2 לכל היותר.

- אם g ממד 1 אז $x - \lambda = g$ קלשו ואז λ המ"ז העצמי של λ הממשי, מרחיב ממד 2 ≤ 1 המקיים את הדריש.
- אם $\deg g = 2$ בה"כ ניתן להניח g מטוקן (נעבור את הקבוע h). אז $g(x) = x^2 + ax + b$ או $g(x) = x^2 + bv$ (מלמת חלוקה לפולינום מינימלי) ככלומר $v \in \ker g(T)$. לכן:

$$(T^2 + aT + bI)v = 0 \implies T^2v = -aTv - bv$$

ולכון (v, Tv) עם ממד לכל היותר 2 וגם $*T$ -איו-אוריינטי.

סה"כ בשני המקרים מצאנו תמי'י המקיימים את הדריש. **משפט 149.** מעל $M_2(\mathbb{R})$, קיימת צורה כללית למטריצות לא לכיסיות נורמליות.

הוכחה. ננסה להבין מי ה- $A \in M_2(\mathbb{R})$ שהן נורמליות. מעל \mathbb{C} זה פשוט לכיסיות. נבחן ש-:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^* = f(A) \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] = \alpha A + BI, \quad A = \alpha A^T + \beta I = \alpha(\alpha A + \beta I) + \beta I \quad (2.1)$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a + \beta(\alpha + 1) & \alpha^2 b \\ \alpha^2 c & \alpha^2 d + \beta(\alpha + 1) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = 1 \implies A = A + 2\beta I \implies \beta = 0, \quad A = A^T + \cancel{\beta I} \\ (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = -1 \implies A^T = -A + \beta I \implies A + A^T = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \implies b = -c, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ (b \vee c = 0) \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

המקרה השני – זה פשוט סיבובים, אבל בניפויו (כי הדטרמיננטה היא $(a^2 - b^2)$).

הערה 63. בעבור T נורמלית (ולא כללית) הטענה נכונה ללא תלות במשפט היסודי של האלגברה.

בעבור נורמליות, מהמשפט הספקטורי ומטיענות קודמות, בעבור $T: V \rightarrow V$ ממשית קיים בסיס א"ג \mathcal{B} של V שבוברו המטריצה המייצגת של T היא מטריצה בלוקים 2×2 מצורה של:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -a_k & b_k \end{pmatrix}, \lambda_1 \dots \lambda_m \right)$$

כאשר כMOVBN $n = m = 2k + m$

2.3.2 ~ מטריצות אוניטריות

הגדרה 91. יהי V ממ"פ. אז $T: V \rightarrow V$ תקרא אוניטרית (אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ או אורתוגונלית (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) אם $T^*T = I$ או $T^* = T^{-1}$ (מהגדרת הפיכה).

ברור ש"ל כזו היא נורמלית. **דוגמה.** עבור T_θ הסיבוב ב- θ מעלה, במישור \mathbb{R}^2 , אז $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = T_\theta^{-1}$. **דוגמה.** עבור שיקוף מתקיים $I = T^2$ וכן $T^* = T^{-1}$ ושה"כ $T^* = T$. **משפט 150.** T איזומטריה אם ומתקיים אחד מבין הבאים:

$$1. \quad T^* = T^{-1} \quad (\text{ההגדרה})$$

$$2. \quad TT^* = T^*T = I$$

$$3. \quad \forall u, v \in V: \langle Tu | Tv \rangle = \langle u | v \rangle$$

$$4. \quad T \text{ מעבירה כל בסיס א"נ של } V \text{ לבסיס א"נ של } V$$

$$5. \quad T \text{ מעבירה בסיס א"נ אחד של } V \text{ לבסיס א"נ של } V \text{ [מקרה פרטי של 4 בצורה טרויאלית, אך גם שקול!]}$$

$$6. \quad \forall v \in V: \|Tv\| = \|v\|$$

$$7. \quad \widehat{u, v} = \widehat{Tu, Tv}$$

כלומר: היא לשמורת מכפלת פנימית, גודל וזווית.

הערה 64. את קבוצת המטריצות האורתוגונליות מסומנים ב- $O_n(\mathbb{F})$, ומקובל להתייחס אליה כאל חבורת אбелית ביחס לפעולות הרכבה. ישנן סוג מיוחד של מטריצות אוניטריות, כאשר רnk מקיימות $|\det A| = 1$, $\det A = 1$ אלא ממש $\det A = -1$. **חבורת האובייקטים האלו קרויה** $SO_n(\mathbb{F})$, **קיצור** של Special Orthogonal Matrix. יש שתי קבוצות של מטריצות סיבוב מיוחדות שמייניות אותן – $\{c \in C: |c| = 1\} \cong SO_2(\mathbb{R})$, איזומורפיים שראינו בעברascalנסנו מעלה המרוכבים מטריצות סיבוב, ו- SO_3 שמעניינת בגיל הקשר שלה לאלגברת קוורטוריונים.

הגדרה 92. העתקה $T: V \rightarrow V$ (כאשר V ממ"פ) תקרא איזומטריה אם $\forall v \in V: \|v\| = \|Tv\|$.

באופן כללי אוניטרית/orthogonalites שקולות לינארית (כלומר שם כללי לאורתוגונליות/אוניטריות יהיה איזומטריות).

הערה 65. איזומטריה, גם מחוץ לאלגברה לינארית, היא פונקציה ששמירת נורמה/גודל.

הערה 66. אפשר להסתכל על מתכונה 4 על איזומטריות לינאריות בעל איזומורפיים של ממ"פים.

הוכחה. נפרק לריצף גדריות

$$1 \rightarrow 2 \quad \text{אם } TT^* = T^*T = I \text{ אז מהגדירה } TT^* = T^{-1} \text{ ומהיות הופכית ייחידה משני הצדדים}$$

$$2 \rightarrow 3 \quad T^* = T^{-1} \implies \langle Tv | Tu \rangle = \langle v | T^*Tu \rangle = \langle v | u \rangle$$

$$3 \rightarrow 4 \quad \text{נאמר ש-} (v_1 \dots v_n) \text{ א"נ. צ.ל. } (Tv_i)_{i=1}^n \text{ לשם כך נצטרך להוכיח את שני התנאים - החלק של האורטו והחלק}$$

$$\langle Tv_i | Tv_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$4 \rightarrow 5 \quad \text{טרויאלי}$$

$$5 \rightarrow 6 \quad \text{יהי } (v_1 \dots v_n) \text{ בסיס א"נ כך ש-} (v_1 \dots v_n) \text{ א"נ. אז:}$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \implies \|v\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_1 \\ \|Tv\|^2 &= \left\langle T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \middle| T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \middle| \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \underbrace{\langle Tv_i, Tv_i \rangle}_1 \end{aligned}$$

מטריציביות והוצאת שורש נקבע $\|v\| = \|Tv\|$ כדרכו.

$$1 \rightarrow 5 \quad \text{מניחים } \forall v \in V: \|Tv\| = \|v\|$$

$$T^* = T^{-1} \iff T^*T = I \iff T^*T - I = 0$$

בעבר ראיינו את הטענה הבאה: נניח ש- S צמודה לעצמה וכן ש- $S = 0$, אז $S = 0$. במקרה זה:

$$S := T^*T - I \implies S^* = (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = S \implies S^* = S$$

והיא אכן צמודה לעצמה. עוד נבחן ש-:

$$\langle Sv | v \rangle = \langle (T^*T - I)v | v \rangle = \langle T^*Tv | v \rangle - \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle - \langle v | v \rangle = \|Tv\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

השוון האחרון נכו מהתהה היחידה שלנו ש- $\|Tv\| = \|v\|$. סה"כ הוכחנו $TT^* - I = 0$. $TT^* - I = 0$ מספק $T^* = T^{-1}$ מהשקליות לעיל כדרוש. ■

משפט 151. תהי $T: V \rightarrow V$ איזומטריה, ו- λ ע"ע של T . אז $|\lambda| = 1$.

הוכחה. יהי v ו"ע של הע"ע λ . אז:

$$|\lambda|^2 \langle v | v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle = \langle v | v \rangle$$

הערה 67. מעל המרכיבים לא מתקיים בהכרח $\{1, -1\} \in \lambda$, בעוד מעל המשיים כן. שימוש לב שיש אינסוף מספרים המקיימים $|\lambda| = 1$ מעל המרכיבים, הם התמונה של $\lambda x \in \mathbb{R}, e^{ix}$.

הגדרה 93. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז A תקרא אוניטרית/אורתוגונלית אם $A^* = A^{-1}$.

משפט 152. אוניטריות אם $AA^T = I$.

משפט 153. אורתוגונליות אם $AA^T = I$.

הערה 68. אוניטריות בה משון unit – היא שומרת על הגודל, על וקטור היחידה (the unit vectors).

משפט 154. יהי B בסיס א"נ של V ו- $V \rightarrow T: V$ א"ן אוניטרית/orתוגונלית אם $A = [T]_B$.

הוכחה.

$$AA^* = [T]_B[T^*]_B = [TT^*]_B, I = AA^* \iff [TT^*]_B = I \iff TT^* = I$$

"היה לי מרצה בפתחה שכטב דבר לא מדויק בסיכום, ואז הוריד נקודות לסטודנטים שהסתמכו על זה. הוא אמר שהוא מתמטיקה, אתם אחראים להבין מה נכון או לא – גם אם כתבתם שטויות".

סימון 13. א"ן = אוניטריות בהקשר של מטריצות (בהקשר של מרחבים – אורתוגונרמי)

משפט 155. התאים הבאים שקולים על $A \in M_n(\mathbb{F})$

1. A אוניטרית

2. שורות A מהוות בסיס א"נ של \mathbb{F}^n (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

3. עמודות A מהוות בסיס א"נ של \mathbb{F}^n .

4. (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

5. (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

הערה שלא קשורה למשפט: נאמר ש- $[T^*]_B = [T]_B^*$ אם B בסיס אורתוגונרמי. עבור בסיס שאינו א"ן זה לא בהכרח מתקיים.

הערה נוספת: זה ברור אם כי יש כמה מקרי קצת כמו מטריצת האפס.

הוכחה.

2 ↔ 1 נוכיח את הגרירה הראשונה

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1^T & \cdots & \bar{v}_n^T \\ | & & | \end{pmatrix} = AA^* = I \iff \text{א"ן } A \implies v_i \bar{v}_j^T = \delta_{ij}$$

הטענה الأخيرة שקולה לכך ש- $v_1 \dots v_n$ בסיס א"ן (ביחס למ"פ הסטנדרטית של \mathbb{F}^n)

3 ↔ 1 מספיק להוכיח A אוניטרית אם $A^T = A$ (בגלל השקילות $2 \leftrightarrow 1$). מסימטריה ($A^T = A$) למעשה מספיק להוכיח A א"ן גורר A^T א"ן. נוכיח:

$$A^*A = I \implies A^T \bar{A} = I \implies (A^T)^* = \bar{A} \implies A^T(A^T)^* = I$$

1 נקבעו ב- \mathbb{F}^n כאשר \mathcal{E} הבסיס הסטנדרטי, ו- $T_A(v) = Av$. לכן $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ אוניטרית אם A אוניטרית. אז $[T_A]_{\mathcal{E}}$ אוניטרית.

$$\langle Au | Av \rangle = \langle T_A u | T_A v \rangle = \langle u | v \rangle$$

■ 5 תוצאה ישירה מ- 4 \leftrightarrow 1, שכן מנוסחת הפולרייזציה A משמרת מכפלה פנימית אם היא משמרת נורמה.

(2.3.2.1) צורה נורמלית למטריצה אורתוגונלית

סימון 14. נסמן ב- A_{θ_i} את מטריצת הסיבוב של \mathbb{R}^2 ב- θ מעלות, הי:

$$A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

שאלה. מהן המטריצות $A \in M_2(\mathbb{R})$ האורתוגונליות?

התשוכה. בהינתן $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מהיות העמודות והשורות מהוות בסיס א"נ:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ a^c + c^2 = 1 \end{cases} \implies a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta$$

עוד נבחן ש- $ac + bd = 0$ כי:

$$AA^T = I \implies \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = I$$

סה"כ מכ"ש- $b^2 + d^2 = 1$ ו- $a^c + c^2 = 1$ נקבל שתי צורות אפשריות:

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \vee A_2 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A_{\theta}$$

נבחן ש- A_2 הוא סיבוב ב- $-\theta$, ו- A_1 שיקוף ניצב ביחס ל- $\frac{\theta}{2}$. זה לא מפתיע שכן $\det A_1 = -1$, $\det A_2 = 1$. יתרה מכך, $\det A_1 = -1$, $\det A_2 = 1$.

הערה 69. לבדיקת שפויות, נסה לפרק מעל המרכיבים את הצורה שקיבלנו, ואכן:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

בהתאם לכך $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}| = 1$ כמצופה מע"עים של מטריצה אוניטרית.

מסקנה 29 (הצורה הנורמלית של ט"ל אורתוגונלית). תהי $T: V \rightarrow V$ אורתוגונלית. אז קיימים בסיס א"נ של V , שביחס אליו קיימות $\theta_1, \dots, \theta_k$ זוויות כך שהמטריצה המייצגת את T היא מהצורה:

$$\text{diag}(A_{\theta_1}, A_{\theta_k}, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

(לכוארה אוניטריות לא מעיינות כי היא נורמלית ולכן לכיסינה אורתונורמלית מהמשפט הספרטורי, וכל הע"עים המרכיבים שלה מוגדים 1 בכל מקרה)

הוכחה. ידוע עבור נורמלית:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \begin{bmatrix} a_m & b_m \\ -b_m & a_m \end{bmatrix} & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

נסמן $\square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$. במקרה זהו משום שהיא אורתוגונלית על \mathbb{R} אז $\lambda_i = \pm 1$ כי $|\lambda_i| = 1$. נתבונן במטריצה \square_i כלהלן, אז \square_i הנפרש ע"י U_{k+1}, u_k, u_k מקיים:

$$[T|_U]_{B_U} = \square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \quad [Tu_k]_{U_B} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad [Tu_{k+1}] = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

ומשום שהצמצום של אורתוגונליות על מ"ו T -אינו אריאנטי היא עדין אורתוגונלית, והראנו שהאורתוגונליות ב- $M_2(\mathbb{R})$ הן מטריצות הסיבוב/השיקוף+סיבוב לעיל. המטריצה של שיקוף+סיבוב ב- $\frac{\theta}{2}$ (או שסומנה לעיל ב- A_1) לכסינה ולכון תחפוך לע"ע ■ (עד כדי סדר איברי בסיס) שם בהכרח מוגול $1 \pm$ בכל מקרה, ויבלוו בשאר הע"ע, ובכך סיימנו.

אבל האם הייצוג ייחיד? ננסה להבין את ייחidot הייצוג עבור נורמלית כללית, ומשם לגזר על אורתוגונליות. **משפט 156.** כל שתי מטריצות בצורה לעיל שמייצגות את אותה $V \rightarrow T$: נורמלית, שווות עד כדי סדר הבלוקים על האלכסון.

(יש כאן מה להוכיח רק בעבור \mathbb{R} , שכן מעל \mathbb{C} לכסינה בכל מקרה, והע"ים וריבויים לא משתנים כתלות בייצוג).

הוכחה. ידוע שבעבור \mathbb{R} , שכן מעל \mathbb{C} לכסינה בכל מקרה, והע"ים וריבויים לא משתנים כתלות בייצוג):

$$f_T(x) = \left(\prod (x - \lambda_i) \right) \left(\prod (x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2) \right)$$

כאשר המכפלה הראשונה באה מהע"ים והשנייה מהריבויים \square_i . נבחין שלכל λ_i נקבע ביחסות a_i , ולכון b_i נקבל ביחסות ■ עד כדי סימנו (נסיק זאת מהפולינום האופייני). ברור שהע"ים נקבעים ביחסות עוד מההרצאות הראשונות.

از מאיפה בה שניי הכוון של \square , בעבור מטריצות אורתוגונליות? כמובן, מדובר A_{θ_i} שcola $\lambda_{-\theta_i}$? זאת כי הן דומות באמצעות ההתקה שהופכת את הצירים, מה שsequential להחליף את עמודות A_{θ_i} .

תרגיל. חשבו: (כולל פתרון)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

מכאן נסיק שאכן המטריצות הללו דומות עד כדי שניי הכוון בסיס, וזה הסיבה שלא איכפת לנו מהסימן של b . **הערה 70.** למעשה, משום שהמטריצות \square_i אין פריקות למרחבים אינוראריאנטים קטנים יותר, ולכון נוכל להפוך את כל הבלוקים על המטריצה ולקבל בלוקי ג'ורדן, שכבר אנחנו יודעים שהם ייחדים.

(2.3.2.2) המשפט הספקטלי בನיסוח מטריציוני

משפט 157 (המשפט הספקטלי "בשפה קצת מטריציונית"). תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה צמודה לעצמה. אז קיימת מטריצה P אורתוגונלית/אוניטרית (בהתאם לשדה ממנו יצאנו), ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D = P^{-1}DP$

כלומר – מטריצת מעבר הבסיס של המשפט הספקטורי, שמעביר אותנו לפירוק הספקטורי, היא איזומטריה. למעשה חיקנו את המשפט הספקטורי – המעבר לבסיס המלכון, מסת变速 להיות מיוצג ע"י מטריצות איזומטריות.

המטריצה מדגישה שלא השתמשנו במשפט זהה בכלל בבסיסים וקטורים – אפשר לתאר את עולם הדיוון של המטריצות, מעצם היותו עולם דיוון איזומורפי להעתקות ומרחבים וקטורים, בלי לדבר בכלל על העתקות ומרחבים וקטורים. המשפט מתאר באופן טהור מטריצות בלבד.

лемה 16. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית, וכן $\{e_1 \dots e_n\}$ בסיס א"נ של V . נניח ש- A היא מטריצה המעביר מבסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ לבסיס $\{e_1 \dots e_n\}$. אז A איזומטריה אם ו惩 $\{v_1 \dots v_n\} \rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$.

הוכחת המשפט. תהי $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ כך ש- $T_A(x) = Ax$. אז $A = [T_A]_{\mathcal{E}} = \{e_1 \dots e_n\}$ הבסיס הסטנדרטי. ידוע של- T_A יש בסיס אורתוגונormal מלכון, כלומר קיימים בסיס א"ג \mathcal{B} כך ש- $[T_A]_{\mathcal{B}} = D$ כאשר D אלכסונית כלשהנית. נבחין ש- $[T_A]_{\mathcal{B}} = P$ ונבחין ש- $[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, נסמן $[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}[T_A]_{\mathcal{E}}[Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ ונוולמו $P = P^{-1}AP$ מטריצת מעבר מבסיס א"ג לבסיס א"ג ולכון איזומטריה. סה"כ הראננו את הדrhoש. ■

"יאללה הפסקה? לאם"

2.3.3 ~ פירוק פולאורי

(2.3.3.1) מבוא, וקישור לתבניות בי-ילינאריות

הערה 71. עבור מטריצות אורתוגונליות, במקרה של $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נקבל ש-

$$A = P^{-1}DP \implies PP^T = I \implies P^{-1} = P^T \implies A = P^TDP$$

מה שמחזיר אותנו לתבניות בי-ילינאריות. נוכל לקשר את זה לסינגולריה. זאת כי A לא רק דומה, אלא גם חופפת ל- D . גם \mathbb{C} נקבל דברים דומים, אך לא במדויק, שכן מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} היא ססקוּי-בי-ילינארית פשוטה בי-ילינארית. **משפט 158.** עבור $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית, אז

$$A^* = A \quad (\text{צמודה לעצמה}) \text{ אם } \forall u \text{ שלה ממשיים.} \bullet$$

$$\text{אם } A^* = A^{-1} \text{ אז } A \text{ מינורמה.} \bullet$$

הוכחה. את הכוון \Leftarrow כבר הוכחנו במשפט קודם. נותר להוכיח את הכוון השני.

- נניח שכל הערכים העצמיים ממשיים, ו- A נורמלית. נוכל להשתמש במשפט הספקטורי לעיל: לנכון קיימת מטריצה אוניטרית P ואלכסונית $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ כך $A = P^{-1}\Lambda P$.

$$A^* = P^*\Lambda^*(P^{-1})^* = P^{-1}\Lambda P = A$$

כי $I = PP^*$ ו- Λ אוניטרית (או transpose של דבר) מעל \mathbb{R} לא עושה שום דבר).

- נניח A נורמלית וכל הע"ע מינורמה. 1. נוכיח A אוניטרית. עבור הפירוק הספקטורי לעיל $A = P^{-1}\Lambda P$ נקבל כאן ש- Λ אוניטרית, ומהמשפט הספקטורי P אוניטרית גם כן. A מכפלה של 3 אוניטריות ולכן אוניטרית.

(הסיבה שמכפלה של אוניטריות היא אוניטרית: עבור A, B א"ג מתקיים

$$\forall v \in V: \langle ABv | ABv \rangle = \langle Bv | Bv \rangle = \langle v | v \rangle$$

■ משמרת מכפלה פנימית, וזה שקול להיוותה אוניטרית ממשפט לעיל)

זיכורת: אם V ממ"פ מעל \mathbb{F} , אז $V \rightarrow T: T \in V$ תקרה חיוכית או איזומורפית (וכו') אם $T = T^*$ וגם $0 \neq v: \langle Tv | v \rangle \geqslant 0$.

זיכורת: מעל \mathbb{R} , הוכחנו שלכל תבנית סימטרית, יש יציג יחיד באמצעות מטריצה אלכסונית עם $0, 1, 1, -1$ על האלכסון.

סימון 15. הסיגנטורה של f תשומן ע"י $\sigma_+(f), \sigma_-(f), \sigma_0(f)$ כמספר האפסים, האחדים וה- -1 ב- f .

המשך זיכורת: כל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה לעיל.

משפט 159. נניח ש- A מייצגת את התבנית הסימטרית f (עלם הדין מעל \mathbb{R}). אז, הסיגנטורה שווה $\#(\lambda | \lambda > 0) - \#(\lambda | \lambda < 0)$ עבור λ ע"ע עם חזירות (במידה ושיק ליותר מוע"ע היחיד). באופן דומה $\#(\lambda | \lambda < 0) - \#(\lambda | \lambda > 0)$ כאשר λ ע"ע.

הוכחה. משום ש- A מייצגת סימטרית אז A סימטרית. לפי המשפט הספקטורי קיימת P אורתוגונלית ו- Λ אלכסונית כך ש- $A = P^{-1}\Lambda P = P^T\Lambda P$. דומה לאלכסונית ממשית (כי A סימטרית ולא סתם נורמללית) וחופפת אליה. בעזרת נרמול המטריצה Λ האלכסונית (ניתן לבצע תהליך נרמול באמצעות פועלות שקולות תחת חפיפה), היא חופפת למטריצה מהצורה $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ כאשר הסימן קבוע לפני הנרמול. ■

הערה 72. בניסוחים אחרים, מדברים על A הרמטרית, במקום על f סימטרית. שימושו לבבכל מקרה אין משמעות למשפט מעלה המרוכבים (שכן במקרה זה $\text{rank } f = \sigma_+ + \sigma_- = 0$) ולכן שני הניסוחים חזקים באותה המידה.

מסקנה 30. מכאן, שבحينו A מטריצה הרמטרית חיובית, היא מייצגת התבנית בי-ילינארית חיובית וגם מייצגת העתקה חיובית. למעשה, אפשר להוכיח שהحينו A הרמטרית, היא חיובית (בהבט של המכפלה הפנימית) אם"מ היא חיובית (בהבט של התבניות בי-ילינאריות).

משפט 160 (קיים שורש לצמודה לעצמה איזומורפית). תהי $V \rightarrow T: T \in V$: צמודה לעצמה ואי שלילית $0 \geqslant \langle Tv | v \rangle$, אז קיימת ויחידה $R: V \rightarrow R: V \rightarrow V$ איזומורפית צמודה לעצמה כך $R^2 = T$.

הוכחה. **קיים.** מהמשפט הספקטורי קיים בסיס א"ג של ו"ע להעתקה איזומורפית כל הע"ע הם איזומורפים.

$$[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad [R]_B^B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$$

(ראינו זאת בתרגול). עוד נבחן ש- R צמודה לעצמה.
יחידות. נבחן שכל ו"ע של T הוא ו"ע של R : יהי $[n], i \in [n]$, ו- $e_i = B = (e_1 \dots e_n)$, אז עבור R צמודה לעצמה כלשהי מתקיים: אז ו"ע של R עם $\sqrt{\lambda}$ הוא ו"ע של T עם $\sqrt{\lambda}$ כי:

$$\lambda v = R^2 v = T v \implies R v = \sqrt{\lambda} v$$

הגירה נכונה מאידך ש- R שהמשפט מניח עליה ייחודת. לעומת הערכים העצמיים של R כלשהי (לא בהכרח או שברחנו ב證明ה) נקבעים ביחסות מע"ע של T . בסיס של ו"ע של T הוא בסיס ו"ע של R , סה"כ ראיינו איך R פועלת על בסיס ■
ו"ע כלשהו של T מה שקבע ביחסות את R .

סימון 16. את ה- R לעיל נסמן $= R := \sqrt{T}$.

מסקנה 31 (פירוק שולסקי). לכל A צמודה לעצמה ואי-שלילית חיובית קיים פירוק ייחיד של מטריצה R משולשית עליונה כך $A = RR^*$.
משפט 161 (פירוק שור). כל מטריצה ריבועית שהפולינום האופייני שלה מתפרק דומה אוניטרית למטריצה משולשית עליונה, ככלומר לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ אם p_A מתפרק לגרמיים לינאריים קיימת $U \in M_n(\mathbb{F})$ אוניטרית וכן D משולשית עליונה כך $A = P^* DP$.

הוכחה. ההוכחה זהה לכך שכל מטריצה עם פ"א מתפרק ניתנת לשילוש שראיינו בתחילת הקורס, אך בשלב האינדוקציה ■
מציעים גרסה-שmidit ונרמול לבסיס שמרחיבים אליו.

משפט 162 (חפיפה אלכסונית סימולטנית). מעל \mathbb{R} , בהינתן A מוגדרת חיובית ממש ו- B מטריצה צמודה לעצמה, שתיהן סימטריות, קיים בסיס \mathcal{P} בו $[A]_{\mathcal{P}}$ אלכסונית וגם $[B]_{\mathcal{P}}$ אלכסונית.

הוכחה. נפרק ספרקטלית של A ונקבל $A = P \Lambda_A P^T$. משפט סילבוסטר Λ_A מוגדרת ביחסות ועל איבריה הסינגולוֹרָה של A , שם כולם 1 מהוות מוגדרת חיובית, כלומר, $\Lambda_A = I$. באופן דומה נוכל לפרק ספרקטלית את PBP^T ולקבב $PBP^T = QPBP^TQ^T = \Lambda_B M = QP$ ומכאן $M = QPBP^TQ^T = \Lambda_B Q$. בסימון $\mathcal{P} = \text{Col}(M)$ נקבע $[B]_{\mathcal{P}} = \Lambda_B$, וכך:

$$[A]_{\mathcal{P}} = MAM^T = Q \overbrace{PAP^T}^I Q^T = QIQ^T = I$$

כלומר $[A]_{\mathcal{P}}$ אלכסונית כדרישות. ■

הערה 73. ההוכחה המקורית בקורס מדברת על לכsoon סימולטני. יש בה רק בעיה אחת, שהיא לא נכון (כי לא מובטח ש- M אוניטרית).

הערה 74. למעשה שתי מטריצות באופן כללי ל.cgiות (ולא חופפות) סימולטניות אם"מ הן מתחלפות זהה ממש מזר שלא מוראים את זה בקורס.

2.3.3.2) ניסוח הפירוק הפולארי

משפט 163 (פירוק פולארי בעבור העתקות). תהי $V \rightarrow V$ הפעלה, או קיימות $R: V \rightarrow V$ חיובית וצמודה לעצמה ו- $U: V \rightarrow V$ אוניטרית כך ש- $R = RU$.

הערה 75. לא הנחנו T צמודה לעצמה. הפירוק נכון להעתקה הפעלה כללית.

הערה 76. לעיתים נקרא "פירוק Uh או "פירוק CP".

הוכחה. נגדיר $S = TT^*$. נבחן ש- S צמודה לעצמה וחביבת:

$$\forall V \ni v \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\| > 0$$

האי-שוויון האחרון נכון כי $\ker T^* = \{0\}$, משפט קודם $\ker T = \{0\}$, ו- $v \neq 0$. יצא שהוא חיובי ולכן בפרט ממשי, ככלומר הוא צמודה לעצמה וחביבת.

קיימת ויחידה $R: V \rightarrow V$ צמודה וחביבת כך ש- $R = S^{1/2}$. כל ערכיה העצמיים של R אינם 0, ולכן היא הפעלה ראיינו בהוכחה של קיומה שהיא לכsoon יחידי עם S .

נגדיר $U = R^{-1}T$. נותר להראות ש- U אוניטרית.

$$U^*U = (R^{-1}T)^*(R^{-1}T) = T^* \underbrace{(R^{-1})^*}_{R^{-1}} R^{-1}T = T^*(R^{-1})^2 T = T^*S^{-1}T = T^*(TT^*)^{-1}T = I$$

כדרישות. הטענה משומש ש- R צמודה לעצמה. ■

הערה 77 (לגביה ייחדות). אם T אינה הפיכה, מקבלים ש- R יחידה אבל U אינה. בשביל לא הפיכות נוצרה להצטמצם לבסיס של התמונה ועליו לפрак כמתואר לעיל. במקרה של הפיכות אז $T = RU = R\tilde{U}$ והפיכה כלומר $\tilde{U} = U$ וגם U הפיכה.

עתה נראה ש- R נקבעת ביחידות (בניגוד ליחידות U – יחידות R נקבעת בעבור פירוק פולארי של העתקה שאינה הפיכה): **משפט 164.** בפירוק פולארי $T = RU$, כאשר R הרמטרית חיובית, אז בהכרח $R = \sqrt{TT^*}$ ולכן יחידה.

הוכחה.

$$TT^* = RU(RU)^* = RUU^*R^* = R^2$$

כלומר R היא בכלל פירוק שורש של TT^* , והראינו קודם לכן את יחידות השורש.

מסקנה 32. קיים גם פירוק כנ"ל מהצורה $.T = UR$

הוכחה. באותו האופן שפירקנו את T , נוכל לפрак את $T^* = \tilde{R}\tilde{U}$ פירוק פולארי. נפעיל * על שני האגפים ונקבל:

$$T^* = \tilde{R}\tilde{U} \implies T = (T^*)^* = \tilde{U}^*\tilde{R}^* = \tilde{U}^{-1}\tilde{R}$$

נסמן U סה"כ $T = UR$ וסה"כ $\tilde{R} =: R$, $\tilde{U}^{-1} =: U$.

лемה 17. עבור $V \rightarrow S$ אז $L(TT^*, T^*T) = TT^* - T^*T$ נגדיר $S = TT^*$. נבחן ש- S צמודה לעצמה וחיבורית:

$$\forall V \in \mathbb{V} \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\| > 0$$

יש אותן הערכים העצמיים.

הוכחה. ניעזר בפירוק הפולארי:

$$\begin{aligned} TT^* &= RUU^*R^* \\ &= R^2 \\ TT^* &= U^{-1}R^2U \end{aligned}$$

סה"כ TT^*, T^*T הן העתקות דומות ולכן יש להן את אותן הערכים העצמיים.

הערה 78. אז איך זה קשור לפולארי? R הא-ישילילית היא "הגדל", בעוד U האוניטרית לא משנה גודל – היא ה"זווית". ניתן לראות זאת גם באופן הבא: בהינתן $A = RU$ פירוק פולארי ל- U אורתוגונלי ו- R מוגדרת חיובית הרמטרית, אז $\det A = \det U \det R = re^{i\theta}$ ו- $\det U = e^{i\theta}$, ו- $\det R = r$. **משפט 165 (פירוק פולארי בעבור מטריצות).** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, אז קיימות $U, R \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר U א"נ ו- R חיובית צמודה לעצמה כך ש- $R = UR$.

הוכחה. נסתכל על $A^*A = P^{-1}DP$, כאשר D אלכסונית חיובית. נסמן $P = R^{-1}\sqrt{DP}$, $R^2 = AA^*$. **Lemma 166 (פירוק מטריצה ריבועית לערכים סינגולריים).** לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות מטריצות אוניטריות U, V ומטריצה אלכסונית עם ערכים א-ישיליליים כך ש- $A = UDV^T$.

2.3.4 ~ פירוק SVD

2.3.4.1) ניסוח והוכחת SVD

הערה 79. SVD הינו קיצור של Singular Value Decomposition. משפט 166 (פירוק מטריצה ריבועית לערכים סינגולריים). לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות מטריצות אוניטריות U, V ומטריצה אלכסונית עם ערכים א-ישיליליים כך ש- $A = UDV^T$.

הוכחה. ידוע שניתן כתוב $A = \tilde{U}R$ פירוק פולארי. משום ש- R צמודה לעצמה, ניתן לפракה ספקטראלית ל- V אוניטרית ו- D אלכסונית א-ישילילית (כי R א-ישילילית) כך ש- $R = V^{-1}DV$. סה"כ:

$$A = \underbrace{\tilde{U}V^{-1}}_{=:U^T} DV = U^T DV \quad \top$$

כי $\tilde{U}V^{-1}$ מכפלה של אוניטריות ולכן U אוניטרית כנדרש.

הערה 80. משום ש- U, V איזומטריות אז $V^* = U^{-1}$, $U^* = U^{-1}$ ובגלל ש- D אלכסונית אז $D^* = D$. לכן:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDV)(V^*D^*U^*) = UD^2U^{-1} \\ A^*A &= (V^*D^*U^*)(UDV) = V^{-1}D^2V \end{aligned}$$

הגדה 94 (ערך סינגולרי של מטריצה). הערכים העצמיים האידי-שליליים של A נקראים הערכים הסינגולריים והם נקבעים ביחסות ע"י A .

הגדה 95 (ערך סינגולרי של העתקה). σ הוא ערך סינגולרי של העתקה T הוא אם"מ $\sigma \geq 0 \in \mathbb{R}$ ווגם σ^2 הוא ע"ע של TT^* .

סימן 17. את הערכים הסינגולריים של העתקה/מטריצה A כלשהו נסמן ב- $\sigma_n \dots \sigma_1$ כאשר $\sigma_i \geq 0 \forall i \geq j$.

משפט 167. פירוק SVD הוא היחיד (גם למטריצה שאינה ריבועית/הפיתחה), בהנחה שהערכים הסינגולריים שונים.

הוכחה. יהיו שני פירוקי SVD של מטריצה A הפיכה כלשהי, נסמנם:

$$A = \bar{U}\bar{D}\bar{V}^T \wedge A = UDV^T$$

אז:

$$AA^* = UD^2U^{-1} = \bar{U}^*\bar{D}^2\bar{U}^{-1} \wedge A^*A = V^{-1}D^2V = \bar{V}^{-1}\bar{D}^2\bar{V}$$

בגלל ש- \bar{D}^2, D^2 אלכסוניות, ומיחידות הפירוק הספקטורי, ■ $U = \bar{U}, V = \bar{V}, D = \bar{D}$

(2.3.4.2) הרחבת SVD להעתקות שאין אופרטורים

הערה 81. ביסודית הקורס זהה, ראיינו פירוק SVD של מטריצה ריבועית בלבד. חלק מהחוצה של פירוק SVD נובע מקיומו למטריצות שאין בהכרח ריבועית, דהיינו, לכל מטריצה סופית. יש לו מגוון רחב של שימושים במדעי המחשב. כדי להבין יותר כיצד פירוק SVD עובד, כתבתי את תורת-הפרק הזה.

הגדה 96. מטריצה $\Lambda \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ לא בהכרח ריבועית מוגדרת להקרה אלכסונית אם"מ $i = j \implies a_{ij} \neq 0$. **משפט 168 (גרסה מוגדלת של פירוק לערכים סינגולריים).** תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ($\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) שאינה מטריצה האפס, אז קיים פירוק למטריצות $U \in M_{n \times n}(\mathbb{F}), V \in M_{m \times m}(\mathbb{F}), V \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $A = \Sigma V^T$.

הגדה 97. מטריצה $A \in M_{m \times n}$ מתאימה למטריצה $B \in M_{m \times n}$ אם"מ קיימות מטריצות $U \in M_{m \times m}, V \in M_{n \times n}$, $A = UBV^{-1}$.

הוכחה. בוויקיפדיה האנגלית. ישנה גם הוכחה פשוטה שמשתמשת בפירוק שור.

משפט 169. פירוק SVD ייחיד אם"מ הערכים הסינגולריים שונים, ובכל מקרה ס' יחידה.

מסקנה 33. תהי $W \rightarrow T: Q \rightarrow [T]_B$. אז קיימים \mathcal{B}, \mathcal{C} בסיסים אורטונורמליליים כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

כדי להוכיח מסקנה זו, נשתמש בשורות U, V שיהו את הבסיס האורתונורמלי הנדרש (עד כדי העתקת קורדינטות).

משפט 170. בהינתן B בסיס אורטונורמלי של V , והעתקה $T: V \rightarrow W$ ■ $U \rightarrow T: U \rightarrow W$ היא ערך סינגולרי של T אם"מ σ על האלכסון של S אשר S המטריצה האלכסונית בפירוק SVD של $[T]_B$.

הוכחה. נסמן את פירוק ה-SVD של $[T]_B$ ב- $[T]_B = U\Sigma V^T$. אז ידוע U אורטונורמלית, ולכן $[T]_B$ דומה ל- Σ . עוד נבחון שככל ע"פ של Σ אם"מ מופיע על אלכסון S מופיע על אלכסון S . עתה נוכיח גיריה דואליות. אם σ ערך סינגולרי של T אז σ^2 הוא ע"פ של $[T]_B$, ומהדמיון שהראנו הוא ע"פ של Σ כלומר הוא מופיע על אלכסון S כדרוש. מהצד השני, אם σ מופיע על אלכסון S אז הוא ע"פ של Σ והוא ע"פ של $[T]_B$. ■ מוגדרת חיובית אז $\sigma \geq 0 \in \mathbb{R} \wedge \sigma \geq 0$.

מסקנה 34. מספר הערכים הסינגולריים הוא הממד של S והדרגה של A .

הערה 82. לבדיקת שפות, נבחון שהערכים העצמיים של S הם אכן "מעודדים" להיות ערכים סינגולריים, שכן היא מטריצה נורמללית ולכן הערכים העצמיים שלה ממשיים, וכן היא מוגדרת חיובית ולכן הערכים העצמיים שלה חיוביים.

משפט 171. בהינתן $T: V \rightarrow W$ העתקה, מתקיים:

$$\sqrt{\det(T^*T)} = \prod_{i=1}^n \sigma_i$$

כאשר $\sigma_n \dots \sigma_1$ הערכים הסינגולריים של T .

הוכחה. ידוע של- T קיים פירוק SVD $T = U\Sigma V^T$ ממנו נסיק את הפירוק הספקטורי הבא ל- T^* הצמודה לעצמה:

$$T^*T = U\Sigma^2U^T$$

אם T איננה הפיכה אז יש לה ערך סינגולרי 0, ו- T^* איננה הפיכה (כי מכפלת לא הפיכות איננה הפיכה) וסיימנו. אם T הפיכה, את U הפיכה בהכרח. משום ש- U אוניטרית, $U^T = U^{-1}$. נפעיל את \det על שני האגפים ונקבל:

$$\det(TT^*) = \det(U)\det(\Sigma^2)\det(U^{-1}) = \det(UU^{-1})\det(\Sigma)^2 = \det(\Sigma)^2 = *$$

בגלל שהוכחנו ש- Σ מטריצה אלכסונית של האלכסונה הערכים הסינגולרים של T , אז נקבל שוויון:

$$* = \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i \right)^2$$

נוציא שורש ונקבל את הנדרש.

מסקנה 35. עבור A ריבועית, נוכל לטעון:

$$\prod_{i=1}^n \sigma_i = \det(AA^*) = \det(A)\det(\bar{A}^T) = \det(A)\det(\bar{A}) = \det A \overline{\det A} = \det A^2$$

נוציא שורש ונקבל שהדטרמיננטה של T היא מכפלת הערכים הסינגולרים:

$$\prod_{i=1}^n \sigma_i = \det T$$

משפט 172 (פירוק העתקה לערכים סינגולרים). בהינתן $T: V \rightarrow W$: קלשי, וערכים סינגולרים $\sigma_r \dots \sigma_1$ כלשהם, אז קיימים $\mathbf{v}_r \in W$ ו- $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r \in V$ כך ש-:

$$Tv = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

הוכחה. נסמן $|\mathcal{B}| = n \wedge |\mathcal{C}| = m$ $\dim V = n, \dim W = m$ בהינתן בסיסים \mathcal{B}, \mathcal{C} אורthonormליים ל- V, W בהתאם כך ש-: ידוע קיום פירוק של $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ לערכים סינגולרים כך ש-:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = V\Sigma U^*$$

כאשר U, V אוניטריות ו- Σ אלכסונית. ממשפט ידוע שעיל אלכסון Σ מופיעים $\sigma_1 \dots \sigma_r$. בgal Sh-V מטריצה עם r שורות ב- \mathbb{R}^m מהן נמצאים שורות בת'ל $V_1 \dots V_r$ ובאופן דומה U מטריצה עם r שורות $W_1 \dots W_r$ ב- \mathbb{R}^n . נוכל להגיה שהשורות הבת'ל במטריצות האוניטריות יהיו הראשונות, שכן הערכים הסינגולרים על המטריצה האלכסונית Σ מופיעים לפני שורות/עמודות האפסים (אם יש) ב- Σ . כתע נוכל להגיד (כאשר $[v]_{\mathcal{B}}^{-1}$ ההעתקה החופשית לייצוג בסיס \mathcal{B})

$$\mathbf{u}_i = [U_i]_{\mathcal{B}}^{-1} \quad \mathbf{v}_i = [V_i]_{\mathcal{C}}^{-1}$$

עתה נשאר להראות שהבחירה שלנו אכן עובדת. יהי $v \in V$, $v = (e_1 \dots e_n)$. כאמור ($e_1 \dots e_n$) הוא הבסיס הסטנדרטי ל- \mathbb{F}^n ו- $[v]_{\mathcal{B}} = (a_1 \dots a_n)$. כאמור ($a_1 \dots a_n$) הוא הבסיס הסטנדרטי ל- \mathbb{F}^m .

$$\begin{aligned} [Tv]_{\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = V\Sigma U^* \cdot (a_1 \dots a_n) \\ &= \sum_{i=1}^n V\Sigma \underbrace{U^* e_i}_{U_i} a_i = V\Sigma \sum_{i=1}^r a_i U_i \\ &= V\Sigma \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_i \langle e_j | U_i \rangle e_j \quad \text{ויאו של } U_i \text{ ב-} \mathbb{R}^n \text{ נקבע } \mathcal{E} \\ &= V\Sigma \sum_{i=1}^r \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle e_i \quad \text{לייאיות כרך הראשון} \\ &= \sum_{i=1}^r \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle \underbrace{V \sum_{j=1}^n e_j}_{(Ve_i)_{\sigma_i} = V_i \sigma_i} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle V_i \end{aligned}$$

משמעות ש- \mathcal{B} בסיס אורתונורמלי, אז מעבר מבסיס \mathcal{E} ל- \mathcal{B} ולהיפך הוא אוניטרי, כלומר $[U_i]_{\mathcal{B}}^{-1}$ על שני האגפים, ונקבל:

$$Tv = \left[\sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle V_i \right]_{\mathcal{B}}^{-1} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle [V_i]_{\mathcal{B}}^{-1} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

כדרوش.

מסקנה 36. בהינתן $g_1 \dots g_r, f_1 \dots f_r$ לעיל, אז:

$$T^*v = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

הוכחה. ניעזר פעמיים באדטיביות רכבי המכפלת הפנימית:

$$\langle Tv | w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i \middle| w \right\rangle = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i | w \rangle = \left\langle v \middle| \underbrace{\sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \mathbf{v}_i | w \rangle \mathbf{u}_i}_{T^*w} \right\rangle \top$$

למעשה, פירוק SVD הוא התאמת אורתונורמלית ללכסינה, קצת כמו שפירוק ספקטרלי הוא דמיון אורתונורמלי ללכסינה (לכסון אורתונורמלי). הפירומול של המשפט הזה בא לידי ביטוי במשפט הבא:
משפט 173. $T: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי. אז קיים לו פירוק ספקטרלי כך ש- \mathcal{B} בסיס אורתונורמלי, ובה"כ $a_i < a_j \iff i > j$. אזי הערכים הסינגולריים של T הם $\sigma_i = |a_i|$.

הוכחה. באמצעות טיעונים דומים ניתן להראות ש- $[T]_B = \text{diag}(a_1 \dots a_n)$ שקול לכך ש-:

$$Tv = \sum_{i=1}^r a_i \langle v | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i = \dots$$

כאשר $\theta_i \in \mathbb{R}$ ו- \mathcal{B} בסיס אורתונורמלי כלשהו. בגלל ש- a_i מרוכב ניתן לכתוב $a_i = r_i e^{i\theta_i}$ (כאשר $a_i = |a_i|$ ונדריך $\mathbf{u}_i = e^{i\theta_i} \mathbf{v}_i$). נבחן ש-:

$$\dots = \sum_{i=1}^r r_i \langle v | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

זהו פירוק SVD שכך $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ בסיס אורתונורמלי, כי:

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \langle e^{i\theta_i} \mathbf{v}_i | e^{i\theta_j} \rangle \mathbf{v}_j = e^{i\theta_i} \underbrace{\overline{e^{i\theta_j}}}_{0} \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle = 0$$

וכן:

$$\|\mathbf{u}_i\|^2 = \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \rangle = \underbrace{e^{i\theta_i} \overline{e^{i\theta_i}}}_{|e^{i\theta}|=1} \underbrace{\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_i \rangle}_1 = 1$$

קיבלנו ש- $|a_i| = \sigma_i$, מיחידות סigma בפירוק SVD.
משפט 174. תהי A מטריצה הדומה אוניטרית ל- \mathcal{B} . נוכיח שערכיה הסינגולריים הם $a_i = |a_i|$.

הוכחה. בהינתן $|a_i| = r_i$, נוכל לבצע את הפירוק הפולארי $A = P^T \Lambda P$ לכל a_i (ונבחן נדריך את המטריצות):

$$\Sigma = \text{diag}(r_1 \dots r_n)$$

$$\Theta = \text{diag}(e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_n})$$

בגלו ש- $\Lambda = \Theta\Sigma$, וכי כפל אלכסוניות מתחלף, נקבל:

$$A = P^T DP = P^T \Sigma \Theta P = \underbrace{P^T \Theta}_{:=U^T} \underbrace{\Sigma}_{:=V} \underbrace{P}_{:=V} = U^T \Sigma V$$

נבחין ש- V אוניטרית כי U אוניטרית. בಗלו ש- Θ אוניטרית (היא אלכסונית וכאן שורותיה אורתוגונליות, וכן $1 = |e^{i\theta_i}|$ ולכן היא אוניטרית) וכן משום שכפל מטריצות אוניטריות כמו P^T (כי חילוף אוניטריות הוא אוניטרי) ו- Θ נותן מטריצה אוניטרית, ■ נקבל ש- U אוניטרית. סה"כ מיחסות Σ לכל התאמה אוניטרית לאלכסונית, $|a_i| = \sigma_i$ כדרוש.

(2.3.4.3) נורמת האופרטור

הערה 83. גם תת-הפרק להלן לא בחומר הרשמי של הקורס. אבל חשוב שזה מגניב אז הוספה את זה. זה גם מועיל בקורסים מתקדמים יותר.

הגדרה 98. הגועמה של העתקה $T: V \rightarrow W$ מממ"פים מוגדרת להיות:

$$\|T\| = \max\{\|Tv\| : v \in V \wedge \|v\| \leq 1\}$$

הערה 84. אינטואציה גיאומטרית טובה היא לחשב על $\|T\|$ "הכדור המינימלי שחווסס את Tu " כאשר u נורמלי. בהקשר של T אופרטור, הנורמה לעיל קרויה נורמת האופרטור, והוא מטריקה. כך למעשה אפשר להגיד את מרחב ההעתקות כמרחב נורמי בפני עצמו.

הערה 85. במרחבים וקטוריים שאינם נוצרים סופית, מגדירים את נורמת האופרטור להיות:

$$\|T\| = \sup\{\|Tv\| : v \in V \wedge \|v\| = 1\} = \sup\{\|Tv\| : v \in V \wedge \|v\| < 1\}$$

лемה 18. כאמור, σ_1 הערך הסינגולרי המקסימלי של T . אז:

$$\|Tv\| \leq \sigma_1 \|v\|$$

הוכחה. מפירות העתקה לערכיהם סינגולרים:

$$Tv = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \sigma_i | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

משום ש- \mathbf{v}_i אורתונורמליים, אז $\|\mathbf{v}_i\| = 1$. לכן:

$$\|Tv\| = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n \sigma_1 \langle v | \mathbf{u}_i \rangle = \sigma_1 \left(\sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \right) =: *$$

ممושפט, בಗלו ש- g_i בסיס אורתונורמלי אז $v = \sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$.

$$* = \sigma_1 \left\| \sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i \right\| = \sigma_1 \|v\|$$

וסה"כ אכן $\|Tv\| \leq \sigma_1 \|v\|$ כדרוש. ■

משפט 175. הנורמה של ההעתקה היא אכן נורמה ואך (בערך) לינארית:

$$\|T\| \geq 0 .1$$

$$\|T\| = 0 \iff T = 0 .2$$

$$\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\| .3$$

$$\|S + T\| = \|S\| + \|T\| .4$$

$$\|T\| = \|T^*\| .5$$

הערה 86. חלק מהשוויות לעיל נכונים במקרה הלא נוצר-סופית רק עבור אופרטורים חסומים (כלומר $\|T\| \neq \infty$).

משפט 176. כאשר σ_1 הערך הסינגולרי הגדול ביותר של T , אז $\|T\| = \sigma_1$.

משפט 177. בהינתן $T: V \rightarrow W$ ו- $\sigma_1 \dots \sigma_n$ ערכים סינגולריים, אז:

$$\min\{\|T - S\| : S \in V \rightarrow W \wedge \text{rank } S \leq k\} = \sigma_{k+1}$$

משפט 178 (משפט המינ-מקס). לכל $S \in [n]$, כאשר S מ"ז: ובאופן שקול (ודי הגיוני):
באופן כללי, ערכים סינגולריים משמשים כדי להגדיר נורמות רבות על העתקות.

המשך בעמוד הבא

פרק 3

נספחים

3.1 Dual Spaces

את הפרק להלן המרצה של אודיסאה, בן בסקין, החליט להעביר, כדי לתת ראייה נרחבת יותר על לינאריות – מנוקדות מבט של תורה הקטגוריות. הרעיון הוא להבחן בכך ש-(א) בין כל קטגוריה לדואל שלה קיימים פונקטור קונטראינוריאנטי, ו-(ב) הן הצמדת העתקה, והן פונקציונל, הן קטגוריות דו-אליות למרחב הוקטורי, ולכלן איזומורפיות אחת לשנייה (שכן הדואל יחיד עד לכדי איזומורפיזם).

3.1.1 ~ הגזרות בסיסיות

הגדרה 99. בהינתן V מ"ז מעל \mathbb{F} , נגדיר $.V^* = \hom(V, \mathbb{F})$

הבנה. אם $\dim V = n$ אז $\dim V^* = n$. לכן $V^* \cong V$. לא נכון במקרה הסופי ממדוי.

лемה 19. יהי $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס ל- V . אז $\forall i \in [n]: \exists \psi_i \in V^*: \forall j \in [n]: \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$

משפט 179. יהי V מ"ס ו- $B = (v_i)_{i=1}^n$ בסיס המקיים $\forall i, j \in [n]: \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$ אז קיים ויחיד בסיס $B^* = (\psi_i)_{i=1}^n$.

הוכחה. נבחין שהבדרנו העתקה לינארית $\psi: B \rightarrow V^*$ כזו שהיא ביחידות ψ לינארית $V \rightarrow V^*$: ψ המקיימת את הנرش. ברור שהבנייה של φ קיימת ויחידה כי היא מוגדרת לפי מה קורה לבסיס. נותר להוכיח שזו אכן בסיס. יהיו $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך $\sum \alpha_i \psi_i = 0 = (\sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i)(v_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(v_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{ij} = \sum \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$ וסה"כ $\sum \alpha_i \delta_{ij} = 0$. ■

נבחן שאפשר להגיד:

הגדרה 100. $V^{**} = \hom(V^*, \mathbb{F})$

ואכן $\dim V < \infty$:

$$V \cong V^* \cong V^{**}$$

במקרה הזה, בניגוד לאיזו' הקודם, יש אייזו' "טבעי" (קאנוני), ככלומר לא תלוי באף בסיס. **משפט 180.** קיימים איזומורפיזם קאנוני בין V ל- V^{**} .

הוכחה. נגדיר את האיזוי' הבא:

$$\psi: V \rightarrow V^{**} \quad \psi(v) =: \bar{v} \quad \forall \psi \in V^*: \bar{v}(\psi) = \psi(v)$$

nocich shahua aiyo':

• ט"ל: יהיו $v, u \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. אז:

$$\psi(\alpha v + \beta u) = \overline{\alpha v + \beta u} \stackrel{!}{=} \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}$$

nocich zatot:

$$\overline{\alpha v + \beta u}(\varphi) = \varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(u) = \alpha v(\varphi) + \beta u(\varphi) = (\alpha \bar{v} + \beta \bar{u})(\varphi) = (\alpha \psi(v) + \beta \psi(u))(\varphi)$$

• חח"ע: יהי $\psi \in \ker \psi$. רואים להראוות $v \in \ker \psi$.

$$\forall \varphi \in V^*: \bar{(\varphi)} = 0 \implies \forall \varphi \in V^*: \varphi(v) = 0$$

אם v אינו וקטור האפס, נשלימו לבסיס $(v_i)_{i=1}^n$ ואמם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ בסיס הדואלי אז $\varphi_1(v) = 1$ אבל אז $\bar{v}(\varphi_1) = 0$ וסתירה.

• על: משווין ממדים $\dim V^{**} = \dim V$.

כלומר, הפונקציונלים הדואלי השני הם למעשה פונקציונלים שלוקחים איזושהו פונקציונל הדואלי הראשון ומצביעים בו וקטור קבוע.

3.1.2 ~ איזומורפיות למרחבי מכפלה פנומיות

(3.1.2.1) העתקה צמודה (דו-אלית)

סימון 18. לכל $V \in \mathcal{V}$ ו- $V^* \in \mathcal{V}$ נסמן $(\varphi, v) = \varphi(v)$.
הערה 87. סימון זה הגיוני משום שהכNST וקטור לפונקציונל דו-אלית איזומורפי למכפלה פנימית.
משפט 181. יהיו V, W מ"וים נוצרים סופית מעל \mathbb{F} , $T: V \rightarrow W$. אז קיימת ייחידה $T^*: W^* \rightarrow V^*$ כך ש- $T^*(\psi, T(v)) = (\psi, v)$.
 אם לצייר דיאגרמה:

$$V \xrightarrow{T} W \cong W^* \xrightarrow{T^*} V^* \cong V$$

(תנסו לצייר את זה בшибוע, ש- W, V למעלה ו- V^*, W^* למטה, כדי להבין ויזולאית למה זה הופך את החצים) בرمאה המתמטית, בתורת הקטגוריות, יש דבר שנקרה פנטור – דרך זהות בין אובייקטים שונים במתמטיקה. מה שהוא עושה, לדוגמה, זה להעביר את $\text{hom}(V, W)$ – מרוחבים וקטרים סוף ממדים – למרחב המטריצות. הדבר הזה נקרא פנטור קו-וריאנטי. במקרה לעיל, זה פנטור קו-נטרא-ווריאנטי – שימוש ב- T^* הופך את החצים. (הרחבת של המרצה) אז אפשר להגיד פנטור אбел במקום זה העשא את זה בשפה שאנו מכירים – לינארית 1א. בהינתן $\psi \in W^*$, נרצה למצוא $T^*(\psi) \in V^*$.

$$T^*(\psi) = \psi \circ T$$

ברור מדוע $W^* \rightarrow V^*$: בעצם, זה איזומורפיזם ("בשפת הפנטורים") קאנוני. עוד קודם לכן ידענו (בגלל ממדים) שהם איזומורפים, אך לא מצאנו את האיזומורפיזם ולא ראיינו שהוא קאנוני.

$$\tau: \text{hom}(V, W) \rightarrow \text{hom}(W^*, V^*) \quad \tau(T) = T^*$$

היא איזומורפיזם.

(הערה: תודה למרצה שנעה לבקשתי ולא השתמש ב- $\text{phi}\{/varphi\}$ אחרי שעשית $\text{phi}\{/varphi\}$:/renewcommand/phi{})
 הוכחת לינאריות. יהיו $\alpha \in \mathbb{F}, T, S \in \text{hom}(V, W)$ אז:

$$\tau(\alpha T + S) = (T + \alpha S)^*$$

יהי $\psi \in W^*$, אז:

$$(T + \alpha S)^*(\psi) = \psi \circ (T + \alpha S)$$

יש למעלה פונקציונל $-V^*$. ננסה להבין מה הוא עשה על $v \in V$. יהיו

$$\begin{aligned} [\psi(T + \alpha S)](v) &= \psi((T + \alpha S)v) \\ &= \psi(T)v + \alpha\psi(S)(v) = (\psi \circ T + \alpha\psi \circ S)(v) \\ &= ((T^* + \alpha S^*) \circ (\psi))(v) \\ &= (\tau(T) + \alpha\tau(S))(\psi)(v) \end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו לינאריות:

$$\tau(T + \alpha S) = \tau(T) + \alpha\tau(S)$$

nocell להוכיח זאת יותר בפשטות עם הנוטציה של "המכפלה הפנימית" שהגדכנו לעיל, (φ, v) . עתה נוכיח ש- τ לא רק לינארית, אלא מוגדרת היטב.

הוכחה.

- **חח"ע:** תהי τ העתקה האפס. נניח בשליליה ש- $0 \neq T(T) = T^* = 0_{\text{hom}(W^*, V^*)}$. נרצה להראות ש- $T \in \ker \tau$. נשלימו לבסיס V בסיס W . יהי $(T(v) = w_1, w_2 \dots w_n)$ הבסיס הדואלי. אז:

$$\tau(T)(\psi_1) = T^*(\psi_1) = \psi_1$$

או:

$$0 = \tau(T)(\psi_1)(v') = T^*(\psi_1)(v') = \psi_1 \circ T(v') = \psi_1(w_1) = 1$$

סתירה. לכן $\ker \tau = \{0\}$ ולכן τ חח"ע.

- **על:** גם כאן משווין ממדים

שאלה מבחן שבן עשה. ("את השאלה הוא לא פתרתי בזמן המבחן, ואני די מתבוייש כי אפשר לפתור אותה באמצעות כלים הרבה יותר פשוטים" זהה זה "לא חח" על זה חד-חד ערכי") יהיו V, W מ"ו מעל \mathbb{F} ו- $(w_1 \dots w_n)$ בסיס של W . תהי $T: V \rightarrow V$ הוכחיו שקיימים $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V^*$ כך שכל $v \in V$ מתקיים:

$$T(v) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(v) w_i$$

משמעותו: בנויגוד למה שבן עשה במחשבון, V לא בהכרח נוצר סופית.

הוכחת ראש צquier. לכל $v \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ כך ש- $T(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i w_i$. נגדיר $\varphi_i(v) = \alpha_i$. זה

הוכחה "מתחכמת". נתבונן בבסיס הדואלי $B^* = (\psi_1 \dots \psi_n)$ שמקיים את הדلتא של קרונקר והכל. נגדיר $\varphi_i(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i w_i$. אז:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(v) w_i = \sum T^*(\psi_i)(v) w_i$$

צ.ל. $\varphi_i(v) = T^*(\psi_i)(v)$. אך נבחין שהגדreno:

$$T^*(\psi_i)(v) = \psi_i(T(v)) = \psi_i \left(\sum_{j=0}^n \alpha_j w_j \right) = \alpha_j$$

■

"הפקת למרצה במתמטיקה כדי להתנקם באחוותך? " "כן."

3.1.2.2) המאפס הדואלי ומרחב אורותוגונלי

הגדרה 101. יהיו V מ"ו נוצר סופית. יהיו $S \subseteq V$ קבוצה. נגדיר $S^0 \subseteq V^*$ קבוצה. יהי $\{0\}^0 = V^*$, $V^0 = \{0\}$

דוגמאות.

משפט 182

.1. S^0 תמי"ז של V^* .

.2.

$S \subseteq S' \implies S'^0 \subseteq S^0$

.3.

משפט 183. יהיו V נ"ס U תמי"ז. אז $\dim U + \dim U^0 = n$, $U \subseteq V$.

באופן דומה אפשר להמשיך ולושות:

$$\dim U^0 + \dim U^{**} = n$$

וכן:

$$U \cong U^{**}$$

אייזומורפיים קאנוני. זאת כי:

$$\forall \varphi \in U^0 \forall u \in U: \varphi(u) = 0$$

ומי אלו הוקטורים שיאפסו את φ שמאפס את u ? הוקטורים ב- U עד לכדי האיזומורפיים הקאנוני מ- U ל- U^{**} . נבחן ש-:

$$[T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T$$

כאשר \mathcal{A} בסיס ל- V , V^* בסיס ל- \mathcal{A}^* , \mathcal{B} בסיס ל- W , W^* בסיס ל- \mathcal{B}^* .

המשך בעמוד הבא

3.2 Summary of Notable Result

3.2.1 ~ סיכום פירוק פרימרי וצורת ג'ורדן

התחלנו בلنנות לכיסו מטריצות. הבחנו שלא כל מטריצה היא לכסינה, ובהו מתקיים $d < r$ עבור ע"ע כלשהו. את הבעיה הזו תפקנו בשני כיוונים:

- מצאנו את **משפט הפירוק הפרימרי**, שאומר שבහינתו פירוק של הפולינום המינימלי למכפלת פולינומים זרים $m_T(x) = \bigoplus_{i=1}^r \ker g_i(T) = g_1 \oplus \dots \oplus g_r$, אז $\ker g_i(T) = \ker g_i$ כלומר g_i הפולינום המינימלי של צמצום T על המ"ז (T) . גם הראינו שגם במקום $m_T(x)$ משתמשים בפולינום כלשהו f המאפס את T (כלומר $f(T) = 0$) החלק הראשון של המשפט עדיין מתקיים.

از פשוט זרכנו את המשפטזה על העתקה כללית, מעל שדה סגור אלגברית, ואז ראיינו שככל תמי'ו שפירקנו אליו אפשר להגדיר העתקה נילפוטנטית מתחורה $I\lambda - T$. את המקה של נילפוטנטיות חקרו בנפרד, וגילינו שאפשר ליצג העתקה נילפוטנטית כמטריצת בלוקים $\text{diag}(J_{x_1}(0), \dots, J_{x_k}(0))$. כישירשנו את הבסיסים והוספנו את $-I\lambda$ בחזרה, קיבלנו את צורת ג'ורדן המתבקשת.

- בצורה אחרת עשינו לבדוק את אותו הדבר. אך במקום להבטיח את משפט הפירוק הפרימרי ולגלות שדברים עובדים, ניסינו להבין לאילו בדיקת תת-מטריבים המרחב מתפרק. מצאנו שהמטריבים האלו הם **המטריבים העצמיים המורחבים** של T (והוכחנו את זה ללא תלות במשפט הפירוק הפרימרי), ועליהם כבר יכולנו להגיד הרבה יותר דברים. לדוגמה:
 - הגודל של מ"ז מטוריב המשויך לע"ע הוא הריבוי האלגברי, וכך זהי כמו r מ"זים המשויך לאותו הע"ע.
 - העתקה הנילפוטנטית $I\lambda - T$ במצטומם על המ"ז הזה, בעלת דרגת נילפוטנטיות שהיא הריבוי של λ ב- T , ולכן זה גודל בלוק הג'ורדן המריבי עם ע"ע λ .
 - כל וקטור ב- $(\lambda) V$ המ"ז העצמי הלא מטוריב פותח שרשרת אחרת, וכך r מ"זים בлокי הג'ורדן לע"ע λ הוא שיפתחו בשיטה כזו או אחרת, תקופות למשעה לכל צורת ג'ורדן של העתקה/מטריצה.

הקטע הכימי, הוא שצורת הג'ורדן היא יחידה עד כדי סדר בלוקים. לכן, כל המסקנות שלנו לגבי איך נראה צורת ג'ורדן שיפתחו בשיטה כזו או אחרת, תקופות למשעה לכל צורת ג'ורדן של העתקה/מטריצה.

"על הדריך", קיבלנו כל מני תוכאות מעניינות:

- אם הפולינום האופיני מותפרק, האופרטור ניתן לשילוש (בפרט כל אופרטור ניתן לשילוש מעל שדה סגור אלגברית).
 - הפולינום המינימלי מותפרק לגורמים לינאריים שונים, אם ורק אם המטריצה לכסינה, אם ורק אם $m_T = f_T^{\text{red}}$.
 - הבחנו בקיום המטריצה המצורפת f_A , שהראתה לנו שלכל פולינום מותפרק קיימת מטריצה שהוא הפולינום האופיני שלו (הגדرتה מופיע בהמשך הסיכום).
 - ג'ירדון ולכיסו הוכיחו ככלים ייעלים לפתרת נוסחאות נסיגה לינאריות.
- בדרכ, עברנו דרך תורת החוגים בעיקר כדי לצאת עם שתי התענוגות הבאות:
- חוג הפולינומים הוא תחום אוקלידי (ובפרט ראשי), מה שמאפשר לנו לחלק פולינומים עם שארית.
 - קבוצת הפולינומים המאפסים של T היא אידיאל, ומהיות חוג הפולינומים תחום ראשי, הוא נוצר על ידי פולינומים מסוימים שסימנו ב- T^m (שמהגדירה הוא המינימלי ביחס להכללה).

3.2.2 ~ סיכום תכניות בי-לינאריות

התעניינו באופן מיוחד בשלושה סוגים של תבניות בי-לינאריות:

- תבנית חיובית**, (או א-שלילית וכו'), כזו המקיים $0 \geqslant (v, f) \in u$, מה שקובע להיות התבנית הריבועית שהיא מדירה, חיובית גם היא. התבנית היא חיובית אם הסינגולריה $u = s_+$.
- תבנית סימטרית**. הבחנו שכל התבנית אפשר לפרק לחלק סימטרי וחלק אנטיסימטרי, ותבנית ריבועית מתיחסת לחלק הסימטרי בלבד (ואף שיש זיגוג בין תבניות סימטריות לריבועיות). הבחנו שהמייצגת של התבנית כזו, סימטרית גם. ראיינו שאם נשלב את ההנחה של סימטריות עם התבנית מוגדרת חיובית, אז מקבל מכפלת פנימית.
- תבנית לא-מנוונת**, שמתאפשרת ישירות מהגדרת הרדיקל של התבנית. ראיינו שתבנית היא לא-מנוונת אם ומ"מ המטריצה המייצגת שלה הפיכה.

הבחנו שבמידה והמטריצה המייצגת הרטטית, אז הסימן של הערכים העצמיים קובע את הסינגולריה (את כי פירוק ספקטרלי

הוא לא רק דמיון, אלא גם חפיפה!).

3.2.3 ~ סיכום נושא הפירוקים

יש לנו מספר סוגי העתקות שענינו אותן באופן מיוחד:

הרטמיה/סימטריה	אורותוגונליות/אוניטריה	נורמלאלית	\mathbb{R}/\mathbb{C}
$T^* = T$	$T^* = T^{-1}$	$TT^* = T^*T$	הגדירה
$\langle Tv u \rangle = \langle v Tu \rangle$	$\langle Tv Tu \rangle = \langle v u \rangle$	$\langle Tv Tu \rangle = \langle T^*v T^*u \rangle$	מ"פ
$\lambda \in \mathbb{R}$	$ \lambda = 1$	$Tv = \lambda v \iff T^*v = \lambda v$	ע"עים

כאשר העתקה אוניטריה/orותוגונלית נקראת באופן כללי **אייזומטריה לינארית**. להגדרות אילן, נلومים המשפטים הבאים:

- **משפט הפירוק הספקטורי ב- \mathbb{R} :** העתקה היא סימטרית אם היא לכיסינה אורותונורמלית.
- **משפט הפירוק הספקטורי ב- \mathbb{C} :** העתקה היא נורמלאלית אם היא לכיסינה אורותונורמלית.
- T לכיסינה אורותונורמלית אם T לכיסינה אורותוגונלית (תוצאה ישירה מנרמולו).

והבחנה שאם A מטריצה לכיסינה אורותונורמלית (או מייצגת העתקה לכיסינה אורותוגונרמלה), אז קיימת מטריצה מעבר בסיס U אוניטריה/orותוגונלית ו- Λ אלכסונית כך $U^*AU = \Lambda$. בפרט הפירוק הספקטורי של מטריצה הניננת לכלISON אונטיררי, הוא פירוק ה-SVD שלו.

יש לנו שתי הגדרות לחזיבותו (ושיליותו, וכיו"ב):

- **מטריצה מוגדרת חיובית:** אם היא מייצגת תבנית ביילינארית חיובית, כלומר $0 > x^T Ax > \forall x \in \mathbb{F}^n$.
- **מטריצה חיובית:** הגדרה מצהיקה שלא מקובלת בשום מקום אחר חז' מבחן הוא, ודורשת $0 > \langle v | Av \rangle$. כל העתקה היא חיובית אם תחת יציגו במסיס אורותונורמלי, המטריצה המייצגת חיובית.

למצלנו, ההגדרות מתלכדות במקורה של העתקה או מטריצה עצמה. זהו המקורה הרלוונטי לפירוק פולארי שמספרה מטריצה כללית A לכפל של מטריצה אוניטריה U ומטריצה הרטמיה מוגדרת-חיובית P כך $A = UP$ ("לסובב ואז לשנות גודל"). למעשה, לא דיברנו בקורס כלל על מטריצה חיובית (בהבט של $0 > \langle v | Av \rangle$) שאינה צמודה לעצמה, וכאמור במקורה זה היא בכלל מקרים מוגדרת-חיובית.

כבר ידוע שההעתקה של מטריצה צמודה לעצמה (כלומר הרטמיה/סימטרית) הם בהכרח ממשיים. אבל במקורה של מטריצה מוגדרת, נוכל לטעון שמטריצה מוגדרת חיובית אם והיעם אף חיוביים (ובאופן דומה לגבי א-שלילית, שלילית, וא-חיובי)! בכלל המכפלה פנימית היא סימטרית ובפרט צמודה לעצמה, אז כדי לקבוע שהמכפלה הפנימית אכן חיובית, יש רק צורך לcalc את התכנית הריבועית כדי לוודא שהיא אכן מכפלה פנימית.

המשך בעמוד הבא

3.3 Algorithms

הנושא זהה מסכם בקצרה אלגוריתמים מועילים שראויים בתרגולים וצדאי לזכור (אין כאן סיכום מלא של התרגולים).

- **א' לפסונ:** בהינתן $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה.
 - נחשב את f_A .
 - נמצא את שורשי f_A . אם אלו מתקשים למצוא את שורשי הפולינום, נמצא את f^{red} .
 - לכל λ_i , נמצא בסיס למרחב העצמי באמצעות חישוב $(\lambda_i I - A)^{-1}$. איברי הבסיס יהיו הועיים בעבר היע"א.
 - סה"כ (ב"ה)diag($\lambda_1 \dots \lambda_n$) המטריצה האלכסונית המתקבלת ע"י מטריצת מעבר הבסיס הנתונה ע"י הועיים מהשלב הקודם.
- **ב' גירזון מטריצה כללית:** תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה $f_A(x)$ (ב"ה)
 - מתקיים מעל הרחבה לשדה סגור אלגברית). לכל $j \in [m]$ נבצע את הפעולות הבאות:
 - נמצא את הפולינום $f_A(x)$ האופייני ונפרק אותו לכדי גורמים לינאריים.
 - נחשב את $(A - \lambda_j)^{\ell_j}$ עד שנקבל $V_{\lambda_j}^{(i)} := \mathcal{N}((A - \lambda_j)^{\ell_j}) = m_i$ (המרחב העצמי המוכל).
 - הערה: אפשר באופן חלופי לחשב את הפולינום המינימלי, שכן ראיינו ש- m_i הריבוי של λ_i ב- (x) .
 - נוחזר על האלגו' למציאת צורת גירזון למטריצה נילפוטנטית:
 - נגידר $= \emptyset$
 - לכל $i \in [\ell_j]$ נבצע:
 - * נמצא בסיס כלשהו $C_{\lambda_j}^{(i)}$ של $V_{\lambda_j}^{(i)}$.
 - * נוסיף לו את $C_{\lambda_j}^{(i)}$.
 - * נשלים את $C_{\lambda_j}^{(i)}$ לבסיס של $V_{\lambda_j}^{(i)}$. נסמן ב- B_{λ_j} .
 - * נוסיף לו את B_{λ_j} .
 - נגידר $B = \bigcup_{j=1}^m B_{\lambda_j}$ הבסיס המגדן.
- **ג' מציאות $J_n(\lambda)^m$:** ידוע $J_n(0) = \lambda I_n + J_n(0)$ מתחלה נקבל מנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(J_n(\lambda)^m)_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 0 & j < i - m \\ \binom{m}{i-j} \lambda^{m-(i-j)} & \text{else} \end{cases}$$

זההינו:

$$J_n(\lambda)^m = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} \lambda^m & & & & \\ \binom{m}{1} \lambda^{m-1} & \binom{m}{0} \lambda^m & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \binom{m}{m} \lambda^0 & \binom{m}{m-1} \lambda^1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \binom{m}{m} \lambda^0 & \cdots & \ddots & \binom{m}{0} \lambda^m \\ \vdots & 0 & \binom{m}{m} \lambda^0 & \cdots & \binom{m}{m-1} \lambda^1 & \binom{m}{0} \lambda^m \\ 0 & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ד' גראם-شمידט: נרצה למצוא בסיס אורתוגונלי/orthonormal למ"פ כלשהו. יהיו בסיס $v_1 \dots v_n$ של V .

• **למציאת בסיס אורתוגונלי:** נגידר לכל $i \in [n]$

$$\tilde{v}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i | \tilde{v}_j \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot \tilde{v}_j$$

ואז $(\tilde{v}_n \dots \tilde{v}_1)$ בסיס אורתוגונלי (הבחנה: התהליך רקורסיבי,начיל מ-1=i ונסיים ב-n=i). במידה הצורך נוכל לנормל בסוף ע"י הגדרת:

$$\bar{v}_i = \frac{\tilde{v}_i}{\|\tilde{v}_i\|}$$

ואז $(\bar{v}_n \dots \bar{v}_1)$ אורתונורמלי מסיבות ברורות.

• **ממציאת בסיס אורתונורמלי:** (פחות יציב נומרית מאשר למצוא אורתונורמלי ואז לנормל, אך יותר קל חישובית) נגידר לכל $i \in [n]$:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\|\tilde{v}_i\|} \left(v_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i | \bar{v}_j \rangle \cdot \bar{v}_j}_{\tilde{v}_i} \right)$$

בצורה זו נוכל לנормל תוך כדי התהליך.

ה' **אלגוריתם אוקלידי לת חום אוקלידי** (בפרט בעבר פולינומיים ומספרים שלמים): ניעזר בזהות $\gcd(a, b + qa) = \gcd(a, b)$. כדי למצוא את $\gcd(a, b)$, נחזיר על הפעולה הבאה: בה"כ $a > b$, נגידר את $r = \gcd(a, b)$, כלומר $a = bq + r$, $\gcd(b, r) = \gcd(bq + r, r) = \gcd(b, r)$, ומהגדירה $N(r) < N(b)$ כאשר $N(r) < N(b)$. לכן נוכל להמשיך בתהליך עד שנגיע לפחות b' כך אחד מהם (בה"כ b' מקיים $\gcd(a', b') = 1$) וואז $\gcd(a', b') = \gcd(a', b') \cdot \gcd(b', b')$.

ב>Show המספרים השלמים לאלגו' סיבוכיות $\mathcal{O}(\log(\max\{a, b\}))$.

ו' **נורמל וקטורי:** נגידר $\frac{v}{\|v\|} = u$ הוא u נורמלי.

ז' **בדיקה T-איווריאנטיות:** בהינתן B בסיס של V נחשב את $T(B)$ ונבדוק האם $W \subseteq T(B)$ ע"י מעבר על כל איבר בסיס וDIR.ו.

ח' **חישוב A^{-1}, A^{n+c} באמצעות משפט קייל-המיטון:** ידוע $f_A(A) = 0$, ואם נשאר גורם חופשי $0 = \alpha_n A^n + \alpha_0 A^0$ אז נוכל להעביר אגפים ולקבל: $A^{-1} = \frac{1}{\alpha_0} (\sum_{k=1}^n \alpha_k A^{k-1})$. כדי לחשב את A^{n+c} תחילה נחשב את A^n באמצעות העברת אגפים וקבלת $A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ (כי $\alpha_n = 1$). עתה, נכפול ב- A כדי c פעמים, ומושם שידוע A^n , בכל חלוקה שבה נקבל $A^{n+1} = A^{n-1} \cdot A$. סה"כ נוכל לבטא את A^{n+c} כקombינציה לינארית של $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, I$, שעבור מספרי k קבועים קל לחשב.

ט' **יצוג בבסיס אורתוגונלי:** לכל $V \in u$ בהינתן $(v_n \dots v_1)$ בסיס אורתוגונלי, מתקיים $v_i \cdot v_j = 0$ (אין צורך לחלק בנורמה בעבר אורתונורמלי).

י' **ממציאת היטל אורתוגונלי:** בהינתן $(u_n \dots u_1)$ בסיס אורתוגונלי של U תמי"ז, אז $p_U(v)$ (גם כאן אין צורך לחלק בנורמה בעבר אורתונורמלי).

לחילופין, אפשר להיעזר בעובדה שהינתן u המוטל על $u_1 \dots u_n = U$, נאמר ו- u היא התוצאה, אז ניתן לבטא $u = u + u \perp u \in U^\perp$. לשם כך, נסמן ב- u את התוצאה, ואז ידוע $u = u - u \perp u \in U^\perp$. כלומר $u = u - u \perp u \in U^\perp$. קיבלו מערך לינארית מסווגות ב- U נעלמים שאפשר לדרג ולפטור. לכל $i \in [n]$.

יא' **ממציאת לבסן אוניטרי/אורותוגונלי** (אם קיים ממשפט הפירוק הספקטרלי):

- נמצא את u^\perp של העתקה.

• לכל u^\perp , נמצא בסיס עצמי של u^\perp ואז נבצע עליו בראמ"שميدט כדי לקבל וקטורים אורתוגונליים/orותונורמלים.

• נשרש את הבסיסים לקבלת בסיס אורתוגונלי/orותונורמלי מלכטן.

בניסוח אחר: נלכSEN את העתקה T , אבל נעשה גראם-شمידט על כל ו- u . כדי להוכיח שאלגו' זה אכן עובד, יש להוכיח את הטענה הנפוצה לפיה כל שני מרחבים עצמיים אורתוגונליים בהינתן העתקה נורמלית.

יב' **ממציאת פירוק SVD:** בהינתן T העתקה, נמצא את הפירוק הספקטרלי של T^*T ו- TT^* ומהזהויות $TT^* = U\Sigma^2U^*$, $T^*T = V\Sigma^2V^*$, נקבל $U\Sigma^2U^* = T^*T$.

המשך בעמוד הבא

3.4

Recommended Exercises

התהנושא הבא כולל תרגילים נפוצים במיוחד, או תרגילים קשים ומעניינים שאספתני מבחני עבר. אני ממליץ בחום לעבור על כלם לקרהת המבחן.

תרגיל 1. תהי T מעלה ממ"פ מרוכב, ו- $h \in \mathbb{F}[x]$ פולינומים זרים,

א' הוכח שאם T לכסינה, מתקיים $\ker(gT) = \ker(hT)^\perp$

ב' הוכח שלכל T , מתקיים $\ker gT \oplus \ker hT = V$ (במשמעות זה אין ערך להיות העתקה מעלה ממ"פ).

הזרכה: נסו להתחיל מהמקרה של שני ערכים עצמאיים מורחבים, ואז להכליל באמצעות פירוק למורחים עצמאיים.

תרגיל 2. הוכח שלכל T נורמלית, עם ע"י $v \in V_{\lambda_n}, \tilde{v} \in V_{\lambda_m}$: $\langle v | u \rangle = 0$ ש- $n, m \in [k]$ ו- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ מתקיים לכל $\langle v | u \rangle = 0$ (זהינו V_{λ_m} ניצב ל- V_{λ_n}).

תרגיל 3. הוכח שלכל $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\ker(T^*)^\perp = \operatorname{Im}(T)^\perp$ וגם

תרגיל 4. הוכח שלכל $V \rightarrow V$ מתקיים: $\varphi = \operatorname{Im} \varphi^*$

$$(\operatorname{Im} \varphi^*)^\perp = \ker \varphi$$

$$(\operatorname{Im} \varphi)^\perp = \ker(\varphi^*)$$

ובמידה ו- φ נורמלית:

$$\ker \varphi = \ker \varphi^*$$

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \varphi^*$$

והסיקו ש- φ ו- φ^* הם המשלימים האורתוגונליים אלו של אלו.

תרגיל 5. ללא שימוש בפירוק SVD, הראה שהערך הסינגולרי הגדול ביותר והקטן ביותר חוסמים את הנורמה $\|Tv\|$ לכל $v \in V$.

.....

סוף הקורס ~ 2025B

מאת שחר פרץ

צופייל כ-LATEX ווצע בפתרונות תוכנה חופשית בלבד