לינארית 1א ~ תרגיל בית 8 ~ סמסטר ב' 2025

שחר פרץ

31 במאי 2025

(1)

יהי V מ"ו ותהי $T\colon V \to V$ ט"ל המקיימת $T^5 = -T$. נוכיח $V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$.

הוכחה. **זרות.** יהי $v \in \operatorname{Im} T \cap \ker T$. אזי קיים $w \in V$ כך ש־$T(w) = v$ וכן ידוע $T(v) = 0$. אזי:

$$T(T(w)) = T(v) = 0 \overset{T^3}{\implies} T^3(T(T(w))) = T^3(0) = 0 \implies T^5 w = 0$$

ידוע $T^5 == -T$, כלומר:

$$T^5 w = 0 = -Tw = -v \implies -v = 0 \implies v = 0$$

סה"כ v וקטור האפס ולכן $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$.
ממשפט הממדים, ומהיות $T\colon V \to V$:

$$\dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = V \qquad \begin{matrix}\ker T \subseteq V \\ \operatorname{Im} T \subseteq V\end{matrix} \implies \begin{matrix}\dim\ker T \le \dim V \\ \dim\operatorname{Im} T \le \dim V\end{matrix}$$

נניח בשלילה $\ker T + \operatorname{Im} T \neq V$. אזי $\ker T + \operatorname{Im} T < V$, כלומר ממשפט הממדים האחר:

$$\dim V = \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T + \dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T) \implies \dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T) > 0$$

אך:

$$\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\} \implies \dim(\ker T \cap \operatorname{Im} T) = 0 \not> 0 \quad \perp$$

סתירה. סה"כ $\ker T + \operatorname{Im} T = V$ כדרוש. ■

(2)

ניעזר במשפט הממדים להעתקות לינאריות כדי לקבוע האם קיימת ט"ל המקיימת את הנדרש, ואם קיימת נמצא אותה.

(א)

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(1,1,1),\ \ker T = \operatorname{span}(1,2,1), T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

לא קיימת כזו שכן:

$$\dim\operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1,\ \dim\operatorname{span}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1, \implies \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = 1 + 1 \neq 3 = \dim\mathbb{R}^3$$

(ב) לא קיימת $T\colon M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ עבורה $\ker T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$. זאת כי:

$$\dim\ker T = 1,\ \dim\ker T + \dim\operatorname{Im} T = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 \implies \dim\operatorname{Im} T = 3,\ \operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}^2 \implies \dim\operatorname{Im} T \le 2 \implies 3 \le 2 \perp$$

סתירה.

(ג) נראה שלא קיימת העתקה $T\colon M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^5$ כך ש־$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^5$. נבחין ש־:

$$\dim\operatorname{Im} T = \dim\mathbb{R}^5 = 5,\ \dim\operatorname{Im} + \dim\ker T = \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 \implies \dim\ker T = -1 \quad \perp$$

אך ממש לא יכול להיות שלילי, וסתירה.

$$\dots\dots\dots\dots\dots (3) \dots\dots\dots\dots\dots$$

יהיו V,U,W מ"ים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $T\colon U\to V,\ S\colon V\to W$ ט"לים כך שההעתקה $S\circ T\colon U\to W$ היא איזו'. נוכיח $V=\operatorname{Im}T\oplus\ker S$.

הוכחה.

למה 1. T שיכון. נניח בשלילה שאיננה, אז:

$$\ker T>0\wedge\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=\dim V\implies\dim V-\dim\operatorname{Im}T=\dim\ker T>0\implies\dim V>\dim\operatorname{Im}T$$
$$\dim V>\dim\operatorname{Im}T\geq\dim\operatorname{Im}(S\circ T)=\dim V\implies\dim V\neq\dim V\quad\bot$$

הטענה $\dim\operatorname{Im}(S\circ T)\leq\dim\operatorname{Im}T$ נכונה כי $S(B)$ פורש עבור B בסיס של של $\operatorname{Im}T$.

למה 2. S על. זאת כי:

$$\forall v\in\operatorname{Im}(S\circ T)\exists w\in U\colon(S\circ T)(w)=v\implies S(T(w))=v,\ T(w)\in V\implies v\in\operatorname{Im}S$$

כלומר:

$$V=\operatorname{Im}(S\circ T)\subseteq\operatorname{Im}T\subseteq V\implies V\subseteq\operatorname{Im}(S\circ T)\subseteq V\implies\operatorname{Im}(S\circ T)=V\quad\top$$

על כדרוש.

$\boldsymbol{\operatorname{Im}T\cap\ker S=\{0\}}$**:** יהי $v\in\operatorname{Im}T\cap\ker S$, אז $S(v)=0$ וכן קיים לו מקור w ב־U של T כלומר $T(w)=v$. סה"כ $(S\circ T)(w)=S(T(w))=S(v)=0$ משמע $w=0$, וידוע $v=T(w)=T(0)=0$ וסה"כ $v=0$ כדרוש.

$\boldsymbol{\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker S=\dim V}$**:** ידוע:

$$\dim U=\dim\ker T+\dim\ker T$$
$$\dim V=\dim\ker S=\dim\operatorname{Im}S$$

וכן ידוע כי $(S\circ T)$ איזו' ש־$\dim U=\dim W$. משום ש־T שיכון, אז $\dim\ker T=0$. בגלל ש־S על, נסיק $\dim\operatorname{Im}S=W$. נציב ונקבל:

$$\begin{matrix}\underbrace{\dim W}_{\dim U}=\underbrace{0}_{\dim\ker T}+\dim\operatorname{Im}T\\ \dim V=\dim\ker S+\underbrace{\dim W}_{\dim\operatorname{Im}S}\end{matrix}\implies\dim V=\dim\ker S+\dim\operatorname{Im}T\quad\top$$

מכאן:

$$\operatorname{Im}T,\ker S\subseteq V\wedge\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker S=\dim V\wedge\operatorname{Im}T\cap\ker S=\{0\}$$

לכן ממשפט:

$$\ker S\oplus\operatorname{Im}T=V\quad\top$$

כדרוש. ∎

$$\dots\dots\dots\dots\dots (4) \dots\dots\dots\dots\dots$$

סעיפים הבאים, נחשב את $[T]_C^B$ עבור T העתקה, B,C בסיסים נתונים.

(א) יהי B בסיסי הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$ ו־:

$$C=(c_1,c_2,c_3)=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ T\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+2c\\3a-2d\\4a-3c-2b+d\end{pmatrix}$$

נבחין שמתקיים:

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}&=a\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\\&=a\left(-\frac{5}{3}c_1-\frac{4}{3}c_2+\frac{8}{3}c_3\right)+b\left(\frac{4}{3}c_1+\frac{5}{3}c_2+-\frac{1}{3}c_3\right)+c\left(\frac{1}{3}c_1+-\frac{4}{3}c_2+\frac{5}{3}c_3\right)+d\left(\frac{1}{3}c_1-\frac{4}{3}c_2+-\frac{1}{3}c_3\right)\end{aligned}$$

ולכן:

$$[T]_C^B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 1 & 1\\ -4 & 5 & -4 & -4\\ 8 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

(ב) עבור:

$$T(A) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}A,\ B=C=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = (e_1,e_2,e_3,e_4)$$

אז:

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a+\gamma b & \beta a+\gamma b\\ \alpha c+\gamma d & \beta c+\delta d\end{pmatrix}\\ &= \alpha(ae_1+ce_3)+\beta(ae_2+ce_4)+\gamma(be_1+d_3)+\delta(be_2+de_4)\end{aligned}$$

סה"כ:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix}a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & c & 0\\ 0 & d & 0 & d\end{pmatrix}$$

. . . . (5) . . . .

תהי $T\colon V\to V$ ט"ל ו־B,C בסיסים סדורים של V כך ש־$[T]_C^B$ משולשית עליונה. נוכיח כי קיים זוג בסיסים B',C' כך ש־$[T]_{C'}^{B'}$ מטריצה משולשית תחתונה.

הוכחה. משום ש־$[T]_C^B$ משולשית עליונה, היא מדורגת מדרגה n, ולכן הדירוג הקאנוני שלה הוא I. ממשפט, קיימות $E_1\dots E_k\in M_n(\mathbb{F})$ המדרגות את המטריצה כלומר $[T]_C^B\cdot\prod_{i=1}^k(E_i)=I$.
באופן דומה, כל מטריצה משולשית תחתונה ניתנת לדירוג לכדי I באמצעות מטריצות $\bar{E}_1\dots\bar{E}_m$ באותו האופן. נבחין שמ"ו המטריצות המשולשיות העליונות הוא ממימד $\frac{n^2+n}{2}$ וכן מ"ו המטריצות המשולשיות התחתונות הוא ממימד $\frac{n^2+n}{2}$ (שכן יש $\frac{n^2+n}{2}$ "דרגות חופש" המטריצה) ולכן קיימת $T\colon\hat{M}(\mathbb{F})\to\check{M}(\mathbb{F})$ איזו', כאשר $\hat{M}(\mathbb{F})$ מ"ו המשולשיות העליונות ו־$\check{M}(\mathbb{F})$ מ"ו המשולשיות התחתונות.
אזי, בעבור A נוכל להתאים לה $T(A)$ משולשית תחתונה, שניתנת לדירוג באמצעות $\bar{E}_1\dots\bar{E}_m$ לכדי I. אזי:

$$I\cdot\prod_{i=0}^{m-1}E_{m-i}^{-1}=T(A),\ A\cdot\prod_{i=1}^{k}E_k=I,\ \implies A\cdot\underbrace{E_1\cdots E_k\cdot\bar{E}_m^{-1}\cdots\bar{E}_1^{-1}}_{E}=T(A)$$

עתה נדרג את הבסיס C, כלומר נגדיר $C'=\{Ev\mid v\in C\}$, ומהגדרת ייצוג לפי בסיס נקבל ש־$[T]_{C'}^B=T(A)$. בפרט עבור $B'=B$ קיבלנו $[T]_{C'}^{B'}=T(A)$ כאשר $T(A)\in\check{M}(\mathbb{F})$ משולשית תחתונה, כדרוש. ■

. . . . (6) . . . .

יהי V מ"ו נ"ס מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו U,W,W' תמ"וים שלו כך ש־$V=U\oplus W=U\oplus W'$. יהי $u_1\dots u_m$ בסיס של U וכן $w_1\dots w_k,\ w'_1\dots w'_\ell$ בסיסים של W,W' בהתאמה.

א)

ב) נראה $k=\ell$:

הוכחה.

$$\begin{gathered}\dim W=|w_1\dots w_k|=k\ \ \dim W'=|w'_1\dots w'_\ell|=\ell\\ \dim W+\dim U=\dim V=\dim W'+\dim U\implies\dim W=\dim W'\implies k=\ell\quad\top\end{gathered}$$

■

(הערה: שוויון הממדים $\dim W+\dim U=\dim V$ נובע מסעיף ב' שהוכח ללא תלות לסעיף זה)

ג) נסמן $B_U=(u_1\dots u_m),\ B_W=(w_1\dots w_k),\ B_{W'}=(w'_1\dots w'_\ell)$. נוכיח $B_U\cup B_W$ וכן $B_U\cup B_{W'}$ בסיסים של V.
הערה: איחוד בסיסים סדורים איננו קומטטיבי, ויוגדר להיות $A=(a_1\dots a_k),\ B=(b_1\dots b_m)$ אז $A\cup B=(a_1\dots a_k,\ b_1\dots b_m)$.

הוכחה. ידוע $B_U \cup B_W$ בסיס אמ"מ לכל $v \in V$ קיים ויחיד קומב' לינארית של וקטורים מהבסיס $B_U \cup B_W$. מהגדרת סכום ישר, לכל $v \in V$ קיימים ויחידים $u \in U,\ w \in W$ כך ש־$v = u + w$. בפרט, קיימים ויחידים $u_i \dots u_j \in U$ וכן $w_n \dots w_p$ כך ש־u ו-w קומבינציה לינארית שלהם בהתאמה. על כן, מצאנו קבוצה של וקטורים $u_i \dots u_j, w_n \dots w_p$ ש־v קומבינציה לינארית שלהם, וכן היא יחידה. סה"כ הוכחנו את הנדרש.

באופן זהה ההוכחה בעבור $B' = (u_1 \dots u_m, w_1' \dots w_\ell')$. ■

ד) נראה שמטריצת המעבר $[id_V]^B_{B'}$ היא מטריצת בלוקים מהצורה $\left(\begin{smallmatrix} I_m & X \\ 0 & Y \end{smallmatrix}\right)$, כאשר $X \in M_{m\times k},\ Y \in M_{k\times k}$ והפיכה.

הוכחה. מהגדרת המטריצה המייצגת, היא בלוקים מהצורה:

$$[id_V]^{B'}_B = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ [u_1]_{B'} & \cdots & [u_m]_{B'} & [w_1]_{B'} & \cdots & [w_k]_{B'} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [id_U]^{B_U}_{B'} & [id_W]^{B_W}_{B'} \end{pmatrix}$$

וכן משום ש־$b \in B_U$ מקיים $[b]_{B_U} = e_i$ כי $B_U \subseteq B$, אז $[id_U]^{B_U}_{B'} = \left(\begin{smallmatrix} I_M \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ בלוקים (כי $|B_U| = m$). (הערה לבודק: זה פורמלי מספיק או שצריך להוכיח את זה יותר לעומק?)

נחלק את $[id_W]^{B_W}_B$ לבלוקים כלשהם X, Y, ונקבל:

$$[id_V]^B_{B'} = \begin{pmatrix} I_M & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} =: A$$

עתה נותר להראות ש־Y הפיכה. משום ש־id_V איזו', אז המייצגת אותה הפיכה. לכן המטריצה A. אם Y לא הפיכה אז שורותיה ת"ל, אז הבלוקים $(0 \quad Y)$ מטריצה ששורותיה ת"ל, ובפרט גם שורות A ת"ל ולכן $\operatorname{rank} A < n$ ו־A לא הפיכה, סתירה. אזי Y הפיכה. אומנם הוכחנו עבור $[id_V]^{B'}_B$ (ולא על $[id_V]^{B'}_B$)אך ההגבלה על B ועל B' זהה ולכן בה"כ הטענות שקולות.

■

. . . .