אלגברה לינארית 1א ~ מרחבים דואליים

שחר פרץ

10 ביוני 2025

DUAL SPACES .... (1) ....

הגדרה 1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. אז:

$$V^* := \{f\colon V \to \mathbb{F}\colon \mid f\,\text{Linear}\}$$

הוא המ"ו הדואלי, ו־$f \in V^*$ פונקציונלי לינארי.

דוגמאות.

- בעבור $V = \mathbb{R}$ נראה שזה הישרים מהצורה $y = ax$. נסמן $y(1) = m$ ואז $y(x) = xy(1) = xm$ וסה"כ $y(x) = mx$ כדרוש.
- בעבור $V = \mathbb{R}^2$: גם במקרה הזה נקבע את $f(e_1) = a, f(e_2) = b$ ואז $f(x, y) = f(e_1x + e_2y) = ax + by$
- במקרה הכללי יותר $V = \mathbb{R}^n$ ונסמן $f(e_i) = a_i$. סה"כ:

$$f(x_1 \dots x_n) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

משפט 1. המרחב הדואלי $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$

הוכחה. נגדיר:

$$T\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^8,\ T(a_1 \dots a_n) = f_{a_1 \dots a_n},\ f_{a_1 \dots a_n}(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_x e_i$$

נוכיח שהיא לינארית, חח"ע ועל.

- T לינארית:

$$T(a + b) = f_{a+b} = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)x_i = \sum_{i=0}^n a_i x_i + \sum_{i=0}^n b_i x_i = f_a + f_b = T(a) + T(b)$$

עתה נבדוק כפל בסקלר:

$$T_{\lambda a} = f_{\lambda a} = \sum_{i=0}^n \lambda a_i x_i = \lambda \sum_{i=0}^n a_i x_i = \lambda f_a x$$

- T חח"ע: נניח ש־$T(a_1 \dots a_n) = 0$. ידוע $f_a = \sum_{i=0}^n x_i a_i$ ולכל i מתקיים $f(e_i) = a_i = 0$ וסה"כ $a = 0$ כדרוש.

■

באופן כללי, $\dim V^* = n \implies \dim V = n$.

בהינתן בסיס ל־V, ישנו בסיס דואלי $\{f_1 \dots f_n\}$ המוגדרות ע"י $\forall i, j\colon f_j(b_i) = \delta_{ij}$.

משפט 2. זהו בסיס ל־V^*.

הוכחה.

- **על:**

$$f(v) = f\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(b_i)$$

• **חח"ע:**

$$f=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i f_i=0 \implies f(b_i)=\alpha_i=0 \implies (\alpha_i)_{i=1}^{n}=0 \quad \top$$

■

נבחין שב־$\mathbb{R}^n$:

$$\ker f_a=\left\{x\in\mathbb{R}^n\colon \sum_{i=0}^{n}a_ix_i=0\right\}$$

זהו תמ"ו מממד $n-1$ (זהו אילוץ אחד שמאבד דרגת חופש אחת).

דוגמאות לפונקציונלים מעל מ"וים לא נוצרים סופית: $V=\{f\colon[0,1]\to\mathbb{R}\}$, מתקיים ש־$\varphi(f)=f(0)$ פוקציונל, וגרעינו $\ker\varphi=\{f\colon[0,1]\to\mathbb{R}\colon f(0)=0\}$. אפשר להראות ש־$f=f-\underbrace{f(0)}_{\ker\varphi}+\underbrace{f(0)}_{A}$ כאשר A מ"ו הפונקציות הקבועות. למעשה, פירקנו לסכום ישר של הגרעין + משהו חד ממדי. בכך ניסחנו לכאורה את המספר של $n-1$ גם כאשר אין באמת אפשרות לחסר ממדי. נקרא לזה קו־ממד אחד.

באופן כללי, אם $0\neq f\in V^*$ יש $v\in V$ a $f(v)\neq 0$-fl. נניח $f(v)=1$. אז $\forall x\in V\colon x=f-f(x)v+f(x)v$ ולכן נוכל לפרק $V=\ker f\oplus\operatorname{span}v$.

המרחב V^{**}

ברור כי $V\cong V^{**}$. לכל $v\in V$ נוכל להתאים $\varphi_V(f)=f(v)$. זה מגדיר העתקה לינארית מ־V ל־V^{**}. נוכיח שהיא איזומורפיזם. חח"ע: הרעיון: להוכיח (לנוצרים סופית) $\forall f\in V^*,\varphi_V(f)=0=f(v)$. נניח בשלילה ש־$v\neq 0$. אז נוכל להשלים אותו לבסיס $v,v_2\dots v_n$, אפשר להגדיר f כך ש־$f(v)=1,\ f(v_i)=0\forall i\geq 2$. אבל אז $\varphi_V(f)=f(v)=2$ וסתירה. אזי זה חח"ע.

זהו איזומורפיזם קאנוני: הוא לא תלוי בבסיס או משהו של המרחב עצמו. האיזומורפיזם לא דורש שום בחירה לא טרוויאלית בתוך המרחב. נאמר שהם איזומורמים קאנונית.

המרחב המאפס

הגדרה 2. תהי $S\subseteq V$, אז המאפס שלה:

$$S^0=\{f\in V^*\colon f|_S=0\}\subseteq V^*$$

משפט 3.

- $S^0=(\operatorname{span}S)^0$
- S^0 מ"ו
- $S\subseteq T\implies S^0\supseteq T^0$

משפט 4. יהי V מ"ו, $\dim V=n$, $U\subseteq V$ תמ"ו, נניח ש־$\dim U=r$ אז $\dim U^0=n-r$

הוכחה. ניקח בסיס ל־U, $e_1\dots e_r$. ניקח $f_1\dots f_r$ כך ש־$f_i(e_j)=\delta_{ij}(j)$. נשלים לבסיס של V:

$$e_1\dots e_r,\ e_{r+1}\dots e_n$$

ובאופן דומה ב־V^n:

$$f_1\dots f_r,f_{r+1}\dots f_n$$

זהו בסיס ל־U^0 (לכל $j\geq r+1$. מתקיים $f_j|_U=0\implies f_i(e_j)=0$ לכל $i\geq r$. עתה נראה פרישה:

$$\forall f\in U^0\colon f(v)=f\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_ie_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_ie_i\right)+f\left(\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_ie_i\right)=f\left(\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_ie_i\right)=\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_if(e_i)=\sum_{i=r+1}^{n}f_i(\underbrace{\sum\alpha_ie_i}_{v})f(e_i)$$

בת"ל: הם איברים בבסיס V^* ובפרט בת"ל. ■

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד