חדו"א 1א ~ תרגיל בית 5

שחר פרץ

5 בדצמבר 2025

(1)

נמצא את כל הגבולות החלקיים של הסדרות הבאות:

(א) $$\sqrt[n]{4^2+2^n}$$

נקבל מסנדוויץ':

$$2=2^{\frac{n}{n}}=\sqrt[n]{2^n}\le\sqrt[n]{4^2+2^n}\overset{x>4}{\le}\sqrt[n]{2\cdot 2^n}=\sqrt[n]{2}\cdot 2^{\frac{n}{n}}=2\cdot\sqrt[n]{2}\to 2\cdot 1=2$$

ש־$\sqrt[n]{16+2^n}\to 2$ ובפרט הגבול החלקי הוא 2 ויחיד.

(ב) $$\frac{n-1}{n+1}\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

נבחין ש־:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)=\begin{cases}\sin 0 & n\equiv 0\\ \sin 1 & n\equiv 1 \mod 3\\ \sin 2 & n\equiv 2\end{cases}$$

עוד נבחין ש־:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1}=1$$

ולכן:

$$i\in\{0,1,2\}\colon a_{3n+i}=\frac{3n-1}{3n+1}\cdot\underbrace{\sin(3n+i)}_{\sin i}\xrightarrow{n\to\infty}1\cdot\sin i=\sin i$$

ממשפט הכיסוי, משום ש־$3n,3n+1,3n+2$ מכסים את $\mathbb{N}$, נקבל שהגבולות החלקיים היחידים הם $\sin 0,\sin 1,\sin 2$.

(ג) $$\frac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3}$$

נבחין ש־:

$$(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 2 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}=2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

כאשר I_X האינדיקטור על הקבוצה X. עוד נבחין ש־:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{3}{2n}}=\frac{1}{1}=1$$

סה"כ:

$$i\in\{0,1\}\colon a_{2n+i}=\frac{2^{2n}+1}{2^{2n}+3}(1-(-1)^{2n+i})\xrightarrow{n\to\infty}1\cdot 2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}=2I_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$$

סה"כ נקבל ש־$a_{2n}\to 0, a_{2n+1}\to 2$. בגלל ש־$2n,2n+1$ מכסים את $\mathbb{N}$ סה"כ הגבולות החלקיים היחידים הם $0,2$

(2)

תהי a_n סדרה המקיימת $\hat{\mathcal{P}}(a_n)=\{-1,3\}$. נגדיר סדרה חדשה $b_n=|a_n-1|$. נוכיח ש־$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$.

הוכחה. למה: כל ת"ס a_{n_k} מתכנסת של a_n מקיימת $|a_{n_k}-1|\to 2$. יהי a_{n_k} תת־סדרה של a_n כך ש־$\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=-1$. נראה ש־$\lim_{n\to\infty}|a_{n_k}-1|=2$. זה נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות וממשפטים שהוכחנו בכיתה (אם $\lim_{n\to\infty}c_n=\ell$ אז $\lim_{n\to\infty}|c_n|=|\ell|$). באופן דומה בעבור a_{n_k} ת"ס של a_n כך ש־$\lim_{n\to\infty}a_{n_k}=3$, נקבל ש־$\lim_{n\to\infty}|a_{n_k}-1|=2$ מאריתמטיקה של גבולות. סה"כ, תהי a_{n_k} ת"ס מתכנסת של a_n, אז בהכרח $a_{n_k}\to -1\vee a_{n_k}\to 3$ מהנתון $\hat{\mathcal{P}}(a_n)=\{-1,3\}$, ואת שני המקרים האלו כיסו והוכחנו שעבורם $|a_{n_k}-1|\to 2$.

עתה נפנה להראות הכלה דו־כיוונית.

- יהי $m\in\hat{\mathcal{P}}(b_n)$. מכאן שקיימת $b_{n_k}\to m$ ת"ס מתכנסת של b_n. נתבונן ב־a_{n_k}, אז קיימת לה ת"ס מתכנסת $a_{n_{k_j}}\to\ell$ כלשהי. אזי $b_{n_{k_j}}=\left|a_{n_{k_j}}-1\right|$ בהכרח מכנסת ל־2, מהלמה. סה"כ $\hat{\mathcal{P}}(b_n)=2$.
- תהי $a_{n_k}\to -1$ ת"ס של a_n שבהכרח קיימת מהנתון $\hat{\mathcal{P}}(a_n)=\{-1,3\}$. דהיינו $b_{n_k}=|a_{n_k}-1|\to 2$ מהלמה, כלומר 2 אכן גבול חלקי של b_n, ומכאן ש־$\{2\}\in\hat{\mathcal{P}}b_n$.

סה"כ הראינו ש־$\hat{\mathcal{P}}b_n=\{2\}$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$ כדרוש. ∎

(3)

(א) תהי $M\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה סופית ולא ריקה. נמצא a_n כך ש־$\mathcal{P}(a_n)=M$.

בנייה. נסמן $s=|M|-1$. משום ש־M קבוצה סופית, אז $<_{\mathbb{R}}$ סדר טוב עליה, ולכן נוכל למספר את M לפי $M_0,M_2\dots M_s$ כך ש־$i<j\iff M_i<M_j$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$a_n=M_{n\bmod s}$$

נבחין שהיא מוגדרת היטב שכן $\operatorname{mod}s\in[n]$. עוד נבחין, ש־$a_{n_k}$ עבור $n_k=i+k\cdot s$ היא ת"ס קבועה ב־M_i לכל $i\in[n]$, ומכאן ש־$M_i\in\mathcal{P}(a_n)$. כלומר, $M\subseteq\mathcal{P}(a_n)$. יהי $x\in\mathcal{P}(a_n)$, ונניח בשלילה $x\notin M$, אזי משום ש־M סופית אז $\min\{|M_i-x|\mid i\in[n]\}$ מוגדר היטב ואז ה־i עבורו המרחק $|M_i-x|$ מינימלי יבחר. נבחין שעבורו $M_i<x<M_{i+1}$ או ש־$M_{i-1}<x<M_i$. יהי נבחר $\varepsilon=\frac{M_i-x}{2}$, נבחר $N=1$, ועתה נראה שלכל $n\geq N$ בהכרח $|a_n-x|>\varepsilon$. נניח בשלילה ש־$|a_n-x|\leq\varepsilon$, אז סתירה למינימליות של M_i וסיימנו. מכאן ש־x איננו גבול וקיבלנו סתירה גם כאן. כלומר $\mathcal{P}(a_n)\subseteq M$, סה"כ הראינו הכלה דו־כיוונית.

∎

(ב) תהי x_n סדרה. נבנה סדרה b_n כך ש־$\operatorname{Im}x_n$ גבולות חלקיים שלה.

בנייה. ניעזר בבנייה דומה לזו של הסעיף הקודם:

$$a_n=\underbrace{x_1}_{s_1},\underbrace{x_1,x_2}_{s_2},\underbrace{x_1,x_2,x_3}_{s_3},\dots\underbrace{x_1,x_2,x_3\dots x_n}_{s_n}\dots$$

כלומר, בנינו את n מאינסוף חלקים $s_1,s_2,\dots$ מרוצפים אחד אחד השני, כך ש־s_n מכיל את האיברים $x_1\dots x_n$. יהי $n\in\mathbb{N}$, נראה ש־x_n גבול חלקי של a_n. מעצם הגדרתה, s_n בהכרח מופיע איפשהו ב־a_n מתישהו (ליתר דיוק, לאחר $N=\binom{n}{2}$ איברים). קבוצת תתי־הקבוצות של $\operatorname{Im}a_n$ הבאה: $\{s_i\mid i\geq N\}$, מקיימת שבכל אחד מתתי־הקבוצות הללו x_n נמצא, כלומר x_n מופיע באופן שכיח ב־a_n. מהגדרה שקולה, הוא גבול חלקי של a_n. סה"כ $\operatorname{Im}a_n=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\hat{\mathcal{P}}(a_n)$ כנדרש. ∎

(ג) נפריך קיום סדרה עבורה $\hat{\mathcal{P}}(a_n)=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$.

הפרכה. תהי a_n סדרה ונניח ש־$\hat{\mathcal{P}}(a_n)=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$. נראה ש־0 גם גבול חלקי שלה. יהי $\varepsilon>0$. יהי $N>0$. נמצא n כך ש־$|a_n-0|<\varepsilon$. משום ש־$\frac{1}{n}\to 0$ מתכנסת, אז קיים N_1 כך ש־$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $n\geq N_1$. בגלל ש־$\frac{1}{N_1}$ גבול חלקי של a_n, קיים $n>N_1$ כך ש־$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{N_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. סה"כ, מא"ש המשולש:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|>\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{N_1}\right|+\left|\frac{1}{N_1}-0\right|>\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש. מהגדרה 0 גבול חלקי של a_n, כלומר $0\in\hat{\mathcal{P}}(a_n)$, אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{n}=0$. נכפיל את האגפים ב־n וקיבלנו $1=0$, בסתירה לאקסיומות השדה. ∎

(4)

נפריך את הטענה הבאה: אם a_n סדרה כך שלכל $1 < p \in \mathbb{N}$ הת"ס $(a_{kp})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז a_n מתכנסת.

הפרכה. נסמן ב־$\mathbb{P}$ את קבוצת הראשוניים. נתבונן באינדיקטור I_n ביחס ל־$\mathbb{P}$, הוא סדרה ממשית. נבחין שלכל $1 < p \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־a_{pk} מתחלק ב־p וב־k וב־1, לכל $k > 1$, דהיינו pk איננו ראשוני, ומכאן שהסדרה בהכרח קבועה ב־0 לכל $k > 1$, דהיינו $a_{pk} \to 0$. נניח בשלילה שהטענה נכונה, ומכאן ש־a_{pk} מתכנסת. אזי בסביבה $(-0.5, 0.5)$ יש כמות אינסופית של מספרים ומחוץ אליה כמות סופית של מספרים. מהגדרת האינדיקטור, יש כמות סופית של ראשוניים, וסתירה. ■

(5)

תהי a_n סדרה חיובית כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n a_{n+1} = 1$. נוכיח שאם $L > 0$ גבול חלקי של a_n אז $\frac{1}{L}$ גבול חלקי גם הוא.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $N \in \mathbb{N}$. מהיות L גבול חלקי, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|a_n - L| < \varepsilon$. אזי ידוע קיום N_1 כך שלכל $n \geq N_1$ מתקיים $|a_n \cdot a_{n+1} - 1| < \varepsilon a_n - \varepsilon$.

$$|a_n a_{n+1} - 1| < \varepsilon a_n - \varepsilon \implies a_{n+1} < \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_{n+1}}$$

לבינתיים, נטפל במקרה בו $L > 1$:

$$\left|a_{n+1} - \frac{1}{L}\right| < \left|\frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon) \pm 1}{a_n} - \frac{1}{L}\right| = \frac{(\varepsilon a_n - \varepsilon)L + |L - a_n|}{a_n L} \overset{L>1}{<} \frac{\varepsilon a_n - \varepsilon + |L - a_n|}{a_n L} < \frac{\varepsilon a_n \cancel{- \varepsilon + \varepsilon}}{L a_n} = \frac{\varepsilon}{L} < \varepsilon$$

כנדרש. כדי להשמיד את הערכים המוחלטים השתמשנו בחיוביות. במקרה ו־$L < 1$, נסמן $m = \frac{1}{L}$, ואז m גבול חלקי ש־$\frac{1}{a_n}$, כלומר $\frac{1}{m}$ גבול חלקי של $\frac{1}{a_n}$, וסה"כ m גבול חלקי של a_n כלומר $\frac{1}{L}$ גבול חלקי של a_n וסיימנו (זאת מאריתמטיקת גבולות).

■

(6)

נוכיח ונפריך טענות על סדרות כלליות.

(א) אם סדרה חסומה כמעט תמיד, אז היא חסומה.

הפרכה. נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחין שלכל N, עבור $2N > N$ בהכרח $a_{2N} = 0 < 1$, כלומר 1 חוסם את a_n כמעט תמיד. עם זאת, יש לה ת"ס $a_{2n+1} = 2n+1 \to \infty$, משמע היא איננה חסומה, וזו סתירה. ■

(ב) אם סדרה חסומה באופן שכיח, היא חסומה.

הוכחה. נוכיח. תהי a_n סדרה שנניח שהיא חסומה ע"י M באופן שכיח. אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N \colon a_n < M$. נבחין שהקבוצה $[N]$ סופית. לכן, המקסימום הבא מוגדר היטב:

$$\tilde{M} = \max(\{a_n \mid n \in [N]\} \uplus \{M\}) = \max\{a_1, a_2, \dots a_N, M\}$$

נוכיח שהוא חסם עליון. יהי $n \in \mathbb{N}$.

- אם $n < N$, אז מהגדרת מקסימום $a_n \leq \tilde{M}$.
- אם $n > N$, אז מהגדרת מקסימום ומהנתון $a_n \leq M \leq \tilde{M}$.

סה"כ כיסינו את כל המקרים וסיימנו. ■

(ג) אם סדרה עולה באופן שכיח אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הפרכה. ניעזר באותה הסדרה שהשתמשנו בה בסעיף (א):

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{n-1}{2} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

יש לה צ"ס הוא $a_{2n}=(-1)^n$ שראינו מתכנס בשום מובן, ומכאן שאיננה מתכנסת. עם זאת, הת"ס $a_{2n+1}=n$ מונוטוני עולה, ומהגדרת ת"ס מתקבל ש־a_n עולה באופן שכיח. סתירה. ■

(ד) נוכיח שאם סדרה עולה כמעט תמיד אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם a_n חסומה, אז ממשפט ויראשטראס הראשון היא מתכנסת ל־$\sup \operatorname{Im} a_n$ וסיימנו.
- אם a_n איננה חסומה, לכל $M\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$|a_n|>M$. בפרט עבור $M=0$ נקבל קיום $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־$a_{N_1}>0$. סה"כ לכל $M\in\mathbb{R}$ נוכל לבחור N_2 כך ש־$|a_{N_2}|>M$ וכן $N=\max\{N_1,N_2\}$ יקיים ממונוטוניות ש־$a_{N_2}>a_{N_1}>0$ כלומר $a_{N_2}=|a_{N_2}|$ ואז ממונוטוניות שוב $\forall n\geq N_2\colon a_n\geq a_{N_2}>M$ וסיימנו מהגדרת שאיפה לאינסוף.

■

(ה) נראה שאם סדרה היא מתכנסת אז היא מונוטונית כמעט תמיד.

הוכחה. למעשה הראינו בכיתה ש־(1) כל סדרה מתכנסת היא חסומה (כי יש אינסוף איברים בסביבה כלשהי סביב הגבול, וכמות סופית מחוץ לה, ואז אפשר לקחת את המקסימום) ו־(2) לכל סדרה חסומה יש ת"ס מונוטונית (זה היה שלב בהוכחה של בולצאנו־וויראשטראס), וזה מהגדרה מסיים את ההוכחה מהגדרת ת"ס. ■

(7)

תהי a_n סדרה של איברים חיוביים כך ש־$\limsup a_n\cdot\limsup\frac{1}{a_n}=1$. נוכיח ש־$a_n$ מתכנסת.

הוכחה. נוכיח מהיות $\limsup,\liminf$ מקסימום ומינימום בקבוצת הגבולות החלקיים, ש־$\limsup\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\liminf a_n}$. נסמן $\limsup\frac{1}{a_n}=s$. נבחין שקיימת $\frac{1}{a_{n_k}}$ ת"ס של $\frac{1}{a_n}$ כך ש־$\frac{1}{a_{n_k}}\to s$ בהכרח, ושזה הגבול המקסימלי, כלומר לכל $\frac{1}{a_{n_j}}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n_j}}$. מאריתמטיקה של גבולות נקבל $\lim_{n\to\infty}a_{n_j}>\lim_{n\to\infty}a_{n_k}$, ומשום ש־$\frac{1}{s}=\frac{1}{\lim\frac{1}{a_{n_k}}}\to a_{n_k}$ אזי $\frac{1}{s}$ גבול עליון של a_n. סה"כ קיבלנו:

$$\limsup a_n=\frac{1}{s}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n_k}}}=\frac{1}{\liminf a_n}$$

מכאן, נקבל:

$$1=\limsup a_n\cdot\limsup\frac{1}{a_n}=\frac{\limsup a_n}{\liminf a_n}\implies\liminf a_n=\limsup a_n$$

כלומר הקבוצה $\mathcal{P}(a_n)$ חסומה בין שני איברים שווים, ומהיותה לא ריקה, בהכרח יש בה איבר אחד. מכאן שיש גבול חלקי יחיד, כלומר a_n מתכנסת אליו, וסיימנו. ■

(8)

(א) נוכיח שסדרה a_n איננה חסומה מלעיל אמ"מ $\limsup a_n=\infty$.

הוכחה. נראה גרירה דו־כיוונית.

$\Longrightarrow$ נניח $\limsup a_n=\infty$. משום ש־$\limsup$ הוא בפרט מקסימלי (ולא רק סופרמום) כמו שהוכחנו בהרצאה, אזי קיים גבול חלקי $a_{n_k}\to\infty$. בפרט, בעבור $M>0$ כלשהו, בהכרח קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$|a_{n_k}|=a_{n_k}>M$, כלומר עבור $j=n_k$ מתקיים $|a_j|>M$, כלומר הראינו את השלילה של a_n חסום מלעיל.

$\Longleftarrow$ נניח a_n איננה חסומה מלעיל, ונראה ש־$\limsup a_n=\infty$. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$F\colon\mathbb{N}\to\mathcal{P}\left(\operatorname{Im}a_n\right)\quad F(n)=\{a_k\in\operatorname{Im}a_n\colon a_k>n\}$$

נבחין שהקבוצות בתמונתה אינן ריקות, ישירות מהיות a_n איננה חסומה מלעיל (נקבל שלכל $M\in\mathbb{R}$ קיים k כך ש־$a_k>M$, ובפרט עבור $m=n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל ש־$\exists a_k\in\operatorname{Im}a_n\wedge a_k>n$ כלומר $a_k\in f(n)$). מכאן שקיימת ל־F פונקציית בחירה $f\colon\mathbb{N}\to\operatorname{Im}a_n$ כלשהי. נבחין ש־f פרמוטציה על ת"ס של a_{n_k} כלשהי (כך ש־$\operatorname{Im}a_{n_k}=\operatorname{Im}f$, כי $\operatorname{Im}f\subseteq\operatorname{Im}a_n$). נבחין שידוע ש־$f\to\infty$ שכן $f>n\to\infty$ ואז משפט הפיצה, והראינו בהרצאה שפרמוטציה לא משנה שאיפה לאינסוף, כלומר $a_{n_k}\to\infty$ גם כן. סה"כ מצאנו ת"ס של a_n כך ש־$a_{n_k}\to\infty$ דהיינו $\infty\geq\limsup a_n\geq\infty$ כלומר $\limsup a_n=\infty$. ■

(ב) אני מניח שאתם רוצים את התנאי הזה כי אפשר לנסח עוד תנאים:

$$\begin{aligned}&L=\liminf a_n=\inf\mathcal{P}(a_n)\\&\iff\forall\varepsilon>0.\,(\forall N\in\mathbb{N}.\,\exists n\in\mathbb{N}\colon a_n<L+\varepsilon)\wedge(\exists N\in\mathbb{N}.\,\forall n\geq N.\,a_n>L-\varepsilon)\end{aligned}$$

הוכחה. נראה גרירה דו־כיוונית.

$\Longrightarrow$ נניח L גבול תחתון. יהי $\varepsilon > 0$. נוכיח שכמעט תמיד $a_n > L-\varepsilon$, ושבאופן שכיח $a_n < L+\varepsilon$.

- נניח בשלילה שבאופן שכיח $a_n < L-\varepsilon$, אז קיימת קבוצה אינסופית $A \subseteq \operatorname{Im} a_n$ כך ש־$a \in A$ מקיים $a < L-\varepsilon$. מאקסיומת הבחירה או משהו כזה אפשר להגדיר ממנה ת"ס כך ש־a_{n_k} מקיימת $\operatorname{Im} a_{n_k} \subseteq A$. מבולצאנו וויראשטראס קיימת לה ת"ס $a_{n_{kj}}$ מתכנסת, והיא מקיימת $a_{n_{kj}} \to \ell \le L-\varepsilon$, כלומר $\ell < L$ גבול תחתון וסתירה.
- נראה שבאופן שכיח $a_n < L+\varepsilon$. ידוע ש־L גבול תחתון, ובפרט קיימת $a_{n_k} \to L$ (הוכחנו בהרצאה). נבחין ש־$|\operatorname{Im} a_{n_k} \cap (L-\varepsilon, L+\varepsilon)| \ge \aleph_0$ וכן $(L-\varepsilon, L+\varepsilon) \subseteq [-\infty, L+\varepsilon)$ כלומר $\operatorname{Im} a_n \cap [-\infty, L+\varepsilon)$ וסיימנו.

$\Longleftarrow$ עתה נניח שלכל $\varepsilon > 0$ באופן שכיח $a_n < L+\varepsilon$ וכמעט תמיד $a_n > L-\varepsilon$, ונראה ש־L גבול תחתון. מההגבלה השנייה, לכל a_{n_k} ת"ס מתקיים כמעט תמיד $a_{n_k} > L-\varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$, כלומר $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \ge L$ (הוכחנו בהרצאה) ומכאן שכל גבול חלקי גדול מ־L, כלומר היא חסם מלרע לקבוצת הגבולות החלקיים. נותר להראות שהוא מקסימלי. ידוע שבאופן שכיח $a_n < L+\varepsilon$, לכל $\varepsilon > 0$. נתבונן ברצף הקבוצות המקוננות הבא:

$$F(n) = \operatorname{Im} a_n \cap \left(L+\frac{1}{n}, L-\frac{1}{n}\right) \quad F(n+1)\subseteq F(n) \quad F\colon \mathbb{N}\to 2^A$$

מההנחה כל אחת מהקבוצות הללו כוללת אינסוף איברים, ובפרט אינה סופית, ולכן קיימת פונקציית בחירה $a_{\sigma(n_k)}$. לפי הגדרה הסדרה הזו שואפת ל־L. פרמוטציה לא משנה כלומר $\lim_{k\to\infty} a_{\sigma(n_k)} = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$, ומכאן שמצאנו ת"ס $a_{n_k}\to L$. דהיינו $L \in \hat{\mathcal{P}}(a_n)$, כלומר L לא רק חסם מלרע, אלא חסם מלרע ששייך לקבוצה – כלומר מינימום – ומינימום הוא אינפימום, וסה"כ $L = \inf(\hat{\mathcal{P}}(a_n)) = \liminf(a_n)$ כנדרש. ■

(9)

נוכיח את קריטריון אבל להתכנסות טורים. נוכל להשתמש בקריטריון דיריכלה להתכנסות טורים.

הוכחה. יהיו a_n, b_n סדרות. נניח ש־a_n מתכנסת ל־ℓ ומונוטונית, ונניח ש־$\sum b_n$ מתכנס. ראשית כל, נתעסק במקרה בו $\ell = 0$. במקרה זה a_n סדרה מונוטונית שמתכנסת ל־0. נפצל למקרים.

- אם $a_1 = 0$ אז בהכרח $a_n = 0$ קבועה ו־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ וסיימנו.
- אם $a_1 > 0$, אז נניח בשלילה שהיא מונוטונית עולה ואז $a_n > a_1 > 0$, כלומר עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1$ נקבל סתירה לקיום $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $a_n > a_1 = |a_1 - 0| > \frac{\varepsilon}{2}$.

  סה"כ a_n מונוטונית חיובית יורדת ל־0, ומהיות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, הסדרה b_n בפרט חסומה, וסה"כ סיימנו מקריטריון דיריכלה.
- אם $a_1 < 0$, אז נניח בשלילה שהיא מונוטונית יורדת ואז $a_n < a_1 < 0$, כלומר עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}a_1$ נקבל סתירה לקיום $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $-a_n > -a_1 = |a_1 - 0| > \frac{\varepsilon}{2}$.

סה"כ a_n מונוטונית שלילית עולה ל־0. נגדיר $a'_n = -a_n$ מתקבל ש־a'_n מונוטונית חיובית יורדת ל־0, ומהיות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, הסדרה b_n בפרט חסומה, ואז $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n$ מתכנס ל־ℓ כלשהו מקריטריון דיריכלה, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b_n = -\ell$ מוגדר היטב וסיימנו.

עתה נתעסק במקרה הכללי בו לא בהכרח $\ell = 0$. נוכל להגדיר את $c_n = a_n - \ell$, ונקבל מאריתמטיקה ש־$c_n \to 0$. אז, $\sum c_n b_n$ מתכנס מהטענה הקודמת, ונסמן את האיבר אליו הוא מתכנס ב־q. ידוע ש־$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, ואת האיבר אליו הוא מתכנס נסמן ב־p. נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ell) b_n + \ell b_n \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - \ell) b_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell\,(b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n + \ell \sum_{n=1}^{\infty} b_n = q + \ell p \in \mathbb{R}$$

(כאשר השוויון $\stackrel{!}{=}$ נכון רק כי האגף הימני מוגדר היטב) ■

(10)

נוכיח שלכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \neq 0$ אז מתקיים:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

הוכחה.

המשך בעמוד הבא

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} &\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n}\sin\left(\alpha+\beta k\right) \qquad \cdot\sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right) \\
\iff \sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right) &\overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\beta k\right) \qquad \sin(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\alpha+\beta\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)-\cos\left(\alpha+\beta\left(k+\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\beta n+\frac{\beta}{2}\right)\right) \qquad \text{טור טלסקופי} \\
\cos x-\cos y=-2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \qquad &= -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(\sin\left(\frac{2\alpha+\beta n}{2}\right)\sin\left(\frac{-(n+1)\beta}{2}\right)\right) \\
\text{כי } \sin \text{ אי־זוגית} \qquad &= \sin\left(\frac{(n+1)\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right) \qquad \top
\end{aligned}
$$

הסימון $\overset{!}{=}$ אמור לציין שוויון שקול לטענה שצ.ל. (זה סימון של המרצה למתמטיקה B שאני חושב שהוא די נוח לפעמים). ■

(11)

נוכיח או נפריך את התכנסות הסדרות הבאות באמצעות קריטריון קושי.

(א) נפריך את התכנסות $a_n=(-1)^n$.

הוכחה. עבור $1=\varepsilon>0$, ויהי $N\in\mathbb{N}$, אזי עבור $n=N+1, m=N$ מתקיים:

$$|a_n-a_m|=\left|(-1)^N-(-1)^{N+1}\right|=|1-(-1)|=2>1=\varepsilon$$

וזו סתירה לקריטריון קושי. סה"כ הראינו את הטענה ההפוכה לקיטריון קושי. ■

(ב) נפריך את התכנסות $a_n=n+\frac{(-1)^n}{n}$.

הוכחה. עבור $1=\varepsilon>0$, ויהי $N\in\mathbb{N}$, נסמן ב־N' את ה־זוגי מבין $N, N+1$, ואז עבור $n=N'$ ו־$m=N'+4$, מתקיים:

$$1=\varepsilon>|a_n-a_m|=\left|N'+4+\frac{(-1)^{N'+4}}{N'+4}-N'+\frac{(-1)^N}{N'}\right|=\left|4+\frac{1}{N'}-\frac{1}{N'+4}\right|>4$$

כלומר $1>4$, וסתירה. סה"כ הראינו את הטענה ההפוכה לקיטריון קושי. ■

(ג) נוכיח את התכנסות $a_n=\frac{n+1}{4n^2+3}$.

הוכחה. לכל n:

$$\frac{n}{4n^2+3}-\frac{n+1}{4(n+1)^2+3}=\frac{4n^3+8n^2+7n-4n^3-3n-4n^2-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21}=\frac{4n^2+4n-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21}>0$$

כלומר, זוהי מונוטונית יורדת עם הפרשים הולכים וקטנים. ידוע שקיים N_1 כך ש־$32n^3+10n^2+24n+21<n^4$ לכל $n\geq N_1$. גם קיים N_2 כך ש־$\forall n\geq N_2: 4n^2+4n-3<4n^2$. אז עבור $N=\max\left\{\sqrt{\frac{4}{17}\varepsilon}, N_1, N_2\right\}$, נקבל, לכל $n\in\mathbb{N}$ ו־$k>0$ ממונוטוניות:

$$|a_{n+k}-a_n|=a_n-a_{n+k}>a_n-a_{n+1}=\frac{4n^2+4n-3}{16n^4+32n^3+10n^2+24n+21}>\frac{4n^2+4n-3}{17n^4}>\frac{4n^2}{17n^4}=\frac{4}{17n^2}>\frac{4}{17\cdot\frac{4}{17}\varepsilon}=\varepsilon$$

סה"כ מקריטריון קושי הסדרה מתכנסת. ■