אלגברה לינארית 1א
מטלה 4: מרחבים וקטוריים, תתי מרחב, $span$

21 באפריל 2023

1. בסעיפים הבאים קבעו האם הקבוצה הנתונה V בצירוף בפעולות הנתונות $+, \cdot$ מהווים מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$.
   (א) $V = \mathbb{Q}$ עם פעולות כפל וחיבור של מספרים ממשיים.
   (ב) $V = \mathbb{C}$ עם פעולות כפל וחיבור של מספרים ממשיים.
   (ג) פונקציות **חסומות** מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ עם חיבור וכפל בסקלר של פונקציות.
   (הערה: נגיש שפונקציה מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ היא חסומה אם קיים $C \in \mathbb{R}$ כך ש־$\forall a \in \mathbb{R} : |f(a)| \le C$)
   (ד) פונקציות מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ שאם מציבים בהן 17 מקבלים 0 (כלומר $f(17) = 0$) עם חיבור וכפל בסקלר של פונקציות.
   (ה) פונקציות f מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ כך ש $f(17) = 1$ עם חיבור וכפל בסקלר של פונקציות.
   (ו) קבוצת כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים שמקיימים $p''(17) = p'(17) = p(17) = 0$ עם חיבור וכפל בסקלר של פונקציות.
   (ז) הקבוצה
   $$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
   עם חיבור וכפל בסקלר של $\mathbb{R}^3$
   (ח) הקבוצה
   $$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
   עם חיבור וכפל בסקלר של $\mathbb{R}^3$

2. יהי n טבעי. הוכיחו ש־V הנתון הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$: V קבוצת כל תתי הקבוצות של $\{1, 2, 3, ..., n\}$. עבור שתי קבוצות $S_1, S_2 \in V$ נגדיר את הסכום שלהן להיות $S_1 + S_2 := S_1 \triangle S_2$ וכפל בסקלר על ידי $1 \cdot S = S, 0 \cdot S = \emptyset$ (אלו שני הסקלרים היחידים בשדה).
   תזכורת: ההפרש הסימטרי מוגדר להיות $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a \in A | a \notin B\} \cup \{b \in B | b \notin A\}$.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ו־$U \subseteq V$ תת קבוצה **לא ריקה** כך שמתקיים $v, u \in U \Rightarrow v + u \in U$ (כלומר U סגורה לחיבור).
   (א) הוכיחו שאם $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ עבור p ראשוני כלשהו אז U תת מרחב של V.
   (ב) הוכיחו שהטענה לא נכונה באופן כללי, כלומר תנו דוגמה ל־$\mathbb{F}, V, U$ כך שהנתון מתקיים אבל U לא תת מרחב של V.

4. ניזכר במרחב המטריצות $M_n(\mathbb{F})$ - אלו כל המטריצות $n \times n$ עם ערכים בשדה $\mathbb{F}$. על $M_n(\mathbb{F})$ מוגדר חיבור איבר־איבר וכפל בסקלר כאופן הרגיל: אם $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ אז $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ ו $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij}$ לכל $1 \le i, j \le n$.
   נסמן ב $Sym_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | \forall i, j : A_{ij} = A_{ji}\}$ את קבוצת המטריצות הסימטריות, ובנוסף נסמן ב $ASym_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | \forall i, j : A_{ij} = -A_{ji}\}$ את קבוצת המטריצות האנטיסימטריות.
   (א) הוכיחו ש $Sym_n(\mathbb{F}), ASym_n(\mathbb{F})$ תתי מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$ ומצאו את החיתוך שלהם.
   (ב) הראו שלכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות שתי מטריצות $A_s \in Sym_n(\mathbb{F}), A_{as} \in ASym_n(\mathbb{F})$ כך ש $A = A_s + A_{as}$.

5.

(א) ניזכר ש $\mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$ עם החיבור והכפל הסטנדרטים. הראו ש $\mathbb{Q}$ תת מרחב שלו.

(ב) ניזכר גם ש $\mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ עצמו עם החיבור והכפל הסטנדרטים. האם עכשיו $\mathbb{Q}$ תת מרחב?

6. * יהי V מ"ו ו־$S,T\subseteq V$ קבוצות סופיות. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\operatorname{span}(S\cap T)\subseteq\operatorname{span}(S)\cap\operatorname{span}(T)$

(ב) $\operatorname{span}(S\cap T)\supseteq\operatorname{span}(S)\cap\operatorname{span}(T)$

(ג) $\operatorname{span}(S\cup T)=\operatorname{span}(S)\cup\operatorname{span}(T)$

7. * יהי V מ"ו ו־$S,T\subseteq V$ קבוצות סופיות. הוכיחו:

(א) אם $S\subseteq T$ אז $\operatorname{span}(S)\subseteq\operatorname{span}(T)$

(ב) $\operatorname{span}(S)=\operatorname{span}(T)$ אם ורק אם $T\subseteq\operatorname{span}(S)$ וגם $S\subseteq\operatorname{span}(T)$