# עבודה מסכמת במתמטיקה בדידה 2

שחר פרץ

28 בספטמבר 2024

## Combinatorics

(1)

(א) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש שבהן ארבעת האסים, אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

**תשובה:** ראשית כל, נתבונן ב־$52!$ הסידורים האפשריים של החפיסה כולה. עתה נתבונן בקבוצת המשלים – כמות האפשרויות לחפיסות בהן ישנם 4 אסים רצופים. סדרה שכזו יכולה להתחיל ולהגמר ב־$52-4$ מקומות שונים, ובכל אופציה, את $52-4=48$ הקלפים הנותרים, יהיו $48!$ אפשרויות לסדר. לסדר הפנימי של האסים עצמם יהיה $4!$ אפשרויות. סה"כ מכלל הכפל $58\cdot 48!$ אפשרויות בקבוצת המשלים. סה"כ:

$$\mathscr{A}nswer = \mathbf{52 - 48 \cdot 48!\, 4!}$$

(ב) **שאלה:** כמה סידורים של חבילה מלאה של 52 קלפים יש בהן כל 4 קלפים מאותו הסוג (13 סוגים שונים) אינם מופיעים ברצף אחד אחרי השני?

**תשובה:** נגדיר $a_i =$ כמות האפשרויות לסידור בו $i$ רצפים של 4 תווים. מובן כי $0 \le i \le \frac{52}{4} = 13$ (לא ייתכנו רצפים בסדר גודל הארוך יותר מהחפיסה כולה).

כדי למצוא את $a_i$, נבחר את הרצף הראשון מבין $13$ האפשרויות, ואז נמצא $48\cdot 48!$ באופן דומה לסעיף הקודם. נמשיך הלאה: השני מבין $12$ האפשרויות שנותרו, ולכך יהיו $44\cdot 44!$ אפשרויות. לסדר הפנימי של כל אחת מהסדרות יהיה $4!$ אפשרויות, ויהיו $i$ כאלו. בכלליות:

$$a_i = \sum_{j=1}^{i}(14-i)\cdot(52-4i)\cdot(52-4i)!\,4!i$$

ומעקרון ההכלה וההדחה, אם $A_i =$ קבוצת כל הרצפים באורך 4 מסוג נתון, ומשום שאין הגבלה על הכלליות בבחירת קלף מסויים, $\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$ זהה בערכו לכל $I \in [n]$ כך ש־$|I|$ קבוע בגודל $k$, ובפרט שווה ל־$a_k$ (המקרה הסמטרי של העקרון), ובשילוב עם עקרון המשלים (על קבוצת על הקומבינציות שגודלה $52!$), נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}nswer &= 52! - \sum_{\emptyset\neq I\in[n]}(-1)^{|I|-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| \\
&= 52! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}a_k \\
&= \mathbf{52! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}k(14-k)(52-4k)\,(52-4k)!\,4!}
\end{aligned}$$

(2)

יהי סריג דו ממדי, ונגדיר מסלול חוקי אמ"מ בכל צעד מ־$\langle x,y\rangle$ נגוע אך ורק לנקודה $\langle x+1,y+r\rangle$ לכל $r\in\mathbb{N}$.

(א) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$?

**תשובה:** יהי מסלול $a := \{a_i\}_{i=0}^{n}$ מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,k\rangle$ כאשר $\forall i\in[n].\exists x,y\in\mathbb{N}.a_i=\langle x,y\rangle$. נניח שהמסלול חוקי; אזי:

$$\forall i\in[n-1].\pi_1(a_i)-\pi_1(a_{i+1}) = 1 \land \exists r\in\mathbb{N}.\pi_2(a_{i+1})-\pi_2(a_i) = r$$

ולכן נוכל להגדיר מיפוי:

$$\forall i\in[n-1].a_k \mapsto \pi_2(a_{i+1})-\pi_2(a_i) =: r_i \in \mathbb{N}$$

חח"ע ועל לקבוצת המסלולים החוקיים. תמונת המיפוי תהיה $\mathbb{N}^{n-1}$. מהגדרת המסלול, $a_n = \langle n, k\rangle$ ולכן:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} r_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \\ &= \pi_2(a_1)\cancel{-\pi_2(a_2) + \pi_2(a_2)}\cancel{-\pi_2(a_3) + \pi_2(a_3)} - \cdots \cancel{+\pi_2(a_i) - \pi_2(a_i)} + \cdots + \pi_2(a_n) \\ &= \pi_2(a_1) + \pi_2(a_n) = 0 + k = k\end{aligned}$$

בכך, התייחסנו לכל ההגבלות – חוקיות המסלול באורך $n$ (מובעת בהיותה חח"ע ועל לקבוצה המאפשרת זאת), והיותו נגמר ב־$\pi_2(a_n) = k$ (הכרחי ומספיק להיות סכום $\sum r_i = k$). נקבע את גודל הסדרות התמונה המקיימות זאת. ידוע שכמות האפשרויות לסכום מספרים יהיה $S(n-1,k)$, ולכן סה"כ זהו פתרון הבעיה. נסכם:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(n-1,k)}$$

(ב) **שאלה:** כמה מסלולים חוקיים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$, כך שאף צעד בהם אינו מסתיים בנקודה $\langle n,k\rangle$?

**תשובה:** באופן דומה לסעיף הקודם, כמות הצעדים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle 2n,2k\rangle$ תהיה $S(2n-1,2k)$. נחפש את קבוצת המשלים. בהינתן מסלול שעובר בין הראשית ל־$\langle 2n,2k\rangle$ הוא יכלל בקבוצת המשלים אמ"מ הוא עובר ב־$\langle n,k\rangle$, כלומר הוא למעשה מסלול $\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$ ואז עוד מסלול $\langle n,k\rangle \to \langle 2n,2k\rangle$. המסלול האחרון שקול לבעיה הראשונה בעבור טרנספורמציה איזומטרית של $\langle x,y\rangle \mapsto \langle x-n, y-k\rangle$ שלמעשה תבהיר כי פתרון שתי הבעיות הוא $S(n-1,k)$, וכאשר נחבר אותם יחדיו, מכלל הכפל, גודל קבוצת המשלים הוא סה"כ $S(n-1,k)^2$. אזי:

$$\mathscr{A}nswer = \boldsymbol{S(2n-1,2k) - S(n-1,k)^2}$$

(ג) **שאלה:** כמה מסלולים קיימים מ־$\langle 0,0\rangle \to \langle n,k\rangle$ כך שכל צעד $\langle x_1,y_1\rangle \to \langle x_2,y_2\rangle$ מקיים $y_1 + 2 \le y_2$?

**תשובה:** נבחין שקילות לאחד הנתונים:

$$y_1 + 2 \le y_2 \iff \pi_2(a_i) - \pi_2(a_{i+1}) \le -2 \iff \underbrace{\pi_2(a_{i+1}) - \pi_2(a_i)}_{=r_i} \ge 2$$

ואכן ננסה למצוא את כמות הסדרות $\{r_i\}_{i=1}^{n-1}$ כך ש־$r_i \ge 2$, כך ש־$\sum r_i = k$, לפי השקילות שהוכחה בסעיף (א). לבעיה זו קיימת בעיה שקולה ידועה, היא חלוקת $n$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (3) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (4) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (5) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# Graph Theory

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (3) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (4) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (5) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (6) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (7) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (8) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (9) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (10) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .