תרגול לינארית

שחר פרץ

10 ביוני 2025

נוכיח ש־$\ker\varphi_3 \subseteq \operatorname{Im} T_2$ בלמה של החמישה.

הוכחה. יהי $v_3 \in \ker\varphi_3$. נסמן $v_u = T_3 v_3$ וכן $u_4 = \varphi_4(v_u)$. מקומטטיביות:

$$u_4 = \varphi_4(v_u) = \varphi_u(T_3(v_3)) = S_3(\varphi_3(v_3)) = S_3(0) = 0 \implies v_4 = 0 \implies T_3 v_3 = 0 \implies v_3 \in \ker T_3 = \operatorname{Im} T_2$$

■

נוכיח $\ker\varphi_3 = \{0\}$.

הוכחה. עתה נראה ש־$\ker\varphi_3 = 0$. יהי $v_2 \in V_2$ כך ש־$T_2 v_2 = v_3$, נסמן $u_2 = \varphi_2 v_2$ אז מתקיים:

$$S_2 u_2 = S_2\varphi_2 v_2 = \varphi_3 T_2 v_2 = \varphi_3 v_3 = 0$$

לכן $u_2 \in \operatorname{Im} S_1$. כלומר ישנו $u_1 \in U_1$ כך ש־$S_1 u_1 = u_2$. נלך אחורה ע"י הגדרת $\varphi_1^{-1} u_1$ v_1. כמו כן

$$\varphi_2 v_2 = u_2 = S_1 u_1 = S_1\varphi_1 v_1 = \varphi_2 T_1 v_1 \implies v_2 = T_1 v - 1 \implies v_2 \in \operatorname{Im} T_1 = \ker T_2 \implies T_2 v_2 = 0$$

■

נוכיח $\forall u_3 \in U_3 \colon \exists v_3 \in V_3 \colon (\varphi_4 \circ T_3) v_3 = S_3 u_3$.

הוכחה. באופן שקול $\varphi_4^{-1}(S_3(u_3)) = \ker T_4$ שקול לטענה $\forall u_3 \in U_3 \colon \exists v_3 \in V_3 \colon (\varphi_4 \circ T_3) v_3 = S_3 u_3$. ממדויקות שקול ל־$\varphi_4^{-1} \circ$) $S_3) u_3 \in \ker T_4$ כלומר $(T_4 \circ \varphi_4^{-1} \circ S_3) u_3 = 0$. שוב ממדויקות נשים לב ש־$(S_4 \circ S_3) u_3 = 0$. מאחר ש־φ_5 אזי נוכל לעלות למעלה $\varphi_5^{-1}(0) = 0$ $(\varphi_5^{-1} \circ S_4 \circ S_3) u_3 =$). לבסוף מקומטטביות הריבוע האחרון:

$$(T_4 \circ \varphi_4^{-1} = \varphi_5^{-1} \circ S_4 \implies (T_4 \circ \varphi_4^{-1} \circ S_3)) u_3 = (\varphi_5^{-1} \circ S_4 \circ S_3) u_3$$

■

נותר להוכיח ש־φ_3 איזו'.

הוכחה. נרד למטה מהגדרת $\tilde{u}_3 = \varphi_3 v_3$. מקומטטיביות $S_3 u_3 = S_3 \tilde{u}_3$. ממדויקות $S_3(u_3 - \tilde{u}_3) = 0$ ולכן ממדוייקות $u_3 - \tilde{u}_3 \in \operatorname{Im} S_2$. אזי ישנו $u_2 \in U_2$ כך ש־$S_3 u_2 = u_3 - \tilde{u}_3$. נלך למעלה ע"י הגדרת $v_2 = \varphi_2^{-1} u_2$. מקומטטיביות מתקיים

$$\varphi_3 T_2 v_2 = S_2 \varphi) 2 v_2 = S_2 u_2 = u_3 - \tilde{u}_3 = {}_3 - \varphi_3 v_3$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$u_3 = \varphi_3(T_2 v_2 + v_3)$$

וסה"כ מצאנו מקור ל־u_3. כלומר φ_3 על. ■

סה"כ היא איזו'. והוכחנו את עלמה כדרוש.

מסקנות

אם נתונה הדיאגרמה (אני לא עושה tikz)

בלי קשר

כמו איזומורפיזמים ישנם $T:\mathbb{F}_q^4\to\mathbb{F}_1^4$? מספיק להגדיר איזו' על הבסיס הסטנדרטי: ,

$$T(e_1)=v_1,\ \dots\ ,T_(e_4)=v_4$$

נספור כמה אפשרויות כל וקטור נותן:

- עבור v_1 נוכל לבחור כל וקטור לא אפס - q^4-1.
- עבור v_2 נוכל לבחור כל וקטור שאינו ת"ל ב־v_1. יש q^4-q אפשרויות.
- עבור v_3 יהיו באופן דומה q^4-q^2
- עבור v_4 יהיו q^4-q^3

סה"כ:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^n-q^i=q^{n(n-1)}-\frac{q^n-1}{q-1}$$

בפרט:

. . . .