מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 13 - שחר פרץ

מידע כללי

ת.ז.:	מאת:	תאריך הגשה:	ניתן בתאריך:
תחפשו בקומיטים הקודמים	שחר פרץ	20.2.2024	14.2.2024

תרגיל בית 13 - יחסי סדר

שאלה 1

סעיף (א)

נניח $\langle A,<_A\rangle, \langle B,<_B\rangle$ קבוצות סדורות חזק. נגדיר את יחס הסדר הלקסיקוגרפי על $A\times B$:

$$\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle \iff (a<_A c \lor (a=c\land b<_B d))$$

נוכיח כי $<_{lex}$ יחס סדר חזק על $A\times B$.

- טרנזיטיבי: יהי $\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle, \langle c,d\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$ כאשר $a,c,e\in A\land b,d,f\in B$. נוכיח $\langle a,b\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$. מההנחה $\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle$, ידוע $a<_A c\lor(a=c\land b<_B d)$. נפלג למקרים:
  - אם $a<_A c$: מההנחה $\langle c,d\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$ נסיק $c<_A e\lor(c=e\land d<_B f)$. נפלג למקרים:
    - אם $c<_A e$: סה"כ מכיוון ש־$<_A$ יחס סדר חזק ובפרט טרנזיטיבי $a<_A e$ כלומר $\langle a,c\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$.
    - אם $c=e\land b<_B f$: אזי מהצבה $a<_A e$ כלומר $\langle a,c\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$.
  - אם $a=c\land b<_B d$: מההנחה $\langle c,d\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$ נסיק $c<_A e\lor(c=e\land d<_B f)$. נפלג למקרים:
    - אם $c<_A e$: אז מהצבה $a<_A e$ כלומר $\langle a,c\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$.
    - אם $c=e\land d<_B f$: אז מטרנזיטיביות שוויון $a=e$ ומטרנזיטיביות יחס הסדר החזק $<_B$ נקבל $b<_B f$ כלומר $\langle a,c\rangle <_{lex} \langle e,f\rangle$.
- אנטי־סימטרי חזק: יהי $\langle a,b\rangle <_{lex} \langle c,d\rangle$, נניח בשלילה $\langle c,d\rangle <_{lex} \langle a,b\rangle$ ונראה סתירה. מההנחה נסיק $a<_A c\lor(a=c\land b<_B d)$, נפלג למקרים:
  - אם $a<_A c$: מהנחת השלילה $c<_A a\lor(a=c\land d<_B b)$. במקרה ש־$c<_A a$ אז $c<_A a\land a<_A c$ בסתירה לכך ש־$<_A$ יחס סדר חזק ובפרט אנטי־סימטרי חזק, ובמקרה ש־$a=c$ נקבל ש־$a<_A a$ שזו סתירה באופן דומה.

- אם $a = c \wedge b <_B d$: מהנחת השלילה $(a = c \wedge d <_B b) \vee a <_A c$. אם $a <_A c$ אז $a <_A a$ וזו סתירה לכך ש־$<_A$ אנטי־סימטרי חזק, ואם $b <_B d$ אז $d <_B b \wedge b <_B d$ בסתירה לכך ש־$<_B$ יחס סדר חזק ובפרט אנטי־סימטרי חזק. $\blacksquare$

סעיף (ב)

נפריך. נבחר $A = \{1,2\}, B = \emptyset$ (הערה: הטענה מתקיימת לכל $B \neq \emptyset$). נבחר $<_B = \emptyset$ יחס סדר חזק (טרנזיטיבי ואנטי־סימטרי חזק באופן ריק) ואת $<_A = \{\langle 1,2 \rangle\}$ יחס סדר חזק בעל איבר מינימלי 1. נתבונן ביחס הסדר הלקסיקוגרפי על $A \times B = \emptyset$, כלומר על יחס הסדר $\emptyset$, ונניח בשלילה שקיים מינימלי $x \in A \times B$ ונסיק $x \in \emptyset$ שזו סתירה. $\blacksquare$

שאלה 2

סעיף (א)

יהי $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. נגדיר את היחס: $R_f = \{\langle A, B \rangle \mid f(A) \subseteq f(B)\}$.

נוכיח R_f יחס סדר אמ"מ f חח"ע:

- $\Leftarrow$: יחס סדר גורר חח"ע: יהי $f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונניח בשלילה R_f יחס סדר ו־f לא חח"ע. מההנחה, R_f אנטי־סימטרי וגם כן קיימות $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך ש־$A \neq B$ אך $f(A) = f(B)$. מהכלה דו־כיוונית $f(A) \subseteq f(B) \wedge f(B) \subseteq f(A)$. מההנחה, לכל שתי קבוצות ב־$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ובפרט A, B מתקיים שאם $\langle A, B \rangle \in R_f \wedge \langle B, A \rangle \in R_f$ (שמתקיים לפי האמור לעיל) אז $A = B$, בסתירה לכך ש־$A \neq B$.
- $\Rightarrow$: חח"ע גורר יחס סדר:
    - רפלקסיבי: יהי $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נוכיח AR_fA, באופן שקול $f(A) \subseteq f(A)$ ובפרט $f(A) = f(A)$ המהווה פסוק אמת.
    - טרנזיטיבי: יהי $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, נניח $AR_fB \wedge BR_fC$ ונוכיח AR_fC. מההנחה $f(A) \subseteq f(B)$ וגם $f(B) \subseteq f(C)$, כלומר $f(A) \subseteq f(C)$ ובאופן שקול AR_fC כדרוש.
    - אנטי־סימטרי: יהיו $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ונניח $\langle A, B \rangle, \langle B, A \rangle \in R_f$, כלומר נסיק $f(A) \subseteq f(B)$ וגם $f(B) \subseteq f(A)$, נוכיח $A = B$. מהכלה דו־כיוונית $f(A) = f(B)$ ומהיות f חח"ע $A = B$ כדרוש $\blacksquare$

סעיף (ב)

נגדיר $F \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כאשר F קבוצת הפונקציות חח"ע על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (כלומר לכל $f \in F$ מתקיים f חח"ע). נשלול $H := \lambda f \in F.R_f$ חח"ע. נניח בשלילה שהיא חח"ע ונראה דוגמה נגדית. נבחר $f = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{1\}$ ונבחר $g = \lambda N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).\{2\}$. נוכיח $H(f) = H(g)$ כדי להשלים את הדוגמה הנגדית. נניח בשלילה $H(f) \neq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, כלומר קיים $\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$ כך ש־$\langle A, B \rangle \notin H(f)$, כלומר $f(A) \nsubseteq f(B)$ אך מהצבה $\{1\} \nsubseteq \{1\}$ וזו סתירה, ובאופן דומה $H(g) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כלומר סה"כ $H(f) = H(g)$ כדרוש $\blacksquare$

שאלה 3

סעיף (א)

תהי קבוצה סופית A, ויהי יחס סדר חלש R על A. נוכיח קיום $a_M \in A$ כך ש־a_M איבר מקסימלי.

משום שהקבוצה A סופית, נוכל לסמן $|A| = n \in \mathbb{N}$. נניח בשלילה שאין מקסימום, כלומר נשלול לוגית ונקבל $\forall a \in A.\exists b \in A.aRb \wedge a \neq a$. נוכיח באינדוקציה על n גודל הקבוצה שמתקיימת סתירה:

- בסיס $(n = 1)$: נסמן $a = \{A\}$, ולכן R בהכרח משתווה ל־$R = \{\langle a, a\rangle\}$, מהנחת השלילה קיים $b \neq a$ כך ש־$\langle a, b\rangle$ אך זו סתירה באופן מידי.
- צעד $(n > 1)$: נניח בישנה סתירה על קבוצה בגודל n, ונוכיח שהסתירה מתקיימת על קבוצה בגודל $n + 1$. אם מתקיימת סתירה על קבוצה בגודל n, אזי שעליה קיים מקסימום. נתבונן באיבר $a \in A$, ונתבונן בקבוצה $A \setminus \{a\}$ באורך n בעבורה קיים מקסימום a_{M_-}. לפי הנחת השלילה, קיים a_{M_+} כך ש־$a_{M_-} Ra_{M_+} \wedge a_{M_-} \neq a_{M_+}$. מטרנזיטיביות יחס הסדר R נקבל ש־$a_{M_-} Ra_{M_+}$ ומשום ש־$|A| = n + 1$, אזי בהכרח $a_{M_+} \in A \setminus \{a\}$. לפי הגדרת איבר מקסימום a_{M_-} על הקבוצה $A \setminus \{a\}$, נסיק שלכל איבר b ב־$A \setminus \{a\}$ מתקיים $\neg aRb$. מהטענות לעיל $a_{M_+} Ra_{M_-} \wedge a_{M_-} Ra_{M_+}$ ומהיות R אנטי־סימטרי $a_{M_-} = a_{M_+}$ וזו סתירה לכך ש־$a_{M_-} \neq a_{M_+}$. ■

סעיף (ב)

נראה דוגמה נגדית. נבחר את הקבוצה $A = \{1, 2\}$ ואת יחס הסדר $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$, בעל שני איברים מקסימליים $1, 2 \in A$. ■

שאלה 4

סעיף (א)

נגדיר X קבוצת כל חלוקות $\mathbb{R}$. נגדיר $\sqsubset$ על X ע"י:

$$\pi_1 \sqsubset \pi_2 \iff \forall Z \in \pi_2 \exists Y \in \pi_1 (Z \subseteq Y)$$

נוכיח ש־$\sqsubset$ יחס סדר חלש על X:

- רפלקסיביות: תהי $\pi \in X$, כלומר π חלוקה של $\mathbb{R}$, ונוכיח $\pi \sqsubset \pi$, כלומר יהי $Z \in \pi$, ונוכיח קיום $Y \in \pi$ כך ש־$Y \subseteq Z$. נבחר $Z = Y$ וסה"כ ZY כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהי π_1, π_2, π_3 חלוקות של $\mathbb{R}$, נניח $\pi_1 \sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \sqsubset \pi_3$. נוכיח $\pi_1 \sqsubseteq \pi_3$. יהי $Z \in \pi_3$, צ.ל. קיום $Y \in \pi_1$ כך ש־$Z \subseteq Y$. מההנחה $\pi_2 \sqsubset \pi_3$ קיימת $Y_1 \in \pi_3$ כך ש־$Y_1 \subseteq Z$, ומההנחה $\pi_1 \sqsubset \pi_2$ קיימת $Y_2 \in \pi_2$ כך ש־$Y_2 \subseteq Y_1$. נבחר $Y = Y_2$ וסה"כ $Y \subseteq Y_1 \subseteq Z$ ומטרנזיטיביות הכלה $Y \subseteq Z$ כדרוש.
- אי־סימטרי חלש: יהי π_1, π_2 חלוקות של $\mathbb{R}$, נניח $\pi_1 \sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \sqsubset \pi_1$ ונוכיח $\pi_1 = \pi_2$. נוכיח $\pi_1 \subseteq \pi_2$, ובאופן דומה יתקיים גם $\pi_1 \subseteq \pi_2$. יהי $Z \in \pi_1$ ונוכיח $Z \in \pi_2$, מההנחה $\pi_2 \sqsubset \pi_1$ נסיק קיום $Y_2 \in \pi_2$ כך ש־$Z \subseteq Y_2$ ומההנחה $\pi_1 \sqsubset \pi_2$, נסיק קיום $Y_1 \in \pi_1$ כך ש־$Y_2 \subseteq Y_1$, וסה"כ $Z \subseteq Y_2 \subseteq Y_1$. בפרט, $Z \subseteq Y_1$, ונניח בשלילה $Z \neq Y_1$, נסיק שמשום שהם באותה החלוקה π_1 אזי $Z \cap Y = \emptyset$ ובפרט מהכלה דו כיוונית $\forall x \in Z.x \notin Y$.

משום שהוא בחלוקה אז $X \neq \emptyset$ כלומר קיים $x \in X$, ומהטענות לעיל $x \in Y \wedge x \notin Y$ וזו סתירה. סה"כ $Z = Y_1$, כלומר מהצבה במה שכתבנו $Z \subseteq Y_2 \subseteq Z$ ומהכלה דו כיוונית $Y_2 = Z$ ומשום ש־$Y_2 \in \pi_2$ סה"כ $Z \in \pi_2$ כדרוש. $\blacksquare$

סעיף (ב)

דוגמה ל־$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in X$ כך ש־$\pi_1 \sqsubset \pi_2 \sqsubset \pi_3$:

$$\pi_1 = \{\{r\} \mid r \in \mathbb{R}\}, \pi_2 = \{[r, r+1) \mid r \in \mathbb{Z}\}, \pi_3 = \{[r, r+2) \mid r \in \mathbb{Z}_{\text{even}}\}$$

סעיף (ג)

קווי

היחס לא יחס סדר קווי. לדוגמה, בעבור החלוקות:

$$\pi_1 = \{[r, r+2) \mid r \in \mathbb{Z}_{\text{even}}\}, \pi_2 = \{[r, r+2) \mid r \in \{r \in \mathbb{R} \colon r \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}\}$$

מתקיים $\pi_1 \not\sqsubset \pi_2 \wedge \pi_2 \not\sqsubset \pi_1$ (כי בעבור $[0,2)$ לא קיים $r \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$ כך ש־$[0,2) \subseteq [r, r+2)$ ולכן $\pi_1 \not\sqsubset \pi_2$ ובאופן דומה $\pi_2 \not\sqsubset \pi_1$) למרות ש־$\pi_1 \neq \pi_2$. $\blacksquare$

קיום איבר גדול ביותר

קיים איבר גדול ביותר $\pi = \{\mathbb{R}\}$, כי יהי $\pi\_ \in X$, נניח $\pi \neq \pi\_$ ונניח בשלילה ש־$\pi \sqsubset \pi\_$ כלומר נניח בשלילה שקיים $Z \in \pi\_$ כך שלא קיים $Y \in \pi$ בעבורו $Y \subseteq Z$, ולפיכך לכל $Y \in \pi$ (שקול $Y = \mathbb{R}$) $Z \not\subseteq Y$ כלומר $Z \not\subseteq \mathbb{R}$ בסתירה לכך ש־$Z \in \pi\_$ בעוד $\pi\_$ חלוקה של $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

שאלה 5

סעיף (א)

יהיו $X, Y \neq \emptyset$ קבוצות, ונניח $\leq_X$ יחס סדר חלש על X. נגדיר את יחס הסדר $\preceq$ מעל קבוצת הפונקציות $Y \to X$ באופן ע"י $f \preceq g \iff \forall y \in Y. f(y) \leq_X g(y)$.

נניח $x_0 \in X$ איבר מקסימלי ב־X. נוכיח $f := \lambda y \in Y. x_0$ איבר מקסימלי ב־$Y \to X$. יהי $g \in Y \to X$. נוכיח $f \leq_X g \vee g = f$, או באופן שקול לוגית $g \neq f \implies \neg g \leq_x f$ ולפי הגדרת איבר מקסימלי באופן שקול f איבר מקסימלי ב־x_0, המהווה פסוק אמת בהתאם להנחה $\blacksquare$

סעיף (ב)

יהיו קבוצות סדורות $\langle A, \leq_A \rangle, \langle B, \leq_B \rangle$, נגדיר פונקציה $h \colon A \to B$ שומרת סדר:

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \leq_A a_2 \iff h(a_1) \leq_B h(a_2)$$

נוכיח ש־h המוגדרת באופן לפי $h\colon X \to (Y \to X), h = \lambda x \in X.\lambda y \in Y.x$ שומרת סדר (בעבור הקבוצות הסדורות $\langle X, \leq_X \rangle, \langle X \to Y, \preceq \rangle$). יהיו $x_1, x_2 \in X$, נוכיח $h(x_1) \preceq h(x_2) \iff x_1 \leq_X x_2$:

$$\begin{aligned}
&h(x_1) \preceq h(x_2) && && (1)\\
\iff &f := \lambda y \in Y.x_1 \preceq g := \lambda y \in Y.x_2 && (\beta \text{ rule}) && (2)\\
\iff &\forall y \in Y.f(y) \leq_X g(y) && (\preceq \text{ definition}) && (3)\\
\iff &\forall y \in Y.x_1 \leq_X x_2 && (\beta \text{ rule}) && (4)\\
\iff &x_1 \leq_X x_2 && && (5)
\end{aligned}$$

כמבוקש ■

סעיף (ג)

נניח $X = \{0,1\}, Y \neq \emptyset$. נתבונן בקבוצות הסדורות $\langle \mathcal{P}(Y), \subseteq \rangle, \langle Y \to \{0,1\}, \preceq \rangle$.

יחס הסדר $\preceq$ מוגדר באמצעות יחס הסדר $\leq_X$ החלש על X, ויתכנו שתי אפשרויות לזהותו:

$$\leq_X = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 0,1 \rangle\} \vee \leq_X = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle\}$$

בה"כ זו האפשרות הראשונה (ובפרט $0 \leq_X 1$).

נוכיח ש־h חח"ע ושומרת סדר, בעבור h המוגדרת באופן הבא:

$$h\colon (Y \to \{0,1\}) \to \mathcal{P}(Y). h = \lambda f \in Y \to \{0,1\}.\{y \in Y : f(y) = 1\}$$

שומרת סדר

יהי $f, g \in Y \to \{0,1\}$. נוכיח $h(f) \subseteq h(g) \iff f \preceq g$.

- $\implies$: נניח $f \preceq g$, נוכיח $h(f) \subseteq h(g)$. מתוך ההנחה, $\forall y \in Y.f(y) \leq_X g(y)$. נניח בשלילה קיים $y \in h(f) \wedge y \notin h(g)$. לפי הטווח של h המוגדר לעיל, $y \in Y$, כלומר נסיק $f(y) \leq_X g(y)$. ידוע $g(y) = 0 \vee g(y) = 1$, ולכן נוכל לפלג למקרים:
  - אם $g(y) = 0$, אזי $f(y) = 0$ לפי הגדרת הגדרת יחס הסדר $\preceq$, ולכן $y \notin h(f)$ לפי הגדרה וזו סתירה.
  - אם $g(y) = 1$, אזי $y \in h(g)$ לפי הגדרת h וזו סתירה.

  וסה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים כלומר $g(f) \subseteq h(g)$ כדרוש.
- $\impliedby$: נניח $h(f) \subseteq h(g)$, נוכיח $f \preceq g$. מתוך ההנחה, $\forall y \in h(f).y \in h(g)$ כלומר $\forall y.f(y) = 1 \implies g(y) = 1$ לפי הצבה בהגדרת h. נניח בשלילה $\neg f \preceq g$, כלומר נניח בשלילה $\exists y \in Y.\neg f(y) \leq_X g(y)$ ונראה סתירה. ידוע $f(y) = 0 \vee f(y) = 1$, ולכן נוכל לפלג למקרים:
  - אם $f(y) = 0$, אז בין אם $g(y) = 0$ או ש־$g(y) = 1$ מתקיים $f(y) = 0 \leq_X g(y)$ לפי הגדרת $\leq_X$.
  - אם $f(y) = 1$, אז לפי הטענה שהנחנו $g(y) = 1$, כלומר לפי הגדרת $\leq_X$ מתקיים $f(y) = 1 \leq_X 1 = g(y)$.

  סה"כ הגענו לסתירה בכל המקרים כלומר $f \preceq g$ כדרוש. ■

על

תהי $Y' \in \mathcal{P}(Y)$, כלומר נניח $Y' \subseteq Y$. נוכיח קיום $f \in Y \to \{0,1\}$ כך ש־$h(f) = Y'$. נבחר:

$$\mathrm{f} = \lambda y \in Y. \begin{cases} 1 & \text{if } y \in Y' \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לפיכך, לפי תחשיב למדא: $h(f) = \{y \in Y \mid f(y) = 1\} = \{y \in Y \mid y \in Y'\} = Y'$ כדרוש. ■

חח״ע

יהיו $f, g \in Y \to \{0,1\}$ פונקציות, נניח $f \neq g$ ונוכיח $h(f) \neq h(g)$. מההנחה קיים $\tilde{y} \in Y$ כך ש־$f(\tilde{y}) \neq g(\tilde{y})$. נניח בשלילה $h(f) = h(g)$, לפיכך:

$$\begin{aligned} & h(f) = h(g) && && (1) \\ \iff & \{y \in Y \mid f(y) = 1\} = \{y \in Y \mid g(y) = 1\} && (\beta \text{ rule}) && (2) \\ \iff & \forall y \in Y. f(y) = 1 \longleftrightarrow g(y) = 1 && (= \text{definition}) && (3) \end{aligned}$$

ובפרט עבור $y = \tilde{y}$, כלומר $g(y) = 1 \longleftrightarrow f(y) = 1$. נפלג למקרים: אם $f(y) = 1$ אזי $g(y) = 1$ ומטרנזיטיביות $f(y) = g(y)$ וזו סתירה. אם $f(y) = 0$ אז $\neg g(y) = 1$, ומשום ש־$g(y) \in \{0,1\}$ אזי $g(y) = 0$ וסה"כ $f(y) = g(y)$ וזו סתירה. לכן, בכל המקרים הגענו לסתירה כלומר $h(f) \neq h(g)$ כדרוש. ■

שאלה 6

סעיף (א)

נגדיר על הקבוצה $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ את היחס הבא:

$$f \leq^* g \iff \exists n \in \mathbb{N}. \forall m \geq n. f(m) \leq_{\mathbb{N}} g(m)$$

כאשר $\leq_{\mathbb{N}}$ הוא יחס הסדר הסטנדרטי על הטבעיים. נפריך $\leq^*$ יחס סדר אנטי־סימטרי חלש, ע"י הפרכת אנטי־סימטריות. נבחר:

$$\mathrm{f} = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n = 1 \\ n & \text{else} \end{cases}, g = id_{\mathbb{N}}$$

בעבור $n_1 = 2$ מתקיים $\forall m \geq n_1. f(n) \leq_{\mathbb{N}} g(m) \wedge g(m) \leq_{\mathbb{N}} f(n)$, כלומר $f \leq^* g \wedge g \leq^* f$ אך $f \neq g$ כי $f(0) = 1 \neq 0 = g(0)$. סה"כ סתירה ולכן $\leq^*$ אינו יחס סדר חלש ■

סעיף (ב)

נגדיר את היחס R על $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$fRg \iff \exists n \in \mathbb{N}. \forall m \geq n. f(m) = g(m)$$

נוכיח R יחס שקילות.

- רפלקסיביות: יהי $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, נוכיח fRf. לפי הגדרה, $\forall m \in \mathbb{N}.f(n) = f(n)$, ובפרט בעבור $m \geq n = 1 \in \mathbb{N}$, כלומר $(n=1) \quad \forall m \geq n.f(n) = f(n)$ כדרוש.
- סימטריות: יהי $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח fRg, כלומר קיים n_1 כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) = g(m)$ ומקומוטטיביות הזהות על הטבעיים $\forall m \geq n_1 g(n) = f(n)$ כלומר אשר צ.ל. מתקיים בעבור $n = n_1$.
- טרנזיטיביות: יהי $f, g, h \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $fRg \land gRf$ ונוכיח fRh. מההנחה קיימים n_1, n_2 כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) = g(n)$ וגם $\forall m \geq n_2.g(n) = h(n)$. בה"כ $n_1 \geq n_2$, ובפרט הטענה האחרונה מתקיימת בעבור $m \geq n_1 \geq n_2$. ע"פ חוקי הלוגיקה לקיבוץ כמתים $\forall m \geq n_1.f(m) = g(m) \land g(m) = h(m)$. מטרנזיטיביות יחס הזהות על $\mathbb{N}$ נגרר $\forall m \geq n_1.f(m) = h(m)$ וסה"כ מתקיים הדרוש בעבור $n = n_1$. ■

סעיף (ג)

נתבונן בקבוצה $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$, עליה נגדיר את היחס $\leq$ באופן הבא:

$$[f]_R \leq [g]_R \iff f \leq^* g$$

בלתי תלוי בנציגים

יהי $f, f', g, g' \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ונניח $f \leq^* g \land f' \in [f]_R \land g' \in [g]_R$, נוכיח $f' \leq^* g'$. מההנחה $f'Rf \land g'Rg$, כלומר קיימים n_1, n_2, n_3 עבורם:

$$\forall m \geq n_1.f(n) = f'(n) \land \forall m \geq n_2.g(n) = g'(n) \land \forall m \geq n_3.g(n) = f(n)$$

בה"כ $n_1 \geq n_2, n_2 \geq n_3$, ומטרנזיטיביות יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$ נקבל שכל הטענות מתקיימות בעבור $m \geq n_1$;

$$\forall m \geq n_1.f'(m) = f(m) \land g'(m) = g(m) \land g(m) = f(m)$$

כלומר ע"פ טרנזיטיביות יחס הזהות על $\mathbb{N}$, נגרר $\forall m \geq n_1.f'(m) = g'(m)$ כדרוש. ■

יחס סדר חלש

- רפלקסיביות: יהי $[f]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$, נוכיח $[f]_R \leq [f]_R$, כלומר נוכיח $f \leq^* f$. לפי שוויון פונקציות, $\forall m \in \mathbb{N}.f(n) = f(n)$, ובפרט בעבור $m \geq n = 1 \in \mathbb{N}$, ובהכללה עבור יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$, כלומר $(n=1) \quad \forall m \geq n.f(n) \leq_{\mathbb{N}} f(n)$ כדרוש.
- טרנזיטיביות: יהי $[f]_R, [g]_R, [h]_R \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. נניח $[f]_R \leq [g]_R, [g]_R \leq [h]_R$ ונוכיח $[f]_R \leq [g]_R$ ובאופן שקול נוכיח $f \leq^* g$. מההנחה $f \leq^* g, g \leq^* h$ קיימים n_1, n_2 כך ש־$\forall m \geq n_1.f(n) \leq_{\mathbb{N}} g(n)$ וגם $\forall m \geq n_2.g(n) \leq_{\mathbb{N}} h(n)$. ובה"כ $n_1 \geq n_2$, ובפרט הטענה האחרונה מתקיימת בעבור $m \geq n_1 \geq n_2$. ע"פ חוקי הלוגיקה לקיבוץ כמתים $\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} g(m) \land g(m) \leq_{\mathbb{N}} h(m)$. מטרנזיטיביות יחס הסדר $\leq_{\mathbb{N}}$ נגרר $\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} h(m)$ וסה"כ מתקיים הדרוש בעבור $n = n_1$.
- אנטי־סימטריות: יהי $[f]_R, [g]_R \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/R$. נניח $[f]_R \leq [g]_R \land [g]_R \leq [f]_R$, נוכיח $[f]_R = [g]_R$. מההנחה, $f \leq^* g \land g \leq^* f$. נסיק קיום n_1, n_2 כך ש־$\forall m \geq n_1.f(m) \leq_{\mathbb{N}} g(m)$, $\forall m \geq n_2.g(m) \leq_{\mathbb{N}} f(m)$. נתבונן ב־$n = \max\{n_1, n_2\}$ וסה"כ $\forall m \geq n.g(m) \leq f(m) \land f(m) \leq g(m)$, ומהאנטי־סימטריות יחס הסדר הסטנדרטי על $\mathbb{N}$ נקבל $\forall m \geq n.g(m) = f(m)$. באופן שקול, fRg, כלומר $[f]_R = [g]_R$ כדרוש. ■

הזהות חסם מלעיל על הפונקציות הקבועות

נגדיר $c_n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,$c_n = \lambda x \in \mathbb{N}.n$ ונגדיר $B = \{[c_n]: n \in \mathbb{N}\}$. יהי $n \in \mathbb{N}$, נוכיח $[c_n]_R \leq [id_{\mathbb{N}}]_R$. באופן שקול, נוכיח $c_n \leq^* id_{\mathbb{N}}$ כלומר קיום $a \in \mathbb{N}$ בעבורו $\forall m \geq a.c_n(m) \leq id_{\mathbb{N}}(m)$. נבחר $a = n$, נקבל צ.ל. $\forall m \geq n.c_n(m) \leq id_{\mathbb{N}}(m)$ ובאופן שקול: $\forall m \geq n.n \leq m$ כלומר $m \geq n \implies m \geq n$ המהווה פסוק אמת כדרוש. ■

האם מחלקת השקילות של הזהות נמצאת ב־B?

לא. נניח בשלילה שכן. לפיכך, נסיק מהנחת השלילה:

$$\begin{aligned}
&[id_{\mathbb{N}}] \in B && && (1)\\
\iff &\exists n \in \mathbb{N}.[c_n]_R = [id_{\mathbb{N}}]_R && \big(B \text{ definition}\big) && (2)\\
\iff &\exists n \in \mathbb{N}.c_n R d_{\mathbb{N}} && \big([f]_R = [g]_R \longleftrightarrow fRg\big) && (3)\\
\iff &\exists n \in \mathbb{N}.\exists a \in \mathbb{N}.\forall m \geq a.c_n(m) = g(m) && \big(R \text{ definition}\big) && (4)\\
\iff &\exists n \in \mathbb{N}.\exists a \in \mathbb{N}.\forall m \geq a.n = m && \big(c_n, id_{\mathbb{N}} \text{ definition}\big) && (5)
\end{aligned}$$

נתבונן ב־$m = a + n \geq a$, ותחת הנחת השלילה מתקיים $m = a + n = n$, נחסר אגפים ונקבל $a = 0$. לכן $\forall m \geq 0.n = m$, ובפרט בעבור $m = n + 1 \geq 0$, כלומר $n = n + 1$. נחסר אגפים ונקבל $1 = 0$ וזו סתירה. ■

~ סוף ~