חדו"א 1א

שחר פרץ

26 לאוקטובר 2025

שם מרצה: ליאור קמה

אימייל: liorkammma@tauex.tau.ac.il

ניוטון פיתח לראשונה את החדו"א ככלי לנתח כוכבי לכת וקליעים. תוך כדי כך לייבניץ פיתח את החדו"א. ההגדרות לא היו פורמליות בכלל. זה השתנה לאחר פרדוקס ראסל, ולאחרי שזרם הפורמליזם של הילברט בגטינגן השתלט על הכל.

1 מבוא

1.1 שדות סדורים שלם

דיברנו על מערכת המספרים הממשיים בלינארית. נדבר על הקבוצה $\mathbb{R}$. הקבוצה היחידה שניתנת לנו מהמשיים היא $\mathbb{N}$ (מהאקסיומות של תקבצ). מהטבעיים בונים את הקבוצות האחרות, כמו השלמים והרציונליים. לבנות את הממשיים זה יותר בלגן, זה לא קשה, בעיקר לוקח זמן.

אופציה אחרת, היא במקום לבנות את $\mathbb{R}$, ניגש בקבוצה האקסיומטית, כמו שראינו בתורת החוגים. נניח כל מני דברים על הקבוצה הזו, נקווה שהיא קיימת, ונוכיח כל מני טענות על גבי זה.

אינטואיטיבית נחשוב על זה כעל כל מספר שיכול להתבטא באורך של קטע.

יש לנו שתי פעולות, $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ו־$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. עקרונית $+(3, 5)$ כיתוב חוקי, אבל כתיב פולני של $3 + 5$ מקובל מספיק. הקבוצה $\mathbb{R}$ היא חבורה בחיבור, חבורה בכפל, ודיסטרבוטיבית. כלומר לכל x, y, z מתקיים:

1. קומטטיביות: $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x + y = y + x$
2. אסוציאטיביות: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \colon x + (y + z) = (x + y) + z$
3. קיום איבר 0 (יחידת חיבור): $\exists 0 \in \mathbb{R} \colon \forall x \in \mathbb{R} x + 0 = x$
4. קיום נגדי (הופכי לחיבור): $\forall x \in \mathbb{R} \colon \exists y \in \mathbb{R} \colon x + y = 0$

כבר בעזרת ההנחות האלו אפשר לעשות דברים.

משפט 1. לכל $x, y, z \in \mathbb{R} \colon (x + y = z + y) \implies x = z$

הוכחה. יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$. נניח $x + y = z + y$. מ־4 קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש־$0 = y + t$. נרכיב את $+$ עם t על שני האגפים ונקבל $(x + y) + t = (z + y) + t$ מח"ע הפונקציה. מ־2 נקבל $x + (y + t) = z + (y + t)$ כלומר $x + 0 = t + 0$ ולכן מ־3 $x = z$ כדרוש. ■

מסקנה 1. לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$x + y = 0$.

סימון 1. יהי $x \in \mathbb{R}$. את המספר y המקיים $x + y = 0$ נכנה הנגדי של x ונסמן $-x$.

נמשיך עתה עם אקסיומות כפל.

5. קומוטטיביות: $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x \cdot y = y \cdot x$
6. אסוציאטיביות: $\forall x, y, z, \in \mathbb{R} \colon (xy)z = x(yz)$
7. קיום ניטרלי לחיבור (קיום יחידה בכפל): $x \cdot 1 = x$
8. קיום הופכי בכפל: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \exists y \in \mathbb{R} \colon xy = 1$

משפט 2. לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$, אם $xy = zy \land y \neq 0$ אז $x = z$.

שימו לב לדרישה $y \neq 0$.

הוכחה. תרגיל לבית ■

מסקנה 2. לכל $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ קיים $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ יחיד, כך ש־$xy = 1$.

סימון 2. יהי $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, את המספר המקיים $xy = 1 \land y \neq 0$ נכנה ההופכי של x ונסמן x^{-1}.

עתה נוסיף את התכונה האחרונה שנדרשה מאיתנו:

9. דיסטרבוטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x(y+z)=xy+xz$

תשעת האקסיומות הללו מגדירות על $(\mathbb{R},+,\cdot)$ מבנה הקרוי שדה. הוא למעשה חוג עם הופכי בכפל, ומקיים כל מני תכונות נחמדות שראינו באלגברה לינארית 1א.

משפט 3. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $x\cdot 0=0$.

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{R}$. לפי 3 $0+0=0$ כלומר $x\cdot(0+0)=x\cdot 0$ מהיות כפל פונקציה ולכן חד־ערכי. לפי 9 $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0$. לפי 3 $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0+0$. מהטענה הראשונה שהוכחנו $x\cdot 0=0$. ■

משפט 4. $\forall x\in\mathbb{R}\colon (-1)\cdot x=-x$.

הוכחה. יהי x. מטענה קודמת, $x\cdot 0=0$. מההגדרה, $0=1+(-1)$. לכן $x(1+(-1))=0$. לפי 9, $x\cdot 1+x\cdot(-1)=0$. לפי 7 ו־5 $x+(-1)x=0$. הוכחנו את יחידות הנגדי ולכן $(-1)\cdot x=-x$. ■

עתה, נגדיר יחס סדר (כמו שעשינו בבדידה 1). קבוצה R קרויה יחס אם $R\subseteq A\times A$ עבור A כלשהו. ואכן, טוענים $<\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. במקום לכתוב $(2,3)\in<$ נכתוב $2>3$.

10. אנטי־סימטריות חזקה: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y\implies x\not<y$
11. טרנזטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\land y<z)\implies x<z$
12. מליאות: $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon x<y\lor x=y\lor y<x$
13. אדטיביות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon x<y\implies x+z<y+z$
14. ססקווי־כפליות: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\colon (x<y\land 0<z)\implies xz<yz$

הקבוצה $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$ נקראת שדה סגור.

משפט 5. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. אם $x<y$ אז $-y<-x$.

הוכחה. נניח $x<y$. לפי 13 $x+(-y)<y+(-y)$, כלומר $x+(-y)<0$. לפי 1, 13 מתקיים $-x+(x+(-y))<-x+0$. לפי $2,3$ מתקיים $(-x+x)+(-y)<-x$ וסה"כ $0+(-y)<-x$ ומ־3 נקבל $-y<-x$ כדרוש. ■

משפט 6. לכל $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, אם $x<y\land z<w$ אז $x+z<y+w$.

שימו לב שזה לא עובד בכפל, אלא אם מניחים שהכל חיובי (לבית).

יש לציין שגם $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ הוא יחס סדר סדור.

אז מה מיוחד ב־$\mathbb{R}$? תמתינו, אבל הרעיון הוא שהוא יותר "רציף". המהות של החשבון הדיפרנציאלי הוא הרצף הזה. את ה"נעילה" הזו של האקסיומות כך שרק $\mathbb{R}$ יקימן (עד לכדי איזו') יתבצע ע"י הוספת אקסיומת השלמות.

1.2 קבוצות חסומות וחסמים

הגדרה 1. תהא $A\subset\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלעיל של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\leq\alpha$.

הגדרה 2. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נאמר ש־α חסם מלרע של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $\alpha\leq a$.

הגדרה 3. A תקרא חסומה מלעיל כאשר קיים לה חסם מלעיל.

הגדרה 4. A תקרא חסומה מלרע אם קיים לה חסם מלרע.

הגדרה 5. A תקרא חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

הגדרה 6. α ייקרא חסם עליון (סופרמום) כאשר:

1. α חסם מלעיל, כלומר $\forall a\in A\colon a\leq\alpha$
2. החסימה הדוקה, כלומר $\forall\varepsilon>0\,\exists a\in A\colon a>\alpha-\epsilon$

נבחין ש־2 לא שקול ל"קיים $a\in A$ כך ש־$a=\alpha$". לדוגמה, $A=\{x\in\mathbb{R}\colon x<1\}$. מטרנזטיביות כל $\alpha>1$ הוא חסם עליון, אך רק אחד הוא סופרמום, על אף ש־$1\notin A$. עם זאת, הכיוון השני עובד: אם $\alpha\in A$ חסם עליון של A (קוראים למספר כזה מקסימום), אז α סופרמום. כלומר, מקסימום הוא סופרמום, אבל סופרמום לא בהכרח מקסימום.

האינטואציה ל־2 – לא משנה כמה מעט נוריד (כמה ה־ε קטן), ברגע שנוריד משהו מ־α, נקבל משהו שהוא כבר לא חסם מלעיל. כלומר, החסם העליון הוא "החסם המלעיל הקטן ביותר". כמו שנראה בהמשך, האינטואציה הזו אולי עוזרת להבין את ההגדרה, אבל היא אינטואציה מטעה מאוד.

למה 1. 1 חסם עליון של הקבוצה לעיל

הוכחה. יהי $\alpha \in A$. אז $a < 1$ ולכן $a \leq 1$ ומכאן הוא חסם מלעיל. נותר להוכיח שהחסימה הדוקה. יהי $\varepsilon > 0$. אז $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. לכן $1 > 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$. לכן $1 - \frac{\varepsilon}{2} \in A$, וגם $1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$. לכן 1 חסם עליון. ■

משפט 7. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. אם יש ל־A חסם עליון, יש לה חסם עליון יחיד.

הוכחה. נניח α חסם עליון של A וגם β חסם עליון של A. נניח בשלילה $\alpha < \beta$. נסמן $\varepsilon = \beta - \alpha$ ומההנחה $\epsilon > 0$. נקבל קיום $a \in A$ כך ש־$a > \beta - (\beta - \alpha)$ ולכן $a > \alpha$, בסתירה לכך ש־α חסם מלעיל של A חסם מלעיל של A. ■

סימון 3. תהר $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נסמן את החסם העליון של A ב־$\sup A$.

לבית – תגדירו באופן דומה חסם תחתון.

סימון 4. חסם תחתון (שהגדרתם בבית) יקרא אינפימום ויסומן ב־$\inf A$.

עתה, נוכל להגדיר את האקסיומה ה־15 של הממשיים.

15. אקסיומת השלמות (או אקסיומת החסם העליון): לכל $A \subseteq \mathbb{R}$. אם $A \neq \varnothing$ וגם A חסומה מלעיל, אז ל־A קיים חסם עליון.

למה 2. לכל $x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$.

(כלומר, $\sqrt{2}$ מספר אי־רציונלי)

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{Q}$. נניח בשלילה $x^2 = 2$. קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש־$n \neq 0$ וגם $x = \frac{m}{n}$. ללא הגבלת הכלליות, m אי־זוגי או n אי־זוגי (לבית: לסגור את הפינה הזו באינדוקציה). לכן $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, כלומר $\frac{m^2}{n^2} = 2$. מכאן $m^2 = 2n^2$. לכן m^2 זוגי ולכן m זוגי (כי ריבוע לא משנה גורמים ראשוניים). סה"כ קיים k כך ש־$m = 2k$ כלומר $4k^2 = 2n^2$ ומכאן $n^2 = 2k^2$ ואז n זוגי וסתירה. לכן $x^2 \neq 2$. ■

למה 3. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$, אם $x > 0 \wedge y > 0 \wedge x^2 < y^2$ אז $x < y$.

משפט 8. $(\mathbb{Q}, \cdot, +, <)$ אינה מקיימת את אקסיומת השלמות.

הוכחה. נתבונן בקבוצה $A = \{\mathbb{Q} \ni x > 0 \colon x^2 < 2\}$. נתבונן ב־1. $1 \in \mathbb{Q}$ וכמו כן $1 > 0$ וגם $1^2 < 2$ כלומר $1 \in A$ ו־$A \neq \varnothing$. נתבונן ב־2. נראה ש־2 חסם מלעיל. יהי $a \in A$. ידוע $a^2 < 2$. נפצל למקרים. מקרה 1, נניח $a \geq 1$ ואז $a \leq a^2 < 2$. מקרה 2, נניח $a < 1$. אז $a < 2$ וסיימנו. לכן 2 חסם מלעיל של A כלומר A חסומה מלעיל.

נותר להוכיח שאין ל־A חסם עליון. יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$. נראה ש־α לא חסם עליון. ידוע ממשפט קודם $\alpha^2 \neq 2$. לכן, $\alpha^2 < 2 \vee \alpha^2 > 2$.

- אם $\alpha^2 < 2$. [טיוטה: היינו רוצים לקחת ממוצע חשבוני, עם $\sqrt{2}$. אבל $\sqrt{2}$ לא מוגדר. כלומר היינו רוצים למצוא δ כך ש־$(\alpha+\delta)^2 > 2$. זה יוצא $(\alpha+\delta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2 < 2$. מכאן $2\alpha\delta + \delta^2 < 2 - \alpha^2$. בגלל ש־$2 - \alpha^2$ קבוע חיובי יש לנו תקווה שזה אפשרי. נקווה $\delta < 1$ ואז $2\alpha\delta + \delta^2 \leq 2\alpha\delta + \delta < 2 - \alpha^2$ ואז $\delta < \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}$, וברגע שנדע שזה לא 0 בהכרח קיים $\delta > 0$ מתאים. ניקח את המינימום בין זה לבין 1 ונגמור עניין – סוף טיוטה].
  - אם $\alpha < 0$ אז α אינו חסם עליון, אחרת נסמן $\delta = \frac{1}{2}\min\left[1, \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}\right]$. אז $\delta \in \mathbb{Q}$ ו־$\delta > 0$, שכן מההנחה $2 - \alpha^2 > 0$ ולכן $\delta \neq 0$. לכן $\alpha + \delta \in \mathbb{Q}$ וגם $\alpha + \delta > \alpha > 0$. כמו כן, $(\alpha+\delta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2$. ידוע $\delta \leq \frac{1}{2}$ דהיינו $\delta^2 < \delta$. לכן:

    $$(\alpha+\delta)^2 < \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta = \alpha^2 + \delta(2\alpha+1) < \alpha^2 + \frac{2-\alpha^2}{2\alpha+1}(2\alpha+1) = \alpha^2 + 2 - \alpha^2 = 2$$

    לכן $\alpha + \delta \in A$ כלומר α אינו חסם מלעיל של A ולכן איננו חסם עליון.
  - בדומה למקרה הקודם, אם $\alpha \leq 0$ אז α אינו חסם עליון של A. נניח $\alpha > 0$. [טיוטה: הפעם נעשה הפוך, נרצה למצוא $\delta > 0$ כך ש־$(\alpha-\delta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 > 2$ ומכאן $2\alpha\delta - \delta^2 < \alpha^2 - 2$ צ.ל. חייבים להניח $\delta < \alpha$, בלי קשר $2\alpha\delta - \delta^2 < 2\alpha\delta < \alpha^2 - 2$ וסה"כ $\delta < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$. – סוף טיוטה]

    נפנה לאשכרה הוכחה. נבחר $\delta = \frac{1}{2}\min\left[\alpha, \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}\right]$. נראה ש־$\alpha - \delta$ גם חסם מלעיל. אז $\delta < \alpha$ ולכן $\alpha - \delta > 0$. כמו כן:

    $$(\alpha-\delta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\delta = \cdots$$

    ידוע $\delta < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$ כלומר $2\alpha\delta < \alpha^2 - 2$ וגם $-2\alpha\delta > 2 - \alpha^2$.

    $$\cdots > \alpha^2 + (2 - \alpha^2) = 2$$

    נותר להראות ש־$\alpha - \delta$ אשכרה חסם עליון. יהי $a \in A$. אז $a^2 < 2 < (\alpha-\delta)^2$. מהיות $\alpha - \delta > 0$ כי בחרנו את δ כך ש־$\alpha > \delta$, ידוע $\alpha < \alpha - \delta$ (מהלמה השנייה שהוכחנו). לכן $\alpha - \delta$ חסם מלעיל של A, ו־α אינו חסם עליון של A.

■

לסיכום – אקסיומת השלמות היא ההבדל המשמעותי בין $\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{Q}$. לבינתיים, נניח ש־$\mathbb{R}$ שדה סדור מלא שמקיים את אקסיומת החסם העליון, ואפשר להראות קיום, ואף להראות שכל השדות המתאימים איזומורפים אחד לשני.

משפט 9. לכל $x \in \mathbb{R}$, אם $x > 0$ אז קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y > 0$ וגם $y^2 = x$.

הוכחה. לא נוכיח במדויק, נוכיח רק בערך. נגדיר את $A = \{A \colon a^2 < x\}$. ממש כמו שהוכחנו קודם, אפשר להראות ש־A חסומה מלעיל, וב־$\mathbb{R}$ יש לה חסם עליון. צ.ל. שריבוע החסם העליון הזה, הוא x. ■

יש הכללה למשפט הזה:

משפט 10. לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכל $n \in \mathbb{N}_+$, אם $x > 0$ אז קיים $y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש־$y > 0$ וגם $y^n = x$.

ההכלה הזו יותר מסובכת, וצריך בשביל זה את הבינום של ניוטון. זה הרבה עבודה ידנית.

סימון 5. נסמן את ה־y היחיד שמקיים את המשפט לעיל ב־$\sqrt[n]{x}$.

כמה מילים לגבי חזקות. חזקות שלמות אפשר להגדיר רקורסיבית. חזקות רציונליות אפשר להגדיר בפחות או יותר באופן הבא:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^m$$

שקיים מהמשפטים שלנו. בשביל ההגדרה הזו, צריך להראות שזה לא תלוי בייצוג של הרציונלי – לא איכפת לנו בעבור אילו n, m אנו מגדירים את זה, כלומר $\forall m, n, k, \ell \colon \frac{m}{n} = \frac{k}{\ell} \implies \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\ell]{a^k}$.

1.3 מסקנות על מספרים טבעיים בתוך הממשיים

בפעם שעברה דיברנו על אפיון אקסיומתי של $\mathbb{R}$, ובמיוחד אקסיומת השלמות שמייחדת את $\mathbb{R}$ באופן ספציפי. מה שניתן מהשמיים זה $\mathbb{N}$, השאר נבנים ידנית או אקסיומתית.

באופן כללי, אקסיומות שמבטיחות קיום לא קונסטרוקטיבי לכל מיני דברים, כמו אקסיומת המקבילים, אקסיומת הבחירה, וגם אקסיומת השלמות – במקרים רבים "לא באמת נדרשות", וההנחה שלהן מאפשרת קיום מבנים ספציפיים.

הנושא הבא הוא סדרות. לכן לפני כן נדבר על כמה תכונות של המספרים הממשים כת"ק בתוך $\mathbb{R}$.

- **הארכימדיאניות של הטבעיים בממשיים:** $\forall x, y \in \mathbb{R} \colon x > 0 \implies (\exists n \in \mathbb{N} \colon nx > y)$
  למרות שזה נשמע אינטואיטיבי, צריך את אקסיומת השלמות בשביל זה.

  הוכחה. נניח בשלילה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $nx \le y$. נסמן $A := \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$. מהנחת השלילה y חסם מלעיל של A, בפרט $x \in A$ ולכן $A \neq \varnothing$. מאקסיומת השלמות קיים חסם עליון α ל־A. [טיוטה: (I) $\forall a \in A \colon a \le \alpha$ וגם (II) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$a \ge \alpha - \varepsilon$, אין לנו יותר מדי משתנים לעבוד איתם, אז ננסה להתעסק עם x.] נתבונן ב־x. יהי $a \in A$, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = nx$. נבחין ש־$(n+1)x \in A$ ולכן $(n+1)x \le \alpha$ כלומר $nx \le \alpha - x$ ועבור $\varepsilon = x$ מצאנו $a - \varepsilon$ שהוא חסם עליון שקטן ממש מהחסם מלעיל α כלומר סתירה להיות α חסם מלעיל. לכן A אינה חסומה מלעיל, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $nx > y$. ■

  אז, למה צריך את אקסיומת השלמות למרות שזה מתקיים גם ברציונליים? כי ברציונליים הקיום קונסטקרטיבי, והם קשורים הדוקות לטבעיים. בניגוד לקבוצה סגורה מלא כללית.

- **הסדר הטוב של הטבעיים:** לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ אם קיים $A \neq \varnothing$ אז קיים איבר מינימלי ב־A.

  מסקנה 3. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ אם $A \neq \varnothing$ וחסומה מלרע, אז קיים איבר מינימלי ב־A.

  מסקנה 4. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ אם $A \neq \varnothing$ וחסומה מלעיל, אז קיים איבר מקסימלי ב־A.

משפט 11. $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists! k \in \mathbb{Z} \colon k \le x < k+1$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$. נסמן $A = \{m \in \mathbb{Z} \colon m > x\}$. ברור ש־$A \subseteq \mathbb{Z}$, נרצה להראות $A \neq \varnothing$. מארגימדיאניות קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n > x$ ולכן $A \neq \varnothing \implies n \in A$. A חסומה מלרע ע"י x. לכן קיים איבר מינימלי t כלשהו ב־A. נסמן $k = t - 1$. נתבונן ב־k. ידוע $k < t$ ו־k המינימום של A, כלומר $k \notin A$. מכאן $k \le x$. כמו כן $k + 1 = t \in A$ לכן $x < k+1$. הראינו קיום, עכשיו יש להראות יחידות.

יהי $\ell \in \mathbb{Z}$. נניח $k \neq \ell$, אז $\ell < k \vee k < \ell$.

- אם $\ell < k$ אז $\ell + 1 \le k$ ולכן $\ell + 1 \le x$. בפרט $x \not< \ell + 1$.
- אם $k < \ell$ אז $k + 1 \le \ell$ ולכן $x < \ell$ בפרט $\ell \not\le x$.

סה"כ כל $k \neq \ell$ לא מקיים את הדרוש ולכן ℓ יחיד. ■

סימון 6. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז השלם היחיד k המקיים $k \le x < k+1$ יסומן ב־$\lfloor x \rfloor$ והוא יקרא ערך שלם תחתון.

באותו האופן ניתן להגדיר ערך שלם עליון, $\lceil x \rceil$.

משפט 12 (צפיפות הממשיים)**.** יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. אם x, y אז קיים $z \in \mathbb{R}$ כך ש־$x < z < y$.

הוכחה. נניח $x < y$. נתבונן ב־$\frac{x+y}{2}$. נסמן $z = \frac{x+y}{2}$ ומתקיים:

$$x = \frac{2x}{2} = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{y+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

■

משפט 13 (צפיפות הרציונליים בממשיים). נניח $x < y$. אז $y - x > 0$ ולכן מהארגימדיאניות קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$n(y-x) > 1$. במקרה הזה $ny > nx + 1$ ולכן זה לא מפתיע שקיים טבעי באמצע, ואכן נוכל לסמן $m = \lceil yn \rceil - 1$ (שימו לב שבמקרה של yn טבעי, זה לא הערך השלם התחתון). אז:

$$x < y - \frac{1}{n} = \frac{ny-1}{n} \geq \frac{\lfloor ny \rfloor - 1}{n} < \frac{ny+1-1}{n} = y$$

כמו כן $\frac{\lfloor ny \rfloor - 1}{n} \in \mathbb{Q}$.

בתרגול נוכיח את נכונות המשפט עבור $z \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

2 סדרות

אחת ההגדרות האינטואטיביות לסדרה היא n־יה סדורה, אבל זו יכולה להיות רק סופית.

לכן, נגדיר סדרה ממשית להיות פונקציה שתחומה $\mathbb{N}$ וטווחה $\mathbb{R}$. סדרות נסמן לרוב באותיות a, b, c במקום f, g, h. במקום לסמן $a(n)$ בסימון פונקציות, נסמן a_n.

הגדרה 7. סדרה ממשית היא פונקציה $a(n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

הגדרה 8. לעיתים רבות תבחינו שמסמנים סדרות באמצעות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, או $\{a_n\}_{n=1}^{\inf}$, או אפילו סתם a_n.

הגדרה 9. בהינתן סדרה, $a_n := a(n)$

הגדרה 10. נאמר ש־a_n חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע כאשר הקבוצה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה/חסומה מלעיל/חסומה מלרע.

הגדרה 11. אם a_n חסומה מלעיל, נסמן $\sup a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה 12. אם a_n חסומה מלרע, נסמן $\inf a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

סימון 7. הסופרמום הוא $\sup A$ והוא חסם עליון, והאינפימום $\inf A$ הוא החסם התחתון.

הגדרה 13. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה (או מונוטונית עולה חלש) כאשר לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n < m \implies a_n \leq a_m$

הגדרה 14. סדרה a_n תקרא מונוטונית עולה ממש (או מונוטונית עולה חזק) כאשר לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n < m \implies a_n < a_m$

הגדרה 15. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת (או מונוטונית יורדת חלש) כאשר לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n < m \implies a_n \geq a_m$

הגדרה 16. סדרה a_n תקרא מונוטונית יורדת ממש (או מונוטונית יורדת חזק) כאשר לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n < m \implies a_n > a_m$

הגדרה 17. סדרה תקרא מונוטונית כאשר היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

"אני לא מאמין שעשיתי את זה. מחקתי LIFO. היה לי מרצה שהגדי ללעשות והיה מוחק עם המרפק מה שהוא כתב הרגע"

2.1 גבולות של סדרות

הגדרה 18. תהא a_n סדרה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של a_n כאשר $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N \colon\ |a_n - \ell| < \varepsilon$.

למה 4. $\forall x \in \mathbb{R}. (\forall \varepsilon > 0 \colon\ |x| < \varepsilon) \implies x = 0$

למה 5. מאי שוויון המשולש נקבל באופן מיידי:

$$|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$$

(זה גם ממש כמו המשפט בגיאומטריה לפיו אורך צלע קטנה מסכום האורכי הצלעות במשולש)

משפט 14. תהא a_n סדרה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם ℓ גבול של a_n אז ℓ גבול יחיד של a_n.

הוכחה. נניח a_n מתכנסת ל־ℓ. יהי $m \in \mathbb{R}$. נניח ש־m גבול של a_n. יהי $\varepsilon > 0$. אז $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, ולכן קיים איזשהו $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$, מתקיים $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_2$, מתקיים $|a_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. נסמן $N = \max N_1, N_2$. אז $N \geq N_1 \wedge N \geq N_2$, ומאי שוויון המשולש:

$$|m-\ell| \leq |a_n - \ell| + |a_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן, לפי התרגיל, $m - \ell = 0$ כלומר $m = \ell$. ∎

הגדרה 19. נאמר כי סדרה a_n מתכנסת כאשר קיים לה גבול $\ell \in \mathbb{R}$

הגדרה 20. אם a_n מתכנסת וגבולה (היחיד) הוא ℓ, נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

"אבל בפיזיקה עשינו את זה עד עכשיו וזה עבד"

למה 6. קבוצה חסומה אמ"מ $\exists M > 0 \colon \forall a \in A \colon\ |a| \leq M$.

משפט 15. תהא a_n סדרה. אם a_n מתכנסת, אז a_n חסומה.

הוכחה. מההנחה, קיים ℓ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. מהגדרת הגבול קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n$ מתקיים $|a_n - \ell| < 1$. נסמן $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |\ell|\}$. זו קבוצה סופית ולכן יש לה מקסימום. יהי $n \in \mathbb{N}$.

- **מקרה 1:** נניח $n < N$. אז $|a_n| \leq M$ פחות או יותר מהגדרת מקסימום.
- **מקרה 2:** נניח $N \leq n$. אז $|a_n - \ell| < 1$ ולכן $-1 < a_n - \ell < 1$. נקבל $-|\ell| - 1 < a_n < \ell + 1 \leq |\ell| + 1$ וסה"כ נקבל $|a_n| \leq |\ell| + 1 \leq M$.

סה"כ $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ |a_n| \leq M$ ולכן a_n חסומה. ■

תרגיל: הראו כי:

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

הוכחה. צ.ל. שלכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N\colon\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. אז יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$. יהי $n \geq N$. אז:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \frac{1}{\varepsilon^{-1}} = \varepsilon$$

■

- נגדיר $a_n = (-1)^n$. נוכיח ש־a_n איננה מתכנסת.

הוכחה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$ כלשהו. נתבונן ב־$\varepsilon = 1$. יהי $N \in \mathbb{N}$. נפרק למקרים על ℓ.

  - אם $\ell \geq 0$, נתבונן ב־$n = 2N + 1$. אז $n \geq N$ וגם $|a_n - \ell| = \left|(-1)^{2N+1} - \ell\right| = |-1 - \ell| = \ell + 1 \geq 1$
  - אם $\ell < 0$, נתבונן ב־$n = 2N$. אז $n \geq N$ וגם $|a_n - \ell| = \left|(-1)^{2N} - \ell\right| = |1 - \ell| = 1 - \ell \geq 1$.

לכן a_n אינה מתכנסת ל־ℓ ולכן אינה מתכנסת. ■

מתבלבלים עם שלילה של הגדרת הגבול? נוכל להשתמש בחוקי השלילה של כמתים:

$$\neg(\forall \varepsilon > 0.\, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\colon\ |a_n - \ell| < \varepsilon) \iff (\exists \varepsilon > 0.\, \forall N \in \mathbb{N}.\, \exists n \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - \ell| \geq \varepsilon)$$

"אין לי שום דבר נגד הוכחות בשלילה. אני תמיד נמנע מהן". "למה את □1" – "כי למה לא" – "כי למה לא 1 זה נכון". "וזו ההתייחסות הנכונה להוכחות. אנחנו כותבים שירה". "לאחד חלקי איש יש $\frac{1}{10}$ אצבעות".

משפט 16. תהא a_n סדרה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. נניח כי $\ell \neq 0$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$.

במילים אחרות – a_n הוא bounded away from zero. באופן כללי אפשר גם להוכיח את זה עם $\frac{|\ell|}{\pi}$ או כל מספר אחר במכנה. אבל הרעיון העיקרי הוא, ש־a_n לא יכול להתקרב ל־0 החל מנקודה כלשהי, אם הסדרה שואפת לנקודה שאיננה אפס.

הוכחה. ידוע $\ell \neq 0$ ולכן $|\ell| > 0$. דהיינו $\frac{|\ell|}{2} > 0$. אז עבור $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$. נתבונן ב־$n$. יהי $n \geq N$, אז:

$$|a_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \implies -\frac{|\ell|}{2} < a_n - \ell < \frac{|\ell|}{2}$$

אפשר גם להשתמש בא"ש המשולש, אבל זה פחות אינטואיטיבי. נפרק למקרים.

- נניח $\ell > 0$. אז $a_n > \ell - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. לכן $|a_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$ וסיימנו.
- נניח $\ell < 0$. אז $a_n < \ell + \frac{|\ell|}{2} = -\frac{|\ell|}{2} < 0$. ולכן $|a_n| > \frac{|\ell|}{2}$

■

איך מוכיחים זאת עם א"ש המשולש? באמצעות הטריק הבא:

$$|\ell| - |a_n - \ell| \overset{(1)}{=} ||\ell| - |a_n - \ell|| \overset{(2)}{\leq} |\ell - (a_n - \ell)| = |a_n| < \frac{|\ell|}{2}$$

כאשר (1) נכון כי החל מנקודה כלשהי $a_n - \ell < \ell$ (עבור $\epsilon = \ell$) ו־(2) נכון מא"ש המשולש ההפוך.

"אל תגידו א"ש המשולש. תגידי לי פד"ח ואני מנשל אותך מהירושה. אנחנו לא אומרים את זה יותר בחדר הזה" $\sim$ המרצה.

2.2 אריתמטיקה של גבולות

זה הקטע שבו אנחנו רואים שגבול הוא לינארי.

משפט 17. תהאנה $a_n, \mathcal{B}$ סדרות. יהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$ ממשיים. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = m$. אז:

1. $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$$

2. $$\forall \alpha \in \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty}(\alpha a_n) = a\ell$$

3. $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell \cdot m$$

4. $$m \neq 0 \implies (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N\colon b_n \neq 0) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}\right)$$

הערה 1. כדי להגדיר את הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, דבר ראשון ראינו שמנקודה מסויימת N מתקיים $b_n \neq 0$. אבל מה קורה לפני N? זה לא כזה משנה, נוכל לצורך הנקודה לקבע את הסדרה:

$$\frac{a_n}{b_n} := \begin{cases} 0 & n < N \\ \frac{a_n}{b_n} & n \geq N \end{cases}$$

בכל מקרה חדו"א מתעסקת במה שקורא החל מנקודה מסויימת, ולא איכפת לנו מה קורה ב־N האיברים הסופיים הראשונים.

1. הוכחה שלי. נוכיח אדטיביות. יהיו a_n, b_n סדרות עם גבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} b_n = m$. נראה ש־$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \ell + m$. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול ידוע שקיימים N_1, N_2 טבעיים שהחל מהם $\forall n \geq N_1\colon a_n - \ell < \frac{\epsilon}{2}$ וכן $\forall n \geq N_2\colon b_n - m < \frac{\epsilon}{2}$. בפרט עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים:

$$\forall n \geq N\colon (a_n + b_n) - (\ell + m) = \underbrace{(a_n - \ell)}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{(b_n - m)}_{<\frac{\epsilon}{2}} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

סה"כ מצאנו N שהחל ממנו $(a_n + b_n) - (\ell + m) < \epsilon$, ומהגדרת הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \ell + m$ כדרוש. ■

2. הוכחה שלי. תהי a_n סדרה עם גבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. נוכיח $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha\ell$. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול ומהנתון, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \geq N\colon a_n - \ell < \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

$$\alpha a_n - \alpha\ell = \alpha\underbrace{(a_n - \ell)}_{<\epsilon} < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$$

סה"כ מהגדרת הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ell$ כדרוש. ■

3. הוכחה. [טיוטה: $|a_n b_n - \ell m| = |a_n b_n - a_n m + a_n m - \ell m| \leq |a_n b_n - a_n m| + |a_n m - \ell m| = |a_n|\,|b_n - m| + |m|\,|a_n - \ell|$ ואז נקבל $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$, ולגבול השני נבחר חסם בהתאם לגבול]

יהי $\varepsilon > 0$. אז a_n מתכנסת ולכן חסומה, כלומר קיים $k > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $|a_n| \leq k$.

a_n מתכנסת ל־ℓ ולכן עבור $\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)} > 0$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$

נבחין ש־b_n מתכנסת ל־m לכן עבור $\frac{\varepsilon}{2k} > 0$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2k}$.

עתה נתבונן ב־$N = \max\{N_1, N_2\}$. יהי $n \geq N$. אז:

$$|a_n b_n - \ell m| = |a_n b_n - a_n m + a_n m - \ell m| \leq |a_n b_n - a_n m| + |a_n m - \ell m| = |a_n|\,|b_n - m| + |m|\,|a_n - \ell|$$

כיוון ש־$n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}$, ולכן $|m|\,|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. כיוון ש־$n \geq N_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2k}$ ולכן $|a_n|\,|b_n - m| \leq k\,|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$. מכאן $|a_n b_n - \ell m| < \varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell m$. ■

4. הוכחה שלי. יהיו a_n, b_n סדרות. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} b_n = m$, וכן $m \neq 0$. נוכיח שהחל מאיזושהי נקודה N_0 מתקיים $\forall n \geq N\colon b_n \neq 0$, וגם ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$.

ראשית כל, נוכיח שקיים N_0 שממנו $\forall n \geq N_0\colon b_n \neq 0$. נניח בשלילה שלא כך, ונוכיח שבעבור $\varepsilon = \frac{|m|}{2}$ מתקיים שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$|b_n - m| \not< \varepsilon$. למעשה, נוכל להראות זאת כמעט במיידי: מהנחת השלילה, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$b_n = 0$, ושם אכן:

$$|b_n - m| = |0 - m| = |m| > \varepsilon = \frac{|m|}{2} \quad \perp$$

וסתירה להגדרת הגבול ולכך ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = m$.

עתה, נוכיח $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$. יהי $\varepsilon > 0$. נבחין שהסדרה $\frac{1}{b_n}$ מוגדרת רק לאחר ה־N_0 שהוכחנו את קיומו קודם לכן, ולכן נקבע את $b_{n<N_0} = 0$ (אסימפטוטית זה לא משנה בכל מקרה). בגלל ש־$\lim_{n\to\infty} b_n = m$, בהכרח החל מנקודה N_1 כלשהי מתקיים ממשפט שהראינו ש־$b_n > \frac{m}{2}$. נוסף על כך, החל מ־N_2 כלשהי $|b_n - m| < \frac{2\varepsilon}{m^2}$. בפרט, עבור $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$:

אכן מתקיים לכל $n \geq N$: (נבחין שהביטוי מוגדר לכל $n \geq N_0$ ובפרט לכל $n \geq N$):

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|b_n - m|}{|b_n m|} \overset{n \geq N_1}{<} \frac{|b_n - m|}{0.5m^2} \overset{n \geq N_2}{<} \frac{2\varepsilon \cdot \frac{1}{m^2}}{0.5m^2} = \varepsilon$$

כדרוש. עתה, מ־3, שהוכח ללא תלות בסעיף זה, נקבל ישירות ש־$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$, כנדרש, וסיימנו. ■

הגדרה 21. תהא a_n סדרה. נאמר כי a_n שואפת ל־$+\infty$ כאשר: $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N\colon a_n>M$

הגדרה 22. תהא a_n סדרה. נאמר כי a_n שואפת ל־$-\infty$ כאשר: $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N\colon a_n<-M$

משפט 18. תהיינה a_n,b_n סדרות. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty\wedge\lim_{n\to\infty} b_nb_n=+\infty$. אז $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=+\infty$

הוכחה. יהי $M>0$. קיים $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N_1\colon a_n>M$ וכן $\forall n\geq N_2\colon b_n>M$. נתבונן ב־$N=\max\{N_1,N_2\}$. אז $a_n+b_n>M+M=2M>M$ וסיימנו. ■

לבית: תעשו אותו הדבר עם כפל. לגבי חיסור וחילוק, אין תוצאה מוגדרת. indocument תהאנה a_n,b_n סדרות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם a_n אינה מתכנסת, וגם b_n אינה מתכנסת, אז a_n+b_n אינה מתכנסת.

תשובה: לא נכון. אפשר להראות שזה לא עובד, לדוגמה עבור $a_n=(-1)^n$ ו־$b_n=(-1)^{n+1}$, הראינו ש־a_n אינה מתכנסת ובאופן דומה b_n אינה מתכנסת. אבל, $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n+b_n=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=0$

ב. אם a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת, אז $(a_n+b_n)_{i=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת. **תשובה:**

הוכחה. נניח ש־a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת. נניח בשלילה ש־a_n+b_n מתכנסת. מכאן שיש גבול ℓ לסדרה, ומאריתמטיקה של גבול $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n-\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\cancel{a_n-a_n}+b_n)=\lim_{n\to\infty} b_n$ אך $\lim_{n\to\infty} b_n$ אינו מוגדר שכן b_n לא מתכנסת. ■

ג. אם a_n מתכנסת וגם b_n אינה מתכנסת, אז $a_n\cdot b_n$ מתכנסת.

תשובה: בניגוד להוכחה הקודמת, צריך בשביל להוכיח לטעון ש־$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ כדי שנוכל לחלק. לא מפתיע אם כן שעבור $b_n=(-1)^n, a=0$ נקבל סתירה שכן b_n לא מתכנסת, אך $a_n\cdot b_n=0$ הסדרה הקבוע.

ד. לבית: כמו הסעיף הקודם אבל $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$.

משפט 19. תהא a_n סדרה, יהי $\ell\in\mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$ אז $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\ell|$.

הוכחה. נניח $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$. יהי $\varepsilon>0$. אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\leq N\colon |a_n-\ell|<\varepsilon$. נתבונן ב־$N$. יהי $n\geq N$. מא"ש המשולש ההפוך:

$$||a_n|-|\ell||\leq|a_n-\ell|<\varepsilon$$

מההגדרה $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\ell|$ כדרוש. ■

הערה 2. הבעייתיות בכיוון השני היא אם a_n מחליפה סימן אינסוף פעמים. הוא נכון אם a_n שומרת סימן מגבול מסויים (מה ששקול לכך שיש לה גבול, ממשפט נחמד שהראינו בעבר).

משפט 20. תהאנה a_n,b_n,c_n סדרות. נניח כי־:

1. $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N\colon a_n\leq c_n\leq b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

אז $=\ell$

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N_2\colon |b_n-\ell|<\varepsilon$, ובאופן דומה קיים $N_3\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\in N_3\colon |a_n-\ell|<\varepsilon$. נסמן $N=N_1$ (מהנתון). נתבונן ב־$N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$. יהי $n\geq N$. אז נסיק $\ell-\varepsilon<b_n<\ell+\varepsilon$ וכן $\ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$ ואז:

$$\ell-\varepsilon<c_N\leq c_n\leq b_n<\ell+\varepsilon$$

כלומר $|c_n-\ell|<\varepsilon$ כדרוש. ■

2.3 גבולות ושוויונות

משפט 21. תהאנה a_n,b_n סדרות. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$. נניח כי:

(1) לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a_n<b_n$. (הערה: מספיק גם אם החל מ־N כלשהו התנאי הזה מתקיים)

(2) מתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$

(3) מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n=m$

אז $\ell\leq m$

הוכחה. נניח בשלילה $m<\ell$. נסמן $\varepsilon=\frac{\ell-m}{2}$, בהכרח $\varepsilon>0$. לכן $\exists N_1\in\mathbb{N}.\forall n\geq N_1\colon |a_n-\ell|<\varepsilon$. כמו כן $\exists N_2\in\mathbb{N}.\forall n\geq N_2\colon |b_n-m|<\varepsilon$. נתבונן ב־$N=\max\{N_1,N_2\}$. שם, מתקיים:

$$b_N<m+\varepsilon=\frac{\ell+m}{2}=\ell-\varepsilon<a_N$$

בסתירה ל־(1). וסיימנו. ■

למה היינו צריכים להניח בשלילה? כי עקרונית נרצה לקחת את $\frac{|\ell-m|}{2}$ ולעבוד עם זה, ולהפעיל על זה את הגדרת הגבול, אבל זה יכול להיות 0. לכן נרצה להניח בשלילה ש־$\ell > m$, כי כאן יש א"ש חזק ממש.

לועמת זאת, אם נניח ב־(1) במקום זאת $\forall n \in N\colon a_n < b_n$, עדיין נוכל לדעת $\ell \le m$ בלבד, למרות שהא"ש לכאורה חזק. לדוגמה, בעבור $a_n = \frac{1}{n}$ ו־$b_n = 0$ מתקיים שוויון חלש ולא חזק בגבול, על אף ש־$b_n < a_n$.

משפט 22. תהאנה a_n, b_n סדרות, ויהיו $\ell, m \in \mathbb{R}$. נניח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} b_n = m$. נניח גם $\ell < m$. נוכיח שהחל ממקום מסויים $\exists N \in \mathbb{N}.\, \forall n \ge N\colon a_n < b_n$.

הוכחה לבית.

משפט 23 (משפט ויירשטראס הראשון)**.** תהא a_n סדרה. אם a_n מונוטונית וחסומה, אז a_n מתכנסת.

הוכחה. בה"כ נניח ש־a_n מונוטונית עולה (אחרת ההוכחה בדומה). ידוע ש־a_n חסומה, ובהכרח מלמעלה, ולכן לפי אקסיומת השלמות חיים לה חסם עליון, נסמנו $\ell = \sup a_n$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$, כך ש־$a_n > \ell - \varepsilon$. נתבונן ב־N. יהי $n \ge N$. אז:

$$\ell - \varepsilon < a_N \le a_n \le \ell < \ell + \varepsilon$$

כלומר $|a_n - \ell| < \varepsilon$. לכן a_n שואפת ל־ℓ, כדרוש. ■

הגדרה 23. סדרה a_n תקרא בעלת גבול במובן הרחב אם $(\exists \ell \in \mathbb{R}\colon\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell) \vee \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$.

משפט 24. בהינתן סדרה מונוטונית לא חסומה, היא שואפת ל־$\pm\infty$.

מסקנה 5. תהי a_n מונוטונית. אז ל־a_n יש גבול במובן הרחב.

2.4 e

משפט 25. נגדיר $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ו־$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אז:

1. a_n חסומה, מונוטונית עולה וחסומה ב־3.
2. b_n חסומה, ומונוטונית עולה.
3. $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \le b_n$
4. $\forall n \in \mathbb{N}.\, \exists k > n\colon b_n \le a_{n+k}$

המסקנה מ־1, 2 הוא שיש להן גבול (ממשפט וויראשטראס). ממשפט אחר שהראינו, 3 ו־4 גוררים ש־a_n, b_n מתכנסות לאותו הגבול. נסמנו ב־e.

הגדרה 24. נסמן:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

תת־סדרות וגבולות חלקיים

הגדרה 25. תהי פונקציה $n_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ סדרה עולה ממש של טבעיים, ותהא a_n סדרה. אז הסדרה $a_{(n_k)}$ נקראת תת־סדרה של a_n. פורמלית, זוהי הרכבה $a_n \circ n_k$.

הגדרה 26. ℓ יקרא גבול חלקי של ℓ כאשר קיימת ת"ס של a_n המתכנסת ל־ℓ.

הגדרה 27. $\pm\infty$ יקרא גבול חלקי של a_n, כאשר קיימת ת"ס השואפת ל־$\pm\infty$.

לדוגמה, עבור $a_n = (-1)^n$, ו־a_{2k} ת"ס של a_n, אז $\lim_{n\to\infty} a_{2k} = 1$. לכן 1 גבול חלקי של a_n. באופן דומה -1 גבול חלקי של a_n ואפשר גם להוכיח יחידות.

הערה 3. לעיתים, לגבולות חלקיים קוראים נקודות גבול.

להלן משפט שקצת יוצא מתחומי החדו"א.

משפט 26 (משפט הרקורסיה)**.** תהא $f \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. יהי איזשהו $a \in \mathbb{R}$. אז קיימת סדרה יחידה a_n המקיימת:

$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} = f(n, a_n) \end{cases}$$

למה אנחנו צריכים את המשפט הזה? כי אם כותבים משהו כמו $a_0 = 2,\ a_{n+1} = 2^n a_n + 1$ (בהקשר הזה $f(x,y) = 2^x y + 1$), למה שבכלל תהיה a_n שתקיים את תנאי הנסיגה הזה? המשפט הזה דואג לכך שנוסחאות נסיגה יהיו מוגדרות היטב (קיימות ויחידות בהינתן כלל נסיגה עם תנאי בסיס). אפשר להכליל באינדוקציה לפונקציות נסיגה מדרגה k־ית.

השבוע יעלה למודל תרגיל מודרך העוסק בזה.

משפט 27 (משפט בוצלנו־וייראסטראס)**.** לכל סדרה חסומה, יש ת"ס מתכנסת.

למה 7. תהא a_n סדרה. נניח של־a_n אין איבר מקסימלי. אז יש לה תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

הוכחה. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N}\colon\ m > n \wedge a_m > a_n\}$. מהיות a_n ללא איבר מקסימלי, לכן קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_m > \max\{a_1 \dots a_n\}$. בפרט $a_m > a_n$ ולכן $m \in A$. מכאן שבהכרח A_n לא ריקה.

נגדיר $n_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ברקורסיה:

$$\begin{cases} n_1 = 1 \\ n_{k+1} = \min A_{(n_k)} \end{cases}$$

המינימום בהכרח מוגדר היטב מהיות $A_{(n_k)}$ לא ריקה. ממשפט הרקורסיה $(n_k)_{i=1}^{\infty}$ מוגדרת היטב. כדי להראות שהיא ת"ס, יש להראות שהיא מונוטונית עולה חזק. ואכן מהגדרה $n_{k+1} > n_k$. יתרה מכך, היא גם מונוטונית עולה חזק על a_n שכן מהגדרה $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. סה"כ $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ת"ס מונוטונית עולה ממש וסיימנו. ■

הערה 4. מה שהבטיח לנו את קיום המינימום, פרט לכך שהקבוצה לא ריקה, הוא שהסדר על הטבעיים **סדר טוב**.

למה 8. תהא a_n סדרה שבה אינסוף איברים שונים. אם ל־a_n אין ת"ס מונוטונית עולה ממש, אז יש לה ת"ס מונוטונית יורדת ממש.

הערה 5. ת"ס של ת"ס היא ת"ס

הוכחת משפט בולצאנו־וייראשטראס. תהא a_n סדרה. נפריד למקרים.

- נניח ש־$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (הטווח של a_n) סופית. אז קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש־$|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = \ell\}| = \aleph_0$. נבנה ברקורסיה ת"ס $\{a_{n_k}\}$ עבורה $a_{n_k} = \ell$ לכל $k \in \mathbb{N}$.
- אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין־סופי, אז מהלמה הקודמת קיימת ל־a_n ת"ס סדרה מונוטונית (ממש) a_{n_k}. בגלל ש־a_n חסומה אז בפרט a_{n_k} חסומה. לפי משפט קודם כל סדרה מונוטונית חסומה היא מתכנסת, וסיימנו.

סה"כ בשני המקרים מצאנו ת"ס מתכנסת. ■

משפט בולצאנו־וייראשטראס השתמש במשפט וייראשטראס (הראשון), שתלוי באקסיומת השלמות. משפט בוצאלנו־וייראשטראס תלוי באקסיומת השלמות!

להלן הוכחה נוספת, קונסטקרטיבית אפילו פחות (לא שפונקציית בחירה זה קונסטקרטיבי במיוחד):

הוכחה נוספת לבולצאנו־וייראשטראס. נסמן ב־A את התמונה של a_n. אם A סופית – כמו קודם. אחרת A אינסופית. נגדיר את הקבוצה:

$$B = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |\{y \in A \mid y \le x\}| \ge \aleph_0\}$$

B חסומה מלמטה (למשל ע"י $\inf a_n$). היא לא ריקה, כי לדוגמה $\sup a_n \in B$. לכן ל־B קיים חסם תחתון (אקסיומת השלמות). נסמן $\alpha = \inf B$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $b \in B$ כך ש־$b < \alpha + \varepsilon$. מתקיים $\alpha - \varepsilon \notin B \implies \alpha - \varepsilon < \alpha$ לכן $\{y \in A \mid y \le b \le \alpha + \varepsilon\}$ אין־סופית, אבל $\{y \in A \mid y \le \alpha - \varepsilon\}$ סופית. לכן, $A_\varepsilon = \{y \in A\colon\ |y - \alpha| < \varepsilon\}$ אינסופית!

נסכם: לכל $\varepsilon > 0$, ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \ge \mathbb{N}$ כך ש־$|a_n - \alpha| < \varepsilon$, בגלל ש־$A_\varepsilon$ אינסופי. וזו כבר הגדרה שקולה לקיום גבול חלקי, כמו שנראה בקרוב. ■

משפט 28. $\forall \varepsilon > 0.\, \forall N \in \mathbb{N}.\, \exists n \ge N\colon\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ אמ"מ לקבוצה יש גבול חלקי ב־α.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח את הטענה שנראית מפחיד. נגדיר:

$$\begin{cases} n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - \alpha| < 1\} \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N}\colon n < n_k \wedge |a_n - \alpha| < \frac{1}{k+1}\} \end{cases}$$

אז a_{n_k} ת"ס של a_n. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{K+1} < \varepsilon$. יהי $k \ge K$ אז:

$$|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \le \varepsilon$$

וסה"כ $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ וסיימנו.

$\Longrightarrow$ לבית

■

הערה 6. המשפט לעיל הוא לא באמת משפט בקורס. צריך להוכיח אותו כל פעם מחדש.

"בשפה של בני אדם", הטענה השקולה הזו אומרת שבכל קטע פתוח שמכיל את α יש אינסוף איברים מהסדרה, [וההגדרה של גבול לא חלקי דורשת ש־] מחוץ אליו, יש מספר סופי של איברים.

מסקנה 6. לכל סדרה יש גבול חלקי במובן הרחב.

משפט 29. סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

הוכחה. $\Leftarrow$ בכיוון הראשון, נוכיח: תהא a_n סדרה. יהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ אז כל ת"ס של a_n מתכנסת ל-ℓ. כיוון זה לבית. שימו לב שצריך להפריד למקרים גבולות מתבדרים וכאלו שאינם.

$\Longrightarrow$ עתה, תהא a_n סדרה, ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. אם כל ת"ס של a_n מתכנסת ל-ℓ, אז $\lim_{n\to\infty} a_n a_n = \ell$. לבית גם כן. (זה טרוויאלי. a_n ת"ס של עצמה וסיימנו)

■

משפט 30. תהא a_n סדרה חסומה ויהי $\ell \in \mathbb{R}$. נניח כי כל ת"ס מתכנסת של a_n מתכנסת ל-ℓ. אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

הערה 7. מה לא טרוויאלי כאן? אי אפשר פשוט לבחור את a_n, שכן היא לא מתכנסת בהכרח (צריך להוכיח את זה).

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $A = \{n \in \mathbb{N} \colon |a_n - \ell| \geq \varepsilon\}$. נניח בשלילה ש-$A$ אינסופית. נסמן $A_+ := \{n \in \mathbb{N} \colon a_n \geq \ell + \varepsilon\}$ ו-$A_- = \{n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq \ell - \varepsilon\}$. משום ש-$A = A_+ \cup A_-$, ללא הגבלת הכלליות, A_+ אינסופית. לכן קיימת ת"ס a_{n_k} כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in A_+$. a_{n_k} חסומה ולכן יש לה ת"ס $a_{n_{k_j}}$ מתכנסת. נסמן את גבולה m. לכל $j \in \mathbb{N}$, מתקיים $\ell + \varepsilon \leq a_{n_{k_j}}$. לכן $m \geq \ell + \varepsilon > \ell$, כלומר $m \neq \ell$ גבול חלקי של a_n בסתירה. ■

המטרה בלהכניח ש-a_n חסומה, היא לחסוך את הפיצול למקרה האין־סופי. יש לנו שתי תכונות עבור תכונות של סדרות. תהא a_n סדרה, אז:

- הרעיון: לכל אינדקס שנבחר, יש עוד אינסוף מעליו שמקיימים את התכונה.

הגדרה 28. נאמר כי תכונה היא שכיחה בסדרה כאשר אינסוף מאיברי הסדרה מקיימים את התכונה. (באנגלית: infinitely often).

- הרעיון: החל מנקודה מסויימת, כל איברי הסדרה מקיימים את הדרוש.

הגדרה 29. נאמר שתכונה קוראת כמעט תמיד כאשר כל איברי הסדרה, פרט למספר סופי, מקיימים את התכונה. (באנגלית: almost everywhere)

ואז, נקבל כמו בשבוע שעבר את שתי הטענות הבאות:

- יהי $\ell \in \mathbb{R}$ הוא גבול של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$ כמעט תמיד.
- יהי $\ell \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$ שכיחה.

השקילויות האלו נכונות רק בגלל שהסדרות שלנו בדידות. נזכור שראינו בשבוע שעבר ש-ℓ גבול חלקי של a_n אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \geq N$ כך ש-$|a_n - \ell| < \varepsilon$.

סימון 8. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים של a_n נסמן $\hat{P}(a_n)$.

סימון 9. תהא a_n סדרה. את אוסף הגבולות החלקיים הסופיים (כלומר לא $\pm\infty$) של a_n נסמן $P(a_n)$.

יש כאן קצת abuse of notation כאשר אנו מתייחסים ל-$\pm\infty$ כאובייקטים.

בעזרת הסימונים הללו נקבל ניסוח שקול של משפט בולצאנו־ווייראשטראס (לכל סדרה חסומה יש ת"ס מתכנסת):

מסקנה 7. לכל a_n סדרה, $\hat{P}(a_n) \neq \varnothing$.

משפט 31. תהא a_n סדרה, חסומה. תהא b_n סדרה, המקיימת:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ש-$b_n \in P(a_n)$
2. b_n מתכנסת ל-ℓ

אז $\ell \in P(a_n)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $N \in \mathbb{N}$. ידוע $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ החל ממנו $\forall n \geq N_1 \colon |b_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. אז $b_{N_1} \in P$, לכן קיים $n \geq N$ כך ש-$|a_n - b_{N_1}| < \frac{\varepsilon}{2}$. מא"ש המשולש:

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - b_{N_1}| + |b_{N_1} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

■

משפט 32. תהא a_n חסומה. אז ל-P יש מקסימום ומינימום.

הערה 8. הסופרמום של a_n הוא לא הסופרמום של P. לדוגמה עבור $a_n = \frac{1}{n}$ אז $\sup a_n = 1$ למרות ש-$P(a_n) = \{0\}$.

הוכחה. ראינו ש-a_n חסומה לכן P חסומה. מבולצאנו־וויראשטראס, $P \neq \varnothing$. לכן ל-P יש סופרמום ואינפימום. נסמן $\alpha = \sup P, \beta = \inf P$. יהי $\varepsilon > 0$. ידוע שקיים $\ell \in P$ כך ש-$\ell > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$. כמו כן $\ell \leq \alpha < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. סה"כ $|\ell - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. יהי $N \in \mathbb{N}$. אז קיים $n \geq N$ כך

ש־$|a_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. מא"ש המשולש:

$$|a_n-\ell| < |a_n-\ell| + |\ell-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon$$

מכאן ש־α גבול חלקי של a_n ולכן $\alpha \in P$, כלומר $\alpha = \max P$.

באופן דומה (תרגיל לבית) אפשר להראות ש־$\beta = \min P$. ■

מכאן, אפשר להראות את הטענה הבאה (זהו אינו משפט בקורס):

משפט 33. תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. אם A חסומה מלעיל, אז קיימת סדרה $a_n\colon \mathbb{N}\to A$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

הוכחה. נסמן $\alpha=\sup A$. ידוע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש־:

$$\alpha - \frac{1}{n} < a_n \le \alpha < \alpha + \frac{1}{n}$$

(מהגדרת סופרמום). נקבל ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. (הערה: a_n למעשה פונקציית בחירה, וצריך כאן את אקסיומת הבחירה הרציפה). ■

סימון 10. תהי a_n סדרה. נסמן ב־a_n את הגבול החלקי הגדול ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבול עליון.

סימון 11. תהי a_n סדרה. נסמן ב־a_n את הגבול החלקי הקטן ביותר של a_n. בעברית, הוא יקרא גבו לתחתון.

הערה 9. אם a_n אינה חסומה מלעיל, $a_n = \infty$ ואם a_n אינה חסומה מלרע אז $a_n = -\infty$. בשביל להראות את זה צריך עוד קצת טענות.

משפט 34. תהא a_n חסומה מלעיל. בהינתן $\ell\in\mathbb{R}$ הגבול העליון של a_n אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

1. $a_n < \ell+\varepsilon$ כמעט תמיד.
2. $a_n > \ell - \varepsilon$ שכיח.

הוכחה.

$\Longleftarrow$ נניח ש־ℓ הגבול העליון של a_n. יהי $\varepsilon > 0$. נניח בשלילה כי לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $n \ge N$ כך ש־$a_n \ge \ell+\varepsilon$. נבנה ת"ס באופן הבא:

$$\begin{cases} n_1 = \min\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \ge \ell+\varepsilon\} \\ n_{k+1} = \min \underbrace{\{n > n_k \mid a_n \ge \ell+\varepsilon\}}_{\neq\varnothing} \end{cases}$$

הסדרה לעיל אכן איננה ריקה בגלל הנתון. אז a_{n_k} ת"ס של a_n שכל איבריה בקטע $[\ell+\varepsilon, +\infty)$ כת"ס של a_n היא חסומה, ולכן יש לה ת"ס מתכנסת לגבול של $m\in\mathbb{R}$. m גבול חלקי של a_n עצמה (ת"ס של ת"ס היא ת"ס) ומקיים $m \ge \ell+\varepsilon > \ell$ (כי a_{n_k} חסומה ב־$\ell+\varepsilon$) בסתירה לכך ש־ℓ גבול עליון.

לכן קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$, מתקיים $a_n < \ell+\varepsilon$. מכאן ש־$a_n < \ell+\varepsilon$ כמעט תמיד.

עתה נראה ש־$a_n > \ell-\varepsilon$ שכיחה. יהי $N\in\mathbb{N}$. ידוע ℓ גבול חלקי של a_n לכן קיים $n \ge N$ כך ש־$|a_n - \ell| < \varepsilon$. לכן $a_n > \ell - \varepsilon$ (עם קצת מנניפולציות אלגבריות).

$\Longrightarrow$ נניח (1) $a_n < \ell+\varepsilon$ כמעט תמיד ו־ (2) $a_n > \ell-\varepsilon$ שכיחה. יהי $\varepsilon > 0$. מ־(1) קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n \ge N_1\colon a_n < \ell+\varepsilon$. יהי $N\in\mathbb{N}$. מ־(2) קיים $n \ge \max N, N_1$ כך ש־$a_n > \ell-\varepsilon$. אז $n \ge N_1$ לכן $a_n < \ell+\varepsilon$ ומכאן $|a_n-\ell| < \varepsilon$ לכן $\ell \in P$.

נראה שהוא העליון. יהי $m\in P$. נניח בשלילה $m > \ell$. נסמן $\varepsilon = \frac{m-\ell}{2}$. מכיוון ש־$m\in P$ לכן $|a_n - m| < \varepsilon$ שכיח, כלומר אינסוף מאיברי הסדרה גדולים מ־$\ell-\varepsilon$. לכן $a_n < \ell+\varepsilon$ לא כמעט תמיד, בסתירה. מכאן ש־$m \le \ell$ ולכן $\ell = \limsup a_n$. ■

הערה 10. אפשר לבצע הוכחה סימטרית עם $\liminf$.

הערה 11. אם גם (1) וגם (2) מתקיימות כמעט תמיד, נקבל מיד את הגדרת הגבול.

משפט 35. תהא a_n סדרה חסומה. אז לכל $\varepsilon > 0$ כמעט תמיד:

$$\liminf a_n - \varepsilon < a_n < \limsup a_n + \varepsilon$$

בעצם, יש את הקטע הפתוח:

$$(\liminf a_n - \varepsilon, \limsup a_n + \varepsilon)$$

וכל איברי הסדרה פרט לכמות סופית של מספרים נמצאים בו.

סימון 12. בהינתן $F\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ כלשהי:

$$\inf_n F(n) = \inf\{F(n) \mid n\in\mathbb{N}\} \quad \sup_n F(n) = \sup\{F(n) \mid n\in\mathbb{N}\}$$

תרגיל: תהא a_n סדרה חסומה. אז:

$$a_n = \inf_n \sup_{k\geq n} a_k$$

הוכחה. נגדיר $S_n = \sup_{k\geq n} a_k = \sup\{a_k \mid k\geq n\}$.

יהיו n,m ונניח $n>m$. אז:

$$\{a_k \mid k\geq n\} \subseteq \{a_k \mid k\geq m\}$$

לכן (תרגיל):

$$S_n = \sup\{a_k \mid k\geq n\} \leq \sup\{a_k \mid k\geq m\} = S_m$$

לכן S_n מונוטונית יורדת ולכן מתכנסת ל־$\inf S_n$. נסמן $S = \inf S_n$. יהי ℓ גבול חלקי של a_n. אז קיימת ת"ס a_{m_k} של a_n המקיימת $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \ell$. לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n_k} \leq S_{n_k}$ לפי הגדרת חסם עליון. כמו כן $\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S$ מקיים $\ell \leq S$. לכן $\lambda := \limsup n\to\infty a_n \leq S$.

יהי $\varepsilon>0$. אז $a_n<\lambda+\varepsilon$ כמעט תמיד. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N\colon a_n<\lambda+\varepsilon$. לכן $\forall n\geq N\colon S_n\leq\lambda+\varepsilon$. לכן $S\leq\lambda+\varepsilon$ כלומר $S\leq\lambda$ (יש כאן למה: $(\forall\varepsilon>0\colon \alpha\leq\beta+\varepsilon)\implies\alpha\leq\beta$). מכאן $S=\lambda$. ■

"טרוויאלי זה היבריס".

סדרות קושי

"הוא היה כומר, ואת כל הטענות שלו הוא גנב מתלמידים שלו. המון תלמידים מיוחסים לו".

הגדרה 30. תהא a_n סדרה. נאמר ש־a_n סדרת קושי, כאשר:

$$\forall\varepsilon>0.\,\exists N\in\mathbb{N}.\,\forall n,m\geq N\colon\ |a_n-a_m|<\varepsilon$$

הטענה המרכזית שנראה על סדרות קושי, היא שסדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת קושי.

יש כאן נקודה נחמדה. אנחנו לא באמת צריכים לעבוד ערך מוחלט. יש לנו רק שלוש תכונות שמעניינות אותנו:

1. **אי־שליליות ולא מנוונת:** לכל $x,y\in\mathbb{R}\colon\ |x-y|\geq 0$ ו־$|x-y|=0$ אמ"מ $x=y$.
2. **סימטריות:** $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon\ |x-y|=|y-x|$
3. **א"ש המשולש:** $\forall x,y\in\mathbb{R}\colon\ |x-z|\leq|x-y|+|y-z|$

פונקציה $d\colon A^2\to\mathbb{R}$ נקראת מטריקה אם היא מקיימת את שלושת התכונות לעיל. מרחב מטרי נקרא שלם אם כל סדרת קושי מתכנסת בו. באיזשהו הבט, צריך משהו בסגנון $\mathbb{R}$ (אקסיומת השלמות) או דברים דומים לו כדי שהמרחב המטרי יהיה שלם. ההגדרה של סדרת קושי מאוד תועיל לנו (בקורסים אחרים) כאשר לא בהכרח ברור מזה המושג של גבול.

משפט 36. תהא a_n סדרה. אז a_n מתכנסת אמ"מ a_n סדרת קושי.

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח ש־a_n מתכנסת. אז קיים $\ell\in\mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty}a_n=\ell$. יהי $\varepsilon>0$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N\colon\ |a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$N$. יהי $n,m\geq N$:

$$|a_n-a_m|\leq|a_n-\ell|+|\ell-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי. היינו צריכים את תכונות המטריקה בלבד, ולא היינו צריכים את אקסיומת השלמות)

$\Longleftarrow$ נניח a_n סדרת קושי. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־1 $\forall n,m\geq N\colon\ |a_n-a_m|<1$. נתבונן ב־$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\dots|a_{N-1}|,|a_N|+1\}$. יהי $n\in\mathbb{N}$. אם $n\geq N$ אז $|a_n|\leq M$. אחרת $|a_n-a_N|<1$ ולכן $|a_n|<|a_N|+1<M$. מכאן ש־a_n חסומה. לפי בולצאנו־ווייראשטראס (פוף! הנחנו את אקסיומת השלמות) ל־ יש ת"ס a_{n_k} המתכנסת לגבול $\ell\in\mathbb{R}$.

עתה, אקסיומת השלמות הפילה לנו גבול ℓ מהשמיים, ומכאן נוכל להמשיך לעבוד לפי הגדרה. יהי $\varepsilon>0$. אז קיים K_1 ש־$\forall k\geq K_1\colon\ |a_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$ וכן קיים N_1 כך ש־$\forall n,m\geq N_1\colon\ |a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$. קיים K_2 כך שלכל $k\geq K_2$, $n_k>N_1$ (כי n_k סדרת טבעיים מונוטונית עולה ממש). נתבונן ב־$N=\max\{n_{K_1},n_{K_2}\}$. יהי $n\geq N$. קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$n_k>n$. ואז:

$$|a_n-\ell|\leq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

חזקות ממשיות

משפט 37. תהא a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־0. אז $\forall x>0\colon\ \lim_{n\to\infty}x^{a_n}=1$.

הוכחה.

- נוכיח למקרה $x>1$. ראינו בתרגול ש־$\lim_{n\to\infty}x^{\pm n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$. יהי $\varepsilon>0$. קיים $P\in\mathbb{N}$ כך ש־$1-\varepsilon<x^{-\frac{1}{P}}<1<x^{\frac{1}{P}}<1+\varepsilon$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$, $|a_n|\leq\frac{1}{P}$. אזי $-\frac{1}{P}<a_n<\frac{1}{P}$. ממונוטוניות החזקה (שלא הוכחנו אבל ניחא) $1-\varepsilon<x^{-P^{-1}}<x^{a_n}<x^{P^{-1}}<1+\varepsilon$.
- אם $x=1$ זה טרוויאלי ואם $x<1$ אז מאריתמטיקה של גבולות סיימנו.

■

משפט 38. תהא a_n סדרת רציונלים מתכנסת. אז לכל $x\geq 0$ הסדרה x^{a_n} מתכנסת.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. a_n מתכנסת ולכן היא חסומה. מכאן ש־x^{a_n} חסומה. כלומר קיים $M>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $|x^{a_n}|\leq M$. קיים $p\in\mathbb{N}$ כך ש־:

$$1-\frac{\varepsilon}{M+1}<x^{-\frac{1}{O}}<1<x^{\frac{1}{P}}<1+\frac{\varepsilon}{M+1}$$

a_n מתכנסת ולכן סדרת קושי. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n,m\geq N\colon\ |a_n-a_m|<\frac{1}{P}$ ומחוקי חזקות $|x^{a_n}-x^{a_m}|=|x^{a_m}|\,|x^{a_n-a_m}-1|\leq M\cdot\frac{\varepsilon}{M+1}<\varepsilon$. ■

משפט 39. בהינתן a_n,b_n סדרות רציונליים שתיהן מתכנסות לאותו הגבול, אז $\lim_{n\to\infty}x^{a_n}=\lim_{n\to\infty}x^{b_n}$.

ההוכחה לבית. מהמשפט האחרון יש לנו אי־תלות בבחירת נציג. אפשר גם להראות שזהו אכן יחס שקילות (בפרט קיימת סדרת רציונליים השואפת ל־α, לכל $\alpha\in\mathbb{R}$). לכן נוכל להגדיר:

הגדרה 31. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ו־$x>0$. נגדיר $x^\alpha:=\lim_{n\to\infty}x^{a_n}$ כאשר a_n סדרת רציונליים המתכנסת ל־α.

משפט 40. תהא a_n סדרה (לא בהכרח סדרת רציונליים) ויהי $x>0$. יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אז $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ אמ"מ $\lim_{n\to\infty}x^{a_n}=x^a$.

משפט 41. חזקות ממשיות מקיימות חוקי חזקות.

עקרון הרווחים המקוננים של קנטור

(ידוע בעיקר כ"משפט החיתוך של קנטור") תהאנה a_n,b_n סדרות. נניח כי:

1. $\forall n\in\colon\ a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}b_n-a_n=0$

אז:

$$\exists c\in\mathbb{R}\colon\ \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$$

הוכחה. ידוע a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל (ע"י b_1). לכן a_n מתכנסת. נסמן את גבולה c. מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}a_n+(b_n-a_n)=c$$

לכן $\lim_{n\to\infty}b_n=c$. ידוע a_n עולה ו־b_n יורדת ולכן לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $a_n\leq c\leq b_n$, כלומר $c\in[a_n,b_n]$ ומכאן $c\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. יהי $d\in\mathbb{R}$. נניח $d\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_nmb_n]$. יהי $\varepsilon>0$. קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$b_n-a_n<\varepsilon$. $c,d\in[a_n,b_n]$ אזי $|c-d|<b_n-a_n<\varepsilon$ לכן $c=d$. ■

גם כאן – ההוכחה נראית תמימה, אבל איפשהו באמצע מתחבא משפט ווירשטראס הראשון, שאומר שכל סדרה מונוטונית חסומה היא בעלת גבול. למעשה, עקרון הרווחים המקוננים של קנטור שקול לאקסיומת השלמות! בבית, מאוד מומלץ להוכיח את הכיוון ההפוך. תרגיל מעניין אחר הוא להוכיח את בולצאנו־וייראשטראס באמצעות עקרון הרווחים המקוננים במקום אקסיומת השלמות.

לגוריתמים

משפט 42. לכל $a,b>0$, אם $a\neq 1$ אז קיים ויחיד $x\in\mathbb{R}$ כך ש־$a^x=b$.

הוכחה. נוכיח למקרה $a>1$. הוכחנו בבית ש־$\{a^k\mid k\in\mathbb{N}\}$ אינה חסומה. לכן קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$a^k>b$. מעקרון הסדר הטוב בטבעיים, קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$a^{k-1}\leq b<a^k$. נגדיר $x_1=k-1,y_1=k$. נסמן $c=\frac{x_n+y_n}{2}$. אם $a^{x_n}\leq b<a^c$ נגדיר $x_{n+1}=x_n,y_{n+1}=c$. אחרת נגדיר $x_{n+1}=c,y_{n+1}=y_n$ (המרצה מבצע חיפוש בינארי). ממשפט הרקורסיה x_n קיימת. בשלב ה־$n+1$ נקבל ש־$b\in[a^{x_n},a^{y_n}]$

וגם $y_n - x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n$ וכן $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$. לכן קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty}[x_n, y_n] = \{x\}$. אז $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x$ לכן $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x$. כמו כן $\bigcup_{n=1}^{\infty}[x^{a_n}, a^{y_n}] = \{b\}$ (לבית). לכן b כזה קיים.

היחידות נובעת ממונוטוניות החזקה. ■

כל סדרה ניתנת לייצוג כטור. זו דרך אחרת להציג סדרות.

הגדרה 32. תהא a_n סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של a_n להיות:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

הבחנה: כל סדרה היא סדרת סכומים חלקיים של איזושהי סדרה.

הוכחה. תהי a_n סדרה, נגדיר את:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_{n+1} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

נקבל שהסכום הטלסקופי:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_n$$

■

אז למעשה אין שום דבר חשוב בסכום עצמו. מה שחשוב זה הקשר בין הסדרה עצמה לבין סדרת הסכומים החלקיים שלה.

סימון 13. תהא a_n סדרה. תהי ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. אז אם S_n מתכנסת לגבול $\ell \in \mathbb{R}$ נאמר כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, ונסמן:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

הבחנה חשובה: הסימון הזה של $\sum_{n=1}^{\infty}$ משמש אותנו להגיד שהטור לא מתכנס, כלומר נאמר "$\sum_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנס" גם אם $\sum_{n=1}^{\infty}$ לא קיים. זאת בניגוד לגבולות, שם אנחנו לא ממש יכולים לכתוב "$\lim_{n\to\infty}$ לא קיים" (שכן $\lim_{n\to\infty}$ לא ביטוי מוגדר).

- **דוגמה:** יהי $1 \ne q \in \mathbb{R}$ ונגדיר $a_n = q^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים. אז:
  - $$\forall n \in \mathbb{N}^+\colon S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

    לכן הטור מתכנס אמ"מ $|q| < 1$ (הוכחנו את זה בתרגיל הבית) ואז:
  - $$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{q-1}$$
- **דוגמה 2:** נגדיר $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n := \frac{1}{n(n+1)}$, ונסמן ב־$S_n$ את סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל־a_n.

  נבחין שממכנה משותף:

  $$\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n(n+1) = \frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

  ואז (סכום טלסקופי):

  $$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

  לכן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנסת וכן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

  מכאן אפשר להוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס (עשינו את זה גם בתרגול).

אלו פחות או יותר הדוגמאות היחידות (גיאומטרי וטלסקופי) שנראה בקורס הזה לגבי משהו שאשכרה מתכנס. בד"כ נרצה לדעת האם טור מסויים הוא מתכנס או לא. כשיהיו לנו אינטגרלים (בחדו"א 2א) יהיה לנו קצת יותר כוח להוכיח טורים. אבל כמו הרבה דברים בחדו"א, גם זה לא תמיד יספיק.

קריטריון קושי להתכנסות טורים

תהא a_n סדרה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists n \in \mathbb{N}.\, \forall N \leq n \leq m \colon \underbrace{\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right|}_{|S_n - S_{m+1}|} < \varepsilon$$

זה לא מעניין בכלל. זה פשוט קריטריון קושי לסדרות, אבל על סדרת הסכומים החלקיים.

מסקנה 8. תהא a_n סדרה. אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הערה 12. הצד השני לא מתקיים, לדוגמה עבור $a_n = \frac{1}{n}$ מתקיים ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n \to \infty$ למרות ש־$n^{-1} \to 0$.

בדומה לגבולות של סדרות, שינוי של מספר סופי של איברים (בסדרה המקורית) אולי ישנה את הגבול (כי סוכמים אותם), אבל לא עומד לשנות את ההתכנסות.

משפט 43. הטור הוא לינארי, כלומר יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים.

זה נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות, על סדרת הסוכמים החלקיים.

התכנסות בהחלט

כאן יש אשכרה הגדרה חדשה.

הגדרה 33. תהא a_n סדרה. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט 44. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא בפרט מתכנס.

אין לנו שום דבר חכם להגיד על הקשר בין הגבולות של שניהם. עם ננסה להוכיח עם סנדוויץ' (תנסו), נכשל במהרה. יש כאן צורך בקסם, שיפילו לנו גבול מהשמיים, וזה בדיוק מה שאקסיומת השלמות מספקת לנו. ספציפית, נשתמש בקריטריון קושי שתלוי בה.

הוכחה. תהא a_n סדרה, ונניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. מקריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־:

$$\forall n \geq m \geq N \colon \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon$$

נתבונן ב־N. יהי $n \geq m \geq N$. מא"ש המשולש המוכלל:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon$$

סה"כ מקריטריון קושי לטורים גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

טורים אי־שליליים

יש פרק שלם בטורים שעוסק בטורים שומרי סימן (איבריהם גדולים ממש מאפס או קטנים ממש מאפס). לצורך הנוחות מתעסק במקרה הראשון). יש לזה שתי סיבות:

- בגלל הנושא של התכנסות בהחלט.
- זה מקרה נפוץ שקורה הרבה בעולם האמיתי.
- יש משפטים מועילים על זה.

בהרבה מהמקרים נדרוש אי־שליליות בכל $\mathbb{N}$ גם אם זה נכון רק החל מ־$\mathbb{N}$ מסויים.

"אפס הוא חיובי יחסית"

משפט 45. תהא a_n סדרה, ונניח ש־$\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \geq 0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

(זה דורש את אקסיומת השלמות) אין כאן אשכרה הוכחה. אם $a_n \geq 0$ אז סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה, וממשפט (ווירשטראס 1) כל הסיפור הזה מתכנס אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

נתעסק קצת בקריטריוני השוואה.

1. תהיינה a_n, b_n סדרות אי־שליליות. נניח כי $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\le b_n$ (למעשה, לא צריך לכל $\mathbb{N}$, מספיק כמעט תמיד. ההוכחה קצת שונה אבל כמעט תמיד יותר חזק). אז אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הוכחה. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס ל־ℓ. ידוע b_n מונוטונית ולכן מתכנסת לסופרמום שלה, ונסיק:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}b_k\le\ell$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת (יש כאן שימוש באקסיומת השלמות). ■

2. נניח $\forall n\in\mathbb{N}\colon b_n>0$ (חיובית ממש!) ונניח $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\to\ell$ וכמו כן $\ell>0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס.

הוכחה. נוכיח רק כיוון אחד, והכיוון השני יגרר מאריתמטיקה של גבולות (נהפוך את $\frac{a_n}{b_n}$ וזה חוקי כי a_n ממקום מסויים לא נוגע ב־0 כי $\ell\neq 0$). קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge N$ מתקיים:

$$\frac{a_n}{b_n}<\frac{3\ell}{2}$$

(הראינו שזה נכון באופן כללי לכל מספר שגדול מ-ℓ + הנחנו אי־שליליות). כלומר לכל $n\ge\mathbb{N}$, מתקיים $a_n<\frac{3\ell}{2}b_n$. מקריטריון ההשוואה הראשון $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, ומאריתמטיקה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\ell}{2}b_n$ מתכנס. ■

3. **מבחן השורש:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח כי קיים $q\in(0,1)$ כך ש־q $\forall n\in\mathbb{N}\colon\ \sqrt[n]{a_n}\le$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הוכחה. לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחין ש־$a_n\le q^n$, וממבחן השוואה עם הטור הגיאומטרי (שמתכנס) סיימנו. ■

4. **מבחן השורש הגבולי:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח ש־q $\exists q\in[0,1)\colon\ \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n}<$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הערה 13. זה משפט קצת יותר חזק מהקודם.

הערה 14. לשני מבחני השורש כיוון אחר – אם $q<1$ אז הטור מתבדר.

הוכחה. ידוע $q<1$ אז $\sqrt[n]{a_n}<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}+\frac{1-q}{2}$ כמעט תמיד. לכן $\sqrt[n]{a_n}<\frac{1+q}{2}$ כמעט תמיד. אזי $a_n<\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ כמעט תמיד, ידוע $\frac{1+q}{2}<1$ (כי $q<1$, וכזה ממוצע משהו) כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{n}\right)^n$ מתכנס ומהקריטריון הראשון $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ■

5. **מבחן המנה:** נניח $a_n>0$ (כמעט תמיד) ויהי $q\in(0,1)$, ונניח $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ (כמעט תמיד) אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

הוכחה. השורה התחתונה של ההוכחה היא:

$$a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1\le q^n\cdot a_1$$

ואז מבחן ההשוואה. ■

6. **מבחן המנה הגבולי:** יהי $a_n>0$. נסמן $\ell=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ו־$m=\liminf n\to\infty\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז אם $\ell<1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ואם $m>1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

הוכחה. לבית. ■

דוגמה: האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$ מתכנס? נסמן ב־$a_n=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$. אז:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}}{\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}}=\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}n!}{n^{\frac{n}{2}}(n+1)!}=\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}=\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}}\to\sqrt{e\cdot 0}=0$$

לכן $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$. ממשפט המנה הגבולי נקבל שזה מתכנס.

קירוב סטרלינג

קירוב סטרלינג אומר ש־:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{e\pi n}}=1$$

אינטואיטבית, זה אומר ש־n עצרת בגבול מתנהג כמו החזקה $\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$. לא נוכיח אותו – המרצה לא מודע לאף הוכחה שמשתמשת בכלים שלמדנו.

עתה נפתור את התרגיל ממקודם, של $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$, באמצעות קירוב סטירלינג ומבחן השורש הגבולי. נגדיר $b_n=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$. נקבל:

$$\sqrt[n]{b_n}=\frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{e}\cdot\underbrace{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}_{1}}\to 0$$

כמו כן לפי סטרלינג:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{n/2}}{n!}}{\frac{n^{n/2}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

לכן לפי משפט ההשוואה הגבולי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{n!}$ מתכנס.

למעשה יש עוד מבחן לטורים אי־שליליים שלא הזכרנו.

9. תהא a_n סדרה מונוטונית יורדת ואי־שלילית אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n}$ מתכנסת.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח שהטור מתכנס. יהי $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{2^k-1} a_{2k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{2^{k-1}} a_{2^{k-1}+\ell} = 2 \sum_{k=2}^{2^n} a_k \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

וכזה מהמבחן הראשון סיימנו שוב.

$\Longleftarrow$ נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n}$ מתכנס. נוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

$$\sum_{k=1}^{n} \le \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} a_{2^k+\ell} \le \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}$$

כאן, נחליף באיבר הראשון.

∎

אז למה אנחנו צריכים את מבחן העיבוי?

- עבור $\alpha \le 1$ הראינו ש־$\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}$ ולכן $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מתבדר.
- עבור $\alpha \ge 2$ הראינו ש־$\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^2}$ ולכן $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס.

מה לגבי כל מה שבין 1 ל־2?

משפט 46. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אמ"מ $\alpha > 1$.

הוכחה. יהי $\alpha > 0$. אז $\frac{1}{n^\alpha}$ מונוטונית יורדת וחיובית. נסמן $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. אז:

$$b_n = 2^n a_{2n} = \frac{2^n}{n^{\alpha n}} = 2^{n(1-\alpha)} = (2^{1-\alpha})^n$$

נבחין ש־b_n גיאומטרי. הוא מתכנס אמ"מ $2^{1-\alpha} \in (0,1)$, שמתקיים אמ"מ $\alpha > 1$. עוד ידוע ש־b_n מתכנס אמ"מ a_n מתכנס ממבחן העיבוי, וסה"כ a_n מתכנס אמ"מ $\alpha > 1$. ∎

נעשה עוד תרגיל, אולי קצת פחות מועיל.

תרגיל 1. האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתכנס? (בסיס הלוגוריתם לא משנה)

הוכחה. נגדיר $a_n = \frac{1}{n \ln n}$. ניעזר במבחן העיבוי:

$$2^n a_{2n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = (n \ln 2)^{-1} \to \inf$$

לכן גם $\sum 2^n a_{2n}$ מתבדר לכן $\sum a_n$ מתבדר. ∎

טורים משני סימן

כל מה שאמרנו על שומרי סימן נכון על מי ששומר סימן כמעט תמיד. כלומר אלו שלא נופלים לקטגוריה הזו, הטורים משני הסימן, מחליפים סימן באופן שכיח. הטורים הראשונים שנדבר עליהם הם כאלו שלא רק משנים סימן באופן שכיח, אלא ממש כל מעבר.

משפט 47 (משפט לייבניץ)**.** תהא a_n סדרה חיובית ומונוטונית יורדת שגבולה 0. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

מתכנס.

התובנה החשובה בהוכחה היא שאפשר לדעת את המרחק מהגבול, בכל נקודה בסכום, גם אם קשה לחשב אותו. "אבל המבחנים לא עובדים לי. [תשובה:]אויויוי".

אנחנו לא יודעים מה הגבול, אנחנו לא רוצים לדעת מה הגבול, המבחנים עובדים רק לדברים משמרי סימן... נשארנו עם כושי.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$. נתבונן ב־N. יהיו $n \geq m \geq N$. השטיק יהיה שהזוגות $(a_k - a_{k-1}) < 0$.

- אם $n-m$ זוגי נקבל:

$$
\begin{aligned}
&a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\
=&a_m + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+3}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) < a_m < \varepsilon
\end{aligned}
$$

מצד שני:

$$
\begin{aligned}
&a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\
=&(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_1 \geq a_n > 0 > -\varepsilon
\end{aligned}
$$

לכן:

$$
\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} a_k\right| < \varepsilon
$$

- אם $n-m$ אי־זוגי נקבל הוכחה דומה.

■

מההוכחה, ניתן להסיק:

$$
\ell := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \qquad \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon \left|\ell - \sum_{k=1}^{n} (-1)^n a_n\right| \leq a_{n+1}
$$

מכאן, ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס, ולא בהחלט. על טור כזה, אומרים שהוא מתכנס בתנאי.

למזלנו, ליאור הכין למעננו עוד קריטריונים מרתקים לשיעור, והם הכללה של קריטריון לייבניץ. האחד קריטריון דיריכלה והשני אבל.

קריטריון אבל

תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. b_n מונוטונית (יורדת) (אבל לא בהכרח גבול 0).
2. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

לבית – יש להוכיח שקריטריון אבל נובע מקריטריון דיריכלה.

2.4.1 קירטריון דיריכלה

1. b_n מונוטונית (יורדת) וגבולה 0.
2. סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל־a_n חסומה (אבל לא בהכרח מתכנסת).

תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. ידוע $\exists M > 0. \forall n \in \mathbb{N}\colon |A_n| \leq M$ (כי היא חסומה). בגלל ש־b_n שואפת ל־0 אז $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N\colon |b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. יהיו $n \geq m \geq N$. אז:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=m}^{k} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\
&= A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} - A_{m-1} b_m = \sum_{k=m}^{n-1} \left(A_k (b_k - b_{k+1})\right) + A_n b_n - A_{m-1} b_m
\end{aligned}
$$

לכן (ניעזר בזה ש־b_n מונוטונית יורדת):

$$\left|\sum_{k=m}^{n}a_kb_k\right|\le\left|\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})\right|+|A_nb_n|+|A_{m-1}b_m|\le\sum_{k=m}^{n}\left(|A_k|\,(b_k-b_{k+1})\right)+|A_nb_n|+|A_{m-1}b_m|$$
$$\le M(b_m-b_{n+1})+Mb_n+Mb_m<2\cdot M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

לסכום הזה קוראים סכום אבל. אולי קוראים לזה דיריכלה אבל אבל הראשון שעשה את זה. ■

תרגיל 2. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ מתכנס בהחלט, בתנאי, או מתבדר?
רמז שאפשר להוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(\alpha+\beta k)=\frac{\sin\left(\frac{b\beta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)}{2}\beta\right)\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

נסמן $a_n=\sin n$ ו־$b_n=\frac{1}{n}$. אפשר לדעת ש־b_n מונוטונית יורדת שגבולה 0, ו־:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\le \text{משהו שהמרצה לא בטוח לגביו}\le\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

"יש כאן איזו טעות בנוסחה. בתרגיל בית תקבלו את זה כמו שצריך". ואז זה זה מתכנס לפי דיריכלה. יש כאן שאלה, האם זה מתכנס בהחלט?

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|=\frac{|\sin n|}{n}\ge\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1-\cos 2n}{2}=\underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{מתבדר (בסכום)}}-\underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\text{מתכנס מדיריכלה}}$$

מאריתמטיקה של גבולות, סיימנו.

בהרצאה הזו נדבר עוד על טורים.

תרגיל 3. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

תשובה. הטריק הוא להבין ש־$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-\pi n))$, לכל $n\in\mathbb{N}$. נוסף על כך מכפל בצמוד, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\sqrt{n^2+1}-n$. כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$$

עוד נבחין ש־$\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\le\frac{\pi}{2}$ וגם מונוטוני יורד, כלומר $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ מונוטוני יורד. מכך ש־$\forall x\ge 0:\ \sin x\le x$ נובע ש־$0\le\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)\le\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0$ ולפי סנדוויץ' $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0$. לכן לפי קריטריון לייבניץ $\sum(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}+n))$. ■

תרגיל 4. תהא a_n סדרה חיובית. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. נראה כי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}$ מתכנס.

הוכחה. הבעיה היא שלייבניץ לא עובד כאן, כי $\frac{S_n}{n}$ לא בהכרח מונוטונית. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kS_k$. נטען שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת קבוצה $I\subseteq[n]$ כך ש־$T_n=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i$ (דרך לחסוך פירוק למקרים של זוגי/אי־זוגי). נוכיח את הטענה באינדוקציה.

- עבור $n=1$ ניקח $I=\{1\}$ ונקבל $T_1=-S_1=-a_1=(-1)^1\sum_{i\in I}a_i$.
- יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח קיום $I\in\mathcal{P}([n])$ כך ש־$T_n=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i$. נגדיר $\hat{I}=[n]\setminus I$. נקבל:

$$T_{n+1}=T_n+(-1)^{n+1}S_{n+1}=(-1)^n\sum_{i\in I}a_i+(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}a_i=(-1)^n\sum_{i\in I}\cancel{(a_i-a_i)}+(-1)^{n+1}\sum_{i\in\hat{I}}a_i=(-1)^{n+1}\sum_{i\in\hat{I}}a_i$$

וסיימנו את האינדוקציה.

מכאן שלכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל $|T_n|\le\sum_{i=1}^{n}a_i=S_n$. ידוע S_n מתכנסת ולכן חסומה. $\frac{1}{n}$ מונוטונית יורדת ח־0 ולכן לפי קיטריון דיריכלה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}$ מתכנס. ■

שאלה: ומה קורה אם a_n לא בהכרח חיובית? נגדיר לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$ ש־:

$$S_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $a_n = S_n - S_{n+1}$. אז S_n סדרת הסכומים החלקיים של a_n. אז $S_n \to 0$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אבל, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{S_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ מתבדר (כפי שהוכחנו בעבר).

אסוציאטיביות

לעשות אסוציאטיביות של סכום זה כמו לבחור תת־סדרה של סדרת הסכומים החלקיים, ואז לסכום אותה (תחשבו על זה קצת). בניסוח של המרצה, תהא a_n סדרה, ונסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים שלה. אז קיבוץ איברים בסכום פירושו הסתכלות על ת"ס של S_n. כלומר, נגדיר סדרה עולה של טבעיים $n_1 < n_2 < \cdots$ כך ש־n_k $S_{n_j} = \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{k=n_{\ell-1}}^{n_\ell}$ והיינו רוצים ש־S_{n_j}.

טענה: תהא a_n סדרה, נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}$ מתכנס, אז לכל השמה של סוגריים על הסכום, הטור החדש מתכנס.

הוכחה. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. לכל השמה של סוגריים, סדרת הסכומים החלקיים המתאימה היא ת"ס של S_n ולכן מתכנסת, לאותו הגבול של S_n. ■

הכיוון השני לא נכון – זה שהצלנו לפצל לסוגריים ושדברים יתכנסו, לא אומר שאנחנו מתכנס בעצמנו (יידרש מאיתנו להתכנס מתחתחילה). לדוגמה עבור $a_n = (-1)^n$ יש לנו:

$$(-1+1) + (-1+1) + \cdots = -1 + 1 - 1 + 1 \cdots = -1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = -1$$

עם זאת, לכל a_n סדרה, ונניח כי קיימת השמה של סוגריים שבה:

- הטור המתאים מתכנס
- בתוך כל סוגריים, כל האיברים בעלי אותו הסימן

הוכחה. השמת הסוגריים מגדירה ת"ס של סדרת הסכומים החלקיים S_n. קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש־$\lim_{k\to\infty} S_{n_k} = \ell$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \ge K$ מתקיים $|S_{n_k} - \ell| < \varepsilon$. נתבונן ב־$N = n_K$. יהי $n \ge N$. ידוע $\lim_{t\to\infty} n_T = \infty$ ולכן קיים $t \in \mathbb{N}$ כך ש־$n_t \le n < n_{t+1}$. ידוע $n \ge n_k$ לכן $t \ge K$. מכאן $|S_{n_t} - \ell| < \varepsilon$ וגם $\left|S_{n_{t+1}} - \ell\right| < \varepsilon$. בהכרח $S_{n_{t+1}} - S_{n_t} = \sum_{j=n_t}^{n_t+1} a_j$, ומההנחה זה סכום של איברים שווי סימן. בה"כ נניח שכולם חיוביים. אז:

$$\ell - \varepsilon < S_{n_t} \le S_{n_t} + a_{n_t} + \cdots a_n \le S_{n_t} + a_{n_t+1} + \cdots + a)n_{t+1} = S_{n_{t+1}} < \ell + \varepsilon$$

סה"כ נקבל $|S_n - \ell| < \varepsilon$. לכן $S_n \to \ell$. ■

קומטטיביות

אז איך ננסח במקרה של טור אינסופי קומטטיביות? באמצעות זיווגים/תמורות. תהא a_n סדרה ותהא $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה. אז $a_{\sigma(n)}$ תקרא תמורה של a_n.

משפט 48. תהא a_n סדרה מתכנסת. אז לכל $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$, אז $\hat{\mathcal{P}}(a_{\sigma(n)}) = \hat{\mathcal{P}}(a_n)$.

הערה 15. סדרות זה סקאם. הסדר הוא סתם שטיק איטואיטיבי שלא באמת צריך. ההוכחה פשוטה, כי יש להן את אותה התמונה.

ומה לגבי טורים (כלומר תמורות של איברי הטור)? האם הטור של a_n ו־$a_{\sigma(n)}$ מתכנסים לאותו הגבול? התשובה היא לא. ננסה להגדיר דוגמה קונקרטית. נגדיר $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, ונסמן $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. נגדיר:

$$\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \quad \sigma(n) = \begin{cases} 4 \cdot \frac{n}{3} & n \equiv 0 \\ 2 \cdot \frac{n+2}{3} - 1 & n \equiv 1 \bmod 3 \\ 4 \cdot \frac{n+1}{3} - 2 & n \equiv 2 \end{cases}$$

לדוגמה:

$$\begin{array}{cccc} 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 3 & 7 \mapsto 5 & 10 \mapsto 7 \\ 2 \mapsto 2 & 5 \mapsto 6 & 8 \mapsto 10 & 11 \mapsto 14 \\ 3 \mapsto 4 & 6 \mapsto 8 & 12 \mapsto 12 & 15 \mapsto 16 \end{array}$$

למה 9. $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה

הוכחה. לבית ■

נסמן $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$. נקבל:

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} a_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{3\ell-2} + a_{3\ell-1} + a_{3\ell-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2\ell-1} \cdot \frac{1}{2\ell-1} + (-1)^{4\ell-2} \cdot \frac{1}{4\ell-2} + (-1)^{4\ell} \cdot \frac{1}{4\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-1}{2\ell-1} + \frac{1}{4\ell-2} + \frac{1}{4\ell} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{-1}{2\ell-1} + \frac{1}{2\ell} = \frac{1}{2}S_{2n} \to \frac{1}{2}S \end{aligned}$$

משום ש־$S \neq 0$ כבר הקיום של גבול חלקי שהולך ל־$\frac{1}{2}S$ מספיק לנו כדי לדעת ששתי הסדרות מתכנסות למקומות שונים. יתרה מכך, אפשר להראות שהוא מתכנס ל־$\frac{1}{2}S$ כי $\hat{S}_{3n+1} = \hat{S}_{3n} + a_{\sigma(3n+1)}$ וכנ"ל עבור $\hat{S}_{3n+2}$, ומאריתמטיקה של גבולות ובגלל ש־$a_n \to 0$ (וכן הגבולות החלקיים) וממשפט הכיסוי $\hat{S}$ מתכנסת ל־$\frac{1}{2}S$. ממש מצאנו סדרה שהתמורה שלה מתכנסת למקום אחר.

(הסיבה ש־S לא מתכנס ל־0, כי הוא תמיד מתחת ל־0, ולכן הוא bound away מ־0. עם זאת הוא בהכרח מתכנס מלייבניץ)

טוב, אז קומטטיביות לא עובד. ננסה למצוא תנאים שבהם זה עובד.

משפט 49. תהא a_n חיובית. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אז כל תמורה של הגבול מתכנסת לאותו הגבול.

הוכחה. תהא $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ תמורה. נסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$. יהי $n \in \mathbb{N}$. נסמן $N = \max \operatorname{Im} \sigma$. נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} a_k \leq \ell$$

מכאן ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ מתכנס, וכמו כן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \ell$ (כי סדרת הסכומים החלקיים של $a_{\sigma(n)}$ מונוטונית עולה וחסומה ב־ℓ). עכשיו אפשר לדבר על ערך ההתכנסות של התמורה ולסמן $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = m$. מכיוון ש־$\sigma^{-1}$ תמורה, נובע (אותו הטיעון כמו קודם, אבל הפוך):

$$\ell \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq m$$

לכן $m \leq \ell$ וגם $\ell \leq m$ ומכאן $\ell = m$. ■

משפט 50. תהא a_n סדרה. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. אז לכל תמורה σ של a_n, הטור המתאים מתכנס לאותו הסכום.

זה תרגיל לבית.

משפט 51 (משפט רימן)**.** תהא a_n סדרה. נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. אז לכל $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ (במובן הרחב) קיימת תמורה $\sigma\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ כך ש־S_n סדרת הסכומים החלקיים של $a_{\sigma(n)}$, מקיימת:

$$\liminf S_n = \alpha \quad \limsup S_n = \beta$$

צימרמן למה יש לך swastika במחברת.

הוכחה. תהא a_n סדרה. נגדיר שתי סדרות:

$$p_n = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -a_n & a_n < 0 \\ - & \text{else} \end{cases}$$

הם נקראים החלק החיובי והשלילי של a_n. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = p_n - q_n$ ו־$|a_n| = p_n + q_n$. די קל להראות ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ו־$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ מתכנסות, כאשר צד אחד טרוויאלי מאריתמטיקה. מהצד השני, אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n + q_n$ מתכנס, וממשפט $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_n - q_n$ מתכנס, ואז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n, q_n$ שניהם מתכנסים מאריתמטיקה.

עתה, תהא a_n סדרה. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי. אז $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$ (מאי־התכנסות בהחלט) וגם $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$ (מהתכנסות a_n).

נראה את קווי ההוכחה למשפט רימן. לא נוכיח אותו עד הסוף. במקרה ש־$\beta \leq \alpha$ מספרים (ולא במובן הרחב), אז קיים n_1 כך ש־$\sum_{i=1}^{n_1} p_n > \beta$, ו־$n_1$ מינימלי כזה (מהסדר הטוב בטבעיים). את האיברים $p_1, \dots p_{n_1}$ נכניס לתחילת הסדרה. באופן דומה הסכום של

$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \infty$, ולכן קיים $n_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־$\sum_{i=1}^{n_1} - \sum_{n=1}^{m_1} q_1 < \alpha$. נמשיך את התמורה ע"י $q_1 \dots q_{m_1}$. "בשלב הרקורסיה" יש לנו רישא של $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n_1)}, a_{\sigma(n_1+1)} \dots a_{\sigma(n_1+m_1)}, \dots a_{\sigma(n_{k+1})} \dots a_{\sigma(n_k+1)+1} \dots a_{\sigma(n_{k+1}+m_{k+1})}$. כמו בבסיס, $\sum_{n-n_{k+1}+1}^{\infty} p_n = \infty$ לכן קיים n_{k+2} מינימלי כך ש־:

$$\sum_{n=1}^{n_{k+1}+m_{k+1}} a_{\sigma(n_{k+1}+m_{k+1})} + \sum_{n=n_{k+1}+1}^{n_{k+2}} p_n > \beta$$

ובאופן דומה קיים m_{k+2} מינימלי כך שכל הסיפור מלמעלה פחות $\sum_{n=m_{k+1}+1}^{m_{k+2}} q_n$ קטן מ־α.
התמורה שתתקבל תעבוד. ■

טורי חזקות

טור חֲזָקוֹת הוא הטור הפורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. השאלה היא איזה x־ים אני יכול להציב כך שהחרא יתכנס. זה טור חזקות סביב 0, באופן כללי טור חזקות סביב $a \in \mathbb{R}$ הוא הסכום הפורמלי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-r)^n$.

"אי אפשר שווא נח על הח"ת ולכן יש חטף פתח. מי הביא את הסגולם?'

"בנפרד זה חֲזָקוֹת, בסומך זה חֶזְקוֹת. אבל פה זה סומך, לא נסמך"

(פורמלי = מה שמגדיר אותו זה המקדמים, לא הפונקציה. כמו בלינארית)

משפט 52. תהא a_n סדרה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$, ונניח כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0-a)^n$ מתכנס. אז לכל $x \in \mathbb{R}$ אם $|x-a| < |x_0-a|$ אז $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ מתכנס.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$. ניח $|x-a| < |x_0-a|$. ואז $a_n(x_0-a)^n$ מתכנס ולכן $\lim_{n\to\infty} a_0 (x_0-a)^n = 0$. בפרט היא חסומה ע"י M. נקבל:

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n(x_0-a)| \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right| \le M \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

הטור מימין הוא טור גיאומטרי עם מנה קטנה מ־1 ולכן מתכנס. לכן $a_n(x-a)^n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. ■

משפט 53 (משפט אבל)**.** תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. קיים מספר יחיד $R \ge 0$ כך ש־

1. $\forall x \in (a-R, a+R) \colon a_n(x-a)^n$ converges
2. $x \notin [a-R, a+R] \colon a_n(x-a)^n$ מתבדר

החלק הזה נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור, והתחום נקרא תחום ההתכנסות.

תזכורת: משפט אבל

תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. אז קיים ויחיד $R \in [0, +\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$:

1. אם $|x-a| < R$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ מתכנס בהחלט.
2. אם $|x-a| > R$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ מתבדר.

תזכורת: קריטריון אבל

יהיו a_n, b_n סדרות. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו־b_n מונוטונית יורדת ומתכנסת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

אבל לא נותן דרך למצוא את ה־R הזה. בשביל זה יש את המשפט הבא, שהוא יותר קונסטרקטיבי.

משפט קושי־הדמרד

משפט 54. תהא a_n סדרה ויהי $a \in \mathbb{R}$. נסמן $.= \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. אז:

- אם $=0$, אז $R = +\infty$.
- אם $=+\infty$, אז $R = 0$.
- אחרת $R = \frac{1}{}$.

(זה ה־R היחיד מאבל)

הוכחה. • נניח ש־$=0$. יהי $x \in \mathbb{R}$. אז:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \limsup \sqrt[n]{a_n}\, |x-a| = 0\, |x-a| = 0$$

לפי מבחן השורש, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס.

- נניח ש־$=+\infty$. יהי $x \in \mathbb{R}$, ונניח $x \neq a$. אז באופן דומה:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} = +\infty$$

ולכן הטור מתבדר. [ידוע רק שטור הערכים המוחלטים מתבדר, כלומר הטור לכאורה יכול להתכנס אבל לא בהחלט. בטורי חזקות נובע שגם הטור הרגיל מתבדר. צ.ל. בבית שבטורי חזקות התכנסות גוררת התכנסות בהחלט]

- נניח $\in (0,+\infty)$. יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח $|x-a| < \frac{1}{}$. אז מנימוקים דומים:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|\,|x-a|^n} < 1$$

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ מתכנס. אם $|x-a| > R$ הטור מתבדר.

■

[למי שעשה בדידה 2] כל הנושא של פונקציות יוצרות – זה בדיוק טורי חזקות. הרי $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ יוצרת את a_n כאשר:

$$\exists \delta > 0.\, \forall x \in \mathbb{R}\colon\ |x| < \delta \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

לנטוש את הבדידות

עתה נתחיל לדבר על פונקציות במשתנה רציף. קודם לכן – נעסוק קצת בטופולוגיה.

קצת טופולוגיה

הגדרה 34. יהי $x \in \mathbb{R}$. לכל $\varepsilon > 0$, הקטע $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, יקרה סביבת ε של x.

הערה 16. נבחין ש־$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\}$. קוראים לזה כדור פתוח. זה פשוט המקרה החד־ממדי של כדורים.

הגדרה 35. יהי $x \in \mathbb{R}$ ותהא $U \subseteq \mathbb{R}$, ויהי $x \in U$. אז U תקרא סיבה של x אם קיים $\varepsilon > 0$ עבורו U מכילה סביבת ε של x.

הגדרה 36. קבוצה U תקרא פתוחה כאשר היא סביבה של כל אחת מהנקודות שלה.

לדוגמה, $(0,1)$ הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה. יהי $x \in (0,1)$. נסמן $\varepsilon = \min\{x, 1-x\}$. נתבונן ב־$\varepsilon$, ידוע $x > 0 \land x < 1$ כלומר $\varepsilon > 0$. עוד נבחין:

$$x + \varepsilon \leq x + 1 - x = 1$$

לכן $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,1)$. ■

דוגמה אחרת היא ש־$[0,1)$ קבוצה לא פתוחה.

הוכחה. נתבונן ב־0. יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב־$-\frac{\varepsilon}{2}$. אז:

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \ni -\frac{\varepsilon}{2} \notin [0,1)$$

סתירה לפתיחות. ■

למעשה, קבוצת כל הסביבות (הטופולוגיה של $\mathbb{R}$) נוצרת ע"י איחוד וחיתוך של כדורים פתוחים (הבסיס לטופולוגיה). זו קבוצה סגורה לאיחוד וחיתוך.

הגדרה 37. $A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא סגורה כאשר $\bar{A}$ פתוחה (עולם דיון $\mathbb{R}$).

משפט 55. A סגורה אם היא סגורה סדרתית.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נניח A קבוצה. תהא a_n סדרה מתכנסת. נניח $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in A$. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. נניח בשלילה $\ell \in \bar{A}$. אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$ (כי $\bar{A}$ פתוחה). קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \geq n$ מתקיים $|a_n - \ell| < \varepsilon$. בפרט $a_N \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subseteq \bar{A}$ בסתירה לכך ש־$a_N \in A$ ולכן $\ell \in A$.

$\Longleftarrow$ נניח ש־A סגורה סדרתית. יהי $x \in \bar{A}$. נניח בשלילה שלכל $\varepsilon > 0$, מתקיים $\bar{A} \not\subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. לכל $n \in \mathbb{N}$, קיים $(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \cap \bar{A}$ (זה מתקיים בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{n}$). לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$ וכן $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. A סגורה סדרתית, לכן $x \in A$ בסתירה. [למי שלא שם לב, בשביל הטיעון הזה צריך גם ארכימדיאניות שתלויה באקסיומת השלמות וגם את אקסיומת הבחירה]. ■

הגדרה 38. תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. אז $x \in \mathbb{R}$ תקרא נקודת־סגור של A, כאשר $\forall \varepsilon > 0\colon (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ (כלומר כל סביבה של x מכילה איבר מ־A)

לדוגמה, 1 נקודת סגור של $[0,1)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. נסמן $r=\min\{\varepsilon,1\}$. נתבונן ב־$1-\frac{r}{2}$. אז $1\le 1$ לכן $1-\frac{r}{2}\ge\frac{1}{2}$. כמו כן $r\ge 0$ לכן $1-\frac{r}{2}<1$. מכאן ש־$1-\frac{r}{2}\in[0,1)$. כמו כן:

$$1-\varepsilon<1-\frac{r}{2}<1<1+\varepsilon\implies 1-\frac{r}{2}\in[0,1)\cap(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$

כנדרש. ■

משפט 56. A סגורה אמ"מ כל נקודת סגור של A נמצאת ב־A.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח A סגורה. תהא x נקודת סגור של A. נניח בשלילה ש־$x\in\bar{A}$. $\bar{A}$ פתוחה לכן $\exists\varepsilon>0\colon(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq\bar{A}$, כלומר $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\varnothing$ בסתירה. לכן $x\in A$.

$\Longrightarrow$ תהא $x\in\bar{A}$. מההנחה, x אינה נקודת סגור של A. אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\varnothing$, דהיינו $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq\bar{A}$. לכן $\bar{A}$ פתוחה, כלומר A סגורה. ■

הגדרה 39. $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא קומפקטית כאשר A סגורה וחסומה.

משפט 57. $A\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית אמ"מ לכל סדרה a_n, אם לכל $n\in\mathbb{N}$, ל־a_n יש ת"ס מתכנסת שגבולה ב־a_n.

הגדרה 40. יהי $x\in\mathbb{R}$ ותהא U סביבה של x. אז $U\setminus\{x\}$ נקראת סביבה נקובה של x.

הגדרה 41. תהא $U\subseteq\mathbb{R}$. $x\in\mathbb{R}$ תקרא נקודת הצטברות של A כאשר לכל סביבה **נקובה** U של x, מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$.

אינטואיטיבית, אפשר להתקרב בסביבות נקובות כמה שבא לנו ל־x, אבל אסור לנו לגעת בו.

בקורס שאנו למדנו, כמעט אך ורק נעבוד עם קטעים, ולא עם קבוצות פתוחות כלליות. זה לא בחומר של הקורס.

אם נגדיר $U\subseteq\mathbb{R}$ סביבה של $+\infty$, כאשר קיים $a>0$ כך ש־$[a,+\infty)$, ו־U סביבה של $-\infty$ כאשר קיים $a>0$ כך ש־$(-\infty,-a]\subseteq U$, אז לכל $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, נקבל שסדרה a_n שואפת ל־ℓ כאשר לכל סביבה U של ℓ, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־$a_n\in U$.

חומר קריאה: Stephen Willard ~ General Topology

2.4.2 מבוא – פונקציות של משתנה ממשי

סימון 14. בכל קונטקסט בפרק זה, $f\colon A\to\mathbb{R}$ עבור $A\subseteq\mathbb{R}$ כלשהו.

הגדרה 42. התמונה של f היא $\operatorname{Im} f:=\{x\in\mathbb{R}\mid\exists a\in A\colon f(a)=x\}$

הגדרה 43. התחום של f הוא $\operatorname{dom} f=A$.

ניתן להגדיר מנה, כפל, מכפלה, חיבור, חיסור, כפל בקבוע של פונקציות, וכו'.

הגדרה 44. f תקרא חסופה כאשר $\operatorname{Im} f$ חסומה.

הגדרה 45. f תקרא מונוטונית עולה כאשר $\forall x\le y\in A\colon f(x)\le f(y)$

בדומה לסדרות, נגדיר עולה ממש, יורדת ויורדת ממש.

תרגיל 5. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהאנה $f,g\colon A\to\mathbb{R}$ חסומות. אז $f+g$ חסומה ומתקיים:

$$\inf f+\inf g\le\inf(f+g)\le\sup(f+g)\le\sup f+\sup g$$

הוכחה. לכל $x\in A$, מתקיים $f(x)\le\sup f\wedge g(x)\le\sup g$. לכן $f(n)+g(n)\le\sup f+\sup g$ ומכאן $\sup f+\sup g$ חסם מלעיל של $f+g$, ובפרט $\sup(f+g)\le\sup f+\sup g$ (כי הסופרמום הוא חסם מלעיל מינימלי). האינפימום בדומה, והשוויון האמצעי ידוע על קבוצות. והשטיק של החסימה זו בדיחה שהמרצה לא טרח להוכיח. ■

השוויונות לא הדוקים. לדוגמה $f(x)=\sin x, g(x)=-\sin x$, אז $\sup f+\sup g=2$ בזמן ש־$\sup(f+g)=0$.

גבולות של פונקציות

הגדרה 46. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A, ויהי $\ell\in\mathbb{R}$. נאמר כי ℓ הוא גבול של f ב־x_0 כאשר:

$$\forall\varepsilon>0.\,\exists\delta>0.\,\forall x\in A\colon 0<|x-x_0|<\delta\implies|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

זה לא עובד במובן הרחב. למעשה נצטרך לקחת כל קומבינציה של ℓ,x_0 כאשר אחד באינסוף, אחד ממשי, והאחד במינוס אינסוף, וזה יגרור אותנו ל־9 הגדרות.

לקבוצת הטבעיים של נקודת הצטברות אחת, היא $+\infty$. למעשה סדרות זה מקרה פרטי כאשר $A=\mathbb{N}$.

למה דווקא נקודות הצטברות? כי ככה אנחנו לא מגדירים דברים עבור "קפיצות" ודברים מוזרים כאלו. נגיד עבור $[0,1]\cup\{2\}$, לא נתעסק עם 2, למרות שהיא נקודת סגור.

דוגמה. נגדיר $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 2\\ 8 & x=2\end{cases}$$

הוכיחו כי 4 הוא גבול של f ב־2.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. נחפש δ בטיוטה. [טיוטה: בסוף נרצה ש־$\left|x^2-4\right|<\varepsilon$. נגרר $|x-2|\,|x+2|<\varepsilon$. נרצה $|x-2|\,|x+2|<\delta<\varepsilon$. נבחר $\delta<1$ (כלומר ניקח מינימום בסוף), אז ידוע $2-\delta<x<2+\delta$ כלומר $4-\delta<x+2<4+\delta$. ואז $|x+2|<5$. נסכם] נתבונן ב־$\delta-\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$. יהי $x\in\mathbb{R}$. נניח $0<|x-2|<\delta$. אז $x\neq 2$ ולכן $f(x)-x^2$. נקבל:

$$|f(x)-4|=\left|x^2-4\right|=|x-2|\,|x+2|<|x+2|\,\delta$$

ידוע $1\leq 2-\delta<x<2+\delta\leq 3$ לכן $0<x+2\leq 5$. מכאן $|x+2|\,\delta\leq 5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon$ לכן $|f(x)-4|$. ■

משפט 58. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודות הצטברות של A. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$. אם ℓ גבול של f ב־x_0 וגם m גבול של f ב־x_0 אז $\ell=m$.

לבית: להשלים 8 הגדרות נוספות.

דוגמה: פונקציית דיריכלה. חשובה בעיקר בגלל שהיא דוגמה נגדית ממש כיפית.

$$D\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

[למי שעשה בדידה] זה האינדיקטור של $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$.

משפט 59. לכל $x_0\in\mathbb{R}$, אין ל־D גבול ב־x_0.

הוכחה. נתבונן ב־$\varepsilon=\frac{1}{2}$. יהי $\delta>0$. בקטע $(x_0,x_0+\delta)$, יש מספר רציונלי x ומספר אי־רציונלי y. אז:

$$1=|D(x)-D(y)|\leq|D(x)-\ell|+|D(y)-\ell|\leq 0.5$$

לכן $|D(x)-\ell|\geq 0.5$ או ש־$|D(y)-\ell|\geq 0.5$, כלומר ℓ אינו גבול של D ב־x_0. ■

תרגיל 6. נגדיר $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=xD$ לכל $x\in\mathbb{R}$. כאשר D פונקציית דיאיכלה. הראו כי ל־f יש גבול ב־x_0 אמ"מ $x_0=0$

הוכחה.

$\Longrightarrow$ נניח $x_0=0$. יהי $\varepsilon>0$. נתבונן ב־$\delta=\varepsilon$. יהי $x\in\mathbb{R}$. נניח $0<|x-0|<\delta$. ידוע $|D(x)|\leq 1$ לכן $|f(x)-0|=|xD(x)|=|x|\,|D(x)|<\delta\cdot 1=\varepsilon$. לכן $\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

$\Longleftarrow$ נניח $x_0\neq 0$. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נתבונן ב־$\varepsilon=\frac{|x_0|}{2}$. $x_0\neq 0$ לכן $\varepsilon>0$. יהי $\delta>0$. ב־$(x_0,x_0+\delta)$ יש x רציונלי ו־y אי־רציונלי.

$$|x|=|f(y)-f(x)|\leq|f(y)-\ell|+|f(x)-\ell|$$

בקטע $(x_0-\delta,x_0)$ יש a רציונלי ו־b אי־רציונלי. אז:

$$|a|=|f(b)-f(a)|\leq|f(b)-\ell|+|f(a)-\ell|$$

מתקיים ש־$\max\{|a|\,,|x|\}\geq|x_0|$ ולכן:

$$\max\{|(|\,f(a)-\ell),|f(b)-\ell|\,,|f(a)-\ell|\,,|f(y)-\ell|\}\geq\frac{|x_0|}{2}$$

ולכן ℓ אינו גבול של f ב־x_0. ■

אם צריך דוגמה נגדית יותר עדינה מדיריכלה הדי כאוטית, הכירו את פונקציית רימן.

הגדרה 47. פונקציית רימן $R\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n_x} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

כאשר m_x,n_x הפירוק היחיד של $x\in\mathbb{Q}$ כך ש־$x=\frac{m}{n}$ וגם $\gcd(m,n)=1$.

משפט 60. לכל $x_0\in\mathbb{R}$, מתקיים $\lim_{x\to x_0}R(x)=0$.

הוכחה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. ללא הגבלת הכלליות $x_0 \in [0,1]$ (בשאר התחומים היא מתנהגת אותו הדבר). יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\frac{1}{N} < \varepsilon$. נבחין ש־:

$$\left\{x \in [0,1] \setminus \{x_0\} \mid R(x) \geq \frac{1}{n}\right\} \subseteq \underbrace{\left\{\frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{Z}, m \leq n \leq N\right\}}_{A}$$

(בקבוצה מימין לא דרשנו שהשברים יהיו מצומצמים). הקבוצה A סופית! כן נוכל לסמן $\delta = \min\{|x_0 - x| : \in A\}$, והמינימום אכן יהיה קיים. אז $\delta > 0$. נתבונן ב־δ. יהי $x \in [0,1]$, נניח $0 < |x - x_0| < \delta$. אז $x \notin A$ ולכן $|R(x) - 0| < \frac{1}{N} = \varepsilon$. לכן $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$. ■

משפט 61. תהא $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי עבור כל סדרה a_n המקיימת:

1. $\operatorname{Im} a_n \subseteq A$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq x_0$
3. $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

את $f(a_n)$ מתכנסת, אז קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך שלכל סדרה a_n המקיימת את 1-3, $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.

"קרני משהו מטריד אותך?" "בעיקר תרגיל בית 5. אבל כבר ביקשתי הארכה ל־3 ו־4 אז לא נעים לי".

כלומר – אם כל הסדרות שמקיימות את 1-3 מתכנסות לאנשהו, אז כולן מתכנסות לאותו הגבול.

"נקבובית כזו". "סדרה נקובה!".

הוכחה. תהאנה a_n, b_n סדרות המקיימות את 1-3. מההנחה $f(a_n)$ מתכנסת, ונסמן את גבולה ב־ℓ. באופן דומה $m =: f(b_n)$. נגדיר סדרה:

$$c_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ b_{\frac{n-1}{2}} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

נבחין ש־c_n מקיימת את 1-3. לכן $f(c_n)$ מתכנסת, ממשפט הכיסוי $\mathcal{P}(c_n) = \{\ell, m\}$, והיא מתכנסת, כלומר $m = \ell$. ■

קיטריון היינה

⟨ ערימה של אנשים הוגים "היינה" במבטא גרמני מזויף כבד ⟩

משפט 62. תהא $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. ל־f יש גבול ב־x_0 אמ"מ לכל סדרה a_n, אם a_n מקיימת את 1-3 מהטענה הקודמת, $f(a_n)$ מתכנסת.

מה זה אומר? גם עבור פונקציות במשתנה רציף, הסדרות מגלמות בתוכן את מה שאנחנו צריכים כדי להגדיר ולעבוד עם גבולות. המשפט הראשון אומר לנו שכל הסיפור הזה לא תלוי בנציג, מה שמאפשר לנו לטעון שהגבול הזה יחיד.

הוכחה. $\Longleftarrow$ נניח של־f יש גבול ב־x_0, ונסמנו ℓ. תהא a_n סדרה. נניח כי: (1) $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \in A$ (2) $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \neq x_0$ (3) $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך ש־$\forall x \in A \colon\ |x - x_0| \in (0, \delta) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$. לכן קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \geq N$, $|a_n - x_0| < \delta$. נתבונן ב־N הזה. יהי $n \geq N$. אז $a_m \in A$ וגם $a_m \neq x_0$. ידוע $0 < |a_n - x_0| < \delta$ לכן $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$ סיימנו.

$\Longrightarrow$ נניח כי לכל סדרה a_n המקיימת 1-3, אז $f(a_n)$ מתכנסת. מהטענה הקודמת, קיים $\ell \in \mathbb{R}$ כך שכל הסדרות המצחיקות האלו מקיימות $f(a_n) \to \ell$. נניח בשלילה שהגבול $\lim_{x \to x_0} f(x_0) \neq \ell$. אז קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ קיים $x \in A$ כך ש־$0 < |x - x_0| < \delta$, וגם $|f(n) - \ell| \geq \varepsilon$. לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש־$|a_n - x_0| \in (0, \frac{1}{n})$ וגם $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$. לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $a_n \in A \land a_n \neq a_0$. כמו כן $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$. אבל $\forall n \in \mathbb{N} \colon\ |f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$. לכן $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \neq \ell$ וסתירה. ■

הערה 17. זה עובד גם במובן הרחב. המרצה לא טרח להוכיח.

זו דרך נוחה להראות שלפונקציה אין גבול בנקודה.

תרגיל 7. נגדיר $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$. אז ל־f אין גבול ב־0.

הוכחה. נגדיר:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

אז לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. עוד נבחין ש־$a_n \neq 0$ ו־$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. אבל, $f(a_n) = (-1)^n \cdot n$, וזו סדרה חסרת גבולות, אפילו במובן הרחב. ■

תרגיל 8. נגדיר $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. ל־f אין גבול ב־0

הוכחה. נגדיר $a_n = \frac{1}{\pi n}$. נגדיר $b_n = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$. הן מקיימות את 1-3. נבחין ש־$f(b_n) = (-1)^n \land f(a_n) = 0$ וזה סתירה. ■

אריתמטיקה של גבולות

משפט 63. תהאנה $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $X_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. (בסיכומים של שירי ואסף, הם יגידו ש־$f,g\colon I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$. זה מקרה מאוד פרטי – הם עוסקים בקטעים בלבד, במקום בקבוצות פתוחות). נניח כי יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$, ונניח כי $f(x)=\ell\wedge g(x)=m$.

1. $$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\colon f(\alpha g(x)+\beta g(x))=\alpha\ell+\beta m$$
2. $$f(x)g(x)=\ell m$$
3. $$m\neq 0\implies(\exists\delta>0.\forall x\in A\colon 0<|x-x_0|<\delta\implies g(x)\neq 0)\wedge\left(\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}\right)$$

הוכחה 3. נניח $m\neq 0$. ידוע $g(x)=m$. לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|g(x)-m|<\frac{m}{2}$. נתבונן ב־δ. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז $|g(x)-m|<\frac{m}{2}$. לכן:

$$|g(x)|\geq|m|-|g(x)-m|>|m|-\frac{|m|}{2}=\frac{|m|}{2}$$

סיימנו את החלק הראשון של המשפט. עתה נותר להוכיח ש־$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$. תהא a_n סדרה המקיימת $\operatorname{Im}a_n\subseteq A\backslash\{x_0\}$ וכן $\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$. לפי היינה $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\ell$, וכן $\lim_{n\to\infty}g(a_n)=m$. ידוע $m\neq 0$, ולכן לפי אריתמטיקת גבולות של סדרות, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\frac{\ell}{m}$$

לפי היינה (מהכיוון השני) סה"כ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell}{m}$. ■

אפשר להכליל את החלק הראשון של שלוש (זו אותה ההוכחה) ולקבל את המשפט הבא:

משפט 64. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. אם קיים ל־f גבול סופי ב־x_0, קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה f חסומה.

"להיות חכם זה לדעת שעגבניה זה פרי, ולהיות אינטליגנט זה לדעת לא להכניס אותו לסלט פירות"

הערה 18. המרצה רימה. לא בהכרח קיימת סביבה נקובה שמוכלת כולה ב־A. מההקשר, אפשר להבין שהכוונה ב"שבה" היא כל נקודה שבתחום ההגדרה מוכלת בסביבה הזו.

משפט 65. תהאנה $f,g\in A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי A אינה חסומה מלעיל [כלומר אינסוף הוא נקודת הצטברות]. נניח כי g חסומה וכי הגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$. אז $\lim_{x\to\infty}f(x)+g(x)=-\infty$.

הוכחה. g חסומה לכן קיים $M>0$ חסם שלה כך ש־$\forall x\in A\colon |g(x)|\leq M$. [מה צ.ל.? שלכל $K>0$ קיים $N>0$ כך ש־$\forall x\in A$ אם $x>N$ אז $f(x)+g(x)<-K$] יהי $K>0$. ידוע $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ ולכן קיים $N>0$ כך שלכל $A\ni x>N$ מתרחש $f(x)<-K-M$. נניח $x>N$. אז $f(x)+g(x)<-K-M+M=-K$. לכן $\lim_{x\to\infty}f(x)+g(x)=-\infty$ ■

משפט 66. תהאנה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x, $f(x)\leq g(x)$. נניח כי $f(x)=\infty$, אז $g(x)=+\infty$.

הוכחה. מהנתון קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$, אז $f(x)\leq g(x)$. תהא a_n סדרה המקיימת $\operatorname{Im}a_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ וכן $\lim_{n\to\infty}a_n=x_0$. קיים N_1 כך ש־$\forall n\geq N_1$ מתקיים $0<|a_n-x_0|<\delta$ (השתמשנו בהגדרת הגבול, כאשר "ה־ε" שלנו הוא δ). ידוע $f(x)=\infty$ לכן לפי היינה $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\infty$. יהי $K>0$. קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־$\forall n\geq N_2\colon f(a_n)>K$. נתבונן ב־$N=\max\{N_1,N_2\}$. יהי $n\geq N$. אז $g(a_n)\geq f(a_n)>K$. לכן $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\infty$ ולכן מהיינה $g(x)=+\infty$. ■

משפט 67. תהנה $f,g,h\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח כי קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$. יהי $\ell\in\mathbb{R}$. נניח $g(x)=h(x)=\ell$. אז $f(x)=\ell$.

הוכחה. לבית – להוכיח עם הגדרת קושי, ועם הגדרת היינה. ■

משפט 68. תהאנה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. יהיו $\ell,m\in\mathbb{R}$. נניח $f(x)=\ell\wedge g(x)=m$.

1. אם קיימת סביבה של x_0, כל שלכל x בה $f(x)\leq g(x)$ אז $\ell\leq m$.
2. אם $\ell<m$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל x בה $f(x)<g(x)$.

הוכחה ל־2. נניח $\ell<m$. קיים $\delta_1>0$ כך ש־$\forall x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta_1$ אז $|f(x)-\ell|<\frac{m-\ell}{2}$. באותו האופן קיים $\delta_2>0$ כך ש־$\forall x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta_2$ אז $|g(x)-m|<\frac{m-\ell}{2}$. נתבונן ב־$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז:

$$f(x)<\ell+\frac{m-\ell}{2}=\frac{m+\ell}{2}=m-\frac{m-\ell}{2}<g(x)$$

■

ההוכחה של 1 מאוד דומה.

להלן משפט העונה לשם "משפט על גבולות והרכבה".

משפט 69. תהאנה $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to B\subseteq\mathbb{R},\ \ g\colon B\to\mathbb{R}$. תהא . יהיו $y_0,\ell\in\mathbb{R}$. נניח כי:

1. $f(x)=y_0$
2. קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה לכל $f(x)\neq y_0$.
3. $\lim_{x\to y_0} g(x)=\ell$

אז $g\circ g(x)=\ell$.

הערה 19. גם כאן המרצה עשה עברה – יש כאן הנחה ש־y_0 נקודת הצטברות של B. זה בסדר, כי באמצעות 1 ו־2 אפשר להראות ש־y_0 נקודת הצטברות של B בכל מקרה.

יש גם ניסוח עם קטעים, פחות בעייתי: תהאנה $f\colon I\setminus\{x_0\}\to J\setminus\{x_0\}$ וכן $g\colon J\to\mathbb{R}$ (מקובל ש־I,J מסמנים קטעים) ואז ממשיכים את שאר המשפט. אבל הניסוח הזה מקרה פרטי למדי. חשוב לדעת להתבטא כך כי ככה מלמדים בקורס ברגיל.

הוכחה. ראשית כל, נצטרך לוודא שכל החרא שלנו מוגדר היטב. לשם כך נראה שמ־1 ו־2 אכן נובע ש־y_0 נקודת הצטברות של B. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta_1$ ואז $|f(x)-y_0|<\varepsilon$. קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $f(x)\neq y_0$. נסמן $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. x_0 נקודת הצטברות של A, לכן קיים $x\in A$ כך ש־$0<|x-x_0|<\delta$. נתבונן ב־$f(x)$. אז $f(x)\in B$ וכן $0<|f(x)-y_0|<\delta$ ולכן y_0 נקודת הצטברות של B וסיימנו.

תהא a_n כך ש־$\operatorname{Im} a_n\subseteq A\setminus\{x_0\}$ וגם $\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$. אז לפי היינה $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=y_0$. אז:

1. מתקיים $\operatorname{Im} f(a_n)\subseteq B$.
2. כמעט תמיד $f(a_n)\neq y_0$ (זה מספיק להיינה. את זה גם צריך להוכיח, לבית).
3. בהכרח $\lim_{n\to\infty} a_n=y_0$.

לכן לפי היינה $\lim_{n\to\infty} g(f(a_n))=\ell$, כלומר $\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(a_n)=\ell$. לפי היינה $(f\circ g)(x_0)=\ell$. ■

גבולות חד־צדיים

הגדרה 48. תהא $f\colon A\to B$ פונקציה. תהי ת"ק $C\subseteq A$. נגדיר $g\colon C\to B$ על־ידי $g(x)=f(x)$ לכל $x\in B$. g נקראת הצמצום של f ל־C ומסמנים $g=f|_C$.

ניתן היה אפשר להגדיר תת־סדרה של a_n (בדידה) כצמצום של הסדרה לקבוצה אינסופית של טבעיים. הטרמינולוגיה הזו לא צריכה שהסדר על התחום יהיה סדר טוב. לכן נוכל להכליל אותה ל־$\mathbb{R}$.

משפט 70.
1. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $B\subseteq A$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. אם x_0 נקודת הצטברות של B אז .
2. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהאנה $B,C\subseteq A\setminus\{x_0\}$ כך ש־$A=B\cup C$. אם אז x_0 נקודת הצטברות של B או ש־x_0 נקודת הצטברות של C (ה"או" לא בהכרח xor).

הוכחה. לבית ■

מה שנעשה עכשיו על ת"קים ספציפיים, היה אפשר לעשות על כל תת־קבוצה.

נגדיר את הסימון הבא לסיכום הזה בלבד (הוא לא מקובל). תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נסמן $A_{x_0^+}:=\{x\in A\mid x>x_0\}=A\cap(x_0,+\infty)$. נגדיר את $A_{x_0^-}:=\{x\in A\mid x<x_0\}=A\cap(-\infty,x_0)$.

מהמשפט הקודם, אם x_0 נקודת הצטברות של A, אז x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן של $A_{x_0^-}$.

הגדרה 49. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וגם קיים הגבול של $f|_{A_{x_0}^+}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

הגדרה 50. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא x_0 נקודת הצטברות של A. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$ וגם קיים הגבול של $f|_{A_{x_0}^-}$ ב־x_0, אז נאמר של־f יש גבול מימין ב־x_0 ונסמנו $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

הכל כמובן במובן הרחב.

דוגמה. נוכיח ש־$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

הוכחה. יהי $K>0$. נתבונן ב־$\delta=\frac{1}{K}$. יהי $x>0$ בסביבת הדלתא של 0 (כלומר $x<\delta$), אז $x\in(0,\delta)$ ולכן $K=\frac{1}{\delta}>\frac{1}{k}$ מכאן $\lim_{x\to x_0^+}=+\infty$. ■

משפט 71. תהא $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא . יהי $\ell\in\mathbb{R}$ ונניח $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$. אז אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$, אז $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$, אז $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$.

הערה 20. אין באמת סיבה להסתכל על $A_{x_0^+}$ ו־$A_{x_0^-}$. אפשר היה להגדיר "גבול חלקי" על קבוצה כללית ולטעון את המשפט הזה. היינו מקבלים משפט הומורפי לכך שכל הגבולות החלקיים של פונקציה בדידה מתכנסים לגבול יחיד כאשר היא מתכנסת. עוד הערה: בד"כ לא יכתבו "x_0 נקודת הצטברות של $A\cap(x_0,\infty)$" אלא "אם יש משמעות לגבול משמאל ס־x_0".

משפט 72. תהא ותהא . יהי $\ell\in\mathbb{R}$.

1. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$, אז $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$ גורר ש־$f(x)=\ell$.
   אחרת [כלומר x_0 אינה נקודת הצטברות של אחת מהקבוצות]:
2. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$ אז $\lim_{x\to x_0^-}=\ell$ גורר $f(x)=\ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד השלילי – זה יקבע את הגבול]
3. אם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ אז $\lim_{x\to x_0^+}=\ell$ גורר $f(x)=\ell$. [כלומר, אם אני יכול להגיע ל־x_0 רק מהצד החיובי – זה יקבע את הגבול]

"הוא ריחם על היאור, על החול במדבר... אבל לסלע הוא נתן זאפטה"

נתחיל מלהוכיח את המשפט הקודם.

הוכחה. נניח ש־x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$. יהי $\varepsilon>0$. ידוע $f(x)=\ell$ לכן קיים לנו $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. נתבונן ב־δ. יהי $x\in A$ ונניח $x<x_0$. אז בפרט $0<|x-x_0|<\delta$ כלומר $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ לכן $\lim_{x\to x_0^-}=\ell$.
החלק השני (החיובי) – בדומה. ובכך סיימנו. ■

עכשיו נחזור להוכיח את המשפט האחרון.

הוכחת 1. נניח x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$ וגם x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$. נניח שהגבול משמאל ומימין שניהם ℓ. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $x_0<x<x_0+\delta$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $x_0-\delta<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. אז $x_0<x<x_0+\delta$ או $x_0-\delta<x<x_0$. לכן $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. ■

הוכחת 2. נניח x_0 נקודת הצטברות של $A_{x_0^-}$ וגם x_0 אינה נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$. נניח $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$. קיים $\delta_1>0$ כך ש־$A\cap(x_0,x+\delta_1)=\varnothing$. ידוע $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell$ לכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x\in A$, אם $x_0-\delta_2<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\varepsilon$. מכאן ממשיכים כמו ההוכחה הקודמת. ■

קריטריון קושי לקיום גבול של פונקציה

משפט 73. תהא ותהא . ל־f יש גבול סופי ב־x_0 אמ"מ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$, כך שלכל $x,y\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ וגם $0<|y-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

ההוכחה זה פחות או יותר היינה עם קושי.

רציפות

רציפות וגזירות אלו שני המושגים שהחלו את החדו"א. בימים של לגראנג', ניוטון ולייבניץ הגדירו באמצעות זה שהפונקציה סימפטית מספיק ואפשר לצייר אותה על דף. ההגדרה הפורמלית היא **תכונה לוקאלית** – היא מוגדרת בעבור נקודה, לא בעבור כל הפונקציה. ישנן גם תכונות גלובליות, כמו "בכל נקודה לפונקציה יש גבול" או "הפונקציה רציפה בכל התחום". ההגדרה האינטואיטיבית של רציפות היא תכונה גלובלית.

הגדרה 51. תהא ותהא $x_0\in A$. נאמר ש־f רציפה ב־x_0 אם:

$$\forall\varepsilon>0.\,\exists\delta>0.\,\forall x\in A\colon\ (|x-x_0|<\delta)\implies|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

הערה 21. כדי לדבר על רציפות בנקודה, חייבים לדבר על נקודה בתחום ההגדרה של הפונקציה. לא מספיקה נקודת התכנסות. מכאן גם, שאם יש חור בתחום ההגדרה, זה לא אומר שהפונקציה לא רציפה. לדוגמה, סדרות רציפות בכל נקודה.

"לקחתי את העפרון ודחפתי נקודות קצת על הגרף, וזהו! הכל רציף!□" $\sim$ פיזיקאי כועס

משפט 74. תהא ותהא $x_0\in A$. אם , אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ $f(x)=f(x_0)$.

כשמדברים על קטעים, המשפט הזה פשוט מספק הגדרה שקולה. זה לא עובד יותר כשיש נקודות מבודדות.

"הוא נחנק, אבל הוא בסדר□'

הוכחה. נניח ש־.

$\Longleftarrow$ נניח f רציפה ב־x_0. יהי $\varepsilon>0$. מהגדרת הרציפות קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $x\in A$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. בפרט $|x-x_0|<\delta$ ולכן $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ומכאן $f(x)=f(x_0)$.

$\Longrightarrow$ נניח $f(x) = x_0$. נוכיח שהיא רציפה ב־x_0. יהי $\varepsilon > 0$. מהגדרת הגבול קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 < |(|x - x_0) < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $x \in A$. נניח $|x - x_0| < \delta$. אם $x = x_0$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = 0$. אחרת $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ ולכן $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ וסיימנו. ■

הבחנה: תהא ונניח $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של $A_{x_0^+}$ וכן של $A_{x_0^-}$. אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

1. קיים ל־f גבול סופי ב־x_0 משמאל, וקיים ל־f גבול סופי ב־x_0 מימין
2. שני הגבולות להלן שווים
3. שני הגבולות להלן שווים ל־$f(x_0)$

(זה בדיוק כמו להגיד את מה שכתוב במשפט למעלה)

למה זה מנוסח כזה פרגמטי (עם פ' רפה)? כי לפעמים יעניין אותנו "עד כמה f רציפה בנקודה".

מיון נקודות רציפות

הגדרה 52. תהא ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$. נניח ש־f אינה רציפה בה. [מכאן, שבהכרח היא נקודת הצטברות – כי נקודה שאיננה נקודת הצטברות, היא רציפה. לכן אפשר לדבר על הגבול]. אז [הדוגמאות ל־$x_0 = 0$]:

- אם 1-2 מתקיים (מהמיון לעיל) אז x_0 תקרא אי־רציפות סליקה. לדוגמה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 67 & x = 0 \end{cases}$$

- אחרת, אם רק 1 מתקיים, x_0 תקרא אי־רציפות מסוג ראשון. לדוגמה:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x^2 + 67 & x \leq 0 \end{cases}$$

- אחרת, רק 2 מתקיים, ו־x_0 תקרא אי־רציפות מסוג שני. לדוגמה: פונקציית דיריכלה, $\frac{1}{x}$.

מה המשמעות של אי־רציפות סליקה? שהפונקציה פחות או יותר רציפה בנקודה הזו, אבל ספציפית הנקודה הזו קופצת.

משפט 75. תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה. אז לכל $x_0 \in I$, יש ל־f גבול סופי משמאל ב־x_0 וגם גבול סופי מימין.

זה למעשה משפט ויראשטראס בעבור סדרות.

הוכחה. נסמן $A = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}$. לכל $a \in A$, מתקיים $a \leq f(x_0)$ ומהמונוטוניות של f. לכן A חסומה. $A \neq \varnothing$ כי x_0 בתוך הקטע. לכן קיים ל־A חסם עליון. נסמן $\ell = \sup A$. יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $x < x_0$ כך ש־$f(x) > \ell - \varepsilon$. נתבונן ב־$\delta = x_0 - x$. יהי $x = x_0 - \delta < y < x_0$. אז $\ell - \varepsilon < f(x) \leq f(y) \leq \ell < \ell + \varepsilon$. לכן $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. מכאן $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$. בדומה יש ל־$f$ גבול מימין ב־x_0. ■

לפונקציה מונוטונית יש רק נקודות רציפות מסוג ראשון. מכאן שיש רק כמות בת־מנייה של נקודות רציפות.

המשך רציפות

אריתמטיקה של רציפות מייבא אוטומאטית הכל מאריתמטיקה של גבולות פונקציות.

משפט 76. תהאנה $f, g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$. נניח כי f רציפה ב־x_0 וכן g רציפה ב־x_0. אז:

- $f \pm g$ רציפה ב־x_0
- $f \cdot g$ רציפה ב־x_0.
- אם $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב־x_0.

משפט 77. תהאנה $f\colon A \to B$ ו־$g\colon B \to \mathbb{R}$, ותהא $x_0 \in A$. נניח כי f רציפה ב־x_0 ו־g רציפה ב־$f(x_0)$. אז $g \circ f$ רציפה ב־x_0.

דוגמאות לפונקציות רציפות:

- פולינומים (מראים שהזהות והקבועה רציפות, ואז מאריתמטיקה סיימנו).
- הפונקציות הטריגונומטריות רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות.
- הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות רציפות בכל נקודה בה הן מוגדרות.
- הפונקציות המעריכיות רציפות ב־$\mathbb{R}$ (מהיינה וממשפט קודם שהגדיר היטב חזקה).
- לכל $0 < a \neq 1$ הפונקציה $\log_a x$ רציפה ב־$(0, \infty)$.
- הפונקציה $|x|$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

גבולות חשובים

משפט 78.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

הוכחה אבל חצי כח. לא באמת אני יכול להעתיק כי יש כאן מעגל היחידה ודברים שאין לי כח להעתיק. ההוכחה לא פורמלית בכל מקרה. זו הוכחה מאוד סטנדרטית שיצא לי לראות בעבר ואני משוכנע שתוכלו למצוא הוכחות באינטרנט. שימו לב שלופיטל זה טיעון מעגלי. עקרונית מראים על מעגל היחידה באמצעות טיעונים גיאומטריים לא מוגדרים היטב על משולש עם זווית x_{rad} על המעגל, ש־$\sin x\le x\le \tan x$ ומכאן $1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$ וידוע מרציפות $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos x}=1$ ומסנדוויץ' סיימנו. ■

משפט 79.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

הוכחה. די בקלות. לכל $x\in(-1,\infty)\setminus\{0\}$ נקבל:
$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$
מסדרות + היינה:
$$\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=e$$
הסלנג הוא "להכניס את הגבול פנימה", אבל זה רציפות והרכבה:
$$\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\ln e=1$$
■

משפט 80.
$$\frac{e^x-1}{x}=1$$

הוכחה. נעשה מעברים אלגברים:
$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x}{\ln(e^x-1+1)}$$
נציב $t=e^x-1$ (בפועל, משמעו הרכבה שחוקית רק מרציפות $\ln$):
$$=\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$
תוך שימוש בסעיף הקודם. ■

לבית חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

תכונות גלובליות של פונקציות רציפות

הגדרה 53. פונקציה f היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

משפט 81. תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$. אז f רציפה אמ"מ לכל קבוצה פתוחה $V\subseteq\mathbb{R}$ קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}$ כך ש־$f^{-1}(V)=U\cap A$.

הוכחה. $\Longrightarrow$ תהא $V\subseteq\mathbb{R}$. תהא $x\in f^{-1}(V)$. אחרת $f(x)\in V$ לכן לא קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$f(x)-\varepsilon,f(x)+eg$. ידוע f רציפה ב־x (מהנתון). לכן קיים $\delta_x>0$ כך שלכל $y\in(x-\delta_x),d+\delta_x$ מתקיים $f(y)\in(x-\delta_x,x+\delta_x)$ לכן $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap A\subseteq f^{-1}(V)$.

נגדיר:
$$U=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}(x-\delta_x,x+\delta_x)$$
נבחין ש־U פתוחה שכן היא איחוד של קבוצות מבסיס הטופולוגיה. כמו כן לכל $x\in f^{-1}(V)$ מתקיים $(x-\delta_x,x+\delta_x)$ לכן $f^{-1}(V)\subseteq U\cap A$. בנוסף מהגדרת האיחוד, $f^{-1}(V)\subseteq UA\cap A$. לכן $U\cap A=f^{-1}(V)$.

$\Longleftarrow$ נניח שלכל V פתוחה קיימת $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה כך ש־$f^{-1}(A)(V)=U\cap A$. יהי $x\in A$. יהי $\varepsilon>0$. $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ולכן קיימת $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה כך ש־$f^{-1}((f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon))=U\cap A$. יהי $x\in U\cap A$ לכן $x\in U$ ולכן לא קיים $\delta>0$ כך ש־$(x-\delta,x+\delta)\subseteq U$. לכל $y\in A$ אם $|y-x|<\delta$ אז $||y|-|x||<\varepsilon$. לכן f רציפה וסיימנו.

■

הגדרה 54. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ כאשר I קטע. נאמר כי f מקיימת תכונת דרבו כאשר לכל $a,b\in R$ כך ש־$a<b$, לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ בין $f(a)\le\lambda\le f(b)$. קיים $c\in[a,b]$ כך ש־$f(x)=\lambda$.

משפט 82 (משפט ערך הביניים)**.** פונקציה רציפה מקיימת את תכונת דרבו.

הוכחה. יהיו $a,b\in I$ ונניח ש־$a<b$. יהי $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש־$f(a)\le\lambda\le f(b)$. נבנה סדרת קטעים ברקורסיה: $a_1=a,b_1=b$ ואז צעד:

$$\begin{cases}a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=b_n & f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\le\lambda\\ a_{n+1}=a_n\wedge b_n=\frac{a_n+b_n}{2} & f\left(\frac{a_n+b_n}{22}\right)>\lambda\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, נקבל $|b_n-a_n|=\frac{b-a}{2^{n-1}}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל $f(a_n)\le\lambda\le f(b_n)$ (אינדוקציה). ידוע $\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{n-1}}=0$. לפי קנטור קיימת $\mathbb{R}\ni c$ כך ש־$\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$. לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=c$. מרציפות הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n=c$ ומרציפות $\lim_{n\to\infty}I\lim f(a))$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $\lambda\le f(a)$ ולכן $f(x)\le\lambda$. באופן דומה $f(c)\ge\lambda$ ולכן $f(x)=\lambda$. ■

הוכחה נוספת. אחרי יהיו יהי תהיינה, אם $f(a)=\lambda$ סיימנו. אחרת $f(a)<\lambda$. נגדיר $A=\{x\in[a,b]\colon f(x)<\lambda\}$. אז A לא ריקה כי $f(a)<\lambda$ כלומר $\sup A$ קיים מאקסיומת השלמות. נניח בשלילה ש־$f(\alpha)<\lambda$. מרציפות f קיים $\delta>0$ כך שלכל $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)nx$, מתקיים $|f(x)-f(\alpha)|<\frac{num}{\lambda f(x2)}$ נובע $f(x)<\lambda$ בסתירה למינימליות הסופרמום. מהצד השני נוכל להפעיל ותו הטיעון ההפוך. לכן $f(\alpha)=\lambda$. ■

הערה 22. זה לא אמ"מ. להלן דוגמאות לפונקציות לא רציפות שמקיימות את תכונת ערך הביניים:

- **פונקציית צימרמן:** בהינתן r, נגדיר שהיא תחזיר את הגבול של הממוצע החשבוני של הספרות במידה והוא קיים, אחרת 0.
- **פונקציה סימפטית מספיק:** $\sin\frac{1}{x}$ (שמחזירה 0 ב־0 בשביל נוחות). היא מקיימת דרבו אך אינה רציפה כי אין לה גבול ב־0.

משפט 83 (משפט ויירשטראס (עוד אחד))**.** תהא $f\colon A\to\mathbb{R}$ רציפה. אם A קומפקטית (סגורה וחסומה) אז f חסומה ומשיגה את חסמיה (יש לה מינימום ומקסימום).

חלק ראשון. נניח בשלילה ש־f אינה חסומה. אז לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in A$ כך ש־$|f(x_n)|>n$. A [הערה: x_n מוגדרת היטב כי קיים יחס סדר טוב על הטבעיים] חסומה ולכן x_n חסומה. יש לה ת"ס x_{n_k} מתכנסת. נסמן את גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0\in A$ (סגירות סדרתית). לכן $A\ni x_0=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ ומרציפות $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)\in\mathbb{R}$ בסתירה לכך ש־$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)|=\infty$. לכן f חסומה. ■

חלק שני. ידוע f חסומה ולכן ניתן לסמן $f=\sup f(A)$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $y_n\in f(A)$ כך ש־$M-\frac{1}{n}\le y_n\le M$. לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $x_n\in A$ כך ש־$f(x_n)=y_n$. A חסומה ולכן x_n חסומה ומכאן שקיימת x_{n_k} מ־BW שמתכנסת. נסמן גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0\in A$. מכאן ש־$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=M$. בדומה בעבור $\inf(f(A))$. ■

הערה 23. בד"כ יציינו את זה על קטע סגור, שזה מקרה פרטי של קבוצה קומפקטית. צריך רק קומפקטיות – השתמשנו גם בכל התכונות, הסגירות והחסימות.

משפט 84. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת תכונת דרבו. אז ל־f אין נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג ראשון.

הוכחה. תהא $x_0\in I$. נניח שקיים $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ וסופי. נסמנו ℓ. נוכיח ש־$f(x_0)=\ell$. נניח בשלילה ש־$\ell<f(x)$ (כנ"ל לגבי גדול, בה"כ). קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in I$ אם $x_0-\ell<x<x_0$ אז $|f(x)-\ell|<\frac{f(x_0)-\ell}{2}$. בקטע $[x_0-\frac{\delta}{2},x_0]$, מתקיים:

$$f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)<\frac{\ell+f(x_0)}{2}<f(x_0)$$

מתכונת דרבו קיים $x_0-\frac{\delta}{2}<y<x_0$ כך ש־$f(y)=\frac{\ell+f(x_0)}{2}$. כלומר $|f(y)-\ell|\ge\frac{f(x_0)-\ell}{2}$ בסתירה. לכן $f(x_0)\le\ell$. באופן דומה $f(x_0)\ge\ell$. לכן $f(x_)=\ell$. באופן דומה, אם קיים וסופי הגבול $m=:\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ אז $f(x)=m$.

מכאן שלא קיימות נקודות אי־רציפות סליקות ומסוג ראשון. ■

מסקנה 9. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$. אם f מקיימת תכונת דרבו ומונוטונית, היא בהכרח רציפה.

הוכחה. תהא f מונוטונית המקיימת את תכונת דרבו, מהמשפט הקודם אין לא נקודות אי־רציפות סליקות או מסוג ראשון. משום ש־f מונוטונית, אין לה נקודות אי־רציפות מסוג שני (משפט קודם). מכאן של־f אין נקודות אי־רציפות ולכן היא רציפה. ■

הערה 24. עקרונית אפשר להגדיר את תכונת דרבו בעבור A פתוחה ולהגדירה כך שכל קטע פתוח $A\subseteq I$ מקיים את דרבו כפי שהגדרנו אותה.

אם ננסה להוכיח את הרציפות של $\frac{1}{x}$, נצטרך לבחור $\delta=\min\{\frac{x_0}{2},\frac{\varepsilon x_0^2}{2}\}$

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{x_0x}<\frac{\delta}{xx_0}<\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)}<\frac{2\delta}{x_0^2}=\varepsilon$$

מאוד ברור שה־δ תלוי באיזה x_0 אנחנו בוחרים. זה גם ניכר מההגדרה של רציפות: "לכל $x \in A$, ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $y \in A$ אם לכל $|y - x| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$".

כאשר אנו אומרים "במידה שווה", הכוונה היא שה־δ לא תלוי בנקודה. דהיינו:

הגדרה 55. f רציפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ אם $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

"$\frac{1}{x}$ היא לא סימפטית" – המרצה (לא פיזיקאי מוסמך).

משפט 85. אם f רציפה במידה שווה ב־A אז f רציפה ב־A.

הוכחה. כאילו דה ∎

אינטואציה: נדבר על זה בהמשך, אבל נגזרת חסומה אומר שהפונקציה רציפה במידה שווה.

לדוגמה, נראה ש־$f(x) = x^2$ אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$, אך רציפה במידה שווה לכל קטע חסום ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $M > 0$. נגדיר $f \colon [-M, M] \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x^2$ לכל $x \in [-M, M]$. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. יהיו $x, y \in [-M, M]$ ונניח $|x - y| < \delta$. אז:

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x - y|\,|x + y| \le 2M\,|x - y| < 2M\delta = \varepsilon$$

∎

לא סתם בחרנו δ להיות ε כפול נקודת המקסימום של הנגזרת, אבל לא מדברים על זה.

הוכחה. עתה נראה ש־x^2 אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$. נבחר $\varepsilon = 1$ ויהי $\delta > 0$. נבחר $y = x + \frac{\delta}{2}$. נבחר $x = \frac{1}{\delta}$. מכאן $|x - y| < \delta$.

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x - y|\,|x + y| = \frac{\delta}{2}\left(2x + \frac{\delta}{2}\right) > \frac{\delta}{2} \cdot 2x = 1 = \varepsilon$$

∎

תרגיל טוב הוא להוכיח ש־$\sin x^2$ אינה רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

משפט 86. תהאנה $f, g \colon A \to \mathbb{R}$. נניח כי f רציפה במידה שווה ב־A וגם g רציפה במידה שווה ב־A. אז:

- $f \pm g$ רציפה במידה שווה ב־A.
- אם f ו־g חסומות ב־A, אז fg רציפה במידה שווה.

משפט 87 (משפט קנטור (עוד אחד)). תהא $f \colon A \to \mathbb{R}$. אם f רציפה ב־A וגם A קומפקטית, אז f רציפה במידה שווה ב־A.

הוכחה. נניח בשלילה ש־f אינה רציפה במידה שווה ב־A. אז קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים $x_n, y_n \in A$ כך ש־$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ וגם $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0$. אז $\lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$. A חסומה ולכן x_n חסומה. לכן מ־BW קיימת לה ת"ס מתכנסת x_{n_k}. נסמן גבולה x_0. A סגורה ולכן $x_0 \in A$. ידוע ש־$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} - y_{n_k} = 0$ שכן כל ת"ס של סדרה מתכנסת מתכנסת לאותו הגבול. לכן מאריתמטיקה $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. מהרציפות $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$ בסתירה לכך ש־$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon_0$ לכל $k \in \mathbb{N}$. לכן f רציפה במידה שווה ב־A. ∎

משפט 88. יהיו $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. נניח $a < b$. יהי $a < c < b$. תהא $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ ונניח f רציפה במידה שווה ב־(a, c) וכן f רציפה במידה שווה ב־$[c, b)$, אז f רציפה במידה שווה ב־(a, b).

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. ידוע ש־f רב"ש ב־$(a, c]$ ולכן קיים $\delta_1 > 0$ כך ש־$\forall x, y \in (a, c]$ אם $|x - y| < \delta_1$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. f רציפה במ"ש ב־$[c, b)$ לכן קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x, y \in [c, b)$, אם $|x - y|$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. יהיו $x, y \in (a, b)$. נניח $|x - y| < \delta$. נפרק למקרים.

- אם $x, y \ge c$ אז מכיוון ש־$|x - y| < \delta \le \delta_2$ נובע ב־$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
- אם $x, y \le c$ אז מכיוון ש־$|x - y| < \delta \le \delta_1$ נובע ב־$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
- אם $x \le c \le y$ אז $|c - x| < |y - x| < \delta_1$ ולכן $|f(c) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. אז $|y - c| < |y - x| < \delta_2$ ולכן $|f(c) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. ניעזר בא"ש במשולש:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

- נניח $y \le c \le x$. בדומה. ∎

"אתה לא רוצה לשדר זלזול. מקרה 4 בדומה".

תרגיל 9. נניח ש־f רציפה במידה שווה ב־(a,c) ו־(b,c), ורציפה ב־c (כאשר $a<c<b$). נוכיח ש־f רציפה במידה שווה ב־(a,b).

משפט 89. הפונקציה $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש בקטע $[0,\infty)$.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$.

- יהיו $x,y\in[1,\infty)$. נניח $|x-y|<\delta$ עבור $\delta=\varepsilon$ ונקבל:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}<\frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\delta=\varepsilon$$

- בקטע $[0,1]$ נקבל ש־$\sqrt{x}$ רציפה ומשום שהקטע חסום היא רציפה במידה שווה לפי קנטור.

משום ש־$\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב־$[0,1]$ ו־$(1,\infty)$ סה"כ מהמשפט הקודם היא רציפה במ"ש. ■

משפט 90. תהא $f\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח f רציפה וגם קיים וסופי $\lim_{x\to\infty}f(x)$. הראו כי f רציפה במ"ש ב־$[a,\infty)$.

הוכחה. ויהי $\varepsilon>0$. אז קיים $M>0$ כך שלכל $x,y>M$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (קושי). הקטע $[a,M]$ הוא קטע קומפקטי, ומשום ש־f רציפה בו ולפי קנטור f רציפה בו במידה שווה. לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in[a,M]$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f()|<\frac{\varepsilon}{2}$. נתבונן ב־$\delta$. יהיו $x,y\in[a,\infty)$. נניח בה"כ $x\leq y$. נפרק למקרים.

- נניח $x\leq y\leq M$, מכיוון ש־$|x-y|<\delta$ נובע ש־$|(|f(x)-f(y))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- נניח $M\leq x\leq y$, נובע ש־$|(|f(x)-f(y))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- אם $x\leq M\leq y$ מאמ"ש המשולש:

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(M)|+|f(M)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

לכן f רציפה במידה שווה ב־$[a,\infty)$.

■

הערה 25. לא היה עובד להשתמש במשפט של האיחוד קטעים כאן – כי M תלוי ב־ε.

הערה 26. זה לא אמ"מ. לדוגמה $\sqrt{x}$ או x.

משפט 91. יהי $a,b\in\mathbb{R}$ ונניח $a<b$. תהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה. אז f רציפה במידה שווה ב־(a,b) אמ"מ קיימים ל־f הגבולות ב־a וב־b והסם סופיים.

הוכחה. $\Longrightarrow$ נסמן $\ell=\lim_{x\to a^+}f(x)$ ו־$m=\lim_{x\to b^-}$. נגדיר:

$$F\colon[a,b]\to\mathbb{R}\quad F(x)=\begin{cases}\ell & x=a\\ f(x) & x\in(a,b)\\ m & x=b\end{cases}$$

נבחין ש־F רציפה ב־$[a,b]$ ולפי קנטור, F רציפה במידה שווה ב־$[a,b]$. לכן $f=F|_{(a,b)}$ רציפה במידה שווה ב־(a,b).

$\Longleftarrow$ רוצים להוכיח שקיים גבול סופי ואין לנו מושג מה הוא. כלומר זה כנראה קושי. נניח כי f רציפה במ"ש ב־(a,b). יהי $\varepsilon>0$ וידוע קיו סם $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in(a,b)$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. נתבונן ב־δ. יהיו $x,y\in(a,a+\delta)$. אז $|x-y|<\delta$ ולכן $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. לפי קריטריון קושי יש ל־f גבול סופי ב־a מימין. באופן דומה יש ל־f גבול סופי משמאל ב־b. ■

שנה שעברה עסקנו בתכונות גלובליות של פונקציות רציפות. עתה נתחיל לדבר על הנושא המכעט אחרון, גזירות.

גזירות

"למי אתה מאמין? לניוטון או לייבניץם'

"אני לא זוכר איך קוראים לך, כי אתה אף פעם לא מדבר איתי אלא רק עם האנשים הקרובים אליך"

אז מכאן התחיל החדו"א. האינטואציה הגיאומטרית הוא מציאת ה־slope של המשיק בנקודה מסוימת.

הגדרה 56. בהינתן $f\colon I\to\mathbb{R}$, וכן $x_0\in I$ בפנים הקטע (איננה נקודת קצה). נאמר ש־f גזירה ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הערה 27. גזירות היא תכונה נקודית, לוקאלית.

סימון 15. בהנחה שהגבול ב־x_0 של הפונקציה f קיים, נסמן $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ או $f'(x_0)$.

משפט 92. f גזירה ב־x_0 אמ"מ קיים וסופי:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

"עוד הגדרה שקשורה לזה שבמממד אחד היא לא ממש makes sense"

הגדרה 57. תהי $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$ בפנים הקטע. f תקרא דיפרנציאבילית ב־x_0 כאשר קיימת העתקה לינארית $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת שהגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{x-x_0}=0$.

בממד אחד זה לא ממש מעניין. מה זה אומר? נתחיל מהגבול של $\lim_{x\to x_0}f(x)-g(x)=0$, שאומר שבגבול הן הולכות לאותו המקום. זה אומר שאפשר לעשות "משפט השוואה", אפשר להציב באחת ולקבל קירוב של השנייה. גם בהגדרה של דיפרנציאביליות יש לנו שתי פונקציות. מה המשמעות של כך ש־:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-f(x_)}{x-x_0}$$

אומרת? זה אומר שלא רק ש־g קירוב טוב ש־f, אלא גם שכאשר מחלקים ב־$x-x_0$ ששואף ל־0 הקירוב נשאר טוב. הקירוב הזה הולך לאפס יותר מהר מזה ש־$x-x_0$ הולך לאפס. ההגדרה של דיפרנביאביליות אומרת שאפשר לקרב את f בנקודה ע"י פונקציה לינארית, והקירוב הזה יותר מהיר מ־$x-x_0$.

במשתנה אחד, f גזירה ב־x_0 אמ"מ f דיפרנציאבילית. ההעתקה הלינארית T הזו נקראת הדיפרנציאל של f ב־x_0.

משפט 93. תהי $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהי $x_0\in I$ בפנים הקטע. אם f גזירה ב־x_0 אז f רציפה ב־x_0.

הוכחה. נניח ש־f גזירה ב־x_0 ונגדיר $h\colon I\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$h(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ f'(x_0) & x=x_0\end{cases}$$

לכל $x\in I$. נבחין ש־f גזירה ב־x_0 ולכן:

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=h(x)$$

לכן h רציפה ב־x_0. מאריתמטיקת גבולות נקבל:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=\lim_{x\to x_0}h(x)(x-x_0)$$

ומכאן ש־f רציפה ב־f_0. ■

דוגמאות.

- נתבונן בפונקציה $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^n$. נבחין שלכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים ש־f גזירה בו ומתקיים $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$.

  הוכחה. לול ראיתי את ההוכחה הזו במכינה של אודיסאה בכיתה ח'. יהי $x_0\in\mathbb{R}$. ניעזר בבינום של ניוטון, אריתמטיקה ורציפות פולינומים.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{j=0}^{n-1}x^jx_0^{n-1-j}=\sum_{j=0}^{n-1}\lim_{x\to x_0}x^jx_0^{n-1-j}=\sum_{j=0}^{n-1}x^{n-1}=nx_0^{n-1}$$

■

- נבחין ש־sinM גזירה בכל $\mathbb{R}$ ונגזרתה $\cos$.

  הוכחה. יהי x_0. לכל $x\neq x_0$:

$$\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\frac{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}=\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}$$

  מהרציפות של $\cos$ ב־x_0 ומהגבולות וההרכבה $\lim_{x\to x_0}\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)=\cos x_0$ ומהרציפות של $\frac{\sin x}{x}$ ב־0 ומגבולות וההרכבה $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{\frac{x-x_0}{2}}=1$ ומאריתמטייקה גבולות, נקבל:

$$\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0$$

■

- **דוגמה 3.** יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נמצא את הנגזרת של e^x ב־x_0.

הוכחה. האמת את ההוכחה הזו ראיתי בכיתה ט' במתמטיקה ב'. יש לי אותה מוקלדת עם יותר פירוט בסיכום של e במתמטיקה B. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נבחין ש־:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

ובפרט:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(כי ראינו את שיעור שעבר) ומגבולות והרכבה $\lim_{x\to x_0} \frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0} = 1$. מאריתמטיקה סיימנו. ■

- נגדיר $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = xD(x)$. נוכיח ש־f אינה גזירה באף נקודה ב־$\mathbb{R}$.

הוכחה. לכל $x_0 \neq 0$, הראינו ש־f אינה רציפה ב־x_0. לכן היא אינה גזירה ב־x_0. נטפל עתה ב־0 (נראה שהיא אומנם רציפה אך לא גזירה בו). נתבונן ב־$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ ויהי $\delta > 0$. בקטע $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ יש רציונלי x ורציונלי y כך ש־:

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(y) - f(0)}{y - 0}\right| = |D(x) - D(y)| = 1 \geq \varepsilon_0$$

מקריטריון קושי לא קיים $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. ■

- עבור $x^2D(x)$, היא אומנם עדיין לא רציפה ב־$x_0 \neq 0$, אבל ב־0 יקרו דברים קצת פחות מנוונים:

הוכחה. הראינו ש־$\lim_{x\to x_0} xD(x) = 0$ והראינו ש־$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2D(x)}{x} = \lim_{x\to x_0} xD(x) = 0$. ■

נגזרות חד־צדדיות

הגדרה 58. תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ המקיימת $\exists\delta > 0\colon (x_0 - \delta, x_0) \subseteq I$. אז נאמר שנאמר ש־$f$ גזירה משמאל ב־x_0 כאשר קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

הגדרה 59. נגזרת מימין מוגדרת באופן דומה

סימון 16. נסמן את הגזירה משמאל ב־$f'_-(x_0)$ ומימין $f'_+(x_0)$.

אריתמטיקה של גזירות

משפט 94. יהיו $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ותהי $x_0 \in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f, g גזירות ב־x_0. אז:

- לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\alpha f + \beta g$ גזירה ב־x_0 וכן $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ (הנגזרת לינארית)
- מתקיים ש־fg גזירה ב־x_0 ומתקיים ש־$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x) + f(x_0)g'(x_0)$.
- אם $g(x_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גזירה ב־x_0 ומתקיים:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

נוכיח את (2) ואת השאר לבית.

הוכחה. לכל $x \neq x_0$ מתקיים ש־:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}$$

$$= f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ידוע ש־f גזירה ב־x_0 ולכן רציפה ב־x_0. לכן $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. g גזירה ב־x_0 ולכן $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$. מאריתמטיקה קיבלנו:

$$f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)g(x_0) \qquad g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)f'(x_0)$$

מאריתמטיקה סיימנו:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{x - x)} = f(x_0)g'(x_0) + g'(x_0)g(x_0)$$

■

כלל השרשרת

משפט 95. תהא $f\colon I \to J$ ותהא $g\colon J \to \mathbb{R}$. נניח $x_0 \in I$ בפנים הקטע. נניח ש־f גזירה ב־x_0 וגם g גזירה ב־x_0. אז $g \circ f$ גיזרה ב־x_0 וכן $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

הוכחה שגויה, ידועה בכינוייה הוכחהחהחה.

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מה הבעיה בהוכחהחהחה? שלא מובטח ש־$f(x) - f(x_0) \neq 0$. מותר להניח $x \neq x_0$ (כי אנחנו בגבול), אבל הטענה השנייה לא עובדת. לדוגמה עבור פונקציה קבועה ההוכחהחהחה לא עובדת. יש כאן עוד בעיה. במשפט של הרכבה, דרשנו שהגבול של הפונקציה הפנימית מקיימת כל מני דברים. לכן נצטרך לעשות חלוקה למקרים. ■

הערה 28. שיגאות מעין אילו הרבה פעמים חומקות מתחת לרדאר. אבל גם הוכחה שגויה אפשר לתקן – אם נפצל למספיק מקרים נוכל לטפל בבעיה.

הוכחה נכונה.

- במקרה הראשון, $f'(x_0) \neq 0$. ואז הגבול $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ומכאן $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ ובפרט $f(x) \neq f(x_0)$. בקטע הזה אפשר לבצע את ההוכחהחהחה – מתקיימים תנאי המשפט על גבולות והרבה, ולכן הגבול:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \to x_0} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = g'(f(x_0))$$

f גזירה ב־f_0 ולכן $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. מאריתמטיקה קיבלנו $g'(f(x_0))f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}$.
- אם $f'(x) = 0$. במקרה זה, לביטוי:

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

קיים וסופי (הגדרת הנגזרת). לכן קיים $M > 0$ כך שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $y \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$, מתקיים ש־$\left|\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}\right| > M$ (ברה יכולת פשוט להגיד שהדבר הזה חסום ע"י M בסביבת δ נקובה ולגמור עניין). יהי $\varepsilon > 0$. אז קיים $\delta_2 > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, מתקיים $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| < \frac{\varepsilon}{M}$ (הגדרת הגבול). f רציפה ב־x_0 ולכן קיים $\delta_3 > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \delta$. נסמן ב־$\eta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ ויהי $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. נחלק למקרים.
  - אם $f(x) = f(x_0)$, אז $\left|\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}\right| = 0 < \varepsilon$ וסיימנו.
  - אחרת:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{|x - x_0|} = \left|\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)}\right| \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

סה"כ:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = 0 = g'(f(x_0))f'(x)$$

■

מסקנות נוספות

משפט 96. תהא $f\colon I \to J$ פונקציה חח"ע ועל, כאשר I, J קטעים פתוחים (אך לא בהכרח, סתם למרצה לא בא להתעסק עם הקצוות). אז f^{-1} גזירה בכל נקודה ב־J ומתקיים $\forall y \in J\colon (f^{-1}(y))(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

הוכחהחהחה. ידוע שלכל $x \in J$ מתקיים $(f \circ f^{-1})(x) = x$. מכלל השרשרת נקבל $f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$. נחלק ונקבל את הדרוש.

מה הבעיה בהוכחהחהחה? כלל השרשרת דרש שהפונקציה גזירה בנקודה. לא הראינו את זה. ■

הוכחה נכונה. יהי $y \in J$. נניח $f^{-1}(f'(y_0)) \neq 0$. מסמן $x_0 = f^{-1}(f'(y_0))$. ידוע $f'(x_0) \neq 0$, לכן קיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך שבה לכל $x \in U$ מתקיים $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$. נגדיר $g\colon U \to \mathbb{R}$. לכל $x \in U$ מתקיים:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} & x \neq x_0 \\ \frac{1}{f^{-1}(x_0)} & x = x_0 \end{cases}$$

ניתן להבחין ש־g רציפה, ובפרט רציפה ב־x_0. f^{-1} רציפה ב־y_0. לכן $g \circ f^{-1}$ רציפה ב־y_0. כלומר:

$$\lim_{y \to y_0} (g \circ f^{-1})(y) = (g \circ f^{-1})(y_0) = g(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

מצד שני,

$$\lim_{y \to y_0} (g \circ f^{-1})(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f'(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

לכן f^{-1} גזירה ב־y_0 ומתקיים

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

וסיימנו. ■

דוגמה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$, ונגדיר $f(x) = \sqrt[n]{x}$ לכל $x \in (0,\infty)$. נשים לב ש־$\mathrm{Range} f = (0,\infty)$. נגדיר $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ על ידי $g(x) = x^n$ לכל $x \in (0,\infty)$. אז $f = g^{-1}$. לכן f גזירה בכל נקודה $(0,\infty)$ ומתקיים לכל $y \in (0,\infty)$ ש־$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))}$. סה"כ:

$$f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))} = \frac{1}{n \cdot (f(y))^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

דוגמה. יהיו $m,n \in \mathbb{N}^+$. נגדיר $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ ע"י $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$. אז אפשר לנסח $f(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ ומכלל השרשרת נקבל ש־$f(x) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$. סה"כ באופן כללי $(x^q)' = qx^{q-1}$ לכל $q \in \mathbb{Q}_+$.

לבית, להוכיח ל־$\mathbb{Q}_-$ וכן ל־$\mathbb{R}$, ש־$(x^r)' = rx^{r-1}$ לכל $r \in \mathbb{R}$.

דוגמה. יהי $a > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נקבל $f(x) = e^{x \ln a}$ ומכלל השרשרת קיבלנו (הבהרה, לא גזרנו $\ln$, גזרנו קבוע) $f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$.

דוגמה. נגדיר $f(x) = \ln x$ לכל $x \in (0,\infty)$. נסמן $g(x) = e^x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נבחין ש־$f = g^{-1}$ וכן g' אינה מתאפסת באף נקודה. מכאן ש־:

$$f'(x) - \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(n)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

דוגמה. נגדיר $f(x) = \arctan x$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נבחין $g(x) = \tan x$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. אז $f = g^{-1}$ ולכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$. לכן f גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיים:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \arctan(x)}} = \frac{1}{1+x^2}$$

תכונות גלובליות של פונקציות גזירות

משפט 97 (המשפט הלא אחרון של פרמה)**.** תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהי $x_0 \in I$ בפנים הקטע. נניח f גזירה ב־x_0 ונניח של־f יש קיצון מקומי ב־x_0. אז $f'(x_0) = 0$.

הערה 29. המשפט הזה הוא חד־כיווני. לא כל נקודה סטרציונרית היא נקודת קיצון.

הגדרה 60. ל־f יש מקסימום מקומי ב־x_0 כאשר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $f(x) \leq f(x_0)$.

הגדרה 61. מינימום מקומי בדומה.

הוכחה למשפט פרמה הלא אחרון. נניח x_0 מקסימום מקומי (ההוכחה עבור מינימום בדומה). x_0 פנימית בקטע ולכן מוגדרות (הנחת גזירות ושוות הנגזרות החד־צדדיות בנקודה. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $f(x) \leq f(x_0)$. לכן לכל $x \in (x - \delta, x + \delta)$ נקבל:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

(משפט לפיו גבול משמר א"ש חלש). לכן $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. באופן דומה מימין נקבל $f'(x_0)$. לכן $f'(x_0)$. ■

המשפט היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי (להבדיל מהמשפט היסודי של החד"א)

משפט 98 (משפט רול)**.** תהא $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. נניח ש־$f$ רציפה בקטע ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b), $f(a)=f(b)$. אז קיימת $c\in(a,b)$ שבה $f'(c)=0$.

הוכחה. 1. מקרה ראשון: נניח f קבועה ב־$[a,b]$. נתבונן ב־$c=\frac{a+b}{2}$ ובסביבת c היא קבועה כלומר $f'(c)=0$ וסיימנו.

2. במקרה השני, קיים $x\in(a,b)$ כך שלכל $f(x)\neq f(a)$, בה"כ $f(x)>f(a)$, f רציפה ב־$[a,b]$ ולכן לפי וויראשטראס יש לה מקסימום בקטע, כלומר קיימת $c\in[a,b]$ כך שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f(x)\leq f(c)$. ידוע $f(c)\geq f(x_0)>f(a)$ לכן $c\neq a$ וגם $c\in(a,b)$ ולכן לפי פרמה מכיוון ש־f גזירה ב־c נובע ש־$f(c)=0$'.

■

משפט 99 (משפט ערך הביניים של לגראנג')**.** תהי $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b). אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הערה 30. מקרה פרטי של רול, עבור $a=b$.

הוכחה. נגדיר: (נחסר את המיתר כדי להשתמש ברול)

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

מאריתמטיקה h רציפה ב־$[a,b]$ וכן גזירה ב־(a,b). כמו כן $h(a)=h(b)=0$. לכן h מקיימת את תנאי משפט רול ב־$[a,b]$ כלומר קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$h(c)=0$, ומתקיים:

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כנדרש.

■

משפט 100. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I וכי לכל $x\in I$ מתקבל $f'(x)=0$. הראו כי f קבועה.

הוכחה. יהיו $x,y\in I$ ונניח $x<y$. בקטע $[x,y]$ f רציפה. בקטע (x,y) f גזירה. לכן קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־:

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

ו־$f'(c)=0$ כלומר $f(x)=f(y)$.

■

הערה 31. הוכחה דומה מראה שאם f' שלילית אז f יורדת ואם f' חיובית אז f עולה.

משפט 101. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ונניח כי f גזירה בכל I. הראו ש־f עולה ב־I אמ"מ $\forall x\in I\colon f'(x)\geq 0$.

הוכחה. $\Longleftarrow$ אותה הפריקינג הוכחה. יהיו $x,y\in I$ ונניח $x<y$. f רציפה ב־$[x,y]$ וכן גיזרה ב־(x,y). מכאן ש־f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' וקיימת $c\in(x,y)$ כך ש־:

$$0\leq f'(x)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

כלומר $f(x)\leq f(y)$ וסיימנו.

$\Longrightarrow$ יהי $x_0\in I$. קיים $\delta>0$ כך ש־$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I$. מהגדרה $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ידוע $f(x)\leq f(x_0)$ כי הנחנו שהיא עולה, ואז לכל $x\in(x_0-\delta,x_0)$ קיבלנו $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$. מכאן $f'(x_0)\geq 0$. ז

■

המשך נגזרות ולופיטל

משפט 102 (משפט דרבו)**.** תהא $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה ב־(a,b). אז $f'\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ מקיימת את תכונת דרבו.

הוכחה. יהיו $a<x_0<y_0<b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda\in(f'(y_0),f'(x_0))\uplus(f'(x_0),f'(y_0))$. נוכיח תחילה בעבור $\lambda=0$. בה"כ $f'(x_0)<0<f'(y_0)$. ידוע f רציפה ב־$[x_0,y_0]$ (ממשפט) ולכן לפי וויראשטראס מקבלת מינימום בקטע, דהיינו $\exists c\in[x_0,y_0]\colon\forall x\in[x_0,y_0]\colon f(c)\leq f(x)$. מהגדרת נגזרת (המטרה היא להראות באופן טרחני ש־c לא מינימום קיצון, אלא מינימום מקומי):

$$0>f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_)}{x-x_0}$$

כלומר קיים $\delta > 0$, כל שלכל $x_0 < x < x_0 + \delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right| < |f'(x_0)|$$

בפרט:

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f(x_0)}{x+\frac{\delta}{2}-x_0} < f'(x_0)+|f'(x_0)| = 0$$

(חוקי כי $0 < \frac{\delta}{2} < \delta$) כלומר נובע $f(x_0+\frac{\delta}{2}) < f(x_0)$ ולכן $c \neq x_0$. באופן דומה $c \neq y_0$. מכאן $c \in (x_0, y_0)$ וממשפט פרמה $f'(c) = 0$.
המקרה בו $\lambda \neq 0$ נובע באופן טרוויאלי ע"י הזזה אנכית של הפונקציה וחזרה למקרה בו $\lambda = 0$. המרצה עושה את זה פורמלית אבל אין לי הרבה זמן עד ההרצאה ואני צריך להשלים הכל. ■

משפט 103 (משפט קושי)**.** יאי עוד משפט קושי. תהאנה $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ונניח כי שתיהן רציפות ב־$[a,b]$, שתיהן גזירות ב־(a,b), ולכל $x \in (a,b)$, מתקיים $g'(x) \neq 0$. אז $g(b) \neq g(a)$ וגם קיימת $c \in (a,b)$ כך ש־$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

הוכחה. לפי רול מכיוון ש־g רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), וגם $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$, נובע ש־$g(b) \neq g(a)$.
עתה נגדיר:

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

אז h רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) שכן היא צירוף לינארי של פונקציות גזירות ורציפות. נבחין ש־$h(b) = 0 = h(a)$. לכן ממשפט רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש־$h'(c) = 0$. לפי כללי גזירה:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(c)} \cdot g'(c)$$

ומכאן

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

כנדרש. כמובן שממש לא עשינו אינטגרל וסתם הפלצנו את h משום מקום. ■

תרגיל 10. יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ ותהא $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה. נניח ש־$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. הראו כי f' על $\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $\lambda \in \mathbb{R}$. מתקיים $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש־:

$$\forall x \in (b-\delta, b)\colon f(x) > \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |\lambda|(b-a)$$

אינטואיטיבית λ צריך ליפול בין $b - \frac{\delta}{2}$ לבין $\frac{a+b}{2}$, ולכן הדרישה לעיל. ממנה נסיק בפרט:

$$f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > (b-a)\lambda$$

נחלק אגפים ונקבל:

$$\frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{\delta}{2}-\frac{a+b}{2}} > \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} > \lambda$$

בקטע $[\frac{a+b}{2}, b-\frac{\delta}{2}]$ f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' ולכן קיימת c בקטע המדובר כך ש־:

$$f'(c) = \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{\delta}{2}-\frac{a+b}{2}} > \lambda$$

באופן דומה קיימת $d \in (a,b)$ כך ש־$f'(d) < \lambda$ (אותו הדבר הפוך), ואז ממשפט דרבו ישנה $\alpha \in (a,b)$ כך ש־$f'(\alpha) = \lambda$. לכן f' על $\mathbb{R}$. ■

משפט 104 (משפט לופיטל 1). תהאנה $f,g\colon T\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$. נניח ש־$a$ נקודת הצטברות של $I\setminus\{a\}$. עוד נניח ש־f,g רציפות ב־$I\setminus\{a\}$ וכן f,g גזירות ב־$I\setminus\{a\}$. נניח ש־$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ (במקרים האחרים אפשר פשוט להשתמש בכללי גבולות כרגיל), וכן קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$. תחת כל התנאים הללו $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ (כאשר a ו־ℓ מוגדרים במובן הרחב).

הערה 32. לופיטל גנב את המשפט ממישהו אחר בלה בלה בלה

הוכחה. בהרצאה נוכיח רק את המקרה בו $a\in I$ ו־$\ell\in\mathbb{R}$ (באופן כללי, צריך לפצל ל־4 מקרים, בהתאם להיותם של a,ℓ מוגדרים במובן הרחב או לאו). בה"כ f,g מוגדרות ב־a ומתקיים $f(a)=g(a)=0$ (פורמלית, נגדיר $\tilde{f},\tilde{g}$ חדשות שמוגדרות ב־a). נוכיח $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$, והגבול מימין באופן דומה. יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta>0$ כך שלכל $a-\delta<x<a$ מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $a-\delta<x<a$. בקטע $[x,a]$ מתקיימים תנאי משפט קושי: f,g רציפות, גזירות, ו־$\forall\alpha\in(x,a)\colon g'(\alpha)\neq0$. מכאן קיימת $a-\delta<x<c<a$ כך ש־$frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, וסה"כ:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

וסיימנו את הוכחת הגבול לפי הגדרה. ■

למה 10 (הלמה של שטולץ). תהאנה a_n,b_n סדרות ונניח ש־b_n מונוטונית ממש ו־$b_n\to+\infty$. אם קיים וסופי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ אז קיים וסופי $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ וגבולותיהם שווים (לופיטל 2 בדיד).

משפט 105 (משפט לופיטל 2). תהאנה $f,g\colon I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ כאשר I קטע ו־a נקודת הצטברות. נניח ש־f,g גזירות ב־$I\setminus\{a\}$ ו־$\forall x\in I\setminus\{a\}\colon g'(x)\neq0$. עוד נניח $\lim_{x\to a}|g(x)|\to\infty$ (המקרה היחיד שבאמת מעניין אותנו זה כשגם f שואף לאינסוף בנקודה) וקיים $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$. אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וערכו ℓ.

הוכחה. נוכיח ש־$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, והכיוון השני באופן דומה. גם כאן, נתעסק רק במקרה בו a סופי והגבול סופי (של חלוקת הנגזרות), ועקרונית צריך לפרק למקרים. תהא x_n סדרה המקיימת $x_n<x_{n+1}\in I\setminus\{a\}$ וכן גבולה $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. לכל $x\in I\setminus\{a\}$, מתקיים $g'(x)\neq0$ ולכן מדרבו g' דומת סימן בקטע. ללא הגבלת הכלליות, $g'(x)>0$ (במובן הרחב) ולכן היא מונוטונית עולה ומתקיים $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$. נסיק ש־$g(x_n)$ סדרה מונוטונית עולה ממש וגבולה $+\infty$. יהי $n\in\mathbb{N}$. בקטע $[x_n,x_{n+1}]$ הפונקציות f,g מקיימות את תנאי משפט קושי. לכן קיים $z_n\in(x_n,x_{n+1})$ כך ש־:

$$\frac{f(x_{n+1}-f(x_n))}{g(x_{n+1}-g(x_n))}=\frac{g'(z_n)}{g'(z_n)}$$

ומסנדוויץ', בהכרח $\lim_{n\to\infty}z_n=a$. כמו כן לכל $n\in\mathbb{N}$ בהכרח $z_n\neq a$. לפי היינה $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1}-g(x_n))}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}=\ell$ לפי הלמה של שטולץ קיבלנו $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\ell$ ומהיינה קיבלנו את הדרוש. ■

תרגיל 11. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

נגדיר $f,g\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\cos x-1$ ו־$g(x)=x^2$. שתיהן רציפות וגזירות ב־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ וב־0 גבולן 0. מלופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

סימנו את השוויון שנובע מלופיטל ב־$\overset{\text{LH}}{=}$ כדי להבהיר שהוא נכון בתנאי שהגבול מימין אכן מוגדר (אחרת – אי אפשר להגיד שום דבר על הגבול לפי לופיטל!).

תרגיל 12. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2x}}$$

פתרון. נגדיר $f(x)=e^{\frac{\ln\cos x}{\tan^2x}}$ לכל $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. נבחין ש־$\lim_{x\to0}\ln\cos x=0$ וכן $\lim_{x\to0}\tan^2x=0$ מרציפות וכן שתיהן גזירות, וערכן $(\ln\cos x)'=\frac{-\sin x}{\cos x}$ וכן $(\tan^2x)=\frac{2\tan x}{\cos x}\neq0$. הגבול של החלוקה קיים וערכו:

$$\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\tan^2)x'}=\lim_{x\to0}\frac{-\cancel{\tan x}}{2\cancel{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}}=\frac{-1}{2}$$

מהרציפות. סה"כ מלופיטל $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2x}=-\frac{1}{2}$ ולכן $\lim_{x\to0}f(x)=e^{-0.5}$ וסיימנו. ■

תרגיל 13. נתבונן בגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

מלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

מהגבול הקודם (כלומר תיאורטית היינו צריכים להפעיל לופיטל פעמיים)

3 נגזרות מסדר גבוה ופולינום טיילור

הגדרה 62. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. ניתן להגדיר רקורסיבית את $f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)}(x_0))'$ כאשר $f^{(0)} = f$ בסיס. נבחין שלשם כך נדרוש ש־$f^{(n)}$ מוגדרת בסביבה של x_0.

סימון 17. לעיתים $f^{(n)}$ תסומן גם ב־$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$.

דוגמה: נבחין שהפונקציה $f(x) = x^m$ עבור $m\in\mathbb{N}^+$ קבוע מתקיים:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & n\le m\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x &&\Longrightarrow && f^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x) &= \cos x &&\Longrightarrow && f^{(n)}(x) = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x) &= e^x &&\Longrightarrow && f^{(n)}(x) = e^x \end{aligned}$$

הגדרה 63. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. נגדיר את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0 ע"י:

$$T_n(x) := \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

ואת השארית להיות:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

למה 11.
1. T_n גזירה מכל סדר
2. R_n גזירה n פעמים ב־x_0
3. לכל $i\in[n]\cup\{0\}$ בהכרח $R_n(x_0) = 0$ וכן $T_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

משפט 106. מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

מסקנה 10. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$ ונניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. אז קיימת $\omega\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת $\omega(x_0)=0$ ו־ω רציפה בנקודה x_0, וגם:

$$R_n(x) = \omega(x)(x-x_0)^n$$

הוכחה. ההוכחה בעיקרה נשארה לבית, אבל ω מוגדרת ע"י:

$$\omega(x) = \begin{cases}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} & x\ne x_0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ואנחנו אמורים והמשיך מכאן. ■

למה 12. בהינתן $f,g\colon A\to\mathbb{R}$ וכן x_0 נקודת הצטברות של A, אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell>0$ וגם $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$ אז מתקיים $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\ell^m$.

תרגיל 14. נגדיר $f(x)=\ln(1+x)$ בתחום $(-1,\infty)$. אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

תרגיל 15. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל אלא באמצעות טיילור.

פתרון.

$$\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=\underbrace{\cos^2 x}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}}_{\to 1}+\cdots$$

כנראה מה שמחברים בסוף זניח כי משהו משהו ω משהו והמשהו R_n ואני מקווה שירחיבו יותר בתרגול. ■

תרגיל 16. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל ולא באמצעות טיילור אלא באמצעות כלים אלמטריים שכבר ראינו לפני ההרצאה.

פתרון.

$$(\cos x)^{\tan^{-2}x}=\underbrace{\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)}_{\to e}^{\overbrace{\frac{\cos x-1}{\tan^2 x}}^{\to -\frac{1}{2}}}=e^{-0.5}$$

■

משפט 107. תהאנה $f,g\colon A\to\mathbb{R}$. תהא x_0 נקודת הצטברות של A. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in(0,\infty)$ וכן $\lim_{x\to x_0} g(n)=m\in\mathbb{R}$. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\ell^m$.

הוכחה. מרציפות $\ln$ וממשפט על רציפות והרכבה, נקבל $\lim_{x\to x_0}\ln(f(x))=\ln(\ell)$. מאריתמטיקת גבולות $\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot\ln f(x)=m\ln\ell$. מרציפות e^x וממשפט על רציפות והרכבה, נקבל:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{m\ln l}=\ell^m$$

■

הערה 33. השתמשנו חזק בזה ש־ℓחיובי, כי $\ln$ רציפה רק בעבור מספרים חיוביים.

לא צריך להסביר את זה. אפשר להפעיל את זה במיידית. אם $\ell=0$ צריך לעבוד יותר קשה. יש צורך גם לדבר בקצרה על זה שהגבול מוגדר, משום ש־$f(x)$ היא bounded away from zero.

משפט 108. תהא $f(x)\colon I\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ב־$x_0\in I$ (בפנים הקטע). נניח כי $f'(x_0)=0$. אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 מינימום. אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום.

ה"בעיה" בהוכחה של הטענה הזו, היא שאנחנו יודעים ש־f גזירה **רק ב־**x_0. לכן אי אפשר לעשות לגראנג'. זכרו שהגדרנו מינימום מקומי כמצב בו קיימת סביבה שבה כל הנקודות גדולות או שוות לנקודה.

הוכחה. ידוע f גזירה פעמיים ב־x_0 ולכן קיימת סביבה של x_0 שבה f גזירה (אחרת הנגזרת השנייה בנקודה אינה מוגדרת). ללא הגבלת הכליות f גזירה בכל I (למה בה"כ כי אפשר פשוט לצמצם ולהגדיר $\tilde{f}=f|_I$, או להגדיר דלתא ולעשות מינימומים). מהנתון:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)>0$$

ולכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>\frac{f''(x_0)}{2}>0$$

(כלומר הוא bounded away). לכן לכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $0=f'(x_0)>f'(x)$. מנימוקים דומים קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta_2$ מתקיים $\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>\frac{f''(x_0)}{2}>0$. לכן לכל $x_0<x<x_0+\delta_2$ מתקיים $0=f'(x_0)<f'(x)$. נתבונן ב־$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. יהי x. נניח x בסביבת δ של x_0.

- אם $x=x_0$ אז $f(x)=f(x_0)\geq f(x_0)$ וסיימנו.
- נניח $x_0-\delta<x<x_0$ אז בקטע $[x,x_0]$, f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' ומכאן קיימת $x\in(x,x_0)$ כך ש־$0>f'(c)=\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$. לכן, ומכיוון ש־$x<x_0$, בהכרח $f(x_0)<f(x)$.
- נניח $x_0<x<x_0+\delta$. בדומה.

■

עיקרי ההוכחה: להראות שמכיוון שיש גבול, מכן אחד מהצדדים כל הנגזרת היא bounded away from zero, ומכיוון שהיא גזירה ורציפה באיזושהי סביבה, אפשר להפעיל לגראנג' ולקבל את מה שצריכים.

נוכל לתת הוכחה שקצת פחות נוגעת בגבולות ובדלתאות. "פולינום טיילור, לא טור! לילי חזרה תשובה◻'

הוכחה נוספת. f גזירה פעמיים ב־x_0, לכן לפי משפט קיימת $\omega\colon I\to\mathbb{R}$ המקיימת כי ω רציפה ב־x_0, $\omega(x_0)=0$ וגם לכל $x\in I$ מתקיים:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)(x-x_0)^2+\omega(x)(x-x_0)^2$$

ידוע $\lim_{x\to x_0}\omega(x)=0$. מהרציפות של ω ב־x_0 קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ כך ש־$\omega(x)>-\frac{f''(x_0)}{4}$ (רציפות, כי אנחנו רוצים סביבה שאיננה נקובה). יהי x בסביבת ה־δ של x. אז (מהמשוואה הקודמת):

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\left(\frac{f''(x_0)}{2}+\omega(x)\right)}_{>\frac{f''(x_0)}{4}>0}\geq f(x_0)$$

וסיימנו. ■

ישנה גרסה מוכללת באינדוקציה לטענה זו. (או לא באינדוקציה אם עושים עם טיילור)

משפט 109. יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ גזירה $n+1$ פעמים ב־x_0. נניח $f^{(i)}(x_0)=0$ וגם $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. אז אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אז יש ל־f מינימום ב־x_0. אם $f^{(n+1)(x_0)<0}$ אז יש ל־f מקסימום ב־x_0. באותם התנאים, אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אז אין קיצון, יש פיתול.

תרגיל 17. חשבו את

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x^2-\sin^2 x}$$

או הוכיחו שאינו קיים.

לופיטל יעבוד פה מתישהו. אבל good luck בלגזור את המונה. של עומד להתפשט ולגדול כמו סרטן בגוף של סבא שלי. אופציה אחת, ללהפוך את הלופיטל לנחמד, היא לבוא ולהגיד $x^2\sin^2 x=x^4\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}$. החלק הימני שואף ל־1, ולשאר אפשר לעשות לופיטל גם 4 פעמים וזה יהיה בסדר (מה איכפת לי לגזור מונום). זה חוקי מהטענה הבאה: נניח של־f אין גבול ב־x_0, ונניח שהגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)=\ell\neq 0$, אז $f\cdot g$ חסרת גבול ב־x_0. אם היינו מוציאים גבול שהוא איננו 0, זה לא היה עובד, כלומר אם $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ היה שואף למקום אחר. במקום זה, נעשה טיילור. ולהלן הפתרון עם טיילור.

פתרון. נפתח את $\sin^2 x$ לפולינום מסדר 4 עם שארית פאנו. נגדיר $f(x)=\sin^2 x$. אז:

$$f(x)=\sin^2 x\quad f'(x)=2\sin x\cos x=\sin(2x)\quad f''(x)=2\cos(dx)\quad f'''(x)=-4\sin(2x)\quad f^{(4)}(x)=-8\cos x$$

לכן קיימת $\omega\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$\omega(0)=0$, ω רציפה ב־0 וגם לכל x מתקיים:

$$\sin^2 x=0+0x+\frac{2}{2}x^2+0x^3+\frac{-8}{4!}x^4+\omega(x)x^4=x^2-\frac{1}{3}x^4+\omega(x)x^4$$

לכן לכל x, מתקיים:

$$\frac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\frac{x^4-\frac{1}{3}x^6+\omega(x)x^6}{\frac{1}{3}x^4-\omega(x)x^4}=\frac{1-\frac{1}{3}x^2+\omega(x)}{\frac{1}{3}-\omega(x)}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1-0}{\frac{1}{3}-0}=3$$

■

למה היינו צריכים פולינום טיילור ממעלה 4? כי אחרת היינו מקבלים:

$$\sin^2 x=x^2+\omega(x)x^2\implies\frac{\cdots}{\cancel{x^2-x^2}+\omega(x)x^2}$$

כלומר המכנה הוא 0 ואנחנו עדיין בבעיה.

אגב, הנה הפתרון עם לופיטל.

לופיתרון.

$$\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\frac{x^4\overbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}^{\to 1}}{x^2-\sin^2 x}\overset{\text{LH}}{=}\frac{2x-\sin(2x)}{x^3}\overset{\text{LH}}{=}\frac{2-2\cos 2c}{12x^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\cos x2x}{x^2}$$

בשלב הזה אפשר גם לעשות זהויות טריגו ולעשות את זה סבבה. אם הייתם עושים שוב לופיטל ועושים $\frac{2\sin(2x)}{2x}$ זה כבר מוגזם ו"אני הייתי מוריד נקודות" (המרצה). ואיך עושים בלי לופי?

$$\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\cdot 1$$

■

תרגיל 18. חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan x-x)^{\frac{1}{x^3}}$$

או הוכיחו שאינו קיים.

פתרון. לכל $x\neq 0$, מתקיים:

$$(1+\arctan x-x)^{\frac{1}{x^3}}=\left((1+\arctan x-x)^{\frac{1}{\arctan x-x}}\right)^{\frac{\arctan x-x}{x^3}}=e^{\frac{\arctan x-x}{x^3}}=\cdots$$

כי כל הבפנוכו שואף ל־e (ממשפט שהוכחנו בתרגילי הבית + היינה במבטא גרמני). אפשר לעשות פולינום טיילור. אפשר גם לעשות לופיטל. ידוע $\lim_{x\to 0}\arctan x-x=0$ וגם $\lim_{x\to 0}x^3=0$. הן גזירות ורציפות ואנחנו יודעים את הנגזרת ובלה בלה ולכן:

$$\frac{\arctan x-x}{x^3}\overset{\text{LH}}{=}\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

אפשר גם לעשות טיילור ל־arctan. נחזור למעלה:

$$\cdots=e^{-\frac{1}{3}}$$

■

הערה 34. אל תציבו חצי גבול. הדבר הזה:

$$\lim_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$$

זה כמו הדבר הזה:

$$\frac{\cancel{6}4}{1\cancel{6}}=4$$

במקרה של $\frac{1}{x^2}$ ולא $\frac{1}{x}$ זה היה עובד, כי זה ב־0 שואף ל־$+\infty$, אבל צריך לנמק את כל זה. כי אפשר להגיד:

$$\lim_{x\to 0}(2+x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(2+x)}$$

וכל הדבר למעלה רציף ונחמד, ואפשר לעבוד איתו.

הערה 35. טור טיילור סביב 0 קרוי טור מקלורן. כנ"ל על טורים.

עתה נוכיח משפט משיעור שעבר.

משפט 110. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ נקודת ספנים. נניח f גזירה n פעמים ב־x_0. נסמן ב־T_n את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0. נסמן ב־R_n את השארית המתאימה. אז:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

הוכחה. הבחנה: T_n' הוא פולינום טיילור של f' מסדר $n-1$ סביב x_n, ויתר על כן, R_n' היא השארית המתאימה. הסיבה:

$$\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_k)^k\right)'=\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^k=\frac{(f')^{(k-1)(x_0)}}{(k-1)!}(x-x_0)^k$$

ההוכחה באינדוקציה על n.

• בסיס: עבור $n=1$ נקבל:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_1(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_1(x)-R_1(x_0)}{x-x_0}=R_1'(x_0)=0$$

• נניח נכונות בעבור n (**לא הנחנו ל־f ספציפית**). אז T_{n+1}' פולינום טיילור מסדר n של f' ו־R_{n+1}' השארית המתאימה (כי הנגזרת לינארית והכל). לכן:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}'(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

אפשר לעשות לופיטל. אפשר גם לעשות לגראנג'. יהי $\varepsilon>0$. מכאן שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in I$, אם $0<|x-x_0|<\delta$, אז:

$$\left|\frac{R_{n+1}'(x)}{(x-x_0)^n}\right|<\varepsilon$$

יהי $x\in I$. נניח $0<|x-x_0|<\delta$. בקטע שבין x ל־x_0, R_{n+1} מקיימת את תנאי משפט לגארנג'. לכן קיים c בין x ל־x_0 כך ש־:

$$\frac{R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x_0)}{x-x_0}=R_{n+1}'(c)$$

סה"כ (ניעזר בכך ש־$R_{n+1}(x_0)=0$ ושהנגזרת בנקודה הזו היא 0):

$$\left|\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\right|=\left|\frac{\frac{R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x_0)}{x-x_0}}{(x-x_0)^n}\right|=\left|\frac{R_{n+1}'(c)}{(x-x_0)^n}\right|<\left|\frac{R_{n+1}'(c)}{(c-x_0)^n}\right|<\varepsilon$$

ואז כנראה סיימנו.

■

"לופיטל גורם לריפיון שכל. הוא גורם לסטונדטים לעשות דברים מטופשים". ואז המרצה מסביר איך לופיטל זה כמו לחצות את הכביש לא במעבר חציה.

פולינום טיילור עם שארית לגראנג'

עד עכשיו עבדנו עם שארית פאנו. אנחנו רוצים יותר כי אנחנו גרידי. לא מספיק למרצה שהשארית שואפת ל־0 יותר מהר מ־x^n, הוא רוצה יותר מזה.

סימון 18. נגדיר את $C^{(n+1)}(A)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות ב־I.

משפט 111. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ בפנים הקטע. נניח כי f גזירה $n+1$ פעמים בכל I ונגזרותיה רציפות (כלומר $f\in C^{(n+1)}$). לכל $x\in I$ קיים c בין x_0 ל־x כך ש־:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ההוכחה נעשית ע"י משפט קושי.

איך נשתמש במשפט הזה?

1. הערכת הקירוב.

דוגמה: נחשב את $\sin 1$ עם שגיאה של לכל היותר $\frac{1}{1000}$. נגדיר $f(x)=\sin x$ ונפתח את f לפולינום מק'לורן מסדר 7.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+R_7(x)$$

כלומר:

$$\sin 1=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{7!}+R_7$$

תחשבו את זה להנאתכם בלי מחשבון. לפי פיתוח שארית לגראנג', קיים $c\in(0,1)$ כך ש־:

$$R_7(1)=\frac{f^{(8)(c)}}{8!}(1-0)^8$$

מכיוון ש־$c\in(0,1)$ בהכרח $\left|f^{(8)}(c)\right|\le 1$. מכאן:

$$|R_7(1)|\le\frac{1}{8!}<\frac{1}{1000}$$

אגב, השארית האמיתית היא משהו בסביבת 0.000002730839643.

2. הוכחת התכנסות של **טור הטיילור** לפונקציה עצמה.

דוגמה: נגדיר $f(x)=\sin x$. יהי $x\in\mathbb{R}$. יהי $\varepsilon>0$. קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$\left|\frac{x^n}{n!}\right|<\varepsilon$ (סטירלינג, וגם הוכחנו בלי. שימו לב שה־n תלוי ב־ε וב־x). לפי פיתוח מק'לורן של סינוס עם שארית לגראנג':

$$\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|=|R_{2n+1}(x)|\le\left|\frac{1}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|<\varepsilon$$

קבענו את x. לכן אנחנו בטור חמודי:

$$\sin x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

מבולבלים מטיילור? אני ממש ממליץ על הסיכום הבא (זה קישור לחיץ)

יש לטורי טיילור יותר כוח ממה שאנחנו רואים כאן. אגב, בהקשר ל־$\sin x$ שטור הטיילור שלה מתכנס, זה לא נכון לכל פונקציה. לדוגמה אם מגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\ne 0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

אפשר להוכיח באינדוקציה של f, שיש לה נגזרת מסדר n ב־0, ושלכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $f^{(n)}(0)=0$. הוא לא מתכנס לפונקציה. נ.ב. זו פונקציה מוכרת עם שימושים בסטטיסטיקה או משהו כזה.

יש פונקציות שעבורן הטור לא מתכנס בכלל. לדוגמה $\frac{1}{1-x}$ שטורה $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, לא מתכנס בתחומים מסויימים.

טור הטיילור לא יכול להיות כיאוטי יותר מדי - הראינו שקיים רדיוס התכנסות, ואומנם לא ברור מה קורה בקצוות שלו, אבל בכלים של חדו"א 2 אפשר להראות שטור חזקות רציף בתחום הזה.

האמריקאים מזיזים את נושאת המטוסים שלהם מסין לאיראן. שיעור הבא תלוי במצב הרוח של טראמפ.

הוכחה. באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}^+$.

- **בסיס:** ב־$n=0$ נקבל שפולינום הטיילור קבוע, וערכו $T_n=f(x_0)$. מכאן $R_0(x)=f(x)-f(x_0)$. נבחין ש־f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' בקטע שבין x ל־x_0. לכן קיים c בין x ל־x_0 כך ש־:

$$R_0(x)=f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$$

- **צעד:** נניח באינדוקציה על n ונוכיח ל־$n+1$. יהי $x_0\ne x\in I$. R_{n+1} ו־$(x-x_0)^{n+2}$ גזירות בין x ל־x_0 והנגזרת של $(x-x_0)^{n+2}$ אינה מתאפסת בקטע הפתוח שבין x ל־x_0. לכן קיים c בין x ל־x_0, כך ש־:

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+2}}=\frac{R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+2}-0^{n+2}}=\frac{R'_{n+1}(c)}{(n+2)(c-x_0)^{n+1}}$$

זאת ממשפט קושי. R'_{n+1} היא השארית בפיתוח של f' מסדר n סביב x_0 (הוכחנו את זה כחלק מהוכחה הקודמת). מה.א. קיים d בין c ל־x_0 כך ש־:

$$R'_{n+1}(c)=\frac{(f')^{n+1}(d)}{(n+1)!}(c-x_0)^{n+1}$$

לכן:

$$\frac{R'_{n+1}(c)}{(c-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+2)}(d)}{(n+1)!}$$

מציבים כל הדרך למעלה, מקבלים:

$$\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+2)}(d)}{(n+2)!}\implies R_{n+1}=\frac{f^{(n+2)(d)}}{(n+2)!}(x-x_0)^{n+2}$$

■

הגדרה 64. מסמנים ב־$C^\infty(A)$ את קבוצת הפונקציות הגזירות (ובפרט רציפות) מכל סדר ב־A.

משפט 112. תהא $f\in C^\infty(A)$. אם קיים $M>0$ כך ש־$\forall n\in\mathbb{N}\forall x\in I\colon\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ ("הנגזרות חסומות באופן אחיד"), אז טור טיילור של f מתכנס ל־f בכל I.

משפט 113. טור הטיילור של e^x מתכנס ל־e^x בכל נקודה, כלומר $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
לא נוכל להשתמש במשפט הקודם, כי הנגזרות לא חסומות. כן נוכל להוכיח התכנסות.

הוכחה. יהי $\hat{x} \in \mathbb{R}$. נסמן $I = (|\hat{x}| - 1, |\hat{x}| + 1)$. בקטע I כל הנגזרות של e^x, חסומות ע"י $1 + e^{|\hat{x}|}$ (הסיבה שצריך ערך מוחלט: כי צריך קטע שכולל גם את 0 וגם את $\hat{x}$, כי זו הנקודה סביבה הטור מפותח). לכן, מהמשפט, לכל $x \in I$ מתקיים $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. בפרט $e^{\hat{x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. ■

במילים אחרות, מה שצריך בפועל זה שהנגזרות יהיו חסומות בכל קטע קומפקטי. רק שאת זה לא הפכו למשפט בקורס.

נחזור על שארית לגראנג':

נתבונן בפונקציה $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ פנימית. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ונניח כי f גזירה $n+1$ פעמים ב־I. (שימו לב: לא ב־x_0 אלא בכל הקטע).
אז לכל $x \in I$ קיים c בין x ל־x_0 כך ש־$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

נחזור על שארית פאנו:

תהי $\omega \in I \to \mathbb{R}$ כך ש־$\omega(x_0) = 0$. ω רציפה ב־x_0 וכן $R_n(x) = \omega(x)(x - x_0)^n$ לכל $x \in I$.

נתבונן בהכללה הבאה של שארית לגראנג':

משפט 114. יהי $1 \le p \le n+1$ ונתבונן בפונקציה $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ פנימית. יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ונניח כי f גזירה $n+1$ פעמים ב־I. אז לכל $x \in I$ קיים c בין x_0 ל־x כך ש־$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x - x_0)^p (c - x_0)^{n+1-p}$
כאשר $p = n+1$ נקבל בדיוק את שארית לגראנג'. כאשר $p = 1$, השארית נקראת שארית קושי.

הוכחה. יהי $x \in I$. נגדיר $\varphi, \psi\colon I \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\varphi(t) := f)x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t(x)) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad\qquad \psi(t) = (x-t)^p$$

נבחין בכמה דברים: ראשית כל $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. עוד נבחין $\varphi(x_0) = R_n(x)$ ו־$\psi(x_0) = (x - x_0)^p$. לכל $t \in I$ נבחין שההנגזרת של φ היא כמו טור טלסקופי:

$$\varphi(t) = -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + f'''(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}$$

קל יותר למצוא את ψ' ולסכם ש־$\psi'(x) = -p(x-t)^{p-1}$. נשים לב שבקטע בין x ל־x_0 שתי ה]פונקציות קציפות בקטע הסוגר, רציפות בקטע הפתוח, ו־ψ אינה מתאפסת בקטע הפתוח. מקושי קיים c בין x ל־x_0 כך ש־:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) - \psi(y)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{p(x-c)^{o-1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x-c)^{n-p+1}$$

■

תרגיל 19. נגדיר $f\colon)$ $I = (-1, 1,$ גזירה מכל סדרה ומתקיים $\forall x \in (-1, \infty)$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. אז עבור $x \in (-1, \infty)$ נקבל כי שארית לגראנג' של פולינום מק'לורן מסדר n היא $R_n(x) = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)!(1+c)^{n+1}} c^{n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^n}{(1+c)^{n+1}}$ עבור c בין x ל־0 כלשהו. כאשר $0 \le x \le 1$ נגיד למשל ש־:

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(a+x)^{n+1}} \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

מכאן $\left|x^{n+1}\right| \le 1$ וכן $(1+c)^{n+1} \ge 1$.

כאשר $-\frac{1}{2} \le x \le 0$ אז $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$ נבחין ש־$-\frac{1}{2} \le x < c < 0$ ומכאן $1 < 1 + c < 1 + 2x \le \frac{1}{2} \le |x|$ ואז $\frac{|x|}{1+c} \le 1$.
סה"כ לכל $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ מתקיים $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

עבור $-\frac{1}{2} < x < -1$ לא נוכל לחסום את $\frac{|x|}{c+1}$ על ידי 1. ואז שארית לגראנג' תפסיק לעבוד. למקרה זה נשתמש בשארית קושי. לכל $x \in (-1, -0.5)$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, קיים $x < c < 0$ כך ש־:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}}}{n!}(x-c)^n(x-0)\right| = \frac{|x|}{1+c} \cdot \left|\frac{x-c}{1+c}\right|^n = \cdots$$

שימו לב! c תלוי ב־x בכל הדברים לעיל. יש כאן טריק קטן שפותר את זה: (ניעזר בכך ש־c,x שליליים)

$$|x-c| = |x| - |c| < |x| - |x|\,|c| = |x|\,(1-c) = |x|\,(1+c)$$

נחזור למעלה:

$$\cdots < \frac{|x|^{n+1}}{1+c} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

נבחין ש־$1+c$ חסום בין 0 ל־x (למרות שהוא עדיין תלוי ב־n!) ואנחנו מחלקים משהו מעריכי בקבוע, ולכן כל הסיפור לעיל הולך ל־0.

תרגיל 20. הוכיחו/הפריכו:

1. $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(0)$
2. קיימת סדרה $\{x_n\}$ השואפת ל־0 עבורה $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(0)$, וכן $x_n \neq 0$ לכל n.

1. נראה דוגמה נגדית ל־1. נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

אזי לכל $x\neq 0$ f גזירה כמהפלה והרכבה של גזירות. ב־0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

לכן:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{x\to x_0} 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ וכמו כן ל־$\cos\frac{1}{x}$ ללא גבול ב־0, ולכן f' ללא גבול ב־0 מאריתמטיקת גבולות.

2. זו הוכחה. נציג שני פתרונות.

פתרון 1. נגדיר $x_1 = 1$. עבור $n\in\mathbb{N}$ נסמן $a = \frac{x_n}{2}$. ממשפט דרבו f' מקיימת את תכונת דרבו (תכונת ערך הביניים). נסמן $\lambda = \min\{f'(0)+\frac{1}{n}, f'(a)\}$ (בה"כ $f'(a) > f'(0)$, אחרת נחסר). קיים $x_{n+1}\in[0,a)$ כך ש־$f'(x_{n+1}) = \lambda$. לכל $n\in\mathbb{N}$ נקבל $|x_n| \le \frac{1}{2^n}$ וגם $|f'(0)-f'(x_n)| \le \frac{1}{n}$. ■

עתה נציג פתרון נוסף.

פתרון 2. מהיינה $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0)$ (בחרנו ספציפית מבין כל הסדרות השואפות ל־0). לכל $n\in\mathbb{N}$, f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' ב־$[0,\frac{1}{n}]$ ולכן קיים $0 < x_n < \frac{1}{n}$ כך ש־:

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(x_n)$$

ו־$0 \neq x_n \to 0$ וכמובן $f'(x_n)\to f'(0)$. ■

עתה נתבונן בעוד שאלה שהייתה בתרגיל הבית: תהי $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ב־$x_0\in\mathbb{R}$. הראו כי:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

בבית עשינו כולנו עם לופיטל. שימו לב לנמק הכל ובשום פנים ובאופן לא לעשות לופיטל פעמיים (נתון שהיא גזירה רק פעמיים).

הוכחה באמצעות טיילור. נפתח את פולינום טיילור מסדר 2 סביב x_0 משארית פאנו. קיימת $\omega\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש־$\omega(x_0)=0$, ω רציפה ב־x_0, וכן $\forall x\in\mathbb{R}\colon f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \omega(x)(x-x_0)^2$. יהי $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. נבחין ש־:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \omega(x-h)h^2$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)(-h) + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \omega(x-h)h^2$$

נחזור לביטוי למעלה, ונקבל:

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + \omega(x_0+h) + \omega(x_0-h)$$

ובגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

$\blacksquare$

כך נראה הפתרון עם לופי:

הוכחה באמצעות לופי. נגדיר $g(h)=f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)$ וכן $t(h)=h^2$. ידוע ש־f גזירה ולכן רציפה ב־x_0, כלומר $\lim_{h\to 0}g(h)=0$ וכמו כן $\lim_{h\to 0}t(h)=0$. ידוע ש־g,t גזירות בסביבת 0, כיוון ש־g גזירה פעמיים ב־x_0. t' לא מתאפסת למעט ב־0, כי $t'(h)=2h, g'(h)=f'(x_0+h)-f'(x_0-h)$. עכשיו נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)}{t'(h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\right)$$

נחשב את הגבולות בנפרד:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0)\qquad\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{h}\overset{\alpha=-h}{=}\lim_{\alpha\to 0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0+\alpha)}{-\alpha}=f''(x_0)$$

ואפילו כיצד לציין שהחלפת המשתנה נובעת ממשפט על גבולות והרכבה ולציין את תנאיו. $\blacksquare$

שימו לב – לעשות כאן לופיטל פעמיים זה פטאלי! זה לא נכון ולא נתון שהפונקציה מקיימת את התנאים של כלל לופיטל.

תרגיל 21. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נניח f גזירה, f' רציפה במ"ש ואינה חסומה. הראו כי f אינה רציפה במ"ש.

הוכחה. נניח בה"כ ש־f' חסומה מלעיל (אחרת נעבוד עם $-f$).
אין לנו שום דרך כמעט להראות שפונקציה איננה רציפה במ"ש, אלא לפי הגדרה. לכן נתבונן ב־$\varepsilon=1$ כלשהו (מקסימום נתקן אותו אחכ), ותהא $\delta>0$. f' רציפה במ"ש ולכן קיים δ_1 כך ש־$\forall x,y\in\mathbb{R}\colon\ |x-y|<\delta_1\implies|f'(x)-f'(y)|<\delta$. נסמן $r=\frac{1}{3}\min\{\delta_1,\delta,\frac{1}{\delta}\}$. קיים $t\in\mathbb{R}$ כך ש־$f'(t)>\frac{1}{r}$. לכל $x\in[t-r,t+r]$, מתקיים ש־$|f'(x)-f'(t)|<\delta$. מלגראנג', קיים $c\in(t-r,t+r)$ כך ש־:

$$\frac{f(t+r)-f(t-r)}{2r}=f'(c)>\frac{1}{r}-\delta\implies|f(t+r)-f(t-r)|>2-2r\delta\geq 1$$

כמו כן $|t+r-(t-r)|=2r<\delta$. סה"כ סתירה. $\blacksquare$

"גבול אחרון והביתה"

תרגיל 22. נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$$

אפשר להתייחס ל־x כאל $\frac{1}{1/x}$. ואז נעשה לופיטל ונקבל במונה:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)$$

וזה ממש לא עוזר. זה יעזור מתישהו, אבל זה יהיה כואב. ונצטרך הרבה לופי.

נבצע החלפת משתנים, כי כרגע הגבול הוא לאינסוף וזה לא מאפשר (בכלים הנוכחיים שלנו) להשתמש בטיילור. אי אפשר לעשות טיילור סביב אינסוף, אפשר להשתמש במשפט טיילור עבור פולינום טיילור סביב נקודה כלשהי.

לכן נבצע החלפת משתנים – $t=\frac{1}{x}$. ואז נקבל:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}-e\right)$$

זו לא פונקציה שמוגדרת בכלל באפס. נגדיר למען הנוחות:

$$f(t)=\begin{cases}(1+t)^{\frac{1}{t}} & t\neq 0\\ e & \text{else}\end{cases}$$

נבחין שהיא רציפה. ואז נקבל את הגבול:

$$\cdots=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-e}{t}$$

זו ליטרלי הגדרת הנגזרת של f! אך הנגזרת של f אינה מוגדרת ב־0. לכן טיילור (סביב 0) לא עובד, באופן ישיר, כי טור הטיילור צריך ממש להחזיק את הנגזרות ביד כדי שנוכל לפתח אותו.

אבל, $f(t)$ רציפה וגזירה בכל $t \neq 0$. שם נקבל:

$$f'(t) = \left(e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\right)' = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}\left(-\frac{1}{t^2}\ln(1+t) + \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t}\right) = (1+t)^{\frac{1}{t}}\left(\frac{-(t+1)\ln(1+t)+t}{t^2(t+1)}\right) = \xi$$

ה־$t+1$ בחילוק למטה באפס לא מפריע לנו, וגם לא ה־$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ ששואף ל־e ואם כל השאר יעבוד אז נוכל פשוט להשתמש באריתמטיקה. נוציא אותם החוצה:

$$\xi = (1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t+1}\left(\frac{t - t\ln(t+1) - \ln(t+1)}{t^2}\right) = (1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t+1}\left(\underbrace{\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}} - \underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{1}\right) = \xi$$

הלופיטל בצד הפך להיות טיילור בצד:

$$\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + \omega(t)t^2}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

סה"כ:

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = \xi = -\frac{e}{2}$$

זו הפואנטה, עכשיו צריך לתפור הכל. כמו שאמרנו הגבול הזה צריך לצאת הגבול המקורי כי הוא ליטרלי נגזרת לפי הגדרה. ניזכר בטענה שראינו: תהא $f: I \to \mathbb{R}$ גזירה. תהא x_0 בקטע ונניח שקיים וסופי הגבול $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, אז הגבול שווה ל־$f'(x_0)$. או במילים אחרות, אם קיים גבול לנגזרת, היא רציפה (כי מדרבו אין נקודות אי־רציפות סליקות ואין נקודות אי־רציפות מסוג ראשון. כל האי רציפות רע. זה נכון לגבי כל פונקציה שמקיימת את תכונת חרבו דרבו).

הנגזרת לא מוגדרת ב־0, ועשינו גבול של הנגזרת. אך הנגזרת לא מוגדרת ב־$t=0$. מהמשפט, נבין שאם הגבול המקורי אכן קיים, אז הוא אכן שווה ל־$-\frac{e}{2}$. אז עכשיו רק נותר להראות שהגבול המקורי שווה ל־$-\frac{e}{2}$. ואפשר לדעת שהגבול קיים! היא גזירה בסביבה נקובה של 0, כנ"ל לגבי t, ולכן אפשר לעשות לופיטל. למעשה לא היינו צריכים לעשות את כל הבלגן עם הנגזרת כי אחרי החלפת משתנים זה פותר. המרצה סתם רצה לדבר על המשפט לעיל.

ההבדל בין לופיטל בטיילור – הגזירות בנקודה עצמה, בטיילור צריך רק אותו, בלופיטל לא צריך אותו בכלל.