קומבי 11 (כנראה) $\sim$ נטלי שלום $\sim$ איזומורפיה ומסלולים

פרץ שחר

17 ביוני 2024

1 המשך – איזומורפיה

1.1 תזכורות

1. גרף (במקרה שלנו, גרף פשוט ולא מכוון או ממושקל) הוא $G =\leq V, E\rangle$ כאשר B קבוצת הקודקודים (צמתים) – סופית, ולא ריקה. $E \subseteq \mathcal{P}_s(V)$ קבוצת הקשתות (צלעות).
2. שני קודקודים נקראים שכנים, אם יש ביניהם קשת.
3. הדרגה של של קודקוד $v \in V$ היא $d(v) = |N(v)|$, כאשר $N(v)$ היא קבוצת שכניו.
4. שני גרפים $G_1 G_2$ הם איזומורפים אם אם קיים זיווג $f\colon V_1 \to V_2$ משמר שכנויות, כלומר:

$$\forall u, v \in V_1 . \{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

הפונקציה הזו תקרא איזומורפיזם.

5. סימנו $K_n =$ מחלקת השקילות של הגרפים השלמים על n קודקודים, ו־$C_n =$ מחלקת השקילות של המעגלים באורך n.
6. הגרף המשלים של $G = \langle V, E\rangle$ הוא $\overline{G} = \langle V, \overline{E}\rangle$ כך ש־$\overline{E} = \mathcal{P}_2(V) \setminus E$.

הערה: גרף שלם = גרף מלא = קליקה

2 תרגילים

2.1

שאלה: האם C_5 איזומורפי ל־גרף המשלים שלו? [ציור בסיכומים אחרים, בו מספור של הקודקודים מ־0 עד 4]. נגדיר זיווג:

$$0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 3$$

. [הערה: יש צורך לצייר בשביל לבחור סימון לכל הקודקודים]. מותר לרשום את הזיווג גם בצורת פונקציה. **פתרון:** כן

2.2 תרגיל המשך

תרגיל: האם C_6 איזומורפי למשלים שלו?

פתרון: דרך אחת תהיה להשתמש בדרגות. נראה דברים דומים בהמשך. אך נדבוק בדרך אחרת. ב־C_6 יש 6 קשתות. $|E| = |\mathcal{P}_2(V) \setminus E| = |\mathcal{P}_2(V)| - |E| = \binom{6}{2} - 6 = \frac{6 \cdot 5}{2} - 6 = 15 - 6 = 9$ כלומר, כמות הרשתות בין שני הגרפים שונה ולכן לא יתכן קיום איזומורפיה חח"ע ועל ביניהם.

2.3 תרגיל המשך

תרגיל: הוכיחו שלא קיים גרף בעל 6 קודקודים שאיזומורפי למשלים שלו.

פתרון: נניח בשלילה שקיים גרף כזה, אזי $|E| + |\overline{E}| = \binom{6}{2} = 15$ ומצד שני $|E| = |\overline{E}|$, כלומר $2 \cdot |E| = 15$ וסה"כ סתירה כי 15 איז־זוגי.

2.4

נניח כי f איזומורפיזם בין $G = \langle V, E\rangle$ ל־$G, = \langle V', E'\rangle$. הוכיחו:

$$\forall v \in V.\ \underbrace{d_G(v)}_{G \text{ הדרגה בגרף}} = d_{G'}(f)$$

הוכחה. יהי $v \in V$. נסמן ב־N את קבוצת שכיניו. נוכיח ש־$f[N]$ היא קבוצת השנים של $f(v)$ ב־G'.

יהי $w \in f[N]$. נוכיח שהוא שכן של $f(v)$ ב־G'

- קיים $u \in N$ כך ש־$w = f(u)$. כלומר $\{u,v\} \in E$ ומאחר ש־f איזומורפיזם אז $\{\underbrace{f(u)}_{w}, f(v)\} \in E'$ ולכן w שכן של $f(v)$ בגרף G'.
- יהי x שכן של (v) ב־G', נוכיח כי $x \in f[N]$. f זיווג ובפרט על, לכן קיים $y \in V$ כך ש־$x = f(y)$ כלומר $\{x, f(v)\} = \{f(y), f(v)\} \in E'$ ומאחר ש־f משמרת שכנויות נקבל ש־$\{y,v\} \in E$ כלומר $y \in N$ ולכן $x \in f[N]$.

סה"כ מהכלה דו כיוונית $f[N] = d_{G'}(f(v))$, כלומר $d_G(v) = |N| = |f[N]| = d_{G'}f(v)$ ■

2.5

שאלה: תנו דוגמה לשני גרפים בעלי אותה סדרת דרגות שאינם איזומורפים עם: (א) 6 קודקודים (ב) 5 קודקודים

תשובה של שחר מהעתיד (שראה פתרונות בסוף השיעור)**:** קו באורך n, ומנגד גרף של קו באורך 1 ומעגל באורך $n-2$ יפתור זאת.

נחזור לבעיה בסוף השיעור.

3 הערות

הערה: תנאים הכרחיים לאיזומורפיזם בין גרפים:

1. אותו מס' קודקודים
2. אותו מס' קשתות
3. אותה סדרת דרגות (לא חשוב הסדר, אך יש חשיבות לחזרות)

אלו **לא** תנאים מספיקים.

הערה: הכרעת איזומורפיזם בין שני גרפים נתונים, היא בעיה קשה במדמח.

4 מסלולים

4.1 הגדרות

יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף. נגדיר:

1. **מסלול** הוא סדרה של קודקודים $\langle v_0, v_1, \dots v_k \rangle$ כך שלכל $0 \le i \le k-1$ מתקיים $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ [=בין כל זוג קודקודים עוקבים יש קשת] ובנוסף לא עוברים על קשת יותר מפעם אחת (כלומר אסור ללכת שוב ושוב על אותה הקשת). [דוגמה מצויות שכמו תמיד אני אפנה אותכם לסיכומים אחרים כי לי אין כוח לצייר].
2. **אורך של מסלול** הוא מס' הקשתות בו. לדוגמה, האורך של $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ הוא k. בפרט, סדרה באורך 1 היא מסלול באורך 0 (לדוגמה $\langle v \rangle$).
3. **מסלול פשוט** הוא מסלול שבו כל הקודקודים שונים שזה מזה.
4. **מעגל** הוא מסלול $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$ שבו $v_0 = v_m$ ו־$m > 0$.
5. **מעגל פשוט** הוא מסלול שבו כל הקודקודים שונים זה מזה פרט לכך שהראשון והאחרון זהים.
6. **מרחק** בין שני קודקודים a, b הוא אורך המסלול הקצר ביותר המחבר ביניהם, והוא מסומן ב־$\mathrm{dist}(a,b)$. אם אין מסלול המחבר ביניהם, מגדירים $\mathrm{dist}(a,b) = \infty$.

4.2 טענות והוכחות

טענה: [יהי יהיו תהינה בלה בלה בלה] אם קיים מסלול בין שני קודקודים שונים, אז בהכרח קיים מסלול פשוט ביניהם.

תרגיל: נתון גרף $G = \langle V, E \rangle$ שבו הדרגה המינימלית היא m. הוכיחו, שב־G קיים מסלול פשוט באורך לפחות m.

הוכחה. אם $m = 0$, אז ניקח קדוקוד כלשהו v והוא מהווה מסלול פשוט באורך 0 $\langle v \rangle$.

אם $m > 0$, נניח בשלילה שכל מסלול פשוט הוא באורך לכל היותר $m-1$. ניקח מסלול $\langle v_0, \dots v_k \rangle$ מקסימלי בגרף. אז $k \le m-1$. נסתכל על v_k. אם קיים לו שכן מחוץ ל־$\langle v, \dots v_{k-1} \rangle$, אז ניתן להוסיף אותו למסלול ולקבל מסלול ארוך יותר, בסתירה. אם לא קיים ל־v_k שכן מחוץ לקבוצה זו, אז כל שכניו נמצאים בקבוצה הזו, ובה יש לכל k קודקודים כלומר $d(v_k) \le k \le m-1$ וזו סתירה לנתון שהדרגה המינימלית היא m. ■