

**רשימות אלגברה לינארית 2**  
שחור פרץ ~ 2025B

# Introduction . . . . . 0.1

## 0.1.1 ~ רישיון ~ License

The following summary is provided under the GNU General Public License version 3 (GPLv3). It can be distributed and/or modified under the terms of the license, or any later version of it. Additional information can be found [here](#).

הסיכום להלן מסופק תחת רישיון התוכנה החופשית של גנו גרסה 3 (GNU General Public License (GPL) version 3). ניתן להעתיקו ו/או להפיצו תחת GPLv3 או גרסה מאוחרת יותר. מידע נוסף אפשר למצוא [כאן](#).

## 0.1.2 ~ הרבה מיליס שאפשר לדלג עליו

הסיכום להלן נוצר משלוב של ארבעת המקורות הבאים:

- מסקנות מהספר (עם "Linear Algebra Done Right" הוכחות שניי כתบทי)
- תרגולים של עומר שדה-אור
- הרצאות בפקולטה
- הרצאות באודיסאה של בן בסקין

בנגד שלושה נושאים דיברה אלגברה לינארית 2א –

1. אופרטורים לינארים, הן העתקות ממוחב לעצמו.

2. תבניות בי-לינאריות, אובייקט מתמטי נוסף שנitin ליצג ע"י מטריצה.

3. מרחבי מכפלה פנימית, מרחבים בהם מוגדרת מעין תבנית ססקואו בי-לינארית שמאפשרת תיאור "גודל", וביהם יש ערך לפירוק מטריצות לכפל של מספר מטריצות שונות.

הגרסה האחרונה של הסיכום תהיה זמינה [בקישור הבא](#) כל עוד מיקросופט לא פשטו את הרgel. אם מצאתם בסיכום טויות (חחל בתקינות, כלה בשגיאות חטיב, וכמונן טויות מתמטיות) אש mach אם תפנו אליו במייל ([perets.shahar@gmail.com](mailto:perets.shahar@gmail.com)), בטלפון (אם אתם מכירים אותו) או במסרים GitHub Issues (קישור בתחילת המשפט).

מקווה שתהנו מהסיכום ותמצאו אותו מועיל;

שחר פרץ, 19.7.2025

זהו הסיכום הזה מכיל בחלוקת הוכחות שניי כתบทי ולא הופיעו בהרצאה. השימוש בסיכום על אחריות המשתמש ואני לא אחרה. ערב לנכונות המידע.

## 0.1.3 ~ סימוניים

בסיכום הבא נניח את הסימוניים הבאים:

- $[n] := \mathbb{N} \cap [0, n]$
- בהינתן  $T: V \rightarrow W$  העתקה ו- $V \subseteq U$  תמי'ו, נסמן  $\{Tu \mid u \in U\}$
- בהינתן  $T: V \rightarrow W$  העתקה ו- $v \in V$ , נסמן  $Tv := T(v)$
- בהינתן  $A$  קבוצה עם יחס שקילות  $\sim$ , נסמן את קבוצת המנה ב- $A/\sim$
- בפוקולטה למתמטיקה בת"א מקובל להשתמש ב- $(w, v)$  בשביל מכפלה פנימית. בסיכום זהה משתמש ב- $\langle w | v \rangle$ , גם כן סימון מקובל (בעיקר בפיזיקה), שאני חושב שגראה מגניב הרבה יותר.
- נסמן שחלוף (transpose) ב- $A^T$  ולא  $.A^t$ .
- הטבעיים כוללים את  $0$ , ו- $\mathbb{N}_+$  ("הטבעיים החיוביים") אינם.
- ט"ל הוא קישור לתרנספורמציה לינארית.

#### 0.1.4 ~ רשימת נושאים שהוסיפו לסיום נוסף על החומר של הקורס

- מציאת צורת ג'ordan באמצעות מרחבים עצמיים מרחבים (עוזר מאד להבין מהו צורת ג'ordan שהוא).
- תוצאות מצורת ג'ordan (מופיע בסיסטרים קודמיים וברמה הפרקטית חומר ל מבחן).
- הרחבה על הרדיוקלים של תבניות בילינאריות (סתם כי זה מגניב).
- הרחבת פירוק SVD להעתקות שאין אופרטורים (מועיל לממד"חיסיטים).
- מסקנות מ-SVD ושימוש הקונספט של ערכים סינגולריים.

# תוכן העניינים

2	מבוא . . . . .	0.1
2	רישיון . . . . .	0.1.1
2	הרבבה מילימש שאפשר לדלג עליהם . . . . .	0.1.2
2	סימונים . . . . .	0.1.3
3	רשימת נושאים שהוספה לסקום נוספים על החומר של הקורס . . . . .	0.1.4
<b>6</b>	<b>1 חקר אופרטורים לינאריים וצורת ג'ורדן</b>	
7	לכISON . . . . .	1.1
7	מבוא לפרק	1.1.1
7	ערכים עצמיים וקטורים עצמיים לאופרטורים לינאריים	1.1.2
9	ערכים עצמיים וקטורים עצמיים למטריצות	1.1.3
9	פוליאום אופייני . . . . .	1.1.4
11	על הקשר בין ריבוי גיאומטרי ואלגברי . . . . .	1.1.5
12	1.1.5.1 פיבונאצ'י בשדה סופי . . . . .	
12	шиLOS . . . . .	1.1.6
14	על ההבדל בין פולינום לפוליאום . . . . .	1.1.7
14	משפט קייל-המילטון . . . . .	1.1.8
16	תורת החוגים . . . . .	1.2
16	מבוא והגדרות בסיסיות	1.2.1
16	ראשוניות ואי-פריקות	1.2.2
20	הרחבת שדות . . . . .	1.2.3
20	חוג הפולינומים . . . . .	1.2.4
21	1.2.4.1 פונקציות רציניות ומספרים אלגבריים	
23	פירוק פרימרי . . . . .	1.3
23	מרחבים $\mathbb{Z}$ -شمורים וציקליים . . . . .	1.3.1
24	הפולינום המינימלי . . . . .	1.3.2
26	ניסוח והוכחת המשפט הפירומי	1.3.3
29	צורת ג'ורדן . . . . .	1.4
29	מציאת שורשי פולינום אופייני ממולה חמשית ואילך . . . . .	1.4.1
30	צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי נילפוטנטי . . . . .	1.4.2
30	1.4.2.1 נילפוטנטיות . . . . .	
31	1.4.2.2 שרשאות וציקליות . . . . .	
32	1.4.2.3 ניסוח צורת מיקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי . . . . .	
34	צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי . . . . .	1.4.3
34	1.4.3.1 בעזרת פירוק פרימרי . . . . .	
35	1.4.3.2 בעזרת מרחבים עצמיים מוכללים . . . . .	
37	תוצאות מצורת ג'ורדן . . . . .	1.4.4
<b>39</b>	<b>2 הגדרה וחקר מרחבי מכפלה פנימית</b>	
40	tabniot bimilinariot . . . . .	2.1
40	הגדרות בסיסיות בעבר tabniot bimilinariot cellulot . . . . .	2.1.1
42	חפיפה וסימטריות . . . . .	2.1.2
44	tabniot ribout . . . . .	2.1.3
44	משפט ההתאמה של סילבסטטר . . . . .	2.1.4
47	מרחבי מכפלה פנימית . . . . .	2.2

47	הגדירה כללית . . . . .	2.2.1
47	מעל $\mathbb{R}$ . . . . .	2.2.1.1
47	מעל $\mathbb{C}$ . . . . .	2.2.1.2
48	אורותוגונליות, זהויות ואי-שוויונות של המכפלה הפנימית . . . . .	2.2.2
48	משפט פיתגורס ותוצאותיו . . . . .	2.2.2.1
50	מרחבים ניצבים והיטלים . . . . .	2.2.3
52	אלגוריתם גראמס-שמידט . . . . .	2.2.3.1
52	צמדיות ודואליות . . . . .	2.2.4
52	העתקות צמודות לעצמן, והעתקות חיוביות . . . . .	2.2.4.1
56	ההעתקה הצמודה . . . . .	2.2.4.2
58		<b>פירוקים</b> 2.3
58	המשפט הספקטרלי להעתקות . . . . .	2.3.1
58	ניסוח המשפט הספקטרלי להעתקות צמודות לעצמן . . . . .	2.3.1.1
59	ניסוח המשפט הספקטרלי בעבר העתקה כללית . . . . .	2.3.1.2
60	תוצאות ממשפט הפירוק הספקטרלי . . . . .	2.3.1.3
63	מטריצות אוניטריות . . . . .	2.3.2
65	צורה נורמלית למטריצה אורותוגונלית . . . . .	2.3.2.1
66	המשפט הספקטרלי בניסוח מטריציוני . . . . .	2.3.2.2
67	פירוק פולארי . . . . .	2.3.3
67	מבוא, וקשרו לבניوت ביילינאריות . . . . .	2.3.3.1
68	ניסוח הפירוק הפולארי . . . . .	2.3.3.2
69	פירוק SVD . . . . .	2.3.4
69	ניסוח והוכחת SVD . . . . .	2.3.4.1
70	הרחבת SVD להעתקות שאין אופרטורים . . . . .	2.3.4.2
72	נורמה של העתקה . . . . .	2.3.4.3
73		<b>3 נספחים</b>
74	מרחבים דואליים . . . . .	3.1
74	הגדרות בסיסיות . . . . .	3.1.1
75	איומורפיות למרחבי מכפלה פנימית . . . . .	3.1.2
75	העתקה צמודה (דואלית) . . . . .	3.1.2.1
76	המאפס הדואלי ומרחב אורותוגונלי . . . . .	3.1.2.2
78	סיכום תוצאות מרכזיות . . . . .	3.2
78	סיכום פירוק פרימרי וצורת ג'ורדן . . . . .	3.2.1
78	סיכום בניווט ביילינאריות . . . . .	3.2.2
79	סיכום נושא הפירוקים . . . . .	3.2.3
80	אלגוריתמים . . . . .	3.3
82	תרגילים מומלצים . . . . .	3.4

בתיאכו

## **פרק 1**

### **חקר אופרטורים לינאריים וצורות גיורדו**

## Diagonalization . . . . . 1.1

### 1.1.1 ~ מכוון לפיק

**הגדה 1.** נאמר ש- $A$  מטריצה אלכסונית, אם:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

נאמר שישנה פעולה כשי שנרצה להפעיל. נרצה לקורות מה יקרה לפעולה לאחר שנפעיל אותה מספר פעמים. כפל מטריצות היא פעולה מסדר גודל של  $(n^3)\mathcal{O}$ . אך, ישן מטריצות שקל מאוד להעלות בربוע, ובכך נוכל להפוך את ההליך לפשטוט בהרבה, ואך לנוכח אותו בוצרה של נוסחה סגורה פשוטה. דוגמה מטריצה כזו היא מטריצה אלכסונית. ננסה למצוא דרך להמיר" בין מטריצה "רגילה" למטריצה אלכסונית.

**הגדה 2.** ו- $T$  ההעתקה אלכסונית:

$$T_A^m(A) = A^m(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

למה זה מועלץ? נזכיר בסדרת פיבונצ'י. נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(בහנחת איברי בסיס  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ).

ואכן, מה חבל שלא כיף להכפיל את המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  בעצמה המונע פעמים. מה נוכל לעשות? ננסה למצוא בסיס שבו  $(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B = P^{-1}\Lambda P$ . [המשמעות של  $\Lambda$  היא מטריצה אלכסונית כלשהיא] אז קיבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (P^{-1}\Lambda P)^n = P^{-1}\Lambda^n P$$

(די קל להראות את השוויון האחרון באינדוקציה). במקרה זה יהיה לנו נחמד כי אין בעיה להעלות לכיסינה בחזקה. הדבר הנחמדה הבא שנוכל ליצור הוא צורת גordan – מטריצת בלוקים אלכסונית, ככה שנעלתה בחזקה את הבלוקים במקומות את כל המטריצה. נעשה זאת בהמשך הקורס.

**הגדה 3.** אופרטור ליניארי ( $A'$ ) הוא ה" $\mathbb{L}/\mathbb{T}$ "ל ממוחרב וקטורי  $V$  לעצמו.

### 1.1.2 ~ ערכים עצמיים וקטוריים עצמיים לאופרטורים ליניארים

**הגדה 4.** יהי  $T: V \rightarrow V$ . אז  $v \in V$  נקרא וקטור עצמי של  $T$  (ו"ע) אם קיימים  $\lambda \in \mathbb{F}$  כך  $\lambda v = T v$ .

**הגדה 5.**  $\lambda$  מההגדה הקודמת נקרא ערך עצמי (ו"ע) של  $T$ , המתאים לו"ע  $v$ .

שאלה. יהי  $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ . נתנו  $v_1 \dots v_n$  בסיס של  $\mathbb{F}^n$  [תאיורטי יכול להתקיים באופן ריק כי עדין לא הראינו שקיים בסיס כזה] אז קיימת  $P \in M_n(\mathbb{F})$  הפיכה כך  $\lambda$  המקיים  $T v_i = \lambda v_i$  לפי הבסיס הסטנדרטי, או  $(\lambda_1 \dots \lambda_n)[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ , כאשר  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  הם המתאיםים לו"ע  $v_1 \dots v_n$ .

כדי לדעת כי  $M_{m \times n}(\mathbb{F}) \cong \text{Hom}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ . מה המשמעות של איזומורפי ( $\cong$ )? בהינתן  $A, B$  מבנים אלגבריים כלשהם, נסמן  $A \cong B$  אם קיימת  $\varphi: A \rightarrow B$  העתקה חד"ע ועל שומרת את המבנה (כאשר המבנה שלנו מורכב מפעולות חיבור וכפל, העתקה כזו תהיה ליניארית).

**דוגמיה.** אם  $U, V$  מ"י מעל  $\mathbb{F}$ , הם נקראים איזומורפים אם קיימת  $\varphi: V \rightarrow U$  חד"ע ועל המקיים

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F} \quad \forall v_1, v_2 \in V: \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

כלומר "המרנו" שני מבנים אלגבריים, אבל לא באותה עשיינו שום דבר – כל מבנה עדין שומר על התכונות שלו.

**סימון 1.** בסוף הסיכום מופיעה הרחבה על תופעות מעין אלו.  
**הגדה 6.** יהי  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ , נניח  $\lambda \neq 0$ , אז המרחב העצמי (מ"ע) של  $\lambda$  הוא:

$$V_\lambda := \{v \in V \mid T v = \lambda v\}$$

**משפט 1.**  $V_\lambda$  תמ"יו של  $V$ .  
**הגדה 7.** יהי  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ , ויהי  $\lambda \neq 0$ , אז  $\lambda$  של  $T$ . נגדיר את הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda$  (ביחס ל- $T$ ) הוא  $\dim V_\lambda$ .  
**דוגמה.** יהי  $V$  מ"ז מממד  $n$ ,  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ , ונניח  $\{v, T v, T^2 v, \dots, T^{n-1} v\}$  מקיים  $v \in V$  ו  $T^n v = v$ . נניח קיימים  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$  כך ש- $\sum \alpha_i T^i(v) = 0$ . ננסה להבין מהם ה"ע".  
 יהי  $u \in V$   $u = \sum \alpha_i T^i(u)$ . נראה כי  $u = \lambda u$ . ידוע קיימים  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{F}$  כך ש- $\sum \alpha_i T^i(u) = 0$ .

$$\begin{aligned} \lambda^n u &= T^n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underbrace{T^{n+i}(v)}_{=T^i(T^n v)=T^i v} = u \end{aligned}$$

נבחן שהוקטורים העצמיים הם שורשי היחידה. מי הם שורשי היחידה – זה תלוי שדה.  
**מסקנה 1.** ערכים עצמאיים תלויים בשדה. ערכים עצמאיים של מטריצה מעל  $\mathbb{R}$  יכולים להיות שונים בעברו אותה המטריצה מעל  $\mathbb{C}$ . דוגמה יותר פשוטה לכך היא העתקת הסיבוב ב- $\mathbb{R}^2$ , שאין לה ו"עים מעל  $\mathbb{R}$  אך יש בהם מעל  $\mathbb{C}$ .  
**משפט 2.** תהי  $A \subseteq V$ :  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ , ונניח  $T$  קבוצה של ו"ע של  $T$  עם ו"ע שונים, אז  $A$  בת"ל. הוכחה בתרגול.  
**הגדה 8.** יהי  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ . נאמר ש- $T$  ניתן לכיסוי/ $\text{לכסיין}$  אם קיים  $L \subseteq V$  בסיס של ו"ע של  $T$ .  
**מסקנה 2.** אם  $n = \dim V$  ול- $T$  יש  $n$  ו"ע שונים אז  $T$  לכסיין.  
**הערה 1.** שימו לב – יתכן מצב בו קיימים פחות מ- $n$  ו"ע שונים אך  $T$  עדין לכסיין. דוגמה:  $id$ .  
**מסקנה 3.** תהי  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ . נניח שלכל  $\lambda$  ו"ע, ישנה  $B_\lambda \subseteq V_\lambda$  איז  $B_\lambda = B$  בת"ל.

הוכחה. ניקח צירוף לינארי כלשהו שווה ל-0:

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in B} \alpha_i v_i &= 0 \\ &= \sum_{\lambda} \sum_{\lambda_i} \alpha_i v_{\lambda_i} \\ &\implies \sum_{\lambda_j} \alpha_i v_{\lambda_j} =: u_j \in V_{\lambda_j} \\ &\implies \sum_j u_j = 0 \end{aligned}$$

קיבלנו צירוף לינארי לא טרווילי של איברים במ"ע שונים (=עם ו"ע שונים). אם אחד מהם אינו 0, קיבלנו סתירה למשפט.  
**סחה"ב** קיבלנו שלכל  $j$  מותקיים  $\sum \alpha_{j,i} v_{ji} = 0$ . בכלל ש- $v_{ji} \in B_j$  אז בת"ל ולכן כל הסקולרים 0.

**הערה 2.** ההוכחה זו עובדת בעבור הכללה לממדים שאינם נוצרים סופית  
**מסקנה 4.** יהי  $T: V \rightarrow V$ :  $\lambda \in \mathbb{F}$ .  $\dim V = n$ . אז:

$$\sum_{\lambda} \dim V_{\lambda} \leq n$$

שווין אם"מ  $T$  לכסיין.

הוכחה. לכל  $\lambda$  יהא  $B_\lambda$  בסיס. אז  $B = \sum_{\lambda} B_\lambda$  בת"ל. איז  $\dim V_\lambda = |B|$ ?  
 אם  $T$  לכסיין אז קיימים בסיס של ו"ע כך שאכל אחד מהם מבין  $V_\lambda$  ושוינו.  
 מצד שני, אם יש שוויון אז  $B$  קבוצה בת"ל של  $n$  ו"ע ולכון בסיס ולכון  $T$  לכסיין.

### 1.1.3 ~ ערכים עצמיים וקטוריים עצמיים למטריצות

**הגדה 9.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . נאמר ש- $v \in \mathbb{F}^n \neq 0$  הוא ו"ע של  $A$  אם  $Av = \lambda v$  ואם  $v \neq 0$ . **משפט 3.** תהי  $T: V \rightarrow V$  א"ל ויהי  $B$  בסיס סדור, ו- $V$  נוצר סופי (לעתים יקרא: סופי-ממד). נניח  $A = [T]_B$ . אז  $\lambda$  ערך עצמי של  $T$  אם ורק ערך עצמי של  $A$  עם אותו אמ"מ  $\lambda$ .

■ הוכחה. גירסה דואליונית. נניח  $V$  ו"ע של  $T$ . אז  $A[v]_B = [Tv]_B = [\lambda v]_B = \lambda[v]_B$ . מהכיוון השני "לכו הפוך".

**הגדה 10.** מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  תקרא לכסינה/נתנת לכלISON אם היא דומה למטריצה  $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$  אלכסונית, כלומר  $\Lambda = P^{-1}AP$  קיימת הפיכה שעבורה  $P \in M_n(\mathbb{F})$ . **משפט 4.** יהיו  $A, P \in M_n(\mathbb{F})$ . נניח  $P$  הפיכה. אז אם  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  אז  $P$  אמ"מ עם דוגמאות  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  בהתאם.

הוכחה. נסמן  $P = (P_1 \dots P_n)$  عمמודותיה. אז:

$$AP = (AP_1 \dots AP_n) = (\lambda_1 P_1 \dots \lambda_n P_n) = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

ולכן:

$$P^{-1}AP = P^{-1}P\Lambda$$

■ הוכחה מהכיוון השני היא לקרה את זה מהצד השני.

"אני מוקוה שראיתם שכפל מטריצה אלכסונית מתחלף" (הוא לא בהכרח). "אני אמרתי שיטות." ~ בן  
**משפט 5.** בהינתן העתקות  $T, S$ , שתיهن לכיסיותם לפי אותו הבסיס  $B$  (לא בהכרח אותם הע"עים), אז  $TS = ST$  מתחלפות.  
**משפט 6.** המטריצה  $I$  עבר  $\mathbb{F}$  לא דומה רק לעצמה.

הוכחה. בהינתן  $P$  הפיכה, המכפל של  $P$  עם  $I$  מתחלף בהכרח, ולכן  $I = \lambda I$  לכל מטריצה  $P^{-1}\lambda IP = PP^{-1}\lambda I = \lambda I$  דומה.

### 1.1.4 ~ פולינום אופייני

**תרגיל.** תהי  $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ . מצאו ו"ע וע"ע של  $A$  ולכטנו אם אפשר.

**פתרון.** מחפשים  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש-  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ו-  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \lambda I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

סה"כ  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(\lambda I - A)$  אם  $\lambda$  ערך עצמי של  $A$  (AKA  $\det(\lambda I - A) = 0$ ). ב מקרה זה: האופייני).

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -8 \\ -6 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \implies \det(\lambda I - A) = (\lambda + 7)(\lambda - 7) = \lambda^2 - 1$$

לכן הע"ע הם  $\pm 1$ . נמצא את ה"ע. עבר  $\lambda = 1$ , מתקיים:

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

יש לנו חופש בחירה (ופתרון יחיד עד לכדי כפל בסקלר). במקרה זה, נבחר  
עבור  $-1 = \lambda$ , יתקיים:

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff b \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ראינו שהמלכמת היא העמודות של ה"ו". א:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

סח"כ  $I = P^{-1}AP$ . מכאן צריך למצוא את  $P^{-1}$ .  
משפט 7. תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אז  $\lambda \in \mathbb{F}$  של  $A - \lambda I$  אם  $|A - \lambda I| = 0$ .

הגדלה 11. הפולינום האופייני של  $A$  מוגדר להיות:

$$f_A(x) = |xI - A|$$

משפט 8. תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . אז  $f_A(x)$  הוא פולינום מותוקן [=מקדם מוביל ה-1 ממעלה  $n$ , המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$ ].  
המקדם החופשי הוא  $(-1)^n |A|$ .

הגדלה 12. עבור  $A \in M_n(\mathbb{F})$  הפולינום האופייני של  $A$  הוא  $f_A(x) = \det(Ix - A)$ .

ראינו ש- $v$  ו- $u$  של  $A$  עם ערך עצמי  $\lambda$  אם  $\lambda \in \ker(\lambda I - A)$ , וכן  $\lambda$  ע"ע אם  $\dim \ker(\lambda I - A) > 1$ .  
משפט 9. פולינום מותוקן (מקדם מוביל 1) מדרגה  $n$ , המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$ , המקדם החופשי הוא  $(-1)^n \det A$ .

הוכחה.

- **תכונות הפולינום.** מבין  $n$  המחוברים, ישנו אחד ייחיד שדרגתו היא  $n$ . הסיבה היא שמדטרמיננטה לפי תמורות, התמורה היחידה שתיצור איבר מסדר  $n$  היא תמורות הזהות שתעביר על האלכסון. באינדוקציה על  $n$ , ונקבל:

$$f_A(x) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn}) = x^n + \cdots$$

באופן דומה אפשר להוכיח באינדוקציה באמצעות פיתוח לפי שורות:

$$f_A(x) = (x - a_{11})|A_11| + \underbrace{a_{21}|A_21| - a_{31}|A_31| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|}_{\text{מה.n. דרגה קטנה מ-n}}$$

סח"כ גם כאן הרأינו שהדרגה מתאפשרת מהפולינום  $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$ , כלומר הפולינום האופייני מותוקן.

• **המקדם של  $x^{n-1}$  הוא  $-\text{tr } A$ .** מקדמי  $x^{n-1}$  מגאים גם הם רק מ- $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$  (הפולינום למעלה) שהם  $-\text{tr } A = \sum_{i=1}^n -a_{ii}$ .

• **המקדם החופשי.** מתקבל מהצבתת 0.  $f_A(0) = \det(I \cdot 0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ .

■

### דוגמאות.

א) אם  $f_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$  אז  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  (נתו מהמשפט הקודם).

ב) אם  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  אז  $A = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

ג) אם  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  אז גם  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$   
דומה לאלכסונית עם אותם הקבועים.

ד) אם  $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$  כאשר  $B, C$  בלוקים ריבועיים אז  $f_A(x) = f_B(x) \cdot f_C(x)$

הגדלה 13. בהינתן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל נגידר את הפולינום האופייני שלה (פ"א) באופן הבא: נבחר בסיס  $B$  למ"ו  $V$ , ונתבונן ב- $f_T(x) := f_A(x)$  א

"אתה פותר עכשו שאלה משיעורי הבית" "אל תdag הבודק כבר שלח פתרון" "מה?".  
**משפט 10.** הפ"א של ט"ל מוגדר היטב. למטריצות דומות אותו פ"א. הוכחה. בשיעורי הבית. ויש סיכוי שגם בדף הסיכום.

**דוגמה.** נתבונן בהעתקה  $B = (1, x, \dots, x^n) : \mathbb{R}^n[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ ,  $T(f) = f'$ . אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ואז:

$$f_T(x) = \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & & \\ & x & -2 & 0 & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix} = x^{n+1}$$

**משפט 11.**  $T : V \rightarrow V$  ט"ל, אז  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אם ומם  $f_T(\lambda) = 0$ .

■ הוכחה. יהא  $B \subseteq V$  בסיס של  $V$ . אז  $A = [T]_B$  אם ומם  $\lambda$  ע"ע של  $A$ .

**הגדלה 14.** יהי  $\lambda \in \mathbb{F}$  ע"ע של  $T$  (או  $A$ ). הריבוי האלגברי של  $\lambda$  הוא החזקה המקסימלית  $d$  כך ש- $(x - \lambda)^d | f_T(x)$  (חלוקת פולינומית).

**דוגמה.** בעבר  $T$  הייתה העתקת גזירת פולינום, הפ"ע  $f_T(x) = x^{n+1}$  ולכן ע"ע ייחיד הוא 0. הריבוי האלגברי של 0 הוא  $n + 1$ . הריבוי הגיאומטרי של 0 הוא 1.

**סימנו 2.** נניח ש- $\lambda$  ע"ע של  $T$  (או  $A$ ) אז  $d_\lambda$  הריבוי האלגברי של  $\lambda$  ו- $r_\lambda$  הריבוי הגיאומטרי של  $\lambda$ .

### 1.1.5 ~ על הקשר בין ריבויו גיאומטרי ואלגברי

**הערה 3.** במקרים רבים  $\sum d_i = n$  כאשר  $n$  דרגת הפולינום. זה לא תמיד המצב.

דוגמה למצב בו זה לא קורה:  $x^2(x^2 + 1) \in \mathbb{R}[x]$ . סכום הריבויים האלגבריים הוא 2, אבל דרגת הפולינום היא 4. זה נכון מעש שדות סגורים אלגברית.

**משפט 12.** תהי  $T : V \rightarrow V$  ט"ל. אז לכל  $\lambda$  ע"ע  $\lambda$  מתקיים  $r_\lambda \leq d_\lambda$ .

הוכחה. יהיו  $\lambda$  ע"ע. אז  $V_\lambda = \{v \in V \mid T v = \lambda v\}$ . נשלים אותו לבסיס  $B$  של  $V$ .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * \\ & \lambda & \\ 0 & \ddots & \\ * & & C \end{pmatrix}$$

ואז:

$$f_T(x) = (x - \lambda)^{r_\lambda} C(x) \implies r_\lambda \leq d_\lambda$$

■

**משפט 13.** תהי  $T : V \rightarrow V$  ט"ל עם פ"א  $f_T(x)$ . אז  $T$  לכסינה אם ומם שתי הטענות הבאות מתקיימות:

1. בעבר  $k$  הע"ע שונים,  $f_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{d_\lambda}$

2. לכל  $\lambda$  ע"ע של  $T$  מתקיים  $r_\lambda = d_\lambda$

(חברה: 1 לא גורר את 2. צריך את שניהם).

הוכחה.

$\iff T$  לכסינה ראיינו ש- $1$  מתקיים. במקרה שלכסינה ראיינו ש- $n = \sum r_{\lambda_i} \leq \sum d_{\lambda_i} = n$  ולכן אם לאחד מבין הערכים העצמיים מתקיים  $r_{\lambda} < d_k$  אז מתקיים  $r_{\lambda} \neq d_k$  ונקבל סתירה לשווונות לעיל.

$\implies$

$$1 \implies \sum d_{\lambda_i} = n$$

$$2 \implies \sum r_{\lambda_i} = \sum d_{\lambda_i} = n$$

■ ושה"כ  $n$  אמ"מ  $T$  לכסינה.

### 1.1.5.1) פיבונאצ'י בשדה סופי

סדרת פיבונאצ'י:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נניח שאנו מסתכלים מעל  $\mathbb{F}_p$  כלשהו. אז הסדרה חייבת להיות מחזורת. **שאלה:** متى מתקיים ש- $I = A^m$  (בעבור  $m$  מוגנימלי)? ב的日子里, متى מתחלים מחזור.

0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1 : $p = 7$  עבור  $m \leq p^2$ , או  $p = 7$  עבור  $m = 16$ .  
**הערה 4.** תירואטיב עם המידע הנוכחי יתכן ויופיע למחזורי ולא יחזר להתחלה טענה. אם  $p$  ראשוני אז  $p \equiv 1 \pmod{5}$  או אורך המחזור חסום מלעיל ע"י  $p - 1$ .

הוכחה. תנאי מספיק (אך לא הכרחי) לקבלת מחזור באורך  $k$  הוא  $A^k = I$ . אז:

$$f_A(x) = x^2 - x - 1$$

יש דבר שנקרא "הדיות ריבועית" (חומר קרייה רשות במודול) שمبرטיחה שורש לפולינום להלן עבור  $k$  כ"ל. אכן יש לנו שני ע"ע שונים (אם קיימים רק אחד אז סתירה מהיות הדיסקרימיננטה  $5 = 0 \pmod{5}$ ). لكن קיימת  $P$  הפיכה כך ש-:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

כך ש- $0 \neq \lambda_1, \lambda_2$ . משפט פרמה הקטן אומר ש- $\lambda_1^{p-1} = \lambda_2^{p-1} = 1$ . ואז  $I$ .

### 1.1.6 ~ שילוש

**הגדרה 15.**  $V \rightarrow V$ :  $T \mapsto [T]_B$  ניתנת לשילוש אם קיימים בסיס  $B$  לי- $V$  כך ש- $[T]_B$  משולשית.

**הערה 5.** אם  $T$  ניתנת לשילוש אז הפולינום האופייני שלו מתפרק לגורמים ליניארים (האם איברי האלכסון של הגרסה המשולשית). יהיה מעניין לשאל אם הכיוון השני מתקיים.

**משפט 14.**  $T: V \rightarrow V$ :  $T \mapsto [T]_B$ . נניח ש- $f_T(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$  (ניתנת לפירוק לגורמים ליניארים) אז  $T$  ניתנת לשילוש.

הוכחה. בסיס.  $1 = n$  היא כבר משולשית וסיימנו.  
 עצ. נניח שהטענה נכונה בעבור  $n$  טבעי כלשהו, ונראה נכונות עבור  $n + 1$ . אז  $f_T$  מתפרק לגורמים ליניארים, שכן יש לו שורש. יהיו  $\lambda$  ע"ע של  $T$ . בסיס  $B$  של  $V$  מקיים ש- $[T]_B$  משולשית עליונה (נסמן  $(B = (w_1 \dots w_{n+1}))$  אז  $\iff$   $B^1$ ).

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda & * & & \\ 0 & \vdots & & \\ \vdots & \dots & C & \dots \\ 0 & \vdots & & \end{pmatrix}$$

או ניתן לומר כי:

$$f_T(x) = (x - \lambda)f_C(x)$$

נסמן ( $\text{cz sh}$ )  $f_S(x) = f_C(x)$ . לפי ה"א קיימים בסיס  $S: W \rightarrow W$  כך ש-  $w = \text{span}(w_2 \dots w_{n+1})$ . קיימת העתקה לינארית  $T: W \rightarrow W$  ש-  $T(w) = aw_1 + S(w)$ . הוא  $B''$  שעבורו  $S$  משולשית עליונה. נטען ש-  $B = B'' \cup \{w_1\}$  יתנו את הדרוש.

$$\forall w \in B'': (T - S)(w) = Tw - Sw = aw_1 + S(w) - S(w) = aw_1$$

(כלומר, השורה העליונה של  $[T]_B$  "תרמה" את  $aw_1$  בלבד) לכן:

$$(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$$

זה גורר שלכל  $w \in B'' \cup \{w_1\}$  מתקיים  $(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1)$ . סה"כ לכל  $w \in W$  מתקיים  $(T - S)w \subseteq \text{span}(w_1 \dots w_n)$ .

בהוכחה זו, בנינו בסיס  $\text{cz sh}$ :

$$[T(w) - S(w)]_B = ae_1$$

**הגדלה 16.** מטריצה ניתנת לשילוש אם היא דומה למשולשית.  
**משפט 15.** מטריצה  $A$  ניתנת לשילוש, אם ומ"מ הפ"א האופייני שלה מותפצל לגורמים לינאריים.

### המשך בעמוד הבא

### 1.1.7 ~ על ההבדל בין פוליאוֹס לפוליאוֹנוֹס

נבחן ש- $[x]$  הוא מ"ז מעל  $\mathbb{F}$ . וכן  $[x] \in \mathbb{F}[x]$  הוא חוג חילופי עם יחידה. בחוג כפלי לא חייב להיות קומוטטיבי (נאמר, חוג המתריצות הריבועית). אומנם קיימת יחידה (פוליאוֹס קבוע ב- $x$ ) אך אין הופכיים לשום דבר חוץ מלפוני הקבועות. זהה מאוד חבל כי זה כמעט שדה. בהמשך, נגידר את אוסף הפונקציות הרצינליות כדי להתגבר על כך.

אם נתבונן במטריצות דומות, יש הבדל בין להגיד  $f_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ , אך אפשר לטעון  $|f_A(x)| = |B|$  (כש- $(\mathbb{F}(x))$  כ- $B \in M_n(\mathbb{F}(x))$  כי  $(xI - A) \in M_n(\mathbb{F}(x))$  זה קצת מנוגן כי איברי המטריצה הם או פוליאוֹומיים קבועים או ממעלה 1). משום שדטרמיננטה שלחמת איבר לשדה, אז  $|f(x)| = |B|$ . כך למעשה נגע לכך שפוליאוֹומיים אופייניים שווים כשי איברים בתוך השדה, ולא רק באיך שהם מתנהגים ביחס לקבועים.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2), \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = x, \quad f, g \in \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2 \implies f = g$$

כך:

$$f(A) = A^3 = 0, \quad g(A) = A \neq 0$$

זה לא רצוי. נבחן בשני שוויונות שונים – שוויון פונקציות, בהם  $f = g$  מעל  $\mathbb{F}_2$ , ושוויון בשדה – בו  $0 \neq f - g$  (כי  $x^2 - 1$  לא פוליאוֹם האפס, ולאחר מכן  $\mathbb{F}_2(x)$  ו- $\mathbb{F}_2$  מתקיים  $f \neq g$ ).

### 1.1.8 ~ משפט קוילוי-המיטלטון

**הגדרה 17.** שדה  $\mathbb{F}$  נקרא סגור אלגורייט אם כל פוליאוֹן  $f$  ב- $\mathbb{F}[x]$  ניתן לבטא כמכפלה של גורמים לינאריים ( $a - x$ ) כאשר  $a \in \mathbb{F}$ , עד לכדי כפל בסקלר.

**הגדרה 18.** יהיו  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{F}$  נ"ס (נווצר סופית) וכן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נגידר:

$$f(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i, \quad T^0 = id, \quad T^n = T \circ T^{n-1}$$

בנ"ל עם מטריצות (ראה תרגול)

טעינה. אם  $[TS]_B = AC$ ,  $[T + S]_B = A + C$ ,  $[f(T)]_B = f(A) + f(x)$  והוכחה נובעת מהתכונות  $[f(T)]_B = [T]_B$  או  $[S]_B = C < [T]_B = A$ .

טעינה. אם  $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$  ו- $f, g \in \mathbb{F}[x]$  ב- $V$  דומה  $(f \cdot g)(T) = f(T) \cdot g(T)$ . בואפן דומה  $T: V \rightarrow V$ .

לכן קל לראות ש- $f(T) = 0 \iff f(A) = 0$  ו- $f(A) = 0 \iff f(C) = 0$  **מסקנה 5.** אם  $A, C$  דומות אז  $f(A) = 0 \iff f(C) = 0$ .

**דוגמה.** (מנownת) נתבונן ב- $D: \mathbb{F}_n[x] \rightarrow \mathbb{F}_n[x]$  אופרטור הגזירה. ראיינו  $f_D(x) = x^{n+1}$  (הפוליאוֹום האופייני). אז נקבל:

$$f_D(D)(p) = p^{(n+1)} = 0 \implies f_D(D) = 0$$

**משפט 16 (משפט קוילוי-המיטלטון).** תהי  $T: V \rightarrow B$  ט"ל  $V$  נ"ס (הפ"א, או  $A \in M_n(\mathbb{F})$ ) ו- $f_A(A) = 0$ .

**הערה 6.** באנגלית, Cayley–Hamilton

הוכחה. נוכיח את המשפט בשלושה שלבים –

- נניח ש- $T$  ניתנת לשילוש. אז, קיימים בסיס  $(v_1 \dots v_n)$  של  $T$  מושולשית (עליזונה). זאת מתקיים אם "מ

. נפנה להוכיח את משפט קוילוי-המיטלטון לקרה זה.

תת-הוכחה.

- גטיש: בעבר  $n = 1$ , אז קיימים  $\mathbb{F} \in \lambda$  כך  $\lambda I = 0$  (העתקה לינארית חד ממדית היא כפל בסקלר). בפרט  $\forall v \in V: (T - \lambda)v = 0$ .

- צעד: נניח ש- $B = (v_1 \dots v_n, v_{n+1})$  שעבורו  $T[B]_B$  מושולשית. נגידר תמ"ז  $W = \text{span}(v_1 \dots v_n) \leqslant W$  (נ"ט  $w \in W: Tw \in W$ ) ו- $\dim V = w \in W$  (ניתן להראות שהוא נכון עבור וקטורי הבסיס, ונוכיח לכל

mlinariot). נגיד  $T|_W: W \rightarrow W$  את הצמצום של  $T$  ל- $W$ . ידוע ש- $|_w T$  ניתנת לשילוש ולכן מקיימת את תנאי האינדוקציה. לכן,  $f_{T|_W}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$   $\forall w \in W: f_{T|_W}(T)(w) = 0$ . איז  $\forall w \in W: f_T(w) = 0$  וקיבלנו  $f_T(x) = (x - \lambda_{n+1})f_{T|_W}(x)$ . מספיק להראות ש- $v \in W$   $\forall v \in V: (T - \lambda_{n+1})(v) = 0$ . למה? כי:

$$f_T(T)(v) = \left( \prod_{i=1}^n (T - \lambda_i) \right) (T - \lambda_{n+1})(v)$$

mlinariot, מספיק להראות ש- $(T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = 0$ , שכן זה מתקיים על כל בסיס אחר. אך זה ברור – עבר  $[T]_B$  העמודה האחורונה היא:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} \implies (T - \lambda_{n+1})(v_{n+1}) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in W$$

■

- נוכיח בעבר מטריצה משולשית/ניתנת לשילוש.

תת-הוכחה. אם  $A$  משולשית, אז  $f_A(x) = Av$  כאשר  $f_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  המוגדרת ע"י  $f_A(x) = Ax$  ו- $A$  ניתנת לשילוש וסימנו.

אם  $A$  ניתנת לשילוש, אז היא דומה למשולשית, והן בעלות אותו הפולינום האופייני. אז חזרה לתחילת ההוכחה. ■ עבור  $T$  כללית או  $A$  כללית.

תת-הוכחה. נניח  $A = [T]_B$  עבור בסיס  $B$ , ידוע  $f_T(x) = f_A(x)$ . ידוע ש- $A$  ניתנת לשילוש אם"מ  $f_A(x)$  מטפל. טענה מהעתידי הלא נכון: לכל שדה  $\mathbb{F}$  קיים שדה  $\mathbb{K}$  סגור אלגברית (כל פולינום מעל שדה סגור אלגברית מפותץ). על כן, ניתן לחשב על  $(A \in M_n(\mathbb{K}))$   $f_A(A) = 0$  כמו  $f_A(A) = 0$  הוא אותו הפולינום האופייני מעל  $\mathbb{F}$ . לכן הוא מטפל (מעל  $\mathbb{K}$ ), וכך הוא דומה למשולשית, ומהמקרה הראשון  $f_A(A) = 0$ . זאת כי  $f_A(A) = 0$  לא תלוי בשדה עלייו אנו עובדים, וסה"כ הוכחנו בעבר מטריצה כללית, ולכן לכל ט"ל. ■ ■

**משפט 17.** אם  $A$  מייצגת של העתקה  $T$ , ו- $f \in \mathbb{F}[x]$ , אז  $f(A) = 0 \iff f(T) = 0$ .

**הערה 7 (בנוגע לשדות סגורים אלגברית).** הטענה שלכל שדה יש שדה סגור אלגברית – טענה שתלויה באקסiomות הבחירה. הסגור האלגברי הוא היחיד. הטענה זו לא נאמרת באופן רשמי בקורס על אף שהרבה לשדה סגור אלגברית מועילה מאוד בlinearit 2א באופן כללי.

### המשך בעמוד הבא

# 1.2 Ring Theory..... 1.2

## 1.2.1 ~ מכוון והגדרות בסיסיות

אז, מה זה אובייקט אלגברי? הרעיון – "Data עם אקסימוט". אנו כבר מכירים רבים מהם: תמורות, חבורות, שדות, מרחבים וקטורים, ועוד. עתה נזכיר אובייקט אלגברי בשם חוג. מוגבל לסמן חוג בתורה השלשיה הסדרה  $(\cdot, +, \cdot)$  כאשר  $\cdot : R \times R \rightarrow R$ ,  $+ : R \times R \rightarrow R$  ו-  $\cdot : R \times R \rightarrow R$  הפעולות הבינאריות בחוג  $R$ , כאשר  $+$  קומוטטיבי וקיים נגדי, וכן הפעולות הבינאריות דיסטרובטיביות.

**הגדרה 19.** חוג עס ייחודה הוא קבוצה עם שתי פעולות, כפל וחיבור, ניתרים לפעולות  $(0, 1)$  כך שמתכתיימות כל אקסימוטות החודה למעט (פוטנציאלית) קיום איבר הופכי, וקומוטטיביות הכפל.

אנחנו נתעניין ספציפית בחוגים קומוטטיבים, כלומר, בהם הכפל כן קומוטטיבי. המתריצות הריבועיות מעלה אותו הוגדל, לדוגמה, החוג שאינו קומוטטיבי. החוג ה"בסיסי ביותר" – חוג השלמים (אין הופכי) הוא חוג קומוטטיבי. ישנים חוגים בלי יחידה (לדוגמה הזוגיים בלבד), שלא לדבר עליהם כלל.

**הגדרה 20.** תחום שלמות הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה ללא מחלקן.

**הערה 8.** באנגלית, Integral Domain

**הגדרה 21.** חוג יקרא לא מחלקן אם:

דוגמאות לחוגים עם מחלקן:

- $a = b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ : הוכחה  $M_2(\mathbb{R})$

- $2 \cdot 3 = 0$ :  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

**משפט 18.** בתחום שלמות יש את כלל הצמצום בכפל: אם  $ab = ac \wedge a \neq 0$  אז  $b = c$ .

הוכחה.

$$ab \cdot ac = 0 \implies a(b \cdot c) = 0 \implies a = 0 \vee b - c = 0$$

בגלל ש-  $a \neq 0$ , אז  $b - c = 0$ . נוסיף את  $c$  הנגדי של  $-c$  – ונקבל  $.b = c$ .

דוגמאות בתחום שלמות:

• שדות

• השלמים

• חוג הפולינומיים

## 1.2.2 ~ ראשויות ואי-פרוייקות

**הגדרה 22.** יהיו  $R$  תחום שלמות,  $a, b \in R$ . נאמר  $a \mid b$  אם קיים  $c \in R$  כך ש-  $b = ac$ .

**הגדרה 23.**  $u \in R$  נקרא הפיך אם קיים  $\alpha \in R$  כך ש-  $1 = \alpha u$ .

**משפט 19.** יהיו  $R$  תחום שלמות,  $u \in R$  הפיך. יהיו  $a \in R$  וא.  $a \mid u$ .

הוכחה. יחס החלוקה טרנזיטיבי ולכן  $a \mid u$  ו-  $1 \mid a$ .

**סימון 3.** קבוצת ההפייכים מוסמנת ב-  $R^x$ .

דוגמאות.

1. אם  $R = \mathbb{F}$  אז  $R^x = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ .

2. אם  $R = \mathbb{Z}$  אז  $R^x = \{\pm 1\}$ .

3. אם  $R = \mathbb{F}[x]$  אז  $R^x = \mathbb{F}^x$  (התהייחסות לסקלים  $\mathbb{F}$  היא כל פונקציות קבועות)

**הגדרה 24.**  $a, b \in R$  נקראים חכרים אם קיים  $u \in R^x$  והוא הפיך כך ש-  $ub = a$ , ומסמנים  $a \sim b$ .

**משפט 20.** יחס החברות הוא יחס שקילות.

הוכחה.

א.  $a \sim a$  כי  $1 \in R^x$

- ב. אם  $b \sim a$  אז קיים  $a \in R^x$  כך ש- $ub = a$ . קיימים  $\alpha, \beta \in R$  כך ש- $\alpha a + \beta ub = b$  ו- $\alpha a = b$  ו- $\beta u = 1$ .
- ג. נניח  $c \sim b \wedge b \sim a$ , כי מכפלת ההופכיים הפיכה  $c \sim a$  וסימנו.

"אני אני חבר של עומר, ועומר חבר של מישהו בכיתה שאני לא מכיר, אני לא חבר של מי שאני לא מכיר." המרצה: "למה לא? תהייה חבר שלו".

**משפט 21.** הופכי הוא היחיד.

(אותה הוכחה כמו בשדות)

הוכחה. יהיו  $a \in R^x$  ו- $u'$  הופכיים שלו, אז:

$$u = u \cdot 1 = u \cdot a \cdot u' = 1 \cdot u' = u'$$

**הערה 9.** המשפט להלן נכון רק בתחום שלמות, אלא בכל חוג  $R$  ו- $a, b \in R$ , אם  $a | b$  וגם  $a \sim b$  אז  $a \mid b$  (ביחס החברות).

הוכחה.

$$\begin{aligned} a | b &\implies \exists c \in R: ac = b \\ b | a &\implies \exists d \in R: bd = a \end{aligned}$$

לכן:

$$ac = b \implies acd = a \implies a(cd - 1) = 0 \implies a = 0 \vee cd = 1$$

אם  $a = 0$  אז  $b = 0$  (משמעותה של  $a$  לא ריבועי). אחרת,  $a \neq 0$  ולכן  $c \neq 0$  והפיך, סה"כ  $cd = 1$ .

"אני חשוב ש[אוניברסיטה] עברית קרוא להם ידידים, לא רצוי להתחייב לחברות ממש."

**הדרה 25.** איבר  $p \in R$  נקרא או-פרוייקס אם מתקיים  $p = ab \implies a \in R^x \vee b \in R^x$ .

**הדרה 26.** איבר  $p \in R$  נקרא ראשוני אם  $p | ab \implies p | a \vee p | b$ .

**הערה 10.** איברים הפיכים לא נחכמים או-פרוייקסים או ראשוניים. הסיבה להגדרה: בשבייל נכונות המשפט היסודי של האריתמטיקה (יחידות הפרוק לראשוניים).

**משפט 23.** בתחום שלמות כל ראשוני הוא אי פרוק.

**הערה 11.** שיקולות לאו דווקא.

הוכחה. יהיו  $p \in R$  ראשוני. יהיו  $a, b \in R$  כך ש- $ab = p$ . בה"כ  $a | p$ . אז קיים  $c \in R^x$  כך ש- $pc = a$  ו- $pb = p$ . סה"כ  $pb = p$  ו- $p = pc$  (ואה"ל ו- $b$  הפיך).

**הדרה 27.**  $R$  תחום פריקות יוזה אם  $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{j=1}^m q_j$  עבור  $n, m \in \mathbb{N}$ , וуд לכדי סידור מחדש, לכל  $i \in [n]$  ו- $p_i \sim q_i$ .

**הערה 12.** באנגלית, Unique Factorization Domain.

**משפט 24.** נניח שבתחום שלמות  $R$ , כל או-פרוייקס הוא גם ראשוני. אז  $R$  תחום פריקות ייחודה.

הוכחה: זהה לחולטין לו של המשפט היסודי.

הוכחה. באינדוקציה על  $n+m$ . בסיס:  $n+m=2$  ו- $n=1$  (כי מעפלה ריקה לא רלוונטיות מואוד) אז  $p_1 = q_1$ . געבור לכך. נניח שהטענה נכונה לכל  $k < n+m$ . נניח ש- $k = n+m = \prod_{j=1}^m q_j$ . בה"כ  $q_1 | p_1$ . איזה  $p_1$  לא או-פרוייקס ולא הפיך. לכן  $q_1 \sim p_1$ . אז עד כדי כפלי בהופכי נקבל ש- $\prod_{i=2}^n p_i = \prod_{j=2}^m q_j$ . העיה: ראשוני כפול הפיך נשאר ראשוני. מכאן הקענו לדרוש וסימנו (הערה שלוי: كانوا תכפילו בחברים ותקבלו את מה שצריך).

**הדרה 28.** יהי  $R$  תחום שלמות. תת-קבוצה  $I \subseteq R$  נקראת איזיאל אם:

א.  $\forall a, b \in I: a+b \in I$  – סגירות לחיבור.

ב.  $I \subseteq R$  – תכונת הבלתיה. [בפרט  $0 \in I \forall b \in R: ab \in I$ ]

**דוגמאות:**

1. 0 תמיד אידיאל, וכן החוג כולו תמיד אידיאל.

2. הזוגים ב- $\mathbb{Z}$ .

3. לכל  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  כפול השלים). הזוגים לדוגמה, מקרה פרטי הוא  $2\mathbb{Z}$ .

4.  $\langle f \rangle := \{g \in \mathbb{F}[x] \mid f|g\} \subseteq \mathbb{F}[x]$  המוגדר לפי

5. הכללה של הקודמים: עבור  $a \in R$  נסמן  $\langle a \rangle := \{a \cdot b \mid b \in R\}$  הוא אידיאל.

6.  $\{f(0) = 0 \mid f \in \mathbb{F}[x]\} = I$  (לעתים מסומן  $\langle a \rangle = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(0) = 0\}$ )

7. נוכל להזכיר את 4 עוד: (" הכללה של הכללה היא הכללה. זה סגור להכללה. זה קורה הרבה במתמטיקה")

$$I = aR + bR = \{ar + bs \mid r, s \in R\}$$

וניתן להכליל עוד באינדוקציה.

**הגדה 29.** אידיאל  $I$  נקרא ראשי אם הוא מהצורה  $aR$  עבור  $a \in R$  כלשהו.

**סימון 4.**  $\langle a \rangle =: \{ar \mid r \in R\} =: \{a\}$

**הגדה 30.** תחום שלמות נקרא תחום ראשי אם כל אידיאל שלו ראשי.

**הערה 13.** באנגלית, Principal Ideal Domain או בקיצור PID.

**הערה 14.** אנחנו סימנו אידיאל שנוצר ע"י  $a \in R$  ובקורס מסמנים  $Ra$ , באופן כללי אפשר לדבר על אידיאל שמאל שמאלי ואידיאל ימני. תחת ההנחה שהחוג קומוטטיבי שני הסימונים שולטים בכל מקרה.

**משפט 25.**  $b \in R \neq \{0\}$  תחום ראשי אז כל אי פריק הוא ראשוני.

(את הכוון השני כבר הוכחנו בעבר בתחום שלמות באופן כללי)

הוכחה. יהיו  $a, b \in R$  כך  $|ab| = p$ . ניעזר באידיאל  $Ra + Rp = I$ . במקרה הראשון, קיים  $c \in R$  כך  $ra + sp = 1$ . במקרה השני, קיימים  $r, s \in R$  כך  $ra + sp = 1$ .

• הוכיחו  $R = R \cdot 1 \in I \subseteq R \iff \exists c \in R: c \in I$ .  $R = R \cdot 1 \in I \subseteq R \iff \exists c \in R: c \in I$ .

• אם  $c \in I$  אז  $c \in R$  ומכיוון  $R = R \cdot 1 \in I$  אז  $c \in R$ .

**מסקנה 6.** אם  $R$  תחום שלמות ראשי אז יש פריקות יחידה למינימום של אי פריקים עד כדי חברות.

**משפט 26.** יהיו  $a, b \in R$ , אז  $a, b \in R$  זרים אם  $\forall c \in R: c | a \wedge c | b \implies c \in R^x$

**הגדה 31.** יהיו  $g \in R$  כך ש-:

1.  $g | a \wedge g | b$ .

2.  $\forall \ell \in R: \ell | a \wedge \ell | b \implies \ell | g$ .

אז  $g$  הוא הגורם המשותף המינימלי של  $a, b$  (gcd( $a, b$ )). נניח שקיימים  $r, s \in R$  כך  $ra + sb = g$  אשר מחלק את  $b$ . אז:

1.  $\gcd(a, b) = g$ .

2. gcd מוגדר ביחידות עד כדי חברות.

3. בתחום ראשי, לכל  $a, b$  קיים  $g$  כך ש-.

הוכחה.

1. יהיו  $\ell | a, b$  אז  $\ell | ra, sb$  וסה"כ  $\ell | g$ .

2. מ-1 (בערך) אם  $g, g'$  מקיימים את היותם gcd אז  $g | g' \wedge g' | g$  ומכיוון  $g \sim g'$  אז  $g' | g$ .

■ 3. נסמן  $I = Ra + Rb$ . אז  $I = Rg$  וקיים  $r, s \in R$  כך  $ra + sb = g$  ולכן  $g | a, b$ .

**מסקנה 7 (אלגוריתם אוקלידיß המורחב).** בתחום ראשי, אם  $a, b$  זרים אז  $\exists r, s \in R: ra + sb = 1$ .

**משפט 28.**  $\mathbb{F}[x]$  תחום ראשי.

הוכחה. יהי  $I \subseteq \mathbb{F}[x]$  אידיאל. אם  $I = \{0\}$ , הוא ראש. אחרת,  $\{0\} \neq p \in I$  פולינום מדרגה מינימלית, ויהי  $f \in I$ . אז קיימים  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  כך  $qf + qp = f$ . בגלל  $\deg r < \deg p$  ידוע  $f = qp + r$ . אז  $r \in I$ . אם  $a \in R$  אז  $ar \in I$ . קיבלו סתירה למינימליות הדרגה של  $p$ . ■

הוכחה זהה עובדת בשביל להראות ש- $\mathbb{Z}$  תחום ראשי, אך עם דרישה במקומות ערך מוחלט.

**הגדה 32.** תחום שלמות נקרא אוקלידי אם קיימת  $N_+$  כך  $\forall a, b \in R \setminus \{0\}$ :  $\exists u, r \in R$ :  $a = ub + r$  ואנש  $N(a) \leq N(ab)$ .

ברגע שיש לנו את ההגדרה של תחום אוקלידי,  $N$  הפונקציה שתשתמש אותנו בשביל להראות את ההוכחה שכל תחום אוקלידי הוא תחום ראשי (בדומה לערך מוחלט או  $\deg$  בהוכחות קודומות). ההפוך נכון תחת השערת רימן המוכללת (לא ראייתם את זה צץ, נכון?).

aintואטיות לחוג אוקלידי היא "חלוקת עם שארית", כאשר פונקציית הגודל  $N$  דורשת שהשארית תהיה "אופטימלית". ב>Show הpolynomial  $N = \deg$  (פרטים בהמשך), וב>Show המספרים השלמים  $| \cdot | = N$ .

דוגמא לחוג שאינו אוקלידי:  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  הוא  $\{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**משפט 29.** חוג אוקלידי  $\iff$  תחום פריקות יחידה (גרסה מוכללת של המשפט היסודי של האריתמטיקה).

**משפט 30.** חוג אוקלידי  $\iff$  תחום שלמות.

(הוכחה בויקיפדיה)

לדוגמא בחוג לעיל  $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 = 2 \cdot 3$  אף ש- $2, 3$  אי-פריקים וכן  $(1 + \sqrt{-5})$  אי פריק.

דוגמא (>Show שלמות של גaus).

$$R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

הנורמה:

$$N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad N(a + bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$$

ב>Show להוכחה לפיה הערך המוחלט של מושך הוא כפלי, ניתן להראות ש- $\mathbb{Z}[i]$  כפלי. מי הם החפיקים ב- $\mathbb{Z}[i]$ ? מי שמקיים  $\alpha\beta = 1$ , כלומר, כולם:

$$N(\alpha)N(\beta) = 1 = N(1), \quad \alpha = a + bi, \quad a^2 + b^2 = 1 \implies a + bi = \pm 1, \pm i$$

בהנחה שモוגדרת נורמה כזו, החוג הוא אוקלידי (תנאי זה הכרחי אך לא מספיק).

**הערה 15.** למספרים הראשוניים בחוג השלמות של גaus קוראים "ראשוניים גausיאניים", והם מקיימים תכונות מעניינות. בפרט אפשר להוכיח ש- $p$  הוא ראשוני בחוג השלמות של גaus אם  $N(p) = 4n + 3$  או  $3 \equiv 4n + 3 \pmod{p}$  כאשר  $\equiv$  חחס החבורות.

**משפט 31.** יהי  $\mathbb{Z} \in p$  ראשוני. התנאים הבאים שקולים:

- $p$  פריק ב- $\mathbb{Z}[i]$
- $n, m \in \mathbb{Z}$  עבור  $p = m^2 + n^2$
- $p \equiv 1 \pmod{4}$  או  $p = 2$
- $ra + sb = 1$   $\forall r, s \in R$

שימו לב ש- $\mathbb{Z}[i]$  לא סגורים לבעיה.

**הגדה 33.**  $I \subseteq R$  אידיאל נקרא ראשוני אם  $\forall a, b \in R$ :  $(a \cdot b) \subseteq I$  או  $a, b \in I$ .

**הגדה 34.** אידיאל  $I \subseteq R$  נקרא אי-פריק אם  $\forall a, b \in R$   $a \in I = (a \cdot b)$  או  $b \in I = (a \cdot b)$ .

ראינו, שבתחום ראשי אי-פריק אם ראשוני. ניתן להראות דומה ניתנו לעונן ש-:

**משפט 32.**  $R$  תחום ראשי, אז  $I$  ראשוני אם  $I$  אי-פריק.

**הגדה 35.** יהי  $R$  תחום שלמות [אפשר להעתיק גם עם אידיאל ימני ושמאלי] ונניח ש- $R/I$  אידיאל. אז  $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$  הוא חוג (ב>Show  $a + I = \{a + i \mid i \in I\}$ , כאשר הפעולות:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \quad \bullet$$

$$(a + I)(b + I) = ab + I \quad \bullet$$

עקרונית צריכה להוכיח שהחיבור/כפל לא תלוי בנסיבות  $a, b$ , כדי שה>Show יהיה מוגדר היטב (זה כמובן מתקיים בתחום ראשי).

## 1.2.3 ~ הרוחנת שדות

**משפט 33.** בתחום ראשי  $R$ , אם  $I$  אידיאל א-פריק, אז  $I/R$  שדה.  
דוגמאות.

$\mathbb{Z}/\langle p \rangle$  שדה. •

$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1 \rangle \cong \mathbb{C}$ . הרעיון: נוכל להסתכל על  $p$  פולינום המבוטא כמו:

$$p(x) = q(x) \cdot (x^2 + 1) + ax + b = ax + b + \langle x^2 + 1 \rangle$$

ואם נכפיל שני יצורים כאלה:

$$((ax + b) + I) + (cx + d + I) = acx^2 + (ad + bc)x + bd + I$$

אך ידוע  $x^2 + 1 = 0$  כי זה האידיאל שלנו עד לכדי נציג, כלומר מתקיים שוויון  $-I + I = 0$  כפל מרכיבים. אפשר גם להראות קיום הופכי וכו'.

הוכחה. هي  $I \neq 0$ . אם  $a \neq 0$ , אז ב- $M$  מתקיים  $a \nmid p$  או  $p \mid a$  (אם הוא היה מחלק את  $a$  אז  $a = 0$ ) ולכן  $r, s \in R$ ,  $rs = 1$ . סה"כ:  $ar + ps = 1$ .

$$ar + ps + I = 1 + I \implies ar + I = 1 + I \quad \top$$

לכן  $I + r$  הופכי של  $I + a$  וסיימנו. ■

(למעשה זה אמ"מ – הכוון השני תרגיל בעבר הקורא).  
**הגדרה 36.** هي  $R$  תחום שלמות,  $a_1 \dots a_n \in R$  ו- $\ell = \text{lcm}(a_1 \dots a_n)$  אם"מ:

$$\forall i \in [n]: a_i \mid \ell \quad .1$$

$$\forall b \in R: \forall i \in [n]: a_i \mid b \longrightarrow \ell \mid b \quad .2$$

**דוגמה.**  $R = \mathbb{Z}$ ,  $\text{lcm}(2, 6, 5) = 30$

**משפט 34.** هي  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $f \in \mathbb{F}[x]$  פולינום א-פריק ממעלה  $\deg f > 1$ . אז קיים  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$  כך שב- $\mathbb{K}$  יש  $f$  שורש. ההוכחה למשפט קונסטרוקטיבית, ובה צריך להראות שהקבועה:

$$\mathbb{K} = \{p(A_f) \mid p \in \mathbb{F}[x]\}$$

עם חיבור וכפל מטריצות, היא שדה. השיכון  $\alpha \mapsto \alpha I \mapsto \mathbb{K}$  משכך את  $\mathbb{F}$ .  
**משפט 35.** (ללא הוכחה בקורס, תלוי באקסימומת הבחירה) לכל שדה  $\mathbb{F}$  קיים ויחיד שדה  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$  סגור אלגברית. דוגמאות:  $\mathbb{R}$  ו- $\mathbb{C}$ .

## 1.2.4 ~ חוג הפולינומים

(תת-פרק זה לקו מתרגול בקורס)

**הגדרה 37.** הזרגה של הפולינום היא  $\deg(0) = -\infty$ ,  $\deg(f) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ , ומגדירים **משפט 36.**

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \quad \deg(d + g) = \max\{\deg f, \deg g\}$$

**הערה 16.** חוג הפולינומים הוא חוג אוקלידי כי פונקציית הגודל  $N = \deg f$  מקיימת את התנאי של חוג אוקלידי. לכן ממשפט הוא תחום ראשי.

**מסקנה 8.** לכל  $f, g \in \mathbb{F}[x]$ , אם  $g \neq 0$  אז קיימים ייחודיים פולינומים  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  כך  $g = qg + r$  ו- $\deg r < \deg g$ .  
**הגדרה 38.** נאמר שפולינום  $q$  מחלק את  $f$  אם  $q \mid f$  ומסמנים  $\deg f = n > -\infty$ .  
**מסקנה 9.**

$$f(a) = 0 \iff (x-a) \mid f \quad .1$$

אם  $\deg f = n > -\infty$  לכל היותר  $n$  שורשים כולל ריבוי.

3. נניח ש- $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ , כאשר  $K$  שדה. אם  $f | g$  מעל  $K$  אז  $f | g$  מעל  $\mathbb{F}$ .

הוכחה.

1. הוכחה למשפט בז'ו:

$$\begin{aligned} f(a) = (a-a)g(a) = 0, \text{ קרי } f = (x-a)g(x) \quad \Rightarrow \\ 0 = f(a) = q(a)(a-a) + r(a) = q(x-a) + r(a) \quad \Leftarrow \\ r(x) = 0. \text{ משום } r \text{ פולינום קבוע (דרגתנו } 0, \text{ כי חילקו } (x-a) \text{ מדרגה } 1), \text{ אז} \end{aligned}$$

2. אינדוקציה

3. נניח ב- $\neg P \rightarrow Q$  אנו יודעים ש- $\neg P \rightarrow \neg Q$   $\Leftrightarrow$  "contrapositive". נניח ש- $f \nmid g$  מעל  $\mathbb{F}$ . קיימים כך  $q, r \in \mathbb{F}[x]$  ו- $f = qg + r$ , מחדות  $r$ , קיבל ש- $f \nmid g$   $\Leftrightarrow r \neq 0$ .

■

"לא הנחתי בשלילה", הוכחות בקונטראפוסטיב" **משפט 37.** בהינתן  $f \in \mathbb{F}[x]$  ו- $r \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$  איז  $\lambda$  יקרה שורש מריבוי  $r$  של  $f$  אם  $(x-\lambda)^{r+1} \nmid f \wedge (x-\lambda)^r \mid f$ . **משפט 38.**

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]: f(\lambda) = 0 \Rightarrow \exists g \in \mathbb{F}[x]: f(x) = (x-\lambda)g(x)$$

**משפט 39.** (באיינדוקציה על הטענה הקודמת) בהינתן  $\mathbb{F}$  שדה סגור אלגברית:

$$\forall f \in \mathbb{F}[x]: \exists (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{F}, a_n \in \mathbb{F}: a_n \cdot f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

**משפט 40.** (מסקנה מהטענה הקודמת שניתנו להוכחה באינדוקציה ללא הרחבת שדות) לפולינום  $f \in \mathbb{F}[x]$  שאינו אפס יש לכל היותר  $\deg f$  שורשים.

**הערה 17.** שימו לב! כל המסקנות שלנו על תחומים ראשיים תקפים גם על פולינומיים. בפרט, ניתן לכתוב כל פולינום  $\mathbb{F}[x]$  כמכפלה של גורמים אי-פריקים ב- $\mathbb{F}[x]$  (אם  $\mathbb{F}$  סגור אלברטי, אלו גורמים לינאריים) עד לכדי סדר וחברות (קבועים).

**הערה 18.** שימו לב שחלק ניכר מהמשפטים לעיל נכונים בעבר פולינומיים מעל שדה ולא מעל כל חוג (בפרט, המשפט לפיו חוג הפולינומיים בתחום אוקלידי).

עתה נציג משפט פשוט אך מועיל ממתמטיקה B, שימושיים משמש לניחוש שורשי פולינום ע"מ לפרקנו.

**משפט 41.** יהיו  $a, b \in \mathbb{Q}$  ומתקיים  $p \in \mathbb{Z}[x]$  עם מקדים שלמים. יהי  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  כך ש- $0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  (אחרת ניתן לצמצם). איז  $a | \alpha_0 \wedge b | \alpha_n$ ?  $\gcd(a, b) = 1$  **מסקנה 10.**  $\forall A \in M_n(\mathbb{F}) \forall k \geq n \exists p(c) \in \mathbb{F}_{n-1}[x]: A^k = p(A)$ .

מסקנה זו נובעת מאלגוריתם לביטוי  $A^{n+c}$  כקומבינציה לינארית של  $A^{n-1}, \dots, A$  שמופיע בסוף הסיכום.

#### (1.2.4.1) פונקציות רצינגולית ומספרים אלגבריים

**אינטואיטיבית:** הרעיון של פונקציה רצינגולית היא להיות "פולינום חלק פולינומיים". נפרמל את הדבר הזה בעבר מרחב פולינומים מעל כל שדה.

**משפט 42.** בהינתן  $\mathbb{F}$  שדה הקבוצה  $\{(f, g) \mid f, g \in \mathbb{F}[x], g \neq 0\}$  מושהה את יחס השקילות הבא:

$$(f, g) \sim (\tilde{f}, \tilde{g}) \iff f \cdot \tilde{g} = \tilde{f} \cdot g$$

**סימון 5.** נסמן כל איבר בחלוקת השקילות ע"י  $\frac{f}{g}$  שמייצגים אותו.

**הגדרה 39.** שדה הפונקציות הרצינגוליות הוא הקבוצה  $[x]_Q$  היא אוסף מחלקות השקילות של ~ מהמשפט הקודם, עם פעולות החיבור והכפל הבאות:

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{f}}{g\tilde{g}} \wedge \frac{f}{g} + \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}} = \frac{f\tilde{g} + g\tilde{f}}{g\tilde{g}}$$

**лемה 1.** הגדרות הפעולות לעיל מוגדרות היטב (כלומר הן לא תלויות בנציגים)

**משפט 43.**  $[x]_Q$  שדה, כאשר  $\frac{0}{1}$  הניטרלי לחיבור ו- $\frac{1}{1}$  הניטרלי לכפל.

**המלצה.** לקרווא שוב את פרק 2.1, "על ההבדל בין פולינום לפולינום", בו נבחין שלמרות  $|-4| = 4$ , ישנו אינסוי פולינומים מעל השדה הזה.

**אינטואיטיבית.** למעשה, נרצה להגיד שדה הפונקציות הרצינליות הוא איזומורפי (קאנונית, וכך נתייחס אליו הוא שווה) ל-:

$$Q[x] \cong \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x], \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \right\}$$

כאשר  $\mathbb{F}[x]$  חוג הפולינומים מעל השדה  $\mathbb{F}$ . עוד כדאי לציין ש- $\mathbb{F}[x]$  מכיל עותק של  $Q[x]$  (עד לכדי איזומורפיים) בעברו 1 פולינום היחידה. כמובן ש"איזומורפיים" בהקשר זהה מדבר על העתקה (לא בהכרח ליניארית) ששמירת את פעולות החוג.

**משפט 44.** לכל  $p$  ראשוני  $x \in \mathbb{F}_p : x^p = \forall x \in \mathbb{F}_p$ .

**הערה 19.** זהה מסקנה לשירה המשפט הקטן של פרמה.

**הגדרה 40.** מספר מרוכב  $\alpha \in \mathbb{C}$  יקרא מספר אלגברי אם קיים פולינום  $f \in \mathbb{Q}[x] \neq 0$  כך ש- $0 = f(\alpha)$ .

**הגדרה 41.** מספר מרוכב שאינו אלגברי יקרא מספר טרנסצנדנטי.

**דוגמאות.** נבחין ש- $\sqrt{\alpha}$  הוא אלגברי כי הוא שורש של  $\alpha - x^2$ . קיימות הוכחות לפיהן  $e$  ו- $\pi$  הם מספרים טרנסצנדנטיים.

**משפט 45.** בהינתן  $0 \neq V \subseteq \mathbb{C}$ , אם  $\forall x \in \mathbb{C} : xV \subseteq V$  אז  $x$  אלגברי.

הוכחה. נגדיר  $T_x : V \rightarrow V$  כך ש- $T_x(v) = xv$  (ההעתקה מוגדרת היטב מהנתון). אזי  $0 = f_T(T) = T_x(v) = xv$ . איזי?

$$f_T(t) =: \sum_{i=1}^n a_n t^n \implies 0_V = f(T)v = \sum_{i=1}^n a_n T^n v = \left( \sum_{i=1}^n a_n x^n \right) v = f(x)v$$

בפרט עבור  $v \in V \setminus \{0\}$  יתקיים  $f(x) = 0$  ולכן  $x$  אלגברי.



### המשך בעמוד הבא

## Primary Decomposition . . . . . 1.3

### 1.3.1 ~ מרחבים $T$ -שמורים וציקליות

**הגדרה 42.** נניח ש-  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ , ו-  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אז  $U \subseteq V$  תמ"ו נקרא  $T$ -איוואריאנטי/ $T$ -שמור/ה אם לכל  $U \in U$  מותקיים  $T(u) \in U$ .

**דוגמאות.**  $\{0\}$  הם  $T$ -איוואריאנטיים. גם המ"ע (המרחבים העצמיים) הם  $T$ -איוואריאנטי.

**הערה 20.** שימוש לב: אם  $U \subseteq V$  תמ"ו איוואריאנטי, אז  $T|_U: U \rightarrow U$  ט"ל.

**הערה 21.** נניח ש-  $u_k \dots u_1 \dots u$  בסיס ל-  $U$  כי"ל, ו-  $W \subseteq U \oplus W = V$  תמ"ו כך ש-  $w_n \dots w_{k+1} \dots w_1$  בסיס ל-  $W$ , אז מתקיים:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U] & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(כasher  $B \in M_k$  ו-  $[T|_U] \in M_k$ ). ותחת ההנחה שאנו  $T$  הוא  $U$ -איוואריאנטי ו-  $W$ -איוואריאנטי, אפשר לייצג אותו באמצעות שתי מטריצות מייצגות על האלכסון (ראה הוכחת המשפט הבא).

**משפט 46.** יהי  $V$  מ"ו,  $U, W$  תמ"וים ונניח  $U, W$  הם  $U \oplus W = V$  והם  $T$ -איוואריאנטיים. אז  $(x)$ :

הוכחה. משום ש-  $U \oplus W = V$ , קיים בסיס  $u_k \dots u_1 \dots u$  בסיס ל-  $U$  ו-  $w_n \dots w_{k+1} \dots w_1$  בסיס ל-  $W$ . נבחין, שביצוג תחת הבסיס הזה:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & 0_{n \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times n} & [T|_W]_B \end{pmatrix}$$

זאת כי לכל  $v \in V$  ניתן לייצgo בצורה ייחודית כסכום של  $u \in U, w \in W$  כך ש-  $v = u + w$ , כלומר  $w = v - u$ . ואכן תחת העתקת הקורדינטות מהגדרת כפל וקטור במטריצה הטעונה לעיל מתקיימת. כלומר:

$$p_T(x) = \begin{vmatrix} Ix - [T|_U]_B & 0 \\ 0 & Ix - [T|_W]_B \end{vmatrix} = |Ix - [T|_U]_B| \cdot |Ix - [T|_W]_B| = p_{T|_U}(x) \cdot p_{T|_W}(x)$$

כדרוש. ■

**משפט 47.** בהינתן  $U_1 \dots U_k$  מרחבים  $T$ -איוואריאנטיים כך ש-  $U_1 \dots U_k = V$ , מתקיים

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם. ■

**הגדרה 43.** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ ,  $T: V \rightarrow V$  ט"ל ו-  $v \in V$  וקטור. אז תת-המרחב-הציקלי הנוצר מ-  $T$  על ידי  $v$  הוא

$$\mathcal{Z}(T, v) := \text{span}\{T^k(v) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

**משפט 48.**

•  $\mathcal{Z}(T, v)$  של  $V$  – טרוויאלי.

•  $\mathcal{Z}(T, v)$  תמ"ו  $T$ -איוואריאנטי – טרוויאלי גם.

עתה נציג מקרה נחמד. אם  $V$  נוצר סופית, גם  $\mathcal{Z}(T, v)$  נ"ס. נגיד שיהיה  $k \in \mathbb{N}_0$  מינימלי, כך שמתקיים  $T^k v + a_{k-1} T^{k-1} v + \dots + a_0 v = 0$ . לכן  $T^k v \in \mathcal{Z}(T, v)$ . אז  $T^k v \in \text{span}\{v, T v, \dots, T^{k-1} v\}$ . נניח  $T^k v \in \mathcal{Z}(T, v)$ . אז  $T^k v = 0$ . ניקח את  $T^k v$  בסיס את  $v, T v, \dots, T^{k-1} v$  של  $\mathcal{Z}(T, v)$ .

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

כאשר השורה האחורונה כי:

$$T(T^{n-1}v) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k v$$

**הגדרה 44.**  $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  היא המטריצה המצורפת לפולינום  $A_f = [T]_B$ .

**הערה 22.** באנגלית: "Companion Matrix", ולעיתים קרואה בעברית "מטריצה מלוחה".

### 1.3.2 ~ הפוליאנס המינימלי

דיברנו על הפוליאנס האופייני  $f_A = \det(Ix - A)$ . עוד ציינו בהינתו מטריצה, המטריצה המצורפת  $A_f$  מקיימת  $f_{A_f} = f(x)$ .

**משפט 49.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , נביט בקבוצה  $I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] : p(A) = 0\}$  איז אידיאל, קיים ויחיד ב-  $I_A$  פוליאנס מותוקן בעל דרגה מינימלית.

**הגדרה 45.**  $I_A$  לעיל יקרא הפוליאנס המינימלי.

הוכחה. נבחן כי  $I_A \subseteq \mathbb{F}[x]$ . סיגריות לחיבור – ברור. תכונת הביליה – גם ברור. סה"כ אידיאל.  $\mathbb{F}[x]$  תחום שלמות ולכן נוצר ע"י פוליאנס יחיד  $(p) = (p') \sim p$ . אם  $p \in I_A$  אז  $p' \in I_A$ . אם נקבע אותו להיות מותוקן אז הוא ייחיד (חברות בשדה הפוליאנים נבדلت ע"י כפל בפוליאנס קבוע). לפוליאנס הנ"ל נקרא הפוליאנס המינימלי של  $A$  הוא  $m_A$ . באותו האופן, עבור ■  $T: V \rightarrow V$  נתן להגדר את  $m_T$ .

**סימון 6.** יהיה הפוליאנס המינימלי של המטריצה  $A$ .

**הערה 23.** אם  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ו-  $p \in \mathbb{F}[x]$  כך ש-  $p(A) = 0$ , אז  $p \in I_A$  ומתקאים  $m_A | p$  ו-  $m_A$  מינימלי.

**הערה 24.** אנו יודעים ש-  $m_A | f_A$  כי מושפט קיילי המילטון  $f_A \in I_A$ , והוא  $f_A(A) = m_A(A) = 0$ , כאשר  $I_A$  האידיאל של המאפיינים של  $A$ . מהיות מרחב הפוליאנים תחום ראשי,  $m_A | f_A$  כדרושים.

**דוגמה.** עבור  $A = I_n$  אז  $f_A = (x-1)^n$ . לא בהכרח  $f_a = (x-1)^m$ , אל לפחות כן – לדוגמה בעבר  $D: \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$  אופרטור הגירה מתקיים  $f_D = x^{n+1}$  כי יש פוליאנים שנדרש לכזאת  $n$  פעמים ע"מ  $x^n$  לקבלת 0, לדוגמה ■.

**משפט 50.** תהא  $A = A_f$  המטריצה המצורפת ל-  $A$ . אז  $m_A = m_T$  (כלומר, הפוליאנס המינימלי לא תלוי בבחירה בסיס).

**משפט 51.** אם  $A$  מייצגת את  $T: V \rightarrow V$  אז  $m_A = m_T$  (כלומר, הבחירה בסיס לא תלוי בבחירה בסיס).

■  $I_A = I_T$ . יהי  $p \in \mathbb{F}[x]$ . אז  $[p(T)]_B = p([T]_B)$ . שני האגפים מותאפסים ביחד, ולכן  $m_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$  או  $(f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i})$  ■.

הוכחה. בה"כ  $A$  אלכסונית,  $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$  עם חזורות. נבחן ש-  $0 = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$ .  $A$  מייצגת העתקה  $V \rightarrow V$  יש בסיס של ו"ע  $v_1 \dots v_n$  כך  $v_j = (v_1 \dots v_n)$ . איז  $B = (v_1 \dots v_n)$  מותאים ל-  $\lambda_i$  קלשו וכך זה מותאפס. ידוע  $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) | m_A$ . אם נוריד את אחד המכופלים אז הע"ע שירד לא יתאפשר/לא יאפשר את הוקטור העצמי המזמין, ככלומר כל הגורמים הלינארים דרושים כדי לאפס את  $T$ , ומכאן המינימליות והשווון ל-  $m_A$ . ■.

**הערה 26.** אם  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , אז ניתן לחשב על  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ , איז  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ו-  $m_A$  לא משתנה ללא תלות בשדה.

**משפט 52.** אם  $g, h \in \mathbb{F}[x]$  ט"ל אז  $T: V \rightarrow V$  ו-  $g(T), h(T) \in \mathbb{F}[x]$

הוכחה.

$$(g(T) \circ h(T))(v) = (g \cdot h)(T)(v) = (h \cdot g)(T)(v) = (h(T) \circ g(T))(v)$$

**лемה 2 (למת המחלק של פוליאנס מינימלי).** יהי  $m_T$  הפוליאנס המינימלי של  $T: V \rightarrow V$ . אם  $f(x) | m_T(x)$  וגם  $\deg f > 0$  אז  $f(T) = 0$ .

הוכחה. בכלל ש-  $f | m_T$  או קיים  $g \in \mathbb{F}[x]$  כך ש-  $f \cdot g = m_T$ . נניח בשילhouette ש-  $f(T) \neq 0$  הפיכה. אז:

$$f(T) \circ g(T) = \underbrace{m_T(T)}_0 \implies \underbrace{f(T)^{-1} \circ (0)}_0 = g(T)$$

ידוע:

$$\deg m_T = \underbrace{\deg f + \deg g}_{>0} \implies \deg g < \deg m_T$$

בה"כ  $g$  מותוקן וקיים סטיירה למינימליות של  $m_T$ , אלא אם כן  $(x)$  פוליאנס ה-0 אבל אז  $m_T = 0$  בסטיירה להגדרתו של ■ פוליאנס מינימלי.

הוכחה זהה עבור מחלק של  $m_A$ , עבור  $A$  מטריצה.  
**משפט 53.** אם  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אז בהינתן  $p(T) = 0$  מתקיים  $p(\lambda) = 0$ .

הוכחה. קיימים  $v \neq 0$  ו"ע קלומר  $Tv = \lambda v$ , ולכן:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad 0 = 0v = p(T)(v) = \left( \sum_{i=0}^n a_i T^i \right) (v) = \sum_{i=0}^n a_i T^i(v) = \left( \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i \right) v = p(\lambda)v$$

מהיות  $v \neq 0$  קיבל  $p(\lambda) = 0$  כדרוש. ■

"זה טבעי, זה טבעי וזה ממשש טבעי". מה זה אומר שזה לא טבעי? יש בזה קצת ביצה".  
**משפט 54.**  $\lambda$  ע"ע של  $T$  אם  $m_T(\lambda) = 0$  מתקיים  $(x - \lambda)|f_T(x)$  וסהכ'  $\lambda$  ע"ע של  $T$ .

הוכחה. כיון אחד הוא מקרה פרטי של המשפט הקודם. מהכיוון השני, ידוע  $m_T(\lambda) = 0$ . לפי משפט באו  $(x - \lambda)|m_T(x)$ . ידוע  $m_T|f_T$  וסהכ'  $(x - \lambda)|f_T(x)$  וסהכ'  $\lambda$  ע"ע של  $T$ . ■

$$m_A(x) | f_A(x) | (m_A(x))^n \quad \text{משפט 55}$$

הוכחה. נותר להוכיח  $f_A(x)|(m_A(x))^n$  (השאר משפטיים קודמים). ידוע שפולינום מינימלי/אופייני נשארים זהים מעל כל שדה שמכיל את  $\mathbb{F}$ . לכן, ניתן להניח שהוא מתפרק לגורמים לינאריים. ראיינו שאם  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ ,  $f, g \in \mathbb{F}[x]$  ומתקיים  $f | g$  מעל  $\mathbb{F}$ . אז  $f | g$  מעל  $\mathbb{K}$ :

$$\left( \sum n_i = n \right) \quad f_A = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n_i}, \quad m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \quad (1 \leq m_i \leq n_i) \quad (m_A(x))^n = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{n|m_i}$$

$$\text{בגלל ש } n \leq m_i \Rightarrow n \leq m_i \cdot n \quad \text{משמעות!}$$

הוכחה זהה עבור  $V$  עם  $T: V \rightarrow V$  ו  $\dim V = n$ .  
**מסקנה 11** (שימושית!). נניח ש- $g | f_A$  אי פריק. אז  $g | m_A$ .

הוכחה.

$$g | f_A | (m_A(x))^n$$

ידוע  $g$  אי פריק, ולכן ראשוני (כי  $\mathbb{F}[x]$  תחום ראשי) ולכן  $g | m_A$ .

**משפט 56.** נניח ש- $A$  בלוקים עם בלוקים על האלכסון,  $A = \text{diag}(A_1 \dots A_k)$  כך ש- $A$  מתקיים  $(m_A = \text{lcm}(m_{A_1} \dots m_{A_k}))$ .  
במקרה שלנו, ה- $\text{lcm}$  הינו הפולינום בעל הדרגה המינימלית שモතחלק בכל ה- $A_i$ -ים. באופן כללי, מתקבל כיווץ של אידיאל החיתוך בתחומי הראשי. ככלומר:

$$I = (\text{lcm}(A_1 \dots A_k)) = \bigcap_{i=1}^n Rm_{a_i}$$

(הבררת הסימון:  $(Ra = (a)) = \langle a \rangle$ )

הוכחה (למשפט לעיל). לכל  $g \in \mathbb{F}[x]$  מתקיים:

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(A_k) \end{pmatrix}$$

בבירור מתקיים  $g(A) = 0$  אם  $\forall i \in [k]: g(A_i) = 0$ . לכן  $\forall i \in [k]: g(A_i) = 0$  מהגדotta ה- $\text{lcm}$  סימנו.

**מסקנה 12.** תהי ט"ל  $V$  ו- $T: V \rightarrow V$  מונ"ס, אז בהינתן  $U_1 \dots U_k$  מרחבים  $T$ -שמוראים כך ש- $A$  איז  $m_T = \text{lcm}(\{m_{T|_{U_i}} : i \in [k]\})$

**משפט 57.** נניח ש- $T, S: V \rightarrow V$  ט"לים. אז:

1. אם  $T, S$  מתחלפות, אז הם  $\text{Im } S, \ker S$ -איינווריאנטים (ולחפץ).
2. אם  $T, S$  מתחלפות ו- $S \subseteq W$  תמי' הוא  $T$ -איינווריאנטי, אז גם  $S(W)$  הוא  $T$ -איינווריאנטי.
3. אם  $W_1, W_2 \subseteq V$  הם  $T$ -איינווריאנטיים אז גם  $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$  הם  $T$ -איינווריאנטיים.
4. אם  $f(T) = f(T) - \text{איינווריאנטי}$ , אז  $f \in \mathbb{F}[x]$  ו- $f(W) \subseteq W$ .

הוכחה.

1. יהא  $v \in \text{Im } S$ . קיימים  $u, v \in V$  כך ש- $S(u) = v$ .

$$Tv = T(S(u)) = (T \circ S)(u) = (S \circ T)(u) = S(T(u)) \in \text{Im } S \implies Tv \in \text{Im } S$$

ובoor  $v \in \ker S$

$$S(T(v)) = (ST)v = (TS)v = T(S(v)) = T(0) = 0 \implies Tv \in \ker S$$

2. יהי  $w \in W$ . קיימים  $v \in S(W)$  ו- $v = S(w)$ .

$$Tv = T(S(w)) = S(T(w)) \in S(W)$$

כי  $Tw \in W$ .

3. ראיינו בתרגול הקודם

4. יהי  $w \in W$ .

$$f = \sum_{i=1}^n a_i x^i, \quad f(T)w = \left( \sum_{i=0}^n a_i T^i \right) (w) = \sum_{i=0}^n a_i T^i (w)$$

באינדוקציה  $T^i(w) \in W$  תמי'ו ולכון סגור וסימנו.

### 1.3.3 ~ ניסוח והוכחת משפט הפירוק הפרימרי

**משפט 58** (מקרה הבסיס של משפט הפירוק הפרימרי). ("מואוד חשוב") יהיו  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ . נניח  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נניח  $\gcd(g, h) = 1$ . נניח ש- $f = g \cdot h$  עבור  $f(T) = 0$ :

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$$

ואם  $f, g, h$  הם הפולינומים המינימליים לצמצום  $T$  על תת-המרחבים לעיל בהתאם.

הבררת הכוונה ב"פולינום המינימי לצמצום  $T$  על תת-המרחבים": בהינתן  $T_u = T|_U: U \rightarrow U, T = U \oplus W$  ובאופן דומה  $m_T = m_{T_U} \cdot m_{T_W}$  אז  $T_w$

הוכחה.

• ידוע  $h = g \cdot h$  ולכון  $a(x)g(x) + b(x)h(x) = 1$  קיימים  $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ .

$$\underbrace{(a(T) \circ g(T))(v)}_{\in \ker h(T)} + \underbrace{(b(T) \circ h(T))(v)}_{\in \ker g(T)} = V$$

הטענה ש- $(aT \circ gT)v \in \ker hT$  נובעת מכך ש-:

$$(hT)((aT \circ gT)v) = hT((ag(T))v) = (hag)Tv = ((agh)T)v = ((af)T)v = (aT)(fT)v = (a(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

(זאת כי כפל פולינומיים קומוטטיבי, כל עולמות הדיוון אסוציאטיביים, וכאשר החטקה  $aT$  התקבלה את  $fT = 0$  היא תחזירAPS וסה"כ  $0v = 0$  כדרושים). מהכיוון השני:

$$(gT)((bT \circ hT)v) = gT((bh(T))v) = (gbh)Tv = ((bgh)T)v = ((bf)T)v = (bT)(fT)v = (b(T) \cdot 0)v = 0v = 0$$

כלומר אcn  $\ker h(T) + \ker g(T)$  ו- $\ker(gT \circ hT) \subseteq \ker gT$  אcn  $(aT \circ gT) \subseteq \ker hT$  (ב- $bT \circ hT$  לא שווה לאcn). מהשווון לעיל סה"כ אcn  $(bT + hT)v = v$  הסכום אcn ישר שכן:

$$\forall v \in \ker gT \cap \ker hT: 0 + 0 = (aT \circ gT)v + (bT + hT)v = v$$

דהיינו,  $\ker g(T) \oplus \ker h(T) = V$  כדרוש מהחלק הראשון של המשפט.

- עתה נוכיח את החלק השני של המשפט. נניח  $f = m_T$ , ונסמן:

$$W_2 = \ker h(T)$$

$$T_2 = T|_{W_2}$$

$$W_1 = \ker g(T)$$

$$T_1 = T|_{W_1}$$

וכן  $B_1$  בסיס ל- $W_1$ ,  $B_2$  ל- $W_2$ . לכן  $B = B_1 \uplus B_2$  מושם שהראינו ש- $T$ -איינו אריאנטי (כי  $gT, hT$  מתחלפות):

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_2] \end{pmatrix}$$

מהמשפט שראינו,  $m_{T_2}|h$  ו- $m_{T_1}|g$ . ברור ש- $m_T = \text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})$ .

$$\deg m_{T_1} = \deg g + \deg h \geq \deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} = \deg(m_{T_1} \cdot m_{T_2}) \geq \deg(\text{lcm}(m_{T_1}, m_{T_2})) = \deg m_T$$

ולכן כל ה"אשים לעיל הדוקים ושווין בכל מקום.

$$\deg m_{T_1} \leq \deg g \wedge \deg m_{T_2} \leq \deg h$$

אם אחד מהשוויות לא הדוקים, אז:

$$\deg m_{T_1} + \deg m_{T_2} < \deg g + \deg h$$

וסתירה לממה שהראינו. לכן:

$$(m_{T_1}|g \wedge \deg m_{T_1} = \deg g) \implies m_{T_1} \sim g$$

$$m_{T_2} = h \text{ עברו}$$

סה"כ הוכחנו את כל חלקי המשפט, כדרושים. ■

**דוגמה.** נסמן  $V = \ker T^2 \oplus \ker(T - I)^3$ . החלק הראשון של המשפט אומר  $f(T) = 0$ ,  $f(x) = x^2(x - 1)^3$ . אומר שגם  $T|_{\ker T^2}$  הוא הפולינום המינימלי של  $x - 1$  (המינימלי של  $T|_{\ker T^2}$  אז  $f = m_T$ ) והפולינום המינימלי של  $T - I$  (המינימלי של  $T - I$  אז  $(x - 1)^3$ ). נניח ש- $T: V \rightarrow V$  מושפט הפרק הפרימרי. יהי  $m_T = g_1 \cdots g_s$ .

$$m_T = g_1 \cdots g_s \quad \forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1$$

אז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

ובנוסף  $g_i$  הוא הפולינום המינימלי של  $T|_{\ker g_i(T)}$

"יש לו שם מפוצץ אז הוא כנראה חשוב"

הוכחה. באינדוקציה על  $s$

- **בסיס:** עבור  $s = 2$  המשפט שהוכחנו.

- **צעד:** נסמן:

$$h(x) = g_s(x), \quad g(x) = \prod_{i=1}^{s-1} g_i(x)$$

ואז:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \implies \gcd(g, h) = 1$$

מהמשפט שקיבלנו:

$$V = \ker g(T) \oplus \ker h(T) \stackrel{\text{א.ג}}{\implies} \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

וכדי להוכיח את החלק השני של המשפט, נגיד  $i$

$$\ker h(T) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T|_{\ker h(T)}) = \bigoplus_{i=1}^s \ker g_i(T)$$

**הערה 27.** בהתאם למקרה הבסיסי, מספיק היה להוכיח  $g_s = f$ , ולא הילך  $g_1 \cdots g_{j-1}$  כורך להנחת  $f = m_T$  ספציפית, אם רצכים להראות קיום פירוק (ולא צורך להראות  $g_i$  הם הפולינומים המינימליים לצמצום  $T$  על התמ"זים). למעשה,

**משפט 60 (תוצאה 1 ממשפט הפירוק הפרימרי).**  $T$  לכיסינה אם  $m_T = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)$  מתפרק לגורמים לינאריים  $\lambda_i \neq \lambda_j$  שוניים זה מהו.

הוכחה.

$$g_i = (x - \lambda_i) \implies \text{לפי המשפט, אם נסמן } ($$

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(T - \lambda_i I)$$

כלומר  $V$  סכום ישיר של המ"ע של  $\lambda_s, \lambda_1, \dots, \lambda_1$ . לכל מרחב עצמי מממד  $k_i$  קיימים  $v_{k_i}, \dots, v_1$  בסיס כך ש- $v_j \in [j]$ , ומ הסכום הישר ידוע  $\sum_{i=1}^s k_i = n$  ומהיות איחוד בסיסים של מ"ע גם בסיס (כי המ"ע זרים) מצאנו בסיס מלכטן הוא אוסף הבסיסים של המ"עים.

אם  $T$  לכיסינה, אז הפולינום המינימי הוא  $\text{lcm}(T)$  של הפולינומים המינימיים של הבלוקים על האלכסון. הבלוקים על האלכסון הם  $\lambda_i$  הע"ע מוגדר, ולכן  $\text{lcm}(T)$  שלהם הוא מכפלת  $\lambda_i - x$  כאשר  $x$  הע"עים השונים, ושה"כ  $m_T$  מכפלת גורמים לינאריים שונים.

■

**משפט 61 (תוצאה 2 ממשפט הפירוק הפרימרי).** נניח  $T: V \rightarrow V$  לכיסינה, וקיים  $W \subseteq V$  תמו- $T$ -שמור. אז  $T|_W$  לכיסינה.

הוכחה. נסמן  $S = T|_W$ . אנחנו יודעים  $m_T(T) = 0$  ולכן  $m_T(S) = 0$ . ידוע  $m_S | m_T$  ולכן  $m_S$  מתפרק לגורמים לינאריים זרים, סה"כ  $S$  לכיסינה.

**סיכום.**  $T: V \rightarrow V$  ט"ל, וזה:

$$\forall i \neq j: \gcd(g_i, g_j) = 1 \wedge m_T(x) = \prod_{i=1}^s g_i$$

ואז:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \ker(g_i(T)) \wedge \forall i: m_{T|_{\ker g_i(T)}} = g_i$$

### המשך בעמוד הבא

# 1.4 Jordan Form . . . . .

## 1.4.1 ~ מיציאת שורשי פולינום אופייני ממולה חמיישית ואילך

נבחן בבעיה:  $M_5(\mathbb{C}) = A$ , קבעו אם הוא לכיסינה מעל  $\mathbb{C}$ .

- נחשב את  $f_A(x)$
- נמצא שורשים, אלו הם הע"ע
- לכל ע"ע נחשב את  $\lambda$
- אם סכום הממדים מסעיף ג' הוא 5, אז הוא לכיסינה
- $T$  לכיסינה אם קיים בסיס ו"ע אם ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי

אבל (המתמטיקאי, לא מילת הניגוד ולא מילה נרדפת ליגון) הוכח שאין פתרונות לפולינומים ממולה חמיישית יותר, וגולואה מצא דוגמאות לפולינומים שאյ' אפשר לבצע עליהם נוסחת שורשים ופיתח את תורה להרחבת שדות לשם כך (תורת גלוואה). הינו הטעקים ביססו את הגיאומטריה שלהם באמצעות דברים שאפשר לבדוק עם שדה ומוחגה. באמצעות כלים של תורה גלוואה אפשר לראות מה אפשר לעשות עם האמצעים הללו, ולהוכיח שלוש בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור – האם אפשר לרבע את המעגל (האם אפשר לבנות באמצעות שדה ומוחגה ריבוע שישתו שווה לשטח המעגל), או במילים אחרות, האם אפשר למצוא את  $\sqrt{\pi}$  – אי אפשר כי זה לא מספר אלגברי. שאלות אחרות היו, בהינתן קוביה, האם אני יכול למצוא קוביה בונפח כפול? באותה מידת' אי אפשר למצוא את  $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ . שאלת אחרת הייתה האם אפשר לחלק זווית ל-3 חלקים שווים.

גולואה הראה ש כדי לעשות את זה צריך למצוא שורשים של של כל מני דברים, ושבאמצעות סרגל ומוחגה אי אפשר לעשות זאת. בעיות שהיו פותחות לעולם המתמטי במשך שנים נפתרו בעזירת אותן התורות. בכלל שאין אלגוריתם למציאת פולינום ממולה חמיישית ואילך, ננסה לפתח כלים נוספים שיעזרו לנו למצוא שורשים לפולינומים הללו במקרים פרטיים.

אבל ניאלץ להabil את משפטה עליו כשות' משחphant בגיל 26. גלוואה מת בגיל 21 מדו-רך.

**מסקנה 13** (מסקנת הבדיקה של גלוואה). לא לכת לדו-רך.

■ הוכחה. ההוכחה מתקדמת ועוסקת בתורת גלוואה.

**הגדרה 46.** בהינתן  $A$  לכיסינה אמ"מ  $f_A^{\text{red}} := \prod_k (x - \lambda_k)^{r_k} \cdot f(x) = \prod_k (x - \lambda_k)^{r_k}$   $\forall i \neq j: \lambda_i \neq \lambda_j$ .  
**משפט 62.**  $f_A^{\text{red}}$  משלב  $\lambda_i$  ושוריוון אמ"מ  $A$  לכיסינה.

$$f_A^{\text{red}} = \frac{f}{\gcd(f, f')}$$

■ הוכחה. נשאר כתרגיל בעבר הקורא. (נתנו לנו את זה בשיעורי הבית)

**משפט 63.**  $A$  לכיסינה אמ"מ  $f_A^{\text{red}}(A) = 0$ .  
**лемה 3.**  $f_A^{\text{red}} | m_A$  לכיסינה.

הוכחת הלמה. יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  הע"ע של  $A$  (אפשר בה"כ להרחב שדה כדי שהם יהיו קיימים). אז אם  $\lambda_i$  ומתקיים  $f_A^{\text{red}} | m_A$  ו  $m_A(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{s_i}$

עתה נוכיח את החלק השני של הלמה (השווון). אם  $A$  לכיסינה, אז יש בסיס של ו"עים ועם λ הוא ע"ע של ו"ע בבסיס  $B$  אז  $m_A | f_A^{\text{red}}(A)$  וסה"כ  $A v_\lambda - \lambda v_\lambda = 0$ .

אם  $m_A | f_A^{\text{red}}$  אז  $m_A$  מכפלה של גורמים לינארית זרים, וראינו גירירה ללכסינוות.

הוכחת המשפט באמצעות הלמה.  $A$  לכיסינה אמ"מ  $m_A = f_A^{\text{red}}$ ,我们知道  $m_A(A) = 0$  וכאן  $A$  לכיסינה אמ"מ  
■  $f_A^{\text{red}}(A) = 0$

משום ש- $f_A^{\text{red}}$  כולל את כל הגורמים הלינאריים של  $f_A$ , עבור  $\deg f_A > 4$  נוכל למצוא את  $f_A^{\text{red}}$  (באמצעות משפט 62, אגניו אויקלדי, וחילוק פולינומים) ולקיים שהוא ממולה קטנה יותר, ואז נפרק גורמים לינאריים ל- $f_A^{\text{red}}$  במקומות, ואז כבר יהיה קל למצוא את הריבוי כי נוכל להוציא מ- $f_A^{\text{red}}$  גורמים לינאריים כגורם משותף החוצה.

## 1.4.2 ~ צורת ג'ורזן לאופרטור לינארי נילפוטנטי

### (1.4.2.1) נילפוטנטיות

**טורה:** בהינתן  $T: V \rightarrow V$  נרצה לפרק את  $V$  לסקומים ישרים של מרחבים  $T$ -איוריאנטים, קטנים ככל האפשר. **הדרה 47.** יהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נאמר ש- $V$  פריך ל- $T$  אם קיימים כך ש:

$$V = U \oplus W \quad \wedge \quad \dim U, \dim W > 0 \quad \wedge \quad U, W \text{ are } T\text{-invariant}$$

**מעטה ואילך** (עד סוף הנושא), נניח ש- $f_T(x)$  מתפצל מעל  $f$  לגורמים לינאריים (כלומר, נרחב לשדה סגור אלגברית). **הדרה 48.** יהי  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. נקראת העתקה נילפוטנטית אם קיים  $\mathbb{N} \ni n$  כך ש- $0^n = T^n$ . באופן דומה  $A$  תקרא מטריצה נילפוטנטית אם  $\exists n \in \mathbb{N}: A^n = 0$ .

**הדרה 49.** עבור  $n$  המינימלי שעבורו  $0 = 0/A^n = 0/T^n$ , אז  $n$  נקרא זוגת הנילפוטנטיות של  $T/A$ , ומסמנים  $n(T)/n(A)$ . **משפט 64 (תוצאה 3 ממשפט הפירוק הפרימרי).** בהינתן  $V$  אי-פריך ביחס ל- $T$ , ובנחתה ש- $f_T(x)$  מתפצל לגורמים לינאריים, אז  $r^r$  על כך  $T - \lambda I - m_T(x) = (x - \lambda)^r$ . נוסף על כן  $m_T(x) = (x - \lambda)^r$ .

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם  $m_T(x) = 0$  מתרפרק, הוא בהכרח לא קבוע אחרת  $0 \neq m_T(T) \neq (x - \lambda)$  לינארי כלשהו (אם לא לינארי ניתן לפרק לגורמים לינאריים ואז  $m_T$  מתרפרק וסתירה).

- אם  $m_T(x)$  מתרפרק, אז נזיה גורם לינארי אחד ונקבל  $g_i = g_1 \cdots g_i = m_T$  כאשר  $g_i$  לינאריים, זהינו ממשפט הפירוק הפרימרי, נניח בשילhouette  $g_i \neq g_j$  ומהיות  $m_T$  מותוקן נקבל  $\gcd(g_i, g_j) = 1$  ככלומר  $V = \ker \bigoplus_{i=1}^r \ker g_i(T)$  ולכן  $m_T(x) = g_i^r = (x - \lambda)^r$  כדרוש.

עתה נגש להוכיח את החלק השני של הוכחה ( $S - \lambda I - T - \lambda I$  מדרגה  $r$ ). משום ש- $m_T(x) = (x - \lambda)^r$ , אז  $M_T(T) = (T - \lambda I)^r$  ומכיוון  $n(T - \lambda I) = r$  נסיק  $n(T - \lambda I) \leq r$  ולכן  $r \leq n$ .

נסמן  $S = T - \lambda I$  בקשר לעיל. עוד כדאי לבדוק ש- $V$  הוא  $S$ -איוריאנטי (**אך לא בהכרח אי-פריך ביחס ל- $S$** ) שכן  $S(V) = T(V) - \lambda V \in V$  מסגרות לכפל בסקלר  $\lambda$  ולהיבור  $\lambda$ .

מה למדנו? שימוש שאנו יכולים לפרק (משפט הפירוק הפרימרי) את  $T$  למרחבים  $T$ -איוריאנטים פריקים מינימליים, או לכל  $i$  כזה נוכל להגיד  $S_i = T - \lambda_i I$  כזו כך שהיא נילפוטנטית. אם נוכל להבין טוב מה  $S_i$  עשויה למרחב שהוא שווהbürgen, נוכל להבין באופן כללי מה העתקה  $T$  עשויה לכל אחד מרוחבים אלה פריקנו אותה.

**лемה 4.** תהי  $T$  העתקה כללית, אז אם  $\ker T^i = \ker T^{i+1}$  לכל  $i$  מתקיים  $\ker T^j = \ker T^i$   $\forall i > j$ .

**лемה 5.** תהי  $T$  העתקה כללית, אז  $\ker T^i \supseteq \ker T^j \wedge \text{Im } T^i \subseteq \text{Im } T^j \quad \forall i > j$ . נסיק  $\ker T^{\mathcal{F}(T)} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+i} \wedge \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)} = \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+i}$ .

הוכחה. מלמה 5, בהכרח:

$$\ker T \subseteq \ker T^2 \subseteq \ker T^3 \subseteq \cdots \subseteq T^i \subseteq \cdots \subseteq V$$

נניח בשילhouette שכל ההכלות עד  $i = n$  הן ישרות, ממשפט נסיק:

$$\dim \ker T < \dim \ker T^2 < \cdots < \dim \ker T^i \leq n$$

כלומר יש  $n$  מספרים טבעיים שונים בין  $\ker T$  ובין  $0$  (לא כולל) ולכן  $\dim \ker T < n$  ומלמה 4 נקבע  $\ker T^{\mathcal{F}(T)} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+1} \supseteq \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)}$ . ניכר ש- $\mathcal{F}(T) \geq 1$ . **■**  $\forall i \geq \mathcal{F}(T): \ker T^{\mathcal{F}(T)} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+1} = \ker T^{\mathcal{F}(T)+i}$  לכל  $i \geq \mathcal{F}(T)$ :  $\text{Im } T^{\mathcal{F}(T)} = \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+1} = \cdots = \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+i}$ , וממשפט הממדים  $\dim \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)} = \dim \text{Im } T^{\mathcal{F}(T)+i}$ .

**משפט 66.** בהינתן  $T$  העתקה נילפוטנטית, אז  $\mathcal{F}(T) = n(T)$ . **סימון 7.**  $\mathcal{F}(T)$  לעיל סימון (שמקבול אך ורק בסיכון הזה), וקרוי *"fitting index"* של  $T$ .

### 1.4.2.2) שרשאות וציקליות

**הגדה 50.** קבוצה מהצורה  $\{v, T_1v, \dots, T^{k-1}v\}$  כאשר  $T^{k+1}v = 0$  והוא המינימלי, נקראת שרשota. **משפט 67.**  $V \rightarrow T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית, אז כל שרשota היא בת"ל.

הוכחה. יהיו  $\alpha_k \in \mathbb{F}$  כך  $\sum_{i=0}^k \alpha_i T^{(i)}(v) = 0$ . נניח בשיילה שהצירוף אינו טרווייאלי. אז קיים  $j$  מינימלי שעבורו  $\alpha_j \neq 0$ . נניח  $n$  המקסימלי ש- $T^n$  לא מאפס את  $v$ . אז:

$$T^{n-j} \left( \sum \alpha_i T^{(i)}(v) \right) = T^{n-j} \left( \sum_{i=j}^k \alpha_i T^i(v) \right) = \alpha_j T^{n-1}(v) + 0 = 0$$

אבל  $0 \neq \alpha_j, T^{n-1}$  וזה סתירה. ■

**תזכורת.** תמ"ו שקיימים לו בסיס שהוא שרשota, נקרא ציקלי.

**אנטידוגמה:** ישנו מ"ווים שאינם  $T$ -ציקליים. למשל:

$$V = \left\{ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - p(x) + h(y) \leq n \right\}$$

ו- $T$  אופרטור הגזירה הפורמלית. כדי ש- $V$  יהיה ציקלי, נדרש בסיס ציקלי שמדובר הוא לכל היותר דרגת הנילפוטנטיות. נניח ש- $V$  נילפוטנטית  $n(T) = n+1$ , וידוע ש- $\dim V = 2n+1$ , ולכן  $\dim V = n+1$  אבל לא יכול להיות בסיס שרשota. לכן  $V$  אינו  $T$ -ציקלי.

**הערה 28.** هي  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית ו- $n \leq \dim V = n$  אז  $n(T) \leq n$  וישנו שווין אמ"מ  $V$  ציקלי.  
**הערה 29.** אם  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית ו- $V$  ציקלי אז  $V$  אידי-פריק ל- $T$ .

הוכחה. נניח בשיילה שישנו פירוק לא טרווייאלי של  $V$  ל- $T$ . אז  $V = U \oplus W$  לא טרווייאליים. נסמן  $u \in U, w \in W$  כך  $u = u + w$ . וידוע  $n < n \leq \dim U = k, \dim W = \ell$ . נסמן  $B_v = \{v, T_1v, \dots, T^{n-1}v\}$ .

$$T^k v = T^k u + T^k w$$

אך משום ש- $T$  נילפוטנטית אז  $n(T|_U), n(T|_W) \leq k$  ולכן בפרט  $n(T|_U), n(T|_W) < n$  ו- $T^k v = 0$  אבל  $T^k w \in B_v$ . ■

**משפט 68.** תהי  $T: V \rightarrow V$  נילפוטנטית ונניח  $U$  תת-מרחב של  $V$  הוא  $T$ -אנוואריאנטי וציקלי, אז עבור  $S := T|_U$

$$\dim U \leq n(T) .1$$

$$\dim T(U) = \dim U - 1 \quad \text{dim } T(U) = T(U) .2$$

הוכחה.

$$\dim U = n(T|_w) \text{ וגם } n(T) \geq n(T|_U) .1$$

**הגדה 51.**  $T(U) = \text{span}(T_1v, \dots, T^k v)$  וא"ז  $T(u) = T(\text{span}(v, \dots, T^k v)) = \text{span}(T_1v, \dots, T^k v)$  זו קבוצה בת"ל ופורש ■  
את  $(U)$  ולכן  $\dim T(U) = \dim U - 1$

**הגדה 51.**  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי יקרא ציקלי מקסימלי אם  $\dim U = n(T)$  ו- $T$  נילפוטנטית קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.  
**משפט 69.** לכל  $V$  מ"ו,  $V \rightarrow T: V$  נילפוטנטית קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.

הוכחה. קיימים  $v \in V$  כך  $0 \neq v \neq T_1v, \dots, T^{n(T)-1}v$  ו- $T$  מטעה מקודם בת"ל ולכן ■  
תמ"ו ציקלי מקסימלי.

**משפט 70.** נניח  $U \subseteq V$  תמ"ו ציקלי מקסימלי. אז:

1. אם  $T(U) \subseteq T(V)$  הוא גם ציקלי מקסימלי.

$$U \cap T(V) = T(U) .2$$

הוכחה.

1.  $T(U) = \dim U - 1$ . טענה:

$$\dim T(U) = n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1$$

וסייםמו.

2. ידוע  $T(U) \subseteq U \cap T(V)$  כי  $T(U)$  ציקלי ולכן שמור, וכן  $T(V) \subseteq U$  והסקנו:

עתה נוכיח שווין באמצעות שיקולי ממד. אם לא היה שווין אז:

$$T(U) \subsetneq U \cap T(V) \subseteq U \implies \dim T(U) < \dim(U \cap T(V)) \leq \dim(T(U)) + 1 \implies U \cap T(V) = U$$

וזו סתריה כי:

$$U \cap T(V) \subseteq T(V) \implies n(T|_{T(V)}) = n(T) - 1 \implies n(T) = \dim U \leq n(T) - 1$$

■

#### 1.4.2.3) ניסוח כורת מייקל ג'ורדן לאופרטור נילפוטנטי

**משפט 71** (המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי). נניח  $T: V \rightarrow V$  ט"ל לינארית נילפוטנטית,  $V \subseteq U$  תמ"ו ציקלי מקסימלי אז קיימים  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -איוואריאנטי כך ש- $W = U \oplus W'$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על  $n = n(T)$ .

בבסיס: אם  $n(T) = 1$  אז כל  $W \subseteq V$  הוא  $T$ -איוואריאנטי. והיות שכל קבוצה בת"ל ניתנת להשלה לבסיס, אז  $W = \text{span}(v_1, \dots, v_m)$  כאשר  $B_V = (v := v_1, \dots, v_m)$ .

צעד: ("צעד, מעבר, אותו דבר, תקרוו להアイ שבא לכט") נניח שאנו יודעים את נכונות הטענה עבור  $n-1$ . נוכיח עבור  $n$ . נצמצם את  $T|_{T(V)}$  ציקלי מקסימלי. לכן, לפי ה.א. קיימים  $W_1$  והוא  $T$ -איוואריאנטי כך ש- $T(V) = T(U) \oplus W_1$ .

נגידיר  $W_2 = \{v \in V \mid Tv \in W_1\}$ . אז

**лемה 6.** ("למה א")  $U + W_2 = V$  (לאו דוקא סכום ישר) וגם  $\{0\} \subseteq W_1$ .

**лемה 7.** ("למה ב") בהינתן  $U \subseteq V$ ,  $W_1 \subseteq W_2$  ו- $W_2 = V$  ו- $U \cap W_1 = \{0\}$  אז קיימים  $U \oplus W' = V$  ו- $W_1 \subseteq W_2$  וכך ש- $W' \subseteq W_2$ .

נניח שהוכחנו את הטענות. יהיו  $w \in W_1$  ו- $w \in W_2$  ולכן  $w \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$  של  $V$ . ■

הוכחת למה ב' היא תרגיל רגיל בלינארית 1A שאין ערך להביא את הוכחתו.

הוכחת למה א' גם היא לא מעניינת במיוחד, אבל אותה המרצה כן הוכחיה:

הוכחה. יהיו  $v, u \in V$ , נביט ב- $T(v-u)$ . קיימים  $w_1 \in W_1$  כך ש-:

$$Tv = Tu + w_1 \implies Tv - Tu = w_1 \implies T(v-u) = w_1 \in W_1$$

ידוע  $v-u \in W_1$  לכן  $v = v-u + v$ .

אי מששו  $W_1 \subseteq T(V)$  ו- $V = U + W_2$  ולכן:

$$U \cap W_1 = U \cap (T(V) \cap W_1)$$

ידוע ש-:

$$U \cap W_1 = (U \cap T(V)) \cap W_1 \implies U \cap T(V) = T(U) \implies T(V) = T(U) \oplus W_1 \implies U \cap W_1 = T(U) \cap W_1 = \{0\}$$

■

**מסקנה 14.** ט"ל נילפוטנטית אז  $V$  איד-פריק ל- $T$  אם "מ  $V$  ציקלי.

הוכחה.

$\implies$  זה משפט שכבר הוכחנו  $\iff$

$\iff$  נניח  $V$  אי-פריק. אז קיים  $V \subseteq U$  תמי'ו ציקלי מקסימלי. לפי המשפט קיים  $W \subseteq V$  תמי'ו  $T$ -איוואריאנטי כך ש- $U, W$  תמי'ום איוואריאנטי. אם  $\{0\} = U = V$  ובפרט ציקלי. אחרת, מא-פריקות  $V$  ל- $T$ , נסיק ש- $V = U$  ולכן  $V = \{0\}$  ציקלי.

■

**משפט 72** (משפט ג'ורדן בעבר  $T$  נילפוטנטית 1). תהי  $V \rightarrow T: V$  נילפוטנטית אז קיים פירוק של  $V$  לסכום ישיר של  $V = \bigoplus U_i$  כאשר  $U_i$  הם  $T$ -ציקליים.

הוכחה. באינדוקציה על המשפט הקודם: נמצא ב- $V$  ציקלי מקסימלי כלשהו. אז קיים  $W \subseteq V$  תמי'ו  $T$ -שמור כך ש- $= \dim V$ . ידוע  $W \rightarrow T|_W: W \rightarrow U_1 \oplus W$ .

**משפט 73** (משפט ג'ורדן בעבר ט"ל נילפוטנטית 2). עבור  $V \rightarrow T: V$  נילפוטנטית, קיים בסיס  $B$  של  $V$  שהוא איחוד של שרשראות.

**מסקנה 15.** בעבר  $B$  בסיס מג'ורדן, נסיק:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \square & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \square & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \square \end{pmatrix}$$

כאשר הבלוקים הם בלוקי ג'ורדן אלמנטרי. בלוק ג'ורדן מהצורה הבאה יקרא אלמנטרי ויסומן:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(v) & \cdots & T(T^k v) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(יש ספרים בהם זה heißt transpose של זה).

**משפט 74** (יחידות צורת ג'ורדן בעבר ט"ל נילפוטנטית). עבור  $V \rightarrow T: V$  נילפוטנטית, אז בכל הפירוקים של  $V = \bigoplus U_i$  עבור  $U_i$  ציקליים (אי-פריקים) אז מספר תת-המרחב מממד נתון הוא זהה עבור כל פירוק.

הוכחה. באינדוקציה על  $n = n(T)$ .

- עבור  $n = 1$ , העתקת הד-0.  $V$  מתפרק לסכום ישיר של מרחבים מממד 1.

- צעד, נניח נכונות עבור  $n \in \mathbb{N}$ . נניח ש- $n+1 = n(T)$ . נסמן פירוק:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^\ell W_i$$

נסדר את  $(u_i)_{i=1}^k$  לפי גודל מימד, ונניח שרשימה הגדלים היא:

$$(1, 1, \dots, 1 \underbrace{<}_s a_1 \leq \dots \leq a_p) \implies s + p := k$$

רשימת הממדים מוגדל 1 ועוד כל השאר. נעשה כן"ל עבור  $(w_i)_{i=1}^\ell$  ונקבל:

$$(1, 1, \dots, 1 \underbrace{<}_{t} b_1 \leq \dots \leq b_r) \implies t + r := \ell$$

ידוע:

$$T(v) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) = \bigoplus_{i=1}^k T(W_i), \quad n(T|_{T(v)}) = n, \quad p = r, \quad \forall i: a_i - 1 = b_i - 1 \implies a_i = b_i$$

(הפירוק ל- $s$  ו- $t$  דרוש כדי שהפירוק לעיל לא כולל אפסים כאשר מפעילים את  $T$ ) ידוע  $a_i - 1 = b_i - 1$  כי אינדקס הנילפוטנטיות קטן ב-1 בהחלפת  $T$  משפט המגדים השני אומר ש-:

$$a_i = \dim U_i = \dim \ker T|_{U_i} + \underbrace{\dim \text{Im } T|_{U_i}}_{a_i-1} \implies \dim \ker T|_{U_i} = 1$$

מהטענה השנייה בلمה:

$$\begin{aligned} \ker T &= \bigoplus_{i=1}^k \ker T|_{U_i} \implies \dim \ker T = \sum_{i=1}^k \dim \ker T|_{U_i} = k \\ &\qquad\qquad\qquad \implies k = \ell \implies s = t \\ &= \sum_{i=1}^k \dim \ker T_{W_i} = \ell \end{aligned}$$

■

במילים אחרות: כל מטריצה מייצגת של ט"ל נילפוטנטית דומה למטריצת ג'ורדן יחידה, עד כדי שינוי סדר הבלוקים. (למה זה נכון? כי הגודל של בלוק הוא הממד של התמ"ז שנפרש ע"י וקטורי הבסיס שמתאים לעמודות הילו) למעשה, בכך הבנו כיצד העתקות נילפוטנטיות מתנהגות. עשוינו רצוקציה למקורה הפרטני של נילפוטנטיות, ועתה ננסה להבין את המקורה הכללי. ניעור בתוצאה 3 ממשפט הפירוק הפרימרי לשם כך.

**лемה 8.** נתון  $V = \bigoplus_{i=1}^k U_i$  כאשר  $U_i$  הוא  $T$ -איוארי (או צורך להניח נילפוטנטיות), אז:

$$T(V) = \bigoplus_{i=1}^k T(U_i) \quad \text{א.}$$

$$\ker T = \bigoplus_{i=1}^k \ker T(U_i) \quad \text{ב.}$$

וכחה: יותר כתרגיל בעבר הקורא.

### 1.4.3 ~ צורת ג'ורדן לאופרטור לינארי כללי

**הגדרה 52.** בלוק ג'ורדן אלמנטרי עם ערך ג' הוא בלוק מהצורה:

$$J_n(\lambda) = J_n(0) + \lambda I_n = J_n(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

**הגדרה 53.** בהינתן  $V \rightarrow T$ , בסיס  $B$  נקרא **בסיס מג'ורדן** אם  $[T]_B$  היא מטריצה עם בלוקי ג'ורדן מינימליים על האלכסון. **משפט 75 (משפט ג'ורדן).** לכל העתקה  $V \rightarrow T$ : קיימים מונומ"ס מעל שדה סגור אלגברית  $\mathbb{K}$ , קיימים בסיס מג'ורדן.

מה עומד לקרות?

1. נפרק את המרחב  $V$  לתתי-מרחבים, שכל אחד מהם משוויך לערך עצמי  $\lambda$ . נעשה זאת בשתי גישות – הראשונה באמצעות משפטי הפירוק הפרימרי, והשנייה באמצעות פירוק למרחבים עצמיים מוכלים (שני הפירוקים מניבים את אותם המרחבים).

2. נtabונן על המרחבים האלו, ונסיק שיש העתקה ציקלית עליהם, שאנחנו כבר מכירים את צורת הג'ורדן שלה. היא תאפשר לנו לפרק את המרחבים שקיבלו לתתי-מרחבים ציקליים, עם בסיס שרשראת שנตอน לנו צורת ג'ורדן.

#### (1.4.3.1) בעזרת פירוק פרימרי

ראשית כל, נוכיח את משפטי ג'ורדן באמצעות משפטי הפירוק הפרימרי שכבר רأינו.

הוכחה באמצעות פירוק פרימרי. נניח ש- $f_T(x)$  מתפרק לחלוטין. מהגרסה החלשה של משפר הפירוק הפרימרי (ראה הערת תחתית), משפט קיילי-המילטון  $f_T$  מאפ את  $T$ , ותחת הסימון  $f_T(x) =: \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{d_\lambda}$  מתקיים:

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \underbrace{\ker((T - \lambda_i)^{d_\lambda})}_{U_i}$$

כאשר  $U_n \dots U_1$  הם  $T$ -איווריאנטים. משום ש- $U_i$  הא-פריקים ביחס ל- $T$ , ו- $T$  שמורים. היות שהם אי-פריקים  $S|_{U_i} = T - \lambda I$ . נגיד  $S = T - \lambda I$ . אז  $U_i$  הוא  $T$ -איווריאנטי אמ"מ והוא  $S$ -איווריאנטי (טענה שראינו בעבר). ראיינו ש- $S|_{U_i} = (x - \lambda)^n$ . היא נילפוטנטית שכן ממשפט הפירוק  $(T - \lambda)^{r_i}$  מאפ את  $T|_{U_i}$  (אך לא בהכרח מינימלי, שכן  $f_T$  לא בהכרח מינימלי) ולכן  $S|_{U_i} = (T - \lambda_i)^{r_i} = S^{r_i}$ . כלומר  $S|_{U_i}$  נילפוטנטית. ל- $S|_{U_i}$  הוכחנו קיום צורת ג'ורדן, משמע קיים לה בסיס מגדרן  $\mathcal{B}_i$  כך ש-:

$$[S|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} = [T|_{U_i} - \lambda I] = [T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} - \lambda I \implies [T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i} = \text{diag}(J_{a_1}(0) \dots J_{a_n}(0)) + \lambda I = \text{diag}(J_{\lambda_i}(0) \dots J_{a_n}(\lambda_i))$$

לכן, נוכל לשרש את הבלוקים הללו ולקבל  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{B}_i$ , המקיים:

$$[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \{ [T|_{U_1}]_{\mathcal{B}_1} \dots [T|_{U_s}]_{\mathcal{B}_s} \}$$

משום שככל אחד מ- $[T|_{U_i}]_{\mathcal{B}_i}$  הוא בלוק ג'ורדן בעצמו, סה"כ נקבל:

$$[T]_B = \text{diag}(J_1(\lambda_1) \dots J_n(\lambda_j))$$

זהוי צורת הג'ורדן של מטריצה כללית.

במילים אחרות – נעזרנו בפירוק פרימרי ע"מ לפירק את המרחב למרחבים  $T$ -איווריאנטים פריקים מינימליים (במהשך נראה שאלו המרחבים העצמיים המוכלים של  $T$ , שקיימים כל מיני תוכנות נחמדות) ואת המרחבאים אליהם פירקנו, ניתחנו בעזרת צורת ג'ורדן להעתקות נילפוטנטיות.

**משפט 76.** צורת ג'ורדן היא ייחידה עד כדי סדר בלוקים.

#### (1.4.3.2) בעזרת מרוחבים עצמיים מוכלים

בגישה זו נוכל לפתח את צורת ג'ורדן למטריצה כללית ללא צורך בפירוק פרימרי, פולינום מינימלי, משפט קיילי-המילטון וכו'. זו גישה יותר אלמנטרית ופושטה, ואם מבינים אותה האלגוריתם המסורבל למציאת צורת ג'ורדן הופך לאינטואיטיבי בהרבה.

**הגדרה 54.** המרחב העצמי המוכל של  $\lambda$  הוא מ"ז:

$$\tilde{\mathcal{N}}_\lambda := \bar{\mathcal{N}}_\lambda := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}: (T - \lambda I)^n v = 0\}$$

**משפט 77.** המרחב העצמי המוכל הוא מ"ז.

**מסקנה 16.** באופן מיידי נסיק  $\tilde{\mathcal{N}}_\lambda \subseteq V_\lambda$ .

**הגדירה 55.** וקטור עליי מוכל הוא וקטור  $V \in \mathbb{C}^n$  כך ש- $\forall v \in \mathbb{C}^n$ :  $T^{(i)} v = 0$   $\forall i \in [n]$ .

**הערה 30.** החלק הזה ואילך, איז סוף הפרק, הינו הרחבת של בלבד ואילו אינם משפטיים המופיעים בקורס. עם זאת, המשפטים להלן מאפשרים להבין בצורה הרבה יותר טובות את צורת ג'ורדן, ולעתים קרובות תצרכו להוכיח אותם בעצמכם.

**הערה 31.** מרגישים אבודים? אני ממש ממליץ על **סדרה הבאה** (פרק 36-42) (סליחה למי שהמליץ לי על זה במקור, אני לא זכר מיה זה היה אז אני לא אוכל לתת קרדיט).

**משפט 78.** תהי העתקה  $T$  כללית ו- $\lambda \in \mathbb{F}$  סקלר, אז  $\tilde{\mathcal{N}}_\lambda = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$  (כאשר  $\mathcal{N}$  המרחב המאפ/הקרנל של המטריצה).

הוכחה. נוכחים באמצעות הכלה דו כיוונית. הכוון  $\tilde{\mathcal{N}}_\lambda \subseteq \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ . יהי  $v \in \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ , אם  $\mathcal{N}(T - \lambda I)^j \neq 0$  ו- $\mathcal{N}(T - \lambda I)^{j+1} = 0$  אז  $v \in \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ . נסיק מעקרון ההחלפה:  $\mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V} = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$ .

$$\tilde{\mathcal{N}}_\lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{N}(T - \lambda I)^j = \bigcup_{j=1}^{\dim V} \mathcal{N}(T - \lambda I)^j \cup \bigcup_{j=\dim V}^{\infty} (T - \lambda I)^j = \mathcal{N}(T - \lambda I)^{\dim V}$$

■

**משפט 79.** בהינתן  $v \in \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  מוכלל של  $T$ , קיים (מהגדירה) ויחיד  $\lambda_i$  כך ש-

■ הוכחה. ההוכחה עיקרי אלגברית ולא מעניינת במיוחד, יש צורך לפתח את הבינום של ניטוון.

מסתבר, שאפשר לפרק את המרחב למרחבים עצמיים מוכללים, ומשם אפשר להסיק מה קורה בהם ביתר פרטים בעזרת העתקות נילפוטנטיות.

**משפט 80.** הטענות הבאות מתקיימות:

1.  $\tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  הוא  $T$ -איוריאנטי.

2.  $(T - \lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}}$  נילפוטנטית.

3. מעל שדה סגור אלגברית, הריבוי האלגברי  $d_{\lambda_i}$  הוא

הוכחה.

1. יהיו  $v \in \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  איזומורפיים (מהגדירה) כך ש- $0 = \mathcal{F}(T)v = (T - \lambda_i I)^k v = k \leq \mathcal{F}(T)v$ . נפעיל את  $T$  על שני האגפים ונקבל  $0 = T(0) = v$  ולכון  $Tv \in \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$ .

2. נגיד  $(T - \lambda_i I)|_{\tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}} = S$ . לכן לכל  $v \in \text{dom } S = \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  מתקיים  $0 = \mathcal{F}(T)v = (T - \lambda_i I)v = S^{k_v}v$ :  $\exists k_v$  משומש  $S^{k_v}v = 0$ . משוער  $S^n v = 0$   $\forall n \in \mathbb{N}$ , ומהגדירה  $S$  נילפוטנטית כדרוש.

3. (הוכחה זו כתובה בעזרתו האדיבה של chatGPT) נסמן  $U = \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$ , ונוכיח את הבסיס של  $U$  לבסיס של  $V$  כך שנוצר מ"ז  $W = V \oplus U$ . מושפט  $p_T(x) = p_{T|_W}(x) \cdot p_{T|_U}(x)$ . משוער  $k$  קודם ידוע ש- $S := (T - \lambda_i I)|_U$  נילפוטנטית, שכן  $n \leq \mathcal{F}(T) \leq n$ . נכתוב את  $T$  באופן הבא:  $T|_U = S|_U + \lambda_i I$   $\Rightarrow T|_U = S|_U + \lambda_i I$ . נקבל  $S|_U = T|_U - \lambda_i I$ . שתי הבדיקות:

- $\lambda_i$  הוא הע"ע היחיד של  $T|_U$ , והוא הע"ע של  $\lambda_i$  ע"ע של  $T|_U$ , והיחידות נובעת מכך שככל ע"ע מוכלל שקיים לע"ע ייחיד של  $T$ .

- $\ker S \subseteq W \cap U = \{0\}$  ולכון  $\tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} \subseteq \ker(T - \lambda_i I) = V_{\lambda_i}$ .

נסיק משתי הטענות הללו שתיהן מסקנות:

- מהיות  $\lambda_i$  הע"ע היחיד של  $T|_U$ , ומהיות  $\deg p_{T|_U} = \dim U$ , ויחדיו עם ההנחה שאנו בשדה סגור אלגברית,  $p_{T|_U}(x - \lambda_i) = 0$ .

- $\lambda_i$  איננו ע"ע של  $T|_W$ , בגלל שאם (בשליליה)  $\lambda_i$  ע"ע של  $T|_W$  עם  $v \in \ker(T - \lambda_i I)$  אז  $\lambda_i v = T|_W(v) = Sv + \lambda_i v = Sv$  ומחישור  $\lambda_i v = 0$  ומכיר  $v = 0$  (כ כי  $S|_W$  הפיכה) ואז  $v \in \ker(S|_W)$ .

סה"כ, מהיות  $p_T(x) \cdot p_{T|_U}(x) = p_{T|_W}(x) \cdot p_{T|_U}(x)$  בא אך ורק  $\lambda_i \in \ker p$  ושם הריבוי הוא  $U$ ,  $\dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} = \dim U$ , כלומר סה"כ הריבוי האלגברי של  $\lambda_i$  בהעתקה  $T$  הוא  $\dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$ .

■

**הגדה 56.**  $v \in \ker(T - \lambda_i I)^k \setminus \ker(T - \lambda_i I)^{k-1}$  אם הוא ע"ע עצמי מורחב של  $\lambda_i$  כך ש- $1 \leq k \leq \dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  מוגדר להיות  $v \in V_{\lambda_i}$  כאשר בסיס  $1 \leq k \leq \dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$ .

**משפט 81 (פירוק המרחב למרחבים עצמיים מוכללים).** נניח שאנו במרחב אלגברי מסוים  $V$  שקיים פירוק  $V = \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$  (העתקה לינארית, מההרחבה יש לה ערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  כלשהם). אז  $\lambda_i$  יש ע"ם  $\lambda_i$  כלשהם. בהינתן  $T$  מ"ז  $T$  העתקה לינארית, מההרחבה יש לה ערכים עצמיים  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  כלשהם. איז?

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i}$$

הוכחה.начילה מלהוכיח שההיחס בין שני מרחבים עצמיים מוכללים ריק. זה נובע ישירות מכך שככל שני ע"ע עצמיים מוכללים שייכים לע"ע רגיל ייחיד של  $T$ . ניעזר בכך ש- $\dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \dim \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^n d_{\lambda_i} = n \\ \forall i \in [k]: \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} \subseteq V \\ \forall i, j \in [k]: \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_i} \cap \tilde{\mathcal{N}}_{\lambda_j} = \{0\} \end{cases}$$

כאשר  $d_{\lambda_i}$  הריבוי האלגברי של  $\lambda_i$ , וידוע סכום הריבויים האלגבריים הוא  $n$ . שכך  $p_T(x)$  פולינום ממעלה  $n$ . לכן המשפט יש סכום ישר כדרוש.

עתה נוכח מחדש את משפט ג'ורדן, אך הפעם ללא תלות בפולינום מינימלי ופירוק פרימרי. הוכחה באמצעות מרחבים עצמיים מוכלליים. תהי העתקה  $T$ . מפריקות הפולינום האופייני יש לה  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  ע"ם כלשהם. ממשפט:

$$V = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}$$

עוד ידוע שההעתקה  $S_i = (T - \lambda_i)_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}$  נילפוטנטית. כבר הוכחנו את צורת ג'ורדן עבור העתקות נילפוטנטיות ולכן  $S_i$  קיים בסיס מג'ורדן  $\mathcal{B}_i$ . נבחן ש-:

$$T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} = S_i + \lambda_i \implies \left[ T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} \right]_{\mathcal{B}_i} = \underbrace{\text{diag}\{J_{a_1}(0) \dots J_{a_\ell}(0)\}}_{[S_i]_{\mathcal{B}_i}} + \lambda I = \text{diag}(J_{a_1}(\lambda_i) \dots J_{a_\ell}(\lambda_i))$$

ולכן אפשר לשרש את הבסיסים לכדי בסיס מג'ורדן:  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ , ואכן:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \text{diag} \left( \left[ T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}} \right]_{\mathcal{B}_i} \mid i \in [k] \right) = \text{diag}(J(\lambda_1) \dots J(\lambda_1) \dots J(\lambda_k) \dots J(\lambda_k))$$

שרשור של בלוקי ג'ורדן. ■

**הערה 32.** מיחidot צורת ג'ורדן, הzcורה המתקבלת מפירוק פרימרי ומפירוק למרחבים עצמיים מוכללים היא זהה. דרך אחרת לראות את זה, היא שהמרחבנים אליהם פירקנו פרימרית שהם  $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i} = (T - \lambda_i)^{d_{\lambda_i}}$  בכל מקרה.

#### 1.4.4 ~ תוצאות מצורת ג'ורדן

**משפט 82.** כמות בלוקי הג'ורדן לע"מ היא הריבוי הגיאומטרי.

הוכחה. נראה שהריבוי הגיאומטרי  $\lambda^r$  שווה לכמות בלוקי הג'ורדן השיעיכים ל- $\lambda$ . בהינתן בלוקי ג'ורדן  $(\lambda) \dots (\lambda) \dots (\lambda)$  השיעיכים ל- $\lambda$ , ידוע שלכל אחד מהם קיים בסיס שרשרת  $\{v, (\tilde{T})v, \dots, (\tilde{T})^{k_i}v\}$  כאשר  $\lambda I - \tilde{T} = B_i = \{v, (\tilde{T})v, \dots, (\tilde{T})^{k_i}v\}$ . כמו כן ידוע  $\tilde{T}w_i = 0$ ,  $w_i \in \ker \tilde{T}$  כלומר  $Tw_i = \lambda w_i$ , ומכאן  $r \leq k_i$ .

• **חסם עליון:** לכל  $k_i$  ידוע  $-(\tilde{T})^{k_i+1}v = 0$ , כלומר  $T((\tilde{T})^{k_i}v) = ((\tilde{T})^{k_i+1}v) = 0$ . משום שככל השרשרות בלתי תלויות לנראית (אחרת השרשור שלן לא יהיה בסיס), בהכרח  $\{(\tilde{T})^{k_i}w_i\}_{i=1}^\ell \subseteq V_\lambda$  קבועה בלתי תלوية לנראית וה-span שלה תמי'ו של  $V_\lambda$ , וכך  $r \leq k_i$ .

• **חסם תחתון:** מהחסם העליון, כל  $w_i$  יכול להיות סיום של שרשרת, וכך יש לפחות  $r$  שרשאות שונות (שים לב: יש לנו חופש בבחירה הבסיס  $w_i \in \ker \tilde{T} = V_\lambda$ , ומכאן החופש בבחירה הבסיס המג'ורדן), ומכאן החסם התחתון. ■

**משפט 83.** כמות הוקטורים בסיס המג'ורדן המשויכים ל- $\lambda$  הוא הריבוי האלגברי  $d_\lambda$  (ניסוח אחר: סכום גדי הבלוקים השיעיכים ל- $\lambda$  בצורת ג'ורדן הוא  $d_\lambda$ ).

הוכחה. ראיינו בצורת ג'ורדן בעזרת פירוק למרחבים עצמיים מוכללים, שמספר הוקטורים השיעיכים ל- $\lambda$  הוא  $\dim \tilde{\mathcal{V}}_\lambda$  וידוע שהוא מ"ז מממד  $d_\lambda$ . ס"כ הראיינו את הדרוש. ■

**משפט 84.** בלוק הג'ורדן המשיך ל- $\lambda$  הגדול ביותר, והוא הריבוי של  $(\lambda - x)$  בפולינום  $m_T(x)$ .

הוכחה. ראיינו שבблок הג'ורדן  $(\lambda)_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}$  מוגע מפירוק ג'ורדן של  $S = (T - \lambda)_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}$ . הבלוק הכי גדול בצורת הג'ורדן של  $S$  נילפוטנטית, היא השרשרת הכל ארכומית של  $S$  ב- $\tilde{\mathcal{V}}_\lambda$ . משום ש-  $\ker S^k = \{v \in [n] \mid v \in \ker S^k\}$  השרשורת הארכומית ביותר האפשרות היא  $v, Sv, \dots, S^{n(S)}v$  והיא קיימת כי הסדרה הזו בת"ל עברו  $v$  כלשהו (אחרת  $n(S) = 1$  לא החזקה המינימלית שמאפסת את  $S$  וסתירה).

ראיינו ש-  $m_T$  הוא lcm של הצטטום של  $T$  למרחבים  $T$ -איינוראינטניים, ומושום שככל  $\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_k}$  בעל פולינום אופייני  $(x - \lambda_k)^{d_{\lambda_k}}$ ,  $k \in [r_\lambda]$   $m_T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}(x) = (x - \lambda)^k$ ,  $p_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x) = \gcd((x - \lambda_i)^k, (x - \lambda_j)^m)$  עבור  $i \neq j \in [k]$ . ובגלל ש-  $m_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x)$  מחלק את  $p_{T|_{\tilde{\mathcal{V}}_\lambda}}(x)$  כלשהו. אז:

$$\forall i \neq j \in [k]: \gcd(T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_i}}(x), T|_{\tilde{\mathcal{V}}_{\lambda_j}}(x)) = 1$$

דהיינו,  $\text{lcm}_{\lambda}$  זה פשוט כפל של הפולינומים המיניימליים של  $T|_{\lambda}$ . לכן, תחת הסימון  $m_\lambda$  להיות הריבוי של  $\lambda$  בפולינום  $m_T$ , בהכרח  $(x - \lambda)^{m_i} = (x - \lambda)^{m_\lambda}(x) = m_\lambda$ . מהגדרת פולינום מיניימי,  $m_\lambda$  הוא המיניימי כך  $\chi - 0 = 0$  (כלומר  $m_\lambda$  המיניימי כך  $\chi - 0 = S^{m_\lambda}$ ). סה"כ  $m_\lambda$  דרגת הנילפוטנטיות של  $S$ . הראנגו ש- $(S)$  השרשת המקסימלית בצורת הגורן של  $S$ , וסה"כ בлок הגורן הגדול ביותר של  $(\lambda)$  הוא  $m_\lambda$  הריבוי של  $(\lambda - x)$ .

**משפט 85.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{K})$  מטריצה, כאשר  $\mathbb{K}$  סגור אלגברית. אז  $A \sim A^T$

הוכחה. ממשפט גורן ל- $A$  יש צורת גורן  $\Lambda$ , ככלומר קיימת  $P$  הפיכה כך  $\chi - \Lambda P^{-1}\Lambda P = A$ , ומטריצת  $P$  אלכסונית עם בלוקי גורן. נבחן בכך כך  $\chi - A^T = P^T\Lambda^T(P^{-1})^T = P^T\Lambda^T(P^{-1}) = A^T \sim \Lambda^T \wedge A \sim \Lambda$ . נותר להוכיח  $\Lambda \sim \Lambda^T$ . ככלומר, כל בלוק גורן  $J_i(\lambda)^T \sim J_i(\lambda)$ . טענה זו אכן מתקינה עבור מעבר לבסיס הסדור  $(e_1 \dots e_n) \rightarrow (e_n \dots e_1)$ . סה"כ אכן כל מטריצה דומה לשחלוף שלה.

**משפט 86.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה מעל  $\mathbb{F}$  שדה. אז בהינתן  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  הערכים העצמיים של  $A$  מעל  $\mathbb{K}$  הרחבה  $\mathbb{F}$  לסגור אלגברית, אז  $\det A = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{d_{\lambda_i}}$ .

הוכחה. ידוע של- $\mathbb{F}$  קיימת הרחבה ל- $\mathbb{K}$ . מעל  $\mathbb{K}$ , ל- $A$  יש צורת גורן  $A = P^{-1}NP$  כך  $\chi - N$  מטריצת בלוקים הכלולת לפחות  $k$  בלוקים, כאשר הבלוק ה- $i$  יסמן להיות הבלוק הכלול את בלוקי הגורן המשויכים לע"ע  $\lambda_i$ . אזי  $\square_i$  מטריצה משולשית עליונה מגודל  $d_i$  (משמעות קודם, לפחות הוקטורים המשויכים לע"ע  $\lambda$  היא  $d_\lambda$ ) עם  $\lambda_i$  על האלכסון ולכון  $\det \square_i = \lambda_i^{d_i}$ . מדר邏יננטה של מטריצת בלוקים נסיק:

$$\det A = \det P^{-1}NP = \underbrace{\det P^{-1}P}_1^I \cdot \det N = \prod_{i=1}^k \det \square_i = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{d_i}$$

כדרוש.

### המשך בעמוד הבא

## **פרק 2**

### **הגדורה וחקר מרחבי מכפלת פנימית**

## 2.1 Bi-Linear Forms . . . . .

### 2.1.1 ~ הדרות בסיסיות בעבור תכונות בי-לינאריות כלליות

**הדרה 57.** יהיו  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ . פונקציונל לינארי  $\varphi$  מעל  $V$  הוא  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ .

**הערה 33.** ראה הרחבה על פונקציונלים לינארים ומרחבים דו-אלים בסוף הסיכום.

**הדרה 58.** יהיו  $V, W$  מ"וים מעל  $\mathbb{F}$ . תבנית בי-לינארית על  $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  כך ש- $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  כך שהעתקות  $(v, w_0) \mapsto f(v, w_0)$ ,  $v \mapsto f(v, w)$ ,  $w \mapsto f(v, w)$  הן פונקציונלים לינאריים.

אינווטיאטיבית, זו העתקה לינארית בכל אחת מהקורדיינאות בנפרד (בדומה לדוגמה לדטרמיננטה, שהיא העתקה מולטי-לינארית ולינארית בכל אחת מהשורות בנפרד)

**משפט 87.** הטענה הבאה נכונה לכל ש- $f$  בי-לינארית. יהיו  $\mathbb{F}$  :  $\forall v \in V, w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$

$$\forall v_1, v_2 \in V: f(v_1 + v_2, w) = f(v, w) + f(v_2, w)$$

$$\forall w_1, w_2 \in W: f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$$

$$f(\alpha v, w) = \alpha f(v, w) = f(v, \alpha w)$$

שביל העתקות  $a$ -לינאריות צריך טנזור  $a$  ממדי. זה לא נעים וידועים מעט מאוד על האובייקטים הללו. בפרט, בעבור העתקה בי-לינארית נראה שnoch לא ניתן ליצג אותה באמצעות מטריצות, בלי טנзор ובלגנים – זה נחמד, וזה אחת הסיבות שאנו מתעסקים ספציפית עם העתקות בי-לינאריות (פרט לכך שמאוחר יותר נעסוק גם במקפלות פנימיות, וחלק מההווצאות על ההעתקות בי-לינאריות יעזרו לנו להגדיר דברים על מטריצות).

דוגמאות.

1. **תבנית ה-0:**  $\forall v, w: f(v, w) = 0$

2. **נדיר**  $V = W = \mathbb{R}^2$ , אז

3. (חשוב) על  $\mathbb{F}^n$ :

**הדרה 59.** לכל שדה  $\mathbb{F}$  מוגדרת התבנית הכליליארית הסטנדרטית היא:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

4. יהיו  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $\psi: W \rightarrow \mathbb{F}$ :  $\varphi$  פונקציונלים לינאריים:

5. הכללה של 4: יהיו  $\varphi_1, \dots, \varphi_k: V \rightarrow \mathbb{F}$  פונקציונלים לינאריים וכן  $\psi_1, \dots, \psi_k: W \rightarrow \mathbb{F}$  פונקציונלים לינאריים. אז  $f(v, w) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(v) \psi_i(w)$

הרעיון: ברגע שנקבע וקבעו ספציפי נקבל לינאריות של הווקטור השני.

**הערה 34.** במקרה ש- $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  לעיל, התבנית הבי-לינארית הסטנדרטית משרה את הגיאומטריה האוקlidית. קלומר  $\perp$   $v$   $\iff f(v, u) = 0$

**הערה 35.** בעתיד נראה שכל התבנית בי-לינארית נראית כמו מקרה 5.

**משפט 88.** נסמן את מרחב התבניות הבי-לינאריות על  $W \times V$  בטור  $B(V, W)$ . זהו מ"ו מעל  $\mathbb{F}$ .

אני מושך לא לעמוד להגדיר את החיבור והכפל בסקלר של המשפט הקודם כי זה טרויאלי והמטרה כתוב את זה בעיקר בשwil להטריל אותונו.

דוגמה חשובה אחרת.

**משפט 89.** נסמן ש- $\mathcal{A} \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  ותהי  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ .  $\mathcal{A}$  בסיס ל- $\mathbb{F}^n$ ,  $\mathcal{B}$  בסיס ל- $\mathbb{F}^m$ . אז:

$$f(u, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{B}}$$

העתקה בי-לינארית.

הוכחה. נקבע  $v$  כלשהו:

$$[v]_{\mathcal{A}}^T \cdot A =: B \in M_{1 \times m}, g(w) := f(v, w) = B[w]_{\mathcal{B}}$$

nocich ש-  $g$  לינארית:

$$\forall w_1, w_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}: g(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = B[\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2]_{\mathcal{B}} = \lambda_1(B[w_1]_{\mathcal{B}}) + \lambda_2(B[w_2]_{\mathcal{B}}) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 g(w_2)$$

בקבע  $w$ , ובאופן דומה נגידיר  $f(v, w) = [v]_B^T C$  ו-  $C = A[w]_{\mathcal{B}} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$

$$\forall v_1, v_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}: h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2]_{\mathcal{B}}^T = \lambda_1([v_1]_{\mathcal{B}}^T C) + \lambda_2([v_2]_{\mathcal{B}}^T C) = h(v_1) + h(v_2)$$

■

זה  $\mathcal{A}$ , אתם تستדרו" – המריצה ברגע שיש לו שני  $A$ -ים על הלוח) **הגדירה 60.** בהינתן תבנית בי-לינארית  $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$  בסיס  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  בסיס  $V, W$ . נגידיר את המטריצה המייצגת  $(\mathcal{A} = (v_i)_{i=1}^n, \mathcal{B} = (w_i)_{i=1}^m)$  כאשר  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$  (תחת הסימונים  $(A)_{ij} = f(v_i, w_j)$ ) **משפט 90.**  $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$

הוכחה. קיימים וייחדים  $\alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{F}$ . כלומר:  $v = \sum \alpha_i v_i, w = \sum b_i w_i$ .

$$[v]_{\mathcal{A}}^T = (\alpha_1 \dots \alpha_n), [w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

ומכאן פשוט נזרוק אלגברה:

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, w\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i, w) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f\left(v, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m \beta_j f(v_i, w_j)\right) \\ &= \sum_{i,j \in [n] \times [m]} \alpha_i f(v_i, w_j) \beta_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{im}\right) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

**סימון 8.** נאץ לסייע הזה את הסימון  $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  עבור המטריצה המייצגת של  $f$  בי-לינארית.

(זהו אינו סימון רשמי בקורס אם כי בהחלט צריך להיות) **משפט 91.** עם אותן הסימונים כמו קודם:

$$\psi: B(v, w) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{F}), f \mapsto [f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$$

וז איי!

הוכחה. נסמן את  $[g]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = B$  ואת  $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = A$  אז:

• **לינאריות.**

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(f + g))_{ij} &= (f + g)(v_i, w_j) \\ &= f(v_i, w_j) + g(v_i, w_j) \\ &= (A)_{ij} + (B)_{ij} \\ &= (\psi(f))_{ij} + (\psi(g))_{ij} \implies \psi(f + g) \\ &= \psi(f) + \psi(g) \end{aligned}$$

באופן דומה בעבר כפל בסקלר:

$$(\psi(\alpha f))_{ij} = \alpha f(v_i, w_j) = \alpha(\psi(f))_{ij} \implies \psi(\alpha f) = \alpha\psi(f)$$

- **חח"ע.** תהי  $\psi(f) = 0 \in M_{n \times m}$  ולכן  $\psi(f) = 0 \in M_{n \times m}$   $\implies \forall i, j \in [n] \times [m]: f(v_i, w_j) = 0$ :  $f \in \ker \psi$  (עם אותן הסימונים כמו קודם)

- **על.** תהי  $f(v_i, w_j) = e_i^T A e_j = (A)_{ij}$  ואכן  $f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}}$   $\in M_{n \times m}(\mathbb{F})$ .

**תזכורת** (מלינאריות 1). מטריצת המעבר מבסיס  $\mathcal{B}$  לבסיס  $\mathcal{C}$  מוגדרת להיות  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}$ , היא מטריצה הפיכה, ומתקיים השוויון  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ .

**משפט 92.** יהיו  $V, W$  מ"מ מעל  $\mathbb{F}$  נניח  $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subseteq V$  בסיסים של  $V$  וכן  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq W$  בסיסים של  $W$ . תהי  $P$  מטריצת המעבר מ- $\mathcal{A}'$  ל- $\mathcal{A}$  ו- $Q$  מטריצת המעבר מ- $\mathcal{B}'$  ל- $\mathcal{B}$ , אז  $A' = P^T A Q$

הוכחה. ידוע:

$$P[v]_{\mathcal{A}} = [v]_{\mathcal{A}'}, \quad Q[w]_{\mathcal{B}} = [w]_{\mathcal{B}'}$$

ואכן:

$$f(v, w) = [v]_{\mathcal{A}}^T A [w]_{\mathcal{B}} = (P[v]_{\mathcal{A}'})^T A (Q[w]_{\mathcal{B}'}) = [v]_{\mathcal{A}'}^T (P^T A Q) [w]_{\mathcal{B}'} \implies A' = P^T A Q$$

כדרوش.

- **הגדרה 61.** עבור  $f \in B(V, W)$  נגידר את  $A$  מייצגת אותה ביחס לבסיסים כלשהם. **משפט 93.** מוגדר היטב.

הוכחה. כפל בהיפיכה לא משנה את דרגת המטריצה (וזה transpose של מטריצה הוא הפיך), ומטריצת שנייה הבסיס הפיכה, דהיינו כפל מטריצות שנייה הבסיס לא משנה את דרגת המטריצה ולכן לכל שני נציגים אותה הדרגה.

**מסקנה 17.** תהא  $f \in B(V, W)$  ו  $\text{rank } f = r$ . אז קיימים בסיסים  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  של  $V, W$  בהתאמה כך ש-  $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  הרעיון הוא לדרג את כל כיוון, שורות באמצעות transpose ועמודות באמצעות המטריצה השנייה. אפשר גם לקבע בסיס, ולדרג שורות ועמודות עד שיזכאים אפסים (הוכחה לא נראית בכיתה).

"חצי השעה זו גרמה לי לשנוא מלבים בצורה יוקדת" – מעתה ואילך נתעסק במקרה בו  $W = V$ . נשתמש בסיס יחיד.

## 2.1.2 ~ חפיפה וסימטריות

- **הגדרה 62.** יהיו  $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$ , נאמר שהן חופפות אם קיימת הפיכה  $P \in M_n(\mathbb{F})$  כך ש-  $A' = P^T A P$ .

**משפט 94.** מטריצות חופפות אם ומין מהן מייצגות את אותה התבנית הביליארית.

**משפט 95.** אם  $A, A'$  אס symmetries, אז:

$$\text{rank } A = \text{rank } A^T \quad .1$$

$$\exists 0 \neq c \in \mathbb{F}: \det A' = c^2 \det A \quad .2$$

הוכחה. הגדרנו  $\text{rank } f$  כאשר  $f$  ביליארית להיות הדרגה של המייצגת את התבנית, וראינו שהיא לא תלויות בסיס. בכך למעשה כבר הוכחנו את 1. עבור 2, מתקיים  $A' = P^T A P$  ו-  $P$  הפיכה (ולמעשה מטריצת מעבר בסיס) ולכן אם נסמן  $c = |P| = |P^T|$

$$|A'| = |P^T A P| = |P^T| \cdot |A| \cdot |P| = |P|^2 |A| = c^2 |A|$$

- **הערה 36.** יש שדות שימושיים טענה 2 לא מעניינת במילוי (שדות עבורם יש שורש לכל מספר, כמו  $\mathbb{C}$ ).
- **הגדרה 63.** התבנית  $f$  מעל  $V$  נקראת סימטרית אם:  $\forall v, w \in V: f(v, w) = f(w, v)$
- **הגדרה 64.** התבנית  $f$  מעל  $V$  נקראת אנטיסימטרית אם:  $\forall v, w \in V: f(v, w) = -f(w, v)$

**משפט 96** (פירוק תבנית ביילינארית לחלק סימטרי וחלק אנטיסימטרי). אם  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , בהינתן התבנית  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ . נקבע  $\varphi, \psi$  ביילינאריות כך ש- $\varphi$  סימטרית,  $\psi$  אנטיסימטרית ו- $\psi + \varphi$  ביילינארית, קיימות  $V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ :

הוכחה. נבחן שאם  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , ניתן להגדיר את:

$$\varphi(v, w) = \frac{f(v, w) + f(w, v)}{2}, \quad \psi(v, w) = \frac{f(v, w) - f(w, v)}{2}$$

מתקיים ש- $\varphi$  סימטרית ו- $\psi$  אנטיסימטרית וכן  $\psi + \varphi$  ביילינארית.

**משפט 97.** תהי  $f$  התבנית ביילינארית על  $V$ , ו- $B = (v_i)_{i=1}^n$  בסיס ל- $B$ . נניח  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  המייצגת את  $f$  ביחס ל- $B$ . אז  $f$  סימטרית/אנטיסימטרית אם ו רק אם  $A$  סימטרית/אנטיסימטרית.

הוכחה.

אם  $f$  סימטרית/אנטיסימטרית, אז:  $\implies$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{Sym}}{=} f(v_j, v_i) = a_{ji} \\ a_{ij} &= f(v_i, v_j) \stackrel{\text{ASym}}{=} -f(v_j, v_i) = -a_{ji} \end{aligned}$$

אם  $A$  סימטרית אז:  $\iff$

$$f(v, w) = [w]_B^T A [w]_B \stackrel{(1)}{=} ([w]_B^T A [w]_B)^T = [w]_B^T A^T ([w]_B^T)^T = [w]_B^T A [w]_B = f(w, v)$$

כאשר (1) מתקיים כי למטריצה מוגדר  $1 \times 1$  מהזיר אותו הדבר. וכן במקרה האנטיסימטרי:

■  $f(u, w) = [w]_B^T (-A) [u]_B = -[w]_B^T A [u]_B = -(w, u)$

**הגדרה 65.** בעבור התבנית ביילינארית, הרודיקאל הימי שלה מוגדר להיות  $\text{rad}_r(f) = \{x \in V \mid \forall w \in W: f(x, w) = 0\}$ .

**הגדרה 66.** בעבור התבנית ביילינארית, הרודיקאל השמאלי שלה מוגדר להיות  $\text{rad}_\ell(f) = \{x \in W \mid \forall v \in V: f(v, x) = 0\}$ .

**משפט 98.** הרודיקלים מרחבים וקטוריים.

הוכחה. יהיו  $x, y \in \text{rad}_r(f)$  וכן  $\lambda \in \mathbb{F}$ . נראה ש- $\lambda x + y \in \text{rad}_r(f)$ . אכן, מליינאריות, מתקיים:

$$\forall v \in V: f(\lambda x + y, v) = f(\lambda x, v) + f(y, v) = \underbrace{\lambda f(x, v)}_0 + \underbrace{f(y, v)}_0 = \lambda 0 + 0 = 0$$

כדروש. ההוכחה זהה לרודיקל השמאלי.

**משפט 99.** בהינתן התבנית סימטרית,  $\text{rad}_r(f) = \text{rad}_\ell(f)$ .

$x \in \text{rad}_r(f) \iff x \in \text{rad}_\ell(f)$  סה"כ  $f(v, x) = 0 \iff f(x, v) = 0$  מתקיים  $\forall v \in V$ , מסימטריות מתקיים  $\dim \text{rad}_r(f) = \dim \text{rad}_\ell(f)$  כדروש.

**משפט 100.** לכל תבנית  $f: V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ , מתקיים  $\dim \text{rad}_r(f) = \dim \text{rad}_\ell(f)$ .

הוכחה. בהינתן בסיסים  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  נגדי  $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ . נבחן ש-:

$$\begin{aligned} \text{rad}_r(f) &\cong \{x \in \mathbb{F}^n \mid \forall v \in \mathbb{F}^m: v^T A x = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \forall i \in [n]: \underbrace{e_i^T A x}_{(Ax)_i} = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} = \mathcal{N}(A) \\ \text{rad}_\ell(f) &\cong \{x \in \mathbb{F}^m \mid \forall v \in \mathbb{F}^n: x^T A v = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid \forall i \in [m]: \underbrace{x^T A e_i}_{x^T \text{Row}_i(A)} = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid A^T x = 0\} = \mathcal{N}(A^T) \end{aligned}$$

ידוע משפטי הדרגה ש- $\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{N}(A^T) = \text{rank } A = \text{rank } A^T$  וממשפט הממדים  $\dim \text{rad}_r(f) = \dim \text{rad}_\ell(f)$ .

**הערה 37.** ניתן להוכיח את הטענה באופן כללי למרחבים לא נוצריים סופית באמצעות שימוש במרחבים דואליים ומרחבימנה.

**הגדרה 67.** תבנית ביילינארית  $f$  נקראת לא-מינוות או רגולרית או לא-סינגולרית אם  $\text{rad}(f) = \{0\}$ .

**הגדרה 68.** תבנית ביילינארית  $f$  נקראת פנוות או סיגולרית או לא-ארגולרית אם היא לא לא-מינוות.

**הערה 38.** אין צורך לציין איזה רודיקל שווה לאפס, שכן הם שווים מינם.

## 2.1.3 ~ תכניות ריבועיות

**הגדלה 69.** תהא  $f$  תבנית על  $V$ . התבנית הריבועית:

$$Q_p: V \rightarrow \mathbb{F}, Q_f(v) = f(v, v)$$

היא לא העתקה לינארית. היא תבנית ריבועית. **דוגמאות:**

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy + yx = 2xy \quad \bullet$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv - uy \implies Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy - yx = 0 \quad \bullet$$

• התבנית הסטנדרטית:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xu + yv \implies Q_f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$

**סימון 9.** עבור תבנית בילינארית  $f$  על  $V$ , נגדיר את

אם  $f$  סימטרית נבחן ש-  $Q_f = Q_{\hat{f}}$

**משפט 101** (שחוור תבנית בילינארית מתבנית ריבועית). תהא  $f$  תבנית בילי סימטרית על  $V$ , ונניח ש-  $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ , אז:

$$f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} \quad .1$$

2. אם  $f$  איינה תבנית ה-0 אז קיים  $v \in V$  כך ש-  $Q_f(v) \neq 0$

הוכחה.

$$\begin{aligned} Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w) &= f(v+w, v+w) - f(v, v) - f(w, w) \\ &= f(v, v) + f(v, w) \\ &\quad - f(w, v) + f(w, w) \\ &\quad - f(v, v) - f(w, w) \\ &\stackrel{\text{Sym}}{=} 2f(v, w) \end{aligned}$$

ובכך הוכחנו את 1. עתה נוכיח את 2. נניח אז

$$\forall v, w \in V: f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2} = 0$$

ואז

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xv + yu \implies Q_f = 0 \wedge f \neq 0$$

■

**הערה 39.** אין ממש טעם להציג תבנית ריבועית על תבנית בילינארית שאינה סימטרית. הסיבה? כל מטריצה יכולה להיות מפוקדת לחلك סימטרי וחלק אנטי-סימטרי, החלק האנטי-סימטרי לא ישפיע על התבנית הריבועית (כי אלכסון אפס במטריצה המיצגת) ורק החלק הסימטרי ישאר בכל מקרה. זה לא שאי-אפשר, זה פשוט לא מעניין במיוחד.

## 2.1.4 ~ משפט ההתאמה של סילבסטר

**משפט 102.** נניח  $2 \neq \text{char } F$ , ו-  $f$  סימטרית על  $V$ . אז קיים בסיס  $\{v_i\}_{i=1}^n$  ל-  $V$  הוא  $B = [f]_B$  ש-  $\text{char } \mathbb{F} = 2$  אלכסוני. אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , אז האיברים על האלכסון יהיו  $\{1, -1, 0\}$  ולא רק  $\{1, 0\}$ .

תזכורות:  $[f]_B$  סימנו המוגדר בסיכום זה בלבד. בקורס מדברים על "המטריצה המיצגת של בילינארית" במילים מפורשות.

הוכחה. באינדוקציה על  $n$ . בסיס  $1 = n$  ברור. אם  $f$  תבנית ה-0, אז כל בסיס שנבחר מותאים. אחרת, קיים  $V$  כך  $0 \neq v \in V$ . נגידר  $\{u \in V \mid f(u, v) = 0\} = U$ . תמי"ז כי גרעין של ה"ל  $U$  (כי קייבנו את  $v$ ). מה התמונה של ההעתקה?  $f|_U: U \times U \rightarrow \mathbb{F}$ . לכן תמונה ההעתקה היא כל  $\mathbb{F}$ , ומודה 1. ידוע  $U$  תמי"ז מממד  $n - 1$ . אז  $0 \neq f(v, v) = Q_f(v)$ . לכן קיימים בסיס  $B_U$  כך  $Sh-[U] = B_U \cup \{v\}$  אלכסונית. נגידר את  $B = \{v\} \cup B_U$  נבחין שהיא מהצורה:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots \\ 0 & [f|_U]_B & - \\ \vdots & | & \end{pmatrix}$$

■ סה"כ מהנחת האינדוקציה צעד האינדוקציה הושלם כדרוש.

**הערה 40.** מטריצה הפיכה לעיטים קרוייה "אל-סינגולרית"

**מסקנה 18.** תבנית בילינארית היא אל-סינגולרית אם המטריצה המייצגת שלה (בבסיסו המקורי) היא לא-סינגולרית.

**משפט 103.** לכל  $f$  תבנית סימטרית קיימת מטריצה מייצגת מהצורה  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  כאשר  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  (או סגור אלגברית המקורי). נחלק  $f$  בתבנית סימטרית קיימת מהצורה  $\begin{pmatrix} c & \\ & c \end{pmatrix}$  של השורה ה- $i$ - $i$  ניאלץ להפעיל גם עם העמודה ה- $i$ , כלומר את המטריצה, נבחן שחלקה ב- $c$  של השורה ה- $i$  ניאלץ להפעיל גם עם העמודה ה- $i$ , כלומר את המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  נחלק ב- $c^2$  בדומה זו (זאת כי כאשר  $c \neq 0$  הגדרת חפיפה, ו- $P^T$  מדרגת שורות,  $a_{i,i}$  מדרגת עמודות).

הוכחה. נסמן את  $r = \dim f$ . עד כדי שינוי סדר איברי הבסיס, המטריצה המייצגת אלכסונית היא:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \text{diag}(c_1 \dots c_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר  $0 \neq c_1 \dots c_r$ , ביחס לבסיס  $(v_1 \dots v_n) = v'_1 \dots v'_r, v_{r+1} \dots v_n$ . באופן כללי לכל  $i \in \mathbb{R}$  נוכל להגיד את  $v'_i = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$  כך  $f(v_i, v_i) = c_i$  כי  $f(v'_i, v'_i) = c_i$ .  $f(v_i, v_j) = 0$  ומילינאריות בכל אחת מהקוודינאות. בשל כך  $B' = (v'_1 \dots v'_r, v_{r+1} \dots v_n)$  בסיס המקיים את הדרש.

באותנו האופן, אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (ולא  $\mathbb{C}$ ) אז קיים בסיס שהמטריצה המייצגת לפיו היא:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בלוקים, כך  $Sh-r = q + p$ . כאן נגידר:

$$f(v, v) = c < 0, \quad v' = \frac{v}{\sqrt{|c|}}, \quad f(v', v') = \frac{c}{|c|} = -1$$

**הגדרה 70.** יהי  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{R}$  ובו תבנית בילינארית מעלה  $V$ . נאמר ש- $f$  מוגדרת חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם  $f(v, v) \leq 0 \forall v \in V$  מתקיים ש- $f$  מוגדרת חיובית או שלילית.

**הערה 41.** באנגלית: "Definite matrix"

**משפט 104.** תהא  $A$  מטריצה מייצגת של תבנית בילינארית סימטרית, עם ערכים  $1, -1, 0$ , בלבד על האלכסון, מקיים:

- $f$  מוגדרת חיובית אם ישם רק 1-ים.
- $f$  מוגדרת אי-שלילית אם ישם רק 1-ים ואפסים.
- $f$  מוגדרת שלילית אם ישם רק 1-ים.
- $f$  מוגדרת חיובית אם ישם רק 1-ים ואפסים.

הוכחה.

טורייאלי  $\iff$

$\Rightarrow$  לכל  $v \in V$   $f(v, v) = \alpha_1^2 f(v_{1,1}) + \dots + \alpha_n^2 f(v_{n,n}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \cdot \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i v_i$  ולפי המקרה זה יסתדר יפה.

**משפט 105 (משפט ההתאמה של סילבستر).** עבורם המטריצה חופפת ל- $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$  נקבעים ביחידות.

(תחזרו כמה משפטיים לעלה למקרה בו  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ )

גישה שוגה להוכחה. הוכחה באמצעות tr לא עובדת. ביגוד ליחס הדמיון להעתקות לינאריות, ביחס החפיפה להעתקות ■  
ב- $\mathbb{L}$ -לינאריות הד- $tr$  לא נשמר.

הוכחה תקינה. נסמן  $(v_1 \dots v_p, u_1 \dots u_s, w_1 \dots w_k)$  וכן  $B = (v'_1 \dots v'_t, u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$ . נסמן  $t + s = p + q$  ו $B' = (v_1 \dots v_p, u_1 \dots u_s, w_1 \dots w_k)$ . נניח בשליליה ש- $p < t$ . נסמן  $U = \text{span}(v_1 \dots v_p)$ . ידוע  $f$  חיובית על  $U$ , וכן  $\dim U = p$ . נתבונן ב- $W = \text{span}(u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$ . איז גם  $f$  חיובית על  $W$ ? ובגלל ש- $\dim W = s + k - t$ . בפרט  $U \cap W = \{0\}$ . כי אם לא, אז עבור  $v \in U \cap W$  נקבל  $0 > f(v, v) \leq 0$  כי  $f(v, v) \leq 0$  ו- $v \in U$  ו- $v \in W$ . ידוע ש- $V \subseteq U \oplus W$  וכן  $\dim V = p + s + k > t + s + k = \dim U + \dim W \leq \dim V$ . נציג ונוכיח ביחסות. ■

**סימון 10.** ה- $(q, p)$  לעיל נקבעים הסיניגטורה של  $f$ .

(תזהרו, הסינגטורה תתקוף אותנו אח"כ)

המשך בעמוד הבא

## 2.2 Inner Product Vector Spaces . . . . .

### 2.2.1 ~ הגדרה כלליות

#### (2.2.1.1) מעל $\mathbb{R}$

**הגדירה 71.** מ"ז, מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  היא תבנית ביילינארית סימטרית חיובית מעל  $V$ , ומוסומנת  $f(v, u) = \langle v, u \rangle$ . זה נכון בעבור שני המקרים. אחרת, נفال.

**הגדנה 19.** התבנית  $f$  היא מ"פ אמ"מ המייצגת שלה  $A$  בסיסו קלשו, היא סימטרית חיובית.

**סימון 11.** בקורס מסמנים  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  אבל אני מגניב אז אני משתמש ב- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**лемה 9.**  $\forall v \in V: \langle v | v \rangle \geq 0$  ו- $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .

הוכחה מסימטריה.

**דוגמה.** המכפלה הפנימית הסטנדרטית על  $\mathbb{R}^n$ , AKA כפל סקלרי:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**הגדירה 72.** אם  $V$  מ"ז וקיים  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  מכפלה פנימית אז  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  נקרא מרחב מכפלה פנימית, מ"פ. **משפט 106.**  $M_n(\mathbb{R})$  מ"פ  $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^T)$ .

**דוגמה מגניבה.** בהינתן  $V = [0, 1]$ , מ"ז הפונקציות הממשיות הרציפות על  $[0, 1]$ , ו- $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$  מ"פ. **משפט 107.** (שהפליצ'ו מחדו'א) אם  $f \geq 0$  אינטגרבילית על קטע  $[a, b]$  ווגם ישנה נקודה חיובית  $c \in [a, b]$  שעבורה  $0 \geq f(c) > 0$ .

וגם  $f$  רציפה ב- $c$ , אז  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

#### (2.2.1.2) מעל $\mathbb{C}$

ישנה בעיה עם חיוביות: אם  $v \in V$  כך ש- $0 \geq \langle v | v \rangle \geq -1 \langle v | v \rangle < 0$  אז  $\langle v | v \rangle < 0$ . לכן, במקום זאת, נשתמש בהגדרה הבאה:

**הגדירה 73.** מ"ז  $V$  מעל  $\mathbb{C}$ . מכפלה פנימית  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  מקיימת:

- ליניאריות ברכיב הראשון: אם נקבע  $v$ , אז  $\langle u | v \rangle \mapsto u$  לינארית.

- ססקווילינאריות/אנטי-לינארית ברכיב השני (במקום לינאריות):  $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$  ו- $\langle u | \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u | v \rangle$

כאשר  $\bar{\alpha}$  הצמוד המרוכב של  $\alpha$ .

$\langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$

• הרמיטיות (במקום סימטריות):

$\forall 0 \neq v \in V: \langle v | v \rangle > 0 \wedge \langle 0 | 0 \rangle = 0$

• חיוביות ואנאיוטרופיות:

למעשה – נבחן שאין צורך במש ססקווילינאריות ברכיב השני וכן לא בתנאי  $0 = \langle 0 | 0 \rangle$ , והגדרה שcolaה בעבור חיוביות ברכיב השני בלבד, זאת כי:

$$\langle u | \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v | u \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle v | u \rangle} = \bar{\alpha} \langle v | u \rangle$$

ומכאן נגרר ססקווילינאריות, וכן  $0 = \langle 0 | 0 \rangle$  נובע ישרות מלינאריות ברכיב השני.

**הערה 42.** באוניברסיטאות אחרות מובל להגדיר לינאריות ברכיב השני ולא בראשון. זה לא באמת משנה.

**הגדנה 20.** נוכל להגיד מטריצה  $A$  מייצנת של התבנית  $f$  ססקווילינארית, באופן דומה להגדרה והגילה, ואז להבחן שגם  $A$  סימטרית חיובית אמ"מ  $f$  מ"פ. עוד נבחן ש:

$$\langle v | u \rangle = f(v, u) = v A u^* = v A \bar{u}^T$$

**הגדירה 74.** למטריצה המייצגת של המכפלה הפנימית קוראים מטריצת גראס או גראמיואן.

**הגדירה 75.**

**הגדירה 76 (הגדרה נחמדה).** יהי מ"פ  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{F}$ . לכל  $v \in V$  מגדירים את הנורמה של  $v$  להיות

**משפט 108.** הנורמה כפלית וחיבורית.

הוכחה. מאקסימות החיבוריות:

$$\|v\| \geq 0 \wedge (\|v\| = 0 \iff v = 0)$$

וכן:

$$\|t \cdot v^2\| = \langle tv | tu \rangle = t \bar{t} \langle v | v \rangle = |t| \|v\| \implies \|t \cdot v\| = |t| \cdot \|v\|$$

■

**הגדה 77.** יהיו  $V$  מעל  $\mathbb{F}$ , ו- $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (או  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ) יקרא מרחכ גורמי.

**משפט 109.** ("גוטחאות הפולוריאציה") בהינתן  $(V, \|\cdot\|)$  מרחב גורמי, ניתן לשזר את המכפלה הפנימית, באמצעות הנוסחה הבאה:

גרסה מעל  $\mathbb{R}$ :

$$\forall v, u \in V : \langle v | u \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$$

גרסה מעל  $\mathbb{C}$ :

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \left( \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + iv\| - i \|u - iv\| \right)$$

הוכחה (ל- $\mathbb{C}$ ):

$$\begin{aligned} \langle u + v | u + v \rangle &= \|u\|^2 + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle u | v \rangle) \\ \langle v - u | v - u \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\Re(\langle v | u \rangle) \\ \langle u + iv | u + iv \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u | iv \rangle + \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i \langle u | v \rangle + i \overline{\langle u | v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - i(2\Im(\langle u | v \rangle)) \\ \|u - iv\| &= \|u\| + \|v\| - \langle u | iv \rangle - \langle iv | u \rangle \\ &= \|u\| + \|v\| - 2\Im(\langle u | v \rangle) \end{aligned}$$

■

ושה"כ אם נציב בנוסחה, אחרי שהשיבו את כל אבירה, הכל יצטמצם ושה- $\langle v | u \rangle$  אכן שווה לדחוס.

במילים אחרות, באותה המידה שתבניות שמתבניות בילינאריות וtabניות ריבועיות אפשר להסיק אחת מהשנייה, אפשר גם מכפלה פנימית להסיק גורמה ולהפץ. איז, ממ"פ ומרחכ גורמי הם די שקולים. זה לא מפתיע, בהתחשב בזזה שלכל תבנית סימטרית לא-מנוונת משראה באופן ייחד תבנית ריבועית, ולהפץ (במאפיין שונה מ-2).

## 2.2.2 ~ אורתוגונליות, זהויות ואי-שוויונות של המכפלה הפנימית

**הגדה 78.** בהינתן  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ, לכל  $v \in V$  נאמר ש- $v$  מאוזן ל- $u$  (או אורתוגוני ל- $u$ ) אם אנחנו מרגישים מפוננים נסמן  $v \perp u$  אם  $\langle u | v \rangle = 0$ .

**הערה 43.** אם  $v \perp u$  אז  $u \perp v$ . (כי צמוד של 0 הוא 0).

### (2.2.2.1) משפט 피תגורס ותוצאותיו

**משפט 110 (משפט פיתגורס).** (מואוד מועל) יהיו  $V$  ממ"פ כך ש- $u, v \in V$  אורתוגונליים, אז  $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$

הוכחה. משום שהם מאונכים מתקיים  $\langle v | u \rangle = 0$ . נפתח אלגברה:

$$\|v + u\|^2 = \langle v + u | v + u \rangle = \|v\|^2 + \underbrace{\langle v | u \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u | v \rangle}_{=0} + \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \quad \top$$

**הערה 44.** בתוכ  $\mathbb{R}^n$  הוקטורים הסטנדרטיים מאונכים אחד לשני (במכפלה הפנימית הסטנדרטית) ולכן  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$  כאשר הדלתא של קרונייר. באינדוקציה על משפט פיתגורס נקבל ש-:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i \implies \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

זהה בבדיקה מושג הגודל בגיאומטריה אוקלידית.

**הערה 45.** מעל  $\mathbb{R}$  מקבלים אמ"מ למשפט פיתגורס, מעל  $\mathbb{C}$  לאו דווקא. **משפט 111.** (אי שוויון קושי-שווורץ).

$$\forall v, u \in V: |\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

ושוויון אמ"מ  $v, u$  ת"ל.

הוכחה. אם  $v$  או  $u$  הם  $0$ , אז מתקיים שוויון. טענת עזר: קיים אישחו  $\alpha \in \mathbb{F}$  כך ש-  $v - \alpha u \perp u$ . נסמן  $w = v - \alpha u$  כאשר נמצא אותו. הוכחת טענת העזר. נחפש כזה:

$$\langle v - \alpha u | v \rangle = 0 \iff \langle v | u \rangle - \alpha \|v\|^2 = 0 \iff \alpha = \frac{\langle v | u \rangle}{\|v\|^2}$$

כדרوش. (אפשר לחלק בנורמה כי הם לא  $0$ ). ניעזר במשפט פיתגורס:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u - \alpha v \perp v \\ u - \alpha v \perp v \end{cases} \\ \implies & \|u\|^2 = \|(u - \alpha v + \alpha v)\|^2 = \overbrace{\|u - \alpha v\|^2}^{\geq 0} + |\alpha|^2 \|v\|^2 \\ \geq & |\alpha|^2 \cdot \|v\|^2 = \frac{|\langle v | u \rangle|^2 \cdot \|v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{|\langle v | u \rangle|^2}{\|v\|^2} \\ \implies & |\langle v | u \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|u\|^2 \\ \implies & |\langle v | u \rangle| \leq \|v\| \|u\| \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נכון משום  $|\langle v | u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$ , וכך ניתן להוציא שורש לאו השוויון. בפרט  $0 = \langle v - \alpha u | v \rangle \geq 0$ .

**הערה 46.** זה לא מדויק להגיד שהוא גדר ממשפט הקוסינוסים מעל  $\mathbb{R}^n$ , משום שהגדרת הזווית בין  $v, u$  בגיאומטריה האוקלידית מבוצעת כדלקמן:

$$\cos(\widehat{u, v}) := \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \|v\|} \quad \widehat{u, v} = \arccos(\cos(\widehat{u, v}))$$

**דוגמאות.**

1. מכפלה פנימית סטנדרטית:

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)$$

2. נניח  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפות אז:

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \cdot \int_0^1 g^2(t) dt$$

כאשר  $f \cdot f = f^2$  (לא הרכבה).

3. איזואון המשולש:

$$\forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ושוין אם אחד מהם הוא 0 או אם כפולה חיובית אחד של השני (לא שקול לתלויים לינארית – יכולה להיות כפולה שלילית).

הוכחה (לאו שווה המשולש). תזכורת: עבור  $Z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $|Z|^2 = (\Re Z)^2 + (\Im Z)^2$ .

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle u | v \rangle) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u | v \rangle|$$

ושוין אם  $u$  והוא אפס או כפולה חיובית של  $v$ . מושג-שורץ:

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

**משפט 112** (משפט הקוסינוסים). בהינתן  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  מ"פ, מתקיים:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\widehat{u, v})$$

הוכחה. פשוט נפתח אלגברה:

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\widehat{u, v}) &= \langle u | u \rangle^2 + \langle v | v \rangle^2 + 2\frac{\langle u | v \rangle}{\|u\|\|v\|} \\ &= \langle u | u \rangle + 2\langle u | v \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle + \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle \\ &= \langle u | u + v \rangle + \langle v | u + v \rangle \\ &= \langle u + v | u + v \rangle = \|u + v\|^2 \end{aligned}$$

**הערה 47.** מעל המרכיבים אין לנו את הסימטריות הדרושים. במקומות זאת, מתקיים:

### 2.2.3 ~ מרחבים ניצבים והיטליס

**סימון 12.** יהיו  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ממ"פ. יהיו  $S, T \subseteq V$ . נסמן:

א.  $u \in V: (u \perp S \iff (\forall v \in S: u \perp v))$

ב.  $S \perp T \iff \forall v \in S \ \forall u \in T: v \perp u$

ג.  $S^\perp := \{v \in V \mid v \perp S\}$

**הדרה 79.**  $T^\perp$  הוא תת-המרחב הניצב ל- $T$ .  
**משפט 113.** יהיו  $S, T \subseteq V$  קבוצות, ו-  $U, W \subseteq V$  תמי"ם. אז:

א.  $v \perp \text{span}(S)$  אם  $v \perp S$

ב.  $S^\perp \subseteq V$  תמי"ז

ג. אם  $S \subseteq T$  אז  $S^\perp \subseteq T^\perp$

ד.  $U \oplus U^\perp = V$

ה.  $(S^\perp)^\perp = \text{span } S$

ו.  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

ז.  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

הוכחה (לג').

$$\forall v \perp T: c \perp S \implies v \in S^\perp$$

**הערה 48.** שווין ב' מתקיים אם  $\text{span } S = \text{span } T$ .  
**הדרה 80.** משפחה של וקטורים  $A \subseteq V$  נקראת אורתוגונלית אם  $\forall u \neq v \in A: u \perp v$ .

**הערה 49.** אם  $A$  משפחہ אורתוגונלית וגם  $A \notin 0$  אז ניתן ליצור ממנה משפחہ של וקטורים אורתוגונליים שהם גם וקטורי יחידה, ע"י נרמול.

**הגדרה 81.** משפחہ של וקטורים  $V \subseteq A$  נקראת אורתונורמלית, אם היא אורתוגונלית ובנוסף כל הוקטורים הם וקטורי יחידה.

**הגדרה 82.** יהי  $V \subseteq U$  תמ"ו. יהא  $v \in V$ . אז הטללה האורתוגונלית של  $V$  על  $U$  היא  $p_U(v)$  הוא וקטור המקיים:

$$p_U(v) \in U$$

$$v - p_U(v) \in U^\perp$$

**משפט 114.** בסימונים לעיל,  $\|v - u\| \geq \|v - p_U(v)\|$

הוכחה. יהי  $u \in U$ . ידוע  $p_U(v) \in U$ . אזי בפרט  $p_U(v) - v \perp u$ . כמו כן ידוע  $p_U(v) - v \perp P_u(v)$ . מכאן  $\|v - p_U(v)\|^2 + \|v - P_u(v)\|^2 = \|v - u\|^2$ . וסת"כ  $\|v - p_U(v)\| \geq \|v - p_U(v)\|$ .

עתה נוכיח את ייחדות הטללה האורתוגונלית (קיום נוכחות בהמשך באופן קונסטראטיבי).  
**משפט 115.** הטללה הניצבת, היא יחידה.

הוכחה. יהיו  $p_U(v)$  וכן  $p'_U(v)$  הטלות של  $v$  על  $U$ . מהטענה:

$$\|v - p_U(v)\| \leq \|v - p'_U(v)\|$$

אבל בהחלפת תפקדים מקבלים את אי-השווין הפוך. לכן יש שוויון נורמות. מהמשפט לעיל  $\|p_U(v) - p'_U(v)\| = 0$ .

**משפט 116.** תהי  $A \subseteq V$  משפחה אורתוגונלית ללא 0. אז היא בת"ל.

הוכחה. יהיו  $v_1, \dots, v_n \in A$  ונניח  $\sum_{i=0}^n \alpha_i v_i = 0$ . אזי  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ .

$$0 = \langle 0 | v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \mid v_j \right\rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle v_i | v_j \rangle = \alpha_j \underbrace{\|v_j\|^2}_{\neq 0} \implies \alpha_j = 0$$

כאשר השוויון האחרון מוכיח הקבוצה אורתוגונלית.

**משפט 117 (קיום היטל אורתוגונלי).** נניח  $U \subseteq V$  תמ"ו. נניח  $U$  נ"ס וכן  $B = (e_1, \dots, e_n)$  בסיס אורתונורמלי של  $U$  (כלשהם, לא בהכרח סטנדרטיים כי גם לא בהכרח  $\mathbb{F}$ ). אז

$$\forall v \in V: p_U(v) = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle e_i$$

הוכחה. צ.ל.  $\forall j \in [n]: \langle v_i p_U(v) | e_j \rangle = 0$  וגם  $\forall u \in U: \langle v - p_U(v) | u \rangle = 0$ . חילוק הראשון ברור, יותר להוכיח:

$$\langle v - p_U(v) | e_j \rangle = \langle v | e_j \rangle - \langle p_U(v) | e_j \rangle =: *$$

ידוע:

$$\langle p_U(v) | e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle e_i \mid e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \langle v_i | e_i \rangle \cdot \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^m \langle v | e_i \rangle \delta_{ij} = \langle v | e_j \rangle$$

נחזיר לשוויון לעיל:

$$* = \langle v | e_j \rangle - \langle v | e_j \rangle = 0$$

כדרוש.

(בכך הוכחנו את קיום  $p_U$  לכל מ"ס נ"ס, אם נשלב את זה עם המשפט הבא)

### (2.2.3.1) אלגוריתם גורהס-شمידט

**משפט 118 (אלגוריתם גורהס-شمידט).** תהי  $(b_1 \dots b_k)$  קבוצה סדורה בת"ל של וקטורים במרחב  $V$ . אז בכל משפחה א"נ  $\text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$  כך ש- $(u)$

**מסקנות מהמשפט.** לכל ממרחב נ"ס קיים בסיס א"נ (=אורותונורמלי). יתרה מזאת, בהינתן בסיס  $B = (b_1 \dots b_n)$  ניתן להפכו לבסיס א"נ  $(u_1 \dots u_n)$  המקיים  $\text{span}(b_1 \dots b_k) = \text{span}(u_1 \dots u_k)$ .

הוכחה. בניה באינדוקציה. נגידר עבור  $k = 1$  את  $b_1'' = u_1$ . מתקיים  $\text{span} b_1 = \text{span} u_1$  וכן  $\{u_1\}$  קבוצה א"ג. נניח שבנינו את  $k$  האיברים הראשונים, נבנה את האיבר ה- $i+1$  במלים אחרות, הנחנו  $u_1 \dots u_k$  אורותונורמלית ווגם  $\text{span}(u_1 \dots u_k) = \text{span}(b_1 \dots b_k) = U$ .

מהסעיף הקודם ( $p_U(b_{k+1})$  קיים, וגם  $0 \neq p_U(b_{k+1}) - p_U(b_{k+1}) = 0$ ). בזרה מפורשת:

$$u_{k+1} = \frac{b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i}{\left\| b_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i \right\|}$$

מהגדרת  $p_U$ , מתקיים  $b_{k+1} \in U^\perp$  וכן  $b_{k+1} - p_U(b_{k+1}) \in U^\perp$   $p_U(b_{k+1}) \in U$ .

$$b_1 \dots b_k = \overbrace{\text{span}(u_1 \dots u_{k+1})}^{\text{בת"ל}}$$

נשאר להוכיח ש- $(u_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . זה מספיק משום שאז נקבל  $b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$   $\text{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . אבל  $\text{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . אבל  $\text{span}(b_1 \dots b_{k+1}) \subseteq \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . זה מוכיח ש- $(u_{k+1})$   $\text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$ . סה"כ:

$$b_{k+1} = \|b_{k+1} - p_U(b_{k+1})\| \cdot u_{k+1} + \sum_{i=1}^k \langle b_{k+1} | u_i \rangle u_i \implies b_{k+1} \in \text{span}(u_1 \dots u_{k+1})$$

מש"ל.

**משפט 119.** כי  $V$  מ"ז  $\subseteq U$ . נניח שלכל  $v \in V$  מוגדר  $p_U(v)$  (בפרט כל מ"ז נ"ס). אז  $V$  המוגדרת לפי  $p_U(v) \mapsto v$  העתקה לינארית.

הוכחה. יהיו  $v, v' \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$ . ידוע  $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^\perp$ .  $v, v' \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$ ,  $v - p_U(v), v' - p_U(v') \in U^\perp$   $(v - p_U(v)) + \alpha(v' - p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - (p_U(v) + \alpha p_U(v')) \in U^\perp \implies (v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v') \in U^\perp$  מה מקיים היטל וקטורי? ראשית ההיטל ב- $U$ , ושנית  $v$  פחות ההיטל מואנק. הוכחנו שההינון היטל, הוא ייחיד. והראינו ש- $(v + \alpha v') - p_U(v + \alpha v')$  מקיים את זה, ולכן אס"י ש- $v + \alpha v'$  אחד א"ז הוא ייחיד, ושה"כ שווים ולינארית.

**משפט 120.**  $\min_{u \in U} \|v - u\| = \|v - p_U(v)\|$

בניסוח אחר: ההיטל  $p_U$  הוא הוקטור הכי קרוב לו-ב- $U$ . בתרגול צוין שזוויות דרכן למצוא את הפתרון "הכי קרוב" למערכת משוואות לינארית שונה מהפתרון.

**הגדלה 83.** הפתרון האופטימלי למערכת משוואות  $(A | b)$  הוא  $p_{\text{Col } A}(b)$  (כאשר  $\text{Col } A$  מ"ז העמודות).

## 2.2.4 ~ צמירות וזרליות

### (2.2.4.1) העתקות צמודות לעצמן, והעתקות חיוביות

**הגדרה 84.**  $V$  ממ"פ ו- $T: V \rightarrow V$  מ"פ. אז  $T$  נקראת סימטרית ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ) או הרטמייה ( $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) אם  $\langle u, T v \rangle$  באופן כללי, העתקה כזו תקרא צמזה לעצמה.

**דוגמה.** (המקורה בפרטி בממ"פ המשירה את הגיאומ"ה האוקlidית) עבור  $V = \mathbb{R}^n$  מ"פ סטנדרטית, וד"ר  $A \in M_n(\mathbb{R})$  מ"פ סטנדרטית, ו- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ,  $V = \mathbb{R}^n$  מ"פ סטנדרטית, ומתקיים  $\langle T_A v | u \rangle = v^T u$ :

$$\langle T_A v | u \rangle = (Av)^T u = v^T A^T u = \langle v | A^T u \rangle$$

"א אם  $T_A = A^T$  אז  $A$  סימטרית, כלומר  $A$  מטריצה סימטרית. גם הכיוון השני נכון: אם  $V \rightarrow T: V \rightarrow V$  סימטרית אז ע"י בחירת בסיס נקבל  $[T]_B^B$  גם היא סימטרית.

**דוגמה נוספת** (בדמות המשפט)

**משפט 121.** ההעתקה  $(v) \mapsto p_U(v)$  עבר  $U$  תמי'ו כלשהו, היא היטל, צמודה לעצמה.

הוכחה. יהיו  $V$  תמי'ו. ניעזר בעובדה לכל  $U$  תמי'ו ו- $V \in U$  ניתן לפרק את  $v$  לפי  $v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$ . עוד נבחן שמכיוון  $p_{U^\perp} = U^\perp \cap \text{Im } p_U = U \cap \text{Im } p_{U^\perp}$

$$\begin{aligned}\langle p_U(v) | u \rangle &= \langle p_U(v) | p_U(u) + p_{U^\perp}(u) \rangle \\ &= \langle p_U(v) | p_U(u) \rangle + \underbrace{\langle p_U(v) | p_{U^\perp}(u) \rangle}_0 \\ &= \langle p_U(v) | p_U(u) \rangle + \overbrace{\langle p_{U^\perp}(v) | p_U(u) \rangle}^0 \\ &= \langle p_U(v) + p_{U^\perp}(v) | p_U(u) \rangle \\ &= \langle v | p_U(u) \rangle\end{aligned}$$

■

**משפט 122.** נניח  $V$  ממ"פ מעל  $\mathbb{C}$ . אז  $T$  הרミטי אם  $\langle \cdot | \cdot \rangle \in \mathbb{R}$ .

**משפט 123.** יהיו  $T, S: V \rightarrow V$  צמודות לעצמן. אז:

1.  $\alpha T, T + S$  צמודות לעצמן.

2. המכפלה  $S \circ T$  צמודה לעצמה אם  $T, S$  צמודות לעצמן.

3. אם  $p$  פולינום מעל  $\mathbb{F}$  אז  $p(T)$  צמודה לעצמה.

כל לראות ש- $3 \Rightarrow 1 + 2 \Rightarrow 1$ . נובע ישרות מהגדירה. 1 טרוויאלי. נוכיח את 2.

הוכחה ל-2. נניח  $S \circ T$  צמודה לעצמה. בהנחות המשפט ידוע  $S, T$  צמודות לעצמן. נקבל:

$$\langle (S \circ T)v | u \rangle = \langle v | STu \rangle = \langle Sv | Tu \rangle = \langle TSv | u \rangle \implies \langle (ST - TS)v | u \rangle = 0 \quad \forall v, u$$

נסיק:

$$\implies \forall v \langle (ST - TS)v | (ST - TS)v \rangle = 0 \implies (ST - TS)v = 0 \implies STv = TSv \implies \top$$

מהכיוון השני, אם  $TS = ST$  אז  $TS$  צמודות לעצמן:

$$\langle STv | u \rangle = \langle S(Tv) | u \rangle = \langle Tv | Su \rangle = \langle v | TSu \rangle = \langle v | STu \rangle$$

**הגדרה 85.** הגדרה  $T: V \rightarrow V$  תקרא חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובית אם לכל  $v \in V$ :

$$\begin{array}{ll} \text{חיובית: } \langle Tv | v \rangle \geq 0 & \langle Tv | v \rangle > 0 \\ \text{אי-שלילית: } \langle Tv | v \rangle \leq 0 & \langle Tv | v \rangle < 0 \\ \text{שלילית: } \langle Tv | v \rangle < 0 & \end{array}$$

**הערה 50.** באופן כללי, אין קשר הדוק בין הגדרת חיוביות של תבניות ביילינאריות. המושגים יתקשרו אחד לשני בהמשך רק בהקשר של העתקות צמודות לעצמן.

**משפט 124.** אם  $T$  חיובית/שלילית, אז היא הפיכה.

הוכחה. נניח ש- $T$  לא הפיכה, נניח בשילhouette שהיא חיובית. קיימים  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  כך  $v \in \ker T$ . נוכיח ש- $T$  חיובית.

**משפט 125.** נניח ש- $S$  צמודה לעצמה, אז  $S^2$  צמודה לעצמה ואי-שלילית.

הוכחה. ממשפט קודם  $S^2$  צמודה לעצמה. נוכיח אי-שלילית:

$$\forall 0 \neq v \in V: \langle S^2v | v \rangle = \langle Sv | Sv \rangle = \|Sv\|^2 \geq 0$$

**הגדרה 86.** פולינום  $p \in \mathbb{R}[x]$  יקרא חיובי אם  $p(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

**משפט 126.** נניח  $T: V \rightarrow V$  חיובי, ו- $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  צמודה לעצמה, אז  $p(T)$  חיובית גס-כן, וצמודה לעצמה.

**лемה 10.** אם  $p \in \mathbb{R}[x]$  חיובי, אז קיימים  $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[x]$  ו- $c \in \mathbb{R}$  כך  $p(x) = \sum_{i=1}^k g_i^2(x) + c$  ו- $c \geq 0$ .

אם "מ"  $p$  חיובי.

רעיון להוכחת הלמה: מעל  $\mathbb{C}$  זה מתפרק, ונוכל לכתוב  $p(x) = a_n \prod_{j=1}^s (x - i\alpha_j)(x + i\alpha_j)$  (מעל  $\mathbb{R}$  כל פולינום מתפרק לגורמים ריבועיים, ואם כל שורשי מרוכבים, כל גורמי ריבועים). הרעיון הוא להוכיח את הטענה ש- $\bar{h}h = g_1^2 + g_2^2$ .

הוכחה (של המשפט, לא של הלמה). יהיו  $v \in V$  כך:  $.0 \neq v \in V$ .

$$\langle p(T)v | v \rangle = \underbrace{\left\langle \sum_{i=1}^k g_i^2(T)v | v \right\rangle}_{\sum_{i=1}^k \langle g_i^2(T)v | v \rangle \geq 0} + \underbrace{c \langle v | v \rangle}_{c ||v||^2 > 0} \geq 0$$

**מסקנה 21.** אם  $T: V \rightarrow V$  צמודה לעצמה ו- $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  פולינום חיובי, אז  $p(T)$  הפיכה. **משפט 127.** נניח ש- $T: V \rightarrow V$  סימטרית (צמודה לעצמה מעל  $\mathbb{R}$ /הטריצה המייצגת סימטרית) וכי  $m_T(x)$  הפולינום המינימלי של  $T$ . אז  $m_T$  מתפרק לגורמים לינארים. בנוסף, הם שונים זה מזה.

הוכחה. נניח בשילhouette קיומ  $m_T | p$  איד-פריק. בה"כ נניח ש- $p$  חיובי (אין לו שורש ב- $\mathbb{R}$ , שכן נמצא כולם מעלה/מתחת לציר  $\text{-}x$ ). אז אפשר לכתוב את  $m_T = p \cdot c$  כי  $m_T$  מינימלי מדרגה גבוהה יותר. אז:

$$0 = m_T(T) = \underbrace{p(T) \cdot g(T)}_{\neq 0} \implies g(T) = 0$$

בסתירה למינימליות של  $m_T$ . סה"כ  $m_T$  אכן מתפרק לגורמים לינארים. עתה יש להראות שהגורמים הלינארים שלו זרים. נניח  $m_T(x) = (x - \lambda)^2 g(x)$  סימטרית. ניעזר בלמה המופיע מיד אחרי ההוכחה זו. נניח בשילhouette לשם לא כולם שונים, אז  $T - \lambda I$  מינימלי מדרגה גבוהה ומעלה:

$$0 = m_T(T)v = (T - \lambda I)^2 g(T) \implies \omega = g(T)v, \quad (T - \lambda I)^2 \omega = 0$$

לכן בפרט  $\omega = 0$  מהסעיף הקודם. סה"כ  $\forall v \in V: (T - \lambda I)g(T) = 0$  וסתירה למינימליות.

**מסקנה 22.**  $T$  סימטרית היא לבסינה.

זכרו מסקנה זו להמשך. היא תhapeך להיות לגיונית כאשר נדבר על המשפט הספקטורי מעלה.

**лемה 11.** נניח  $T$  סימטרית ו- $\lambda \in \mathbb{R}$ , אם  $0 = (T - \lambda I)^2$  אז  $T - \lambda I = 0$ .

הוכחה. ידוע:

$$\forall v: 0 = \langle (T - \lambda I)^2 v | v \rangle = \langle (T - \lambda I)v | (T - \lambda I)v \rangle = \|(T - \lambda I)v\|^2 \implies (T - \lambda I)v = 0$$

**משפט 128.** אם  $V$  ממ"פ ו- $V \rightarrow T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה, אז הע"ע של  $T$  ממשיים.

הוכחה. יהי  $v \in V$  שאינו שמתאים לע"ע. נחשב:

$$\lambda v \|v\|^2 = \langle \lambda v | v \rangle = \langle Tv | v \rangle = \langle v | Tv \rangle = \langle v | \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

ידוע  $v \neq 0$  ולכן  $0 \neq \|v\|$  ונסיק  $\bar{\lambda} \lambda v = 0$  ולכן  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**משפט 129.** אם  $V$  ממ"פ ו- $V \rightarrow T: V \rightarrow V$  ט"ל צמודה לעצמה, אז כל זוג  $u, v \in V$  שאינם שווים, המתאימים לערבים  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , מאונכים זה זה.

הוכחה. למעשה, מהטענה הקודמת  $\alpha u = \beta v$ ,  $Tu = \alpha u$ ,  $Tv = \beta v$ . כאמור  $\alpha = \beta$ . נחשב:

$$\alpha \langle u | v \rangle = \langle \alpha u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle = \langle u | \beta v \rangle = \bar{\beta} \langle u | v \rangle = \beta \langle u | v \rangle$$

בג一笔  $\beta \in \mathbb{R}$  מתקיים  $\beta = \bar{\beta}$ , ולכן  $0 = (\alpha - \beta) \langle v | u \rangle$  מההברת אנג' וסה"כ  $u \perp v$  ואכן  $u \perp v$ .

**הערה 51.** בחלק הבא יש שימוש קל במרחבים דו-אלים. בעבור סטונדים שבעבורם מרוחבים דו-אלים לא נכלל כחלק מלינארית נא, אני ממליץ לקרוא את החלק הראשון של מושגים דו-אלים בסוף השיעורים.

**משפט 130 (משפט ריס).** יהי  $V$  ממ"פ סופי ויהי  $V^* \in V$ . אז קיימים יחיד וקבע  $u$  שמקיים  $\langle v | u \rangle = \varphi(v)$   $\forall v \in V$ :

הוכחה.

**קיוום.** יהי  $B = (b_i)_{i=1}^n$  בסיס אורתונורמלי של  $V$  (הוכחנו קיום בהרצאות קודמות). נסמן  $u = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i$ . בכדי להראות  $\varphi(b_j) = \langle b_j | u \rangle$  לכולם  $j \leq n$ :  $\varphi(b_j) = \langle b_j | u \rangle = \langle b_j | \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(b_i)} \langle b_j | b_i \rangle = b_j$

$$\langle b_j | u \rangle = \left\langle b_j \left| \sum_{i=0}^n \overline{\varphi(b_i)} b_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\overline{\varphi(b_i)}}_{b_i} \underbrace{\langle b_j | b_i \rangle}_{\delta_{ij}} = b_j \quad \top$$

**חידות:** אם קיים וקטור נוסף שעבורו  $\langle v | w \rangle = \langle v | w - u \rangle$  נקבע:

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \langle v | w \rangle = \langle v | u \rangle \\ \implies \langle v | u - w \rangle &= 0 \\ \implies 0 &= \langle u - w | u - w \rangle = \|v - w\|^2 = 0 \\ \implies v - w &= 0 \\ \implies v &= w \end{aligned}$$

■

סה"כ הוכחנו קיום ויחידות כדרוש.

**הגדרה 87.**  $A \in M_n(\mathbb{F})$  תקרא חיובית/אי-שלילית/שלילית/אי-חיובייה אם לכל  $v \in \mathbb{F}^n$ :

$$\begin{array}{ll} \text{חיובית: } \langle Av | v \rangle \geq 0 & \langle Av | v \rangle > 0 \\ \text{אי-שלילית: } \langle Av | v \rangle \leq 0 & \langle Av | v \rangle < 0 \\ \text{אי-חיובייה: } \langle Av | v \rangle \leq 0 & \end{array}$$

כאשר  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  המ"פ הסטנדרטי מעל  $\mathbb{F}^n$ .

**הערה 52.** זהו אינה הגדרה נפוצה. לרוב מדברים רק על מטריצה מוגדרת חיובייה.

**משפט 131.** נניח ש- $A = A^* \in M_n(\mathbb{F})$ , אז התנאים הבאים שקולים (קיצור מוכר): (TFAE, the following are equivalent)

1.  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  חיובייה.
2. לכל  $V \rightarrow T$ :  $T$  לבסיס אורתונורמלי כך ש- $T|_B = A$  חיובייה.
3. קיימים  $V \rightarrow T$ :  $T$  חיובית/אי-שלילית ו- $T|_B$  בסיס אורתונורמלי, כך ש- $T|_B = A$  חיובייה.
4. הע"ע של  $A$  חיוביים (הם בהכרח ממשיים כי היא צמודה לעצמה).

הוכחה. מספיק לטעון זאת כדי להוכיח את השקילויות של 1, 2, 3:

$$\langle Tv | v \rangle_V = \langle [Tv]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n} = \langle A[v]_B | [v]_B \rangle_{\mathbb{F}^n}$$

בשביל 2  $\rightarrow$  1, ידוע שהאנג'ה הימני גדול מ-0 מההנחה שהיא חיובית/אי-שלילית על  $\mathbb{F}^n$ , ומכאן הראינו שהמיוצגת בכל בסיס חיובית כדרוש. בשביל 1  $\rightarrow$  3, נפעיל טיעונים דומים מהאנג'ה השמאלי במקומם. הגירה 3  $\rightarrow$  2 ברורה. סה"כ הראינו את  $.1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$

עתה נוכיח שקולות בין 1 ל-4.

1  $\rightarrow$  4. יהי  $\lambda \in \mathbb{R}$  ע"ע של  $A$  (ונכל להניח  $\lambda$  ממשי כי  $A$  צמודה לעצמה)

$$\langle Av | v \rangle = \lambda \|v\|^2 > 0 \implies \lambda > 0$$

4  $\rightarrow$  1. יהי  $B = (v_1 \dots v_n)$  בסיס א"ן של ו"ע, ויהי  $v = \sum \alpha_i v_i \in V$ . נקבע:

$$\langle T_A v | v \rangle = \langle Av | v \rangle = \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right. \right\rangle = \sum \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0$$

**הערה 53.** ההוכחה עובדת באותה הצורה עבור  $A$  אי-שלילית, שלילית או אי-חיובייה, ולמען נוחות הוכחנו עבור העתקה חיובית בלבד.

#### (2.2.4.2) ההעתקה הצמודה

**משפט 132.** יהי  $V$  ממ"פ מן"ס ותהי  $T: V \rightarrow V$  לינארית. אז קיימת ויחידה  $T^*: V \rightarrow V$  ומקיימת  $\langle Tu | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle$ .

הוכחה. לכל  $v \in V$ , נתבונן בפונקציונל הלינארי  $\varphi_V(u) = \langle Tu | v \rangle \in V^*$  המוגדר ע"י  $\langle u | v \rangle$ .  $\forall u \in V$  ממשפט ריס קיימים  $\forall u \in V: \varphi_V(u) = \langle Tu | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle$  שעבורו  $T^*: V \rightarrow V$  הטעקה  $\langle Tu | v \rangle = \varphi_V(u) = \langle u | T^*v \rangle$  קיימת ויחידה, ונouter להראות שהיא לינארית. עבור  $v \in V$  ועבור  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  מתקיים:

$$\begin{aligned} \forall u \in V: & \quad \langle u | T^*(\alpha v + \beta w) \rangle \\ &= \langle Tu | \alpha v + \beta w \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle Tu | v \rangle + \bar{\beta} \langle Tu | w \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle u | T^*v \rangle + \bar{\beta} \langle u | T^*w \rangle \\ &= \langle u | \alpha T^*v + \beta T^*w \rangle \end{aligned}$$

מכך נסיק ש-  $T^*(\alpha v + \beta w) = \alpha T^*v + \beta T^*w$  מינימוקים דומים. ■

**הגדרה 88.** הטעקה  $T^*$  לעיל נקראת הטעקה הצמודה ל- $T$ .  
דוגמאות. מעל  $\mathbb{C}^n$ , עם המ"פ הסטנדרטי, נגידר ט"ל  $A \in M_n(\mathbb{C})$  עבור  $T_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  מוגדרת ע"י  $T_A(x) = Ax$ . א:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n: \langle T_A(x) | y \rangle = \langle Ax | y \rangle = \overline{(Ax)^T} \cdot y = \overline{x^T} \cdot \overline{A^T} y = \overline{x^T} T_{\overline{A^T}}(y) = \langle x | T_{\overline{A^T}}y \rangle$$

כלומר,  $A^* = \overline{A^T}$ , וקראו לה המטריצה הצמודה.

נבחן שהטעקה נקראת צמודה לעצמה אם  $T^* = T$ .

עוד נבחין שעבור הטעקה הסיבוב  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  בזווית  $\theta$ , מתקיים  $T^* = T_{-\theta}$ , כלומר הסיבוב ב- $-\theta$ , וכן היא גם ההופכית לה. כלומר  $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = (T_\theta)^{-1}$ . זו תכונה מאוד מועילה וגם נמציא לה שם במועד מאוחר יותר.

**משפט 133 (תכונות הטעקה הצמודה).** יהי  $V$  ממ"פ וממייניה  $T, S: V \rightarrow V$  זוג הטעקות לינאריות. נבחן ש-:

$$(T^*)^* = T \tag{א}$$

$$(T \circ S)^* = S^* \circ T^* \tag{ב}$$

$$(T + S)^* = T^* + S^* \tag{ג}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}: (\lambda T)^* = \bar{\lambda}(T^*) \tag{ד}$$

הוכחה.

$$\forall u, v \in V: \langle T^*u | v \rangle = \overline{\langle v | T^*u \rangle} = \overline{\langle Tv | u \rangle} = \langle u | Tv \rangle \implies (T^*)^* = T \tag{א}$$

$$\langle (T \circ S)u | v \rangle = \langle Su | T^*v \rangle = \langle u | S^*T^*v \rangle \implies (TS)^* = T^*S^* \tag{ב}$$

$$\langle (T + S)u | v \rangle = \langle Tu | v \rangle + \langle Su | v \rangle = \langle u | T^*v \rangle + \langle u | S^*v \rangle = \langle u | T^*v + S^*v \rangle \tag{ג}$$

$$\langle (\lambda T)u | v \rangle = \lambda \langle Tu | v \rangle = \lambda \langle u | Tv \rangle = \langle u | (\bar{\lambda}T)v \rangle \tag{ד}$$

**סימון 13.** הטעקה צמודה לעצמה לעיטים קרובות (בעיקר בפיזיקה) מסומנים ב- $T^\dagger$ . באופן דומה גם מטריצה צמודה מסומנים ב- $A^\dagger$ .

**משפט 134.** בהינתן  $B$  אורטורונורמלי של  $V$  אז  $[T^*]_B = [T]_B^*$  (שימו לב: האחד צמוד מטריציוני, והשני הטעקה צמודה).

**משפט 135.**  $T$  צמודה לעצמה אם  $\forall v \in V: \langle Tv | v \rangle \in \mathbb{R}$ .

הוכחה.

$$\begin{aligned}
 & \text{צמודה לעצמה } T \\
 \iff & T = T^* \iff T - T^* = 0 \\
 \iff & \forall v \in V: \langle (T - T^*)v | v \rangle = 0 \\
 \iff & \forall v \in V: \langle Tv | v \rangle - \langle T^*v | v \rangle = 0 \\
 \iff & \forall v \in V: \langle Tv | v \rangle - \overline{\langle Tv | v \rangle} = 0 \\
 \iff & \forall v \in V: \Re(\langle Tv | v \rangle) + \Im(\langle Tv | v \rangle) - \Re(\langle Tv | v \rangle) - \Im(\langle Tv | v \rangle) = 0 \\
 \iff & \forall v \in V: 2\Im(\langle Tv | v \rangle) = 0 \iff \forall v \in V: \Im(\langle Tv | v \rangle) = 0 \iff \forall v \in V: \langle Tv | v \rangle \in \mathbb{R} \quad \top
 \end{aligned}$$

**משפט 136.** התנאים הבאים שקולים:

1.  $T$  צמודה לעצמה.
  2. לכל בסיס  $\mathcal{E}$  אורתונורמלי מתקיים  $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ .
  3.  $\exists T$  קיים בסיס אורתונורמלי  $\mathcal{E}$  כך ש- $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ .
- הוכחה. את השיקולות 2  $\leftrightarrow$  1 הוכחנו במשפט הקודם. עתה נראה  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . ניעזר בכך שידוע שלכל  $\mathcal{E}$  אורתונורמלי מתקיים  $[T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ .
- $[T]_{\mathcal{E}} = [T^*]_{\mathcal{E}} = [T^*]_{\mathcal{E}}^*$  מתקיים  $[T^*]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$  מהנתון, כלומר  $T = T^*$ . סה"כ  $\exists T = T^*$  ידוע שלכל  $\mathcal{E}$  אורתונורמלי מתקיים  $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ .
- $\exists T = T^*$  מאלגו גראם-שמידט, בהכרח קיים  $\mathcal{E}$  אורתונורמלי כלשהו. לכן מ-4 בפרט הוא מקיים  $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$  כדרוש.
- $\exists T = T^*$  ידוע קיום  $\mathcal{E}$  כך ש- $[T]_{\mathcal{E}} = [T]_{\mathcal{E}}^*$ . לכן מהיות  $\mathcal{E}$  העתקת הקורדיינאות לבסיס איזומורפיים, בהכרח  $T = T^*$  כדרוש.
- הערה 54.** כאן מתקשר השם "סימטרי" לאופרטור סימטרי, כי למעשה משום שמטריצת סימטרית מקיימת  $A^* = A$  מעל  $\mathbb{R}$ , העתקה היא סימטרית אם ומ"מ המייצגת (תחת בסיס אורתונורמלי) סימטרית.

המשך בעמוד הבא

## 2.3 Decompositions .....

**אלגברה לינארית.** ראיינו לכsoon – ניסיון למצוא מטריצה אלכסונית דומה. ה”בעה” באלכסון, ובמטריצות מעבר באופן כללי, זה שהן לא שומרת את כל תכונות המרחב הוקטורי – הן לא שומרות את הנורמה. לכן, בחולק זהה של הקורס, נגיד “מטריצה מעבר מיוחד” שמשמעותו נורמה, כלומר  $\|Av\| = \|Bv\|$ . בניסוח אחר, ננסה למצוא בסיס אורתוגונרמלי שבו הלכsoon מתקיים. על התנאי הזה בדיקן נלמד כאשר נדבר על משפט הפירוק הספקטורי.

לצערנו, בבדיקה כמו שלא יכולנו ללכsoon כל מטריצה, נוכל ללכsoon אורתוגונרמלית עוד פחות מטריצות. לכן, לאחר מכון העוסק במושג “התאמת המטריצות” – בהינתן מטריצה  $A$ , נאמר שהיא מטריצה  $B$  אם ויחי מתייחסת מעבר בסיסים  $P, Q$  כך  $P = PBQ^{-1}$ . כמובן, זה נראה תנאי חלש יותר. ואכן, אפשר להראות שהוא באמת חלש, ו- $A$  מתייחסה ל- $B$  אם ויחי  $\text{rank } A = \text{rank } B$  ו- $A$  מסתבר שאם נגביל את  $B$  להיות אלכסונית, ומטריצות המעבר שלנו נדרש לא לשנות את הנורמה (דהיינו  $\|Bv\| = \|Av\|$ ), אז מצאנו פירוק מאוד פשוט  $A = P \cdot B \cdot Q$ . לפירוק זהה נקרא ”פירוק לערכים סינגולריים“, והוא מאפשר לנו להגיד הרבה על ה”גדלים” שהמטריצה משנה, כי אנחנו מתייחסים אותה למטריצה אלכסונית (שמאוד נכון לעובד איתה) בעוד מטריצות המעבר לא באמת משפיעות על הנורמות (הגדלים) של הדברים. על המצב הזה נדבר בהקשר של פירוק SVD, המקראה המוכלל של פירוק ספקטורי.

ישנו פירוק נוסף, הפירוק הפלורי. מסתבר, שבאופן דומה לכך שאפשר לפרק וקטור פולאריט (לזווית ולגודלה) מעלה ממ”פים, אפשר לפרק העתקה ”פולארית“ – להרכבת העתקות, כך שהראשונה ”חויבית“ ומשנה את הגדים, והשנייה רק מסובבת (או באופן שקול, לא משנה גודל).

### 2.3.1 ~ המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן

#### (2.3.1.1) ניסוח המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמן

**משפט 137 (המשפט הספקטורי להעתקה לינארית צמודה לעצמה).** יהיו  $V$  ממ”פ ממימד סופי, ותהי  $T: V \rightarrow \mathbb{C}^n$  צמודה לעצמה. אז קיים  $L: V \rightarrow \mathbb{C}^n$  בסיס אורתוגונלי (או אורתוגונרמלי) שמורכב מ- $n$  וקטורים  $v_1, \dots, v_n$  של  $T$ .

הוכחה. יהיו  $m_T(x)$  הפולינום המינימלי של  $T$ . נציג  $m_T(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{d_i}$  כאשר  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הם השורשים של  $T$ . מהטענה הקודמת  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ . [הערה: התמשכנו במשפט היסודי של האלגברה מעלה המרכיבים, והסבירנו פירוק מעלה  $\mathbb{R}$ ]. ב כדי להראות ש- $T$  לכיסינה, علينا להוכיח  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הם שורשים של  $m_T(x)$ . נניח בשילhouette שאין לא מתקיים, אז  $m_T(x) = (x - \lambda)^2 \cdot p(x)$  כאשר  $\lambda$  ערך ממשי. כעת, לכל  $v \in V$  מתקיים מהיות  $T$  צמודה לעצמה (כלומר  $p(T) = 0$  צמוד לעצמו):

$$0 = \underbrace{m_T(T)}_{=0}(v) \implies 0 = \langle m_T(T)(v) | p(T)(v) \rangle = \langle (T - \lambda I)(p(T)v) | p(T)v \rangle = \langle (T - \lambda I)(p(T)v) | (T - \lambda I)(p(T)v) \rangle = \|(T - \lambda I)^2(p(T)v)\|^2 = 0$$

ולכן  $(T - \lambda I)(p(T)v) = 0$  וולכן  $V = \text{ker}(T - \lambda I)(p(T))$  בסתירה למינימליות של  $m_T(x)$ . נאמר, מכפלת גורמים לינארים שונים, ולכן  $T$  לכיסינה, ונוכל לפרק את  $V$  באמצעות:

$$V = \bigoplus_{i=1}^m \text{ker}(T - \lambda_i I)$$

המרחבים העצמיים הללו אורתוגונליסים זה לזה, מטענה שהוכחנו. נבנה בסיס  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  בסיס אורתוגונל מלכsoon של  $T$ . ■

**משפט 138.** יהיו  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  ותהי  $T: V \rightarrow \mathbb{C}^n$ . אז  $T$  סימטרית אם ויחי לbasis אורתוגונלי מלכsoon.

הוכחה. מכיוון אחד, הוכחנו באמצעות המשפט הספקטורי להעתקות לינאריות צמודות לעצמן. מהכיון השני, נניח שקיימים  $L: V \rightarrow \mathbb{C}^n$  אורתוגונל מלכsoon של  $T$ . נורמל לבסיס אורתוגונרמלי  $B = \{b_i\}_{i=1}^n$  של  $T$ , המתאים ל- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . עבור  $u, v \in V$ , נציג:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \quad v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$$

ונחיש:

$$\langle Tu | v \rangle = \left\langle T \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \right) \middle| \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle Tb_i | b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_i \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i \lambda_i$$

מהצד השני:

$$\langle u | T v \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i b_i \middle| T \left( \sum_{i=0}^n \beta_i b_i \right) \right\rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle b_i | T b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_j \underbrace{\langle b_i | b_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j \lambda_i$$

מטרזיטיביות שווין, הראיינו ש- $\langle u | T v \rangle = \langle v | T u \rangle$  ולכן  $T$  צמודה לעצמה. השוויון לדلتא של קוקניך נקונה מאורתוגונליות ■ איברי הבסיס, והבילינאריות כי אנחנו מעלה המשמשים. המשפט לא נכון מעלה מהרוכבים.

הוכחה שהמשפט מתקיים בהכרח מעלה המרוכבים: ההעתקה  $T(x) = ix$  היא העתקה סקלרית לינארית, שכן כל וקטור הוא ו"ע וכל בסיס מלכון, בסיס אורתונורמלי כלשהו יהיה בסיס מלכון על אף שההעתקה לא צמודה לעצמה, אלא אנטי-הרמייטית.

### (2.3.1.2) ניסוח המשפט הספקטרלי בעבר העתקה כללית

המטרה: להבין לאילו העתקות בדיקת מתקיים המשפט הספקטרלי. מעלה המשמשים, הבנו שאילו העתקות צמודות לעצמן. אז מה קורה מעלה המרוכבים? ■  
משפט 139. יהיו  $V$  ממ"פ נ"ס ותהי  $T: V \rightarrow V$ : לינאריות. אם  $B = (b_i)_{i=1}^n$  בסיס אורתוגונלי לו"ע של  $T$ , אז  $n \leq i \leq n$  ו"ע של ההעתקה הצמודה.

כלומר: אם מתקיים המשפט הספקטרלי, אז הבסיס שמלכון אורתוגונלי את  $T$  מלכון אורתוגונלי את הצמודה.

הוכחה. יהיו  $i \in [n]$  ונסמן בעברו את  $\lambda_i$  הע"ע המתאים לו"ע  $b_i$ . עבור  $j \in [n]$  נחשב את

$$\langle b_i | T^* b_j \rangle = \overline{\langle T b_i | b_j \rangle} = \overline{\langle \lambda_i b_i | b_j \rangle} = \lambda_i \langle b_i | b_j \rangle = 0$$

לכן  $\{b_j\}_{j=1}^n = (\text{span}\{b_i\}_{i=1}^n)^\perp \stackrel{!}{=} \text{span}\{b_j\}_{j=1}^n$ . משיקולי ממדיים, הפרישה מממד  $1 - n$  ולכן המשלים האורתוגונלי שלו מממד 1 ולכן השווין. סה"כ  $b_j$  ולכן  $T^* b_j \in \text{span}\{b_j\}_{j=1}^n$  כדרוש. ■

מסקנה. אם  $V$  ממ"פ נ"ס ו- $T: V \rightarrow V$  ט"ל עם בסיס מלכון אורתוגונלי, אז  $T, T^*$  מתחלפות ככלומר  $T^* T = T T^*$

הוכחה. לפי הטענה הקודמת כל  $b_i$  הוא ו"ע משותף ל- $T$  ול- $T^*$ , וכך:

$$T T^*(b_i) = T(T^*(b_i)) = \beta_i T^*(b_i) = \beta_i \delta_i b_i = \alpha_i \beta_i b_i = \alpha_i T(b_i) = T^* T(b_i)$$

העתקה מוגדרת לפי מה שהיא עשויה לבסיס ולכן  $T T^* = T^* T$

הגדירה 89. העתקה כזו המכילה  $AA^* = A^* A$  נקראת נורמלית (או "נורמאלית" בעברית של שנות ה-60). ■  
למה 12.  $T$  היא העתקה נורמלית אם ומן:

הוכחה.

אם  $T$  נורמלית, אז  $T T^* = T^* T$  ומן:  $\Rightarrow$

$$\|T v\|^2 = \langle T v | T v \rangle = \langle T^* T v | v \rangle = \langle T T^* v | v \rangle = \langle T^* v | T^* v \rangle = \|T^* v\|^2$$

אם  $v \in V$ :  $\|T v\| = \|T^* v\| \iff$

$$\forall v \in V: 0 = \|T v\|^2 - \|T^* v\|^2 = \langle T v | T v \rangle - \langle T^* v | T^* v \rangle = \langle T^* T v | v \rangle - \langle T T^* v | v \rangle = \langle (T^* T - T T^*) v | v \rangle$$

נבחין ש-:

$$(T^* T - T T^*)^* = T^*(T^*)^* - (T^*)^* T^* = T^* T - T T^* =: \varphi$$

כלומר,  $\varphi$  צמודה לעצמה. משפט שהוכחנו  $0 = \varphi$ , כלומר  $T^* T = T T^*$  כדרוש. ■

מעתה ואילך, ננסה להראות שכל העתקה נורמלית מקיימת את התנאי של המשפט הספקטרלי (כלומר ניתן ללבסנה אורתוגונלית)

משפט 140 (המשפט הספקטורי). יהיו  $V$  ממ"פ נוצר סופית מעל  $\mathbb{C}$ , ותהי  $T: V \rightarrow V$ : לינארית. אז קיימים בסיס אורתוגונלי של  $T$  אם ומ"מ  $T$  נורמלית.

**лемה 13.** יהיו  $V$  ממ"פ ותהינה  $S_1, S_2 : V \rightarrow V$  זוג ט"ל צמודות ולעמן ומתחולפות (כלומר  $S_1S_2 = S_2S_1 = 0$ ). אז קיים בסיס אורתוגונלי של  $V$  שמורכב מ"עימים משופרים ל- $S_1$  ול- $S_2$ .

הוכחה. ידוע ש- $S_1$  צמודה לעצמה, לכן לפי המשפט הספקטורי להעתקות צמודות לעצמו (ולא מעגלי כי הוכח בפרט בהרצאה הקודמת), קיים לה לבסן אורתוגונלי ובפרט  $S_1$  לבסינה. נציג את  $V$  כ- $\bigoplus_{i=1}^m \ker(S_1 - \lambda_i I)$ , כאשר  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  הם הע"עים השונים של  $S_1$ . לכל  $m \leq i \leq 1$  מתקיים ש- $V_{\lambda_i}$  (המרחב העצמי) הוא  $S_1$ -איינוריאנטי שברי אם  $v \in V_{\lambda_i}$  וnochesh:

$$S_1(S_2v) = S_2(S_1v) = S_2(\lambda_i v) = \lambda_i S_2v \implies S_2v \in V_{\lambda_i}$$

כאשר  $S_2|_{V_{\lambda_i}} : V_{\lambda_i} \rightarrow V_{\lambda_i}$  צמודה לעצמה, ולכן המשפט הספקטורי לצמודות לעצמן אומר שבתוך  $V_{\lambda_i}$  ישנו בסיס אורתוגונלי של ו"עימים מ- $S_2$ . האיחוד של כל הבסיסים הללו מכל מ"ע של  $S_1$  יהיה בסיס אורתוגונלי של ו"עימים משופרים ל- $S_1$  ול- $S_2$ . ■

הוכחת המשפט הספקטורי.

לפי המסקנה הקודמת, אם ישנו לבסן אורתוגונלי  $T$  בהכרח נורמלית.

נגיד  $S_1 = \frac{T+T^*}{2}$ ,  $S_2 = \frac{T-T^*}{2i}$ . הן וודאי צמודות לעצמן מהלינאריות וכל השתיותים ממקודם, והן גם מתחולפות אם תטורחו להכפיל אותן. מהטענה קיים  $L$  בסיס אורתוגונלי של ו"עימים משופרים ל- $S_1, S_2$  ונסמן  $\{b_i\}_{i=1}^n$  וגם  $S_1b_i = \alpha_i b_i$ ,  $S_2b_i = \beta_i b_i$ . אפשר גם לטעון ש- $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  אבל זה לא מועיל לנו. נשים לב ש- $T = S_1 + iS_2$ , כלומר  $T(b_i) = S_1(b_i) + iS_2(b_i) = \alpha_i b_i + i\beta_i b_i = (\alpha + i\beta_i) b_i$ . ■

למעשה, הבנו מהפירוק של  $S_1, S_2$  ש- $S_1$  נותנת את החלק המשמי של הע"ע ו- $S_2$  את החלק המדומה. זהו פירוק מועיל שכדי לזכור.

**נסכם:** יש לנו שתי גרסאות של המשפט הספקטורי:

**משפט** (המשפט הספקטורי מעל  $\mathbb{R}$ ).  $T$  סימטרית אם קיים בסיס א"ג של ו"ע.

**משפט** (המשפט הספקטורי מעל  $\mathbb{C}$ ).  $T$  נורמלית אם קיים בסיס א"ג של ו"ע.

משמעותה הרmittית (וצמודה לעצמה באופן כללי) היא בפרט נורמלית כי מטריצה מתחולפת עם עצמה, נסיק שלצמודה לעצמה קיים בסיס אורתוגונלי מלכון (בעמוד ההפוך הכיוון הפוך לא נכון מעלה המורכבים, שם ההעתקה יכולה להיות נורמלית ולא סתם הרmittית).

**הערה 55.** המשפט הספקטורי מעל  $\mathbb{R}$  לא אומר שהעתקה/מטריצה סימטרית היא לבסינה מעל  $\mathbb{R}$ , משום שהבסיס האורתוגונרמלי המלכון המדובר הוא בסיס מעל  $\mathbb{C}$  (בעוד ההעתקה/מטריצה מעל  $\mathbb{R}$ ). לדוגמה, סיבוב ב- $90^\circ$  לא לבסין ב- $\mathbb{R}$  אך צמוד לעצמו.

### (2.3.1.3) תוצאות משפטי הפירוק הספקטורי

**משפט 141.** תהי  $V$  ט"ל, ו- $V$  ממ"פ מעל  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , ויהי  $B$  בסיס א"ג של  $V$ . אז אם :

$$[T^*]_B = A = ([T]_B)^*$$

הוכחה. נזכיר ש-:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} & & \\ [Te_1]_B & \cdots & [Te_n]_B \\ & & \end{pmatrix}$$

נסמן  $B = \{e_i\}_{i=1}^n$  בסיס. נבחן ש-:

$$Te_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} e_i, \quad a_{ij} = \langle Te_j | e_i \rangle$$

נסמן ב- $C$  את המטריצה המייצגת  $[T^*]_B$ :

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle$$

ונוכיח:

$$c_{ij} = \langle T^* e_j | e_i \rangle = \langle e_j | Te_i \rangle = \overline{\langle Te_i | e_j \rangle} = a_{ij}$$

**מסקנה:** אם  $A$  נורמלית אז  $T_A$  נורמלית מעל  $\mathbb{F}^n$  אם הסטנדרטי. בפרט מתקיים עליה המשפט הספקטרלי. גם אם  $A$  ממשית, הע"ע עלולים להימצא מעל  $\mathbb{C}$  (לא אם היא צמודה לעצמה, ואם מעל  $\mathbb{R}$ ).  
**משפט 142.** יהי  $\exists! p \in \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]: \forall i \in [n]: i \neq j \implies x_i \neq x_j \implies x_i \dots x_n, y_1 \dots y_n \in \mathbb{R}$ . נניח  $p(x_i) = y_i$  עד לכדי חזרות (באופן שקול: נניח  $p$  מותוקן)

הוכחה. ידוע שהפולינום מהצורה  $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})(a_0 \dots a_{n-1})^T$ . למעשה, קיבל את מטריצת ונדרמן:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}}_a = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_y$$

VIDOU שחדדרמאננטה של  $V$  היא מטריצת ונדרמן והיא  $(\prod_{i < j} (x_i - x_j))$ , שאינה אפס מבהנה ש- $x_i \neq x_j$ , ולכן  $\det(V) \neq 0$ . קיים ויחיד פתרון, הוא  $a$ , שמנדרם באופן יחיד את מקדמי הפולינום.  
**אם**  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: f(\alpha) = 0 \iff f \in \mathbb{R}[x]$ . הוכחה: נניח בשיליה, אז  $\bar{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}: f(\bar{\alpha}) = 0 \neq f(\alpha) = f(\bar{\alpha})$ . אזי  $f(\bar{\alpha}) = 0$ .

**הערה 56.** הפולינום שמקיים זאת נקרא פולינוס גראנג' והוא בונה אינטראופולציה דהיינו לפחות אחד יקרה חישובית. ניתן לחשב את הפולינום מפירושות באופן הבא:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \left( y_i \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

**משפט 143.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  נורמלית, אז קיים פולינום  $\exists f \in \mathbb{R}[x]: f(A) = B$  מתחלפות. הערה: באופן כללי התנאי ש- $B = A$  מתקיים **אך לא הכרחי** לכך  $B = A$  מתחלפות.

הוכחה. עבור  $A$  נורמלית מהמשפט הספקטרלי קיים בסיס אורתונורמלי המכון ולכון קיימת  $P$  הפיכה כך  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ . לכן  $f \in \mathbb{R}[x]: f(x_i) = \bar{x}_i$  ונשתמש במשפט לפיו יש פולינום  $f$  כך ש- $f(x_i) = \bar{x}_i$  ובפרט  $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ . אזי  $f(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n$ .

$$f(\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)) = \text{diag}(f(\lambda_1) \dots f(\lambda_n)) = \text{diag}(\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n)$$

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P = P^{-1}A^*P \implies f(A) = A^*$$

עוד נבחן ש- $\deg f = n - 1$ .

**משפט 144.** אם  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, אז  $\exists f \in \mathbb{R}[x]: f(T) = T^*$ .

הוכחה. נבחר בסיס א"ג  $A^*: [T^*]_B$ . כבר הוכיחנו שאם  $T$  נורמלית אז  $A^* = [T^*]_B$ , כלומר  $A = [T]_B$ . מוח"ע העברת בסיס  $[T^*]_B = [f(T)]_B = f^*(T) = f(A) = f([T]_B) = [f(T)]_B$ . סה"כ  $f$  מתקיים  $f(T) = T^*$  כדרוש.

אם  $T: V \rightarrow V$  תמי"ם  $-T$ -איונורינטי כך ש- $U \oplus W = B = W \oplus U$ . אם  $B$  בסיס של  $V$ , כאשר קישא של הבסיס הוא הבסיס של  $U$  אז:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_B & \\ & [T|_W]_B \end{pmatrix}$$

בפרט עבור ניצבים  $U \subseteq V \implies V = U \oplus U^\perp$ . ניעזר בכך כדי להוכיח את המשפט הבא:  
**משפט 145.** אם  $U \subseteq V$  תמי"ם איונורינטי ביחס ל- $-T$  אז  $U^\perp$  הוא  $-T^*$ -איונורינטי.

הוכחה. יהיו  $w \in U^\perp$ . רוצים להראות  $T^*w \in U^\perp$ . יהיו  $u \in U$  אז:

$$\langle T^*w | u \rangle = \langle w | Tu \rangle = \langle w | u' \rangle, \quad u' \in U \implies \langle w | u' \rangle = 0 \quad \top$$

**משפט 146.** בעבור  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, אם היא  $U$ -איינוואריאנטית אז גם  $T^*$  הוא  $U$ -איינוואריאנטי.

■ נבחין ש- $T^* = f(T)$  קלשוו, וכן  $U$  הוא  $T$ -איינוואריאנטי ולכן  $U$  הוא  $f(T)$ -אייוו' וכן גמרנו את ההוכחה.

מסימטריות  $U^\perp$  הוא  $T^*$ , מהמשפט גם  $(T^*)$  איינוואריאנטי.

**משפט 147.** هي  $V$  מעל  $\mathbb{R}$  מ"ז וכן  $T: V \rightarrow V$  ט"ל. אז קיימים  $U \subseteq V$  שהוא  $T$ -איינוואריאט וممدو לכל היותר 2.

**משפט 148.** מעל  $(\mathbb{R}, M_2)$ , קיימת צורה כללית למטריצות לא לכיסיות נורמליות.

הוכחה. ננסה להבין מי הוא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  שהן נורמליות. מעל  $\mathbb{C}$  זה פשוט לכיסיות. נבחין ש-:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^* = f(A) \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] = \alpha A + BI, \quad A = \alpha A^T + \beta I = \alpha(\alpha A + \beta I) + \beta I \quad (2.1)$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a + \beta(\alpha + 1) & \alpha^2 b \\ \alpha^2 c & \alpha^2 d + \beta(\alpha + 1) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = 1 \implies A = A + 2\beta I \implies \beta = 0, \quad A = A^T + \cancel{\beta I} \\ (b \wedge c \neq 0) \quad \alpha = -1 \implies A^T = -A + \beta I \implies A + A^T = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \implies b = -c, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ (b \vee c = 0) \implies A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

■ המקרה השני – זה פשוט סיבובים, אבל בನיפוח (כי הדטרמיננטה היא  $a^2 - b^2$ ).

הערה: מעל  $\mathbb{C}$  "זה מטופש" כי הפולינום מתפרק (ווז' המרחב העצמי של ע"ע כלשהו יקיים את זה).

הוכחה. נפרק  $L(x) = m_T(x)$  מינימלי ו- $g(x)h(x) = g(x)h(x)$  גורם אי-פריק כך ש- $\mathbb{R}$  מתקיים  $\deg g \leq 2$  ו- $m_T(x) = g(x)h(x)$ . לכל  $g$  אי-פריק ב- $\mathbb{R}$  מתקיים  $\deg g \leq 2$  ומעלה אחת סימני, אחרת הוא ממעלה 2 לפחות כי בהינתן שורש מרוכב  $a$  פולינום  $g$  גס  $a$  שורש, ואז  $g$  ממעלה  $a$  ממעלה אחת סימני, דהיינו כל שורש מרוכב משוייך לגורם ממשי ריבועי לכל היותר, ומשום ש- $m_T(x) = (x-a)(x-\bar{a}) = (x^2 - |a|^2)$  מתפרק מעל המרכיבים, ניתן לסקם ש- $g$  מדרגה 2 לכל היותר.

- אם  $g$  ממעלה 1 או  $\lambda = x$  כלשהו ואז  $\lambda$  הממשי של  $\lambda$  הממשי, מרחב ממעלה  $\leq 1$  המקיים את הדרוש.
- אם  $\deg g = 2$  בה"כ ניתן להניח  $g$  מתוקן (נעביר את הקבוע  $h$ ). אז  $g(x) = x^2 + ax + b$  או  $g(x) = x^2 + bx + a$  אינו הפיך (מלמת החלוקה לפולינום מינימלי) ככלומר  $v \in \ker g(T)$  לא- $0$ .

$$(T^2 + aT + bI)v = 0 \implies T^2v = -aTv - bv$$

ולכן  $U = \text{span}(v, Tv)$  תמי'ו עם ממד לכל היותר 2 וגם  $T$ -איינוואריאנטי.

■ סה"כ בשני המקרים מצאנו תמי'ו המקיימים את הדרוש.

**הערה 57.** בעבור  $T$  נורמלית (ולא כללית) הטענה נכון ללא תלות במשפט היסודי של האלגברה.

בעבור נורמליות, מהמשפט הספקטורי ומטיענות קודמות, בעבור  $T: V \rightarrow V$  ממשית קיימים בסיס א"נ  $B$  של  $V$  שבבערו המטריצה המייצגת של  $T$  היא מטריצת בלוקים  $2 \times 2$  מצורפה של:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -a_k & b_k \end{pmatrix}, \lambda_1 \dots \lambda_m \right)$$

כאשר כמובן  $n = 2k + m$

## 2.3.2 ~ מטריצות אוניטריות

**הגדרה 90.** יהי  $V$  ממ"פ. אז  $T: V \rightarrow V$  תקרא אוניטרית אם  $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$  או אורתוגונלית (אם  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ) או  $T^*T = I$ .

במילים אחרות  $T^* = T^{-1}$  (מהגדרת הפיכה).

ברור ש"ל כזו היא נורמלית. **דוגמה.** עבור  $T_\theta$  הסיבוב ב- $\theta$  מעלה, במישור  $\mathbb{R}^2$ , אז  $(T_\theta)^* = T_{-\theta} = T_\theta^{-1}$ . **דוגמה.** עבור  $T$  שקיים מתקיים  $I = T^2$  וכן  $T^* = T^{-1}$  ושה"כ  $T^* = T$ .

**משפט 149.**  $T$  איזומטריה אם ומתקיים אחד מבין הבאים:

$$1. \quad T^* = T^{-1} \quad (\text{ההגדרה})$$

$$2. \quad TT^* = T^*T = I$$

$$3. \quad \forall u, v \in V: \langle Tu | Tv \rangle = \langle u | v \rangle$$

$$4. \quad T \text{ מעבירה כל בסיס א"נ של } V \text{ לבסיס א"נ של } V$$

$$5. \quad T \text{ מעבירה בסיס א"נ אחד של } V \text{ לבסיס א"נ של } V \text{ [מקרה פרטי של 4 בצורה טרויאלית, אך גם שקול!]}$$

$$6. \quad \forall v \in V: ||Tv|| = ||v||$$

$$7. \quad \widehat{u, v} = \widehat{Tu, Tv}$$

כלומר: היא לשמור מכפלת פנימית, גודל וזווית.

**הערה 58.** את קבוצת המטריצות האורתוגונליות מסומנים ב- $O_n(\mathbb{F})$ , ומקובל להתייחס אליה כאל חבורת אбелית ביחס לפעולות ההרכבה. ישנן סוג מיוחד של מטריצות אוניטריות, כאשר ריק מקומות  $| \det A | = 1$ , אלא ממש  $\det A = 1$ . Special Orthogonal Matrix.

האובייקטים הללו קרויה  $SO_n(\mathbb{F})$ , כיור של מטריצות של מטריצות סיבוב מיוחדות שמעוינות אותן -  $\{c \in C: |c| = 1\} \cong SO_2(\mathbb{R})$ .

$SO_3$  שמעוינות בগל הקשר שללה לאלגברת קוורטוריונים.

**הגדרה 91.** העתקה  $T: V \rightarrow V$  (כאשר  $V$  ממ"פ) תקרא איזומטריה אם  $\forall v \in V: ||v|| = ||Tv||$

באופן כללי אוניטרית/orותוגונלית שקולות לינארית (כלומר שם כללי לאורותוגונליות/אוניטריות יהיה איזומטריות).

**הערה 59.** איזומטריה, גם מחוץ לאלגברה לינארית, היא פונקציה ששמירת נורמה/גודל.

**הערה 60.** אפשר להסתכל על מוכנה 4 על איזומטריות לינאריות בעל איזומורפיזם של ממ"פים.

הוכחה. נפרק לריצף גדריות

$$1 \rightarrow 2 \quad \text{אם } TT^* = T^*T = I \text{ אז מהגדרה } TT^* = I = T^{-1}$$

$$2 \rightarrow 3 \quad T^* = T^{-1} \implies \langle Tv | Tu \rangle = \langle v | T^*Tu \rangle = \langle v | u \rangle$$

$$3 \rightarrow 4 \quad \text{נאמר ש-} (v_1 \dots v_n) \text{ א"נ. צ.ל. } (Tv_i)_{i=1}^n \text{ לשם כך נצטרכ לוכיח את שני התנאים - החלק של האורטו והחלק}$$

$$\langle Tv_i | Tv_j \rangle = \langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$4 \rightarrow 5 \quad \text{טרויאלי}$$

$$5 \rightarrow 6 \quad \text{יהי } (v_1 \dots v_n) \text{ בסיס א"נ כך ש-} (v_1 \dots v_n)$$

$$\begin{aligned} v = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i &\implies \|v\|^2 = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \middle| \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2 \\ \|Tv\|^2 &= \left\langle T \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right) \middle| T \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i \right) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i) \middle| \sum_{i=0}^n \alpha_i T(v_i) \right\rangle = \sum_{i=0}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

$$1 \rightarrow 5 \quad \text{מניחים } \forall v \in V: ||Tv|| = ||v||$$

$$T^* = T^{-1} \iff T^*T = I \iff T^*T - I = 0$$

בעבר ראיינו את הטענה הבאה: נניח ש- $S$  צמודה לעצמה וכן ש- $S = 0$ , אז  $S = 0$ . במקרה זה:

$$S := T^*T - I \implies S^* = (T^*T - I)^* = (T^*T)^* - I^* = T^*(T^*)^* - I = S \implies S^* = S$$

והיא אכן צמודה לעצמה. עוד נבחן ש-:

$$\langle Sv | v \rangle = \langle (T^*T - I)v | v \rangle = \langle T^*Tv | v \rangle - \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle - \langle v | v \rangle = ||Tv||^2 - ||v||^2 = 0$$

השווין האחרון נקבע מההנחה היחידה שלנו ש- $\|Tv\| = \|v\|$ . סה"כ הוכחנו  $TT^* - I = 0$ . ■

**משפט 150.** תהי  $T: V \rightarrow V$  איזומטריה, ו- $\lambda$  ע"ע של  $T$ . אז  $|\lambda| = 1$ .

הוכחה. יהי  $v$  ו"ע של הע"ע  $\lambda$ . אז:

$$|\lambda|^2 \langle v | v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v | v \rangle = \langle Tv | Tv \rangle = \langle v | v \rangle$$

**הערה 61.** מעל המרכיבים לא מתקיים בהכרח  $\{1, -1\} \in \lambda$ , בעוד מעל המשאים כן. שימוש לב שיש אינסוף מספרים המקיימים  $= 1$  מעל המרכיבים, הם התמונה של  $\lambda x \in \mathbb{R}$ .  $e^{ix}$

**הדרה 92.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . אז  $A$  תקרא אוניטרית/אורותוגונלית אם  $A^* = A^{-1}$ .

**משפט 151.** אוניטריות  $A^* = I$ .

**משפט 152.** אורותוגונליות  $A^* = I$ .

**הערה 62.** אוניטריות בה משwon unit – היא שומרת על הגודל, על וקטורי היחידה (the unit vectors).

**משפט 153.** תהי  $B$  בסיס א"ג של  $V$  ו- $T: V \rightarrow T$  אז  $T$  אוניטרית/אורותוגונלית אם  $A = [T]_B$  אוניטרית/אורותוגונלית.

הוכחה.

$$AA^* = [T]_B[T^*]_B = [TT^*]_B, I = AA^* \iff [TT^*]_B = I \iff TT^* = I$$

"היה לי מרצה בפתחה שכטב דבר לא מדויק בסיכום, ואז הוריד נקודות לסטודנטים שהסתמכו על זה. הוא אמר שזה מתמטיקה, אתם אחראים להבין מה נכון או לא – גם אם כתבתם שטויות".

**סימון 14.** א"ג = אוניטריות בהקשר של מטריצות (בהקשר של מרובבים – אורותוגונרמל)

**משפט 154.** התאים הבאים שקולים על  $A \in M_n(\mathbb{F})$ :

1. אוניטריות

2. שורות  $A$  מהוות בסיס א"ג של  $\mathbb{F}^n$  (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

3. عمירות  $A$  מהוות בסיס א"ג של  $\mathbb{F}^n$

4. (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

5. (ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית)

הערה שלא קשורה למשפט: נאמר  $[T^*]_B = [T]_B^*$  אם  $B$  בסיס אורותוגונרמלי. עבור בסיס שאינו א"ג זה לא בהכרח מתקיים.

הערה נוספת: זה בערך אמ"מ כי יש כמה מקרי קצה כמו מטריצת האפס.

הוכחה.

1 ↔ 2 נוכחים את הגרירה הראשונה

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \bar{v}_1^T & \dots & \bar{v}_n^T \\ | & & | \end{pmatrix} = AA^* = I \iff \text{א"ג } A \implies v_i \bar{v}_j^T = \delta_{ij}$$

הטענה الأخيرة שקופה לכך ש- $v_1 \dots v_n$  בסיס א"ג (ביחס למ"פ הסטנדרטית של  $\mathbb{F}^n$ )

3 ↔ 1 מספיק להוכיח  $A$  אוניטרית  $A^T = A$  (בגלל השקילות  $2 \leftrightarrow 1$ ). מסימטריה  $(A^T)^T = A$  למשמעות  $A^T = A$  גורר  $A^T = A$ . נוכחים:

$$A^*A = I \implies A^T \bar{A} = I \implies (A^T)^* = \bar{A} \implies A^T(A^T)^* = I$$

4 ↔ 1 נתבונן ב- $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  כאשר  $\mathcal{E}$  הבסיס הסטנדרטי, ו- $T_A(v) = Av$ . לכן  $T_A(v) = A(v)$ . אז  $T_A$  אוניטרית אם  $[T_A]_{\mathcal{E}}$  אוניטרית.

$$\langle Au | Av \rangle = \langle T_A u | T_A v \rangle = \langle u | v \rangle$$

5 תוצאה ישירה מ-4 ↔ 1, שכן מנוסחת הפולרייזציה  $A$  משמרת מכפלה פנימית אמ"מ היא משמרת נורמה.

(2.3.2.1) **צורה נורמלית למטריצה אורתוגונלית**

**סימון 15.** נסמן ב- $A_{\theta_i}$  את מטריצת הסיבוב של  $\mathbb{R}^2$  ב- $\theta$  מעולות, היא:

$$A_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

**שאלה.** מהן המטריצות  $A \in M_2(\mathbb{R})$  האורתוגונליות?

התשוכה. בהינתן  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  מוחייבות העמודות והשורות מוחוות בסיס א"נ:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ a^c + c^2 = 1 \end{cases} \implies a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta$$

עוד נבחין ש- $ac + bd = 0$  כי:

$$AA^T = I \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = I$$

סה"כ מכ"ש- $b^2 + d^2 = 1$  ו- $a^c + c^2 = 1$  נקבל שתי צורות אפשריות:

$$A_1 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \vee A_2 := A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A_{\theta}$$

נבחן ש- $A_2$  הוא סיבוב ב- $-\theta$ , ו- $A_1$  שיקוף ניצב ביחס ל- $\frac{\theta}{2}$ . זה לא מפתיע שכן יתרה מכ"ז, לכיסינה עם ע"ע שני ע"ע -1 ו-1.

"אם היו דומים רצימים תקופות מבחן נורמליות היותם צריים להיוולד בזמן אחר"  
**הערה 63.** לבדיקה שפויות, ננסה לפרק מעל המרוכבים את הצורה שקיבלנו, ואכן:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

בהתאם לכך ש- $1 = |e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}|$  כמצופה מע"ע של מטריצה אוניטרית.

**מסקנה 23 (הצורה הנורמלית של ט"ל אורתוגונלית).** תהי  $T: V \rightarrow V$  אורתוגונלית. אז קיימים בסיס א"נ של  $V$ , שביחס אליו קיימות  $\theta_k \dots \theta_1$  זווית כך שהמטריצה המייצגת את  $T$  היא מהצורה:

$$\text{diag}(A_{\theta_1}, \dots, A_{\theta_k}, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$$

(כאורה אוניטרית לא מעניינת כי היא נורמלית ולכנן לכיסינה אורתונורמלית מהמשפט הספקטורי, וכל הע"עים המרוכבים שלה מגודל 1 בכל מקרה)

הוכחה. ידוע עבור נורמלית:

$$A = \begin{pmatrix} \left[ \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{array} \right] & & & \\ & \ddots & & \\ & & \left[ \begin{array}{cc} a_m & b_m \\ -b_m & a_m \end{array} \right] & & \\ & & & \lambda_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

נסמן  $(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{smallmatrix})$ . במקרה זהו משום שהיא אורתוגונלית על  $\mathbb{R}$  אז  $1 = \pm 1 = |\lambda_i|$ . נתבונן במטריצה  $\square_i$  כלהלן, אז  $\square_i$  הנפרש ע"י  $U_{u_k, u_{k+1}} =: U$  מקיים:

$$[T|_U]_{B_U} = \square_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \quad [Tu_k]_{U_B} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}, \quad [Tu_{k+1}] = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

ומשום שהצמצום של אורתוגונליות על מ"ו  $T$ -אינו אריאנטי היא עדין אורתוגונלית, והראנו שהאורתוגונליות ב- $M_2(\mathbb{R})$  הן מטריצות הסיבוב/השיקוף+סיבוב לעיל. המטריצה של שיקוף+סיבוב ב- $\frac{\theta}{2}$  (או שסומנה לעיל ב- $A_1$ ) לכסינה ולכון תחפוך לע"ע ■ (עד לכדי סדר איברי בסיס) שם בהכרח מוגול  $1 \pm$  בכל מקרה, ויבלוו בשאר הע"ע, ובכך סיימנו.

אבל האם הייצוג ייחיד? ננסה להבין את ייחidot הייצוג עבור נורמלית כללית, ומשם לגזר על אורתוגונליות. **משפט 155**. כל שתי מטריצות בקרה לעיל שמייצגות את אותה  $V \rightarrow T$ : נורמלית, שותה עד כדי סדר הבלוקים על האלכסון.

(יש כאן מה להוכיח רק בעבור  $\mathbb{R}$ , שכן מעל  $\mathbb{C}$  לכסינה בכל מקרה, והע"ים וריבויים לא משתנים כתלות בייצוג).

הוכחה. ידוע שבעבור  $\mathbb{R}$ , שכן מעל  $\mathbb{C}$  לכסינה בכל מקרה, והע"ים וריבויים לא משתנים כתלות בייצוג):

$$f_T(x) = \left( \prod (x - \lambda_i) \right) \left( \prod (x^2 - 2a_i x + a_i^2 + b_i^2) \right)$$

כאשר המכפלה הראשונה באה מהע"ים והשנייה מהריבויים  $\square_i$ . נבחין שלכל  $\lambda_i$  נקבע ביחידות, ולכון  $b_i$  נקבל ביחידות עד כדי סימנו (נסיק זאת מהפולינום האופייני). ברור שהע"ים נקבעים ביחידות עוד מההרצאות הראשונות. ■

از מאיפה בה שניי הכוון של  $\square$ , בעבור מטריצות אורתוגונליות? כמובן, מדובר  $A_{\theta_i}$  שcola  $\lambda_{-\theta_i}$ ? זאת כי הן דומות באמצעות ההתקה שהופכת את הצירים, מה שsequential להחליף את עמודות  $A_{\theta_i}$ .

**תרגיל.** חשבו: (כולל פתרון)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

מכאן נסיק שאכן המטריצות הללו דומות עד לכדי שניי בסיס, וזה הסיבה שלא איכפת לנו מהסימן של  $b$ . **הערה 64.** למעשה, משום שהמטריצות  $\square_i$  אין פריקות למרחבים אינואրיאנטים קטנים יותר, ולכון נוכל להפוך את כל הבלוקים על המטריצה ולקבל בלוקי ג'ורדן, שכבר אנחנו יודעים שהם ייחדים.

### (2.3.2.2) המשפט הספקטלי בניסוח מטריציוני

**משפט 156 (המשפט הספקטלי "בשפה קצת מטריציונית").** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה צמודה לעצמה. אז קיימת מטריצה  $P$  אורתוגונלית/אוניטרית (בהתאם לשדה ממנו יצאנו), ומטריצה אלכסונית  $D$  כך ש-  $D = P^{-1}DP$

כלומר – מטריצת מעבר הבסיס של המשפט הספקטורי, שמעביר אותנו לפירוק הספקטורי, היא איזומטריה. למעשה חיקנו את המשפט הספקטורי – המעבר לבסיס המלכון, מסתבר להיות מיוצג ע"י מטריצות איזומטריות.

המטריצה מדגישה שלא השתמשנו במשפט זהה בכלל בסיסים וקטורים – אפשר לתאר את עולם הדיוון של המטריצות, מעצם היותו עולם דיוון איזומורפי להעתקות ומרחבים וקטורים, בלי לדבר בכלל על העתקות ומרחבים וקטורים. המשפט מתאר באופן טהור מטריצות בלבד.

**למה 14.** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה ריבועית, וכן  $\{e_1 \dots e_n\}$  בסיס א"נ של  $V$ . נניח ש-  $A$  היא מטריצה המעביר מבסיס  $\{v_1 \dots v_n\}$  ל-  $\{e_1 \dots e_n\}$ . אז  $A$  איזומטריה אם ו רק אם  $\{v_1 \dots v_n\} \rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$

הוכחת המשפט. תהי  $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  כך ש-  $T_A(x) = Ax$ . אז  $A = [T_A]_{\mathcal{E}}$  כאשר  $\{e_1 \dots e_n\} = \mathcal{E}$  הבסיס הסטנדרטי. ידוע של-  $T_A$  יש בסיס אורתוגונormal מלכון, כלומר קיימים בסיס א"ג  $\mathcal{B}$  כך ש-  $[T_A]_{\mathcal{B}} = D$  כאשר  $D$  אלכסונית כלשהנית. נבחין ש-  $[T_A]_{\mathcal{B}} = P$  ונבחין ש-  $[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$  ו/or להמה  $P = [Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}[T_A]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}[T_A]_{\mathcal{E}}[Id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$  מטריצת מעבר מבסיס א"ג לבסיס א"ג ולכון איזומטריה. סה"כ הראננו את הדורש. ■

"יאללה הפסקה? לאם"

## 2.3.3 ~ פירוק פולאורי

## (2.3.3.1) מבוא, וקישור לתבניות בי-ילינאריות

**הערה 65.** עבור מטריצות אורתוגונליות, במקרה של  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  נקבל ש-

$$A = P^{-1}DP \implies PP^T = I \implies P^{-1} = P^T \implies A = P^TDP$$

מה שמחזיר אותנו לתבניות בי-ילינאריות. נוכל לקשר את זה לסינגולריה. זאת כי  $A$  לא רך דומה, אלא גם חופפת ל- $D$ . גם מעל  $\mathbb{C}$  נקבל דברים דומים, אך לא במדויק, שכן מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{C}$  היא ססקו-יבי-ילינארית פשוטה בי-ילינארית.

**משפט 157.** עבור  $A \in M_n(\mathbb{C})$  נורמלית, אז

$$A^* = A \quad (\text{צמודה לעצמה}) \quad \text{אם } "m \text{ כל הע''ים שליה ממשיים.} \bullet$$

$$\text{אם } "m \text{ כל הע''ע שליה מנורמה.} \bullet$$

הוכחה. את הכוון  $\Leftarrow$  כבר הוכחנו במשפט קודם. נותר להוכיח את הכוון השני.

- נניח שכל הערכים העצמיים ממשיים, ו- $A$  נורמלית. נוכל להשתמש במשפט הספקטורי לעיל: לנכון קיימות מטריצה אוניטרית  $P$  ואלכסונית  $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ . ידוע  $A = P^{-1}\Lambda P$ .

$$A^* = P^* \Lambda^* (P^{-1})^* = P^{-1} \Lambda P = A$$

כי  $I = PP^*$  ו- $\Lambda$  אוניטרית (או  $\Lambda$ -transpose לא עושה שום דבר) מעל  $\mathbb{R}$  (או החזמה לא עושה שום דבר).

- נניח  $A$  נורמלית וכל הע''ע מנורמה. 1. נכיח  $A$  אוניטרית. עבור הפירוק הספקטורי לעיל  $A = P^{-1}\Lambda P$  נקבל כאן ש- $\Lambda$  אוניטרית, ומהמשפט הספקטורי  $P$  אוניטרית גם כן.  $A$  מכפלה של 3 אוניטריות ולכן אוניטרית.

(הסיבה שמכפלה של אוניטריות היא אוניטרית: עבור  $A, B$  א''ג מתקיים

$$\forall v \in V: \langle ABv | ABv \rangle = \langle Bv | Bv \rangle = \langle v | v \rangle$$

משמרת מכפלה פנימית, וזה שקול להיוותה אוניטרית ממשפט לעיל)

**זיכורת:** אם  $V$  ממ''פ מעל  $\mathbb{F}$ , או  $V \rightarrow T: T \in V$  תקרה חיוכית או איז-שלילית (וכו') אם  $T^* = T = 0$  וגם  $0 \neq v: \langle Tv | v \rangle \geqslant 0$ .

**זיכורת:** מעל  $\mathbb{R}$ , הוכחנו שלכל תבנית סימטרית, יש יציג יחיד באמצעות מטריצה אלכסונית עם  $0, 1, -1$  על האלכסון.

**סימון 16.** הסיגנטורה של  $f$  תסומן ע''י  $\sigma_-(f), \sigma_0(f), \sigma_+(f)$  כמספר האפסים, האחדים וה- $-1$  ב- $f$ .

**המשך:** כל מטריצה סימטרית חופפת למטריצה יחידה מהצורה לעיל.

**משפט 158.** נניח ש- $A$  מייצגת את התבנית הסימטרית  $f$  (עלם הדין מעל  $\mathbb{R}$ ). אז, הסיגנטורה שווה  $\#(\lambda | \lambda > 0) - \#(\lambda | \lambda < 0)$  עבור  $\lambda$  ע''ע עם חזירות (במידה ושיק לייתר מוי''ע היחיד). באופן דומה  $\#(\lambda | \lambda < 0) - \#(\lambda | \lambda > 0)$  כאשר  $\lambda$  ע''ע.

הוכחה. משום ש- $A$  מייצגת סימטרית אז  $A$  סימטרית. לפי המשפט הספקטורי קיימת  $P$  אורתוגונלית ו- $\Lambda$  אלכסונית כך ש- $A = P^{-1}\Lambda P = P^T\Lambda P$ . דומה לאלכסונית ממשית (כי  $A$  סימטרית ולא סתם נורמללית) וחופפת אליה. בעזרת נרמול המטריצה  $\Lambda$  האלכסונית (ניתן לבצע תהליך נרמול באמצעות פועלות שקולות תחת חפיפה), היא חופפת למטריצה מהצורה  $\text{diag}(1 \dots 1, -1 \dots -1, 0 \dots 0)$  כאשר הסימן נקבע לפני הנרמול. ■

**הערה 66.** בניוסחים אחרים, מדברים על  $A$  הרミטי, במקומות על  $f$  סימטרית. שימושו לבבכל מקרה אין משמעות למשפט מעלה המרוכבים (שכן במקרה זה  $\text{rank } f = \sigma_- + \sigma_+ = 0$ ) וכן כל מספר מרוכב יוכל לנורמל ל- $1$ ) ולכן שני הניסוחים חזקים באותה המדידה.

**מסקנה 24.** מכאן, שבгинטן  $A$  מטריצה הרמייטית חיובית, היא מייצגת התבנית בי-ילינארית חיובית וגם מייצגת העתקה חיובית. למעשה, אפשר להוכיח שGINTAN  $A$  הרמייטית, היא חיובית (בהבט של המכפלה הפנימית) אם ו רק אם היא חיובית (בהבט של התבנית בי-ילינארית).

**משפט 159 (קיים שורש לצמודה לעצמה איז-שלילית).** תהי  $V \rightarrow T: T$  צמודה לעצמה ואי שלילית  $0 \geqslant \langle Tv | v \rangle$ , אז קיימת  $R^2 = T$  איז-שלילית צמודה לעצמה כך  $R: V \rightarrow V$  איז-שלילית צמודה לעצמה אי-שלילית כל הע''ע הם אי-שליליים.

הוכחה. **קיימים.** מהמשפט הספקטורי קיים בסיס א''ג של ו''ע להעתקה איז-שלילית כל הע''ע הם אי-שליליים.

$$[T]_B^B = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) \quad [R]_B^B = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n})$$

(ראינו זאת בתרגול). עוד נבחן ש- $R$  צמודה לעצמה כי ע"ע ממשיים. **חידות.** נבחן שכל ו"ע של  $T$  הוא ו"ע של  $R = (e_1 \dots e_n)$ ,  $i \in [n]$ , והוא בסיס מילכון, ואז עבור  $R$  צמודה לעצמה כלשהי מתקיים: אז ו"ע של  $R$  עם ע"ע  $\sqrt{\lambda}$  הוא ו"ע של  $T$  עם ע"ע  $\lambda$  כי:

$$\lambda v = R^2 v = T v \implies R v = \sqrt{\lambda} v$$

הगירה נכונה מאיד-שליליות  $R$  שהמשפט מניח עליה ייחדות. לעומת הערכים העצמיים של  $R$  כלשהו (לא בהכרח או שברחנו בהוכחת הקיום) נקבעים ביחסות מע"ע של  $T$ . בסיס של ו"ע של  $T$  הוא בסיס ו"ע של  $R$ , סה"כ ראיינו איך  $R$  פועלת על בסיס ו"ע כלשהו של  $T$  מה שקובע ביחסות את  $R$ . ■

**סימן 17.** את ה- $R$  לעיל נסמן :=  $R$ .

**מסקנה 25 (פירוק שולסקי).** לכל  $A$  צמודה לעצמה ואי-שלילית חיובית קיים פירוק יחיד של מטריצה  $R$  משולשית עליונה כ- $A = RR^*$ .

**משפט 160 (לכטון סימולטני).** מעל  $\mathbb{R}$ , בהינתן  $A$  מוגדרת חיובית ממש ו- $B$  מטריצה, שתיהן סימטריות, קיים בסיס  $\mathcal{P}$  בו  $[A]_{\mathcal{P}}$  אלכסונית וגם  $[B]_{\mathcal{P}}$  אלכסונית.

הוכחה. נפרק ספרקטלית של  $A$  ונקבל  $A = P \Lambda_A P^T$  מוגדרת ביחסות ועל איבריה הסינגולור של  $A$ , שהם כולם 1 מחיותה מוגדרת חיובית, כלומר,  $\Lambda_A = I$ . באופן דומה נוכל לפרק ספקטרלית את  $PBP^T$  ולקבל  $PBP^T = QPBP^TQ^T = \Lambda_B M = QP$  ומכאן  $M = QPBP^TQ^T = \Lambda_B$ . בסימן  $\mathcal{P} = \text{Col}(M)$  נקבע  $[B]_{\mathcal{P}} = \Lambda_B$ , וכך:

$$[A]_{\mathcal{P}} = MAM^T = \underbrace{QPAP^T}_{I} Q^T = QIQ^T = I$$

כלומר  $[A]_{\mathcal{P}}$  כדרוש. ■

### 2.3.3.2) ניסוח הפירוק הפולארי

**משפט 161 (פירוק פולארי עבור העתקות).** תהי  $V \rightarrow V$  חיובית וצמודה לעצמה  $R: V \rightarrow V$ : הפיכה, או קיימות  $T: V \rightarrow V$  חיובית וצמודה לעצמה  $T = RU$  אוניטרית כך ש- $R$  הוא ה- $U$ . **הערה 67.** לא הנחנו  $T$  צמודה לעצמה. הפירוק נכון להעתקה הפיכה כללית. **הערה 68.** לעיתים נקרא "פירוק Uh" או "פירוק UP".

הוכחה. נגדיר  $S = TT^*$ . נבחן ש- $S$  צמודה לעצמה וחובית:

$$\forall V \ni v \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\|^2 > 0$$

האי-שוויון האחרון נכון כי  $\ker T^* = \{0\}$ ,  $\ker T = \{0\}$ ,  $\ker T^* = \ker T$ , ו- $v \neq 0$ . יצא שהוא חיובי ולכן בפרט ממשי. ככלומר הוא צמודה לעצמה וחובית.

קיימות ייחידה  $R: V \rightarrow V$  צמודה וחובית כך ש- $R = \sqrt{S}$ . כל ערכיה העצמיים של  $R$  אינם 0, ולכן היא הפיכה (ראינו בהוכחה של קיומה שהיא לכסינה ייחודי  $S$ ). נגדיר  $U = R^{-1}T$ . נותר להראות ש- $U$  אוניטרית.

$$U^*U = (R^{-1}T)^*(R^{-1}T) = T^* \underbrace{(R^{-1})^*}_{R^{-1}} R^{-1}T = T^*(R^{-1})^2T = T^*S^{-1}T = T^*(TT^*)^{-1}T = I$$

כדרוש. הטענה מושום ש- $R$  צמודה לעצמה. ■

**הערה 69 (לגבוי ייחודות).** אם  $T$  אינה הפיכה, מקבלים ש- $R$  יחידה אבל  $U$  אינה. בשביל לא הפיכות נctrיך להצטמצם בסיס של התמונה ועליו לפרק כמתואר לעיל. במקרה של הפיקות אז  $T = RU = R\tilde{U}$  ו- $\tilde{U}$  הוא  $\tilde{U} = U$  גם  $U$  הפיכה.

עתה נראה ש- $R$  נקבעת ביחסות (בניגוד ליחסות  $U$  – ייחודות  $R$  נcona גם בעבור פירוק פולארי של העתקה שאיננה הפיכה): **משפט 162.** בפירוק פולארי  $T = RU$ , כאשר  $R$  הרミיטית חיובית, אז בהכרח  $R = \sqrt{TT^*}$  ולכן ייחודה. הוכחה.

$$TT^* = RU(RU)^* = RUU^*R^* = R^2$$

כלומר  $R$  היא בכלל פירוק שורש של  $TT^*$ , והראינו קודם קודם לכן את ייחודות השורש. ■

**מסקנה 26.** קיים גם פירוק כנ"ל מהצורה  $T = UR$

הוכחה. באותו האופן שפרקנו את  $T$ , נוכל לפרק את  $T^* = \tilde{R}\tilde{U}$  פולארי. נפעיל \* על שני האגפים ונקבל:

$$T^* = \tilde{R}\tilde{U} \implies T = (T^*)^* = \tilde{U}^*\tilde{R}^* = \tilde{U}^{-1}\tilde{R}$$

נסמן  $U$  סה"כ  $\tilde{R} =: R$ ,  $\tilde{U}^{-1} =: U$  כדי.

**лемה 15.** עבור  $V \rightarrow V$  אז  $T: V \rightarrow TT^*, T^*T$  נגידר  $S = TT^*$ . נבחן ש- $S$  צמודה לעצמה וחיבורית:

$$\forall V \ni v \neq 0: \langle Sv | v \rangle = \langle TT^*v | v \rangle = \langle T^*v | T^*v \rangle = \|T^*v\| > 0$$

יש אותן הערכים העצמיים.

הוכחה. ניעזר בפירוק הפולארי:

$$\begin{aligned} TT^* &= RUU^*R^* \\ &= R^2 \\ TT^* &= U^{-1}R^2U \end{aligned}$$

סה"כ  $TT^*, T^*T$  הן העתקות דומות ולכן יש להן אותן הערכים העצמיים.

**הערה 70.** אז איך זה הקשור לפולארי?  $R$  הא-שלילית היא "הגדול", בעוד  $U$  האוניטרית לא משנה גודל – היא ה"זווית". ניתן לראות זאת גם באופן הבא: בהינתן  $A = RU$  פולארי ל- $U$  אורתוגונלית ו- $R$  מוגדרת חיובית הרמיטית, אז  $\det A = \det U \det R = re^{i\theta}$  ו- $r$  מקבלים  $|\det U| = 1$  כי  $\det A = |\det R|$ . תהי  $(A \in M_n(\mathbb{F}))$  היפה, אז קיימות  $U, R \in M_n(\mathbb{F})$  כאשר  $U$  א"ג ו- $R$  חיובית צמודה לעצמה כך ש- $A = UR$ .

הוכחה. נסתכל על  $A^*A = P^{-1}DP$ . אז  $A^*A = P^{-1}DP$ , כאשר  $D$  אלכסונית חיובית. ■

## 2.3.4 ~ פירוק SVD

### 2.3.4.1) ניתוח ורוחחת SVD

**הערה 71.** SVD היינו קיצור של Singular Value Decomposition. משפט 164 (גרסה מצומצמת של פירוק לערכים סינגולריים). לכל מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{F})$  קיימות מטריצות אוניטריות  $U, V$  ומטריצה אלכסונית עם ערכים א-שליליים כך ש- $A = UDV$ .

הוכחה. ידוע שניתן כתוב  $\tilde{U}R = A$  פירוק פולארי. משום ש- $R$  צמודה לעצמה, ניתן לפרקה ספרטראלית ל- $V$  אוניטרית ו- $D$  אלכסונית א-שלילית (כי  $R$  א-שלילית) כך ש- $R = V^{-1}DV$ . סה"כ:

$$A = \underbrace{\tilde{U}V^{-1}}_{=:U} DV = UDV$$

כי  $\tilde{U}V^{-1}$  מכפלה של אוניטריות ולכן  $U$  אוניטרית כנדרש.

**הערה 72.** משום ש- $U, V$  איזומטריות אז  $V^* = V^{-1}, U^* = U^{-1}$  ובגלל ש- $D$  אלכסונית אז  $D^* = D$ . לכן:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDV)(V^*D^*U^*) = UD^2U^{-1} \\ A^*A &= (V^*D^*U^*)(UDV) = V^{-1}D^2V \end{aligned}$$

**הגדלה 93 (ערך סינגולרי של מטריצה).** הערכים העצמיים הא-שליליים של  $A^*A$  נקראים הערכים הסינגולריים והם נקבעים ביחידות ע"י  $A$ .

**הגדלה 94 (ערך סינגולרי של העתקה).**  $\sigma$  הוא ערך סינגולרי של העתקה  $T$  הוא אם"מ  $\sigma \in \mathbb{R} \wedge \sigma \geq 0$  ו- $\sigma^2$  הוא ע"ע של  $TT^*$ .

**סימון 18.** את הערכים הסינגולריים של העתקה/מטריצה  $A$  כלשהו נסמן ב- $\sigma_n \dots \sigma_1$  כאשר  $\sigma_i \geq j$ :  $\forall i \geq j: \sigma_i \geq \sigma_j$ .

**משפט 165.** פירוק SVD הוא ייחד (גם למטריצה שאינה ריבועית/הפיתחה), בהנחה שהערכים הסינגולרים שונים.

הוכחה. יהיו שני פירוקי SVD של מטריצה  $A$  הפיכה כלשהי, נסמנם:

$$A = \bar{U}\bar{D}\bar{V}^T \wedge A = UDV^T$$

אז:

$$AA^* = U D^2 U^{-1} = \bar{U}^* \bar{D}^2 \bar{U}^{-1} \wedge A^* A = V^{-1} D^2 V = \bar{V}^{-1} \bar{D}^2 \bar{V}$$

בגלל ש- $\bar{D}^2$ ,  $D^2$  אלכסוניות, ומיחידות הפירוק הספקטורי, נסמן:

$$\bar{U} = \bar{U}, V = \bar{V}, D = \bar{D}$$

#### (2.3.4.2) הרחבת SVD להעתקות שאין אופרטורים

**הערה 73.** בקורס זה, ראינו פירוק SVD של מטריצה ריבועית בלבד. חלק מהזואה של פירוק SVD נובע מקיומו של מטריצה שאינה בהכרח ריבועית, דהיינו, לכל מטריצה סופית. יש לו מגוון רחב של שימושים במדעי המחשב. כדי להבין יותר כיצד פירוק SVD עובד, כתבתו את תורת-הפירוק הזה.

**הדרה 95.** מטריצה  $\Lambda \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  (לא בהכרח ריבועית) מוגדרת להקרא אלכסונית אם  $a_{ij} = 0 \iff i = j$ .

**משפט 166 (גרסה מוגברת של פירוק סינגולריים).** תהי  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  מטריצה ( $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) שאינה מטריצה האפס, אז קיים פירוק למטריצות  $A = U \in M_{n \times n}(\mathbb{F}), V \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$ ,  $U \in M_{m \times m}(\mathbb{F}), V \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$ , כך ש- $UV^T$ .

**הדרה 96.** מטריצה  $A \in M_{m \times n}$  מתאימה למטריצה  $B \in M_{m \times n}$  אם קיימות מטריצות  $U \in M_{m \times m}, V \in M_{n \times n}$  ו- $A = UV^{-1}$ .

למעשה, פירוק SVD הוא התאמת אורטונורמלית ללכינה, בדיקות כמו שפירוק ספקטורי הראו דמיון אורטונורמלי ללכינה (לכsoon אורטונורמלי).

הוכחה. בוקיפדייה האנגלית

**משפט 167.** פירוק SVD יחיד אם מטריצים הסינגולרים שונים.

**מסקנה 27.** תהי  $W \rightarrow T: Q$ . אז קיימים  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  בסיסים אורטונורמליליים כך ש- $T|_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  אלכסוני.

כדי להוכיח מסקנה זו, נשתמש בשורות  $V, U$  שיזנו את הבסיס האортונורמלי הנדרש (עד כדי העתקת קורדינאות).

**משפט 168.** בהינתן  $B$  בסיס אורטונורמלי של  $V$ , והעתקה  $W \rightarrow T: V \rightarrow T$  כלשהי,  $\sigma$  ערך סינגולרי של  $T$  אם  $\sigma$  על האלכסון  $\Sigma$  כאשר  $\Sigma$  המטריצה האלכסונית בפירוק SVD של  $[T]_B$ .

הוכחה. נסמן את פירוק ה-SVD של  $[T]_B = U\Sigma V^T$ . אז ידוע  $[T]_B = U\Sigma^2 U^{-1}$  אורטונורמלית, ולכן  $[T]_B$  דומה ל- $\Sigma^2$ . עוד נבחין שככל  $u$  של  $\Sigma$  אם מופיע על אלכסון  $\Sigma$  הוא מופיע על אלכסון  $\Sigma$ . עתה נוכיח גיריה דרכיוונית. אם  $\sigma$  ערך סינגולרי של  $T$  אז  $\sigma^2$  הוא  $u$  של  $[T]_B$ , ומהדמיוון שהראנו הוא  $u$  של  $\Sigma$  כולם הוא מופיע על אלכסון  $\Sigma$  כדרוש. מהצד השני, אם  $\sigma$  מופיע על אלכסון  $\Sigma$  אז הוא  $u$  של  $\Sigma$  ואז הוא  $u$  של  $[T]_B$ , ומשום ש- $\Sigma$  מוגדרת חיובית אז  $\sigma \geq 0$  ו- $\sigma \in \mathbb{R}$ .

**מסקנה 28.** מספר הערכים הסינגולריים הוא הממד של  $\Sigma$  והדרגה של  $A$ .

**הערה 74.** לבדיקת שוויות, נבחן שהערכים העצמיים של  $\Sigma$  הם אכן "모עמדים" להיות ערכים סינגולריים, שכן היא מטריצה נורמלית וכאן הערכים העצמיים שלה ממשיים, וכן היא מוגדרת חיובית ולכן הערכים העצמיים שלה חיוביים.

**משפט 169.** בהינתן  $W \rightarrow T: V \rightarrow T$  העתקה, מתקיים:

$$\sqrt{\det(T^*T)} = \prod_{i=1}^n \sigma_i$$

כאשר  $\sigma_n \dots \sigma_1$  הערכים הסינגולריים של  $T$ .

הוכחה. ידוע של- $T$  קיים פירוק SVD  $T = U\Sigma V^T$  ממנו נסיק את הפירוק הספקטורי הבא ל- $T^*T$  הצמודה לעצמה:

$$T^*T = U\Sigma^2 U^T$$

אם  $T$  אינה הפיכה אז יש לה ערך סינגולרי, 0, ו- $T^*T$  אינה הפיכה (כי מכפלת לא הפיכות איננה הפיכה) וסיימנו. אם  $T$  הפיכה, את  $U$  הפיכה בהכרח. משום ש- $U$  אוניטרית,  $U^T = U^{-1}$ . נפעיל את  $\det$  על שני האגפים ונקבל:

$$\det(TT^*) = \det(U)\det(\Sigma^2)\det(U^{-1}) = \det(UU^{-1})\det(\Sigma)^2 = \det(\Sigma)^2 =: *$$

בגלל שהוכחנו ש- $\Sigma$  מטריצה אלכסונית של האלכסונה הערכים הסינגולריים של  $T$ , אז קיבל שוויון:

$$* = \left( \prod_{i=1}^n \sigma_i \right)^2$$

נוציא שורש ונקבל את הנדרש.

**מסקנה 29.** עבור  $T$  ריבועית, נוכל לטעון:

$$\left( \prod_{i=1}^n \sigma_i \right) = \det(TT^*) = \det(T)\det(\bar{T}^T) = \det(T)\det(\bar{T}) = \det T \overline{\det T} = \det T^2$$

נוציא שורש ונקבל שהדטרמיננטה של  $T$  היא מכפלת הערכים הסינגולריים:

$$\prod_{i=1}^n \sigma_i = \det T$$

**משפט 170 (פירוק העתקה לערכים סינגולריים).** בהינתן  $V \rightarrow W$ :  $T: V \rightarrow W$  כלשהו, וערכים סינגולריים  $\sigma_r \dots \sigma_1$  כלשהם, אז קיימים ידוע קיום פירוק של  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  לערכים סינגולריים כך ש-:

$$Tv = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

הוכחה. נסמן  $|B| = n \wedge |\mathcal{C}| = m$  בהינתן  $\dim V = n, \dim W = m$ . בהתאם לכך ש- $V, W$  בbasisים  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  אורתונורמליים ל- $W$ , מושפט ידוע ש- $V$  מטריצה עם  $r$  שורות ב- $\mathbb{R}^m$  מohn נמצאים שורות בת"ל  $V_1 \dots V_r$  ובופן דומה  $U$  מטריצה עם שורות  $U_1 \dots U_r$  ב- $\mathbb{R}^n$ . נוכל להניח שהשורות הבת"ל במטריצות האוניטריות היו הראשונות, שכן הערכים הסינגולריים על המטריצה האלכסונית  $\Sigma$  מופיעים לפני שורות/עמודות האפסים (אם יש) ב- $\Sigma$ . כתעת נוכל להגדיר (כאשר  $\cdot^{-1}$  הหมายה להעתקה ההפכית ל- $\cdot$  בסיס  $B$ )

$$\mathbf{u}_i = [U_i]_{\mathcal{B}}^{-1} \quad \mathbf{v}_i = [V_i]_{\mathcal{C}}^{-1}$$

עתה נשאר להראות שהבחירה שלנו אכן עובדת. יהיו  $v \in V$ ,  $a \in \mathcal{B}$ , ונסמן  $(e_1 \dots e_n)$  כבסיס  $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_n)$ . כאשר  $v \in \mathcal{B}$ ,  $a \in \mathcal{C}$ , נקבע:  $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_m)$  הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}^n$  ו- $\mathcal{B}$  הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}^m$ .

$$\begin{aligned} [Tv]_{\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = V \Sigma U^T \cdot (a_1 \dots a_n) \\ &= \sum_{i=1}^n V \Sigma \underbrace{U^T e_i}_{U_i} a_i = V \Sigma \sum_{i=1}^r a_i U_i \\ &= V \Sigma \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n a_i \langle e_j | U_i \rangle e_j \quad \text{ויצוג של } U_i \text{ כ-} \mathbb{R}^n \text{ כביסיס } \mathcal{E} \\ &= V \Sigma \sum_{i=1}^r \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle e_i \quad \text{לייאריות כרכיך הראשוני} \\ &= \sum_{i=1}^r \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle \underbrace{V \sum_{\substack{\sigma_i e_i \\ (Ve_i) \sigma_i = V_i \sigma_i}}}_{i=1} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle V_i \end{aligned}$$

משום ש- $\Sigma$  בסיס אורתונורמלי, אז מעבר מבסיס  $\mathcal{E}$  ל- $\mathcal{B}$  ולהיפך הוא אוניטרי, כלומר  $\langle v | u_i \rangle = \langle [v]_{\mathcal{B}} | U_i \rangle$ . כתעת נפעיל את  $\cdot^{-1}$  על שני האגפים, ונקבל:

$$Tv = \left[ \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle V_i \right]_{\mathcal{B}}^{-1} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle [V_i]_{\mathcal{B}}^{-1} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

כדרושים.

**מסקנה 30.** בהינתן  $g_1 \dots g_r, f_1 \dots f_r$  לעיל, אז:

$$T^*v = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

הוכחה. ניעזר פעמיים באדטיביות רכבי המכפלה הפנימית:

$$\langle T\mathbf{v} | w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i | w \right\rangle = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i | w \rangle = \left\langle v \underbrace{\left| \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \mathbf{v}_i | w \rangle \mathbf{u}_i \right|}_{T^*w} \right\rangle = \top$$

■

#### (2.3.4.3) נורמה של העתקה

**הערה 75.** גם תת-הפרק להלן לא בחומר הרשמי של הקורס. אבל חשוב שזה מוגניב אז הוסיף את זה.

**הגדרה 97.** הנורמה של העתקה  $T: V \rightarrow W$  מוגדרת להיות:

$$\|T\| = \max\{\|Tv\| : v \in V \wedge \|v\| \leq 1\}$$

**הערה 76.** אינטואציית גיאומטרית טובה היא לחשב על  $\|T\|$  הבודר המינימלי שחווסס את  $Tu$  כאשר  $u$  נורמלי. **лемה 16.** כזכור,  $\sigma_1$  הערך הסינגולרי המקסימלי של  $T$ . אז:

$$\|Tv\| \leq \sigma_1 \|v\|$$

הוכחה. מפרק העתקה לערכים סינגולרים:

$$Tv = \sum_{i=1}^r \sigma_i \langle \sigma_i | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

משום ש- $\mathbf{v}_i$  אורתונורמליים, אז  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ . לכן:

$$\|Tv\| = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n \sigma_1 \langle v | \mathbf{u}_i \rangle = \sigma_1 \left( \sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \right) =: *$$

משמעותו, בגלל ש- $\mathbf{v}_i$  בסיס אורתונורמלי אז  $\sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i = v$

$$* = \sigma_1 \left\| \sum_{i=1}^n \langle v | \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i \right\| = \sigma_1 \|v\|$$

ושה"כ אכן  $\|Tv\| \leq \sigma_1 \|v\|$  כדרوش.

■

**משפט 171.** הנורמה של העתקה היא פונקציה חיובית ופחות או יותר לינארית:

$$\|T\| \geq 0 \quad .1$$

$$\|T\| = 0 \iff T = 0 \quad .2$$

$$\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\| \quad .3$$

$$\|S + T\| = \|S\| + \|T\| \quad .4$$

$$\|T\| = \|T^*\| \quad .5$$

**משפט 172.** כאשר  $\sigma_1$  הערך הסינגולרי הגדול ביותר של  $T$ , אז  $\|T\| = \sigma_1$ .

**הערה 77.** שני המשפטים הבאים לא טרויואלים אך מובאים כאן ללא הוכחה, לידע כללי בלבד.

**משפט 173.** בהינתן  $T: V \rightarrow W$  ו- $\sigma_1 \dots \sigma_n$  ערכים סינגולריים, אז:

$$\min\{\|T - S\| : S \in V \rightarrow W \wedge \text{rank } S \leq k\} = \sigma_{k+1}$$

**משפט 174** (משפט המינ-מקס). לכל  $S \in [n], k \in [n]$ , כאשר  $S$  מ"ז:

ובאופן שקול (ודוי היגיוני):

באופן כללי, ערכים סינגולרים משמשים כדי להגיד נורמות רבות על העתקות.

המשמעות

**פרק 3**

**נספחים**

# 3.1

## Dual Spaces . . . . .

את הפרק להלן המרצה של אודיסאה, בן בסקין, החליט להעביר, כדי לתת ראייה נרחבת יותר על לינאריות – מנוקדות מבט של תורה הקטגוריות. הרעיון הוא להבחן בכך ש-(א) בין כל קטגוריה לדואל שלה קיימים פונקטור קונטראינוריאנטי, ו-(ב) הן הצמדת העתקה, והן פונקציונל, הן קטגוריות דו-אליות למרחב הוקטורי, ולכלן איזומורפיות אחת לשנייה (שכן הדואל יחיד עד לכדי איזומורפיזם).

### 3.1.1 ~ הגזרות בסיסיות

**הגדרה 98.** בהינתן  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{F}$ , נגדיר  $.V^* = \hom(V, F)$ .

הבנה. אם  $\dim V = n$  אז  $\dim V^* = n$ . לכן  $V^* \cong V$ . לא נכון במקרה הסופי ממדוי.

**лемה 17.** יהי  $B = (v_i)_{i=1}^n$  בסיס ל- $V$ . אז  $\forall i \in [n]: \exists \psi_i \in V^*: \forall j \in [n]: \psi_i(v_j) = \delta_{ij}$

**משפט 175.** יהי  $V$  מ"ס ו- $(v_i)_{i=1}^n$  איז קיימים ייחיד בסיס  $B^* = (\psi_i)_{i=1}^n$  המקיימים  $\psi_i(v_j) = \delta_{ij}$

הוכחה. נבחין שהבדרנו העתקה לינארית  $\psi: B \rightarrow V^*$ :  $\varphi$  והיא מוגדר לפי מה קורה לבסיס. נותר להוכיח שזה אכן בסיס. יהיו  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{F}$  כך  $\sum \alpha_i \psi_i = 0 = (\sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i)(v_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(v_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{ij} = \sum \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$ . ■

נבחין שאפשר להגיד:

**הגדרה 99.**  $V^{**} = \hom(V^*, \mathbb{F})$

ואכן  $\dim V < \infty$ :

$$V \cong V^* \cong V^{**}$$

במקרה הזה, בניגוד לאיזו' הקודם, יש איזו' "טבעי" (קאנוני), ככלומר לא תלוי באף בסיס. **משפט 176.** קיימים איזומורפיזם קאנוני בין  $V$  ל- $V^{**}$ .

הוכחה. נגדיר את האיזו' הבא:

$$\psi: V \rightarrow V^{**} \quad \psi(v) =: \bar{v} \quad \forall \psi \in V^*: \bar{v}(\psi) = \psi(v)$$

nocich shahua izoo':

• ט"ל: יהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ,  $v, u \in V$ . אז:

$$\psi(\alpha v + \beta u) = \overline{\alpha v + \beta u} \stackrel{!}{=} \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}$$

nocich zatot:

$$\overline{\alpha v + \beta u}(\varphi) = \varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha \varphi(v) + \beta \varphi(u) = \alpha v(\varphi) + \beta u(\varphi) = (\alpha \bar{v} + \beta \bar{u})(\varphi) = (\alpha \psi(v) + \beta \psi(u))(\varphi)$$

• חח"ע: יהי  $\psi \in \ker \psi$ . רואים להראוות  $v \in \ker \psi$ .

$$\forall \varphi \in V^*: \bar{(\varphi)} = 0 \implies \forall \varphi \in V^*: \varphi(v) = 0$$

אם  $v$  אינו וקטור האפס, נשלימו לבסיס  $(v_i)_{i=1}^n$  ואמ  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  בסיס הדואלי אז  $\varphi_1(v) = 1$  אבל אז  $\bar{v}(\varphi_1) = 0$  וסתירה.

• על: משווין ממדים  $\dim V^{**} = \dim V$ .

■

ככלומר, הפונקציונלים הדואלי השני הם למעשה פונקציונלים שלוקחים איזשהו פונקציונל הדואלי הראשוני ומצביעים בו וקטור קבוע.

### 3.1.2 ~ איזומורפיות למרחבי מכפלה פנומיות

#### (3.1.2.1) העתקה צמודה (דו-אלית)

**סימון 19.** לכל  $V \in \mathcal{V}$  ו- $v \in V$  נסמן  $(\varphi, v) = \varphi(v)$ .  
**הערה 78.** סימון זה הגיוני משום שהכNST וקטור פונקציונל דו-אלית איזומורפי למכפלה פנימית.  
**משפט 177.** יהיו  $V, W$  מ"וים נוצרים סופית מעל  $\mathbb{F}$ ,  $T: V \rightarrow W$ . אז קיימת ייחידה  $T^*: W^* \rightarrow V^*$  כך ש- $T^*(\psi, T(v)) = (\psi, v)$ .  
 אם לצייר דיאגרמה:

$$V \xrightarrow{T} W \cong W^* \xrightarrow{T^*} V^* \cong V$$

(תנסו לצייר את זה בшибוע, ש- $W, W^*, V^*$  למטה, כדי להבין ויזולאית למה זה הופך את החצים) בرمאה המתמטית, בתורת הקטגוריות, יש דבר שנקרה פנטור – דרך זהות בין אובייקטים שונים במתמטיקה. מה שהוא עושה, לדוגמה, זה להעביר את  $\text{hom}(V, W)$  – מרוחבים וקטרים סוף ממדים – למרחב המטריצות. הדבר הזה נקרא פנטור קו-וריאנטי. במקרה לעיל, זה פנטור קו-נטרא-ווריאנטי – שימוש ב- $T^*$  הופך את החצים. (הרחבת של המרצה) אז אפשר להגיד פנטור אбел במקום זה העשא את זה בשפה שאנו מכירים – לינארית 1א. בהינתן  $\psi \in W^*$ , נרצה למצוא  $T^*(\psi) \in V^*$ .

$$T^*(\psi) = \psi \circ T$$

ברור מדוע  $T^*: W^* \rightarrow V^*$ : בעצם, זה איזומורפיזם ("בשפת הפנטורים") קאנוני. עוד קודם לכן ידענו (בגלל ממדים) שהם איזומורפים, אך לא מצאנו את האיזומורפיזם ולא ראיינו שהוא קאנוני.

$$\tau: \text{hom}(V, W) \rightarrow \text{hom}(W^*, V^*) \quad \tau(T) = T^*$$

היא איזומורפיזם.

(הערה: תודה למרצה שנעה לבקשתי ולא השתמש ב- $\text{phi}\{/varphi\}$  אחרי שעשית  $\text{phi}\{/varphi\}$ :/renewcommand/phi{})  
 הוכחת לינאריות. יהיו  $\alpha \in \mathbb{F}, T, S \in \text{hom}(V, W)$  אז:

$$\tau(\alpha T + S) = (T + \alpha S)^*$$

יהי  $\psi \in W^*$ , אז:

$$(T + \alpha S)^*(\psi) = \psi \circ (T + \alpha S)$$

יש למעלה פונקציונל ב- $V^*$ . ננסה להבין מה הוא עשה על  $V$ . יהיו  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} [\psi(T + \alpha S)](v) &= \psi((T + \alpha S)v) \\ &= \psi(T)v + \alpha\psi(S)(v) = (\psi \circ T + \alpha\psi \circ S)(v) \\ &= ((T^* + \alpha S^*) \circ (\psi))(v) \\ &= (\tau(T) + \alpha\tau(S))(\psi)(v) \end{aligned}$$

סה"כ קיבלנו לינאריות:

$$\tau(T + \alpha S) = \tau(T) + \alpha\tau(S)$$

nocell להוכיח זאת יותר בפשטות עם הנוטציה של "המכפלה הפנימית" שהגדכנו לעיל,  $(\varphi, v)$ . עתה נוכיח ש- $\tau$  לא רק לינארית, אלא מוגדרת היטב.

הוכחה.

- **חח"ע:** תהי  $\tau$  העתקה האפס. נניח בשליליה ש- $0 \neq T = T^* = 0_{\text{hom}(W^*, V^*)}$ . נרצה להראות ש- $T \in \ker \tau$ . נשים לב בסיס  $L$ - $W$ . יהי  $(T(v) = w_1, w_2 \dots w_n)$  הבסיס הדואלי. אז:

$$\tau(T)(\psi_1) = T^*(\psi_1) = \psi_1$$

או:

$$0 = \tau(T)(\psi_1)(v') = T^*(\psi_1)(v') = \psi_1 \circ T(v') = \psi_1(w_1) = 1$$

סתירה. לכן  $\ker \tau = \{0\}$  ולכן  $\tau$  חח"ע.

- **על:** גם כאן משווין ממדים

**שאלה מבחן שבן עשה.** ("את השאלה זו לא פתרתי בזמן המבחן, ואני די מתבוייש כי אפשר לפתור אותה באמצעות כלים הרבה יותר פשוטים" זהה זה "לא חח" על זה חד-חד ערכי") יהיו  $V, W$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  ו- $(w_1 \dots w_n)$  בסיס של  $W$ . תהי  $T: V \rightarrow W$  הוכחיו שקיימים  $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V^*$  כך שכל  $v \in V$  מתקיים:

$$T(v) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(v) w_i$$

**משמעותו:** בנויגוד למה שבן עשה במחשבון,  $V$  לא בהכרח נוצר סופית.

הוכחת ראש צquier. לכל  $v \in V$  קיימים ויחידים  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  כך ש- $T(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i w_i$ . נגדיר  $\varphi_i(v) = \alpha_i$ . זה

הוכחה "מתוחכמת". נתבונן בבסיס הדואלי  $B^* = (\psi_1 \dots \psi_n)$  שמקיים את הדلتא של קרונקר והכל. נגדיר  $\varphi_i(v) = \sum_{i=0}^n \alpha_i w_i$ . אז:

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(v) w_i = \sum T^*(\psi_i)(v) w_i$$

צ.ל.  $\varphi_i(v) = T^*(\psi_i)(v)$ . אך נבחין שהגדרנו:

$$T^*(\psi_i)(v) = \psi_i(T(v)) = \psi_i \left( \sum_{j=0}^n \alpha_j w_j \right) = \alpha_j$$

■

"הפקת למרצה במתמטיקה כדי להתנקם באחוותך? " כן."

### 3.1.2.2) המאפס הדואלי ומרחב אורטוגונלי

**הגדרה 100.** יהיו  $V$  מ"ו נוצר סופית. יהיו  $S \subseteq V$  קבוצה. נגדיר  $S^0 \subseteq V^*$  קבוצה. נגיד  $\{0\}^0 = V^*$ ,  $V^0 = \{0\}$

דוגמאות.

**משפט 178**

.1.  $S^0$  תמי"ז של  $V^*$ .

.2.

$S \subseteq S' \implies S'^0 \subseteq S^0$

.3.

**משפט 179.** יהיו  $V$  מ"ס  $n$ ,  $U \subseteq V$  תמי"ז. אז  $\dim U + \dim U^0 = n$ .

באופן דומה אפשר להמשיך ולושות:

$$\dim U^0 + \dim U^{**} = n$$

וכן:

$$U \cong U^{**}$$

אייזומורפיים קאנוני. זאת כי:

$$\forall \varphi \in U^0 \forall u \in U: \varphi(u) = 0$$

ומי אלו הוקטורים שיאפסו את  $\varphi$  שמאפס את  $u$ ? הוקטורים ב- $U$  עד לכדי האיזומורפיים הקאנוני מ- $U$  ל- $U^{**}$ . נבחן ש-:

$$[T^*]_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*} = ([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^T$$

כאשר  $\mathcal{A}$  בסיס ל- $V$ ,  $V^*$  בסיס ל- $\mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{B}$  בסיס ל- $W$ ,  $W^*$  בסיס ל- $\mathcal{B}^*$ .

המשך בעמוד הבא

## 3.2 Summary of Notable Result . . . . .

### 3.2.1 ~ סיכום פירוק פרימרי וצורת ג'ורדן

התחלנו בلنנות לכיסו מטריצות. הבחנו שלא כל מטריצה היא לכסינה, ובהו מתקיים  $d < r$  עבור ע"ע כלשהו. את הבעיה הזו תפקנו בשני כיוונים:

- מצאנו את **משפט הפירוק הפרימרי**, שאומר שבහינתו פירוק של הפולינום המינימלי למכפלת פולינומים זרים  $m_T(x) = \bigoplus_{i=1}^r \ker g_i(T)$ , אז  $g_1, g_2, \dots, g_r$  כלומר  $g_i$  הפולינום המינימלי של צמצום  $T$  על המ"ז. גם הראינו שגם במקרה  $m_T(x)$  משמשים בפולינום כלשהו  $f$  המאפס את  $T$  (כלומר  $f(T) = 0$ ) החלק הראשון של המשפט עדיין מתקיים.

از פשוט זרכנו את המשפטזה על העתקה כללית, מעל שדה סגור אלגברית, ואז ראיינו שככל תמי'ו שפירקנו אליו אפשר להגדיר העתקה נילפוטנטית מהצורה  $I\lambda - T$ . את המקה של נילפוטנטיות חקרו בנפרד, וגילינו שאפשר לייצג העתקה נילפוטנטית כמטריצת בלוקים  $\text{diag}(J_{x_1}(0), J_{x_k}(0), \dots)$ . כישירשנו את הבסיסים והוספנו את  $-I\lambda$  בחזרה, קיבלנו את צורת ג'ורדן המתבקשת.

- בצורה אחרת עשינו לבדוק את אותו הדבר. אך במקרה להבטיח את משפט הפירוק הפרימרי ולגלות שדברים עובדים, ניסינו להבין לאילו בדיקת מתחריבים המרחב מתפרק. מצאנו שהמתחריבים האלו הם **המתחריבים העצמיים המורחבים** של  $T$  (והוכיחו את זה ללא תלות במשפט הפירוק הפרימרי), ועליהם כבר יכולנו להגיד הרבה יותר דברים. לדוגמה:
  - הגודל של מ"ז מורחוב המשויך לע"ע הוא הריבוי האלגברי, וכך זהי כמו  $r$  מנותיו הע"ע.
  - העתקה הנילפוטנטית  $I\lambda - T$  במצטצום על המ"ז הזה, בעלת דרגת נילפוטנטיות שהיא הריבוי של  $\lambda$  ב- $T$ , ולכן זה גודל בלוק הג'ורדן המרבי עם ע"ע  $\lambda$ .
  - כל וקטור ב- $(\lambda) V$  המ"ז העצמי הלא מורחוב פותח שרשרת אחרת, וכך  $r$  מנות בלוקי הג'ורדן לע"ע הוא  $\lambda^r = \dim V(\lambda)$ .

הקטע ההפוך, הוא שצורת הג'ורדן היא יחידה עד כדי סדר בלוקים. לכן, כל המסקנות שלנו לגבי איך נראה צורת ג'ורדן שיפתחנו בשיטה כזו או אחרת, תקופות למעשה לכל צורת ג'ורדן של העתקה/מטריצה.

"על הדרך", קיבלנו כל מני תוכאות מעניינות:

- אם הפולינום האופיני מותפרק, האופרטור ניתן לשילוש (בפרט כל אופרטור ניתן לשילוש מעל שדה סגור אלגברית).
  - הפולינום המינימלי מותפרק לגורמים לינאריים שונים, אם ורק אם המטריצה לכסינה, אם ורק אם  $m_T = f_T^{\text{red}}$ .
  - הבחנו בקיום המטריצה המצורפת  $f_A$ , שהראתה לנו שלכל פולינום מותפרק קיימת מטריצה שהוא הפולינום האופיני שלו (הגדرتה מופיע בהמשך הסיכום).
  - ג'ירדון ולכISON הוכחו ככלים ייעלים לפתרת נוסחאות נסיגה לינאריות.
- בדרכ, עברנו דרך תורת החוגים בעיקר כדי לצאת עם שתי התענוגות הבאות:
- חוג הפולינומים הוא תחום אוקלידי (ובפרט ראשי), מה שמאפשר לנו לחלק פולינומים עם שארית.
  - קבוצת הפולינומים המאפסים של  $T$  היא אידיאל, ומהיות חוג הפולינומים תחום ראשי, הוא נוצר על ידי פולינומים מסוימים שסימנו ב- $T^m$  (שמהגדירה הוא המינימלי ביחס להכללה).

### 3.2.2 ~ סיכום תכניות בי-לינאריות

התעניינו באופן מיוחד בשלושה סוגים של תבניות בי-לינאריות:

- תבנית חיובית**, (או א-שלילית וכ'ו'), כזו המקיים  $0 \geqslant (v, u) f$  לכל  $V \in \mathcal{U}$ , מה שקובע להיות התבנית הריבועית שהיא מדירה, חיובית גם היא. התבנית היא חיובית אם הסינגולטורה  $a = s_+$ .
- תבנית סימטרית**. הבחנו שכל התבנית אפשר לפרק לחלק סימטרי וחלק אנטיסימטרי, ותבנית ריבועית מתיחסת לחלק הסימטרי בלבד (ואף שיש זיגוג בין תבניות סימטריות לריבועיות). הבחנו שהמייצגת של התבנית כזו, סימטרית גם. ראיינו שאם נשלב את ההנחה של סימטריות עם התבנית מוגדרת חיובית, אז מקבל מכפלת פנימית.
- תבנית לא-מנומונת**, שמתאפשרת ישירות מהגדרת הרadicel של התבנית. ראיינו שתבנית היא לא-מנומונת אם ומ'ם המטריצה המייצגת שלה הפיכה.

הבחנו שבמידה והמטריצה המייצגת הרימיטית, אז הסימן של הערכים העצמיים קובע את הסינגולטורה (זאת כי פירוק ספקטרלי

הוא לא רק דמיון, אלא גם חפיפה!).

### 3.2.3 ~ סיכום נושא הפירוקים

יש לנו מספר סוגי העתקות שענינו אותן באופן מיוחד:

הגדירה	מ"פ	ע"עים	R/C
אורותוגונלית/אוניטרית	נורמלית	ורטוגונלית/סימטרית	T*
$T^* = T$	$T^* = T^{-1}$	$TT^* = T^*T$	
$\langle Tv   u \rangle = \langle v   Tu \rangle$	$\langle Tv   Tu \rangle = \langle v   u \rangle$	$\langle Tv   Tu \rangle = \langle T^*v   T^*u \rangle$	
$\lambda \in \mathbb{R}$	$ \lambda  = 1$	$Tv = \lambda v \iff T^*v = \lambda v$	

כאשר העתקה אוניטרית/orותוגונלית נקראת באופן כללי **אייזומטריה לינארית**. להגדרות אילן, נلومים המשפטים הבאים:

- **משפט הפירוק הספקטורי ב- $\mathbb{R}$ :** העתקה היא סימטרית אם היא לכיסינה אורותונורמלית.
- **משפט הפירוק הספקטורי ב- $\mathbb{C}$ :** אם העתקה היא נורמלית, אז היא לכיסינה אורותונורמלית.
- $T$  לכיסינה אורותונורמלית אם  $T$  לכיסינה אורותוגונלית (תוצאה ישירה מנגנון).

והבחנה שאם  $A$  מטריצה לכיסינה אורותונורמלית (או מייצגת העתקה לכיסינה אורותוגונרמלית), אז קיימת מטריצה מעבר בסיס  $U$  אוניטרית/orותוגונלית ו- $\Lambda$  אלכסונית כך ש-  $U\Lambda U^* = A$ . בפרט הפירוק הספקטורי של מטריצה הניתנת לכלISON אונטיררי, הוא פירוק ה-SVD שלו.

יש לנו שתי הגדרות לחזיבותו (ושיליות, וכיו"ב):

- **מטריצה מוגדרת חיובית:** אם היא מייצגת תבנית ביילינארית חיובית, כלומר  $0 > x^T Ax > \forall x \in \mathbb{F}^n$ .
- **מטריצה חיובית:** הגדרה מצהיקה שלא מקובלת בשום מקום אחר חז' מבחן הוא, ודורשת ש-  $0 > \langle Av | v \rangle$ . כל העתקה היא חיובית אם תחת יציגו במסיס אורותונורמלי, המטריצה המייצגת חיובית.

למצלנו, ההגדרות מתלכדות במקרים של העתקה או מטריצה עצמה. זהו המקרה הרלוונטי לפירוק פולארי שמספר מטריצה כללית  $A$  כפლ של מטריצה אוניטרית  $U$  ומטריצה הרmittית מוגדרת-חיובית  $P$  כך ש-  $A = UP$  ("לסובב ואז לשנות גודל"). למעשה, לא דיברנו בקורס כלל על מטריצה חיובית (בהבט של  $0 > \langle Av | v \rangle$ ) שאינה צמודה לעצמה, וכאמור במקרה הכללי  $A$  בכל מקרה מוגדרת-חיובית.

כבר ידוע שההעתקה של מטריצה צמודה לעצמה (כלומר הרmittית/סימטרית) הם בהכרח ממשיים. אבל במקרה של מטריצה מוגדרת, נוכל לטעון שמטריצה מוגדרת חיובית אם והיעם אף חיוביים (ובאופן דומה לגבי א-שילית, שילית, וא-חיובי)! בכלל מכללה פנימית היא סימטרית ובפרט צמודה לעצמה, אז כדי לקבוע שהמכלול הפנימי אכן חיובי, יש רק צורך לכסון את התכנית הריבועית כדי לוודא שהיא אכן מכפלה פנימית.

המשך בעמוד הבא

## 3.3 Algorithms . . . . .

הנושא זהה מסכם בקצרה אלגוריתמים מועילים שראויים בתרגולים וצדאי לזכור (אין כאן סיכום מלא של התרגולים).

- **א' לפסונ:** בהינתן  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה.
  - נחשב את  $f_A$ .
  - נמצא את שורשי  $f_A$ . אם אלו מתקשים למצוא את שורשי הפולינום, נמצא את  $f^{\text{red}}$ .
  - לכל  $\lambda_i$ , נמצא בסיס למרחב העצמי באמצעות חישוב  $(\lambda_i I - A)^{-1}$ . איברי הבסיס יהיו הועיים בעבר היע"ע.
  - סה"כ (ב"ה) diag( $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ) המטריצה האלכסונית המתקבלת ע"י מטריצת מעבר הבסיס הנתונה ע"י הועיים מהשלב הקודם.
- **ב' גירזון מטריצה כללית:** תהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  מטריצה שהפולינום האופייני שלה  $f_A(x)$  (ב"ה)
  - מתקיים מעל הרחבה לשדה סגור אלגברית). לכל  $j \in [m]$  נבצע את הפעולות הבאות:
    - נמצא את הפולינום  $f_A(x)$  האופייני ונפרק אותו לכדי גורמים לינאריים.
    - נחשב את  $(A - \lambda_j)^{\ell_j}$  עד שנקבל  $V_{\lambda_j}^{(i)} := \mathcal{N}((A - \lambda_j)^{\ell_j}) = m_i$  (המרחב העצמי המוכל).
  - הערה: אפשר באופן חלופי לחשב את הפולינום המינימלי, שכן ראיינו ש- $m_i$  הריבוי של  $\lambda_i$  ב- $(x)$ .
  - נוחזר על האלגו' למציאת צורת גירזון למטריצה נילפוטנטית:
    - נגידר  $= \emptyset$
    - לכל  $i \in [\ell_j]$  נבצע:
      - \* נמצא בסיס כלשהו  $C_{\lambda_j}^{(i)}$  של  $V_{\lambda_j}^{(i)}$ .
      - \* נוסיף לו את  $C_{\lambda_j}^{(i)-}$ .
      - \* נשלים את  $C_{\lambda_j}^{(i)+}$  לבסיס של  $V_{\lambda_j}^{(i)}$ . נסמן ב- $B_{\lambda_j}$ .
      - \* נוסיף לו את  $B_{\lambda_j}$ .
    - נגידר  $B = \bigcup_{j=1}^m B_{\lambda_j}$  הבסיס המגדן.

ג' **מציאות  $J_n(\lambda)^m$ :** ידוע  $J_n(0) = \lambda I_n + J_n(0)$  מתחלה נקבל מנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(J_n(\lambda)^m)_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 0 & j < i-m \\ \binom{m}{i-j} \lambda^{m-(i-j)} & \text{else} \end{cases}$$

דהיינו:

$$J_n(\lambda)^m = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} \lambda^m & & & & \\ \binom{m}{1} \lambda^{m-1} & \binom{m}{0} \lambda^m & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \binom{m}{m} \lambda^0 & \binom{m}{m-1} \lambda^1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \binom{m}{m} \lambda^0 & \cdots & \ddots & \binom{m}{0} \lambda^m \\ \vdots & 0 & \binom{m}{m} \lambda^0 & \cdots & \binom{m}{m-1} \lambda^1 & \binom{m}{0} \lambda^m \\ 0 & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ד' **גראם-شمידט:** נרצה למצוא בסיס אורתוגונלי/orthonormal למ"פ כלשהו. יהיו בסיס  $v_1 \dots v_n$  של  $V$ .

• **למציאת בסיס אורתוגונלי:** נגידר לכל  $i \in [n]$

$$\tilde{v}_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i | \tilde{v}_j \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot \tilde{v}_j$$

ואז  $(\tilde{v}_n \dots \tilde{v}_1)$  בסיס אורתוגונלי (הבחנה: התהליך רקורסיבי,начיל מ-1=i ונסיים ב-n=i). במידה הצורך נוכל לנормל בסוף ע"י הגדרת:

$$\bar{v}_i = \frac{\tilde{v}_i}{\|\tilde{v}_i\|}$$

ואז  $(\bar{v}_n \dots \bar{v}_1)$  אורתונורמלי מסיבות ברורות.

• **מציאת בסיס אורתונורמלי:** (פחות יציב נומרית מאשר למצוא אורתונורמלי ואז לנормל, אך יותר קל חישובית) נגידר לכל  $i \in [n]$ :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\|\tilde{v}_i\|} \left( v_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i | \bar{v}_j \rangle \cdot \bar{v}_j}_{\tilde{v}_i} \right)$$

בצורה זו נוכל לנормל תוך כדי התהליך.

ה' **אלגוריתם אוקלידי לת חום אוקלידי** (בפרט בעבר פולינומיים ומספרים שלמים): ניעזר בזהות  $\gcd(a, b + qa) = \gcd(a, b)$ . כדי למצוא את  $\gcd(a, b)$ , נחזיר על הפעולה הבאה: בה"כ  $a > b$ , נגידר את  $r = \gcd(a, b)$ , כלומר  $a = bq + r$ ,  $\gcd(b, r) = \gcd(bq + r, r) = \gcd(b, r)$ , ומהגדירה  $N(r) < N(b)$  כאשר  $N(r) < N(b)$ . לכן נוכל להמשיך בתהליך עד שנגיע לזוג  $(b', b')$  שקיים  $\gcd(b', b') = 1$  וואז  $\gcd(a', b') = \gcd(a', b') \cdot \gcd(b', b') = 1$ . בוחן המספרים השלמים לאלגו' סיבוכיות ( $\mathcal{O}(\log(\max\{a, b\}))$ .

ו' **נורמל וקטורי:** נגידר  $\frac{v}{\|v\|} = u$  הוא  $u$  נורמלי.

ז' **בדיקה T-איווריאנטיות:** בהינתן  $B$  בסיס של  $V$  נחשב את  $T(B)$  ונבדוק האם  $W \subseteq T(B)$  ע"י מעבר על כל איבר בסיס וDIR.ו.

ח' **חישוב  $A^{-1}, A^{n+c}$  באמצעות משפט קייל-המיטון:** ידוע  $f_A(A) = 0$ , ואם נשאר גורם חופשי  $0 = \alpha_n A^n + \alpha_0 A^0$  אז נוכל להעביר אגפים ולקבל:  $A^{-1} = \frac{1}{\alpha_0} (\sum_{k=1}^n \alpha_k A^{k-1})$ . כדי לחשב את  $A^{n+c}$  תחילה נחשב את  $A^n$  באמצעות העברת אגפים וקבלת  $A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$  (כי  $\alpha_n = 1$ ). עתה, נכפול ב- $A$  כדי  $c$  פעמים, ומושם שידוע  $A^n$ , בכל חלוקה שבה נקבל  $A^{n+1} = A^{n-1} \cdot A$ . סה"כ נוכל לבטא את  $A^{n+c}$  כקומבינציה לינארית של  $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A^0$ , שעבור מספרי  $k$  קטנים כל לחשב.

ט' **יצוג בבסיס אורתוגונלי:** לכל  $V \in u$  בהינתן  $(v_n \dots v_1)$  בסיס אורתוגונלי, מתקיים  $v_i \cdot v_j = 0$  (אין צורך לחלק בנורמה בעבר אוורתונורמלי).

י' **מציאת היטל אורתוגונלי:** בהינתן  $(u_n \dots u_1)$  בסיס אורתוגונלי של  $U$  תמי"ז, אז  $p_U(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v | u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$  (גם כאן אין צורך לחלק בנורמה בעבר אוורתונורמלי).

לחילופין, אפשר להיעזר בעובדה שהינתן  $u$  המוטל על  $u_n \dots u_1 = U$ , נאמר ו- $u$  היא התוצאה, אז ניתן לבטא  $u = u + u \perp \in U^\perp$ . לשם כך, נסמן ב- $u$  את התוצאה, ואז ידוע  $u = u - u \perp$  כלומר  $u \perp u \in U$ . סה"כ נוכל לבטא  $u$  ככל  $[n] \in i$ . קיבלנו מערכת לינארית מסווגות ב- $i$  נעלמים שאפשר לדרג ולפטור.

יא' **מציאת לבסן אוניטרי/אורותוגונלי** (אם קיים ממשפט הפירוק הספקטרלי):

- נמצא את  $u^\perp$  של העתקה.

• לכל  $u^\perp$ , נמצא בסיס עצמי של  $u^\perp$  ואז נבצע עליו בראמ"שميدט כדי לקבל וקטורים אורתוגונליים/orותונורמליים.

• נשרש את הבסיסים לקבלת בסיס אורתוגונלי/orותונורמלי מלכטן.

בניסוח אחר: ניכנס את העתקה  $T$ , אבל נעשה גראם-شمידט על כל ו- $u$ . כדי להוכיח שאלגו' זה אכן עובד, יש להוכיח את הטענה הנפוצה לפיה כל שני מרחבים עצמיים אורתוגונליים בהינתן העתקה נורמלית.

יב' **מציאת פירוק SVD:** בהינתן  $T$  העתקה, נמצא את הפירוק הספקטרלי של  $T^*T$  ומהזהויות  $TT^* = U\Sigma^2U^*$ ,  $T^*T = V\Sigma^2V^*$ , נקבל  $U\Sigma^2U^* = T^*T$ .

המשך בעמוד הבא

**3.4**

## Recommended Exercises . . . . .

התהנושא הבא כוללתרגילים נפוצים במיוחד, או תרגילים קשים ומעניינים שאספתני מבחני עבר. אני ממליץ בחום לעבור על כלם לקרأتם הבוחן.

**תרגיל 1** (න්පැ). תהי  $T$  מעלה ממ"פ מרוכב, ו-  $h \in \mathbb{F}[x]$  כאשר  $g, h \in \mathbb{F}[x]$  פולינומיים זרים,

$$\text{א' הוכח שאם } T \text{ לכסינה, מתקיים } \ker(gT) = \ker(hT)^\perp$$

ב' הוכח שלכל  $T$ , מתקיים  $\ker gT \oplus \ker hT = V$  (בסעיף זה אין ערך להיות ההעתקה מעלה ממ"פ).

הזרכה: נסו להתחיל מהמקרה של שני ערכים עצמאיים מורחבים, ואז להכליל באמצעות פירוק למורחבים עצמאיים.  $\forall v \in V_{\lambda_n}, \tilde{u} \in V_{\lambda_m} : \langle v | u \rangle = 0$ .

**תרגיל 2** (න්පැ). הוכח שלכל  $T$  נורמלית, עם ע"עים  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , מתקיים לכל  $[k]$  מתקיים  $\ker(T)^\perp = \ker(T^*)$  (זהינו  $V_{\lambda_n}$  ניצב ל-  $V_{\lambda_m}$ ).

**תרגיל 3** (න්පැ). הוכח שלכל  $T: V \rightarrow V$  מתקיים  $\ker(T^*) = \ker(T)^\perp$  וגם  $\text{Im}(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$ .

**תרגיל 4** (න්පැ). הוכח שלכל  $T: V \rightarrow V$  נורמלית, מתקיים:

$$\ker T = \ker T^* \quad \text{א'}$$

$$\text{Im } T = \text{Im } T^* \quad \text{ב'}$$

$$V = \ker T \oplus \text{Im } T \quad \text{ג'}$$

**תרגיל 5** (න්පැ). ללא שימוש בפירוק SVD, הראה שהערך הסינגולרי הגדול ביותר והקטן ביותר חוסמים את הנורמה  $\|Tv\|$ .  $\|v\| = 1$ .

**סוף הקורס ~ 2025B**

מאת שחר פרץ

קוביפל כ- $\text{\LaTeX}$  ווצר באמצעות תוכנה חופשית כלכ