

מבחן בית במתמטיקה בדידה

תשפ"ד, 7.5.2024

הנחיות

- עליכם להגיש את הפתרונות דרך המודל, עד ליום חמישי 9.5.24 בשעה 23:59 ללא איחורים.
- ניתן להגיש קובץ מוקלד או סרוק בכתב יד. אם בחרתם להקליד, לפני ההגשה בדקו שכל הטקסט שכתבתם מיושר כמו שצריך וקריא. אם בחרתם בכתב יד, נא לכתוב בכתב יד ברור, גדול ומרווח, ולהקפיד שהסריקה תהיה ברורה, בהירה, לא מסובבת ולא מטושטשת. פתרון שיוגש בצורה לא ברורה עלול לא להיבדק (ולגרור הורדת ניקוד).
- עליכם לפתור את המבחן לבד. אין להיעזר באף אדם אחר או באינטרנט ואין לשוחח ביניכם על הפתרונות.
- נא לכתוב תשובות מלאות ופורמליות. חוסר פירוט או תשובות לא פורמליות יגררו הורדת ניקוד.
- במבחן 4 שאלות עם סעיפים. יש לענות על כל השאלות.

שאלות

- ענו על הסעיפים הבאים.
 - (א) בסעיף זה נניח כי השערת הרצף נכונה. הוכיחו/הפריכו: קיימת חלוקה Π של \mathbb{R} כך ש- $2^{\aleph_0} < |\Pi|$ וכך שלכל $X \in \Pi$ מתקיים $|X| < 2^{\aleph_0}$.
 - (ב) הוכיחו שקיימת חלוקה Π של \mathbb{R} המקיימת $|\Pi| = 2^{\aleph_0}$ וכך שלכל $X \in \Pi$ מתקיים $|X| = 2^{\aleph_0}$.
 - (ג) נגדיר יחס שקילות מעל $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא: (אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות)

$$R = \left\{ \langle f, g \rangle \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2 : |\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}| \leq \aleph_0 \right\}$$
 מצאו את העוצמה של קבוצת המנה $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})/R$ והוכיחו תשובתכם.
- תהי $\langle A, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה חלש. נגדיר $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ע"י $f(a) = \{b \in A \mid a \preceq b\}$.
 - (א) הוכיחו כי f חח"ע.
 - (ב) נסמן ב- X את קבוצת כל האיברים המינימליים ב- A ונניח $X \neq \emptyset$. הוכיחו/הפריכו: $\bigcup_{a \in X} f(a) = A$.
 - (ג) בהינתן תת קבוצה $B \subseteq A$, נאמר שאיבר $m \in A$ הוא **חסם מלמעלה** של B אם מתקיים $b \preceq m \forall b \in B$. בנוסף, נאמר ש- $m \in A$ הוא **חסם עליון** של B אם הוא חסם מלמעלה של B ולכל $m' \in B$ חסם מלמעלה של B מתקיים $m \preceq m'$. תהי $B \subseteq A$ ונניח שקיים לקבוצה B חסם עליון m . הוכיחו: $f(m) = \bigcap_{b \in B} f(b)$.
- תהי $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה. נאמר שפונקציה $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ היא **שורש** של f אם מתקיים $f = g \circ g$.
 - (א) הוכיחו שאם f פונקציה הפיכה, אז כל שורש של f הוא גם כן פונקציה הפיכה.
 - (ב) מצאו את העוצמה של הקבוצה $A = \{g \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid g \text{ שורש של } f\}$. הוכיחו תשובתכם.
- נגדיר

$$X = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}. f(n^2) = f(n)\}$$
 הוכיחו באמצעות לכסון ש- $|X| \neq \aleph_0$.

בהצלחה!