תרגיל בית 2 ~ אלגברה ליניארית 2א

שחר פרץ

2 באפריל 2025

(1)

נלכסן את המטריצות הבאות:

א) נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ראשית כל, נמצא את שורשי הפולינום האופייני כדי למצוא ע"עים.

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = -x(-1-x) - 1 \cdot 2 = x^2 + x - 2$$

שורשי הפולינום האופייני הם $1, -2$.

נמצא ו"ע לע"ע -2:

$$\mathcal{N}(A+2I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

וסה"כ $(2,-1)$ ו"ע לע"ע -2. נמצא ו"ע לע"ע 1:

$$\mathcal{N}(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

סה"כ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ו־$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ יקיימו $A = PDP^{-1}$ כדרוש.

ב) נלכסן את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

נמצא פולינום אופייני:

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 0 \\ 1 & 4-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (-5-x)((1-x)(4-x)+2)$$

נמצא שורשים:

$$\begin{cases} -5 - x = 0 \implies x = -5 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x_{1,2} = 3, 2 \end{cases}$$

סה"כ $-5, 3, 2$ ע"ע. נמצא ו"ע ל־2 הע"ע:

$$\mathcal{N}(A-2I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ו"ע של 3:

$$\mathcal{N}(A-3I) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

ו"ע -5 ע"ע:

$$\mathcal{N}(A+5I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\ 1 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}0 & -56\\ 1 & 9\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\operatorname{span}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

סה"כ:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ A=P\Lambda P^{-1}$$

ג) נלכסן את המטריצה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ p_A(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix}1-x & 1 & 0\\ 1 & 1-x & 0\\ 0 & 0 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)\begin{vmatrix}1-x & 1\\ 1 & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)((1-x)^2-1)$$

מצאנו את הפולינום. שורשיו:

$$\begin{cases}1-x=0 \implies x=1\\ (1-x)^2-1=0 \implies (1-x)^2=1 \implies \begin{cases}1-x=1 \implies x=0\\ 1-x=2 \implies x=2\end{cases}\end{cases}$$

סה"כ ע"ע $x=0,1,2$ כל השדה $\mathbb{Z}_3$ ע"ע.

נמצא ו"ע ל־0:

$$\mathcal{N}(A-0I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא ו"ע ל־1:

$$\mathcal{N}(A-1I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא ו"ע ל־2:

$$\mathcal{N}(A-2I)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

וסה"כ:

$$\Lambda:=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ P:=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A=P\Lambda P^{-1}$$

. . . . (2) . . . .

יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$, נראה כי ל־AB ו־BA אותו הפולינום האופייני.

א) ראשית כל נוכיח את הטענה במקרה ש־A הפיכה.

הוכחה. משום ש־A הפיכה אז קיימת A^{-1} הופכית לה. אזי:

$$A\cdot BA\cdot A^{-1}=AB\cdot\underbrace{AA^{-1}}_{=I}=AB$$

כלומר, מהגדרה, BA דומה ל־AB. נוכיח שכל שתי מטריצות דומות $C=PDP^{-1}$ בעלות אותו הפולינום האופייני:

$$p_C(x)=\det(C-xI)=\det(PDP^{-1}-xPP^{-1})=\det(P(D-xI)P^{-1})=\det(PP^{-1})\cdot\det(D-xI)=\det(D-xI)=p_D(x)$$

סה"כ משום ש־BA ו־AB דומות, אז הפולינום האופייני שלהן זהה. ■

ב) עתה, נראה את הטענה במקרה ו־$A=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מטריצת בלוקים.

הוכחה. נסמן $B=\begin{pmatrix} B_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ הבלוקים מהם B מורכבת, כאשר B_r בלוק $r\times r$. אז:

$$AB=\begin{pmatrix} B_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_r & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix},\ BA=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_r & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} p_{AB}(x)&=\det\left(\begin{pmatrix} B_r & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}-xI_n\right)=\det\left(\begin{pmatrix} B_r-xI_r & 0 \\ B_3 & -xI_{n-r} \end{pmatrix}\right)=\det(B_r-I_rx)(-x)^{n-r} \\ p_{BA}(x)&=\det\left(\begin{pmatrix} B_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-xI_n\right)=\det\left(\begin{pmatrix} B_r-xI_r & B_2 \\ 0 & -xI_{n-r} \end{pmatrix}\right)=\det(B_r-I_rx)(-x)^{n-r} \\ &\implies p_{AB}(x)=p_{BA}(x) \end{aligned}$$

כדרוש. ■

ג) כעת, נוכיח את הטענה עבור המקרה הכללי.

הוכחה. יהיו A,B מטריצות כלשהן מגודל n מעל שדה $\mathbb{F}$ כלשהו. נסמן $r=\operatorname{rank}A$. נסמן $I_R=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ידוע קיום $P,Q\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות כך ש־$A=PI_RQ^{-1}$, משום ש־$\operatorname{rank}I_R=\operatorname{rank}A$. אזי $AB=PI_RQ^{-1}B$. גם ידוע ש־Q^{-1} הפיכה שכן Q הפיכה וההפיכה להפיכה הפיכה. מסעיפים א' וב':

$$p_{AB}(x)=p_{(PI_RQ^{-1}B)}(x)\overset{\text{א'}}{=}p_{(I_RQ^{-1}BP)}(x)\overset{\text{ב'}}{=}p_{(Q^{-1}BPI_R)}(x)\overset{\text{א'}}{=}p_{(BPI_RQ^{-1})}(x)=p_{BA}(x)$$

וסה"כ $p_{AB}(x)=p_{BA}(x)$ כדרוש. ■

(3)

יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ פולינום מתוקן. נגדיר את המטריצה המלוואה של p להיות:

$$A_p=\begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

א) נראה כי $p_{A_p}(x)=p(x)$.

הוכחה. נמצא את הפולינום האופייני של A_p:

$$\begin{aligned} \det(A_p-xI)&=\begin{vmatrix} -a_{n-1}-x & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \\ &=(-a_{n-1}-x)\underbrace{\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -x \end{vmatrix}}_{D_{n-1}}+\sum_{i=0}^{n-2}-a_iD_i \end{aligned}$$

כאשר $D_i=\det((A_p-xI)_{1i})$. קל להראות באמצעות החלפות ומעברי שורה ש־$D_i=-x^i$. אז קיבלנו:

$$=(-a_{n-1}-x)x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}(-a_i\cdot -x^n)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}a_ix^n=p(x)$$

כדרוש. ■

מעתה ואילך הכל טיוטה, ולא מומלץ לבדוק את זה

ב) נניח שלפולינום $p(x)$ יש n שורשים שונים. נלכסן את A_p.

משום של־$p(x)$ יש n שורשים וגם $p(x)=p_{A_p}(x)$ מסעיף קודם, אז שורשי $p(x)$ הם כל הע"ע של A_p. נסמנם $\beta_1\dots\beta_n$. נמצא ו"ע ל־β_i: ידוע:

$$p(\beta_i)=\beta_i^n+a_{n-1}\beta_i^{n-1}+\cdots+a_0\beta_i^0=0$$

לכן:

$$\mathcal{N}(A_p-\beta_iI)=\mathcal{N}\begin{pmatrix}-a_{n-1}-\beta_i & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0\\ 1 & -\beta_i & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\beta_n\end{pmatrix}$$

אם נכפול את השורה ה־i ב־β^{i-1}:

$$=\mathcal{N}\begin{pmatrix}-a_{n-1}-\beta_i & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0\\ 1 & -\beta_i^{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\beta_n\end{pmatrix}\xrightarrow[R_i\to R_i+R_{i-1}]{\forall 1<i\leq n}$$

$$\mathcal{N}\begin{pmatrix}-p(0) & -a_{n-2}\beta^{n-2} & \cdots & -a_1\beta^1 & -a_0\beta^0\\ 0 & -\beta_i^{n-1} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\beta^{n-2} & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & -\beta_n^1 & -\beta_n^1\end{pmatrix}$$

ג) נתבונן בנוסחאת הנסיגה הבאה:

$$f_n=4f_{n-1}+7_{n-2}-10f_{n-3}$$

ננסח מחדש:

$$f_n=$$