חדו"א 1א - תרגיל 10

1. נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וגזירה ב־(a,b).
נניח כי $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$ הראו כי קיים $c\in(a,b)$ כך ש־$f'(c)\,f(c)=c$.

2. בדקו אילו מהפונקציות הבאות רציפות במידה שווה בתחום הנתון:
   (א) $f(x)=\ln(x)$ כאשר $x\in[1,\infty)$.
   (ב) $f(x)=\ln(x)$ כאשר $x\in(0,1)$.
   (ג) $f(x)=e^x$ כאשר $x\in(0,1)$.
   (ד) $f(x)=e^x$ כאשר $x\in(0,\infty)$.

3. תהי $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה וגזירה ב־$(0,+\infty)$. נניח כי מתקיים $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=5$ הראו כי f רציפה במידה שווה.

4. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש־$f'\geq 0$ ב־(a,b) ובנוסף f' מתאפסת רק בנקודה אחת ב־(a,b).
הוכיחו כי f עולה ממש.

5. היעזרו במשפט קושי (לגרנז' המוכלל), או בכל דרך אחרת, כדי להוכיח את אי־השיוויונים הבאים עבור $x>0$:
   (א) $x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$
   (ב) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$

6. תהי f גזירה בסביבת x וגזירה פעמיים בנקודה x. הוכיחו כי מתקיים
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

7. הוכיחו כי $2x\arctan x\geq\log\left(1+x^2\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

8. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה המקיימת $f(0)=0$. נניח בנוסף כי לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $|f'(x)|\leq|f(x)|$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

9. נתונה הסדרה $a_1=\frac{\pi}{4}$, $a_n=\cos(a_{n-1})$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ כאשר α הוא הפתרון של המשוואה $\cos x=x$.

לא להגשה

1. מצאו נק' מינימום/מקסימום גלובליים עבור הפונקציה $f(x)=x+\frac{1}{x}$ כאשר $x\in\left[\alpha,\frac{1}{\alpha}\right]$ ו־ $\alpha\in(0,1)$.

2. הוכיחו את האי־השיוויונים הבאים:

(א) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x>1$ כאשר $x>0$

(ב) $(e+x)^{e-x}\geq(e-x)^{e+x}$ כאשר $x\in(0,e)$

(ג) $(1+x)^{\alpha}\leq1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\cdot x^{2}$ כאשר $\alpha\in(0,1)$ ו $x\in[-1,1]$

3. תהי $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f'(0)=1$, $f(0)=0$ ו $f''+f\equiv0$.

(א) הכפילו את המשוואה ב $2f'$ והסיקו ש $(f')^{2}+f^{2}$ היא פונקציה קבועה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. למה שווה הקבוע ?

(ב) הסיקו כי ערכי f שייכים לקטע $[-1,1]$. נסמן $g(x)=\arcsin f(x)$, הראו כי $g'(x)=1$ לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ כך שמתקיים עבורו $|f(x)|\neq1$.

(ג) הוכיחו כי $g(x)=x$ ו $f(x)=\sin x$ בסביבה של 0.

(ד) הראו כי $f(x)=\sin x$ לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

4. הוכיחו את הא"ש הבא:

$$ab\leq e^{a}+b\log\frac{b}{e},\quad\forall a\in\mathbb{R},b>0$$