מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 1

להגשה במודל עד יום רביעי 15.11.23. נא להעלות את הפתרון שלכם למודל בתור קובץ pdf בלבד, מוקלד או בכתב יד קריא ומסודר, עם סריקה לא מטושטשת ולא מסובבת.

1. הצרינו את תבניות הפסוק הבאות. תוכלו להשתמש בקשרים לוגיים, בכמתים, במשתנים לבחירתכם ובסימנים הבאים במידת הצורך: $0, 1, \leq, <, +, -, =, \neq, \cdot, \in, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

   (א) n הוא מספר ראשוני. - נסו להצרין את הטענה בשתי דרכים: בעזרת הסימן "$|$" ("מחלק את"), וללא הסימן.

   (ב) קבוצת המספרים A היא מחזורית. במילים אחרות: קיים מספר ממשי חיובי t, כך שלא משנה איזה מספר ניקח מהקבוצה A, ולא משנה כמה פעמים נוסיף ונחזיר את t, עדיין יתקבל מספר ששייך ל-A.

   (ג) המספר השלם z הוא העיגול כלפי מטה של המספר הממשי r.

2. הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות.
   תזכורת: הסימון $\sum_{i=1}^{n} a_i$ הוא סימון מקוצר לכתיבת הסכום: $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

   (א) לכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ (עם סימן הסכימה $\sum$, נרשום את הסכום כך: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$).

   (ב) לכל n טבעי מתקיים $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$.

   (ג) לכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

   (ד) לכל $n \geq 3$ טבעי מתקיים $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$.

   (ה) לכל $x > 0$ ממשי המקיים ש-$x + \frac{1}{x}$ הוא מספר שלם, ולכל n טבעי, המספר $x^n + \frac{1}{x^n}$ הוא מספר שלם.
   רמז: לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל k טבעי מתקיים

   $$a^{k+1} + b^{k+1} = \left(a^k + b^k\right)(a+b) - a^k b - a b^k$$

   (ו) כל $n \geq 12$ טבעי ניתן לכתיבה בצורה $n = 3m + 7k$ עבור k, m טבעיים.

3. **המשפט היסודי של האריתמטיקה:** כל $n \geq 2$ טבעי ניתן לכתיבה בתור מכפלה של מספרים ראשוניים באופן יחיד (עד כדי שינוי הסדר של הגורמים במכפלה).

   בשיעור הוכחנו את החלק של **הקיום** במשפט. כלומר, הוכחנו שכל $n \geq 2$ טבעי ניתן לכתיבה בתור מכפלה של מספרים ראשוניים.

   כעת, הוכיחו באינדוקציה את **היחידות** של המשפט. כלומר, שאם $p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ ו-$q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ הן שתי הצגות של n בתור מכפלה של גורמים ראשוניים, אז הן בהכרח אותה הצגה (מכילות את אותם הגורמים הראשוניים).

   תוכלו להיעזר בלמה של אוקלידס: לכל מספר ראשוני p, ולכל $z_1, ..., z_d$ מספרים שלמים, אם $p \,|\, z_1 \cdot \ldots \cdot z_d$ אז קיים $1 \leq j \leq d$ כך ש-$p \,|\, z_j$. במילים, אם מספר ראשוני מחלק מכפלה של מספרים שלמים, אז הוא בהכרח מחלק את אחד מהגורמים במכפלה.

4. נאמר ששבר חיובי הוא **שבר אמיתי** אם המונה שלו קטן מהמכנה שלו (ושניהם חיוביים). נאמר ששבר הוא **שבר יסודי** אם הוא שבר אמיתי שהמונה שלו הוא 1.
   לדוגמה, $\frac{1}{5}$ הוא שבר יסודי, $\frac{3}{7}$ הוא שבר אמיתי, $\frac{4}{3}$ הוא לא זה ולא זה.

   בתרגיל זה נוכיח שכל שבר אמיתי שווה לסכום של שברים יסודיים שונים זה מזה. לדוגמה: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

   (א) חימום: הציגו את השבר האמיתי $\frac{3}{7}$ בתור סכום של שברים יסודיים שונים זה מזה. תארו את דרך החישוב שלכם.

(ב) הוכיחו שכל שבר אמיתי שווה לסכום של שברים יסודיים שונים זה מזה.
פורמלית, הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי ולכל m טבעי כך ש־$m < n$ ניתן לרשום את השבר $\frac{m}{n}$ כסכום של שברים יסודיים שונים זה מזה.
רמז: הוכיחו את הטענה באינדוקציה (שלמה) על n, כאשר $P\left(n\right)$ היא הטענה: "לכל m טבעי כך ש־$m < n$ מתקיים שניתן לרשום את $\frac{m}{n}$ כסכום של שברים יסודיים שונים זה מזה".

5. בשאלה זו נעסוק בעקרונות האינדוקציה עצמם. עקרון האינדוקציה הרגיל קובע שבהינתן טענה ψ, אם יודעים ש־$\psi\left(0\right)$ מתקיים, ובנוסף יודעים שלכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\psi\left(n\right)$ אז $\psi\left(n+1\right)$, אז אפשר להסיק שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\psi\left(n\right)$.

הוכיחו את עקרונות האינדוקציה הבאים תוך שימוש בעקרון האינדוקציה הרגיל.

(א) עיקרון האינדוקציה הזוגית: בהינתן φ, **אם** יודעים ש־$\varphi\left(0\right)$ וש־$\varphi\left(1\right)$, ובנוסף שלכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\varphi\left(n\right)$ אז $\varphi\left(n+2\right)$, **אז** אפשר להסיק שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\varphi\left(n\right)$.

(ב) עיקרון האינדוקציה השלמה: בהינתן φ, **אם** יודעים שלכל $n \in \mathbb{N}$, אם $\varphi\left(k\right)$ לכל $k < n$ גורר ש־$\varphi\left(n\right)$, **אז** אפשר להסיק שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\varphi\left(n\right)$.