

חדו"א 1 - תרגיל 8

1. חשבו 10 מוגבלות הבאים לבחירתכם:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1983} - (1+1983x)}{x^2 + x^{1983}}$.ב.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.א.
$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$.ד.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1)^{1/x}$.ג.
$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin \left(\frac{1}{x} \right) + 2}$.ג.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$.ה.
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.ט.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$.ז.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \left[\frac{b}{x} \right], a, b > 0$.ו.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 0$.ט.
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$.י"ב.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}, \alpha, \beta \neq 0$.י"א.
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.י"ג.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$.י"ג.
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin x \cdot \sin 2x}$.ט'ג.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$.ט'ז.
$a > 0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ עבור	.י"ח.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.ט'ז.
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\sin \frac{1}{x} \right)^2 + \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$ ★	.כ.	$\alpha, \beta \neq 0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(\alpha x))}{\log(\cos(\beta x))}$.ט'ט.
		$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ ★	.כ"א

2. תהא $x_0 \neq x_1$ שתי נקודות כלשהן. מצאו דוגמא לפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בבדיקה ב- x_0 ו- x_1 .

3. הוכחו או הפריכו:

(א) אם f, g לא רציפות בנק' x_0 אז $f \cdot g$ רציפה ב- x_0

(ב) אם f רציפה בנק' x_0 ו- g אינה רציפה בנק' x_0 אז $f \cdot g$ רציפה ב- x_0

(ג) אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז היא מושגיה ערך מקסימלי ו/או ערך מינימלי ב- \mathbb{R}

4. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0, 1]$ המקיימת $x > f(x) > 0$ לכל $x \in [0, 1]$. הוכחו כי קיים $h > 0$ כך ש $x \in [0, 1]$ לכל $f(x) > x + h$

5. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) מצאו דוגמה לפונקציה רציפה רציפה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המתקבלת כל ערך ב \mathbb{R} בבדיקה 3 פעמיים.

(ב) האם קיימות פונקציה רציפה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המתקבלת כל ערך בבדיקה פעמיים?

6. פתרו את הסעיפים הבאים:

(א) תהי f פונק' רציפה עם $f(0) = f(1)$. הוכחו כי למשווה $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ יש פתרון $x \in [0, \frac{1}{2}]$

(ב) יהיו $a_1, a_2, a_3 > 0$ מספרים כלשהן. הראו כי למשווה הבא יש בדיקות שני פתרונות:

$$\frac{a_1}{x - a_1} + \frac{a_2}{x - a_2} + \frac{a_3}{x - a_3} = 0$$

7. נתונה פונקציה רציפה $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש: $x \in (a, b)$ הוכחו כי לכל n נק' $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ קיימת נק' $x \in (a, b)$ אשר

$$f(x) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

8. הוכחו כי למשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד בתחום הנתון:

(א) $(0, 1) \cos x = \sin x$.

(ב) לכל $\alpha > 0$, המשוואה $\cot x = \alpha x$.

9. הוכחו כי למשוואת $P(x) = e^x$, כאשר $P(x)$ פולינום (שאינו 0), יש לפחות פתרון ממשי אחד.

10. הוכחו כי פונקציה מחזוריית ורציפה ב- \mathbb{R} מקבלת מקסימום ומינימום.

שאלות לתרגול נוספת (לא להגשה)

1. הוכחו כי אם f חסומה בסביבת נקודה x_0 , וכן $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, וכן $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = 0$

(א) על פי הגדרת הגבול לפי היינה.

(ב) על פי הגדרת הגבול לפי קושי.

2. נגידו:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(5x+1)} & x > 0 \\ \frac{2x+\alpha}{x+3} & x \leq 0 \end{cases}$$

עבור אילו ערכי α קיים גבול בנקודה $x_0 = 0$?

3. הוכחו את קיום הגבולות הבאים לפי קושי והיינה. אם הגבול אינו קיים, הוכחו זאת.

(א) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$.

(ב) עבור $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.

4. עבור הפונקציות הבאות, הוכחו/הפריכו את קיום הגבול $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin |x|, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{(א)}$$

.i
 $x_0 \in \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.ii
 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{(ב)}$$

.i
 $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.ii
 $x_0 \in \{-1, 1\}$

5. הוכחו לפי הגדרת הגבול כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = 1$$

רמז: השתמשו באינטגרל ברנולי.

6. חשבו את $f \circ g$ ואת $g \circ f$ עבור f, g הבאות:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2, g(x) = \frac{1}{x+1} \quad (\text{א}) \\f(x) &= e^x, g(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{ב})\end{aligned}$$

7. נתון $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. מצאו בצורה מפורשת את $f(f(x))$.

8. חשבו את הגבולות הבאים: