# מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 2

**להגשה עד יום רביעי 22.11.23.**
הדרכה: לפני ו/או במהלך פתירת השאלות (בתרגיל הזה ובכל התרגילים בקורס) עליכם לחזור על החומר ולקרוא מחדש את ההגדרות, הטענות והמשפטים שנלמדו בשיעור ובתרגול. בנוסף, יש לקרוא את ההוכחות שכתבנו בשיעורים, זו ההשראה שלכם לכתיבת הוכחות.

1. נתונות הקבוצות:

$$A=\{1,2,3\}\,,\ B=\{1,1,2,3\}\,,\ C=\{1,3,\pi\}\,,\ D=\{x\in\mathbb{Z}\colon x\notin\mathbb{N}\}\,,\ E=\{1,\{1,2,3\}\,,3\}$$

(א) כמה איברים יש בכל אחת מהקבוצות? (חוץ מ-$D$).
(ב) כתבו האם: (1) $A=B$ (2) $A=C$ (3) $A\subseteq E$ (4) $A\in E$ (5) $E\subseteq D$
(ג) רשמו את כל תתי הקבוצות של $E$.

2. הוכיחו את הטענות הבאות.

(א) $\{2,-1\}\subseteq\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^2>x\right\}$
(ב) $\left\{n^2+n\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathbb{N}_{\text{even}}$
(ג) $\{|x|:x\in\mathbb{R}\}=[0,\infty)$ (הוכיחו בעזרת הכלה דו כיוונית)
כאן $|x|$ מסמן את הערך המוחלט של $x$, כלומר:

$$|x|=\begin{cases}x & \text{if } x\geq 0\\ -x & \text{if } x<0\end{cases}$$

3. כתבו במפורש כל אחת מהקבוצות הבאות בצורה פשוטה יותר. לאחר מכן, בכל אחד מהסעיפים, הוכיחו שוויון קבוצות בין הקבוצה הנתונה לבין הצורה הפשוטה יותר שמצאתם לה.
<u>תזכורת:</u> ניתן להוכיח שוויון קבוצות על ידי הוכחת הכלה דו כיוונית.

(א) $\{x\in\mathbb{Z}\colon\exists y\in\mathbb{Z}\ \ (x=y+1)\}$
(ב) $\left\{x\in\mathbb{Q}\colon\ \frac{x}{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}\right\}$
(ג) $\left\{x\in\mathbb{N}\colon x^2-5x=14\right\}$

4. תהי $A=\{1,2,\ldots,100\}$. תהי -

$$B=\{\{x\in A:\ a\,|\,x\}:a\in\mathbb{N}_+\}$$

<u>תזכורת:</u> עבור מספרים טבעיים $a,b$, נאמר כי $a\,|\,b$ ($a$ מחלק את $b$) אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$a\cdot n=b$. למשל, 3 מחלק את 6.

(א) כתבו במפורש מהם האיברים ב-$B$. כמה איברים יש ב-$B$? האם $A\in B$?
(ב) סינגלטון הוא קבוצה עם איבר יחיד. כמה סינגלטונים יש ב-$B$?

5. רשמו בצורה פורמלית את הקבוצות הבאות.

(א) קבוצת הטבעיים שמתחלקים ללא שארית ב־14 וב־6.
(ב) הקבוצה המתקבלת מתוך השלמים באמצעות החלפה, כאשר מחליפים כל מספר שלם בקבוצת הממשיים שקטנים ממנו.
(ג) הקבוצה המתקבלת מתוך הממשיים באמצעות החלפה, כאשר מחליפים כל מספר ממשי בריבועו.

(ד) קבוצת הממשיים שאינם רציונליים.

(ה) הקבוצה המתקבלת מתוך הטבעיים באמצעות החלפה, כאשר מחליפים כל מספר טבעי בקבוצת הטבעיים שמחלקים אותו.

(ו) הקבוצה המתקבלת מתוך הממשיים על ידי החלפת כל מספר ממשי בחזקה השלישית שלו.

6. קבעו האם הטענות הבאות נכונות ונמקו את קביעתכם:

(א) $\{4,7\} \subseteq \mathcal{P}(\{1,4,7\})$

(ב) $7 \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 - 10x - 28 = 0\right\}$

(ג) $8 \in \left\{x^3 - 5x^2 - 10x - 20 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

(ד) $\{6,17,19\} \in \left\{T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \forall a,b \in T.\, a > b \rightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}_{>1} \wedge \frac{a-b}{k} \in \mathbb{N}_{>1}\right)\right\}$, כאשר $\mathbb{N}_{>1} := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}$.

(ה) $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$

(ו) $\mathcal{P}(\emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

(ז) לכל $A$ מתקיים $A \subseteq \mathcal{P}(A)$

(ח) לכל $A$, אם $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ אז $A = \emptyset$.

7. הוכיחו שלכל $A, B$ קבוצות מתקיים: $A \subseteq B$ אמ"מ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

8. את קבוצת המספרים הרציונליים ניתן לכתוב בעזרת עקרון ההפרדה כך: $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Z}.\, \exists n \in \mathbb{N}_+.\, x = \frac{m}{n}\right\}$.

(א) הוכיחו שסכום, הפרש ומכפלה של מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי.
פורמלית: הוכיחו שאם $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, אז $q_1 + q_2,\ q_1 - q_2,\ q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q}$.

(ב) הוכיחו שלכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $r \in \mathbb{Q} \ \leftrightarrow\ \{q + r \mid q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$.

9. הוכיחו: אם $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ מקיימים $a < b < c < d$, אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־ $[b - \varepsilon, c + \varepsilon] \subseteq (a, d)$.
<u>הערה 1:</u> "$\varepsilon$" היא אות ביוונית הנקראת "אפסילון".
<u>הערה 2:</u> כדי למצוא $\varepsilon$ מתאים, תוכלו להשתמש ב־$\min\{x,y\}$ שמחזירה את המינימלי מבין $x, y$, עבור $x, y \in \mathbb{R}$.
למשל: $\min\{3,5\} = 3$. חשבו כיצד לבחור $x, y$ מתאימים.