

אלגברה לינארית 1א

תרגיל בית מספר 2: מערכות משוואות לינאריות

24 במרץ 2023

שימו לב: בכל מקום בו כתוב \mathbb{F}_p , זה סימון נוסף של \mathbb{Z}_p .

1. יהי F שדה. יהיו $a, b, c, d \in F$. הוכיחו:

(א) אם $a^2 = b^2$ אז $a = b$ או $a = -b$.

(ב) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(ג) אם $b, d \neq 0$ אז--

$$a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (bd)^{-1}$$

2. יהי p ראשוני.

(א) חשבו את מכפלת האיברים השונים מאפס בשדה \mathbb{F}_p , והוכיחו ש--

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) = -1$$

(ב) (\mathbb{F}_p^-) .

הדרכה: חלקו את המספרים באגף שמאל לזוגות (באופן מושכל, שיקל על החישוב).

(ב) הסיקו שלכל ראשוני p , המספר הטבעי הבא הוא כפולה שלמה של p :

$$1 + (p-1)!$$

(תוכלו לקרוא עוד על משפט Wilson).

3. **שאלת בונוס:** הראו ש \mathbb{Z}_n הוא שדה אם ורק אם n ראשוני.

הדרכה: ניתן להניח שכל תכונות השדה, מלבד קיום הפכי, מתקיימות ב \mathbb{Z}_n . בשביל להראות שלכל איבר (שאינו אפס) קיים הפכי

אם ורק אם n ראשוני, השתמשו בטענת העזר הבאה:

אם $m, n \in \mathbb{N}$, ו g המחלק השלם הגדול ביותר של שניהם יחד, אז קיימים מספרים שלמים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש $am + bn = g$.

4. כתבו את מערכות המשוואות הבאות בצורת מטריצת מקדמים מורחבת, דרגו באמצעות אלימינציה גאוס, וכתבו מיהם המשתנים החפשיים (בשאלה זו כל המשוואות מעל \mathbb{R}):

(א)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 11 \end{cases}$$

(ב)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$$

(ג)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 7x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

5. כתבו את מערכות המשוואות הבאות בצורת מטריצת מקדמים מורחבת, דרגו באמצעות אלימינציה גאוס, וכתבו מיהם המשתנים החפשיים (שימו לב לשדה!).

(א)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

מעל \mathbb{F}_5 , השדה עם 5 איברים.

(ב)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

מעל \mathbb{F}_7 , השדה עם 7 איברים.

(ג)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 = 1 \end{cases}$$

מעל \mathbb{C} .

(ד)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

מעל $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, השדה עם שני איברים.

6. (א) תארו מהן כל המטריצות הקונויות מסדר 2×2 מעל שדה \mathbb{F} . רמז: חלקו למקרים לפי באיזה עמודות יש איברים פותחים.

(ניתן למשל על ידי כתיבה בכתוב: "קבוצת המטריצות הקונויות מסדר 2×2 היא הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \dots \right\}$ ")

(ב) תארו מהן כל המטריצות הקונויות מסדר 3×3 מעל שדה \mathbb{F} .