

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א - תרגיל בית 3

## שאלות להגשה:

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול (כלומר ללא שימוש במשפטים) כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq 1 \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + \cos(n)} - n = 0 \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad (\text{ד}) \quad \text{כאשר נתון } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0. \text{ מה קורה אם } a = 0?$$

2. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$  קבוצה חסומה מלעיל שאינה ריקה. הוכיחו כי קיימת סדרה  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  כך ש- $a_n \in A$  לכל  $n$  וגם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$ .

3. הראו כי לכל מספר ממשי קיימת סדרה של רציונאלים המתכנסת אליו, וסדרה של אירציונאלים המתכנסת אליו.

4. נניח כי  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , כאשר  $a, b$  גבולות סופיים או אינסופיים, כמפורט בכל סעיף. אז מתקיים:

$$(\text{א}) \text{ אם } a = \pm\infty \text{ ו-} b \text{ סופי או } b = \pm\infty \text{ אז } a_n + b_n \rightarrow \pm\infty, \text{ בהתאמה.}$$

$$(\text{ב}) \text{ אם } a = \pm\infty \text{ ו-} b > 0 \text{ או } b = \infty \text{ אז } a_n b_n \rightarrow \pm\infty, \text{ בהתאמה.}$$

$$(\text{ג}) \text{ אם } a = \pm\infty \text{ ו-} b < 0 \text{ או } b = -\infty \text{ אז } a_n b_n \rightarrow \mp\infty, \text{ בהתאמה.}$$

$$(\text{ד}) \text{ אם } a = b = \pm\infty \text{ אז } a_n b_n \rightarrow +\infty. \text{ אם } a = \infty \text{ ו-} b = -\infty \text{ אז } a_n b_n \rightarrow -\infty.$$

הוכיחו מקרה אחד מכל סעיף.

5. תהי  $a_n$  סדרה של מספרים אי שליליים  $a_n \geq 0$  המתכנסת לגבול  $a \geq 0$ . הוכיחו כי  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a}$ .

6. חשבו בעזרת משפט הסנדוויץ' (או בכל דרך אחרת) את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \sin(1) + 2 \cdot \sin(2) + \cdots + n \cdot \sin(n)}{n^3} \quad (\text{ב})$$

$$(\text{ג}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n - b^n} \quad \text{כאשר } a > b > 0$$

$$(\text{ד}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n} \right)$$

7. יהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  ויהיו  $\{a_n\}, \{b_n\}$  סדרות של מספרים שלמים, קרי, לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $a_n \in \mathbb{Z}$  ו- $b_n \in \mathbb{Z}$ . הראו כי אם  $a_n \alpha + b_n \rightarrow 0$  ולכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $|a_n \alpha + b_n| > 0$  אז  $\alpha$  אירציונלי.

8. יהי  $\beta \geq 0$  ויהי  $s \in (0, 1)$ . הוכיחו כי הסדרה הבאה מתכנסת ומצאו את גבולה:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{n}{k} \right)^\beta s^{n-k}$$

9. בתרגיל זה נוכיח הכללה של משפט צ'ארו למומצעים משוקללים. תהי  $x_n$  סדרת ממשיים המתכנסת ל- $x$ . תהי  $\lambda_n > 0$  סדרה ("סדרת המשקלים") כך ש:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

הוכיחו:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

האם הטענה מחזיקה גם עבור  $\lambda_n$  שאינן מקיימות את התנאי על  $\sum_{k=1}^n \lambda_k$ ?

10. הוכיחו או הפריכו שסדרה חיובית השואפת ל-0 היא מונוטונית החל ממקום מסוים.

## שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

1. (א) תהי  $a_n = (-1)^n$ . מצאו סדרה  $b_n$  כך שהסדרה  $a_n + b_n$  מתכנסת. האם ייתכן ש  $b_n$  תתכנס? נמקו.  
(ב) נניח כי  $a_n$  ו  $b_n$  מתכנסות לאותו הגבול  $L \in \mathbb{R}$ . הראו כי  $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots)$  מתכנסת ל- $L$ .

2. (א) נניח כי  $a_n \rightarrow \infty$  ו  $b_n \rightarrow -\infty$ . מצאו דוגמאות עבורן הסדרה  $a_n + b_n$  מתכנסת לגבול ממשי, מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף, או לא מתכנסת במובן הרחב.  
(ב) נניח  $a_n \rightarrow 0$  ובנוסף  $a_n > 0$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי עבור  $c > 0$  מתקיים  $\frac{c}{a_n} \rightarrow \infty$ .

3. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) \quad (\text{ד})$$

4. הוכיחו את משפט הסנדוויץ' לגבול אינסופי: אם  $a_n$  ו  $b_n$  סדרות כך שהחל ממקום מסוים  $a_n \leq b_n$  ובנוסף  $a_n \rightarrow \infty$  אז גם  $b_n \rightarrow \infty$ .

5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול כי הסדרה הבאה אינה מתכנסת:

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3k \\ 1 & n = 3k + 1 \\ 2 & n = 3k + 2 \end{cases}$$

6. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 - 2} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n + 1} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n!} \quad (\text{ג})$$

7. יהיו  $a_1, \dots, a_k \geq 0$  מספרים ממשיים כלשהם. הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} = \max \{a_1, \dots, a_k\}$$

8. נגדיר סידרה באופן הבא:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**רמז:** הראו כי  $a_n = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right)$