לינארית 1א ~ תרגול

שחר פרץ

27 במאי 2025

מתרגלת: לילי קורצמשהו

(1)

1.1 תמורות

תזכורת: תמורה היא פונקציה חח"ע ועל $f\colon [n]\to[n]$.

- יש $n!$ תמורות על n איברים (לילי כתבה את זה כבלבול במקום עצרת).
- הרכבת תמורות היא תמורה
- נשתמש בטבלאות כדי לסמן תמורות, לדוגמה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\implies \sigma(1)=2,\ \sigma(2)=1\text{etc}$$

- נראה בהרצאה שאפשר לפרק כל תמורה למעגלים $(i_1\dots i_k)$ כך ש־$i_1\to i_2\to_3\to\dots\to i_k\to i_1$, וזהות על שאר האיברים, כאשר הפירוק הוא הרכבה: לדוגמה, על התמורה לעיל:

$$\sigma=(12)\circ(34)=(34)(12)$$

(נשתמש בנוטציה כפלית במקום הרכבה תמיד). כאשר, לצורך הדוגמה:

$$(34)(x)=\begin{cases}4 & x=3\\3 & x=4\\x & \text{else}\end{cases}$$

מעגלים זרים מתחלפים – לדוגמה, $(12)(34)$ ההרכבה (כפל בחבורה הזו) בינהם קומטטיבית.

1.2 דט' לפי תמוורות

תהי σ תמורה על $[n]$, נגדיר את $P(\sigma)$ בתור המטריצה שעמודותיה:

$$\begin{pmatrix}| & | & \cdots & |\\ e_{\sigma(1)} & e_{\sigma(2)} & \cdots & e_{\sigma(n)}\\ | & | & \cdots & |\end{pmatrix}$$

זאת כי:

$$P(\sigma)e_i=e_{\sigma(i)}$$

מכפל מטריצות.

נגדיר את הסימן של התמורה להיות: $\operatorname{sgn}\sigma=\det P(\sigma)$. נראה בהרצאה ש־:

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{N(\sigma)}\quad N(\sigma)=\#\{(i,j)\mid i<j,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}$$

לעיתים, קוראים ל־$N(\sigma)$ ה"אי־סדר" של σ. ה־$N(\sigma)$ של ממעגל $(1\,2\dots k)$. נבחין ש־$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{k-1}$ עבורו, ו־$N(\sigma)=k-1$ (זוג (i,k) כך ש־$i<k$ היחידים שסדרם יתחלף).

הסימן היא פונקציה כפלית – $\operatorname{sgn}(\sigma\theta)=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\theta$. קל להוכיח את זה מכפליות הדמטרמיננטה וההגדרה האקראית לעיל.

1.3 דטרמיננטה לפי תמורות

מתקיים ש־:

$$\det A = \sum_{\sigma\in[n]\to[n]} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$$

זאת כי ראינו בתרגולים קודמים:

$$\det A = \sum\prod a_{ij}\det(e_2, e_1, \cdots)$$

דוגמה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ c_3 & 0 & a_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ c_n & \cdots & & & a_n \end{pmatrix}$$

למשלע עבור $\sigma = Id_n$ נבחין ש־$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(1)} = a_1 \dots a_n$, וכן $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. נחפש את התמורות עבורן $\prod_{i=1}^{n} a_{i\,\sigma(i)} \neq 0$. נבחין ש־$\forall i \in [n]\colon \sigma(i) = i \vee \sigma(i) = 1$, אחרת $a_{i\,\sigma(i)}$ מאפס את המכפלה. אם $\sigma(1) = 1$ מחח"ע נקבל $\sigma = I$. אם $\sigma(1) = j$, אז $\exists k\colon \sigma(k) = 1 \wedge \forall i \in [n] \setminus k, 1\colon \sigma(i) = i$ ונבחין ש־$i = j$. אזי זהו מעגל $\sigma = (i, j)$. נקבל:

$$\det A = a_1 \cdots a_n (-1)^0 + \sum_{j}\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_{1j}(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=2}^{n} \underbrace{a_{1j}}_{b_j}\underbrace{a_{j1}}_{c_j}\prod_{i\neq 1,j}^{n} a_i$$

כאשר $\sigma_{1j} = (1, j)$. סה"כ:

$$\det A = a_1 \cdots a_n - \sum_{i=2}^{n} b_j c_j \prod_{i\neq 1,j} a_i$$

שווה לזכור את זה, אך תמיד אפשר לפתח ידנית.

. . . . (2) . . . .

ניזכר בהגדרה של המטריצה המצורפת:

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ji}|$$

הוכחנו בהרצאה:

1. $\operatorname{adj} B \operatorname{adj} A = \operatorname{adj}(AB)$
2. $\det(\operatorname{adj} A) = \det(A)^{n-1}$
3. $A \operatorname{adj} A = \det A I_n$
4. $\operatorname{adj}(cA) = c^{n-1}\operatorname{adj} A$

מ־3, בפרט אם $\det A \neq 0$ נקבל:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

דוגמה חישובית.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ (\operatorname{adj} A)^T = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה:

$$\det A = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -8$$

מסקנה:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

נניח $ab - bc \neq 0$, מצאו את ההופכי של $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נבחין ש־:

$$\det A = ab - bc, \ \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ab - cd} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.0.1

תהי A הפיכה, נמצא נוסחה ל־$\operatorname{adj}\operatorname{adj} A$.

$$\operatorname{adj} A = A^{-1}(\det A) I_n \implies \operatorname{adj}\operatorname{adj} A = \operatorname{adj}(A^{-1}(\det)) = (\det)^{n-1} \operatorname{adj}(A^{-1}), \ A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}}{|A|} \implies \operatorname{adj}(A^{-1}) = (\det A)^{-1} A$$

סה"כ:

$$\operatorname{adj}\operatorname{adj} A = (\det A)^{n-2} A$$

2.0.2

נמצא את $\operatorname{adj} A^T$:

$$(\operatorname{adj}(A^T))_{ij} = (-1)^{j+1} \det(M_{ij}^T) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = ((\operatorname{adj} A)^T)_{ij}$$

2.0.3

אם $\operatorname{rank} A \leq n-2$ אז $\operatorname{adj} A = 0$. [הוכחתי את זה באמצע המבחן הקודם אז אני לא אצרף הוכחה כאן שוב]

.... (3) ....

3.0.1

נוכיח ששלוש נקודות במישור, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ נמצאות על אותו הישר אמ"מ:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_x & 1 \end{pmatrix} = 0$$

נתבונן בהגדרה של להיות כל קו ישר. נבחין ש־$y = mx+n$ לא מכליל ישרים מהצורה $x = c$, ולכן נכתוב דברים מהצורה $Ax+By+C = 0$. נבחין שהם על אותו הישר אמ"מ קיימים A, B, C כך ש־$Ax_i + Bx_i + C = 0$. בנוסח אחר:

$$\exists A, B \neq 0 \, \exists C \colon A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

ובאפן שקול, נדרוש ש־(x_1, x_2, x_3) ושאר הוקטורים, תלויים לינארית. זה שקול להיות הדטרמיננטה לעיל 0.

(צריך קצת לטפל ב־$C \neq 0$).

3.0.2

יהיו $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$. חשבו:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} x_1+1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2+1 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3+1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \cdots & x_n & x_{n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i \to R_i - R_1} \begin{pmatrix} x_1+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מכאן אפשר או להשתמש בנוסחה מתחילת התרגול, או לחבר לשורה הראשונה את כל שאר השורות.

3.0.3

דיי נמצא לי להעתיק מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & \\ -1 & -2 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

הסיכום של דן הרן, בלי האלגו' של גוגל

....

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד