ליניארית 1א ~ תרגיל בית 2

שחר פרץ

7 באפריל 2025

הערה: אלא אם מצוין אחרת, בתרגיל בית זה $\equiv_p$ מייצג את יחס השיקלות מעל השלמים בעבורו $a \equiv_p b$ אמ"מ קיימים $a \bmod p = b \bmod p$.
לעיתים יופיע היחס מעל הטבעיים.

.... (1) ....

(א) יהיו $a, b \in \mathbb{F}$. נוכיח $a = -b \vee a = b \implies a^2 = b^2$.

הוכחה. (הערה: אשתמש בסעיף הבא כמו והוכחתי אותו לפני הסעיף הזה) נתון השוויון $a^2 = b^2$. נפצל למקרים:

- אם $a \neq 0$ אז ידוע קיו סאיבר a^{-1} הופכי ל־a. אז נכפול את המשוואה הנתונה ב־$(a^{-1})^2 = a^{-2}$, נקבל $aaa^{-1}a^{-1} = b^2a^{-2}$. אז מקומטטיביות והגדרת הופכי $(ba^{-1})^2 = 1$. אחרת, קיים $c \neq 1, -1 =: ba^{-1}$ כך ש־$c^2 = 1$. אזי c הופכי של c, כלומר $c^2 - 1 = 0$. אזי:

$$0 = c^2 - 1 = c^2 - c + c - 1 = (c-1)(c+1) \implies c = 1 \vee c = -1$$

קיבלנו $ba^{-1} = 1 \vee ba^{-1} = -1$. נכפול את המשוואות חזרה ב־a, נקבל $b = a \vee b = -a$ כדרוש.

- אחרת, $a = 0$ ואז:

$$b^2 = a^2 = 0^2 = 0 \implies b = 0,\ (0 = 0 \wedge 0 = -0) \implies (a = -b \wedge a = b)$$

■

(ב) צ.ל. $(-a)(-b) = a \cdot b$

הוכחה. יהיו $a, b \in \mathbb{F}$. אז:

$$(-a)(-b) = (-1)a \cdot (-1)b = (-1)^2 ab = 1 \cdot ab = ab$$

נותר להוכיח את השוויון $(-1)^2 = 1$. זאת כי:

$$0 = (-2) \cdot 0 = (-1-1)(-1+1) = (-1)^2 - 1^2 = (-1)^2 - 1$$

נחבר 1 לשני האגפים, נקבל $(-1)^2 = 1$ כדרוש. ■

(ג) יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, נניח $b, d \neq 0$. צ.ל. $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc) \cdot (bd)^{-1}$

הוכחה. מדיסטרבוטיביות:

$$\top \quad (ad+bc)(bd)^{-1} = (ad+bc)(b^{-1}d^{-1}) = adb^{-1}d^{-1} + bcb^{-1}d^{-1} = ab^{-1}\underbrace{(dd^{-1})}_{=1} + cd^{-1}\underbrace{(bb^{-1})}_{=1} = ab^{-1} + cd^{-1}$$

נבחין כי הביטוי עצמו מוגדר היטב אמ"מ $b, d \neq 0$ ולכן ניגרשה הנחה זו (שכן, אחרת $bd = 0$ כי כפל ב־0 יוביל ל־0, ועל כן $(bd)^{-1}$ יהיה לא מוגדר). ■

.... (2) ....

(א) הוכחה. למה. בשדה $\mathbb{F}_p$ הפונ' $f(a) \to a^{-1}$ חח"ע. נוכיח את הלמה. יהיו $a, b \in \mathbb{F}_p$ ונניח $f(a) = f(b)$. נראה $a = b$. מההנחה $a^{-1} = b^{-1}$. נכפול ב־$a^{-1}b$ ונקבל $a^{-1}ab = b^{-1}ba$ מקומטטיביות. מאיבר הופכי נקבל $1b = 1a$ כלומר $a = b$ כדרוש.

משום ש־$f \colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ שדה סופי אז f על. סה"כ f זיווג. משום ש־$f(f(a)) = f(a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} = a$, אז לכל a קיים ויחיד $b = a^{-1}$. אם $b = a$ אז $a = a^{-1}$ ואז $aa^{-1} = 1$ ומטענה שראינו בסעיף 1א נקבל $a = 1, -1$. משום ש־$p - 1 \equiv_p -1$ בשדה, אז

$a=1,p-1$. עבור כל a אחר קיים ויחיד ב־$\mathbb{F}_p$ איזשהו $b=a^{-1}\neq a$ אחר ובאופן דומה $a=b^{-1}$, כלומר נוכל לסדר את השוויון להלן באופן הבא:

$$(p-1)!=1\cdot 2\cdots(p-1)=(p-1)\cdot 1\cdot \underbrace{(2\cdot 2^{-1})}_{=1}\underbrace{(3\cdot 3^{-1})}_{=1}\cdots=1(p-1)\prod_{j=2}^{p}1=(p-1)=-1$$

(בה"כ $3^{-1}\neq 2$, אחרת סימונים אחרים). השוויונות לעיל בתוך השדה $\mathbb{F}_p$ (כלומר, אלו שוויונות של מחלקות שקילות ולא של מספרים).

הפירוק לזוגות כאלו חוקי משום שהראינו ש־f, הפונקציה שהופכת את איברי השדה, חח"ע, על, וגם $(f\circ f)=id$. ■

(ב) הוכחה. יהי p ראשוני. אזי מהסעיף הקודם $(p-1)!\equiv_p -1\equiv_p p-1$. נוסיף 1 לשני האגפים ונסיק $(p-1)!+1\equiv_p p-1+1=p$. סה"כ נקבל לפי הגדרת $\equiv_p$ ש־$\exists a\in\mathbb{Z}\colon ap=(p-1)!$, ובמילים אחרות, $1+(p-1)!$ כפולה שלמה של p, כדרוש. ■

(3)

שאלת בונוס: נראה כי $\mathbb{Z}_n$ שדה אמ"מ n ראשוני.

הוכחה. יהי $n\in\mathbb{N}$. אז:

$\Longrightarrow$ נניח $\mathbb{Z}_n$ שדה, נראה n ראשוני. נניח בשלילה n אינו ראשוני, ומההגדרה $\exists\mathbb{N}\ni b,c\notin\{1,n\}\colon bc=n$. אזי $0_{\mathbb{F}}=(bc)_{\mathbb{F}}=(b)_{\mathbb{F}}(c)_{\mathbb{F}}$ וסה"כ ממשפט $b\equiv 0\vee c\equiv 0$, בה"כ $b=0$ ואז $n=bc=0c=0$ וסה"כ קיבלנו שדה מגודל $n=0$ ולכן לא קיים שום איבר ובפרט לא קיים איבר יחידה, וסתירה להנחת השלילה כדרוש.

$\Longleftarrow$ יהי n ראשוני, נראה $\mathbb{Z}_n$ שדה. ראינו כי $\mathbb{Z}_n$ מקיים את כל תכונות השדה פרט לקיום מספר הופכי ללא תלות בהיות n ראשוני. נותר להראות קיום איבר הופכי. יהי $a\in\mathbb{Z}_n$, נראה קיום a^{-1} כך ש־$a^{-1}a\equiv_n 1$. ממשפט שמצ"ב בש.ב. קיימים λ_1,λ_2 כך ש־$\lambda_1 a+\lambda_2 p=\gcd(a,p)$. בגלל ש־$p$ ראשוני, אז $\gcd(a,p)=1$ בעבור כל $a\in\mathbb{N}$ ובפרט $a\in\mathbb{Z}_n$. לכן $\lambda_1 a+\lambda_2 p=1$, נעביר אגפים ונקבל $\lambda_1 a=1-\lambda_2 p\equiv_p 1$ כדרוש.

סה"כ הראינו גרירה משני הכיוונים ובכך הטענה הוכחה. ■

(4)

(א)

$$\begin{cases}3x_2+2x_2-3x_+x_4 &=7\\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4 &=11\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&2&-1&1&7\\2&1&-3&-1&11\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{7}{3}\\2&1&-3&-1&11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{7}{3}\\0&-\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{19}{3}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to-3R_2}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{7}{3}\\0&1&7&5&-19\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{2}{3}R_2}\begin{pmatrix}1&0&-5&-3&15\\0&1&7&5&-19\end{pmatrix}$$

נסיק:

$$\text{sols}=\left\{\begin{pmatrix}15+5x_3+3x_4\\-19-7x_3-5x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mid x_3,x_4\in\mathbb{R}\right\}$$

ובפרט x_3,x_4 חופשיים.

המשך בעמוד הבא

(ב)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}3&2&2&2&2\\2&3&2&5&3\\9&1&4&-5&1\\2&2&3&4&5\\7&1&6&-4&7\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1\cdot\frac{1}{3}} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\2&3&2&5&3\\9&1&4&-5&1\\2&2&3&4&5\\7&1&6&-4&7\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-9\cdot R_1]{R_2\to R_2-2\cdot R_1}\xrightarrow[R_5\to R_5-7\cdot R_1]{R_4\to R_4-2\cdot R_1} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{11}{3}&\frac{5}{3}\\0&-5&-2&-11&-5\\0&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}&\frac{8}{3}&\frac{11}{3}\\0&-\frac{11}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{26}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2\cdot\frac{3}{5}} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&-5&-2&-11&-5\\0&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}&\frac{8}{3}&\frac{11}{3}\\0&-\frac{11}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{26}{3}&\frac{7}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_5\to R_5+\frac{11}{3}\cdot R_2\\ R_3\to R_3-(-5)\cdot R_2}]{R_4\to R_4-\frac{2}{3}\cdot R_2} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&0&0&0\\0&0&\frac{7}{5}&\frac{6}{5}&3\\0&0&\frac{14}{5}&-\frac{3}{5}&6\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\longleftrightarrow R_5} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&\frac{14}{5}&-\frac{3}{5}&6\\0&0&\frac{7}{5}&\frac{6}{5}&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3\cdot\frac{5}{14}} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&1&-\frac{3}{14}&\frac{15}{7}\\0&0&\frac{7}{5}&\frac{6}{5}&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4-\frac{7}{5}\cdot R_3} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&1&-\frac{3}{14}&\frac{15}{7}\\0&0&0&\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{R_4\to R_4\cdot\frac{2}{3}} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&1&-\frac{3}{14}&\frac{15}{7}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_5\longleftrightarrow R_5} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{11}{5}&1\\0&0&1&\frac{3}{-14}&\frac{15}{7}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1\to R_1-\frac{2}{3}R_4\\ R_3\to R_3+\frac{3}{14}R_4}]{R_2\to R_2-\frac{11}{5}R_4} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{2}{5}&0&1\\0&0&1&0&\frac{15}{7}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1-\frac{2}{3}R_3]{R_2\to R_2-\frac{2}{5}R_3} \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&0&0&-\frac{16}{21}\\0&1&0&0&\frac{1}{7}\\0&0&1&0&\frac{15}{7}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix}1&0&0&0&-\frac{6}{7}\\0&1&0&0&\frac{1}{7}\\0&0&1&0&\frac{15}{7}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן אין משתנים חופשיים, והפתרון היחיד הוא:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{6}{7}\\\frac{1}{7}\\\frac{15}{7}\\0\end{pmatrix}$$

(ג)

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3 &= 3\\3x_1-2x-2+5x_3 &= 10\\7x_1+9x_2+3x_3 &= 1\end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix}2&3&4&3\\3&-2&5&10\\7&9&3&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to 0.5R_1} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&\frac{3}{2}\\3&-2&5&10\\7&9&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-3R_1} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&\frac{3}{2}\\0&-\frac{13}{2}&-1&\frac{11}{2}\\0&-\frac{3}{2}&-11&-\frac{19}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{2}{13}R_2} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{2}{13}&-\frac{11}{13}\\0&-\frac{3}{2}&-11&-\frac{19}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+\frac{3}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{2}{13}&-\frac{11}{13}\\0&0&-\frac{140}{13}&-\frac{140}{13}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\to-\frac{13}{140}R_3} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&2&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{2}{13}&-\frac{11}{13}\\0&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\to R_1-2\cdot R_3]{R_2\to R_2-\frac{2}{13}R_3} \begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&0&\frac{1}{-2}\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{3}{2}R_2} \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

נסיק ש־$(x_1,x_2,x_3)=(1,-1,1)$, וגם במקרה הזה אין משתנים חופשיים.

. . . . (5) . . . .

נמצא את המשתנים החופשיים במערכות המשוואות להלן.

(א) מעל $\mathbb{F}_5$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3+1x_4 &= 2\\2x_1+x_2+2x_3+4x_4 &= 1\end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix}3&2&4&1&2\\2&1&2&4&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to 2R_1} \begin{pmatrix}1&4&3&2&4\\2&1&2&4&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \begin{pmatrix}1&4&3&2&4\\0&3&1&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to 2R_2} \begin{pmatrix}1&4&3&2&4\\0&1&2&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-4R_2} \begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&2&0&1\end{pmatrix}$$

קבוצת הפתרונות:

$$\left\{\begin{pmatrix}-2x_4\\1-2x_3\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ x_3,x_4\in\mathbb{F}_5\right\}$$

סה"כ x_3,x_4 משתנים חופשיים.

(ב) מעל $\mathbb{F}_7$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+4x_3+x_4 &= 2\\ 2x_1+x-2+2x_3+4x_4 &= 1\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&2&4&1&2\\2&1&2&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to 5R_1}\begin{pmatrix}1&3&6&5&3\\2&1&2&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&3&6&5&3\\0&2&4&1&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\to 4R_2}\begin{pmatrix}1&3&6&5&3\\0&1&2&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&4&1\end{pmatrix}$$

קבוצת הפתרונות:

$$\text{sols}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1-2x_3-4x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mid x_3,x_4\in\mathbb{F}_7\right\}$$

אזי x_3,x_4 משתנים חופשיים.

(ג) מעל $\mathbb{C}$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 0\\ x_1+ix_2-x_3-ix_4 &= 1\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\1&i&-1&-i&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&i-2&-4&-i-4&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\to(-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i)R_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&1&\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i&\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i&-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i&\frac{6}{5}-\frac{12}{5}i&\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i\\0&1&\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i&\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i&-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\end{pmatrix}$$

קבוצת הפתרונות:

$$\text{sols}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{4}{5}+\frac{2}{5}i+(\frac{1}{5}+\frac{1}{8})x_3+(-\frac{6}{5}+\frac{12}{5}i)x_4\\-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i-(\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i)x_3-(\frac{7}{5}+\frac{6}{5}i)x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mid x_3,x_4\in\mathbb{C}\right\}$$

סה"כ x_3,x_4 משתנים חופשיים.

(ד) מעל $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4+x_5 &= 1\\ x_1+x_3+x_4 &= 0\\ x_2+x_4+x_5 &= 1\end{cases}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1\\1&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\0&1&0&1&1&1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

קבוצת הפתרונות:

$$\text{sols}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1-x_4-x_5\\1-x_4\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\mid x_4,x_5\in\{0,1\}\right\}$$

נבחין כי x_4,x_5 משתנים חופשיים.

(6)

(א) להלן כל המטריצות 2×2 המדורגות קאנונית מעל $\mathbb{F}$ כלשהו:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}\uplus\left\{\begin{pmatrix}1&c\\0&0\end{pmatrix}\mid c\in\mathbb{F}\right\}$$

(ב) להלן כל המטריצות 3×3 המדורגות קאנונית מעל $\mathbb{F}$ כלשהו:

$$\left\{I_3,0_3,\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}\uplus\left\{\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbb{F}\right\}\uplus\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbb{F}\right\}$$
$$\uplus\left\{\begin{pmatrix}1&a&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{F}\right\}\uplus\left\{\begin{pmatrix}0&1&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{F}\right\}$$

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד