מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 1

מידע כללי

מגיש: שחר פרץ

תאריך הגשה: 15.11.2023

1. הצרנת תבניות

א. n הוא מספר ראשוני:

i. הצרנה באמצעות |:

$$\forall a \in \mathbb{N}.(a \mid n) \to (a = 1 \lor a = n)$$

ii. הצרנה בלי הסימן:

$$\forall a \in \mathbb{N}.\left(\frac{n}{a} \in \mathbb{Z}\right) \to (a = 1 \lor a = n)$$

ב. קבוצת המספרים A היא מחזורית:

$$\exists t \in R.(t \geq 0) \land (\forall a \in A.\forall b \in \mathbb{Z}.a + t \cdot b \in A)$$

ג. z הוא העיגול כלפי מטה של המספר הממשי r:

$$(z \in \mathbb{Z}) \land (r \in \mathbb{R}) \land (\exists a \in \mathbb{R}.(0 \leq a < 1) \to (r - a = z))$$

2. הוכחות באינדוקציה

סעיף (א)

- צ.ל.:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}.S_n = n^2$$

- נוכיח באינדוקציה:
  - בסיס האידוקציה ($n = 1$):

$$2 \cdot 1 - 1 = 1^2$$

- צעד האינדוקציה: נניח $S_n = n^2$, ונוכיח עבור $S_{n+1} = (n+1)^2$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

- **מש"ל** ■

סעיף (ב)

- צ.ל.:

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} i^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}. S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- נוכיח באינדוקציה:
  - בסיס ($n = 0$):

$$0^2 = \frac{0(0+1)(2 \cdot 0 + 1)}{6} = 0$$

  - צעד: נניח $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ונוכיח $\mathrm{S}_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1) \cdot n + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

- **מש"ל** ■

סעיף (ג)

- צ.ל.:

$$S_n := \sum_{k=0=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}. n \geq 1 \to S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- נוכיח באינדוקציה:

- בסיס:

$$\frac{1}{1(1+1)} = 1 - \frac{1}{2}$$

- צעד: נניח ש־$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ונוכיח $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

- **מש"ל ■**

סעיף (ד)

- צ.ל.:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}. n \geq 3 \to \left(S_n > \frac{3}{5}\right)$$

- נוכיח באינדוקציה:
  - בסיס:

$$\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}$$

  - צעד: נניח שזה נכון על n, ונוכיח עבור $n+1$:
    - במילים אחרות, הנחת האינדוקציה הינה:

$$a := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

    - וצ.ל.:

$$b := \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{3}{5}$$

    - נגדיר:

$$r_1 := \frac{1}{n+1} \cdot 0.5 = \frac{1}{2n+2}$$

- וכמו כן;

$$\left(r_2 := \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = r_1\right)$$
$$\rightarrow (r_2 > r_1)$$
$$\rightarrow (r_2 + r_1 > 2r_1)$$

- נסכם:

$$b = a - 2r_1 + r_1 + r_2$$

- כלומר:

$$b > a > \frac{3}{5}$$

- משמע שצעד האינדוקציה הוכח, **כדרוש**.

- **מש"ל** ■

סעיף (ה)

- צ.ל.:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathbb{R}. \left((x > 0) \land \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right)\right) \rightarrow \left(x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}\right)$$

- נסמן ב־A את סדרת המספרים שמקיימים $x \in \mathbb{R} \land (x > 0) \land \left(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right)$ (מסודרים לפי גודלם) לצורך הנוחות.
- כמו כן, לצורך הנוחות נגדיר גם:

$$Q(m, n) := m^n + \frac{1}{m^n} \in \mathbb{Z}$$

- נסכם: צ.ל.:

$$\forall n \in \mathbb{N}. \forall k \in A. Q(k, n)$$

- נוכיח באינדוקציה על n:
  - בסיס:

$$\forall k \in A. k^1 + \frac{1}{k^1} \in \mathbb{Z}$$

  - שנכון לפי הגדרת המספרים ב־A.
  - צעד: יהי $(k \in \mathbb{N}) \land (0 \leq k < n)$, נניח שמתקיים $\forall r \in A. Q(r, k)$, ונוכיח עבור $\forall r \in A. Q(r, n+1)$ (שילוב של אינדוקציה רגילה עם אינדוקציה מלאה, חוקי כי עובדים על מספרים טבעיים):

- לצורך הנוחות, נניח שהפסוקים הבאים קשורים ע"י הכמת $\forall r \in A$. במילים אחרות, צ.ל. $r^n + \frac{1}{r^n} \in \mathbb{Z}$. נפשט בעזרת הזהות שניתנה כחלק מהתרגיל:

$$\begin{aligned} r^{(n-1)+1} + (r^{-1})^{(n-1)+1} &= (r^{n-1} + (r^{-1})^{n-1})(r + r^{-1}) - r^{n-1} \cdot r^{-1} - r \cdot (r^{-1})^{n-1} \\ &= \left(r^{n-1} + \frac{1}{r^{n-1}}\right)\left(r + \frac{1}{r}\right) - \frac{r^{n-1}}{r} - \frac{r}{r^{n-1}} \end{aligned}$$

- לפי ה"א לכל n טבעי $r^{n-1} + (r^{-1})^{n-1}$ שלם. נוסף על כך, מתוך הגדרת r כאיבר ב־A, ומתוך הגדרת האיברים ב־A, ידוע כי $r + \frac{1}{r}$ שלם. משום שמכפלת שלמים תוצאתה שלמה, נותר להוכיח כי לכל n, $-\left(\frac{r^{n-1}}{r} + \frac{r}{r^{n-1}}\right)$ (יתרת המשוואה) שלם:
  - נצמצם:

$$\begin{aligned} \frac{r^{n-1}}{r} + \frac{r}{r^{n-1}} &= \frac{r^{2n-2} + r^2}{r^n} \\ &= \frac{(r^{n-2} + r^{-n+2})\cancel{r^n}}{\cancel{r^n}} \\ &= r^{n-2} + \frac{1}{r^{n-2}} \end{aligned}$$

  - לפי ה"א לכל n טבעי $r^{n-2} + \frac{1}{r^{n-2}}$ שלם. משום שכפל מספר שלם ב־(-1) הינו מספר שלם, ניתן לקבוע כי $\forall r \in A. -\frac{r^n}{r} - \frac{r}{r^n} \in \mathbb{Z}$, **כדרוש**.
- נסכם: הביטוי מהווה הכפלה של שני מספרים שלמים וחיסור של מספר שלם נוסף, תוצאה אשר ידוע שהיא טבעית. כל זאת בקשיאה עבור $\forall r \in A$. **צעד האינדוקציה הוכח**.

- האינדוקציה הוכחה וההוכחה השולמה, כדרוש.
- **מש"ל ■**

שאלה (ו)

- צ.ל.:

$$\forall n \in \mathbb{N}. n \geq 12 \to (\exists m, k \in \mathbb{N}. n = 3m + 7k)$$

- נוכיח באמצעות אינדוקציה:
  - בסיס ($n = 12$):

$$12 = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 0 \ (m = 4, k = 0)$$

  - צעד: נניח באינדוקציה על n, ונוכיח על $n+1$:
    - לפי הנחת האינדוקציה $\exists a, b \in \mathbb{N}. (a + b = n) \land (3 \mid a) \land (7 \mid b)$.
    - נמצא:

$$n + 1 = a + b + 1 = a - 2 \cdot 3 + b + 7$$

- כלומר, $n+1$ מקיים $\exists k,m\in\mathbb{N}.n+1=3m+7k$ (משום ש־$a,-6$ מתחלקים ב־3, וכי $b,7$ מתחלקים ב־7).
- זאת מותר להגיד בהנחה ש־$m=2,a=6 \implies 3m-6\geq 0$, או במילים אחרות: $(\exists m,kn-6=3m+7k)$ שנכון לפי הנחת האינדוקציה, עבור $n\geq 18$. בשביל $12\leq n<18$ נבדוק ידנית את הטענה, נמצא כי היא נכונה עבור כל חמשת המספרים האלו.
- לכן, **צעד האינדוקציה הוכח**, כדרוש.

- **מש"ל** ■

3. הוכחת היחידות של המשפט היסודי של האריתמטיקה

- צ.ל.: שתי מכפלות של גורמים ראשוניים השוות לאותו מספר n, זהות (עבור $n\geq 2$).
- נוכיח באינדוקציה:
  - בסיס ($n=2$): נכון באופן ריק.
  - לצורך הנוחות, נגדיר $P(x)=\prod_{i=0}^{x} i$
  - צעד: נניח באינדוקציה שזה נכון עבור $2\leq k<n$, ונוכיח עבור n:
    - לפי חלק הקיום במשפט, ניתן לבטא את n כמכפלת ראשוניים. נניח בשלילה כי קיימות שתי מכפלות שונות כאלו, ונקראן a,b:

$$a=\{a_1,a_2,\dots,a_t\}\wedge P(a)=n$$
$$b=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}\wedge P(b)=n$$

    - יהי q ראשוני שמתחלק ב־n, כלומר, הוא גם מחלק את המכפלות a ו־b.לפי הלמה של אוקלידס הוא מחלק את אחד מהמספרים במכפלות, ומשום שהמספרים מכפלות הם ראשוניים הם לא מתחלקים ביותר מעצמם לכן q חייב להיות אותו המספר – במילים אחרות q קיים במכפלות a,b.
    - נתבונן ב־$\frac{P(b)}{q},\frac{P(a)}{q}=\frac{n}{q}$. שתי המכפלות הללו מקיימות את ה"א לכן הן יחודייות לאותו הערך. נוסיף את q למכפלות הראשוניים הקטנות יותר בחזרה ונמצא כי המכפלות זהות והנחת השלילה שגויה.
- **מש"ל** ■

4. הוכחה כי שבר אמיתי הוא סכומם של שני שברים יסודיים שונים זה מזה

סעיף (א) - חימום

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}$$

סעיף (ב) - הוכחה

- צ.ל.:

$$\forall n \in \mathbb{N}.n \geq 1 \rightarrow \forall m \in \mathbb{N}.(m > n) \rightarrow (\exists A := \{a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}\}.(\forall t, m \in \mathbb{N}.a_t \neq a_m) \rightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{A_i} = \frac{n}{m})$$

- נסמן את הטענה האחרונה בגרירה ב־$P(n)$.
- נוכיח באינדוקציה:
  - בסיס ($n = 1$):
    - עבור כל m שמקיים $m > n = 1$. נתבונן בשבר $\frac{1}{m} = \frac{n}{m}$. מכיוון שהוא עצמו שבר יסודי, הוא מהווה את הסכום של עצמו והטענה נכונה באופן טריוואלי.
  - צעד: יהי $0 < k < n$, נניח $Q(k)$ ונוכיח $Q(n)$:
    - יהי $m < n$, נתבונן ב־$\frac{n}{m}$.
    - בתוך הפורום ניתן כי $\exists q \geq 2. \frac{1}{q} < \frac{n}{m} < \frac{1}{q-1}$, כלומר $\frac{1}{q}$ הוא השבר היסודי הכי גדול ב־$\frac{n}{m}$. נגדיר a:

$$a := \frac{n}{m} - \frac{1}{q}$$

    - נוכל להפעיל על a את הנחת האינדוקציה, משום שהוא קטן מ־n. לכן, ניתן להרכיב אותו מחיבור שברים יסודיים. ניתן להוכיח כי $a \neq \frac{1}{q}$, דבר נכון כי $\frac{1}{q}$ הוא השבר היסודי הכי גדול ב־$\frac{n}{m}$. מכאן ש־$\frac{n}{m}$ מורכב משברים יסודיים שונים. צעד האינדוקציה הוכח, והאינדוקציה הושלמה.
- **מש"ל ■**

5. הוכחת עקונות האינדוקציה על בסיס אינדוקציה רגילה

שאלה (א) - עקרון האינדוקציה הזוגית

- צ.ל.:

$$(\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}.\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+2))) \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.\varphi(n))$$

- נניח את אגף ימין של הגרירה ונוכיח את אגף שמאל.
- נגדיר פונקציה חדשה $\psi(x) = \varphi(2x)$:
- נוכיח באינדוקציה רגילה $\forall n \in \mathbb{N}.\psi(n)$:
  - בסיס: $m = 0 \implies \psi(0) = \varphi(0)$ שנכון לפי ההנחה שלנו.
  - צעד (במקום להניח, נוכיח בלוגיקה):

- ▪ נניח $\psi(n)$. לפיכך $\varphi(2n)$. לפי הנתון $\varphi(x) \to \varphi(x+2)$, הטענה $\varphi(2n)$ גוררת $\varphi(2n+2)$, שזה $\psi(n+1)$. לפיכך, צעד האינדוקציה הוכח.
- כמו כן נגדיר $\vartheta(x) = \varphi(2x+1)$, ונוכיח באינדוקציה רגילה $\forall n \in \mathbb{N}.\vartheta(n)$:
  - בסיס: $\vartheta(0) = (1) \implies n = 0$ שנכון לפי ההנחה שלנו.
  - צעד:
    - נניח $\vartheta(n)$, ונוכיח $\vartheta(n+1)$.
    - לפי הגדרת ϑ, $\varphi(2n+1) \iff \vartheta(n)$. מזאת, בשילוב עם הנתונים, ניתן להסיק כי $\varphi(2n+3)$, אשר שווה ערך ל־$\vartheta(n+1)$. צעד האינדוקציה הוכח, כדרוש.
- נסכם:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} \mid \psi(x)\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid \vartheta(x)\}$$

- במילים אחרות, ϑ עוברת על המספרים האי־זוגיים ו־ψ עוברת על הזוגיים, כך שיחדיו הן מרכיבות את קבוצת הטבעיים. משום שאנחנו יודעים שכל אחת מהן נכונה לכל n, אז $\forall n \in \mathbb{N}.\varphi(n)$ נכון, **כדרוש**.
- **מש"ל ■**

שאלה (ב) - עקרון האינדוקציה המלאה

- צ.ל.:

$$(\forall n \in \mathbb{N}.\forall k \in \mathbb{N}.\forall 0 < k < n.\varphi(k) \to \varphi(n)) \to (\forall n \in \mathbb{N}.\varphi(n))$$

- נניח את אגף שמאל של הגרירה, ונוכיח שאגף ימין נובע ממנו:
- נוכיח באינדוקציה $\forall n \in \mathbb{N}.\varphi(n)$:
  - בסיס: נתבונן ב־$n = 0$. לפי הנתון של הגרירה, $\forall k.0 < k < 0 \to \varphi(k) \to \varphi(0)$. הגרירה הראשונה נכונה באופן ריק, לכן $T \to \varphi(0)$ והוכחנו את הבסיס.
  - צעד:
    - טענה (1): נניח $\varphi(n)$. לפי הנתונים, יהי $0 < k < n$ כך ש־$\forall k.\varphi(k)$.
    - טענה (2): נניח בשלילה ש־$\varphi(n+1)$ שגוי. על בסיס זאת $n+1$ הוא המספר הקטן ביותר עליו φ נכון. לפי טענה (1), כל המספרים שלפניו גם הם מקיימים את φ.
    - משמע, שלפי טענה (2), העובדה שכל המספרים שלפניו מקיימים φ **לא גוררת** את $\varphi(n+1)$ (לפי טענת השלילה), זאת בניגוד לנתון כי $\forall n \in \mathbb{N}.\forall 0 \leq k < n.\varphi(k)$. לפי זאת, הנחת שלילה של טענה (2) שגויה ו־$\varphi(n+1)$ נכון.
    - צעד האינדוקציה הוכח, והאינדוקציה הושלמה.
- **מש"ל ■**

(סוף – תרגיל בית 1, 15.11.2023)