אלגברה לינארית 1א ~ תרגיל בית 4

שחר פרץ

28 באפריל 2025

.... (1) ....

נוכיח או נפריך ש־V בצירוף האופרטורים הנתונים הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(א) נסמן $V=\mathbb{Q}$, נוכיח V אינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$. **נפריך** סגירות לכפל בסקלר. נתבונן ב־$1 =: v \in V$, וב־$\sqrt{2}=\lambda\in\mathbb{R}$, אז $\lambda v = 1\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}=V$ ולכן $\lambda v \notin V$ וסתירה לכפל בסקלר.

(ב) **נוכיח** ש־$V=\mathbb{C}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$. כדי להראות זאת, נוכיח למה יותר חזקה: כל שדה $\mathbb{F}$ ש־$\mathbb{R}$ תת־שדה שלו, הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$, כאשר הפעולות מושרות מהשדה $\mathbb{F}$.

הוכחה. יהיה שדה $\mathbb{F}$ כך ש־$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{F}$. אז לכל $v,w\in\mathbb{F}\ \ \lambda\in\mathbb{R},$ מתקיים $v+w, \lambda\cdot v\in\mathbb{F}$ מסגירות $+,\cdot$ פעולות השדה $\mathbb{F}$. קיים ל־$\mathbb{F}$ איבר 0, ולכן $\forall v\exists w\colon v-w=0$ עבור 0 כלשהו (בפרט נבחין שהוא $0_{\mathbb{R}}$). דיסטרבוטיביות, קומטטיביות, אסוציאטיביות, נטרליות כפל ביחידת השדה נתונה מהיות הפעולות מושרות מ־$\mathbb{F}$. קיום איבר נגדי נובע מהיות $\mathbb{F}$ שדה גם כן. ■

בעבור $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$, נבחין כי הפעולות של $\mathbb{R}$ הן הפעולות המושרות מ־$\mathbb{C}$, ולכן ע"פ המשפט שהוכח $\mathbb{C}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(ג) נראה שמ"ו הפונקציות החסומות מ־$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **הוא מ"ו** מעל $\mathbb{R}$ (נסמנו $\mathbb{F}$)

הוכחה. נראה סגירות של פעולות החיבור והכפל בסקלר. יהיו $f,g\in\mathbb{F}$ ו־$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. ניכר כי הפעולות האלו סגורות ב־$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אך יש להראות שהפונקציה נותרת חסומה. מהיות $f,g\in\mathbb{F}$ ידוע ש־f,g נחסמות החל מ־n_f,n_g ב־C_f,C_g בהתאמה (כלומר $\forall n\ge n_f\colon f(n)\le C_f$ באופן דומה על g). אזי נבחין כי:

$$\begin{cases}\forall n\ge n_f\colon \alpha f(n)\le\alpha C_f\\ \forall n\ge n_g\colon \beta g(n)\le\beta C_g\end{cases}\implies \alpha f+\beta g\le\alpha C_f+\beta C_g$$

סה"כ הראינו ש־$\alpha f+\beta g\in\mathbb{F}$ כי היא פונקציה מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ שחסומה בקבוע $\alpha C_f+\beta C_g$.

לכן הפונקציות החסומות במ"ו הפונקציות הממשיות הוא תמ"ו של $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ובפרט מ"ו. ■

(ד) נסמן ב־$\mathbb{F}$ את קבוצת הפונקציות שאם מציבים בהם 17, ונראה **שהיא מ"ו** מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה. באופן דומה לסעיף הקודם, גם כאן יש להוכיח סגירות בלבד. יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ו־$f,g\in\mathbb{F}$, נראה $\alpha f+\beta g\in\mathbb{F}$.

$$(\alpha f+\beta g)(17)\overset{\text{by definition}}{=}(\alpha f)(17)+(\beta g)(17)\overset{\text{by definition}}{=}\alpha f(17)+\beta g(17)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0+0=0$$

כלומר $\alpha f+\beta g$ אכן פונקציה עם שורש ב־17, ולכן היא ב־$\mathbb{F}$ כדרוש. מכאן סגירות. ■

(ה) נראה ש־$\mathbb{F}$, קבוצת הפונקציות מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$ עבורן $f(17)=1$, **אינה מ"ו**.

הוכחה. נתבונן בפונקציות הבאות:

$$f(x)=17,\ \ g(x)=\begin{cases}1 & x=17\\ 0 & \text{else}\end{cases}\qquad f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

נניח בשלילה $\mathbb{F}$ אכן מ"ו, אזי מסגירות:

$$\mathbb{F}\ni f+g,\ \ (f+g)(17)=f(17)+g(17)=1+1=2\neq 1$$

בסתירה להגדרת $\mathbb{F}$. ■

(ו) נראה ש־$\mathbb{F}$, קבוצת הפונקציות בעבורה $\forall n\in\{1,2,3\}\colon f^{(n)}(17)=0$, **היא מ"ו** מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה. בדומה לסעיפים הקודמים, גם כאן יש להוכיח תמ"ו בלבד שכן $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מ"ו.

- סגירות לחיבור: יהיו $f,g\in\mathbb{F}$, אז $f^{(1)}(17)=f^{(2)}(17)=f^{(3)}(17)=g^{(1)}(17)=f^{(2)}(17)=f^{(3)}(17)=0$. מאדטיביות נגזרת:

$$(f+g)'(17)=(f+g)^{(1)}(17)=f^{(1)}(17)+g^{(1)}(17)=0+0=0$$
$$(f+g)''(17)=(f+g)^{(2)}(17)=f^{(2)}(17)+g^{(2)}(17)=0+0=0$$
$$(f+g)'''(17)=(f+g)^{(3)}(17)=f^{(3)}(17)+g^{(3)}(17)=0+0=0$$

וסה"כ בהתאם לעקרון ההפרדה $f+g\in\mathbb{F}$.

- סגירות לכפל: יהיו $f,g\in\mathbb{F}$, אז $f^{(1)}(17)=f^{(2)}(17)=f^{(3)}(17)=0$. לכן מלינארית נגזרת:

$$(\lambda f)'(17)=(\lambda f)^{(1)}(17)=\lambda f^{(1)}(17)=\lambda\cdot 0=0$$
$$(\lambda f)''(17)=(\lambda f)^{(2)}(17)=\lambda f^{(2)}(17)=\lambda\cdot 0=0$$
$$(\lambda f)'''(17)=(\lambda f)^{(3)}(17)=\lambda f^{(3)}(17)=\lambda\cdot 0=0$$

כלומר $\lambda f\in\mathbb{F}$ כדרוש.

- קיום איבר 0: מסגירות לכפל.

סה"כ $\mathbb{F}$ תמ"ו של $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ולכן הוא מ"ו כדרוש. ■

(ז) נתבונן בקבוצה הבאה עם חיבור וכפל בסקלר ב־$\mathbb{R}$ ונראה **שהיא תמ"ו** ובפרט מ"ו של $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{A}:=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\a-b\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

הוכחה. נוכיח שזהו תמ"ו של $\mathbb{R}^3$:

- סגירות חיבור. יהיו $v,u\in\mathcal{A}$. אזי קיימים $a_v,b_v,a_u,b_u\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$v=\begin{pmatrix}a_v\\b_v\\a_v-b_v\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}a_u\\b_u\\a_u-b_u\end{pmatrix}\implies a+b=\begin{pmatrix}(a_v+a_u)\\(b_v+b_u)\\(a_v+a_u)-(b_v+b_u)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\a-b\end{pmatrix}$$

בעבור הסימון $a=a_v+a_u,\ b=b_v+b_u$. סה"כ הראינו קיום a,b מתאימים מעקרון ההחלפה כך ש־$a+b\in\mathcal{A}$ כדרוש.

- סגירות לכפל בסקלר: יהי $v\in\mathcal{A}$, אזי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־$v=(a,b,a-b)$. יהי $\lambda\in\mathbb{R}$, נראה $\lambda v\in\mathcal{A}$.

$$\lambda v=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a-\lambda b\\\lambda b\\\lambda a-\lambda b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde a\\\tilde b\\\tilde a-\tilde b\end{pmatrix}$$

סה"כ בעבור $\tilde a:=\lambda a,\ \tilde b=\lambda b$ מתקיים $\tilde a,\tilde b$ מתאימים כך שמצאנו מעקרון ההפרדה $\lambda v\in\mathcal{A}$, כדרוש.

- קיום 0: מסגירות כפל ובפרט בעבור כפל ב־$\lambda=0$.

סה"כ $\mathcal{A}$ תמ"ו של $\mathbb{R}^3$ ובפרט מ"ו. ■

(ח) **נסתור** את היות הקבוצה הבאה מ"ו מעל $\mathbb{R}$ עם חיבור וכפל בסקלר של וקטורים:

$$\mathcal{A}:=\left\{\begin{pmatrix}a\\a^2\\a\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

הפרכה. נסתור סגירות לכפל בסקלר. ניכר כי בעבור $a=1$ מתקיים ש־$(1,1,1)\in\mathcal{A}$. אזי מסגירות כפל בסקלר נקבל $2(1,1,1)\in\mathcal{A}$, כלומר קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$\mathcal{A}\ni 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a^2\\a\end{pmatrix}$$

וסה"כ קיבלנו $a^2=a=2$. אם $a=0$ אז סתירה כי $a\neq 2$, אחרת נחלק ב־a ונקבל $a=1$ ואז $1=2$ וזו סתירה גם. ■

. . . . (2) . . . .

יהי n טבעי. נוכיח ש־V, הוא קבוצת כל הת"ק של $[n]$, הוא מ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ עם הפעולות $S_1+S_2:=S_1\triangle S_2$ ו־$0\cdot S=\varnothing,\ 1\cdot S=S$.

הוכחה. נוכיח את הדרוש בעבור מ"ו:

1. **סגירות לחיבור:** $\forall S_1,S_2\in\mathcal{P}([n])\colon S_1+S_2=S_1\triangle S_2\subseteq S_1\cup S_2\subseteq[n]\implies S_1+S_2\in\mathcal{P}([n])\quad\top$
2. **סגירות לכפל:** $\forall S_1\in\mathcal{P}([n])\colon\begin{cases}S_1\cdot 0=\varnothing\subseteq[n]\\S_1\cdot 1=S\subseteq[n]\end{cases}\implies\forall\lambda\in\mathbb{Z}_2\colon\lambda S_1\in[n]\implies\lambda S_1\in\mathcal{P}([n])\quad\top$

3. **קומטטיביות חיבור:** $\top \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{P}([n])\colon S_1 + S_2 = S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2) = (S_2 \cup S_1) \setminus (S_2 \cap S_1) = S_2 \triangle S_1$
4. **אסוציאטיביות חיבור:** אסוציאטיביות $\triangle$ הוכחה בבדידה 1.
5. **קיום ניטרלי לחיבור:** $\top \quad \forall S_1 \in \mathcal{P}([n])\colon S_1 + \varnothing = S_1 \triangle \varnothing = (S_1 \cup \varnothing) \setminus (S_1 \cap \varnothing) = S_1 \setminus \varnothing = S_1$
6. **קיום נגדי לחיבור:** ראינו ש־$\varnothing$ ניטרלי לחיבור. נראה שלכל $S_1 \in \mathcal{P}([n])$ קיים $-S_1$ כך ש־$S_1 + (-S_1) = \varnothing$:

$$\forall S_1 \in \mathcal{P}([n]) \longrightarrow S_1 + \underbrace{S_1}_{:=-S_1} = S_1 \triangle S_1 = (S_1 \cup S_1) \setminus (S_1 \cap S_1) = S_1 \setminus S_1 = \varnothing \quad \top$$

7. **דיסטרבוטיביות מהסוג הראשון:**

$$\forall S_1, S_1 \in \mathcal{P}([n]),\ \lambda \in \mathbb{Z}_2\colon \begin{cases} \lambda = 0\colon & \lambda(S_1 + S_2) = \varnothing = \varnothing \triangle \varnothing = \lambda S_1 + \lambda S_2 \\ \lambda = 1\colon & \lambda(S_1 + S_2) = S_1 + S_2 = \lambda S_1 + \lambda S_2 \end{cases}$$

8. **דיסטרבוטיביות מהסוג השני:** יהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$ סקלרים ו־$S \in \mathcal{P}([n])$ וקטור, אז אם $\lambda + \mu = 1$ אז אחד מהם 1 והשני 0, בה"כ $\lambda = 1 \wedge \mu = 0$. נסיק $(\lambda + \mu)S = 1 \cdot S = S = 1 \cdot S \triangle \varnothing = \lambda \cdot S + \mu \cdot S$ כדרוש. אחרת $\lambda + \mu = 0$, ולכן שניהם 0 או שניהם 1.
אם שניהם 0:

$$(\lambda + \mu)S = 0 \cdot S = \varnothing = \varnothing + \varnothing = \lambda S + \mu S$$

אחרת שניהם 1:

$$(\lambda + \mu)S = 0 \cdot S = \varnothing = S - S = S \triangle S = S + S = \lambda S + \mu S$$

9. **אסוציאטיביות כפל:** יהיו $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}_2$ סקלרים ו־$S \in \mathcal{P}([n])$ וקטור. אם אחד מהם הוא 0 בה"כ $\lambda = 0$, אז $\lambda(\mu S) = \varnothing = \mu(\lambda S)$.
אחרת שניהם 1, ואז $\lambda(\mu S) = \mu S = S = \lambda S = \mu(\lambda S)$ כדרוש.
10. **ניטרליות כפל ביחידה:** נתון ישירות ש־$\forall S \in \mathcal{P}([n])\colon 1 \cdot S = S$.

סה"כ הוכחנו את כל אקסיומות המ"ו כדרוש. ■

. . . . (3) . . . .

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו־$U \subseteq V$ ת"ק לא ריקה כך ש־U סגורה לחיבור.

(א) נראה שעבור $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ מתקיים ש־U תמ"ו של V.

הוכחה. נראה סגירות לחיבור. יהי $n \in \mathbb{F}_p$ (נציג אז $0 \leq n < p$). יהי $v \in U$, ונראה $nv \in U$.
ידוע קיום איבר יחידה ב־$\mathbb{Z}_p$ השדה (שדה כי נתון p ראשוני). אזי $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ times}}$ בתוך $\mathbb{Z}_p$ (הביטוי "n פעמים" מוגדר רק כי עובדים בתוך $\mathbb{Z}_p$ שדה סופי כלומר $n \in \mathbb{N}$). מדיסטריבטיביות:

$$nv = \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ times}} v = \underbrace{1v + \cdots + 1v}_{n \text{ times}} \overset{(1)}{=} v + \cdots + v \in \mathbb{F}$$

כאשר הטענה ש־$v + \cdots + v \in \mathbb{F}$ נובעת מסגירות לחיבור שנתונה, והשוויון (1) נכון כי $1 \cdot v = v$ מאקסיומות המ"ו V ש־U מוכל בו ומשרה פעולות ממנו.

הראינו סגירות לכפל. נותר להראות קיום איבר 0, שנובע מהזהות $v \cdot 0_{\mathbb{Z}_p} = 0_U$ שנכונה ב־U, ביחד עם הסגירות לכפל.

סה"כ ישנה סגירות לחיבור ולכפל וקיום איבר 0, ולכן U תמ"ו כדרוש. ■

(ב) נראה שהטענה לעיל לא נכונה לכל $\mathbb{F}$ שדה.

הפרכה. נתבונן ב־$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ וב־$V = \mathbb{R}$, בסעיף 1(ב) הראינו למה לפיה ש־U מ"ו מעל $\mathbb{F}$ שכן $\mathbb{F} = V \subseteq \mathbb{F}$. נבחין כי $V = \mathbb{Z}$ מקיים $U \subseteq V$, וכן הוא סגור לחיבור, אך נבחין שאיננו מ"ו שכן לכל $n \in U$ מתקיים ש־$\frac{1}{2n} \in \mathbb{F}$ ולכן סגירות הכפל בסקלר גורר $\frac{n}{2n} \in U = \mathbb{Z}$ אך $0.5 \notin \mathbb{Z}$ וזו סתירה. ■

המשך בעמוד הבא

. . . . (4) . . . .

נגדיר:

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \forall i,j\colon A_{ij} = A_{ji}\},\ \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \forall i,j\colon A_{ij} = -A_{ji}\}$$

נראה ש־$M_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Sym}(\mathbb{F}) + \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$ (סכום ישר) נסמן $\mathrm{Sym} := \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F})$ ו־$\mathrm{ASym} := \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$.

(א) נבחין ש־$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}), \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F}) \subseteq M_n(\mathbb{F})$ מעקרון ההפרדה. עתה נראה בשניהם סגירות לחיבור ולכפל:

- **סגירות לכפל:**
  - עבור Sym, יהיו $M \in \mathrm{Sym},\ \lambda \in \mathbb{F}$, ונבחין שלכל $i,j \in [n]$ עדיין λM מקיים $(\lambda M)_{ij} = \lambda(M) = \lambda(M)_{ji} = (\lambda M)_{ji}$.
  - עבור ASym, לכל $M \in \mathrm{ASym},\ \lambda \in \mathbb{F}$ עדיין מתקיים $\forall i,j \in [n]\colon (\lambda M)_{ij} = \lambda(M)_{ij} = -\lambda(M)_{ji} = -(\lambda M)_{ji}$.
- **סגירות לחיבור:**
  - עבור Sym, יהיו $M,P \in \mathrm{Sym}$ ואכן $(M+P)_{ij} = (M)_{ij} + (P)_{ij} = (M)_{ji} + (P)_{ji} = (M+P)_{ji}$.
  - עבור ASym, יהיו $M,P \in \mathrm{ASym}$ ואכן $(M+P)_{ij} = (M)_{ij} + (P)_{ij} = -(M)_{ji} - (P)_{ji} = -(M+P)_{ji}$.
- **קיום אפס:**
  - עבור Sym נבחין ש־ $(0_M)_{ij} = 0_{\mathbb{F}} = (0_M)_{ji}$
  - עבור ASym נבחין ש־: $(0_M)_{ij} = 0_{\mathbb{F}} = -0_{\mathbb{F}} = -(0_M)_{ji}$

סה"כ הראינו ש־$\mathrm{Sym},\ \mathrm{ASym}$ תמ"וים. נראה ש־$\mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym} = \{0_M\}$. יהי $A \in \mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym}$. אזי:

$$-(A)_{ij} \overset{\mathrm{Sym}}{=} -(A)_{ji} \overset{\mathrm{ASym}}{=} (A)_{ij}$$

אם $(A)_{ij} \neq 0$, אז נוכל לחלק בו ולקבל $1 = -1$ וזו סתירה. סה"כ $\forall i,j \in [n]\colon (A)_{ij} = 0$, ולכן $A = 0_M$, כלומר אכן $\mathrm{Sym} \cap \mathrm{ASym} = \{0_M\}$ כדרוש.

(ב) עתה נראה שלכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיימות שתי מטריצות $A_s,\ A_{as} \in \mathrm{ASym}$ כך ש־$A = A_s + A_{as}$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, נסמן $A_s = \frac{A+A^T}{2}$ ו־$A_{as} = \frac{A-A^T}{2}$. אזי:

- **$A_s \in \mathrm{Sym}$:** יהיו $i,j \in [n]$, אז:

$$(A_s)_{ij} = \left(\frac{A+A^T}{2}\right)_{ij} = \frac{\overbrace{(A)_{ij}}^{(A^T)_{ji}} + \overbrace{(A^T)_{ij}}^{(A)_{ji}}}{2} = \frac{(A)_{ji} + (A^T)_{ji}}{2} = (A_s)_{ji} \quad \top$$

- **$A_{as} \in \mathrm{Sym}$:** יהיו $i,j \in [n]$, אז:

$$(A_{as})_{ij} = \left(\frac{A-A^T}{2}\right)_{ij} = \frac{\overbrace{(A)_{ij}}^{(A^T)_{ji}} - \overbrace{(A^T)_{ij}}^{(A)_{ji}}}{2} = \frac{(A^T)_{ji} - (A)_{ji}}{2} = -\frac{(A)_{ji} + (A^T)_{ji}}{2} = -(A_s)_{ji} \quad \top$$

- **$A_s + A_{as} = A$:**

$$A_s + A_{as} = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2} = \frac{A + A + \cancel{A^T - A^T}}{2} = \frac{2A}{2} = A \quad \top$$

■

סה"כ הראינו ש־$M_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{F}) \oplus \mathrm{ASym}_n(\mathbb{F})$ סכום ישר.

. . . . (5) . . . .

(א) ניזכר בכך ש־$\mathbb{R}$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{Q}$ על החיבור והכפל הסטנדרטיים. נראה ש־$\mathbb{Q}$ תמ"ו שלו.

הוכחה. נראה סגירות וקיום 0:

- סגירות: יהיו $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q} = \mathbb{F}$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} = V$. צ.ל. $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \in \mathbb{Q} = V$. מהיות $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ידוע שקיימים $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\frac{a_1}{b_1} = q_1,\ \frac{a_2}{b_2} = q_2$. באופן דומה קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lambda_1,\ \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \lambda_2$ אזי:

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{\alpha_1 a_1 \beta_2 b_2 + \alpha_2 a_2 \beta_1 \beta_2}{\beta_1 b_1 \beta_2 b_2} =: \frac{n}{m}$$

ומסגירות חיבור וכפל ב־$\mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ ולכן $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \in \mathbb{Q}$ כדרוש.

- קיום אפס: כי $0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{Q}}$ ו־$0_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ כי $0 = \frac{0}{1}$.

■

(ב) נסתור את זה ש־$\mathbb{Q}$ הוא תמ"ו של $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{R}$. זאת כי הוא אינו סגור לכפל בסקלרים מ־$\mathbb{R}$: $1 \in \mathbb{Q}$ ו־$\sqrt{2} \in \mathbb{R} = \mathbb{F}$ אך $1 \cdot \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(6)

יהי V מ"ו ו־$S, T \subseteq V$ קבוצות מגודל סופי. נוכיח ונפריך את הטענות הבאות:

(א) נוכיח ש־$\operatorname{span}(S \cap T) \subseteq \operatorname{span} S \cap \operatorname{span} T$.

הוכחה. יהי וקטור $v \in \operatorname{span}(S \cap T)$, נראה $v \in \operatorname{span} S \wedge v \in \operatorname{span} T$. משום ש־$v \in \operatorname{span}(S \cap T)$ אזי הוא ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית של הוקטורים $w_1 \dots w_k \in S \cap T$. בפרט, הוא ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית של $w_1 \dots w_k \in S$ ולכן $v \in \operatorname{span} S$ מהגדרה, ובאופן דומה הוא ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית של אותם וקטורים $w_1 \dots w_k \in T$ כך ש־$v \in \operatorname{span} T$ מהגדרה, וסה"כ מהגדרת $\cap$ נבחין ש־$v \in \operatorname{span} S \cap \operatorname{span} T$ כדרוש. ■

(ב) נפריך ש־$\operatorname{span}(S \cap T) \supseteq \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$.

הפרכה. נתבונן בדוגמה הנגדית הבאה, מעל $\mathbb{R}$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \ T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

משום ש־S, T קבוצות בת"ליות של שני וקטורים מגודל 2, נבחין ש־$\operatorname{span} T = \operatorname{span} S = \mathbb{R}^2$. אזי, $\operatorname{span} T \cap \operatorname{span} S = \mathbb{R}^2$. אך, $S \cap T = \varnothing$ ולכן $\operatorname{span}(S \cap T) = \{0\}$. לכן $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span} S \cap \operatorname{span} T \nsubseteq \operatorname{span}(S \cap T) = \{0\}$ ■

(ג) נפריך ש־$\operatorname{span}(S \cup T) = \operatorname{span} S \cup \operatorname{span} T$.

הפרכה. נתבונן בדוגמה הבאה:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \implies S \cup T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

אזי, $S \cup T$ הבסיס הסטנדטי ל־$\mathbb{R}^2$ ולכן $\operatorname{span}(S \cup T) = \mathbb{R}^2$, ובפרט $\binom{1}{1} \in \operatorname{span}(S \cup T)$. נניח בשלילה את הטענה, אז $\binom{1}{1} \in \operatorname{span} S \cup \operatorname{span} T$, אך:

$$\operatorname{span} S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \ \operatorname{span} T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

אך אף אחת מהקורדינאטות של $\binom{1}{1}$ אינה 0, וזו סתירה לטענה. ■

(7)

יהי V מ"ו ו־$S, T \subseteq V$ קבוצות סופיות. נוכיח את הטענות הבאות:

(א) נוכיח שאם $S \subseteq T$ אז $\operatorname{span} S \subseteq \operatorname{span} T$.

הוכחה. יהי $v \in \operatorname{span} S$. אזי הוא ניתן לביטוי כקמובינציה לינארית של הוקטורים $w_1 \dots w_k \in S$. משום ש־$S \subseteq T$, אזי $w_1 \dots w_k \in T$. לכן, הוא ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית של וקטורים מ־T, כלומר $v \in \operatorname{span} T$. סה"כ מהגדרה משום ש־$v \in \operatorname{span} S \to v \in \operatorname{span} T$ אז $\operatorname{span} S \subseteq \operatorname{span} T$. ■

(ב) נוכיח $(S \subseteq \operatorname{span} T \wedge T \subseteq \operatorname{span} S) \iff \operatorname{span} S = \operatorname{span} T$

הוכחה. נוכיח את שני כיווני הגרירה.

$\implies$ נניח $\operatorname{span} S = \operatorname{span} T$ ונוכיח $S \subseteq \operatorname{span} T \wedge T \subseteq \operatorname{span} S$. זאת כי:

$$S \subseteq \operatorname{span} S \subseteq \operatorname{span} T \wedge T \subseteq \operatorname{span} T \subseteq \operatorname{span} S \implies S \subseteq \operatorname{span} T \wedge T \subseteq \operatorname{span} S \quad \top$$

$\impliedby$ נניח $S \subseteq \operatorname{span} T \wedge T \subseteq \operatorname{span} S$ ונוכיח $\operatorname{span} S = \operatorname{span} T$. נעשה זאת באמצעות הוכחת הכלה דו כיוונית. ראשית נראה $\operatorname{span} S \subseteq \operatorname{span} T$. יהי $v \in \operatorname{span} S$, אזי הוא ניתן לביטוי כקומבינציה לינארית $v = \alpha_1 w_1 \dots \alpha_k w_k$ כאשר $(w_i)_{i=0}^k \in S$ ו־$(\alpha_i)_{i=0}^k \in \mathbb{F}$, אז $(w_i)_{i=0}^k \in \operatorname{span} T$ ומסגירות חיבור וכפל בסקלר, הוקטור $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i \in \operatorname{span} T$, וסה"כ $v \in \operatorname{span} T$ כלומר $\operatorname{span} S \subseteq \operatorname{span} T$. באופן סמטרי לחלוטין (שכן הנתונים סימטריים) נבחין ש־$\operatorname{span} T \subseteq \operatorname{span} S$, וסה"כ מהכלה דו־כיוונית $\operatorname{span} S = \operatorname{span} T$ כדרוש.

■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד