לינארית 2א 11 ~ צורת ג'ורדן

שחר פרץ

14 במאי 2025

תזכורת: $T\colon V\to V$ ט"ל, ו־:

$$\forall i\neq j\colon\ \gcd(g_i,g_j)=1\land m_T(x)=\prod_{i=1}^{s}g_i$$

אז:

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker(g_i(T))\land\forall i\colon m_{T|_{\ker g_i(T)}}=g_i$$

בעיה: $A=M_5(\mathbb{Z})$, קבעו אם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

- נחשב את $f_A(x)$
- נמצא שורשים, אלו הם הע"ע
- לכל ע"ע נחשב את v_λ
- אם סכום הממדים מסעיף ג' הוא 5, אז היא לכסינה
- T לכסינה אמ"מ קיים בסיס ו,ע אמ"מ ריבוי גיאומטרי = ריבוי אלגברי

אבל הוכיח שאין פתרונות לפולינומים ממעלה חמישית ויותר, וגלואה מצא דוגמאות לפולינומים שאי אפשר לבצע עליהם נוסחאת שורשים ופיתח את התורה של הרחבת שדות לשם כך.

היוונים העתיקים ביססו את הגיאומטריה שלהם באמצעות דברים שאפשר לבדוק עם שדה ומחוגה. באמצעות כלים של גלואה אפשר לראות מה אפשר לעשות עם האמצעים האלו, ולהוכיח שלוש בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור – האם אפשר לרבע את המעגל (האם אפשר לבנות באמצעות שדה ומחוגה ריבוע ששטחו שווה לשטח המעגל), או במילים אחרות, האם אפשר למצוא את $\sqrt{\pi}$ – אי אפשר כי זה לא מספר אלגברי. שאלות אחרות היו, בהינתן קובייה, האם אני יכול למצוא קובייה בנפח כפול? באותה המידה אי אפשר למצוא את $\sqrt{3}$. שאלה אחרת הייתה האם אפשר לחלק זווית ל־3 חלקים שווים.

גלואה הראה שכדי לעשות את זה צריך למצוא שורשים שלישיים של כל מני דברים, שבאמצעות סרגל ומחוגה אי אפשר לעשות זאת. בעיות שהיו פתוחות לעולם המתמטי במשך אלפי שנים נפתרו בעזרת אותן התורות.

הגדרה. בהינתן $\forall i\neq j\colon\lambda_i\neq\lambda_j\quad f(x)=\prod_k(x-\lambda_k)^{r_k}$. אז $f^{\text{red}}=\prod_k(x-\lambda_k)$

טענה משיעורי הבית:

$$f^{\text{red}}=\frac{f}{\gcd(f,f')}$$

משפט 1. A לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}}(A)=0$

למה 1. $f_A^{\text{red}}\mid m_A$ ושוויון אמ"מ A לכסינה.

הוכחה. יהיו $\lambda_1\dots\lambda_r$ הע"ע של A (אפשר בה"כ להרחיב שדה כדי שהם יהיו קיימים). אז אם $f_A(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{s_i}$ ומתקיים $m_A(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{r_i}$ וידוע $1\leq r_i\leq s_i$ ולכן $f_A^{\text{red}}\mid m_A$.

עתה נוכיח את החלק השני של המשפט. אם A לכסינה, אז יש בסיס של ו"עים ועם λ הוא ע"ע של ו"ע בבסיס V אז $Av_\lambda-\lambda v_\lambda=0$, ולכן $f_A^{\text{red}}(A)=0$ וסה"כ $m_A\mid f_A$.

אם $f_A^{\text{red}}=m_A$ אז m_A מכפלה של גורמים לינארית זרים, וראינו גרירה ללכסינות. ■

עתה נוכיח את מהשפט 1:

הוכחה. A לכסינה אמ"מ $m_A=f_A^{\text{red}}$, ואנחנו יודעים כי $m_A(A)=0$ ולכן A לכסינה אמ"מ $f_A^{\text{red}}(A)=0$. ■

משפט 2. נניח $T\colon V\to V$ לכסינה, וקיים $W\subseteq V$ תמ"ו T-שמור. אז $T|_W$ לכסינה.

הוכחה. נסמן $S = T_{|W}$. אנחנו יודעים $m_T(T) = 0$ ולכן $m_T(S) = 0$. ידוע $m_T = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)$ ולכן $m_S \mid m_T$ ולכן m_S מתפרק לגורמים לינארים זרים, סה"כ S לכסינה. ■

מטרה: בהינתן $T\colon V \to V$ נרצה לפרק את V לסכומים ישרים של מרחבים T־אינווריאנטים.

הגדרה 1. יהי $T\colon V \to V$ ט"ל. נאמר ש־V פריק ל־T אם קיימים $U, W \subseteq V$ תמ"וים כך ש:

$$V = U \oplus W \quad \wedge \quad \dim U, \dim W > 0 \quad \wedge \quad U, W \text{ are } T\text{-invariant}$$

מעתה ואילך, נניח ש־$f_T(x)$ מתפצל מעל f לגורמים לינארים (כלומר, נרחיב לשדה סגור אלגברית).

מסקנה 1. (ממשפט הפירוק הפרימרי) אם $S \geq 2$, ידוע־$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker g_i(T)$ ולכן V פריק ביחס ל־T. בהינתן ההנחה כי f_T מתפצל לחלוטין, ונניח V אי־פריק ביחס ל־T, אז $m_T(x) = (x-\lambda)^r$.

הגדרה 2. $T\colon V \to V$ ט"ל. T נקראת נילפוטנטית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$T^n = 0$. באופן דומה A מטריצה נילפוטנטית אם $\exists n \in \mathbb{N}\colon A^n = 0$.

הגדרה 3. עבור n המינימלי שעבורו $T^n = 0/A^n = 0$, אז n הנ"ל נקרא דרגת הנילפוטנטיות של T/A, ומסמנים $n(T)/n(A)$.

"ניל" בא מלשון null. הרעיון: דבר מה שמתבטל.

דוגמה. בסיטואציה ש־$m_T(x) = (x-\lambda)^r$ נסיק ש־:

$$(T - \lambda I)^r = 0 \implies S = T - \lambda I,\ n(S) = r$$

הערה: כל פירוק של V ל־T נותן פירוק שלו ל־$T - \lambda I$ ולהיפך.

הוכחה. ההערה נכונה כי אם $V = U \oplus W$ כאשר U, W הם T־שמורים, לא טרוויאלים, אז הם גם $T - \lambda I$־שמורים. זאת כי אם U הוא T שמור אז:

$$\forall u \in U\colon T(u) \in U \implies (T-\lambda)(u) = \underset{\in U}{T(u)} - \underset{\in U}{\lambda u} \in U$$

■

המשך ההערה. כדי להבין איך נראים תת־מרחבים אי־פריקים, עשינו רדוקציה לט"ל ניל' [רדוקציה=מספיק לי להבין את המקרה הזה בשביל להבין את המקרה הכללי].

מעתה נניח שכל $T\colon V \to V$ ניל'

משפט 3. $T\colon V \to V$ ניל' אז לכל $0 \neq v \in V$ הקבוצה $v, Tv, \ldots, T^k v \neq 0$ היא בת"ל.

הוכחה. יהיו $\alpha_0 \ldots \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש־$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i T^{(i)}(v) = 0$. נניח בשלילה שהצירוף אינו טרוויאלי. אז קיים j מינימלי שעבורו $\alpha_j \neq 0$. נניח n המקסימלי שלא מאפס. אז:

$$T^{n-j}\left(\sum \alpha_i T^{(i)}(v)\right) = T^{n-j}\left(\sum_{i=j}^{k} \alpha_i T^i(v)\right) = \alpha_j T^{n-1}(v) + 0 = 0$$

אבל $\alpha_j, T^{n-1} \neq 0$ וזו סתירה. ■

הגדרה 4. קבוצה מהצורה $\{v, Tv \cdots T^k v\}$ כאשר $T^{k+1} v = 0$ והוא המינימלי, נקרתא שרשרת.

0.1 ציקליות

הגדרה 5. תמ"ו שקיים לו בסיס שהוא שרשרת, נקרא ציקלי.

(ראה לינארית 2א סיכום 8)

אנטי־דוגמה: ישנם מ"וים שאינם T־ציקליים. למשל:

$$V = \left\{ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P(x) + h(y) \mid n \leq \text{פולינומים ממעלה } p, h \right\}$$

ו־T אופרטור הגזירה הפורמלית. כדי ש־V יהיה ציקלי, צריך למצוא בסיס ציקלי שממדו הוא דרגת הנילפוטנטיות. נבחין ש־$n(T) = n+1$, וידוע ש־$\dim V = 2n+1$, ולכן שרשרת מקסימלית באורך $n+1$ ולכן לא יכול להיות בסיס שרשרת. לכן V אינו T־ציקלי.

מסקנה 2. יהי $T\colon V \to V$ ניל' ו־$\dim V = n$ אז $n(T) \leq n$ וישנו שוויון אמ"מ V ציקלי.

מסקנה 3. אם $T\colon V \to V$ ניל' ו־V ציקלי אז V אי־פריק ל־T.

הוכחה. נניח בשלילה שישנו פירוק לא טרוויאלי של V ל־T. אז $V = U \oplus W$ לא טרוויאלים. נסמן $\dim U = k, \dim W = \ell$ וידוע $k, \ell < n$. בה"כ $k \geq \ell$. נסמן $B_v = (v, Tv \dots T^{n-1}v)$. קיימים (ויחידים) $u \in U, w \in W$ כך ש־$v = u + w$. אז:

$$T^k v = T^k u + T^k w$$

אך משום ש־T ניל' אז $T_{|_U}, T_{|_W}$ ניל' גם כן. ידוע $k \leq n(T_{|_U}), n(T_{|_W})$ ולכן בפרט $T^k(u) = T^k(w) = 0$ ולכן $T^k v = 0$ אבל $k < n \wedge T^k(v) \in B_v$. ■

משפט 4. תהי $T\colon V \to V$ ניל' ונניח U תמ"ו של V הוא T־אינו' וציקלי, אז עבור $S =: T_{_U}$:

1. $\dim U \leq n(T)$
2. $\operatorname{Im}(T_{_U}) = T(U)$ ציקלי ו־$\dim T(U) = \dim U - 1$

הוכחה.

1. $n(T) \geq n(T_{|_U})$ וגם $\dim U = n(T_{_W})$
2. $T(u) = T(\operatorname{span}(v, \dots T^k v)) = \operatorname{span}(Tv \dots T(T^k v))$ ז"א $T(U) = \operatorname{span}(Tv \dots T^k v)$, זו קבוצה בת"ל ופורתש את $T(U)$ ולכן $\dim T(U) = \dim U - 1$.

■

הגדרה 6. $U \subseteq V$ תמ"ו ציקלי ייקרא ציקלי מקסימלי אם $\dim U = n(T)$.

משפט 5. לכל V מ"ו, $T\colon V \to V$ ניל' קיים תמ"ו ציקלי מקסימלי.

הוכחה. קיים $v \in V$ כך ש־$T^{n(T)-1}v \neq 0$. אז $v \neq 0$ ו־$v, Tv, \dots T^{n(T)-1}$ ומטעה מקודם בת"ל ולכן $\operatorname{span}(v \dots T^{n(T)-1})$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. ■

משפט 6. נניח $U \subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי. אזי:

1. אם $T(U) \subseteq T(V)$ הוא גם ציקלי מקסימלי. (הערה: הורדת הממד באחד מועילה מאוד באינדוקציה)
2. $U \cap T(V) = T(U)$

הוכחה.

1. U – ציקלי. לכן $\dim T(U) = \dim U - 1$. טענה:

$$\dim T(U) = n\left(T_{|_{T(V)}}\right) = n(T) - 1$$

וסיימנו.

2. ידוע $T(U) \subseteq U$ כי U ציקלי ולכן שמור, וכן $U \subseteq V$ והסקנו $T(U) \subseteq T(V)$, לכן $T(U) \subseteq U \cap T(V)$

עתה נוכיח שוויון באמצעות שיקולי ממד. אם לא היה שוויון אז:

$$T(U) \subsetneq U \cap T(V) \subseteq U \implies \dim T(U) < \dim(U \cap T(V)) \leq \dim(T(U)) + 1 \implies U \cap T(V) = U$$

זו סתירה כי:

$$U \cap T(V) \subseteq T(V) \implies n(T_{|_{T(v)}}) = n(T) - 1 \implies n(T) = \dim U \leq n(T) - 1$$

■

0.2 צורת מייקל ג'ורדן לט"ל ניל'

משפט 7. (המשלים הישר לתמ"ו ציקלי מקסימלי) נניח $T\colon V \to V$ ט"ל ליני ניל' (ניל"י), $U \subseteq V$ תמ"ו ציקלי מקסימלי אז קיים $W \subseteq V$ תמ"ו T־איני' כך ש־$V = U \oplus W$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n = n(T)$.

בסיס: אם $n(T) = 1$ אז $T = 0$ "יש מה להוכיח בכלל" אז כל $W \subseteq V$ הוא T־אינ'. והיות שכל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס, אז $U = \operatorname{span}(v)$ אז $W = \operatorname{span}(v_2 \dots v_m)$ כאשר $B_V = (v := v_1 \dots v_m)$.

צעד: ("צעד, מעבר, אותו דבר, תקראו לזה איך שבא לכם") נניח שאנו יודעים את נכונות הטענה עבור $n = n(T) - 1$. נוכיח עבור $n = n(T)$. נצמצם את T ל־$T_{|_{T(V)}}$. ידוע $T(U) \subseteq T(V)$ ציקלי מקסימלי. לכן, לפי ה.א. קיים W_1 הוא T־אינ' כך ש־$T(V) = T(U) \oplus W_1$. נגדיר $W_2 = \{v \in V \mid Tv \in W_1\}$. אז

למה 2. ("למה א'")

- $U+W_2=V$ (לאו דווקא סכום ישר)
- $U\cap W_1=\{0\}$

למה 3. ("למה ב'") בהינתן $W_1\subseteq W_2$ ו־$U\subseteq V$ תמ"ו כך ש־$U+W_2=V$ וגם $U\cap W_1=\{0\}$ אז קיים $W'\subseteq V$ כך ש־$W_1\subseteq W'\subseteq W_2$ וגם $U\oplus W'=V$

נניח שהוכחנו את הלמות. יהי $w\in W_1$ אז $T(w)\in W_1$ ולכן $w\in W_2$ ולכן $W_1\subseteq W_2$. אז מצאנו W' תמ"ו של V כך ש־$W_1\subseteq W'\subseteq W_2$. יהי $w\in W'$ בפרט $w\in W_2$ ולכן $T(w)=W_1\subseteq W'$.

ולכן מש"ל משפט. ■

ציור של למה 2: אני לא יודע לעבוד עם tikz מספיק טוב, ואני בטוח ש־chatGPT יוכל לעשות tikz עבורי, אבל אני גם רוצה להיות מרוכז בהרצאה. אז בבקשה פשוט תעשו דיאגרמת ואן ללמה ב'. גם המרצה לא הוכיח, זה משחקים על הרחבות בסיס וממדים בצורה כזו שאתם מכירים מלינארית 1א. אודיסאים: תראו את הלמה הזו בשיעורי הבית. אודיסאים שחוזרים על לינארית 1א: זה תרגול טוב למבחן.

נוכיח את למה א'.

הוכחה. יהי $v\in V$, נביט ב־$T(v)$. קיימים $u\in U,w_1\in W_1$ כך ש־:

$$Tv=Tu+w_1\implies Tv-Tu=w_1\implies T(v-u)=w_1\in W_1$$

ידוע $v=v-u+u$. לכן $v-u\in W_2\implies T(v-u)\in W_1$.

אזי משהו $V=U+W_2$ ו־$W_1\subseteq T(V)$ ולכן:

$$U\cap W_1=U\cap(T(V)\cap W_1)$$

ידוע ש־:

$$U\cap W_1=(U\cap T(V))\cap W_1\implies U\cap T(V)=T(U)\implies T(V)=T(U)\oplus W_1\implies U\cap W_1=T(U)\cap W_1=\{0\}$$

■

preview לאיך נראה בלוק ג'ורדן למטריצה ניל': יהי U תמ"ו ו־T־ציקלי, כאשר T ניל'. נגדיר $B_U=(v\dots T^{n-1}v)$. אז:

$$[T_{|U}]_{B_U}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0\end{pmatrix}=J_n(0)$$

הוא בלוק ג'ורדן אלמנטרי נילפוטנטי.

....