תרגיל בית 3 - אלגברה לינארית 2א' לאודיסיאה סייבר

1. א) תהי מטריצה $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ לא הפיכה, שמקיימת $\operatorname{rank}(7I - A) = 4$, $\operatorname{rank}(-3I - A) = 7$. הוכיחו כי A ניתנת ללכסון ומצאו את הצורה האלכסונית שלה.
   ב) תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ עם $\det A < 0$, $\operatorname{tr} A = 0$. הוכיחו ש-A לכסינה, וש-A^2 מטריצה סקלרית (כלומר $A^2 = \lambda I$ עבור $\lambda \in \mathbb{R}$)
2. נגדיר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ כאשר $a \in \mathbb{R}$. מצאו את הו"ע והע"ע של A, וקבעו עבור אילו $a \in \mathbb{R}$, המטריצה A היא לכסינה.
3. יהי $V = \mathbb{C}_n[x]$. נגדיר העתקה $T \colon V \to V$ ע"י $(T(p))(x) = p'(x) + p(0) \cdot x^n$. הוכיחו כי העתקה זו לכסינה.
4. תהי $T \colon V \to V$ ט"ל כך ש-$T^2 = T$. הוכיחו ש-T לכסינה.
5. מצאו את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ע"ע של המטריצות הבאות:
   א) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$
   ב) $\begin{pmatrix} -14 & -5 & -22 \\ 8 & 4 & 12 \\ 8 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{C}$
   ג) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{F}_3$
6. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש-$\operatorname{rank}(A) = 1$. הוכיחו ש-$A$ לכסינה אמ"מ $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.