קומבי 8 $\sim$ נטלי שלום

שחר פרץ

5 ביוני 2024

1 המשך ההוכחה מהשיעור הקודם

תזכורת להגדרה ולסימון: $\mathcal{C}_n =$ מספר קטלן ה־n־י, מספר הסדרות המאוזנות באורך $2n$.

טענה: $\begin{cases} \mathcal{C}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{C}_i \cdot \mathcal{C}_{n-i-1} \\ \mathcal{C}_0 = 1 \end{cases}$

טענה: (הביטוי הסגור ל־$\mathcal{C}_n$) $\mathcal{C}_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

הוכחה. [המשך ההוכחה מהשיעור הקודם] [ההוכחה קומבינטורית]. הבעיה שרצינו לראות שקילות לה, היא מה מספר הדרכים במישור, להגיע מהנקודה $(0,0)$ ל־(n,n) ע"י צעדים של ימינה ומעלה, מבלי להיות מעל האלכסון $y = x$?

אגף שמאל, כבור הוסבר בשיעור הקודם.

נסביר את אגף ימין (הביטוי הבינומי). נסתכל על כל ההכילוכים של ימינה ולמעלה מ־$(0,0)$ ל־(n,n). עלינו לבצע n צעדים ימינה, ו־n צעדים למעלה. נבחר מתוך $2n$ צעדים, אילו n הם ימינה, סה"כ $\binom{2n}{n}$.

נסתכל על הליוך לא חוקי כלשהו. נתבונן בנקודה הראשונה בה עברנו את האלכסון, שערכה בהכרח יהיה $(k, k+1)$. כמות הצעדים ימינה שנותרו עד הנקודה (n,n), היא $n-k$. וכמות הצעדים למעלה $m-k-1$. (עקרון השיקוף) מהנקודה הזו והלאה נשקף את המשך ההילוך. כלומר, כל צעד ימינה נחליף בלמעלה ולהפך. כלומר: ימינה $n-k-1$ ולמעלה $n-k$. נסיים בנקודה $(n-1, n+1) = (k+m-k-1, k+1+n-k)$. כלומר, ההתאמה בין הילוכים לא חוקיים להילוכים כלשהם מ־$(0,0)$ ל־$(n-1, n+1)$ היא חח"ע ועל. לכן, כמות ההילוכים הלא חוקיים היא $\binom{2n}{n+1}$ (קצת כמו קודם, נבחר מתוך $2n$ צעדים, מהם ה־$n+1$ צעדים למעלה). מעקרון המשלים נקבל את הדרוש. ■

שימושי לדעת, שניתן לפשט את הביטוי הסגור, ולקבל:

$$\mathcal{C}_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$$

2 מספרי בל

הגדרה: $\mathcal{B}_n$ (מספר בל ה־n־י) הוא מספר החלוקות של הקבוצה $\{1, \dots, n\}$. דוגמה:

$$\mathcal{B}_3 = |\{\{\{1,2,3\}\},\ \{\{1\},\{2,3\}\},\ \{\{2\},\ \{1,3\}\},\ \{\{3\},\{1,2\}\},\ \{\{1\},\{2\},\{3\}\}\}|$$

טענה: (נוסחת נסיגה עבור $\mathcal{B}_n$):

$$\begin{cases} \mathcal{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot n - k \\ \mathcal{B}_0 = 1 \end{cases}$$

הוכחה. נסתכל על המספר n. נניח שהוא נמצא בחלוקה, בקבוצה שגודלה k $(1 \le k \le n)$. כמות האפשרויות ליתר $k-1$ האיברים בקבוצה היא $\binom{n-1}{k-1}$. את $n-k$ האיברים הנותרים, נחלק בדרך כלשהי. לכך יש $\mathcal{B}_{n-k}$ אפשרויות. סה"כ מעקרון הכפל והסכום, נקבל את הדרוש. ■

הנוסחה הסגורה למספרי בל תהיה:

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

לא נוכיח אותה, כי נדרשים כלים בחדו"א על־מנת להגיע אליה.

3 הערות נוספות

3.1 תמורות ללא נקודות שבת

. **תזכורת:** מספר התמורות על n איברים ללא נקודות שבת הוא

$$\begin{cases} D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

שתי נוסחאות נסיגה נוספות שניתן להוכיח, הן:

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \tag{1}$$

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{2}$$

נוכל להוכיח את שתיהן קומבינטורית.

תרגיל – שילוש מצולעים קמורים

הערה: כדי להצליח לפתור דברים בעזרת קטלן, נרצה להוכיח התאמה חח"ע ועל לבעיה אחרת.

תרגיל: בכמה דרכים ניתן לשלש (לחלק למשולשים בעזרת אלכסונים שאינן חותכים) מצולע קמור בעל $n/=2$ קודקודים ממוספרים? נסמן ב־T_n.

סתרון: נמספר את הקודקודים בסדר עולה. נתבונן בצלע $(1,2)$, ונראה לאיזה משולש היא שייכת. נפריד למקרים.

- אם היא נמצאת במשולש עם הקודקוד 3 או $n+2$ (הקודקודים הצמודים) אז נותרנו עם מצולע בעל $n+1$ קודקודים שעלינו לשלש, ויש T_{n-1} אפשרויותץ
- אחרת, אם הקודקוד השלישי הוא $4 \leq k \leq n+1$ אז נותרנו עם מצולע בגודל $k-1$ ומצולע בגודל $n-k+4$. לכן:

$$T_n = 2T_{n-1} + \sum_{k=4}^{n+1} T_{k-3}T_{n-k+2} = \left(\ell et\ j=k-3\right) \quad 2t_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} T_j T_{n-k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} T_j \dot{T}_{n-j-1} = \mathcal{C}_n$$

יש לנו גם את אותו תאי ההתחלה, $T_0 = \mathcal{C}_0 = 1$ ולכן סה"כ $T_n = \mathcal{C}_n$.