לינארית 2א 15

שחר פרץ

28 במאי 2025

מרצה: בן בסקין

משפט 1. לכל f תבנית סימ' קיימת מטריצה מייצגת מהצורה $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (או סגור אלגברית כלשהו)
.

הוכחה. נסמן את $\dim f = r$. עד כדי שינוי סדר איברי הבסיס, המטריצה המייצגת אלכסונית היא:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(c_1 \dots c_r) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $c_1 \dots c_r \neq 0$, ביחס לבסיס $B = (v_1 \dots v_r, \dots v_n)$. באופן כללי לכל $i \in \mathbb{R}$ נוכל להגדיר את $v_i' = \frac{v_i}{\sqrt{c_i}}$ כך ש־$f(v_i', v_i') = 1$ כי $f(v_i, v_i) = c_i$ ומליניאריות בכל אחת מהקורדינאטות. ולכן $B' = (v_1' \dots v_r', v_{r+1} \dots v_n)$ בסיס המקיים את הדרוש.

באותו האופן, אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (ולא $\mathbb{C}$) אז קיים בסיס שהמטריצה המייצגת לפיו היא:

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בלוקים, כך ש־$p + q = r$. כאן נגדיר:

$$f(v, v) = c < 0,\ v' = \frac{v}{\sqrt{|c|}},\ f(v', v') = \frac{c}{|c|} = -1$$

■

בשיעורי הבית נראה ש־: נניח ש־f אנטי־סימטרית לא מנוונת (לא תבנית ה־0), אז תמיד ישנה מטריצה מייצגת מהצורה (תחפשו "מטריצה סימפלקטית" בגוגל, זה קצת סיוט לעשות את זה בלאטך). הרעיון הוא אם:

$$\hat{I}_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & & -\hat{I}_n \\ & \ddots & \\ \hat{I}_n & & 0 \end{pmatrix}$$

אז J סימפלקטית.

הגדרה 1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ו־f תבנית בילינ' מעל V. נאמר ש־f חיובית/אי־שלילית/שלילית/אי־חיובית אם $\forall 0 \neq v \in V$ מתקיים ש־$f(v,v) \le 0 / f(v,v) < 0 / f(v,v) \ge 0 / f(v,v) > 0$

משפט 2. תהא A מטריצה מייגצת של תבנית בי־ליניארית סימ', עם ערכים $0, -1, 1$ בלבד על האלכסון, מקיימת:

- f חיובית אמ"מ ישנם רק 1־ים.
- f אי־שלילית אמ"מ ישנם רק 1־ים ואפסים.
- f שלילית אמ"מ ישנם רק -1־ים
- f חיובית אמ"מ ישנם רק -1־ים ואפסים.

הוכחה.

$\Longleftarrow$ ברור

- לכל $0 \neq v \in V$ קיימים ויחידים $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש־$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ומתקיים $f(v,v) = \alpha_i^2 f(v_{i,i})$ ולפי המקרה זה יסתדר יפה.

■

משפט 3. משפט ההתאמה של סילבסטר. p, q הנ"ל נקבעים ביחידות.

(תחזרו כמה משפטים למעלה למקרה בו $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

ההוכחה של קרני. נכתבה ונמחקה מהלות. שימו לב שה־tr לא נשמר בשינוי בסיס של תבניות בילינאריות, זה לא העתקות. ההוכחה שגויה. ■

הוכחה. נסמן $B = (v_1 \dots v_p, u \dots u_q, w_1 \dots w_k)$ וכן $B' = (v'_1 \dots v'_t, u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$ כי $t+s = p+q$. בה"כ $t \le p$, נניח בשלילה ש־$t < p$. נסמן $U = \operatorname{span}(v_1 \dots v_p)$. ידוע f חיובית על U, וכן $\dim U = p$. נתבונן ב־$W = \operatorname{span}(u'_1 \dots u'_s, w_1 \dots w_k)$. אזי גם f חיובית על W, ו־$\dim W = s + k$. בגלל ש־$U \cap W = \{0\}$ (כי אם לא, אז עבור $0 \neq v \in U \cap W$ נקבל $f(v,v) > 0$ כי $v \in U$ וכן $f(v,v) \le 0$ כי $v \in W$ וסתירה). ידוע ש־$U \oplus W \subseteq V$ תמ"ו וכן $\dim U + \dim W \le \dim V$. נציב ונקבל $p+s+k > t+s+k = \dim V$, סתירה. לכן p, q נקבעים ביחידות. ■

סימון 1. ה־(p,q) לעיל נקראים הסיגנטורה של f.

INNER PRODUCT VECTOR SPACES .... (1)

1.1 מעל $\mathbb{R}$

מעתה ועד סוף הקורס, מתקיים $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

כל עוד נאמר "$\mathbb{F}$", זה נכון בעבור שני המקרים. אחרת, נפצל.

הגדרה 2. יהי V מ"ו, מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ היא תבנית בילינ' סימטרית חיובית מעל V, ומסומנת $f(v,u) = \langle v, u \rangle$ (ויש ספרים שמסמנים $\langle v \mid u \rangle$, בדומה לסימון של קוונטים), ונסמן $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$.

בגלל שהיא לינארית סימטרית, נקבל $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \ge 0$ ו־$\langle v, v \rangle$ אמ"מ $v = 0$.

דוגמה. (המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$, AKA כפל סקלרי):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

הגדרה 3. אם V מ"ו וקיימת $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ מכפלה פנימית אז $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.

משפט 4. $V = M_n(\mathbb{R})$, אז $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$ אז $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ.

דוגמה מגניבה. בהינתן $V = c[0,1]$, מ"ו הפונקציות הממשיות הרציפות על $[0,1]$, ו־$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$

משפט 5. (שהפליצו מחדו"א) אם $f \ge 0$ אינטרבילית (זה נשמע כמו מפלצת) על קטע $[a,b]$ וגם ישנה נקודה חיובית $c \in [a,b]$ שעבורה $f(x) \ge 0$ וגם f רציפה ב־c, אז $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x > 0$.

1.2 מעל $\mathbb{C}$

ישנה בעיה עם חיובית: אם $v \in V$ כך ש־$\langle v \mid v \rangle \ge 0$ אך $\langle iv \mid iv \rangle = -1 \langle v \mid v \rangle < 0$ סתירה. לכן, במקום זאת, נשתמש בהגדרה הבאה:

הגדרה 4. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{C}$. מכפלה פנימית $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ מקיימת:

- ליניאירות ברכיב הראשון: אם נקבע v, אז $u \mapsto \langle v \mid u \rangle$ לינארית.
- ססקווי־ליניאריות ברכיב השני: $\langle u_1 + u_2 \mid v \rangle = \langle u_1 \mid v \rangle + \langle u_2 \mid v \rangle \wedge \langle u \mid \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u \mid v \rangle$
  כאשר $\bar{\alpha}$ הצמוד המרוכב של α.
- הרמטיות: $\langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$
- $\forall 0 \neq v \in V \colon \ \langle v \mid v \rangle > 0 \wedge \langle 0 \mid 0 \rangle = 0$

למעשה – נבחין שאין צורך בממש ססקווי־ליניאיריות ברכיב השני וכן לא בתנאי $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0$, וההגדרה שקולה בעבור חיבוריות ברכיב השני בלבד,. זאת כי:

$$\langle u \mid \alpha v \rangle = \overline{\langle \alpha v \mid u \rangle} = \overline{\alpha \langle v \mid u \rangle} = \bar{\alpha} \cdot \overline{\langle v \mid u \rangle} = \bar{\alpha} \langle v \mid u \rangle$$

ומכאן נגרר ססקווי־ליניאריות, וכן $\langle 0 \mid 0 \rangle = 0$ נובע ישירות מליניאריות ברכיב השני.

(אופס! בן הגדיר את זה לליניאירות ברכיב השני, כלומר הפוך, כי ככה עושים את זה בפתוחה. תיקנתי בסיכום אבל יכול להיות שיש משהו הפוך כי פספסתי. זה אמור להיות ליניארי ברכיב השני).

הגדרה 5. $\bar{B}^T = B^*$

הגדרה 6. יהי ממ"פ V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. לכל $v \in V$ מגדירים את הנורמה של v להיות $||v|| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle}$

מאקסיומת החיוביות:

$$||v|| \geq 0 \wedge (||v|| = 0 \iff v = 0)$$

וכן:

$$\left|\left|t \cdot v^2\right|\right| = \langle tv \,|\, tu \rangle = t\bar{t} \,\langle v \,|\, v \rangle = |t| \, ||v|| \implies ||t \cdot v|| = |t| \cdot ||v||$$

. . . .

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד