לינארית 2א ~ תרגיל בית 6

שחר פרץ

14 בדצמבר 2025

(1)

יהי $V=\mathbb{C}_{\le 2}[x]$ עם המכפלה האוקלידית:

$$\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\overline{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

נעשה גרם־שמידט על $(1,x+i,x^2)$. (לא סיימתי חדו"א 1א עדיין אבל אני מניח שאני אסתדר). ננרמל תוך כדי ביצוע התהליך כדי לחסוך חלוקה בנורמה.

גרם־שפידט. כאשר נחשב את האינטגרלים, נתעלם מהצמוד (כלומר נחשב את $\int_1^0 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$), כי האינטגרל הוא בין 0 ל־1, שניהם מספרים ממשיים, והצמוד משפיע רק על החלק המרוכב – כלומר הצבה של 0 או 1 בביטוי האינטגרל לא תשתנה כתוצאה מקיומו של הצמוד. נבחין ש־$\int_0^1 1\cdot\bar{1}\,\mathrm{d}x=1$ כלומר 1 וקטור מנורמל. נסמן $\bar{v}_1=1$.

$$\bar{v}_2=x+i-\langle x+i,v_1\rangle v_1=(x+i)-\left(\frac{1}{2}+i\right)=x-\frac{1}{2}$$

ננרמל:

$$||\bar{v}_2||^2=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{12}\quad v_2=\frac{\bar{v}_2}{||\bar{v}_2||}=\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

נחשב את האינטגרלים הבאים בנפרד:

$$\left\langle x^2,v_1\right\rangle=\left\langle x^2,1\right\rangle=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\left\langle x^2,v_2\right\rangle=\left\langle x^2,\sqrt{12}(x-0.5)\right\rangle=\sqrt{12}\int_0^1 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x=\sqrt{12}\cdot\frac{x^3(3x-2)}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{\sqrt{12}}$$

עתה נחשב את הוקטור שנותר:

$$\bar{v}_3=x^2-\left\langle x^2,v_1\right\rangle v_1-\left\langle x^2,v_2\right\rangle v_2=x^2-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{12}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{x}{\sqrt{12}}+\left(\frac{1-12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)$$

זה כבר הוקטור האחרון, אז נוותר על לנרמל שוב. סה"כ הוקטורים הבאים בסיס אורתוגונלי של V:

$$v_1=1\qquad v_2=\sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right)\qquad v_3=x^2-\frac{x}{\sqrt{12}}+\left(\frac{1-12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)$$

■

(2)

יהי V ממפנ"ס מעל $\mathbb{C}$ כך ש־$\dim V=n$. נוכיח שבהינתן $v_1\dots v_k\subseteq V$ אורתוגונלית, ניתן להשלים אותה לבסיס אורתוגונלי של V, כלומר קיימים $v_{k+1}\dots v_n\in V$ כך ש־$v_1\dots v_n$ אורתוגונלי.

הוכחה. נשלים אותה לבסיס רגיל ע"י הוקטורים $\bar{v}_{k+1}\dots\bar{v}_n$. נבצע עליהם תהליך גרם־שמידט, כלומר נגדיר רקורסיבית:

$$v_{m>k}=\bar{v}_m-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\langle\bar{v}_m,v_i\rangle}{||v_i||}v_i$$

מנכונות תהליך גרם־שמידט, סה"כ קיבלנו $v_k\dots v_n$ אורתוגונליים, כך ש־$v_1\dots v_n$ בסיס אורתוגונלי של V. השתמשנו בנוצרותו הסופית של V כאשר הנחנו ש־n מוגדר היטב. ■

(3)

(א) נמצא $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^2$ כך ש־$v_i\cdot v_j<0 \iff i\neq j$.

נגדיר:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\quad v_3=\begin{pmatrix}-1\\0.5\end{pmatrix}$$

ואכן:

$$\begin{aligned}\langle v_1,v_2\rangle&=1\cdot0+(-1)\cdot1=-1&<0\\\langle v_2,v_3\rangle&=0\cdot(-1)+(-1)\cdot0.5=-0.5&<0\\\langle v_3,v_1\rangle&=(-1)\cdot1+1\cdot0.5=-0.5&<0\end{aligned}$$

כדרוש.

(ב) יהי V מ"ו אוקלידי ממימד 1. נוכיח שלא קיימים $v_1,v_2,v_3\in V$ כך ש־$i\neq j \iff \langle v_i,v_j\rangle<0$.

הוכחה. יהיו $v_1,v_2,v_3\in V$. נניח $\dim V=1$, לכן קיימים $\lambda_1\dots\lambda_3\in\mathbb{F}$ כך ש־$\lambda_1v_1=\lambda_2v_2=\lambda_3v_3$ (תלות לינארית). אם $v_i=0$ אזי $\langle v_i,v_1\rangle=0$ וסיימנו. אחרת $||v_i||\neq0$, כלומר:

$$\begin{aligned}0<\langle v_1,v_1\rangle&=\langle\lambda_2v_2,\lambda_3v_3\rangle=\lambda_2\lambda_3\langle v_2,v_3\rangle\\0<\langle v_2,v_2\rangle&=\langle\lambda_1v_1,\lambda_3v_3\rangle=\lambda_1\lambda_3\langle v_1,v_3\rangle\\0<\langle v_3,v_3\rangle&=\langle\lambda_1v_1,\lambda_2v_2\rangle=\lambda_1\lambda_2\langle v_1,v_2\rangle\end{aligned}$$

נניח בשלילה $\langle v_i,v_i\rangle<0$. נסיק:

$$\lambda_1\lambda_2<0\wedge\lambda_2\lambda_3<0\wedge\lambda_3\lambda_1<0$$

נפרק למקרים.

- אם $\lambda_1<0$, אזי $\lambda_1\lambda_3<0\longrightarrow v_3>0$, ואז $\lambda_2\lambda_3<0\longrightarrow v_2<0$, וסה"כ $\lambda_1\lambda_2<0\longrightarrow\lambda_1>0$ – סתירה.
- אם $\lambda_1>0$, אזי $\lambda_1\lambda_3<0\longrightarrow v_3<0$, ואז $\lambda_2\lambda_3<0\longrightarrow v_2>0$, וסה"כ $\lambda_1\lambda_2<0\longrightarrow\lambda_1<0$ – סתירה.

בשני המקרים סתירה, וסיימנו. ■

(ג) רשות (לא היה לי זמן השבוע, אעשה בחנוכה)

(ד) רשות (לא היה לי זמן השבוע, אעשה בחנוכה)

(4)

(א) נוכיח שהמטריצות הבאות אינן חופפות:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

הוכחה. נתחיל בלחשב את הדטרמיננטות:

$$\det A=1\quad\det B=-1$$

נניח בשלילה שהן חופפות. אזי קיימת $M\in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש־$A=M^TBM$ (הראינו שיחס החפיפה הוא יחס שקילות, ומכאן שאין צורך לטפל במקרה ההפוך). נסמן $c=\det M$. ידוע $\det M=\det M^T$. לכן:

$$1=\det A=\det(M^TBM)=\det M^T\det B\det M=c^2\det B=-c^2$$

משום שאנו מעל הממשיים, $c\in\mathbb{R}$, ומכאן ש־$c^2>0$. סה"כ קיבלנו ש־1 הוא השלילי של מספר חיובי, כלומר 1 מספר שלילי, וסתירה. ■

(ב) יהי $\mathbb{F}_3$. נמצא $A, B \in M_2(\mathbb{F}_3)$ הפיכות שאינן חופפות מעל $\mathbb{F}_3$.

הוכחה. נתבונן במטריצות ההפיכות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det B = 2$$

משום ש־$\det A, \det B \not\equiv_3 0$ אזי שתיהן הפיכות. בדומה לסעיף הקודם, נניח בשלילה שקיימת $M \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש־$A = M^T B M$. מכאן ש־$\det A = c^2 \det B$, בדיוק כמו קודם. נבחין ש־:

- לא ייתכן $c = 0$ כי M הפיכה ולכן $c = \det M \neq 0$.
- אם $c = 1$, אז $c^2 = 1$.
- אם $c = 2$, אז $c^2 = 4 \equiv 1$.

כלומר בכל מקרה $c^2 \equiv_3 1$. מכאן ש־$\det A \equiv_3 \det B$, כלומר $2 \equiv_3 1$, וזו סתירה. ■

(5)

(א) נמצא את כל המטריצות $A \in M_2(\mathbb{R})$ כך שהתבנית הריבועית המתאימה להן היא:

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_1x_2 - 7x_2^2$$

תהי $A \in M_2(\mathbb{R})$ מטריצה. נדרוש:

$$x_1^2 + 3x_1x_2 - 3x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1a + x_2b \\ x_1c + x_2d \end{pmatrix} = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$$

הפולינום הוא אובייקט פורמלי, ולכן:

$$d = -3 \wedge a = 1 \wedge b + c = 3$$

כלומר, A היא חלק מהמרחב האפיני:

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3-x \\ x & -7 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

(ב) נמצא את כל המטריצות הסימטריות שמתאימות לתבנית מהסעיף הקודם. (ממשפט, קיימת רק אחת). ידוע קיום $x \in \mathbb{R}$ כך ש־$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3-x \\ x & -7 \end{smallmatrix}\right)$. מהיותה סימטרית $3 - x = x$, כלומר $x = 1.5$. סה"כ קיבלנו:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & -7 \end{pmatrix}$$

(ג) עתה נמצא את כל המטריצות $A \in M_2(\mathbb{R})$ כך ש־:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot_A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + 3x_1y_2 - 7x_2y_2$$

תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$. נדרוש:

$$x_1y_1 + 3x_1y_2 - 7x_2y_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} = ax_1y_1 + by_2x_1 + cy_1x_2 + dy_2x_2$$

מעל הממשיים, נקבל:

$$a = 1 \wedge b = 3 \wedge c = 0 \wedge d = -7$$

כלומר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

וסיימנו.

(6)

(א) נוכיח שחפיפת מטריצות היא יחס סימטרי.

הוכחה. נסמן ב־$\sim$ את יחס החפיפה. יהיו A,B חופפות, כלומר קיימת $M \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש־$A = M^TBM$. נבחין ש־$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$. נכפול ב־$(M^T)^{-1}$ מצד שמאל, נקבל $(M^T)^{-1}A = BM$. נכפול ב־M^{-1} מצד ימין, נקבל $(M^T)^{-1}BM = A$. סה"כ $A \sim B$ מהגדרה (עבור M^{-1} מטריצה הפיכה) כלומר $\sim$ יחס סימטרי. ■

(ב) נוכיח שאם $A \in M_n(\mathbb{F})$ חופפת למטריצה אלכסונית, אז A סימטרית.

הוכחה. מההנחה קיימת Λ כך ש־$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ עבור $\lambda_i \in \mathbb{F}$ סקלר כלשהו, וכן $M \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה, כך ש־$A = M^T\Lambda M$ (נעזרתי בסימטריות יחס החפיפה מסעיף קודם). נראה ש־A סימטרית. נבחין ש־$\Lambda_{\ell k}$ מקיים $\Lambda_{\ell k} = \lambda_k$ אם $k = \ell$, ו־$\Lambda_{\ell k} = 0$ אחרת, לכל $\ell, k \in [n]$. לכן מהגדרת כפל מטריצות:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M^T_{ik}(\Lambda M)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} M_{ki} \sum_{\ell=1}^{n} \Lambda_{k\ell} M_{\ell j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_{ki} M_{kj}$$

$$A_{ji} = \sum_{k=1}^{n} M^T_{jk}(\Lambda M)_{ki} = \sum_{k=1}^{n} M_{kj} \sum_{\ell=1}^{n} \Lambda_{k\ell} M_{\ell i} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_{kj} M_{ki}$$

מקומטטיביות כפל ב־$\mathbb{F}$ ומטרזטיביות שוויון, $A_{ij} = A_{ji}$ כלומר A סימטרית כנדרש. ■

(7)

נגדיר:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

(א) נמצא את התבנית הריבועית שמתאימה ל־A:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = 4x^2 + xy + xy - 3y^2 = 3x^2 + 2xy - 3y^2$$

(ב) נמצא חילוף משתנים שמלכסן את התבנית:

$$3x^2 + 2xy - 3y^2 = \left(3x^2 + 2xy + 4y^2\right) - 4y^2 - 3y^2 = \left(\sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y\right)^2 - 7y^2 = z^2 - 7w^2 =: p(z,w)$$

ע"י הצבת $z = \sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{3}}y$ וכן $w = y$, קיבלנו ש־:

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T \operatorname{diag}(1,-7) M = A$$

(ג) נמצא B סימטרית כך ש־p התבנית הריבועית המתאימה לה. נבחין שהמטריצה לעיל, $B := \operatorname{diag}(1,-7)$, מקיימת:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - 7y^2 = p(x,y)$$

כלומר $\operatorname{diag}(1,-7)$ היא המטריצה המתאימה לתבנית הריבועית p.