חדו"א 1א ~ תרגיל בית 10

שחר פרץ

20 בינואר 2026

(1)

נניח $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וגזירה ב־(a,b). נניח כי $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$. נוכיח שקיים c כך ש־$f'(c)f(c)=c$.

$$f'(c)=\frac{c-0}{f(c)-0}$$

(2)

נבדוק אילו מהפונקציות רציפות במ"ש.

(א) $f(x)=\ln x$ ב־$[1,\infty)$.

רציפה במ"ש. נגזור ונקבל $\ln x'=\frac{1}{x}$. בתחום $(1,\infty)$ הנגזרת חסומה: חסם עליון $\frac{1}{1}=0$, וחסם מלמטה $\frac{1}{x}>0$. סה"כ $\ln x$ רציפה במ"ש בקטע הנתון משום שנגזרתה חסומה. ■

(ב) $f(x)=\ln x$ ב־$(1,0)$.

אינה רציפה במ"ש. נוכיח שהיא איננה רציפה במ"ש. נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ויהי $\delta>0$. נפרק למקרים. אם $\delta>1$ אז נוכל לבחור כל $x,y\in(0,1)$ ובפרט $y=0.5$ ובגלל ש־$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ נוכל לבחור $x\in(0,1)$ כך ש־$f(x)$ קטן ככל רצוננו ובפרט קטן מ־$f(y)-1$ ואז נקבל: (כי $f(x)<f(y)<0$)

$$f(x)<f(y)-1\implies 1<f(y)-f(x)=|f(y)-f(x)|$$

סתירה. אחרת $\delta<1$, ואז נבחר $y=\frac{\delta}{2}$ וגם $x=\frac{4\delta}{4}$. ראשית כל נבחין ש־$|x-y|=\frac{\delta}{2}<\delta$. נוסף על כך $x,y\in(0,1)$ כי $0<\delta<1$. נבחין ש־: (כי $y<x$ כלומר $f(y)<f(x)<0$)

$$|\ln x-\ln y|=\ln x-\ln y=\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(\frac{\frac{4}{4}\cancel{\delta}}{\frac{1}{2}\cancel{\delta}}\right)=\ln\left(\frac{8}{4}\right)=\ln(2)>0.5=\varepsilon$$

סתירה. ■

(ג) $f(x)=e^x$ בתחום $(0,1)$:

רציפה במ"ש. ידוע $f(x)$ רציפה ו־$(0,1)$ קומפקטי. ממשפט מההרצאה f רציפה במ"ש. ■

(ד) $f(x)=e^x$ ב־$(0,\infty)$.

אינה רציפה במ"ש. ■

(3)

תהי $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה וגזירה ב־$(0,\infty)$. נניח ש־$\lim_{x\to\infty}f(x)+f'(x)=5$. נראה ש־$c$ רציפה במ"ש.

הוכחה. נסמן $c=5$. נוכיח לפי הגדרה. יהי $\varepsilon>0$, עם $\delta=\frac{\varepsilon}{c}$, ויהיו $x,y\in[0,\infty)$ כך ש־$|x-y|<\delta$. נוכיח $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. בה"כ $f(x)>f(y)$. מלגראנג' מתקיים:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(a)\implies f(x)-f(y)=f'(a)(x-y)$$

ידוע שהחל מ־x_0 כלשהו מתקיים $-c<|f'(x)+f(x)|<c$. בפרט עבור $x=a$ נקבל $|f'(a)+f(a)|$ חסום ב־c. עתה נקבל:

$$|f(x)-f(y)|=f(x)-f(y)=f'(a)(x-y)$$

לא סגור איך לעשות את זה

$\blacksquare$

(4)

תהי $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה עם נגזרת חיובית, ו־f' מתאפסת רק בנקודה אחת. נוכיח ש־f עולה ממש.

הוכחה. נסמן את נקודת ההתאפסות של f ב־c. נבחין ש־f' חיובית ב־(b,c) וחיובית ב־(a,c) ולכן f עולה ממש בתחומים אלו (כי צמצומה עולה ממש, ואז אפשר להשתמש במשפט הידוע). נניח בשלילה ש־f איננה עולה ממש. מכאן שקיימות $x < y \in (a,b)$ עבורן $f(x) \geq f(y)$. נפריד למקרים.

- אם x, y נמצאים שניהם ב־(a,c) או נמצאים שניהם ב־(b,c), סתירה למונוטוניות בקטע.
- אם x, y נמצאים בתחומים שונים (או שווים ל־c), אז $x \in (a,c]$ ו־$y \in [c,b)$. בה"כ $y \neq c$ (במקום y' נגדיר x', הוכחה סימטרית). נתבונן ב־$y' = \frac{y'+c}{2} \in (a,c)$, בגלל ש־$y' < y$ נבחין $f(y') < f(y)$ (כי f עולה ממש ב־(a,c)) ולכן $f(x) \geq f(y) > f(y')$ כלומר $f(x) - f(y) > 0$. נבחין שמשום שהם בקטעים שונים $x > y'$ כלומר $x - y' < 0$ וסה"כ מלגראנג':

$$0 > \frac{f(x) - f(y')}{x - y'} = f'(d)$$

עבור $d \in (x, y')$ כלשהו. כלומר מצאנו נקודה בה הנגזרת שלילית, סתירה.

סה"כ בשני המקרים הגענו לסתירה דהיינו $f(x) < f(y)$ והפונקציה מונוטונית עולה ממש כנדרש. $\blacksquare$

(5)

נוכיח באמצעות קושי את האי־שוויונות הבאים:

(א)

(6)

נניח f גזירה בסביבת x, וגזירה פעמיים בנקודה x. נוכיח ש־:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

הוכחה. ידוע:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

לכן:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lim_{z \to 0} \frac{f(x+z+h) - f(x+z)}{z} - \lim_{z \to 0} \frac{f(x+z) - f(x)}{z}}{h}$$

$\blacksquare$

(7)

נוכיח ש־$2x \arctan x \geq \log(1+x^2)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(x) = 2x \arctan x - \log(1+x^2)$. נבחין ש־:

$$f'(x) = \overbrace{2\arctan x + \frac{2x}{x^2+1}}^{(2x\arctan x)'} - \overbrace{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}^{\log(1+x^2)'} = 2\arctan x$$

נבחין ש־$f' = 2\arctan x$ היא פונקציה שמקיימת $f'(x) > 0$ עבור $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ו־$f'(x) < 0$ עבור $x \in \mathbb{R}_{x \leq 0}$ (כי $\arctan$ מקיימת את התנאים הללו). מכאן שהיא יורדת ב־$\mathbb{R}_{\leq 0}$ ועולה ב־$\mathbb{R}_{\geq 0}$. עוד ידוע $f(0) = 2 \cdot \arctan 0 - \log(1 + 0^2) = 0 - 0 = 0$. סה"כ, ב־$\mathbb{R}_{\geq 0}$ הפונקציה עולה לאחר שהיא פוגשת את 0 כלומר $f(x) \geq 0$, וב־$\mathbb{R}_{\leq 0}$ הפונקציה יורדת עד שהיא מגיעה ל־0, כלומר $f(x) \geq 0$ גם־כן. סה"כ בכל התחום $f(x) \geq 0$, נציב ונקבל:

$$0 \leq f(x) = 2x\arctan x - \log(1 + x^2) \implies 2x\arctan x \geq \log(1 + x^2)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$, כנדרש. ■

(8)

תהי $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ גזירה כך ש־$f(0) = 0$. נניח בנוסף שלכל x בתחום $|f'(x)| \leq |f(x)|$. נוכיח $f(x)$ קבועה ב־0.

הוכחה. אם $f(x) \neq 0$ עבור $x \in [0,1]$ כלשהו, נסמן $c = f(x)$, אז ממשפט לגראנג':

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

עבור $c \in (0,x)$ כלשהו (בהכרח לא ריק כי $\neg f(x) = 0$). נעביר אגפים ונקבל $f(x) = xf'(c)$ ■

(9)

נתונה הסדרה $a_1 = \frac{\pi}{4}$ בסיס ו־$a_n = \cos(a_{n-1})$ צעד. נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ כאשר α הוא פתרון המשוואה $\cos x = x$.

הוכחה. נבחין ש־$\operatorname{Im}\cos x = (-1,1)$ ובתחום זה $\operatorname{Im}\cos x|_{(-1,1)} \subseteq (0.5, 1]$, כלומר $a_{n\geq 2} \in (0.5, 1]$.

ראשית כל, נוכיח שגבולה הוא α במידה והסדרה אכן מתכנסת. במקרה זה, $\ell =: \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. אזי:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(\ell) = \cos\ell$$

ה־ℓ היחיד המקיים זאת הוא α. עתה נותר להראות שהיא מתכנסת.

כדי להראות התכנסות, נוכיח שהגבול החלקי a_{2n} מתכנס. מנימוקים דומים, אם הוא קיים ערכו α. הוא אכן קיים: זוהי סדרה חסומה (כבר טענו ש־$a_{n\geq 2}$ חסומה ב־$(0.5, 1]$, ועתה נשאר לקחת מקסימום בין זה לבין a_1). נותר להוכיח שהיא מונוטונית יורדת. למה: לכל $x > \alpha$ מתקיים $\cos(\cos(x)) < x$. ההוכחה פשוטה: נגדיר $f(x) = \cos(\cos(x)) - x$, ואז $f(\alpha) = 0$ מהגדרה. הנגזרת $f'(x) = \sin x \sin(\cos x) - 1$ היא כפולה של שני סינוסים (עד לכדי הרכבה) שתמונתם $[-1, 1]$, וחיסור של אחד, לכן $f'(x) \leq 0$. משום ששורשיה בעלי סביבה עבורם הם אינם שורשים, סה"כ $f(x)$ מונוטונית יורדת. משום ש־$f(\alpha)$ שורש לכל $\alpha < x$ מתקיים $f(x) < 0$ כלומר $\cos\cos x < x$.

נוכיח באינדוקציה מלאה ש־a_{2n} קטן האיברים שלפניו וגדול מ־α.

- עבור $n = 1$, $a_{2n} = a_2 = 0.77 > \alpha$ (האי־שוויון חושב נומרית)
- עבור n כלשהו, באינדוקציה מלאה ידוע $a_{2n} > a_{2k}$. מה.א. $a_{2n} < \alpha$ ולכן מהלמה $a_{2(n+1)} = \cos(\cos a_{2n}) < a_{2n}$. סה"כ $a_{2(n+1)} < a_{2k}$ לכל $k \in [n]$. הטענה ש־$a_{2(n+1)} > \alpha$ נכונה כי בסביבת α הפונקציה קטנה, ו־$0.73 < \alpha <, a_{2n} < a_2 < 0.77$, ומכאן ש־$\alpha$ נמצא בסביבה של $\cos x$ בה היא מונוטונית יורדת (כנ"ל על α), דהיינו בגלל ש־$a_{2n} \geq \alpha$ אז $\cos a_{2n} < \cos\alpha$. משום ש־$\cos_{a_{2n}} < \cos\alpha$ אך עדיין נמצא בסיבה בה $\cos x$ יורדת (כי $a_{2n} \in (0.5, 1]$) נקבל $\cos(\cos(a_{2n})) > \cos(\cos(\alpha)) = \cos(\alpha) = \alpha$ כנדרש.

סה"כ באינדוקציה הראינו שהפונקציה מונוטונית יורדת. היא מונוטונית יורדת וחסומה ולכן הגבול החלקי a_{2n} מתכנס ל־α. באופן דומה a_{2n+1} מונוטונית עולה וחסומה, ולכן מתכנסת ל־α. ממשפט הכיסוי a_n מתכנסת ל־α כנדרש. ■

שחר פרץ, 2026