חדו"א 1א ~ תרגיל בית 10

שחר פרץ

22 בינואר 2026

(1)

נניח $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וגזירה ב־(a,b). נניח כי $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. נוכיח שקיים c כך ש־$f'(c)f(c) = c$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $g(x) = x^2$. נבחין $g'(x) = 2x$. נגדיר $h(x) = f^2(x)$. נבחין $h'(x) = f(x)f'(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x)$ מכלל המכפלה.

- אם $a^2 \neq b^2$ משום שידוע $a^2 - b^2 = f^2(a) - f^2(b)$ נוכל לחלק אגפים ולקבל $\frac{f^2(a) - f^2(b)}{a^2 - b^2} = 1$. ממשפט קושי, קיים $c \in (a,b)$ כך ש־:

$$1 = \frac{f^2(a) - f^2(b)}{b^2 - a^2} = \frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{h'(c)}{g'(c)} = \frac{2f(c)f'(c)}{2c} = \frac{f(c)f'(c)}{c}$$

  נכפול ונקבל $f'(c)f(c) = c$ כנדרש.

- אם $a^2 = b^2$ אז $f^2(b) - f^2(a)$. המקרה הזה לא נכון באופן כללי ואני מניח שנפלה כאן טעות: לדוגמה עבור $a = b = 0$ והפונקציה $f(x) = 0$, מתקיים שהקטע $[a,b] = \{a\}$ כלומר f רציפה כי הנקודה היחידה בה היא מוגדרת מבודדת, וגזירה באופן ריק ב־(a,b), אך לא קיימת שום $c \in (a,b) = \varnothing$ המקיימת תנאים כאלו ואחרים כי הקבוצה הריקה ריקה. עם זאת $f^2(a) - f^2(b) = 0 - 0 = a^2 - b^2$.

■

(2)

נבדוק אילו מהפונקציות רציפות במ"ש.

(א) $f(x) = \ln x$ ב־$[1, \infty)$.

רציפה במ"ש. נגזור ונקבל $\ln x' = \frac{1}{x}$. בתחום $(1, \infty)$ הנגזרת חסומה: חסם עליון $\frac{1}{1} = 0$, וחסם מלמטה $\frac{1}{x} > 0$. סה"כ $\ln x$ רציפה במ"ש בקטע הנתון משום שנגזרתה חסומה. ■

(ב) $f(x) = \ln x$ ב־$(1, 0)$.

אינה רציפה במ"ש. נוכיח שהיא איננה רציפה במ"ש. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ויהי $\delta > 0$. נפרק למקרים. אם $\delta > 1$ אז נוכל לבחור כל $x, y \in (0,1)$ ובפרט $y = 0.5$ ובגלל ש־$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ נוכל לבחור $x \in (0,1)$ כך ש־$f(x)$ קטן ככל רצוננו ובפרט קטן מ־$f(y) - 1$ ואז נקבל: (כי $f(x) < f(y) < 0$)

$$f(x) < f(y) - 1 \implies 1 < f(y) - f(x) = |f(y) - f(x)|$$

סתירה. אחרת $\delta < 1$, ואז נבחר $y = \frac{\delta}{2}$ וגם $x = \frac{4\delta}{4}$. ראשית כל נבחין ש־$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. נוסף על כך $x, y \in (0,1)$ כי $0 < \delta < 1$. נבחין ש־: (כי $x > y$ כלומר $0 > f(x) > f(y)$)

$$|\ln x - \ln y| = \ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4}{4}\cancel{\delta}}{\frac{1}{2}\cancel{\delta}}\right) = \ln\left(\frac{8}{4}\right) = \ln(2) > 0.5 = \varepsilon$$

סתירה. ■

(ג) $f(x) = e^x$ בתחום $(0,1)$:

רציפה במ"ש. ידוע $f(x)$ רציפה ו־$(0,1)$ קומפקטי. ממשפט מההרצאה f רציפה במ"ש. ■

(ד) $f(x) = e^x$ ב־$(0, \infty)$.

אינה רציפה במ"ש. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ויהי $\delta > 0$. נבחר $x = 1 - \ln \delta$ וכן $y = x + \frac{\delta}{2}$. מלגראנג', קיים $c_0 \in (x_0, x_0 + \frac{\delta}{2})$

$$\frac{e^{x + \frac{\delta}{2}} - e^x}{x + \frac{\delta}{2} - x} = \frac{e^y - e^x}{y - x} = f'(c_0) = e^{c_0}$$

נכפיל אגפים ונקבל ממונוטוניות ורציפות e^x (ממנה נסיק $e^y > e^x$ וגם $e^{c_0} > e^{x_0}$):

$$|fx - fy| = e^y - e^x = \frac{\delta}{2}e^{c_0} > \frac{\delta}{2}e^{1-\ln\delta} = \frac{\delta}{2}e^{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{\cancel{\delta}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{\delta}} = \frac{1}{2}$$

סה"כ מצאנו x, y כך ש־$|f(x) - f(y)| > \frac{1}{2}$ בסתירה לרציפות במ"ש. ■

(3)

תהי $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ רציפה וגזירה ב־$(0,\infty)$. נניח ש־$\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = 5$. נראה ש־$c$ רציפה במ"ש.

הוכחה. נסמן $c = 5$. נוכיח $f(x)$ חסומה. ידוע $f(x)+f'(x)$ חסומה ע"י M כלשהו שכן המ"מ x_0 כלשהו היא חסומה בסביבת $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ (נגיד עבור $\varepsilon = 1$), וקודם לכן ממשפט וויראשטראס היא רציפה בקטע סגור $(0, x_0)$ ולכן מקבלת את חסמיה. ניקח מקסימום בין $c+\varepsilon$ לבין החסם ב־$(0, x_0)$ ממשפט וויראשטראס, ונקבל חסם עליון ל־$f(x) + f'(x)$. נסמנו ב־M. יהי $x \in \mathbb{R}$, נוכיח ש־$f(x)$ חסומה. נתחיל מלחסום מלמעלה.

- אם $f'(x) > 0$, אז $f(x) < f(x) + f'(x) < M$ וסיימנו.
- אם $f'(x) < 0$, נפריד למקרים. אם $f'(x)$ הנקודה המקסימלית ב־$f(x)$, אז $f(x)$ חסם עליון לפונקציה f וסיימנו (אם כי M אינו החסם במקרה זה). אחרת ישנה נקודה $x > y$ כלשהי בה $f(x) < f(y)$, ומשום שהפונקציה עלתה בתווך זה, נוכל למצוא $y' \le y$ בה $f(x) > f(y') \wedge f'(y') > 0$ (מרול). במקרה זה:

$$f(x) < f(y') < f(y') + f'(y) < M$$

וסיימנו.

נוכל למצוא חסם תחתון באופן דומה. סה"כ $f(x)$ חסומה, נסמן את חסמה P. נסיק שאם $f(x)$ חסומה ע"י P וכן $f(x) + f'(x)$ חסומה ע"י M, אז:

$$|f'(x)| = |f'(x) + f(x) - f(x)| \le |f'(x) + f(x)| + |-f(x)| < M + P$$

כלומר $f'(x)$ חסומה. משום שהנגזרת חסומה, ממשפט שהראינו בכיתה f רציפה במ"ש, כדרוש.

■

(4)

תהי $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה עם נגזרת חיובית, ו־f' מתאפסת רק בנקודה אחת. נוכיח ש־f עולה ממש.

הוכחה. נסמן את נקודת ההתאפסות של f ב־c. נבחין ש־f' חיובית ב־(b,c) וחיובית ב־(a,c) ולכן f עולה ממש בתחומים אלו (כי צמצומה עולה ממש, ואז אפשר להשתמש במשפט הידוע). נניח בשלילה ש־f איננה עולה ממש. מכאן שקיימות $x < y \in (a,b)$ עבורן $f(x) \ge f(y)$. נפריד למקרים.

- אם x, y נמצאים שניהם ב־(a,c) או נמצאים שניהם ב־(b,c), סתירה למונוטוניות בקטע.
- אם x, y נמצאים בתחומים שונים (או שווים ל־c), אז $x \in (a,c]$ ו־$y \in [c,b)$. בה"כ $y \neq c$ (במקום y' נגדיר x', הוכחה סימטרית). נתבונן ב־$y' = \frac{y'+c}{2} \in (a,c)$, בגלל ש־$y' < y$ נבחין $f(y') < f(y)$ (כי f עולה ממש ב־(a,c)) ולכן $f(x) \ge f(y) > f(y')$ כלומר $f(x) - f(y) > 0$. נבחין שמשום שהם בקטעים שונים $x > y'$ כלומר $x - y' < 0$ וסה"כ מלגראנג':

$$0 > \frac{f(x) - f(y')}{x - y'} = f'(d)$$

עבור $d \in (x, y')$ כלשהו. כלומר מצאנו נקודה בה הנגזרת שלילית, סתירה.

סה"כ בשני המקרים הגענו לסתירה דהיינו $f(x) < f(y)$ והפונקציה מונוטונית עולה ממש כנדרש. ■

(5)

נוכיח באמצעות קושי את האי־שוויונות הבאים:

(א)

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

הוכחה. נתחיל מ־>. נגדיר $f(x)=x-\log(1+x)$ ו־$g(x)=\frac{x^2}{2}$. נפעיל קושי: קיים $d\in(0,x)$ כך ש־:

$$\frac{x-\log(1+x)-0}{\frac{x^2}{2}-0}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(d)}{g'(d)}=\frac{1-\frac{1}{1+d}}{d}=\frac{\frac{d}{1+d}}{d}=\frac{1}{1+d}<1$$

(האי־שוויון כי $d>0$) נכפיל אגפים:

$$x-\log(1+x)<\frac{x^2}{2}\implies x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)$$

באופן דומה בעבור הצד השני, נגדיר $f(x)=\log(1+x)$ ו־$g(x)=x$. נפעיל קושי ונקבל קיום $d\in(0,x)$ כך ש־:

$$\frac{\log(1+x)-0}{x-0}=\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(d)}{g'(d)}=\frac{\frac{1}{1+d}}{d}=\frac{1}{d+d^2}<1$$

(האי־שוויון כי $d>0$) נכפיל אגפים ונקבל:

$$\log(1+x)<x$$

כנדרש. סה"כ הראינו את אי־השוויון משני הצדדים. ■

(ב)

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

הוכחה. בשביל הספורט נעשה את זה עם שארית לגראנג'. נגזור את $f(x):=\sqrt{1+x}$ לקבלת 3 האיברים הראשונים בטור הטיילור.

$$f'(x)=\frac{1}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}\qquad f''(x)=-\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}\qquad f'''(x)=\frac{3}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}}$$

(מסתבר שאפשר להשתמש כאן במשפט הבינום המוכלל שזה מגניב אבל overkill) מכאן:

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_2(x)\\&=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x+R_2(x)\end{aligned}$$

משארית לגראנג' קיים $c_+\in(0,x)$ כך ש־

$$R_2(c_+)=\frac{f^{(3)}(c_+)}{3!}c_+^3>0$$

משום ש־$f^{(3)}$ פונקציה חיובית בכל תחומה, ו־$c_+>0$ כלומר גם $c_+^3>0$. באופן דומה, בעבור פיתוח טיילור נמוך יותר:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+R_1(x)=1+\frac{1}{2}x+R_1(x)$$

נקבל משארית לגראנג' קיום $c_-\in(0,x)$ כך ש־

$$R_1(c_-)=\frac{f^{(2)}(c_-)}{2!}c_-^{(2)}<0$$

כי בבירור $f^{(2)}(x)<0$ בכל תחומה ו־$c_-^2>0$. סה"כ:

$$\begin{aligned}1+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{8}<1+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{8}+R_2(x)=\sqrt{1+x}\\1+\frac{x}{2}>1+\frac{x}{2}+R_1(x)=\sqrt{1+x}\end{aligned}$$

כנדרש. ■

(6)

נניח f גזירה בסביבת x, וגזירה פעמיים בנקודה x. נוכיח ש־:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

הוכחה. ניעזר בכלל לופיטל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f(x)+f(x)-f'(x-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{x+h-x}\right)+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(x-h)}{x-(x-h)}\right)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)=f''(x)$$

נצטרך להצדיק את השימוש בלופיטל: תוצאת הגבול אכן קיימת שכן מהנתון לגזירות פעמיים ב־x מתקיים בהכרח ש־$f''(x)$ קיים. נוסף על כך:

$$\lim_{h\to 0}h^2=0 \qquad\qquad \lim_{h\to 0}f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=f(x)-2f(x)+f(x)=0$$

כלומר הגבול שלנו אכן מהצורה $\frac{0}{0}$ וחוקי להפעיל את כלל לופיטל. סה"כ הראינו את הדרוש. ∎

(7)

נוכיח ש־$2x\arctan x\geq\log(1+x^2)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(x)=2x\arctan x-\log(1+x^2)$. נבחין ש־:

$$f'(x)=\overbrace{2\arctan x+\frac{2x}{x^2+1}}^{(2x\arctan x)'}-\overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{\log(1+x^2)'}\cdot 2x=2\arctan x$$

נבחין ש־$f'=2\arctan x$ היא פונקציה שמקיימת $f'(x)>0$ עבור $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ ו־$f'(x)<0$ עבור $x\in\mathbb{R}_{x\leq 0}$ (כי $\arctan$ מקיימת את התנאים הללו). מכאן שהיא יורדת ב־$\mathbb{R}_{\leq 0}$ ועולה ב־$\mathbb{R}_{\geq 0}$. עוד ידוע $f(0)=2\cdot\arctan 0-\log(1+0^2)=0-0=0$. סה"כ, ב־$\mathbb{R}_{\geq 0}$ הפונקציה עולה לאחר שהיא פוגשת את 0 כלומר $f(x)\geq 0$, וב־$\mathbb{R}_{\leq 0}$ הפונקציה יורדת עד שהיא מגיעה ל־0, כלומר $f(x)\geq 0$ גם־כן. סה"כ בכל התחום $f(x)\geq 0$, נציב ונקבל:

$$0\leq f(x)=2x\arctan x-\log(1+x^2)\implies 2x\arctan x\geq\log(1+x^2)$$

לכל $x\in\mathbb{R}$, כנדרש. ∎

(8)

תהי $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש־$f(0)=0$. נניח בנוסף שלכל x בתחום $|f'(x)|\leq|f(x)|$. נוכיח $f(x)$ קבועה ב־0.

הוכחה. נניח בשלילה ש־$f(x)$ אינה קבועה ב־0. מכאן קיים $x_0\in[0,1]$ כך ש־$f(x_0)\neq 0$. מלגראנג':

$$\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(c_0)\implies|f(x_0)|=|f'(c_0)x_0|\leq|f(c_0)x_0|$$

עבור $c_0\in(0,x_0)$ כלשהו. באינדוקציה נגדיר את c_n להיות מספר $c_n\in(0,c_{n-1})$ כך ש־$|f(c_n)|\geq|x_0f(c_{n-1})|$. קיים c_n כזה משום שבאינדוקציה מלגראנג' על c_{n-1}:

$$\frac{f(c_{n-1})}{c_{n-1}}=\frac{f(c_{n-1})-f(0)}{c_{n-1}-0}=f'(c_n)\implies|f(c_{n-1})|=|f'(c_n)c_{n-1}|\leq|f(c_n)c_{n-1}|\leq|f(c_n)x_0|$$

כאשר $c_{n-1}\in(0,c_{n-2})$ ובאינדוקציה $c_{n-1}\in(0,x_0)$ ולכן $c_n<x_0$ ומכאן הא"ש האחרון. באינדוקציה נקבל:

$$|f(c_n)|\geq|x_0f(c_{n-1})|=\cdots=|x_0^nf(c_0)|$$

נסמן $|f(c_0)|=k\neq 0$. נקבל $|f(c_n)|\geq x_0^nk$. משום ש־$x^n\to\infty$ אז $|f(c_n)|\to\infty$ ממשפט ההשוואה. משום ש־$c_n\in(0,x_0)\subseteq(0,1)$ נוכל תמיד למצוא c_n כך ש־$f(c_n)$ גדול רצוננו, שזו השלילה לכך ש־$f(x)$ חסומה. סה"כ $f(x)$ פונקציה רציפה שאיננה חסומה בקטע סגור $[0,1]$ וסתירה למשפט וויראשטראס כדרוש. ∎

(9)

נתונה הסדרה $a_1 = \frac{\pi}{4}$ בסיס ו־$a_n = \cos(a_{n-1})$ צעד. נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ כאשר α הוא פתרון המשוואה $x = \cos x$.

הוכחה. נבחין ש־$\operatorname{Im}\cos x = (-1,1)$ ובתחום זה $\operatorname{Im}\cos x|_{(-1,1)} \subseteq (0.5, 1]$, כלומר $a_{n\geq 2} \in (0.5, 1]$.

ראשית כל, נוכיח שגבולה הוא α במידה והסדרה אכן מתכנסת. במקרה זה, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} =: \ell$. אזי:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} \cos(\ell) = \cos \ell$$

ה־ℓ היחיד המקיים זאת הוא α. עתה נותר להראות שהיא מתכנסת.

כדי להראות התכנסות, נוכיח שהגבול החלקי a_{2n} מתכנס. מנימוקים דומים, אם הוא קיים ערכו α. הוא אכן קיים: זוהי סדרה חסומה (כבר טענו ש־$a_{n\geq 2}$ חסומה ב־$(0.5,1]$, ועתה נשאר לקחת מקסימום בין זה לבין a_1). נותר להוכיח שהיא מונוטונית יורדת. למה: לכל $x > \alpha$ מתקיים $\cos(\cos(x)) < x$. ההוכחה פשוטה: נגדיר $f(x) = \cos(\cos(x)) - x$, ואז $f(\alpha) = 0$ מהגדרה. הנגזרת $f'(x) = \sin x \sin(\cos x) - 1$ היא כפולה של שני סינוסים (עד לכדי הרכבה) שתמונתם $[-1,1]$, וחיסור של אחד, לכן $f'(x) \leq 0$. משום ששורשיה בעלי סביבה עבורם הם אינם שורשים, סה"כ $f(x)$ מונוטונית יורדת. משום ש־$f(\alpha)$ שורש לכל $x > \alpha$ מתקיים $f(x) < 0$ כלומר $\cos\cos x < x$.

נוכיח באינדוקציה מלאה ש־a_{2n} קטן האיברים שלפניו וגדול מ־α.

- עבור $n = 1$, $a_{2n} = a_2 = 0.77 > \alpha$ (האי־שוויון חושב נומרית)
- עבור n כלשהו, באינדוקציה מלאה ידוע $a_{2n} > a_{2k}$. מה.א. $a_{2n} < \alpha$ ולכן מהלמה $a_{2(n+1)} = \cos(\cos a_{2n}) < a_{2n}$. סה"כ $a_{2(n+1)} < a_{2k}$ לכל $k \in [n]$. הטענה ש־$a_{2(n+1)} > \alpha$ נכונה כי בסביבת α הפונקציה קטנה, ו־$0.73 < \alpha <, a_{2n} < a_2 < 0.77$, ומכאן ש־$\alpha$ נמצא בסביבה של $\cos x$ בה היא מונוטונית יורדת (כנ"ל על α), דהיינו בגלל ש־$a_{2n} \geq \alpha$ אז $\cos a_{2n} < \cos\alpha$. משום ש־$\cos_{a_{2n}} < \cos\alpha$ אך עדיין נמצא בסיבה בה $\cos x$ יורדת (כי $a_{2n} \in (0.5, 1]$) נקבל $\cos(\cos(a_{2n})) > \cos(\cos(\alpha)) = \cos(\alpha) = \alpha$ כנדרש.

סה"כ באינדוקציה הראינו שהפונקציה מונוטונית יורדת. היא מונוטונית יורדת וחסומה ולכן הגבול החלקי a_{2n} מתכנס ל־α. באופן דומה a_{2n+1} מונוטונית עולה וחסומה, ולכן מתכנסת ל־α. ממשפט הכיסוי a_n מתכנסת ל־α כנדרש. ■