חדו"א וא 11

שחר פרץ

14 בינואר 2026

לא הייתי בהרצאה אז השלמתי מצילומי לוח של נגה. אז לא יהיה את כל הראנט הרגיל בעפ שאני מעתיק לסיכום.

המשך נגזרות ולופיטל

משפט 1 (משפט דרבו)**.** תהא $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה ב־(a,b). אז $f'\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ מקיימת את תכונת דרבו.

הוכחה. יהיו $a<x_0<y_0<b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda\in(f'(y_0),f'(x_0))\uplus(f'(x_0),f'(y_0))$. נוכיח תחילה בעבור $\lambda=0$. בה"כ $f'(x_0)<0<f'(y_0)$. ידוע f רציפה ב־$[x_0,y_0]$ (ממשפט) ולכן לפי וויראשטראס מקבלת מינימום בקטע, דהיינו $\exists c\in[x_0,y_0]\colon \forall x\in[x_0,y_0]\colon f(c)\le f(x)$. מהגדרת נגזרת (המטרה היא להראות באופן טרחני ש־c לא מינימום קיצון, אלא מינימום מקומי):

$$0>f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_)}{x-x_0}$$

כלומר קיים $\delta>0$, כל שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<|f'(x_0)|$$

בפרט:

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f(x_0)}{x+\frac{\delta}{2}-x_0}<f'(x_0)+|f'(x_0)|=0$$

(חוקי כי $0<\frac{\delta}{2}<\delta$) כלומר נובע $f(x_0+\frac{\delta}{2})<f(x_0)$ ולכן $c\neq x_0$. באופן דומה $c\neq y_0$. מכאן $c\in(x_0,y_0)$ וממשפט פרמה $f'(c)=0$.

המקרה בו $\lambda\neq 0$ נובע באופן טרוויאלי ע"י הזזה אנכית של הפונקציה וחזרה למקרה בו $\lambda=0$. המרצה עושה את זה פורמלית אבל אין לי הרבה זמן עד ההרצאה ואני צריך להשלים הכל. ■

משפט 2 (משפט קושי)**.** יאי עוד משפט קושי. תהאנה $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח כי שתיהן רציפות ב־$[a,b]$, שתיהן גזירות ב־(a,b), ולכל $x\in(a,b)$, מתקיים $g'(x)\neq 0$. אז $g(b)\neq g(a)$ וגם קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הוכחה. לפי רול מכיוון ש־g רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b), וגם $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$, נובע ש־$g(b)\neq g(a)$.

עתה נגדיר:

$$g\colon[a,b]\to\mathbb{R}\quad h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

אז h רציפה ב־$[a,b]$ וגזירה ב־(a,b) שכן היא צירוף לינארי של פונקציות גזירות ורציפות. נבחין ש־$h(b)=0=h(a)$. לכן ממשפט רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש־$h'(c)=0$. לפי כללי גזירה:

$$h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(c)}\cdot g'(c)$$

ומכאן

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

כנדרש. כמובן שממש לא עשינו אינטגרל וסתם הפלצנו את h משום מקום. ■

תרגיל 1. יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ ותהא $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה. נניח ש־$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. הראו כי f' על $\mathbb{R}$.

הוכחה. יהי $\lambda \in \mathbb{R}$. מתקיים $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש־:

$$\forall x \in (b-\delta, b) \colon f(x) > \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |\lambda| (b-a)$$

אינטואיטיבית λ צריך ליפול בין $b - \frac{\delta}{2}$ לבין $\frac{a+b}{2}$, ולכן הדרישה לעיל. ממנה נסיק בפרט:

$$f\left(b - \frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > (b-a)\lambda$$

נחלק אגפים ונקבל:

$$\frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{\delta}{2} - \frac{a+b}{2}} > \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} > \lambda$$

בקטע $\left[\frac{a+b}{2}, b - \frac{\delta}{2}\right]$ f מקיימת את תנאי משפט לגראנג' ולכן קיימת c בקטע המדובר כך ש־:

$$f'(c) = \frac{f\left(b-\frac{\delta}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{\delta}{2} - \frac{a+b}{2}} > \lambda$$

באופן דומה קיימת $d \in (a,b)$ כך ש־$f'(d) < \lambda$ (אותו הדבר הפוך), ואז ממשפט דרבו ישנה $\alpha \in (a,b)$ כך ש־$f'(\alpha) = \lambda$. לכן f' על $\mathbb{R}$. ■

משפט 3 (משפט לופיטל 1). תהאנה $f,g \colon T \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. נניח ש־$a$ נקודת הצטברות של $I \setminus \{a\}$. עוד נניח ש־f,g רציפות ב־$I \setminus \{a\}$ וכן f,g גזירות ב־$I \setminus \{a\}$. נניח ש־$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (במקרים האחרים אפשר פשוט להשתמש בכללי גבולות כרגיל), וכן קיים הגבול $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. תחת כל התנאים הללו $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (כאשר a ו־ℓ מוגדרים במובן הרחב).

הערה 1. לופיטל גנב את המשפט ממישהו אחר בלה בלה בלה

הוכחה. בהרצאה נוכיח רק את המקרה בו $a \in I$ ו־$\ell \in \mathbb{R}$ (באופן כללי, צריך לפצל ל־4 מקרים, בהתאם להיותם של a, ℓ מוגדרים במובן הרחב או לאו). בה"כ f,g מוגדרות ב־a ומתקיים $f(a) = g(a) = 0$ (פורמלית, נגדיר $\tilde{f}, \tilde{g}$ חדשות שמוגדרות ב־a). נוכיח $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, והגבול מימין באופן דומה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $a - \delta < x < a$ מתקיים $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$. נתבונן ב־$\delta$. יהי $a - \delta < x < a$. בקטע $[x,a]$ מתקיימים תנאי משפט קושי: f,g רציפות, גזירות, ו־$\forall \alpha \in (x,a) \colon g'(\alpha) \neq 0$. מכאן קיימת $a - \delta < x < c < a$ כך ש־$frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, וסה"כ:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$$

וסיימנו את הוכחת הגבול לפי הגדרה. ■

למה 1 (הלמה של שטולץ). תהאנה a_n, b_n סדרות ונניח ש־b_n מונוטונית ממש ו־$b_n \to +\infty$. אם קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ אז קיים וסופי $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ וגבולותיהם שווים (לופיטל 2 בדיד).

משפט 4 (משפט לופיטל 2). תהאנה $f,g \colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ כאשר I קטע ו־a נקודת הצטברות. נניח ש־f,g גזירות ב־$I \setminus \{a\}$ ו־$\forall x \in I \setminus \{a\} \colon g'(x) \neq 0$. עוד נניח $\lim_{x\to a} |g(x)| \to \infty$ (המקרה היחיד שבאמת מעניין אותנו זה כשגם f שואף לאינסוף בנקודה) וקיים $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. אז $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים וערכו ℓ.

הוכחה. נוכיח ש־$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, והכיוון השני באופן דומה. גם כאן, נתעסק רק במקרה בו a סופי והגבול סופי (של חלוקת הנגזרות), ועקרונית צריך לפרק למקרים. תהא x_n סדרה המקיימת $x_n < x_{n+1} \in I \setminus \{a\}$ וכן גבולה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. לכל $x \in I \setminus \{a\}$, מתקיים $g'(x) \neq 0$ ולכן מדרבו g' דומת סימן בקטע. ללא הגבלת הכלליות, $g'(x) > 0$ (במובן הרחב) ולכן היא מונוטונית עולה ומתקיים $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. נסיק ש־$g(x_n)$ סדרה מונוטונית עולה ממש וגבולה $+\infty$. יהי $n \in \mathbb{N}$. בקטע $[x_n, x_{n+1}]$ הפונקציות f,g מקיימות את תנאי משפט קושי. לכן קיים $z_n \in (x_n, x_{n+1})$ כך ש־:

$$\frac{f(x_{n+1} - f(x_n))}{g(x_{n+1} - g(x_n))} = \frac{g'(z_n)}{g'(z_n)}$$

ומסנדוויץ', בהכרח $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. כמו כן לכל $n \in \mathbb{N}$ בהכרח $z_n \neq a$. לפי היינה $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1}-g(x_n))} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} = \ell$ לפי הלמה של שטולץ קיבלנו $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$ ומהיינה קיבלנו את הדרוש. ■

תרגיל 2. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

נגדיר $f,g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\cos x-1$ ו־$g(x)=x^2$. שתיהן רציפות וגזירות ב־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ וב־0 גבולן 0. מלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

סימנו את השוויון שנובע מלופיטל ב־$\overset{\text{LH}}{=}$ כדי להבהיר שהוא נכון בתנאי שהגבול מימין אכן מוגדר (אחרת – אי אפשר להגיד שום דבר על הגבול לפי לופיטל!).

תרגיל 3. נמצא את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$$

פתרון. נגדיר $f(x)=e^{\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}}$ לכל $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. נבחין ש־$\lim_{x\to 0}\ln\cos x=0$ וכן $\lim_{x\to 0}\tan^2 x=0$ מרציפות וכן שתיהן גזירות, וערכן $(\ln\cos x)'=\frac{-\sin x}{\cos x}$ וכן $(\tan^2 x)=\frac{2\tan x}{\cos x}\neq 0$. הגבול של החלוקה קיים וערכו:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\tan^2)x'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{\tan x}}{2\cancel{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{-1}{2}$$

מהרציפות. סה"כ מלופיטל $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\tan^2 x}=-\frac{1}{2}$ ולכן $\lim_{x\to 0}f(x)=e^{-0.5}$ וסיימנו. ■

תרגיל 4. נתבונן בגבול הבא:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

מלופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{\text{LH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

מהגבול הקודם (כלומר תיאורטית היינו צריכים להפעיל לופיטל פעמיים)

1 נגזרות מסדר גבוה ופולינום טיילור

הגדרה 1. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$. ניתן להגדיר רקורסיבית את $f^{(n+1)}(x_0):=(f^{(n)}(x_0))'$ כאשר $f^{(0)}=f$ בסיס. נבחין שלשם כך נדרוש ש־$f^{(n)}$ מוגדרת בסביבה של x_0.

סימון 1. לעיתים $f^{(n)}$ תסומן גם ב־$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x_0)$.

דוגמה: נבחין שהפונקציה $f(x)=x^m$ עבור $m\in\mathbb{N}^+$ קבוע מתקיים:

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & n\leq m\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

באופן דומה:

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x &&\implies && f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x)&=\cos x &&\implies && f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\\ f(x)&=e^x &&\implies && f^{(n)}(x)=e^x\end{aligned}$$

הגדרה 2. תהא $f\colon I\to\mathbb{R}$ וכן $x_0\in I$. יהי $n\in\mathbb{N}$. נניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. נגדיר את פולינום הטיילור של f מסדר n סביב x_0 ע"י:

$$T_n(x):=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

ואת השארית להיות:

$$R_n(x):=f(x)-T_n(x)$$

למה 2. 1. T_n גזירה מכל סדר

2. R_n גזירה n פעמים ב־x_0

3. לכל $i \in [n] \cup \{0\}$ בהכרח $R_n(x_0) = 0$ וכן $T_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

משפט 5. מתקיים:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

מסקנה 1. תהא $f\colon I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$. יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח ש־f גזירה n פעמים ב־x_0. אז קיימת $\omega\colon I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\omega(x_0) = 0$ ו־ω רציפה בנקודה x_0, וגם:

$$R_n(x) = \omega(x)(x-x_0)^n$$

הוכחה. ההוכחה בעיקרה נשארה לבית, אבל ω מוגדרת ע"י:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} & x \neq x_0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ואנחנו אמורים והמשיך מכאן. ■

למה 3. בהינתן $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ וכן x_0 נקודת הצטברות של A, אם $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ וגם $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ אז מתקיים $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \ell^m$.

תרגיל 5. נגדיר $f(x) = \ln(1+x)$ בתחום $(-1, \infty)$. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

תרגיל 6. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל אלא באמצעות טיילור.

פתרון.

$$\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x} = \underbrace{\cos^2 x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}}_{\to 1} + \cdots$$

כנראה מה שמחברים בסוף זניח כי משהו משהו ω משהו R_n ואני מקווה שירחיבו יותר בתרגול. ■

תרגיל 7. נחשב את הגבול שראינו בתחילת ההרצאה, הוא $\frac{\ln \cos x}{\tan^2 x}$ סביב 0, לא באמצעות לופיטל ולא באמצעות טיילור אלא באמצעות כלים אלמטריים שכבר ראינו לפני ההרצאה.

פתרון.

$$(\cos x)^{\tan^{-2} x} = \underbrace{\left((1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}}\right)}_{\to e}^{\overbrace{\frac{\cos x - 1}{\tan^2 x}}^{\to -\frac{1}{2}}} = e^{-0.5}$$

■