חדו"א 1א -- תרגיל 6

1. השלימו את הוכחת מבחן ההשוואה הגבולי (ראינו בשיעור את המקרה ש־ $l \in (0,\infty)$): יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות ונניח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$. אז
   (א) אם $l=0$, אז $\sum a_n < \infty \Leftarrow \sum b_n < \infty$.
   (ב) אם $l=\infty$, אז $\sum b_n < \infty \Leftarrow \sum a_n < \infty$.

2. נתון כי הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הוכיחו שגם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(a_n)^3$ מתכנס.

3. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים. שימו לב: לעיתים התשובה תלויה בערכי הפרמטרים.
   (א) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$
   (ב) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$
   (ג) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)^{\alpha}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$
   (ד) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$ כאשר $k,m \in \mathbb{N}$
   (ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ כאשר $a \in \mathbb{R}$

4. (א) נתונים שני טורים חיוביים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ המקימים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ החל ממקום מסויים. הראו כי אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
   (ב) הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ מתכנס (**רמז:** היעזרו בסעיף א').

5. נתון כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא טור חיובי מתכנס.
   (א) הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.
   (ב) הראו כי הכיוון ההפוך איננו נכון באופן כללי.
   (ג) נתון כי a_n סדרה מונוטונית, הראו כי הכיוון ההפוך נכון.

6. חשבו את סכום הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

7. קבעו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר:
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\log\log n)^{\alpha}}{n\log n}$$
   כאשר $\alpha > 0$ (ו־$\log\log n = \log(\log(n))$)

8. הביאו דוגמה לסדרות $a_n,\ b_n$ כך שהטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ שניהם מתבדרים ל־∞, אבל $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n,b_n) < \infty$.

9. חקרו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו לכל טור האם הוא מתכנס בהחלט/מתכנס בתנאי/מתבדר):
   א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a \ln n},\ a>0$
   ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/3 \rfloor}}{n}$
   ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n^2}$
   ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$, כאשר $a \in$.
   ה. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

שאלות לתרגול נוסף (לא להגשה)

(א) הוכיחו באמצעות קריטריון קושי כי הסדרה $a_n = \frac{1+1}{1^2 \cdot 3^1} + \frac{2+1}{2^2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2 \cdot 3^n}$ מתכנסת לגבול סופי.

(ב) תנו דוגמא לסדרה חסומה ללא גבול המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

(ג) חשבו את סכום הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ כאשר $m \in \mathbb{N}$.

(ד) קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או מתבדרים:

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

iii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (<u>רמז:</u> היעזרו באי־שיוויון עבור $n!$ מהתרגול)

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{(2/n)}}$

v. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$

vi. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $a, b > 0$. (<u>הערה:</u> התשובה תלויה בערכי a, b)

vii. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$, כאשר $\alpha > 0$

viii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$