חדו"א 1א ~ תרגיל בית 9

שחר פרץ

22 בינואר 2026

(1)

נתבונן בפונקציה הבאה עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ כלשהם:

$$f(x)=\begin{cases}x^\beta\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) & x\neq 0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

נמצא עבור אילו α,β הפונקציה רציפה, גזירה, גזירה ברציפות, או גזירה פעמיים ב־0.

הוכחה.

- **רציפה:** לכל $\beta\in\mathbb{N}_+$. נוכיח:

$$0=\lim_{x\to 0}x^\beta\cdot(-1)<\underbrace{\lim_{x\to 0}x^\beta\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}_{\lim_{x\to 0}f(x)}<\lim_{x\to 0}x^\beta\cdot 1=0$$

- **גזירה:** לכל $\beta\in\mathbb{N}_{\geq 2}$.
  - $\beta=1$ לא גזיר: נתבונן ב־$\varepsilon=\frac{1}{2}$. יהי $\varepsilon>0$. בסביבת δ נקובה של 0 נוכל לבחור נוכל לבחור $y=\sqrt[\alpha]{\frac{2}{k\pi}},x=\sqrt[\alpha]{\frac{1}{2k\pi}}$ ומארכימדיאניות קיים k גדול דיו כך ש־x,y בסביבה. ואז:

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right|=\left|\frac{\cancel{x}\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{\cancel{x}}-\frac{\cancel{y}\sin\left(\frac{1}{y^\alpha}\right)}{\cancel{y}}\right|=\left|\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)-\sin\left(\pi k\right)\right|=|1-0|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

  סתירה לקריטריון קושי.
  - $\beta\geq 2$ גזיר:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)=0$$

  כאשר השוויון האחרון נובע מרציפות שכבר הוכחנו.

- **גזירה ברציפות:** לכל $\beta\in\mathbb{N}_{\geq 2}$, שכן הנגזרת ב־0 $f'(0)=0$ הוכחנו, ומחוקי גזירה לכל $x\neq 0$:

$$f'(x)=\beta x^{\beta-1}\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)-\alpha\cos\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)x^{\beta-\alpha-1}$$

נוכל להפעיל את אותם הנימוקים לרציפות שהראינו קודם לכן לדרישה שהמעריכים של x יהיו לפחות 1. נקבל $\beta-1\geq 1$ וכן $\beta-\alpha-1\geq 1$. סה"כ את שני התנאים האלו אפשר לשלב ולדרוש $\beta\geq\alpha+2$ (לכל $\beta,\alpha\in\mathbb{N}_+$).

- **גזירה פעמיים:** נשאף לגזור את הפונקציה שקיבלנו לעיל. באמצעות נימוקים דומים לאילו שהפעלנו על גזירות תנאי הכרחי ומספיק יהיה שהמעריך של x יהיה לכל הפחות 2. כלומר, נדרוש $\beta-1\geq 2$ וכן $\beta-\alpha-1\geq 2$. נשלב את שני התנאים ונקבל $\beta\geq\alpha+3$ בהכרח. ■

(2)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה. נוכיח מספר טענות.

(א) נניח f מחזורית על מחזור T. נוכיח f' מחזורית עם מחזור T.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $k \in \mathbb{Z}$. ממחזוריות $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(x+kT)$. לכן:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+kT) - f(x+kT)}{x_0 + kT - (x+kT)} = \lim_{x \to x_0 + kT} \frac{f(x_0+kT) - f(x)}{(x_0+kT) - x} = f'(x_0+kT)$$

(אין מניעה להחליף משתנה בגבול, זה כמו הרכבה, ו־f גזירה ולכן רציפה ב־x_0 כלומר מותר להרכיב). סה"כ מהגדרה f' בעלת מחזור T. ■

(ב) אם f זוגית אז f' אי־זוגית.

הוכחה. נוכיח לפי הגדרה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(-x_0) - f(-x)}{x_0 - x} \overset{!}{=} \lim_{x \to -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{x_0 + x} = -\lim_{x \to -x_0} \frac{f(-x_0) - f(x)}{(-x_0) - x} = -f'(-x_0)$$

■

(3)

נוכיח את הטענה הבאה:

$$(x^n \log x)^{(n)} = n!\left(\log x + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על $n \in \mathbb{N}_0$.

- **בסיס:** עבור $n = 0$ נקבל שהסכום ריק כלומר $(x^0 \log x)^{(0)} = \log x = 0!x^0 \log(x+0)$ כנדרש.
- **צעד:**

$$\begin{aligned}
\left(x^{n+1} \log x\right)^{(n+1)} &= \left((x^{n+1} \log x)'\right)^{(n)} = \left((n+1)x^n \log x + \frac{x^{n+1}}{x}\right)^{(n)} \\
&= (n+1)(x^n \log x)^{(n)} + (x^n)^{(n)} \qquad \text{ה.א.} \\
&= (n+1)n! \cdot \left(\log x + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) + n! \\
&= (n+1)!\left(\log x + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}\right) \qquad \tfrac{1}{n+1}(n+1)! = n!
\end{aligned}$$

■

(4)

נפריך את הטענה הבאה: אם $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה, אז f' רציפה ב־(a,b).

הפרכה. נתבונן בדוגמה הנגדית הבאה: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ המוגדרת להיות $f(0) = 0$ בתחום $(-1,1)$. היא גזירה ב־0 ולא רציפה בו מנימוקים שהועלו בשאלה 1, וכן גזירה ורציפה ב־$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ מהרכבת אלמנטריות. ■

(5)

נוכיח של־$x = \cos x$ יש פתרון ממשי אחד בדיוק.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $f(x) = x - \cos x$.

- **קיום:** נוכיח ש־$f(x)$ מתאפסת איפשהו. אפשר לחשב ולמצוא $f(0) = -1$ וכן $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. סה"כ משום ש־$f$ רציפה (חיבור אלמנטריות) ממשפט ערך הביניים קיים x כך ש־$f(x) = 0$.
- **יחידות:** נראה ש־$f(x)$ מונוטונית עולה. נגזור ונקבל $f'(x) = 1 - \sin x$. משום ש־$\sin x \in [-1,1]$ בהכרח $1 - \sin x \in [0,2]$ דהיינו $f'(x) \geq 0$. סה"כ f עולה. היא גם עולה חזק שכן יש הנגזרת מתאפסת רק ב־$\aleph_0$ נקודות. סה"כ אם $f(x) = f(y) = 0$ אז $x = y$ כדרוש.

■

(6)

נתונה $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ כלשהי. נוכיח ונפריך מספר טענות:

(א) נניח $|f(x)|\le|\tan x|$ עבור כל $x\in[-1,1]$ כלשהו. אז f גזירה ב־0.

הפרכה. נתבונן ב־$f(x)=|x|$. ראשית כל, נוכיח $x<\tan x$ לכל $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. נתבונן בפונקציה $f(x)=x-\tan x$ ונוכיח שהיא שלילית בתחום המדובר. היא מונוטונית יורדת שכן $f'=1-\sec^2 x$ ומשום שב־$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $\cos x\in(0,1)$ אז $\sec x=\frac{1}{\cos x}\in(1,\infty)$ וסה"כ $\sec^2 x>1$ ומכאן $f'(x)=1-\sec^2 x<0$. סה"כ f יורדת בתחום, וכשנציב נקבל $f(x)=0$ (כי $\sec x=1$ ב־$x=0$) וסה"כ באותו התחום $f(x)<0$ (מתחילה ב־0 ויורדת משם). מכאן $x-\tan x<0$ כלומר $x<\tan x$ לכל $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. נסיק שלכל x בסביבת $\frac{\pi}{2}$ נקובה של 0 מתקיים $|x|<|\tan x|$. ספציפית עבור $x=0$ נציב ונקבל שוויון. נגדיר $g(x)=|x|$. משום ש־$\frac{\pi}{2}>1$ נקבל $\forall x\in[-1,1]\colon\ |g(x)|\le|\tan x|$. עם זאת, הוכחנו בהרצאה ש־$|x|$ לא גזירה ב־0, וסיימנו. ■

(ב) נניח $|f(x)|\le|1-\cos x|$ עבור כל $x\in[-1,1]$. אז f גזירה ב־0.

הוכחה. אפשר לדעת ש־$f(0)=0$ כי אחרת $0<|f(x)|<0$ וסתירה. נראה שהגבול קיים ע"י כך שנמצא את ערכו (ספוילר: 0)

$$f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{f(0)}{x}}_{0}=\cdots$$

נטפל בגבול שנשאר בנפרד. ניעזר בכך ש־$\cos x\in(-1,1)$ כלומר $\cos^2 x<|\cos x|$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{|1-\cos x|}{|x|}<\frac{1-\cos x^2 x}{|x|}=\frac{\sin^2 x}{x}\xrightarrow{x\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}(\sin x)=1\cdot0=0$$

סה"כ ממשפט הסנדוויץ', בגלל ש־$\frac{f(x)}{x}$ חסום משני צידיו בגבול השואף ל־0 (משני צידיו כי ביצענו את החישובים לעיל בערך מוחלט), נקבל ש־$\frac{f(x)}{x}\to0$. נחזור אל הנגזרת בהתחלה, קיבלנו:

$$\cdots=0+0=0$$

כלומר $f'(0)$ מוגדר וערכו 0. ■

שחר פרץ, 2026