ליניארית 7

שחר פרץ

11 בדצמבר 2024

JUST REMINDERS .... (1)

תזכורת: יהי $v \in V$ בעל $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס, אז $v = \sum_{i=1}^{|B|} \lambda_i v_i$. הגדרנו $[v]_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. הראינו ש־$[v]_B$ לכל $v \in B$ יכולים להגדיר באופן איזומטרי כל העתקה ליניארית. כלומר, $\varphi(v_i) = u_i$ לכל $1 \le i \le n$ בהנחה שהיא ההעתקה ליניארית, אז היא יחידה (כאשר $i \in U, v_i \in B$). פורמלית:

טענה. יהיו V, U מ"ו עם בסיסים. B בסיס של V. נסמן $B = (v_1, \dots, v_n)$ ויהיו $u_1, \dots, u_n \in U$. תהי $f \colon V \to U$ כך ש־$\forall 1 \le i \le n \colon \varphi(v_i) = u_i$. נוכיח שקיימת יחידה φ ליניארית כך ש־$\varphi(v_i) = u_i$.

הוכחה. **קיום.** עבור $v \in V$ קיימים ויחידים $\{\lambda_i\}_{i \in [n]}$ כך ש־$v = \sum \lambda_i v_i$. (כי B בסיס ולכן לכל וקטור קיימת ויחידה הצגה שלו כצירוף ליניארי). נסמן:

$$f(v) = \sum \lambda_i f(v_i) = \sum \lambda_i u_i$$

ובפרט יתקיים $\varphi(v_i) = u_i$ כרצוי.

ליניאריות. נסמן $v = \sum \alpha_i v_i,\ \ w = \sum \beta_i v_i$ נראה ש־φ ליניארית. יהיו $v, w \in V$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ ונראה ש־$\varphi(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \lambda_1 \varphi(v) + \lambda_2 \varphi(u)$. ביחד עם הגדרת φ נגרר מהתון:

$$\varphi(\lambda_1 v + \lambda_2 w) = \varphi = \varphi\left(\sum v_i(\lambda_1 \alpha_i + \lambda_2 \beta_i)\right)$$

. לפי φ שהדרנו

$$\sum (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_i)\varphi(v_i) = \lambda_1 \sum \alpha_i u_i + \lambda_2 \sum \beta_i u_i)$$

■

יחידות. נתבונן ב$\lambda - \sum 0\lambda_i + v_u - = \sum \lambda_i f(v_i) = \sum \lambda_i \psi(v_i)$

סימון. יהי V מ"ו כך ש־$\dim V = n$ ו־$B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס. נזמן $[v]_B$ להיות הקורדינאטות לפי הבסיס B (או משהו דומה המרצה שכח) וההגדרה נמצאת בכל מקרה בפסקה הראשון למעלה.

הערה. מוגדר יכ לכל $u \in V$ קיימים ויחידים $(\lambda_i)_{i \in [n]}$ כך ש־$w = \sum \lambda_i v_i$.

משפט. יהי V מ"ו ממימד n ו־$B = \cdots$. אז $\varphi = \varphi_B \colon F^n \to V$ שמוגדרת להיות $\varphi(\langle_1, \dots, v_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ היא איזו' וגם ההופכית היא $\varphi^{-1}(v) = [v]_B$.

ההוכחה הוצגה בשיעור הקודם.

אינטואיציה. בהינתן אתם יודעים מה, אם ידוע לכל i מה הוא $\varphi(v_i)$ אז ידוע V.

עבור C בסיס של $[\varphi(v_i)]_C$ לדוגמה $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ העתקת השיכון (מוחק את הקורדינאטה האחרונה), יתקיים:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y) \implies \varphi((1, 0, 0)) = (1, 0)$$

ניתן את זה עכשיו כהגדרה מסודרת.

הגדרה. בעבור $\varphi \colon V \to U$, V, U מ"ו, $B = (v_1, \dots, v_n),\ C = (u_1, \dots, u_n)$ בסיסים ל־V, U בהתאמה, המטריצה המייצגת לבסיסים של B של V, C של U:

$$[\varphi]_C^B = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [\varphi(v_1)]_C & \cdots & [\varphi(v_n)]_C \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(F)$$

גובה m, רוחב n. **דוגמה.** נתבונן ב־$\varphi\colon F^2 \to F^3$ כך ש־$\varphi(x,y) \mapsto (x, x+yx+2y)$. e בסיס סטנדרטי ל־F^2, ו־e' בסיס סטנדרטי ל־F^3.
שאלה: $[\varphi]_{e'}^{e} = \ ?$. נחשב כל עמודה בנפרד. נשים לב שבעבור הסימונים בהגדרה $B = e = ((1,0),(0,1)) := (v_1, v_2),\ C = e' = \cdots$.

$$[\varphi(v_1)]_C = [(1,1,1)]_C = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\colon \sum \lambda_i e_i' = 1 \implies (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1,1,1)$$
$$[\varphi(v_2)]_C = \varphi((0,1)) = (0,1,2) \implies [\varphi(v_2)]_{e'} = (0,1,2)$$

נבחין כי $[v_1, \dots, v_n]_e = (v_1, \dots, v_n)$ בעבור e בסיס סטנדרטי. אך לא כן לבסיסים אחרים.

דוגמה. בסיס בעבור F^3 להיות $C = ((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$. נמצא את $[\varphi]_C^e$.

$$\varphi(v_1) = (1,1,1),\ [(1,1,1)]_C = (1,0,0),\ [\varphi(v_2)]_C = [(0,1,2)]_C = (-1,1,2)$$
$$[\varphi]_C^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

VEC MUL .... (2)

עבור $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ עבור $x_j \in F$ עבור $1 \le j \le n$ (v איברי הבסיס). נראה מהו $\varphi(v)$ כתלות במטריצה המייצגת. נסמן $[\varphi]_C^B = (a_{ij})$ כך ש־$1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. יתקיים:

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum x_j v_j\right) = \sum x_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right)$$

שאלה.

$$[\varphi(v)]_C = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}, \dots, \sum_{j=1}^{m} x_j a_{mj}\right) = x_1 \cdot C_1 + \cdots + x_n \cdot C_n$$

הגדרה. יהי F שדה. וקטור עמודה עם הרכיבים ב־F הוא איבר ב־$M_{n\times 1}(F)$. לפעמים נזהה בינו לבין איבר ב־F^n.

הגדרה. יהיו $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(F),\ V(x_j)_{j\in[n]}$ וקטור עמודה. אזי:

$$Av := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n \in M_{m\times 1}$$

הסבר לשווין (לא לסימון):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = \sum x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$$

נשים לב שגובה הוקטור הוא ברוחב המטריצה. **דוגמה.** $Ae_1 = C_1$

דוגמה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 9\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + -2\cdot 3 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + -2\cdot 3 + 9\cdot 1 + 3\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

למעשה זוהי העתקה ליניארית מארבעה ממדים לשלושה ממדים.

משפט. יהיו V, U מ"ויים עם בסיסים $B = (v_1, \dots, v_n), C = (u_1, \dots, u_n)$ בהתאמה. תהי $\varphi\colon V \to U$ העתקה ליניארית. אזי $\forall v \in V_{[\varphi(v)]_C} = [\varphi(v)]_C^B \cdot [v]_B$.

הוכחה. נסמן $v = \sum x_j v_j$. לפי פיתוח אקראי מקודם בשיעור:]

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij}\right) \implies [\varphi]_C = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j$$

עבור C_j עמודות של $[\varphi]_C^B$. וזוהי בדיוק הגדרת הכפל. ∎

טענה. תהי $A \in M_{m\times n}(F)$. אם נגדיר $\varphi\colon F^n \to F^m$, $\varphi_A(v) = Av$ אז φ העתקה ליניארית וגם $[\varphi_A]$ לפי בסיסים סטדנרטיים של F^m, F^n היא A

הוכחה. נגדיר פונ' ψ מ־F^n ל־F^m כך ש־:

$$[\psi]_C^B = A$$

עבור B, C סטנדרטיים. נראה ש־$\varphi = \psi$. ואכן, תהי $v \in F^n$:

$$\begin{aligned} &\psi(v) && \text{כי } c \text{ סטנדרטי} \\ =&[\psi(v)]_C && \text{מטענה קודמת} \\ =&[\psi]_C^B \cdot [v]_B && \text{כי } \psi \text{ מוגדרת כך, וכי } B \text{ סטנדרטי} \\ A \cdot v =&\varphi_A(v) \end{aligned}$$

קיבלנו $\psi = \varphi_A$ בדיוק ולכן φ_A ליניארית וגם $A = [\psi]_C^B = [\varphi_A]_T$ כאשר T סטנדרטי. B, C סטנדרטיים. ■

טענה. U, V מ"ו מעל שדה F ממימדים $m = \dim U$, $n = \dim V$ ו־$B = (v_1, \ldots, v_n), C = (u_1, \ldots, u_m) \Longleftarrow$ עבור $(a_{ij}) = A \in M_{m\times n}(F)$ (ממשיך בשורה הבאה) נגדיר $\varphi\colon V \to U$ כך ש־:

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{(i,j)\in T} x_j a_{ij} u_i$$

כאשר:

$$T = \left\{ (x,y) \middle| \begin{matrix} x \in [m] \\ y \in [n] \end{matrix} \right\}$$

נקבל ש־φ העתקה ליניארית וגם $A = [\varphi]_C^B$.

הוכחה. יהי $A \in M_{m\times n}(F) = (a_{ij})$. נגדיר כבטענה ונפשט את $\varphi(v)$. עבור $v = \sum_{j=1}^{n}$ הוגדר:

$$\varphi(v) = \sum_{(i,j)\in T} x_j a_{ij} u_i = \sum^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}\right)$$

והמרצה עשה טעות בהוכחה ונשלים את ההוכחה בשבוע הבא. ■

בזמן שנותר נוכיח כל מיני דברים על מטריצות.

MAT MUL .... (3)

הגדרה. $A \in M_{m\times n}(F)$ $(a_{ij}) =$ ויהי $(b_{ij}) = B \in M_{m\times n}(F)$

נגדיר חיבור מטריצות:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i\in[m], j\in[n]} \in M_{m\times n}(F)$$

ונגדיר כפל בסקלר:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\ldots} \in M_{m\times n}(F)$$

למה. יהיו $\varphi, \psi\colon V \to U$ ו־B, C בסיסים של U, V מ"ו, אז $[\lambda\varphi]_C^B = \lambda[\varphi]_C^B$, $[\varphi + \psi]_C^B = [\varphi]_C^B + [\psi]_C^B$

הוכחה. נסמן $T = \varphi + \psi$. נחשב $T(v_i)$ ונראה שזה בדיוק $\varphi(v_i) + \psi(v_i)$ עבור v_i איבר בבסיס B.

$$T(v_i) = (\varphi + \psi)(v_i) = \varphi(v_i) + \psi(v_i)$$

כאשר המעברים מהגדרת החיבור. נסמן $L = [\varphi]_C^B, R = [\psi]_C^B$.

■

בשלב הזה המורה קלט שהכיתה מנותקת לחלוטין ואין לרוב האנשים שום מושג על מה הוא מדבר והוא התחיל לנסות להסביר איך בונים מטריצה מייצגת.