22.11.23

תרגול פעולות על קבוצות

תזכורת:

$A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

$A\cap B=\{x\in A \mid x\in B\}$

$A\setminus B=\{x\in A \mid x\notin B\}$

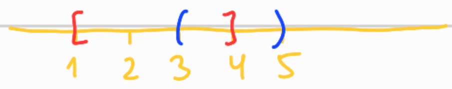
$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

באופן שקול:

$A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

<u>תרגיל</u>: עבור $A=[1,4]$, $B=(3,5)$,
חשבו $A\cup B$, $A\cap B$, $A\triangle B$.

<u>פתרון</u>: טיוטה לעצמנו:



$A\cup B=[1,5)$, $A\cap B=(3,4]$

$A\triangle B=[1,5)\setminus(3,4]=[1,3]\cup(4,5)$

הוכחת תכונה 3ב': $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

נוכיח באמצעות מעברי אם"ם (גרירות דו-כיווניות). יהי x.

$x\in A\cap(B\cup C) \overset{\text{הגדרת חיתוך}}{\iff} x\in A \wedge (x\in B\cup C)$

$\overset{\text{הגדרת איחוד}}{\iff} x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C)$

$\overset{\text{שקילות לוגית}}{\iff} (x\in A \wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\overset{\text{הגדרת חיתוך}}{\iff} x\in A\cap B \vee x\in A\cap C$

$\overset{\text{הגדרת איחוד}}{\iff} x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

הוכחת תכונה 4ב': $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

נוכיח מעצרת הכלה דו-כיוונית (ניתן גם ע"י מעברי אם"ם).

$\subseteq$: יהי $x\in A\setminus(B\cap C)$. לפי הגדרת הפרש קבוצות, מתקיים $x\in A$ וגם $x\notin B\cap C$. כלומר, <u>לא</u> מתקיים $x\in B\wedge x\in C$, ולכן מתקיים $x\notin B\vee x\notin C$.

אם $x\notin B$, אז יחד עם העובדה ש-$x\in A$, נקבל $x\in A\setminus B$ לפי הגדרת הפרש.

אם $x\notin C$, אז יחד עם העובדה ש-$x\in A$. נקבל $x\in A\setminus C$ לפי הגדרת הפרש.

סה"כ $x\in A\setminus B \vee x\in A\setminus C$, כלומר $x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

2: יהי $x \in (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. לפי הגדרת איחוד, $x\in A\setminus B$ או $x\in A\setminus C$.
אם $x\in A\setminus B$ אז לפי הגדרת הפרש נובע ש- $x\in A$ וגם $x\notin B$.
בפרט, נובע ש- $x\notin B\cap C$ ולכן $x\in A\setminus(B\cap C)$.
אם $x\in A\setminus C$, באופן דומה נקבל $x\in A\setminus(B\cap C)$.
סה"כ, הוכחנו הכלה דו-כיוונית ולכן יש שוויון.

__טענה:__ לכל A,B קבוצות, הטענות הבאות שקולות:
1. $A\subseteq B$
2. $A\cap B=A$
3. $A\setminus B=\emptyset$
4. $A\cup B=B$

__הוכחה (חלקית):__ __$(1)\Rightarrow(2)$:__ נניח $A\subseteq B$ ונוכיח $A\cap B=A$.
ההכלה $A\cap B\subseteq A$ מתקיימת תמ"ג (תכונה 8א').
עבור ההכלה מכיוון השני: יהי $x\in A$. נוכיח $x\in A\cap B$. מההנחה ש- $A\subseteq B$ נובע מכך ש- $x\in B$, ולכן סה"כ $x\in A\wedge x\in B$ לכן $x\in A\cap B$.
לכן $A\subseteq A\cap B$ וסה"כ יש שוויון קבוצות לפי הכלה דו-כיוונית.
__$(2)\Rightarrow(3)$:__ נניח $A\cap B=A$ ונוכיח $A\setminus B=\emptyset$. נוכיח שלכל x מתקיים $x\notin A\setminus B$. נניח בשלילה שקיים $x\in A\setminus B$. אז לפי הגדרת הפרש, נובע ש- $x\in A$ וגם $x\notin B$, אבל $A\cap B=A$, לכן מכך ש- $x\in A$ נובע ש- $x\in A\cap B$. כלומר $x\in A\wedge x\in B$. קיבלנו $x\in B\wedge x\notin B$ וזו סתירה. לכן, לא קיים $x\in A\setminus B$, וסה"כ $A\setminus B=\emptyset$.

__תרגיל:__ הוכיחו שלכל A,B,C קבוצות מתקיים $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.
__פתרון:__ נוכיח את הטענה בעזרת שרשרת זהויות שלמדנו בשיעור.

$$A\setminus(B\cup C)\overset{X\setminus Y=X\cap\bar{Y}}{=}A\cap\overline{(B\cup C)}\overset{\substack{\text{דה מורגן}\\ \overline{X\cup Y}=\bar{X}\cap\bar{Y}}}{=}A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})\overset{\text{אסוציאטיביות}}{=}(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}\overset{X\setminus Y=X\cap\bar{Y}}{=}(A\setminus B)\cap\bar{C}\overset{X\setminus Y=X\cap\bar{Y}}{=}(A\setminus B)\setminus C$$

תזכורת: $P(A)=\{X \mid X\subseteq A\}$.

תרגיל: ① הוכיחו / הפריכו: לכל A,B קבוצות, מתקיים $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$.

פתרון: נפריך את הטענה. דוגמא נגדית: $A=\{1\},\ B=\{2\}$.

$$P(A)\cup P(B)=\underbrace{\{\phi,\{1\}\}}_{P(A)}\cup\underbrace{\{\phi,\{2\}\}}_{P(B)}=\{\phi,\{1\},\{2\}\}$$

$$P(A\cup B)=P(\{1,2\})=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

מתקיים $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

הערה: למעשה, לא היה צריך לפרט את כל איברי הקבוצות $P(A)\cup P(B)$ ו- $P(A\cup B)$, מספיק היה להציג ש- $\{1,2\}\in P(A\cup B)$, $\{1,2\}\notin P(A)\cup P(B)$. מכאן ניתן לקבוע $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

② מצאו תנאי הכרחי ומספיק על A,B כך ש- $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$.

נטען כי התנאי: $A\subseteq B\vee B\subseteq A$ הוא הכרחי ומספיק.

מספיק: נניח שמתקיים $A\subseteq B\vee B\subseteq A$ ונוכיח את השוויון הדרוש. נוכיח עבור המקרה $A\subseteq B$, והמקרה $B\subseteq A$ יתקיים באופן דומה.

ניתן להציג: בלי הגבלת הכלליות, נניח $A\subseteq B$.

$\subseteq$: יהי $X\in P(A)\cup P(B)$, אז $X\in P(A)\vee X\in P(B)$, כלומר $X\subseteq A\vee X\subseteq B$. לכן $X\subseteq A\cup B$ ולכן $X\in P(A\cup B)$.

$\supseteq$: יהי $X\in P(A\cup B)$. אז $X\subseteq A\cup B$. מכך ש- $A\subseteq B$, נובע לפי טענה שראינו בשעור $A\cup B=B$, כלומר $X\subseteq B$, לכן $X\in P(B)$ ואז $X\in P(A)\cup P(B)$.

הכרחי: נניח $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$, ונוכיח ש- $A\subseteq B\vee B\subseteq A$.

נניח בשלילה שלא מתקיים, כלומר $A\nsubseteq B\wedge B\nsubseteq A$.

כלומר, קיים איבר $a\in A\setminus B$, וקיים איבר $b\in B\setminus A$.

אז $\{a,b\}\in P(A\cup B)$, אבל $\{a,b\}\notin P(A)\cup P(B)$. הסבר:

לא מתקיים $\{a,b\}\in P(A)$ כי $b\notin A$, ולא מתקיים $\{a,b\}\in P(B)$ כי $a\notin B$. סה"כ מצאנו איבר ב- $P(A\cup B)$ שלא קיים ב- $P(A)\cup P(B)$ ולכן אין שוויון בין הקבוצות, סתירה.

לכן בהכרח מתקיים $A\subseteq B\vee B\subseteq A$.