

מתמטיקה בדידה - תרגיל בית 12

ניתן בתאריך 7.2.2024. להגשה עד יום שלישי 13.2.2024 ב-23:59.

1. תהי $h \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה, ותהי A קבוצה לא ריקה. נגדיר יחס R_h מעל $A \rightarrow \mathbb{N}$ ע"י:

$$R_h = \left\{ \langle f, g \rangle \in (A \rightarrow \mathbb{N})^2 \mid h \circ f = h \circ g \right\}$$

(א) הוכיחו ש- R_h הוא יחס שקילות.

(ב) עבור $h' = \lambda n \in \mathbb{N}. n \bmod 2$, מצאו מערכת נציגים ליחס השקילות $R_{h'}$ והוכיחו תשובתכם.

(ג) נניח כי h היא זיווג. מצאו את קבוצת המנה $(A \rightarrow \mathbb{N}) / R_h$ והוכיחו תשובתכם.

(ד) הוכיחו:

$$\{h \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : |(A \rightarrow \mathbb{N}) / R_h| = 1\} = \{f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. f(n) = c\}$$

(ה) נניח כי $A = \mathbb{N}$ ו- $h = \lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} n & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ n-1 & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה הבאה מוגדרת היטב:

$$F : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) / R_h \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$$

$$F = \lambda [f]_{R_h} \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) / R_h. \lambda n \in \mathbb{N}. \left\lfloor \frac{f(n)}{2} \right\rfloor$$

($\lfloor x \rfloor$ הוא הערך השלם התחתון)

כלומר, הוכיחו שאם $[f_1]_{R_h} = [f_2]_{R_h}$ אז $F([f_1]_{R_h}) = F([f_2]_{R_h})$.

2. תהי $h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר יחס S_h מעל $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י:

$$S_h = \left\{ \langle f, g \rangle \in (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \right\}$$

(א) הוכיחו שלכל $h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, היחס S_h הוא יחס שקילות.

(ב) מצאו תנאי מספיק והכרחי על h כדי שיתקיים $S_h = id_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$.

(ג) נגדיר יחס נוסף \sim מעל $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h_1 \sim h_2 \iff S_{h_1} = S_{h_2}$$

תנו דוגמה לשתי פונקציות $h_1, h_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן $\neg (h_1 \sim h_2)$.

(ד) נתון כי \sim הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח). מצאו פונקציה חח"ע $F : ((\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) / \sim) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, והוכיחו תשובתכם. (זכרו להוכיח שהפונקציה שמצאתם מוגדרת היטב)

3. נגדיר יחס T מעל $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$T = \left\{ \langle f, g \rangle \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})^2 : \forall n \in \mathbb{N}. 2 \mid (f(n) - g(n)) \right\}$$

(א) הוכיחו ש- T יחס שקילות.

(ב) מצאו מערכת נציגים עבור היחס T , והוכיחו תשובתכם.

(ג) מצאו מפורשות פונקציה חח"ע $H : ((\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) / T) \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ והוכיחו תשובתכם. (זכרו להוכיח שהפונקציה שמצאתם מוגדרת היטב)