תרגיל בית 2 ־ אלגברה לינארית 1א' לאודיסיאה סייבר

1. יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי. הוכיחו ש־$\operatorname{char}(\mathbb{F})$ מחלק את $|\mathbb{F}|$.
רמז: חלקו את $|\mathbb{F}|$ ב־$\operatorname{char}(\mathbb{F})$ עם שארית (כלומר רשמו $|\mathbb{F}| = q \cdot \operatorname{char}(\mathbb{F}) + r$ עבור $q, r \in \mathbb{N}$ עם $0 \le r < \operatorname{char}(\mathbb{F})$).

2. פתרו את מערכות המשוואות הבאות מעל $\mathbb{R}$:
א.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 7x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

3. פתרו את מערכות המשוואות הבאות מעל השדות הנתונים:
א. $\begin{cases} ix + (1-i)\,y = 0 \\ 2x - (1-i)\,y = 0 \end{cases}$ מעל $\mathbb{C}$
ב. $\begin{cases} x - (2-i)\,y = 3 - 2i \\ (2i-1)\,x + 5iy = 1 + 8i \end{cases}$ מעל $\mathbb{C}$
ג. $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ מעל $\mathbb{Z}_{13}$

4. התחלתי עם מטריצה $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. ביצעתי את הפעולות האלמנטריות הבאות וקיבלתי את מטריצת היחידה:
(א) $R_2 \to R_2 - 3R_1$
(ב) $R_2 \leftrightarrow R_3$
(ג) $R_3 \to R_3 + R_2$
(ד) $R_1 \to 2R_1 - R_2$
(ה) $R_2 \to R_2 + R_3$
(ו) $R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_3$
מיהי A שהתחלתי איתה?

5. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & \dots & 2n+1\\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 & \dots & 4n+1\\ 4n+1 & 4n+3 & 4n+5 & \dots & 6n+1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2\left(n-1\right)n+1 & 2\left(n-1\right)n+3 & 2\left(n-1\right)n+5 & \dots & 2\left(n-1\right)n+2n+1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}$$

פתרו את מערכת המשוואות $(A \mid b)$.

6. תהי $A \in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, ויהי $b \in \mathbb{R}^m$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $x,y \in \mathbb{R}^n$ הם פתרונות של המערכת $(A \mid b)$ אז $x+y$ הוא גם פתרון של המערכת $(A \mid b)$.

ב. אם $x,y \in \mathbb{R}^n$ הם פתרונות של המערכת $(A \mid b)$ אז $x-y$ הוא גם פתרון של המערכת $(A \mid 0)$.

ג. נניח ש־$z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ הוא פתרון של מערכת המשוואות. אז גם $\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\left(z_1\right)\\ \vdots\\ \mathrm{Re}\left(z_n\right)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון של המערכת $(A \mid b)$.

ד. נניח ש־$z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ הוא פתרון של מערכת המשוואות. אז גם $\begin{pmatrix}\mathrm{Im}\left(z_1\right)\\ \vdots\\ \mathrm{Im}\left(z_n\right)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון של המערכת $(A \mid b)$.

ה. אם כל $x \in \mathbb{R}^n$ הוא פתרון של המערכת $(A \mid 0)$ אז $A=0$.

7. הוכיחו שכל מטריצה שקולה למטריצה מדורגת קנונית יחידה.