אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 8

15 בדצמבר 2025

לאורך כל השאלות F שדה כלשהו.

1. היעזרו במשפט היסודי של האלגברה כדי להראות שכל פולינום אי-פריק $f \in \mathbb{C}[x]$ הוא ממעלה 1.

2.
   (א) יהי $p \in F[x]$ פולינום ממעלה 2 או 3 שאין לו שורשים. הוכיחו ש- p אי-פריק.

   (ב) הוכיחו שהפולינום $x^2 + x + 1$ הוא אי-פריק מעל השדה $\mathbb{Z}_2$.

3.
   (א) תנו דוגמה למטריצה הפיכה ולכסינה.

   (ב) תנו דוגמה למטריצה הפיכה שאינה לכסינה.

   (ג) תנו דוגמה למטריצה לכסינה שאינה הפיכה.

4. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל F, $T : V \to V$ העתקה ליניארית, ו- $\mathcal{B}$ בסיס של V. הוכיחו ש- v הוא וקטור עצמי של T שמתאים לע"ע λ אם ורק אם $[v]_{\mathcal{B}}$ הוא וקטור עצמי (nיה עצמית) של $[T]_{\mathcal{B}}$ שמתאים לע"ע λ.

5. הוכיחו ש- 0 הוא ערך עצמי של $A \in M_n(F)$ אם ורק אם A אינה הפיכה.

6. תהי $A \in M_n(F)$ מטריצה משולשית (עליונה או תחתונה). מיצאו את הערכים העצמיים של A.

~~7.~~ יהי $V < M_2(F)$ תת-המרחב של כל המטריצות האלכסוניות. נגדיר $T : V \to V$ על ידי

$$T\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x-y \end{pmatrix}.$$

~~(א)~~ קיבעו האם T העתקה לכסינה כאשר $F = \mathbb{Q}$ וכאשר $F = \mathbb{R}$.

~~(ב)~~ נביט בבסיס $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ של V. עבור F מהסעיף הקודם, אם T לכסינה, לכסנו את המטריצה $[T]_{\mathcal{B}}$.

~~8.~~ יהיו $a, b \in F$. הוכיחו כי המטריצה $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(F)$ לכסינה אם ורק אם $a \neq b$, ובמקרה הזה מיצאו בסיס של וקטורים עצמיים.

~~9.~~ תהי $A \in M_n(F)$ ונניח ש- λ^2 הוא ערך עצמי של A^2. הוכיחו כי ל- A יש ערך עצמי λ או $-\lambda$ (רמז: הביעו את $p_{A^2}(\lambda^2)$ באמצעות $p_A(\lambda)$ ו- $p_A(-\lambda)$).