עוצמות

הקדמה:

1. $\{1,2,3\},\{4,5,\}$ שונות גודל
2. זיווג מתאים בין קבוצה אחת לאחרת. אין הקבוצות לעיל אין זיווג
3. קבוצות סופיות באותו הגודל אמ"מ יש ביניהן פונקצית זיווג

$\mathbb{N}_{\text{even}}, \mathbb{N}$ – מי יותר גדול?

ביניהן קיימת פונקצית זיווג ולכן הן בעוצמה שווה. אפשר גם לכתוב אחת את השנייה בעקרון ההחלפה (לא להצמד לרעיון הזה).

דוגמה לפונקציה כזו: $f = \lambda n \in \mathbb{N}.2n$ תהיה חחע ועל $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{\text{even}}$ ולכן זיווג.

מקיום הזיווג, $|\mathbb{N}_{\text{even}}| = |\mathbb{N}|$

אפשר להגדיר עוצמה כאובייקט מתמטי, אך ההגדרה לא תינתן בקורס זה.

דוגמאות:

1. בהקדמה הראינו ש־$|\mathbb{N}_{\text{even}}| = |\mathbb{N}|$. באופן דומה, $|\mathbb{N}_{\text{odd}}| = |\mathbb{N}|$.
2. נראה ש־$|\mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}| = |\mathbb{N}|$. נגדיר: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. נבחר $f = \lambda n \in \mathbb{N}.n+3$ חחע ועל.
3. יהי X קבוצה. מתקיים $|X| \le |\mathcal{P}(X)|$. נמצא פונ חחע: $f\colon X \to \mathcal{P}(X), f = \lambda a \in X.\{a\}$. [זה גם קטן ממש, נוכיח את זה בהמשך הקורס].
4. $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{R}|$ (בהמשך הקורס נוכיח שזה קטן ממש): נבחר פונקצית זיווג $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $f = \lambda n \in \mathbb{N}.n,$.

הוכחות קטנות למשפטים:

1. $A \subseteq B \implies |A| \le |B|$ (נבחר זיווג $f = \lambda a \in A.a, f\colon A \to B$)
2. $|A| = |A|$ (זיווג id_A)
3. $|A| = |B| \implies |B| = |A|$ (נתון קיום זיווג $h\colon A \to B$, לכן $h^{-1}\colon B \to A$ זיווג שיתאים להפך)
4. $|A| = |B| \land |B| = |C| \implies |A| = |C|$ (נתון קיום זיווגים $h_1\colon A \to B, h_2\colon B \to C$, נבחר $h = h_1 \circ h_2$ זיווג שיתאים [ישנו משפט – הרכבת זיווגים היא זיווג])
5. $|A| \le |B| \land |B| \le |C| \implies |A| \le |C|$ (באופן דומה לטענה 4 + ישנו משפט שהרכבת פונקציות חחע היא חחע)
6. $|A| = |B| \land |B| < |C| \implies |A| < |C|$ (לפי 5 $|A| \le |C|$. בנוסף, נוכיח $|A| \neq |C|$; נניח בשלילה שכן, לכן לפי 3 נובע $|A| = |B|$ ולפי 4 (בגלל שנתון $|A| = |C| \land |A| = |B|$) נגרר $|B| = |C|$ וסהכ סתירה לכך ש־$|B| < |C|$).

נניח $|A| = |A'| \land |B| = |B'|$. נקבע $f\colon A \to A', g\colon B \to B'$ כאשר f, g זיווגים.

1. נוכיח $|A\times B|=|A'\times B'|$: נגדיר $h\colon (A\times B)\to(A'\times B')$, $h=\lambda\langle a,b\rangle\in A\times B.\langle f(a),g(b)\rangle$, נוכיח h זיווג (זה אמור היות קל אז אנחנו לא עושים את זה בכיתה).

2. נוכיח $|A\to B|=|A\to B|$. נגדיר $\varphi\colon (A\to B)\to(A'\to B'),\varphi=\lambda h\in A\to B.g\circ h\circ f^{-1}$. כדי להוכיח ש־$\varphi$ היא זיווג, נוכיח שהיא הפיכה (יש משפט המאפשר את זה). נגדיר:

$$\psi\colon (A'\to B')\to(A\to B),\psi=\lambda\tilde{h}\in A'\to B'.g^{-1}\circ\tilde{h}\circ f$$

נוכיח ש־φ,ψ הופכיות משני הצדדים.

- $\varphi\circ\psi=id_{A'\to B'}$: יהי איבר $h\colon A'\to B'$, נוכיח $\varphi(\psi(h))=h$.

$$\varphi\circ\psi(h)=\varphi(\psi(h))=\varphi(g^{-1}\circ h\circ f)=\underbrace{g\circ g^{-1}}_{id_{B'}}\circ h\circ\underbrace{f\circ f^{-1}}_{id_{A'}}=h$$

- באופן דומה, $\psi\circ\varphi=id_{A\to B}$

סה"כ $|A\to B|=|A'\to B'|$

II