לינארית 2א ~ תרגיל בית 2

שחר פרץ

8 בנובמבר 2025

(1)

נוכיח ונפריך את הטענות הבאות:

(א) יהיו $v, u, w \in \mathbb{R}^3$. נניח ש־$v \cdot w = u \cdot w$ וכן כל הרכיבים של w אינם אפס, ונוכיח שזה גורר $v = u$.

הפרכה. נבחר $w = \mathbb{1}$ כאשר $\mathbb{1} = (1, 1 \dots 1)$. אזי לכל $e_i \in \mathbb{R}^3$ ובפרט בעבור $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ מתקבל מהגדרת סכפול ש־$e_i \cdot w = e_i \cdot \mathbb{1} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ ואז מצאנו $u = e_1, v = e_2$ כך ש־$u \cdot w = v \cdot w = 1$ למרות שכל רכיבי w אינם 0. ■

(ב) יהיו $v, u \in \mathbb{R}^3$ ונוכיח שאם $\forall w \in \mathbb{R}^n \colon v \cdot w = i \cdot w$, אז $v = u$.

הוכחה. יהיו v, u המקיימים את התנאי הנתואר לעיל. אזי בעבור $e_1 \dots e_n \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$(u)_i = \sum_{j=1}^{n} [(u)_i \cdot \delta_i] = e_i \cdot u = \sum_{j=1}^{n} [(v)_i \cdot \delta_i] = (v)_i$$

כאשר $(w)_i$ האיבר ה־i בוקטור $w \in \mathbb{R}^n$ כלשהו. מכאן, מהטענה המרכזית של n־יה סדורה, בהכרח $v = u$ כדרוש. ■

(2)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה.

(א) נוכיח ש־$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \colon u \cdot (Av) = (A^T u) \cdot v$

הוכחה. יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$. נקבל:

$$\begin{aligned} u \cdot (Av) &= (Av) \cdot u \\ &= (Av)^T u \\ &= (v^T A^T) u \\ &= v^T (A^T u) \\ &= v \cdot (A^T u) \end{aligned}$$

הגדרת כסלוף

כי לכל מטריצות A, B מתקיים $(AB)^T = B^T A^T$

אסוציאטיביות כפל מטריצות

הגדרת סכלוף

■

(ב) עתה, נניח ש־$\forall v \in \mathbb{R}^n \colon v \perp Av$.

(a) נוכיח שאם n אי־זוגי, אז A לא הפיכה.

הוכחה. יהיו $u, w \in \mathbb{R}^n$. מתקיים:

$$\begin{aligned} 0 = (u+w) \cdot (A(u+w)) = (u+w) \cdot (Au + Aw) &= \cancel{u \cdot Au} + u \cdot Aw + w \cdot Au + \cancel{v \cdot Av} \\ &= u \cdot Aw + \underbrace{Au \cdot w}_{u \cdot A^T w} = u \cdot (A^T w + Aw) = u(A^T + A)w \end{aligned}$$

נבחין שעבור $u = e_j, w = e_i$ מתקיים $0 = u(A + A^T)w = e_j(A + A^T)e_i = (A + A^T)_{ij}$ (כאשר בעבור מטריצה C נסמן את המקום ה־ij בה ב־$(C)_{ij}$). מכאן ש־$\forall i, j \in [n] \colon (A + A^T)_{ij} = 0$. סה"כ $A + A^T = 0$, כלומר $A = -A^T$ דהיינו A אנטי־סימטרית.

קל להוכיח שכל מטריצה אנטי־סימטרית ב־$M_n(\mathbb{F})$ אינה הפיכה: $\det A = \det A^T$ ומכאן $\det A = \det A^T = \det((-A^T)^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. חלוקה ב־$\det A$ תוביל ל־$1 = -1$ וסתירה, ולכן לא ניתן לבצע חלוקה כזו, כלומר $\det A = 0$. מכאן ש־A איננה הפיכה, כדרוש. ■

(b) נחפש A המקיימת $\forall v\in\mathbb{R}^n\colon Av\perp v$ שהינה הפיכה.

הוכחה. עבור $A=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, מטריצת הסיבוב ב־$90°$, נקבל בבירור ש־$A$ הפיכה (שורותיה לא ת"ל) וכן כל $v\in\mathbb{R}^2$ מקיים $v=(x,y)$ עבור $x,y\in\mathbb{R}$ כלשהם ומכאן:

$$(Av)\cdot v=(-y,x)\cdot(x,y)=-yx+xy=-xy+xy=0\implies Av\perp v$$

וסה"כ מצאנו מטריצה המקיימת את הדרוש. ■

(3)

נראה שלכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ מתקיים:

$$|ab+ca+bc|\leq a^2+b^2+c^2$$

הוכחה. ניעזר בא"ש קושי־שוורץ. נגדיר את הוקטורים $x=(a,b,c),y=(c,a,b)$ מעל $\mathbb{R}^3$. אז:

$$|ab+ca+bc|=|ac+ab+cb|=|x\cdot y|\leq||x||\,||y||=\sqrt{x\cdot x}\sqrt{y\cdot y}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{c^2+a^2+b^2}=a^2+b^2+c^2$$

כדרוש.

הערה: מכאן ששוויון אמ"מ $x=y$ כלומר $a=c\wedge b=a\wedge c=b$, ומטרנזטיביות זה שקול לכך ש־$a=b=c$. ■

(4)

יהי $0\neq v\in\mathbb{R}^n$. נוכיח שקיים $u\in\mathbb{R}^n$ יחיד המקיים את התכונות הבאות:

- v,u ת"ל, כלומר $\exists\alpha\in\mathbb{R}\colon v=\alpha u$
- $||v||=1$
- $u\cdot v>0$

הוכחה. נוכיח את היחידות והקיום.

- **קיום:** עבור הוקטור $\tilde{v}=\frac{v}{||v||}$ מתקיימות שלושת התכונות. בבירור $v,\tilde{v}$ ת"ל בעבור $\alpha=\frac{1}{||v||}$. כמו כן $||\tilde{v}||=1$ בגלל ש־:

$$||\tilde{v}||=\left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right|=\frac{v^T}{||v||}\cdot\frac{v}{||v||}=\frac{v^Tv}{\sqrt{v\cdot v}^2}=\frac{v^Tv}{v^Tv}=1$$

וכן $u\cdot v>0$ בגלל ש־:

$$v\cdot\tilde{v}=v^T\cdot\frac{v}{||v||}=\frac{v^Tv}{\sqrt{v^Tv}}=\sqrt{v^Tv}=||v||>0$$

כדרוש.

- **יחידות:** יהיו v_1,v_2 וקטורים המקיימים את שלושת התכונות לעיל. משום ששניהם תלויים לינארית ב־u, ניתן לבטאם כ־$v_1=\alpha u,v_2=\beta u$ עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ סקלרים כלשהם. מהתכונה $||v_1||=||v_2||=1$ נקבל שבעבור $v_i=\gamma v$ כלשהו:

$$1=||\gamma v||=|\gamma|\,||v||\implies|\gamma|=\frac{1}{||v||}$$

ובפרט בעבור α,β. מהגדרת ערך מוחלט בממשיים, $\alpha,\beta=\pm\frac{1}{||v||}$. נניח בשלילה $\alpha\neq\beta$, אז בה"כ $\beta=-\frac{1}{||v||}$, כלומר:

$$v\cdot v_2=v^T\beta v=-\frac{v^Tv}{\sqrt{v^Tv}}=-\underbrace{\sqrt{v^Tv}}_{>0}<0$$

ומכאן ש־v_2 לא מקיים את התכונה השלישית לעיל, וסתירה. סה"כ $\alpha=\beta$, כלומר $v_1=\alpha v=\beta v=v_2$ ומטרנזטיביות $v_1=v_2$ כדרוש מיחידות.

■

(5)

נוכיח את כלל המקבילית למכפלה סקלרית שראינו בתרגול:

$$\forall u,v\in\mathbb{R}^n\colon\ ||u+v||^2+||u-v||^2=2\,||u||^2+2\,||v||^2$$

הוכחה. יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$. אזי:

$$\begin{aligned}||u+v||^2+||u-v||^2&=(u+v)\cdot(u+v)+(u-v)\cdot(u-v)\\&=||u||^2+2(u\cdot v)+||v||^2+||u||^2-2(u\cdot v)+\overbrace{(-v)\cdot(-v)}^{(-1)^2||v||=||v||}\\&=||u||^2+||v||^2+\cancel{2(u\cdot v)-2(u\cdot v)}\\&=||u||^2+||v||^2\quad\top\end{aligned}$$

■

(6)

תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ת"ק. נוכיח מספר טענות.

(א) מתקיים $0^\perp=\mathbb{R}^n$ וכן $(\mathbb{R}^n)^\perp=\{0\}$.

הוכחה.

$$0^\perp=\{v\in\mathbb{R}^n\colon 0\perp v\}=\{v\in\mathbb{R}^n\colon 0\cdot v=0\}=\{v\in\mathbb{R}^n\mid \mathrm{T}\}=\mathbb{R}^n$$

כאשר T מייצג פסוק אמת. נוכיח בהכלה דו־כיוונית בעבור השוויון השני.

- מתקיים $0\in(\mathbb{R}^n)^\perp$ משום שידוע $\forall v\in\mathbb{R}^n\colon v\cdot 0=0$ כלומר $v\perp 0$ כדרוש.
- יהי $v\in(\mathbb{R}^n)^\perp$. נוכיח $v=0$. ידוע $e_1\dots e_n\in\mathbb{R}^n$, ונסמן ב־$(v)_i$ את הקורדינאטה ה־i של v. מהנתון, לכל $i\in[n]$ ידוע $v\perp e_i$ כלומר $0=v\cdot e_i=(v)_i$. כל קורדינאטות v הן 0 וסיימנו.

מההכלה הדו־כיוונית הזו, קיבלנו $(\mathbb{R})^n=\{0\}$ כדרוש. ■

(ב) $\operatorname{span}A\cap A^\perp=\{0\}$

הוכחה. נוכיח ש־$\operatorname{span}A\cap A^\perp=0$. יהי $v\in\operatorname{span}A\cap A^\perp$. נבחר בסיס $\mathcal{B}=\{b_1\dots b_k\}$ ל־A, ומכאן שקיימים $\lambda_1\dots\lambda_n\in\mathbb{R}$ כך ש־$v=\sum_{i=1}^k\lambda_i b_i$, מהיות $v\in\operatorname{span}A$. עם זאת, $v\in A^\perp$ גם כן, כלומר $\forall i\in[k]\colon v\perp b_i$ משמע $v\cdot b_i=0$. נסיק ש־:

$$||v||^2=v\cdot v=v\cdot\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i b_i\right)\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^k\lambda_i(v\cdot b_i)=\sum_{i=1}^k\lambda_i\cdot 0=0$$

כאשר (1) נובע מלינאריות ברכיב השני של הסכפול. ■

(ג) $A^\perp=(\operatorname{span}A)^\perp$

הוכחה. נוכיח ש־$A^\perp=(\operatorname{span}A)^\perp$.

$\subseteq$ יהי $v\in A^\perp$. יהי $u\in\operatorname{span}A$. נראה ש־$u\perp v$. ידוע ש־u ניתן לייצוג כקומבינציה לינארית של $A=:\{a_1\}_{i=1}^k$ בעבור בסקלרים $\lambda_1\dots\lambda_k\in\mathbb{R}$, כלומר $u=\sum_{i=1}^k\lambda_i b_i$. כלומר:

$$\begin{aligned}v\cdot u&=v\cdot\left(\sum_{i=1}^k\lambda_i b_i\right)\\&\overset{\text{לינארית ברכיב השני}}{=}\sum_{i=1}^k\lambda_i(v\cdot a_i)\\&\overset{\text{בגלל ש־}a_i\in A\text{ אז }v\perp a_i\text{ כלומר }a_i\cdot v=0}{=}\sum_{i=1}^k\lambda_i\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

$\supseteq$ יהי $v\in(\operatorname{span}A)^\perp$. ידוע $\forall a\in\operatorname{span}A\colon v\perp a$ ובגלל ש־$A\subseteq\operatorname{span}A$ בפרט מתקיים $\forall a\in A\colon v\perp A$ כלומר $v\in A^\perp$ כדרוש.

סה"כ הראינו הכלה דו־כיוונית כדרוש. ■

(7)

נגדיר את הוקטורים:

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\2\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\0\end{pmatrix},\quad v_4=\begin{pmatrix}1\\3\\4\\3\end{pmatrix}$$

נמצא בסיס ל־$(v_1,v_2,v_3,v_4)^{\perp}$. יהי $v\in\mathbb{R}^4$, ונסמן $v=(x,y,z,w)$ בעבור $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ כלשהם. ידוע $\forall i\in[4]\colon v\cdot v_i=0$, כלומר:

$$\begin{cases}0x+3y+2z+2w=0\\1x+0y+2z+1w=0\\2x-3y+2z+0w=0\\1x+3y+4z+3w=0\end{cases}\longrightarrow\ker\begin{pmatrix}0&3&2&2\\1&0&2&1\\2&-3&2&0\\1&3&4&3\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה כדי למצוא את המרחב המאפס שלה.

$$\begin{pmatrix}0&3&2&2\\1&0&2&1\\2&-3&2&0\\1&3&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&3&4&3\\1&0&2&1\\2&-3&2&0\\0&3&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&3&4&3\\0&-3&-2&-2\\0&-9&-6&-6\\0&3&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{-3}\cdot R_2}\begin{pmatrix}1&3&4&3\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&-9&-6&-6\\0&3&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\to R_4-3R_2]{R_3\to R_3+9R_2}\begin{pmatrix}1&3&4&3\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-3R_2}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ומכאן נסיק שעערכת המשוואות לעיל שקולה לכך ש־:

$$\begin{cases}x&=-2z-w\\y&=-\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}w\end{cases}\iff v\in(v_1,v_2,v_3,v_4)^{\perp}$$

כלומר:

$$(v_1,v_2,v_3,v_4)^{\perp}=\left\{z,w\in\mathbb{R}\mid\begin{pmatrix}-2z-w\\-\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}w\\w\\z\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{3}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=:\operatorname{span}\{u_1,u_2\}$$

כלומר, u_1,u_2 הבסיס המבוקש.

(8)

תהי $B=\{v\in\mathbb{R}^n\colon\ ||v||=2\}$.

(א) נוכיח שאם $u,v\in B$ ת"ל אז $u=\pm v$.

הוכחה. יהיו $u,v\in B$ ונניח שהם ת"ל, כלומר $\exists\alpha\in\mathbb{R}\colon u=\alpha v$. מהנתון $||u||=2=||v||$ נקבל:

$$||v||=2=||u||=||\alpha v||=|\alpha|\,||v||$$

נחלק ב־$||v||$ את שני האגפים (חוקי, שכן $v\neq 0$ כי אם בשלילה $v=0$ אז $||v||=0\neq 2$ וסתירה) ונקבל $|\alpha|=1$, כלומר $\alpha=\pm1$ וסה"כ $u=\pm v$ כדרוש. ■

(ב) נוכיח ש־$\forall v\in B.\,\exists!u\in B\colon v\cdot u=4$

הוכחה. יהי $v\in B$, כלומר $||v||=2$.

- **קיום:** נבחר את $u=v$. מתקיים $u\cdot v=v\cdot v=||v||^2=4$ כדרוש.
- **יחידות:** יהיו $v,u\in B$. נניח $u\cdot v=4$. ידוע $||u||=||v||=2$. נוכיח $u=v$. אזי:

$$||u-v||^2=(u-v)\cdot(u-v)=||u||^2-2u\cdot v+||v||^2=2^2-2\cdot4+2^2=8-8=0\implies||u-v||=0$$

לכן ממשפט $u-v=0$, כלומר $u=v$ בהכרח, משמע היחידות מובטחת.

שחר פרץ, 2025

קומפל ב-LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד