גרפים 5 ~ נטלי שלום ~ טענות על עצים, משפט קיילי, תורת רמזי

שחר פרץ

26 ביוני 2024

REMINDERS .... (1)

- **הגדרות:**
  - **גרף קשיר** הוא גרף שבו בין כל שני צמתים יש מסלול.
  - **עץ** הוא גרף קשיר חסר מעגלים.
  - **יער:** גרף חסר מעגלים.
  - **עלה:** צומת ביער (ובפרט עץ) בעל דרגה 1.
  - **צומת מבודד:** צומת מדרגה 0.
- **טענות:**
  - **למה 1:** בגרף קשיר שבו $|V| \geq 2$ ובנוסף $|E| < |V|$ קיים צומת מדרגה 1.
  - **למה 2:** בגרף קשיר, כאשר מסירים צומת מדרגה 1 הגרף נשאר קשיר.
  - **משפט:** בגרף קשיר, מתקיים $|E| \geq |V| - 1$.
  - **למה 3:** אם מסירים קשת מגרף חסר מעגלים, מספר רכיבי הקשירות גדל.

  תרגיל: אם מסירים קשת מגרף חסר מעגלים, מספר רכיבי הקשירות גדל בדיוק ב־1 (זה משפט שצריך להוכיח)
  - **משפט:** בגרף חסר מעגלים, מתקיים $|E| \leq |V| - 1$.

IMPLIFICATIONS .... (2)

- **משפט:** (מסקנה משני המשפטים לעיל) בעץ, מתקיים $|E| = |V| - 1$.
- (כלומר, בעץ בעל n צמתים יש $n-1$ קשתות).
- **מסקנות מהלמות:**
  - **מסקנה מלמה 1:** בכל עץ שבו $|V| \geq 2$ יש עלה.
  - **מסקנה מלמה 2:** בכל עץ, אם מסירים עלה, הגרף נשאר עץ.
  - **מסקנה מלמה 3:** אם מסירים קשת מגרף חסר מעגלים, מקבלים הוא הפך ליער שאינו עץ.
- **מסקנות מהמסקנות מהלמות:**
  - עץ הוא גרף קשיר מינימלי (אם נסיר קשת, הגרף לא ישאר קשיר).
  - עץ הוא גרף חסר מעגלים מקסימלי (אם נוסיף קשת, הגרף לא ישאר חסר מעגלים).
- **משפט:** בהינתן גרף $G = \langle V, E \rangle$ התנאים הבאים שקולים:
  1. G עץ
  2. G קשיר, ובכל תת גרף שלו יש צומת מדרגה 0 או 1.
  3. G קשיר ו־$|E| = |V| - 1$.
  4. G גרף קשיר מינימלי (אם מסירים קשת, הגרף לא יהיה קשיר).
  5. בין כל שני צמתים קיים מסלול יחיד (והוא בהכרח פשוט).
  6. G חסר מעגלים ו־$|E| = |V| - 1$.
  7. G חסר מעגלים מקסימלי (אם מוסיפים קשת, יווצר מעגל בגרף).

  הוכחה. לא נוכיח הכל, אך לבינתיים נוכיח שקילות בין (5) ל־(6).

$\Longleftarrow$ נניח שבין כל שני צמתים קיים מסלול יחיד. ראשית, מחר שקיים מסלול בין על שני צמתים, אז הגרף קשיר ולכן לפי משפט $|E| \geq |V| - 1$. נניח בשלילה שקיים מעגל $v_0, \dots v_m$ ($v_0 = v_m$). מתקיים $m > 2$, כי ($v_0 = v_1$) $\langle v_0, v_1 \rangle$ אינו מעגל מאחר

שבגרף פשוט אין קשת מצומת לעצמו, ובנוסף $(v_0 = v_2)$ $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ אינו מעגל כי הקשת $\{v_0, v_1\}$ חוזרת פעמיים. נתסכל על v_1. בהכרח $v_1 \neq v_0, v_m$. קיימים שני מסלולים שונים מ־v_1 ל־v_0: $\langle v_0, v_1 \rangle$, $\underbrace{\langle v_1, v_2, ; v_m \rangle}_{\text{באורך גדול מ־2}}$. וסה"כ סתירה להנחה, כלומר אין ב־G מעגל, ולפי משפט נובע $|E| \leq |V| - 1$. סה"כ G חסר מעגלים וגם $|E| = |V| - 1$.

$\Longrightarrow$ נניח G חסר מעגלים ו־$|E| = |V| - 1$, ש־G חסר מעגלים, ו־$|E| = |V| - 1$. נוכיח שבין כל שני צמתים קיים מסלול יחיד. נניח בשלילה שקיימים שני צמתים שביניהם שני מסלולים שונים (הערה: המסלולים בהכרח פשוטים כי בגרף אין מעגלים). נפריד למקרים:

– אם שני המסלולים זרים בקשתות, אז ניתן לשרשר אותם ולסגור מעגל – וזו סתירה.

– אז קיים צומת המופיע בשני המסלולים, ניקח את הצומת הראשון במסלול $v_0, \ldots, v_m$ שמופיע גם במסלול השני, נניח שהוא $v_j = u_i$ ונשרשר דרכו, כלומר $a, \ldots, v_j, u_{i+1}, a$. קיבלנו מעגל, סתירה.

עד כה, הוכחנו שבין כל שני צמתים יש לכל היותר מסלול אחד. נוכיח קיום. נניח בשלילה קיום $a \neq b$ צמתים שביניהם אין מסלול. בפרט, $\{a, b\} \notin E$. נוסיף את הקשת $\{a, b\}$ לגרף, לא יתכן שסגרנו מעגל, כי אז נובע שיש מסלול אחר בין a ל־b בגרף המקורי, בסתירה להנחה. מצד שני, מספר הקשתות אחרי ההוספה הוא $|V|$, בסתירה לכך שבגרף חסר מעגלים יש לכל היותר $|V| - 1$ קשתות. סה"כ בין כל שני צמתים קיים מסלול, והוא יחיד.

סה"כ הוכחו שתי הגרירות, כדרוש. ∎

CAYLEY THEOREM . . . . (3)

כמה עצים קיימים על קבוצת הצמתים $V = [n] = \{1, \ldots, n\}$?

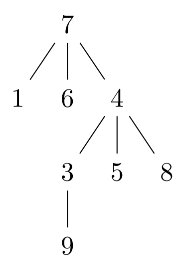
מקרים פשרטיים:

- $n = 1$: עץ אחד
- $n = 2$: עץ אחד
- $n = 3$: 3 אפשרויות.
- $n = 4$: יהיו שני סוגים של עצים (תמונות אצל סיכומים אחרים). יש 16 אפשרויות.

משפט קיילי: מספר העצים מעל $V = [n]$ (כאשר $n \geq 2$) הוא n^{n-2}.

רעיון להוכחה: (כי לא ברור אם זה יהיה חלק מהקורס או לא אז לא ניכנס לפרטים) למצוא התאמה חח"ע ועל, בין העצים על $V = [n]$ לבין המחרוזות באורך $n - 2$ מעל V. נתאר פונקציה F שמתאימה לכל עץ כנ"ל מחרוזת ב־V^{n-2}. (הערה: השיטה הזו נקראת קוד $Prufer$) בהינתן עץ $\langle V, E \rangle$, יהי v העלה עם המספר הקטן ביותר, ויהי u שכנו. נכניס למחרוזת את u, ונמחק את v מהעץ (הדרגה של u תקטן ב־1). נמשיך בתהליך (כשמסירים עלה מעץ, נשאר עץ) עד שבגרף ישארו שני צמתים, שניהם עלים בהכרח.

דוגמה: נתבונן בעץ הבא, ונבנה מחרוזת לפי האלגו'



מכאן, נבנה את המחרוזת 7472443 כאשר מחקנו לפי הסדר את $1, 5, 6, 7, 8, 2, 8, 4$.

תובנות:

- כל העלים בעץ המקורי, לא מופיעים במחרוזת.
- כמות המופיעים של מספר v המחרוזת, היא $d(v) - 1$ (בפרט, נגררת מכאן התובנה הקודמת).

עתה, נתאר את ההתאמה ההופכית לאלגו' פרופר. בהינתן מחרוזת באורך $n - 2$, נחשב את הדרגות של הצמתים (מס' המופעים + 1). נבצע תהליך: בשלב $1 \leq i \leq n - 2$, ניקח את המספר הקטן ביותר j המקיים $d(j) = 1$. נבנה קשת בין j לבין a_i כאשר a_i הוא התו ה־i המחרוזת. נעדכן את הדרגות: $d(j) = 0,\ d(a_i) \leftarrow d(a_i) - 1$. לבסוף, נוסיף קשת בין שני הצמתים האחרונים שנותרו (בעלי דרגה 1).

לא נוכיח לבינתיים, אך זהו אכן ההופכי, והשאלה מוגדרת היטב. לאחר שזאת יוכח, מצאנו פונקציה והופכית לה, כלומר יש זיווג.

המשך בעמוד הבא

התורה עוסקת בשאלה, "כמה אוביייקט (אצלנו, גרף) צריך להיות גדול בשביל להכיל משהו מסויים".

משפט: בכל קבוצה של 6 אנשים קיימים 3 אנשים שמכירים זה את זה, או 3 אנשים שלא מכירים זה את זה.

בדיחה של נטלי: אנשים שלא מכירים זה את זה, הם זרים בזוגות.

משפט: (אותו המשפט, בניסוח תורת הגרפים) בכל צביעה של קשתות הגרף השלם על 6 צמתים בכחול ואדום, קיים משולש מונוכרומטי.

כלומר, בהינתן גרף מלא, נשייך צבע כחול או אדום לכל קשת, והטענה אומרת שבצביעה כזו קיים משולש בצבע אחיד.

הוכחה. תהי איזושהי צביעה של הקשתות בכחול ואדום על הגרף השלם K_6. יהי v קודקוד כלשהו. יוצאות ממנו 5 קשתות. מעקרון שובך היונים, משום שיש שני צבעים, הכרח קיימות לפחות שלוש קשתות שיוצאות ממנו באותו הצבע, בה"כ אדום. נניח כי u, x, w הם שלושה שכנים של v המחוברים אליו באדום. אם קיימת קשת אדומה בין שניים מהם, אז נקבל משולש אדום (יחד עם v). אם לא קיימת כזו, אז הקשתות בין x, u, w הן כחולות, ונקבל משולש מונוכרומטי כחול ביניהן. ■

הגדרה: עבור $m \geq 1$ טבעי, m-קליקה היא תת גרף על m צמתים (כלומר, תת גרף שהוא K_m).

הגדרה: צביעה של הצלעות של גרף $G = \langle V, E \rangle$ ב־ℓ צבעים היא פונקציה $f : E \to [\ell]$.

סימון/הגדרה: מספר רמזי ה־k, ℓ, מסומן $R(k, \ell)$, הוא המספר המינימלי של צמתים בגרף השלם מבטיח שכל צביעה של קשתות הגרף בכחול ואדום שתכיל בכחול ואדום תכיל k-קליקה אדומה או ℓ-קליקה כחולה.

הערה: $R(k, \ell) = R(\ell, k)$.

הגדרה: $R(k, k)$ נקרא מספר רמזי האלכסוני.

דוגמאות:

1. $R(3,3) \leq 6$־ (הוכחנו). נוכיח שמדובר בשוויון.

הוכחה. נתבונן ב־K_5, ונראה צביעה שסותרת (אני לא משלב כאן גרפים אז תגמבו מסיכומים אחרים). ■

2. לכל $k \geq 1$: $R(k, 1) = R(1, k) = 1$
3. לכל $k \geq 1$: $R(k, 2) = R(2, k) = k$

הסבר: אם בגרף יש פחות מ־k צמתים, נובל לצבוע את כל הקשתות באגום ונקבל קליקה אדומה קטנה מ־k צמתים, ואין קליקה כחולה בגודל בגרף K_k, אם קימת בצביעה קשת כחולה, אז קיבלנו K_2 כחול – כדרוש. אם לא קיימת כזו, אז כל הקשתות אדומות כלומר זהו K_k אדום.

4. $R(3, 4) = 9$ – תרגיל להוכחה בבית.
5. $R(4, 4) = 18$

בהצלחה לכם בלמצוא נוסחה כללית ל־R, כי $R(5, 5)$ שאלה פתוחה. יודעים שזה בין 43 ל־48.

משפט: לכל $k, \ell \geq 1$ טבעיים, קיים $R(k, \ell)$.

נוכיח טענה חזקה יותר, שבפרט תוכיח לנו את המשפט:

משפט: לכל $k, \ell > 1$ טבעיים, מתקיים $R(k, \ell) \leq R(k, \ell - 1) + R(k + 1, \ell)$

הוכחה. נסמן $N = R(k, \ell - 1) + R(k - 1, \ell)$. נתבונן ב־$K_N$. תהי $c : E \to \{R, B\}$. נסמן:

$$V_R = \{v \in [N] \mid c(\{1, v\}) = R\}, \; V_B = \{v[N] \mid c(\{1, v\}) = B\}$$

מילולית: V_R יסמן את כל הצמתים שמחוברים ל־1 באדום, ו־V_B אותו הדבר בכחול. נשים לב, שיתקיים

$$|V_R| + |V_B| = |V_R \uplus V_B| = N - 1 = R(k, \ell - 1) + R(k - 1, \ell) - 1$$

כי $V_R \uplus V_B$ יכיל את כל הצמתים חוץ מ־1. ומכאן, נובע שבהכח מתקיים אחד מהשניים: $|V_R| \geq R(k - 1, \ell)$ או ש־$|V_B| \geq R(k, \ell - 1)$, כי אחרת:

$$|V_R| \leq R(k - 1, \ell) - 1, \; |V_B| \leq R(k, \ell - 1) - 1 \implies |V_R| + |V_B| \leq N - 2$$

בסתירה לנמצא. נניח בה"כ $|V_R| \geq R(k - 1, \ell)$. אז ב־$V_R$ קיימת ℓ-קליקה כחולה, או $(k - 1)$-קליקה אדומה, ויחד עם הצומת 1 (שאינו מופיע ב־V_R) נקבל k-קליקה אדומה.

שני חסמים ידועיים על רמזי האלכסוני:

$$2^{\frac{k}{2}} \leq R(k, k) \leq 4^k$$

■

5.1

תרגיל: נתונים שני עצים $G_1 = \langle V, E_1\rangle,\ G_2 = \langle V, E_2\rangle$. נתבונן בגרף $G = \langle V, E_1 \cup E_2\rangle$. הוכיחו שקיים ב־$G$ קודקוד שדרגתו לכל היותר 3.

הוכחה. נניח בשלילה שלא קיים קדקוד כזה, כלומר $\forall v \in V. d_G(v) \geq 4$. לכן, ממשפט על סכום הדרגות:

$$2|E_1 \cup E_2| = \sum_{v \in V} \underbrace{d_g(v)}_{\geq 4} \geq 4|V| \implies |E_1 \cup E_2| \geq 2|V|$$

מהצד השני, G_1, G_2 עצים ולכן:

$$|E_1| = |E_2| = |V| - 1 \implies |E_1 \cup E_2| \leq |E_1| + |E_2| = 2|V| - 2$$

סה"כ סתירה. ■

5.2

תרגיל: נתון גרף $G = \langle V, E\rangle$, $|V| \geq 3$ כך שעבור כל קשת $e \in E$ מתקיים שהגרף המתקבל מהסרתה $\langle V, E \setminus \{e\}\rangle$ הוא עץ. הוכיחו, שלכל קוקוד ב־G הוא מדרגה 2.

הוכחה. לצורך הפתרון, נוכיח טענת עזר [צריך להכיר אותה, אבל יש להוכיחה בעת שימוש]: בכל עץ עם לפחות 2 צמתים, יש לפחות שני עלים. הוכחת טנת העזר: נניח בשלילה שיש לכל היותר עלה אחד. אז:

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 2 \cdot \underbrace{(|V| - 1)}_{\text{כמות הצמתים בעלי דרגה שהיא לפחות 2}} + 1 = 2|V| - 1 \implies |E| \geq |V| - 1 + \frac{1}{2} > |V| - 1$$

קיבלנו $|E| > |V| - 1$, סתירה להיות הגרף עץ.

נחזור להוכחה המקורית. למעשה לא נעשה את זה כי נגמר השיעור. ■