אלגברה ליניארית 2א - תרגיל 3

1. הוכיחו את הסעיפים הנותרים מהטענה בתרגול: יהי V מרחב וקטורי מעל F, ו- $U,W<V$ כך ש- $V=U\oplus W$. תהי p ההטלה על U ביחס לפירוק הנ"ל. הוכיחו כי $\mathrm{Im}p=U$ ו- $\ker p=W$.
2. יהי $U=\mathrm{span}((1,2))<\mathbb{R}^2$.
   (א) מיצאו ביטוי מפורש להטלה האורתוגונלית על U.
   (ב) מיצאו $W\neq U^\perp$ כך ש- $\mathbb{R}^2=U\oplus W$, ומיצאו ביטוי מפורש להטלה על U ביחס לפירוק $U\oplus W$.
3. יהי $U<\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי $(U^\perp)^\perp=U$.
4. יהיו $U,W<\mathbb{R}^n$ כך ש- $\mathbb{R}^n=U\oplus W$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^n=U^\perp\oplus W^\perp$.
5. יהיו $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ו- $S=(v_1,v_2,v_3)$.
   (א) מיצאו את מטריצת גרם של S, $G(S)$. האם היא הפיכה?
   (ב) יהי $U=\mathrm{span}(S)$. מיצאו בסיס S' של U, והיעזרו ב- $G(S')$ כדי לחשב את הפירוק הא"ג של $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ביחס ל- U.
6. הוכיחו את הטענה מהתרגול: יהי V מרחב וקטורי מעל F ו- $p:V\to V$ העתקה ליניארית שמקיימת $p^2=p$. אז:
   (א) $V=\mathrm{Im}p\oplus\ker p$ וכן
   (ב) p היא ההטלה על תת־המרחב $\mathrm{Im}p$ ביחס לפירוק הנ"ל (**שימו לב** ש- p **אינה** בהכרח הטלה אורתוגונלית).
7. יהיו $U,W<\mathbb{R}^n$ כך ש- $\mathbb{R}^n=U\oplus W$ ותהי $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ההטלה על U ביחס לפירוק הנ"ל.
   (א) הוכיחו כי p היא ההטלה **האורתוגונלית** על U אם ורק אם לכל $v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $p(v_1)\cdot v_2=v_1\cdot p(v_2)$.
   (ב) הסיקו שאם p היא ההטלה האורתוגונלית על U, אז לכל $u\in U$ ו- $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $u\cdot v=u\cdot p(v)$.
8. תהי $(u_1,\ldots,u_k)\subset\mathbb{R}^n$ סדרה א"נ ו- $U=\mathrm{span}(u_1,\ldots,u_k)$.
   (א) יהי $v\in\mathbb{R}^n$, ונגדיר $u=\sum_{i=1}^k(v\cdot u_i)u_i$. הוכיחו כי $u_m\perp v-u$ לכל $1\leq m\leq k$.
   (ב) הסיקו כי ההטלה הא"ג על U נתונה על ידי $p_U(v)=\sum_{i=1}^k(v\cdot u_i)u_i$.