שם התלמיד/ה:______________________ תעודת זהות: ____________________ 1.3.2023

מתמטיקה בדידה – מבחן סוף סמסטר א׳

מרצה: נטלי שלום

הוראות בחינה:

- משך הבחינה: 3.5 שעות
- אין לצרף דפי עזר לבחינה.
- בבחינה ישנן 4 שאלות עם סעיפים. יש לענות על כל השאלות.
- **יש להוכיח כל טענה שלכם, אלא אם מצוין בשאלה שלא צריך להוכיח.**
- את התשובה לכל שאלה כתבו במקום המיועד לה (בתוך המלבן שמתחת לכל שאלה). בעמודים האחרונים מצורפים דפי ״חירום״ למקרה הצורך.
- המחברת הנלווית לטופס הבחינה לא תיבדק והיא מהווה דפי טיוטה עבורכם.
  שימו לב: דפי הטיוטה לא ייבדקו!
- **טיפ חשוב:** תתחילו לפתור קודם את השאלות שאתם מרגישים איתן יותר בנוח, בנושאים שיותר קלים לכם, ואת השאלות הקשות תשמרו לסוף כדי לא לבזבז עליהן את כל הזמן.
- חובה לקחת נשימה עמוקה לפני תחילת הבחינה ולחשוב על דברים חיוביים.

בהצלחה!!!

	שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4
ציון	א___ ב___ ג___	א___ ב___ ג___ ד___	א___ ב___ ג_____	א___ ב___ ג_____

ציון סופי: ____________

שאלה 1

<u>הערה :</u> אין קשר בין הסעיפים א', ב', ג'.

א. תהי $a \neq 0$ עוצמה. מצאו עוצמה $b \neq 0$ כך ש- $a \cdot b = b$. (6 נק')

ב. תהיינה a, b עוצמות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

(1) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c כך ש- $a \cdot c = b$, אז $a \leq b$. (5 נק')

(2) אם $b \neq 0$ וקיימת עוצמה c, $c > 1$, כך ש- $a \cdot c = b$, אז $a < b$. (5 נק')

ג. תהי a עוצמה המקיימת את התנאי הבא: לכל שתי קבוצות A, C, אם $A \subseteq C$ ו- $|A| = a$ ו- $|C| > a$, אז $|C \setminus A| > a$. הוכיחו שמתקיים $a + a = a$. (9 נק׳)

שאלה 2

נגדיר פונקציה: $H = \lambda f \in \mathbb{R} \to P(\mathbb{R}). \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin f(x)\}$

א. רשמו את התחום של H ומצאו טווח עבורה. אין צורך להוכיח. (4 נק׳)

ב. חשבו את $H(\lambda a \in \mathbb{R}. [0,1])$. פשטו ככל האפשר. נמקו בקצרה. ($[0,1]$ הוא הקטע הסגור) (3 נק׳)

ג. הוכיחו: לכל $f \in \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \neq H(f)$. (8 נקי)

ד. נסמן $B = H^{-1}[\{\emptyset\}]$. תהי $F: \mathbb{R} \to B$ כלשהי. מצאו ע"י לכסון g כך ש- $g \in B \setminus Im(F)$. (10 נקי)

שאלה 3

א. תהי A קבוצה לא ריקה, ויהיו R, S יחסי סדר חלש על A כך ש-$S \subseteq R$.
הוכיחו או הפריכו: אם S יחס סדר קווי אז $S = R$. (7 נק׳)

ב. תנו דוגמה ליחס סדר חזק על $\mathbb{R}$ בעל איבר קטן ביותר ולא קווי. כתבו באופן פורמלי. אין צורך להוכיח. (4 נק׳)

ג. חשבו את העוצמה של הקבוצה: $A = \{R \in P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid \text{על } \mathbb{N} \text{ יחס סדר חזק וקווי } R\}$. (14 נק׳)

המשך פתרון שאלה 3 סעיף ג׳

שאלה 4

נגדיר יחס R מעל $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$R = \{\langle f, g \rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ f(n+1) - f(n) = g(n+1) - g(n)\}$$

א. הוכיחו ש-R הוא יחס שקילות על $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. (6 נק׳)

ב. מצאו את $[id_{\mathbb{N}}]_R$ ואת העוצמה שלה. כתבו באופן פורמלי. אין צורך להוכיח. (6 נק׳)

$[id_{\mathbb{N}}]_R =$

$|[id_{\mathbb{N}}]_R| =$

ג. נסמן את קבוצת המנה: $M = {}^{(\mathbb{N} \to \mathbb{N})}/_{R}$. נגדיר פונקציה $\varphi: (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \to M$ באופן הבא:

$$\varphi = \lambda g \in \mathbb{N} \to \{0,1\}.\ \left[\varphi_g\right]_R$$

כאשר φ_g מוגדרת כך: $\varphi_g = \lambda n \in \mathbb{N}.\ \sum_{i=0}^{n} g(i)$. (תזכורת: $\sum_{i=0}^{n} g(i) = g(0) + g(1) + \cdots + g(n)$)

האם φ היא חד-חד ערכית? האם היא על? הוכיחו את תשובתכם. (13 נק')

דף "חירום" 1

דף "חירום" 2

דף "חירום" 3