חדו"א 1א ~ תרגיל בית 1

שחר פרץ

7 בנובמבר 2025

(1)

(א) נוכיח כי אם $a+\frac{1}{a}$ שלם, אז $a^3+\frac{1}{a^3}$ שלם.

הוכחה. נניח $a+\frac{1}{a}$ שלם. אז:

$$Z \ni \left(a+a^{-1}\right)^3 = a^3+3a^2a^{-1}+3aa^{-2}+a^{-3} = a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})$$

נסמן $z=a+a^{-1}$. סה"כ קיבלנו $z^3=a^3+\frac{1}{a^3}+3z$ כלומר $a^3+\frac{1}{a^3}=z^3-3z$. השלמים סגורים לכפל וחיבור כלומר $a^3+\frac{1}{a^3}\in\mathbb{Z}$ כדרוש. ∎

(ב) נוכיח $\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$

הוכחה. נניח בשלילה $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}$, ואז $\sqrt[3]{2}=\frac{n}{m}$ עבור n,m זרים כלשהם (כלומר $\gcd(n,m)=1$). אז:

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} &= \sqrt[3]{2} \\ \frac{n^3}{m^3} &= 2 \quad ()^3 \\ n^3 &= 2m^3 \quad \times m^3 \end{aligned}$$

אזי, מהמשפט היסודי של האריתמטיקה ובגלל ש־2 ראשוני, נסיק של־m,n בהכרח קיים גורם משותף גדול מ־1, בסתירה להיותם זרים. ∎

(ג) נוכיח כי לכל $a,b\geq 0$, מתקיים $\min\{-a,-b\}=-\max\{a,b\}$.

הוכחה. בה"כ $a\geq b$. אזי ממשפט מהכיתה $-a\leq -b$. לכן מהגדרה $\max\{a,b\}=a$ וכן $\min\{-a,-b\}=-a$. סה"כ $\min\{-a,-b\}=-a=-\max\{a,b\}$ ומטרנזטיביות נקבל את הדרוש. ∎

(ד) יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$. נראה ש־$(3\mid a\wedge 3\mid b)\iff 3\mid a^2+b^2$.

הוכחה. נוכיח את שתי הגרירות.

$\Longrightarrow$ נניח $3\mid a^2+b^2$. אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש־$3k=a^2+b^2$. נפרק למקרים.

- אם 3 מחלק לפחות אחד מהם, אז בה"כ $3\mid a$ ואז קיים m כך ש־$3m=a$. סה"כ נקבל $3k-a^2=b^2$ כלומר $3(k-3m^2)=b^2$ כלומר $3\mid b^2$ ומהמשפט היסודי של האריתמטיקה, בגלל ש־3 ראשוני בהכרח $3\mid b$ וסיימנו.
- אם 3 לא מחלק אף אחד מהם, נוכיח טענת עזר: אם $\mathbb{Z}\ni c$, $3\nmid c$, אז $c\equiv_3 1$. אם $3\nmid c$ אז $c=3k+r$ כאשר $k\in\mathbb{Z}, r\in\{1,2\}$. ואז:

$$c^2=(3k+r)^2=3^2k^2+3kr+r^2=3(3k^2+kr)+r^2\equiv_3 r^2=:\cdots$$

סה"כ בעבור $r=1$ נקבל $\cdots\equiv_3 1^1=1$ ועבור $r=2$ נקבל $\cdots\equiv_3 2^2=4\equiv_3 1$. כלומר $c^2\equiv_3 1$ כדרוש.

מכאן שקיימים k_1,k_2 כך ש־$a^2=3k_1+1, b^2=3k_2+1$. נסיק:

$$a^2+b^2=3k_1+1+3k_2+1=3(k_1+k_2)+2\equiv 2\not\equiv_3 0 \implies 3\nmid a^2+b^2$$

וזו סתירה לכך ש־$3\mid a^2+b^2$, כלומר 3 מחלק לפחות אחד מהם (מה שמחזיר אותנו למקרה הראשון שהוכח).

$\Longleftarrow$ נניח $3\mid a\wedge 3\mid b$. נוכיח $3\mid a^2+b^2$. מהגדרה, קיימים $k,m\in\mathbb{Z}$ כך ש־$3k=a,\ 3m=b$. אז:

$$a^2+b^2=(3k)^2+(3m)^2=3(3k^2+3m^2)\equiv_3 0\implies 3\mid a^2+b^2$$

כדרוש.

∎

(2)

נוכיח בעזרת אקסיומות השדה הסדור את הטענות הבאות:

(א) יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נראה ש־$x<y \implies 0<y-x$.

הוכחה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נניח $x<y$. מאדטיביות יחס הסדר $x+(-x)<y+(-x)$ ומהגדרת הנגדי $0<y-x$ כדרוש. ■

(ב) יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נראה ש־$x<y \implies (0<x \wedge 0<y \wedge x^2<y^2)$.

הוכחה. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש־$x,y>0$ וכן $x^2<y^2$. קיים נגדי $-x^2$ והוכחנו יחיד ל־x, ולכן נוכל להוסיף אותו לשני האגפים מאקטיביות יחס הסדר. מהגדרת הנגדי $0<y^2-x^2$. קל לראות מדיסטרבוטיביות, קומטטיביות והגדרת נגדי ש־$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. כלומר $0<(x+y)(x-y)$. בגלל ש־$x,y>0$ אזי $x+y>0+y=y>0$ (הוספנו y לשני אגפי $x>0$) ובפרט לא שווה ל־0, לכן קיים הופכי בכפל $\frac{1}{x+y}>0$ שנוכל לכפול בו את שני אגפי המשוואה בהתאם לאחת מאקסיומות יחס הסדר. סה"כ נקבל $0=0\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{0}{x+y}>(x-y)\frac{x+y}{x+y}=(x-y)$ כלומר $x-y>0$ ומסעיף קודם $x>y$ כדרוש. ■

(3)

(א) נוכיח את א"ש המשולש ההפוך.

הוכחה. נסמן ב־$\stackrel{\triangle}{\leq}$ א"שים הנובעים מא"ש המשולש שכבר הוכחנו. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$. נפרק למקרים לפי הגדרת הערך המוחלט.

- אם $|x|\geq|y|$ אז $||x|-|y||=|x|-|y|$ ואז:

$$|x|\leq|x-y+y|\stackrel{\triangle}{\leq}|x-y|+|y| \implies \underbrace{|x|-|y|}_{||x|-|y||}\leq|x-y|$$

- אם $|x|<|y|$ אז $||x|-|y||=-(|x|-|y|)$, ואז:

$$|y|=|y-x+x|\stackrel{\triangle}{\leq}\underbrace{|y-x|}_{|=-(x-y)|=|x-y|}+|x| \implies \overbrace{|y|-|x|}^{=-(|x|-|y|)=||x|-|y||}\leq|x-y|$$

סה"כ בכל המקרים אי־השוויון מתקיים.

שוויון מתקיים אמ"מ השוויונות לעיל הדוקים, שהדוקים במקרים שבהם א"ש המשולש הדוק (וידוע $|a|+|b|=|a+b|$ אמ"מ $\operatorname{sgn}a=\operatorname{sgn}b$). זה יקרה כאשר $\operatorname{sgn}(x-y)=\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x=\operatorname{sgn}(y-x)$. באופן כללי, $\operatorname{sgn}a=\operatorname{sgn}b$ אמ"מ $ab\geq0$, כלומר נוכל לפשט את התנאי לכך ש־$xy>0$ וגם $(x-y)(y-x)>0$. ■

(ב) נוכיח ש־$\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq2$ לכל $a\neq0$.

הוכחה. נפרק למקרים.

- אם $a>0$, אז מתקיים $(a-1)^2\geq0$ שכן ריבוע של מספר ממשי הוא חיובי. מכאן נקבל:

$$a^2-2a+1\geq0 \implies a^2+1\geq2a$$

משום ש־$a>0$, נוכל לחלק ב־a ואי השוויון ישמר. סה"כ נקבל $a+\frac{1}{a}\geq2$ ומשום ש־$\left|a+\frac{1}{a}\right|=a+\frac{1}{a}$ לכל $a>0$, קיבלנו את הדרוש.

- אם $a<0$, אז ידוע $\left|a+\frac{1}{a}\right|=\left|-|a|+\frac{1}{-|a|}\right|=\left|-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right|=\left||a|+\frac{1}{|a|}\right|$. בגלל ש־$|a|>0$, ועבור המקרה הזה כבר הוכחנו, במקרה הקודם, סיימנו.

עתה נמצא תנאי הכרחי ומספיק לשוויון. טענה: $a=\pm1$ אמ"מ ישנו שוויון.

- **מספיק:** אם $a=1$, אז $2=1+1=\left|\pm\left(1+\frac{1}{1}\right)\right|=\left|a+\frac{1}{a}\right|$ כדרוש.
- **הכרחי:** אם ישנו שוויון $\left|a+\frac{1}{a}\right|=2$, נפרק למקרים.
  - אם $a>0$ אז $a+\frac{1}{a}=2$ ואז $a^2+1=2a$ כלומר $a^2+2a+1=0$. השורשים היחידים של הפולינום הזה הם $\pm1=a$.
  - אם $a<0$ אז $-a-\frac{1}{a}=2$ ואז $-a^2-1=2a$ כלומר $-a^2-2a-1=0$. השורשים היחידים של הפולינום הזה הם $\pm1=a$.

■

(ג) נוכיח ש־$\frac{y}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{y}}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ לכל $x,y>0$.

הוכחה. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. נגדיר $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$. אז:

$$\begin{aligned}
\iff \quad & a + b \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \\
\iff \quad & (a+b)ab \leq a^3 + b^3 \\
\iff \quad & a^2b + b^2a \leq a^3 + b^3 \\
\iff \quad & 0 \leq a^3 + b^3 - a^2b - b^2a \\
\iff \quad & 0 \leq a(a^2 - b^2) - b(a^2 - b^2) \\
\iff \quad & 0 \leq \underbrace{(a-b)}_{\alpha}\underbrace{(a^2-b^2)}_{\beta}
\end{aligned}$$

אם $a > b$ אז $\alpha, \beta > 0$ וסיימנו. אם $a < b$ אז $\alpha, \beta < 0$ וכפל מספרים שליליים הוא חיובי, אז סיימנו. בשני המקרים הקודמים בהכרח נקבל מספר שאינו 0. אם $a = b$ אז נקבל שקילות לשוויון ל־0, וזה יתרחש אמ"מ $x = y$. ∎

(4)

נוכיח באינדוקציה מספר טענות.

(א) נוכיח ש־$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.

- **בסיס:** עבור $n = 1$ מתקיים $1^2 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ כדרוש.
- **צעד:** נניח את נכונות הטענה על n ונוכיח בעבור $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \overset{\text{ה.א.}}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + n + 2n^2}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 7n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+3)}{6}
\end{aligned}$$

ואכן הצעד מתקיים כדרוש.

∎

(ב) נוכיח שלכל $q \neq 1$ מתקיים $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.

- **בסיס:** בעבור $n = 1$ מתקיים $1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ כדרוש.
- **צעד:** נניח באינדוקציה את נכונות הטענה בעבור n, ונוכיח בעבור $n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} q^i \overset{\text{ה.א.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$$

וסה"כ צעד האינדוקציה עובד בהתאם לה.א.

∎

(ג) נוכיח ש־$\forall n \in \mathbb{N}\colon 18 \mid 7^n + 12n + 17$.

הוכחה. נתחיל את ההוכחה מהלמה הבאה, שנוכיח באינדוקציה: $\forall n \in \mathbb{N}\colon 3 \mid 7^n + 2$. בסיס $n = 1$ עבורו $7 + 2 = 3 \cdot 3$ כדרוש. בעבור הצעד נניח באינדוקציה על n ונוכיח בעבור $n+1$, מה.א. $7^n + 2 = 3m$ עבור $m \in \mathbb{N}$ כלשהו ואז:

$$7^{n+1} + 2 = 7^n \cdot 6 + 7^n + 2 = 3(2 \cdot 7^n + m) \implies 3 \mid 7^{n+1} + 2$$

וסה"כ הצעד מתקיים והראינו את הלמה.

נוכיח באינדוקציה על n.

- **בסיס:** בעבור $n = 1$ מתקיים $18 \mid 36 = 7^1 + 12 \cdot 1 + 17$.
- **צעד:** נניח באינדוקציה את נכונות בטענה בעבור n. נוכיחה בעבור $n+1$. מה.א. ידוע קיום k כך ש־$18k = (7^n + 12n + 17)$. מהלמה שלנו ידוע קיום $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$7^n + 2 = 3m$. נבחין ש־:

$$7^{n+1} + 12(n+1) + 17 = \underbrace{7 \cdot 7^n}_{6 \cdot 7^n + 7^n} + 12n + 17 + 12 = \underbrace{7^n + 12n + 17}_{18k} + 6 \cdot 7^n + 6 \cdot 2 = 18k + 6(\underbrace{7^n + 2}_{3m}) = 18(k+m)$$

משום ש־$k, m \in \mathbb{N}$ הוכחנו את הדרוש.

■

(5)

נוכיח ש־:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

הוכחה. מהבינום של ניוטון:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1)^k = (-1+1)^k = 0^k = 0$$

כדרוש. ■

(6)

יהי $h > 0$ וכן $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־$|x-a| < h \wedge |y-b| < h$. נוכיח $|xy - ab| < h(|a| + |b| + h)$.

הוכחה. נבחין שמא"ש המשולש ההפוך:

$$|x| - |a| \le ||x| - |a|| \le |x - a| < h \implies |x| \le h + |a|$$

עוד נבחין ש־:

$$\begin{aligned} |xy - ab| &= |xy - xb - ab + xb| && \text{א"ש המשולש} \\ &\le |xy - xb| + |-ab + xb| = |x|\,|y - b| + |b|\,|x - a| \\ &\le |x|\,h + |b|\,h = h(|b| + |x|) && |x-a| < h \wedge |y-b| < h \\ &\le h(|a| + |b| + h) && \text{מהטענה שהוכחנו} \end{aligned}$$

כדרוש. ■

(7)

(א) נוכיח את א"ש ברנולי המוכלל:

$$\forall (x_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n \colon (\forall i \in [n] \colon x_i \ge 0) \implies \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n. נוכיח את הלמה הבאה: עבור $x, y \ge 0$ מתקיים $(1+x)(1+y) \ge 1 + x + y$. בה"כ $x \le y$ ואז:

$$(1+x)(1+y) \ge (1+y)(1+y) = (1+y)^2 \overset{(1)}{\ge} 1 + 2y = 1 + y + y \ge 1 + x + y$$

כאשר (1) נכון מא"ש ברנולי עבור $n = 2$. עתה נפנה להוכיח באינדוקציה את הטענה עצמה.

- **בסיס:** נובע ישירות מא"ש ברנולי עבור $n = 1$.
- **צעד:** נניח באינדוציה בעבור n ונוכיח ל־$n + 1$.

$$1 + \sum_{i=1}^{n+1} x_{n+1} = 1 + x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} x_n \overset{\text{ה.א.}}{\le} 1 + x_{n+1} + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \overset{\text{הלמה}}{\le} x_{n+1} \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n+1} x_i$$

■

(ב) נוכיח את א"ש המשולש המוכלל:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.

- **בסיס:** ישירות מא"ש המשולש.
- **צעד:** נניח באינדוקציה על n ונוכיח בעבור $n+1$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right| = \left|x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} x_i\right| \overset{(1)}{\leq} |x_{n+1}| + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \overset{(2)}{\leq} |x_{n+1}| + \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|$$

כאשר (1) נובע מא"ש המשולש ו־(2) נובע מה.א.

■

(8)

יהיו d, a_0 ממשיים חיוביים וכן $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. נסמן $a_k = a_0 + kd$ לכל $k \in [n+1]$. נוכיח ש־:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$$

הוכחה. באינדוקציה על n. עבור $n = 1$ טרוויאלי. נניח נכונות על n ונוכיח בעבור $n+1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}} \overset{\text{ה.א.}}{=} \frac{1}{a_n(a_0 + nd + d)} \cdot \frac{n}{(a_0 + d)a_n} = \frac{n(a_0 + nd + d) + (a_0 + d)}{a_1 a_n a_{n+1}} = \frac{n\cancel{a_n}}{a_1 \cancel{a_n} a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}} \quad \top$$

■

שחר פרץ, 2025

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד