חדו"א ו5

שחר פרץ

23 בנובמבר 2025

טורים

כל סדרה ניתנת לייצוג כטור. זו דרך אחרת להציג סדרות.

הגדרה 1. תהא a_n סדרה. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של a_n להיות:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

הבחנה: כל סדרה היא סדרת סכומים חלקיים של איזושהי סדרה.

הוכחה. תהי a_n סדרה, נגדיר את:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_{n+1} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$$

נקבל שהסכום הטלסקופי:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_n$$

■

אז למעשה אין שום דבר חשוב בסכום עצמו. מה שחשוב זה הקשר בין הסדרה עצמה לבין סדרת הסכומים החלקיים שלה.

סימון 1. תהא a_n סדרה. תהי ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. אז אם S_n מתכנסת לגבול $\ell \in \mathbb{R}$ נאמר כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, ונסמן:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

הבחנה חשובה: הסימון הזה של $\sum_{n=1}^{\infty}$ משמש אותנו להגיד שהטור לא מתכנס, כלומר נאמר "$\sum_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנס" גם אם $\sum_{n=1}^{\infty}$ לא קיים. זאת בניגוד לגבולות, שם אנחנו לא ממש יכולים לכתוב "$\lim_{n\to\infty}$ לא קיים" (שכן $\lim_{n\to\infty}$ לא ביטוי מוגדר).

- **דוגמה:** יהי $1 \neq q \in \mathbb{R}$ ונגדיר $a_n = q^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן ב־S_n את סדרת הסכומים החלקיים. אז:
  - $$\forall n \in \mathbb{N}^+\colon S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$
    לכן הטור מתכנס אמ"מ $|q| < 1$ (הוכחנו את זה בתרגיל הבית) ואז:
  - $$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{q-1}$$
- **דוגמה 2:** נגדיר $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n := \frac{1}{n(n+1)}$, ונסמן ב־$S_n$ את סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל־a_n.
  נבחין שממכנה משותף:

  $$\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n(n+1) = \frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

  ואז (סכום טלסקופי):

  $$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

לכן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנסת וכן $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

מכאן אפשר להוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס (עשינו את זה גם בתרגול).

אלו פחות או יותר הדוגמאות היחידות (גיאומטרי וטלסקופי) שנראה בקורס הזה לגבי משהו שאשכרה מתכנס. בד"כ נרצה לדעת האם טור מסויים הוא מתכנס או לא. כשיהיו לנו אינטגרלים (בחדו"א 2א) יהיה לנו קצת יותר כוח להוכיח טורים. אבל כמו הרבה דברים בחדו"א, גם זה לא תמיד יספיק.

קריטריון קושי להתכנסות טורים

תהא a_n סדרה. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אמ"מ:

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists n \in \mathbb{N}.\, \forall N \leq n \leq m\colon \underbrace{\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|}_{|S_n - S_{m+1}|} < \varepsilon$$

זה לא מעניין בכלל. זה פשוט קריטריון קושי לסדרות, אבל על סדרת הסכומים החלקיים.

מסקנה 1. תהא a_n סדרה. אז אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הערה 1. הצד השני לא מתקיים, לדוגמה עבור $a_n = \frac{1}{n}$ מתקיים ש־$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \approx \ln n \to \infty$ למרות ש־$n^{-1} \to 0$.

בדומה לגבולות של סדרות, שינוי של מספר סופי של איברים (בסדרה המקורית) אולי ישנה את הגבול (כי סוכמים אותם), אבל לא עומד לשנות את ההתכנסות.

משפט 1. הטור הוא לינארי, כלומר יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים מתכנסים. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

מתכנסים.

זה נובע ישירות מאריתמטיקה של גבולות, על סדרת הסוכמים החלקיים.

התכנסות בהחלט

כאן יש אשכרה הגדרה חדשה.

הגדרה 2. תהא a_n סדרה. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט 2. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא בפרט מתכנס.

אין לנו שום דבר חכם להגיד על הקשר בין הגבולות של שניהם. עם ננסה להוכיח עם סנדוויץ' (תנסו), נכשל במהרה. יש כאן צורך בקסם, שיפילו לנו גבול מהשמיים, וזה בדיוק מה שאקסיומת השלמות מספקת לנו. ספציפית, נשתמש בקריטריון קושי שתלוי בה.

הוכחה. תהא a_n סדרה, ונניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט. מקריטריון קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־:

$$\forall n \geq m \geq N\colon \left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

נתבונן ב־N. יהי $n \geq m \geq N$. מא"ש המשולש המוכלל:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

סה"כ מקריטריון קושי לטורים גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

טורים אי־שליליים

יש פרק שלם בטורים שעוסק בטורים שומרי סימן (איבריהם גדולים ממש מאפס או קטנים ממש מאפס). לצורך הנוחות מתעסק במקרה הראשון). יש לזה שתי סיבות:

- בגלל הנושא של התכנסות בהחלט.
- זה מקרה נפוץ שקורה הרבה בעולם האמיתי.
- יש משפטים מועילים על זה.

בהרבה מהמקרים נדרוש אי־שליליות בכל $\mathbb{N}$ גם אם זה נכון רק החל מ־$\mathbb{N}$ מסויים.

"אפס הוא חיובי יחסית"

משפט 3. תהא a_n סדרה, ונניח ש־$\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\geq 0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

(זה דורש את אקסיומת השלמות) אין כאן אשכרה הוכחה. אם $a_n\geq 0$ אז סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה, וממשפט (ווירשטראס 1) כל הסיפור הזה מתכנס אמ"מ סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

נתעסק קצת בקריטריוני השוואה.

1. תהיינה a_n,b_n סדרות אי־שליליות. נניח כי $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n\leq b_n$ (למעשה, לא צריך לכל $\mathbb{N}$, מספיק כמעט תמיד. ההוכחה קצת שונה אבל כמעט תמיד יותר חזק). אז אם $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

   הוכחה. נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס ל־ℓ. ידוע b_n מונוטונית ולכן מתכנסת לסופרמום שלה, ונסיק:
$$\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}b_k\leq\ell$$
   לכן $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מונוטונית עולה וחסומה ולכן מתכנסת (יש כאן שימוש באקסיומת השלמות). ■

2. נניח $\forall n\in\mathbb{N}\colon b_n>0$ (חיובית ממש!) ונניח $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\to\ell$ וכמו כן $\ell>0$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס.

   הוכחה. נוכיח רק כיוון אחד, והכיוון השני יגרר מאריתמטיקה של גבולות (נהפוך את $\frac{a_n}{b_n}$ וזה חוקי כי a_n ממקום מסויים לא נוגע ב־0 כי $\ell\neq 0$). קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq N$ מתקיים:
$$\frac{a_n}{b_n}<\frac{3\ell}{2}$$
   (הראינו שזה נכון באופן כללי לכל מספר שגדול מ-ℓ + הנחנו אי־שליליות). כלומר לכל $n\geq\mathbb{N}$, מתקיים $a_n<\frac{3\ell}{2}b_n$. מקריטריון ההשוואה הראשון $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, ומאריתמטיקה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\ell}{2}b_n$ מתכנס. ■

3. **מבחן השורש:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח כי קיים $q\in(0,1)$ כך ש־$\forall n\in\mathbb{N}\colon\sqrt[n]{a_n}\leq q$. אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

   הוכחה. לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחין ש־$a_n\leq q^n$, וממבחן השוואה עם הטור הגיאומטרי (שמתכנס) סיימנו. ■

4. **מבחן השורש הגבולי:** תהא a_n סדרה אי־שלילית. נניח ש־$\exists q\in[0,1)\colon\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n}<q$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

   הערה 2. זה משפט קצת יותר חזק מהקודם.

   הערה 3. לשני מבחני השורש כיוון אחר – אם $q<1$ אז הטור מתבדר.

   הוכחה. ידוע $q<1$ אז $\sqrt[n]{a_n}<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}+\frac{1-q}{2}$ כמעט תמיד. לכן $\sqrt[n]{a_n}<\frac{1+q}{2}$ כמעט תמיד. אזי $a_n<\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ כמעט תמיד, ידוע $\frac{1+q}{2}<1$ (כי $q<1$, וכזה ממוצע משהו) כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q}{n}\right)^n$ מתכנס ומהקריטריון הראשון $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. ■

5. **מבחן המנה:** נניח $a_n>0$ (כמעט תמיד) ויהי $q\in(0,1)$, ונניח $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$ (כמעט תמיד) אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

   הוכחה. השורה התחתונה של ההוכחה היא:
$$a_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1\leq q^n\cdot a_1$$
   ואז מבחן ההשוואה. ■

6. **מבחן המנה הגבולי:** יהי $a_n>0$. נסמן $\ell=\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ו־$m=\liminf n\to\infty\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז אם $\ell<1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ואם $m>1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

   הוכחה. לבית. ■

דוגמה: האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$ מתכנס? נסמן ב־$a_n=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}$. אז:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}}{\frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}}=\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}n!}{n^{\frac{n}{2}}(n+1)!}=\frac{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}=\sqrt{\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}}\to\sqrt{e\cdot 0}=0$$
לכן $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$. ממשפט המנה הגבולי נקבל שזה מתכנס.

קירוב סטרלינג

קירוב סטרלינג אומר ש־:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{e\pi n}}=1$$
אינטואיטבית, זה אומר ש־n עצרת בגבול מתנהג כמו החזקה $\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$. לא נוכיח אותו – המרצה לא מודע לאף הוכחה שמשתמשת בכלים שלמדנו.

עתה נפתור את התתרגיל ממקודם, של $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\frac{k}{2}}}{k!}$, באמצעות קירוב סטירלינג ומבחן השורש הגבולי. נגדיר $b_n=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$. נקבל:

$$\sqrt[n]{b_n}=\frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{e}\cdot\underbrace{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}_{1}}\to 0$$

כמו כן לפי סטרלינג:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n/2}}{n!}}{\frac{n^{n/2}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n!}=1$$

לכן לפי משפט ההשוואה הגבולי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{n!}$ מתכנס.

למעשה יש עוד מבחן לטורים אי־שליליים שלא הזכרנו.

9. תהא a_n סדרה מונוטונית יורדת ואי־שלילית אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסת אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2n}$ מתכנסת.

הוכחה. $\implies$ נניח שהטור מתכנס. יהי $n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n}2^ka_{2k}=2\cdot\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_{2k}=2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{2^k-1}a_{2k}=2\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{2^{k-1}}a_{2^{k-1}+\ell}=2\sum_{k=2}^{2^n}a_k\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

וכזה מהמבחן הראשון סיימנו שוב.

$\impliedby$ נניח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}2^na_{2n}$ מתכנס. נוכיח ש־$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

$$\sum_{k=1}^{n}\leq\sum_{k=1}^{2^n}a_k=\sum_{k=1}^{2^n}\sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1}a_{2^k+\ell}\leq\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_{2^{k-1}}\leq\sum_{k=0}^{\infty}2^ka_{2k}$$

כאן, נחליף באיבר הראשון.

■

אז למה אנחנו צריכים את מבחן העיבוי?

- עבור $\alpha\leq 1$ הראינו ש־$\frac{1}{n^\alpha}\geq\frac{1}{n}$ ולכן $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ מתבדר.
- עבור $\alpha\geq 2$ הראינו ש־$\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{1}{n^2}$ ולכן $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס.

מה לגבי כל מה שבין 1 ל־2?

משפט 4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אמ"מ $\alpha>1$.

הוכחה. יהי $\alpha>0$. אז $\frac{1}{n^\alpha}$ מונוטונית יורדת וחיובית. נסמן $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$. אז:

$$b_n=2^na_{2n}=\frac{2^n}{n^{\alpha n}}=2^{n(1-\alpha)}=(2^{1-\alpha})^n$$

נבחין ש־b_n גיאומטרי. הוא מתכנס אמ"מ $2^{1-\alpha}\in(0,1)$, שמתקיים אמ"מ $\alpha>1$. עוד ידוע ש־b_n מתכנס אמ"מ a_n מתכנס ממבחן העיבוי, וסה"כ a_n מתכנס אמ"מ $\alpha>1$. ■

נעשה עוד תרגיל, אולי קצת פחות מועיל.

תרגיל 1. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס? (בסיס הלוגוריתם לא משנה)

הוכחה. נגדיר $a_n=\frac{1}{n\ln n}$. ניעזר במבחן העיבוי:

$$2^na_{2n}=2^n\cdot\frac{1}{2^n\ln(2^n)}=(n\ln 2)^{-1}\to\inf$$

לכן גם $\sum 2^na_{2n}$ מתבדר לכן $\sum a_n$ מתבדר. ■

טורים משני סימן

כל מה שאמרנו על שומרי סימן נכון על מי ששומר סימן כמעט תמיד. כלומר אלו שלא נופלים לקטגוריה הזו, הטורים משני הסימן, מחליפים סימן באופן שכיח. הטורים הראשונים שנדבר עליהם הם כאלו שלא רק משנים סימן באופן שכיח, אלא ממש כל מעבר.

משפט 5 (משפט לייבניץ). תהא a_n סדרה חיובית ומונוטונית יורדת שגבולה 0. אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

מתכנס.

התובנה החשובה בהוכחה היא שאפשר לדעת את המרחק מהגבול, בכל נקודה בסכום, גם אם קשה לחשב אותו. "אבל המבחנים לא עובדים לי. [תשובה:]אויויוי".

אנחנו לא יודעים מה הגבול, אנחנו לא רוצים לדעת מה הגבול, המבחנים עובדים רק לדברים משמרי סימן... נשארנו עם כושי.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \geq n$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon$. נתבונן ב־N. יהיו $N \geq m \geq n$. השטיק יהיה שהזוגות $(a_k - a_{k-1}) < 0$.

- אם $n-m$ זוגי נקבל:

$$\begin{aligned}
&a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\
=&a_m + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+3}) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) < a_m < \varepsilon
\end{aligned}$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}
&a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} + \cdots + a_n \\
=&(a_m - a_{m+1}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_1 \geq a_n > 0 > -\varepsilon
\end{aligned}$$

לכן:

$$\left|\sum_{k=m}^{n}(-1)^k a_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m} a_k\right| < \varepsilon$$

- אם $n-m$ אי־זוגי נקבל הוכחה דומה.

■

מההוכחה, ניתן להסיק:

$$\ell := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon \left|\ell - \sum_{k=1}^{n}(-1)^n a_n\right| \leq a_{n+1}$$

מכאן, ש־$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס, ולא בהחלט. על טור כזה, אומרים שהוא מתכנס בתנאי.
למזלנו, ליאור הכין למעננו עוד קריטריונים מרתקים לשיעור, והם הכללה של קריטריון לייבניץ. האחד קריטריון דיריכלה והשני אבל.

קריטריון אבל

תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

1. b_n מונוטונית (יורדת) (אבל לא בהכרח גבול 0).
2. נניח $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

לבית – יש להוכיח שקריטריון אבל נובע מקריטריון דיריכלה.

0.0.1 קירטריון דיריכלה

1. b_n מונוטונית (יורדת) וגבולה 0.
2. סדרת הסכומים החלקיים המתאימה ל־a_n חסומה (אבל לא בהכרח מתכנסת).

תהאנה a_n, b_n סדרות. נניח כי:

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. ידוע $\exists M > 0. \forall n \in \mathbb{N}\colon |A_n| \le M$ (כי היא חסומה). בגלל ש־b_n שואפת ל־0 אז $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \ge N\colon |b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. יהיו $n \ge m \ge N$. אז:

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{k} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} - A_{m-1} b_m = \sum_{k=m}^{n-1} \left(A_k (b_k - b_{k+1}) \right) + A_n b_n - A_{m-1} b_m\end{aligned}$$

לכן (ניעזר בזה ש־b_n מונוטונית יורדת):

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| &\le \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \le \sum_{k=m}^{n} \left(|A_k| (b_k - b_{k+1}) \right) + |A_n b_n| + |A_{m-1} b_m| \\ &\le M(b_m - b_{n+1}) + M b_n + M b_m < 2 \cdot M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

לסכום הזה קוראים סכום אבל. אולי קוראים לזה דיריכלה אבל אבל הראשון שעשה את זה. ■

תרגיל 2. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ מתכנס בהחלט, בתנאי, או מתבדר?

רמז שאפשר להוכיח באינדוקציה:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(\alpha + \beta k) = \frac{\sin\left(\frac{b\beta}{2} \sin\left(\alpha + \frac{(n-1)}{2}\beta\right)\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

נסמן $a_n = \sin n$ ו־$b_n = \frac{1}{n}$. אפשר לדעת ש־b_n מונוטונית יורדת שגבולה 0, ו־:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le \text{משהו שהמרצה לא בטוח לגביו} \le \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$$

"יש כאן איזו טעות בנוסחה. בתרגיל בית תקבלו את זה כמו שצריך". ואז זה זה מתכנס לפי דיריכלה. יש כאן שאלה, האם זה מתכנס בהחלט?

$$\left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \ge \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2} = \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{מתבדר (בסכום)}} - \underbrace{\frac{\cos 2n}{2n}}_{\text{מתכנס מדיריכלה}}$$

מאריתמטיקה של גבולות, סיימנו.

. . . .

שחר פרץ, 2025