מבוא לתורת הקבוצות

אודיסיאה סייבר שנה א'

מתמטיקה בדידה

מהי קבוצה?

<u>הגדרה נאיבית:</u> קבוצה היא אוסף של עצמים.

העצמים מהם הקבוצה מורכבת נקראים **איברים**. כל איבר של קבוצה הוא **שייך** לקבוצה.

<u>נשים לב:</u> אין מגבלה מה יכול לשמש כאיבר בקבוצה. קבוצה יכולה להכיל איברים מסוגים שונים.
למשל, אפשרי שאיבר בקבוצה יהיה קבוצה בעצמו.

<u>סימונים:</u> - קבוצה מסמנים בעזרת **סוגריים מסולסלים { }**, שביניהם כתובים איברי הקבוצה.
- שמות של קבוצות מסומנים בדרך כלל באותיות גדולות באנגלית.
- אם איבר x שייך לקבוצה A מסמנים זאת כך: $\boldsymbol{x \in A}$.

<u>דוגמה:</u> $A = \{1, -3, \pi, \mathbb{N}\}$. מתקיימים:

- $1 \in A$
- $\mathbb{N} \in A$
- $\{1\} \notin A$ *קבוצה בעלת איבר יחיד נקראת "סינגלטון"
- $\{1\} \in \{3, \{1\}\}$
- $4 \notin A$

מהי קבוצה?

שוויון בין קבוצות – עקרון האקסטנציונליות:

שתי קבוצות הן שוות אם ורק אם יש להן בדיוק את אותם האיברים.

באופן פורמלי: $A = B$ אמ"מ $\forall x.\, x \in A \leftrightarrow x \in B$.

שתי מסקנות:

1. אין חשיבות לסדר האיברים בקבוצה. לדוגמה: $\{3,2,1\} = \{1,2,3\}$
2. אין חשיבות לחזרות של איבר בקבוצה. לדוגמה: $\{1,2\} = \{1,1,1,2\}$

סה"כ, **קבוצה היא אוסף של איברים, ללא חשיבות לסדר ולחזרות.** $\mathbb{N}$ / $\mathbb{N}$

קבוצות שחשוב להכיר: * $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

* הטבעיים החיוביים $\mathbb{N}_+ = \{1,2,3,\ldots\}$.

* הקבוצה הריקה $\emptyset = \{\}$. מתקיים: $\forall x.\, x \notin \emptyset$.

דרכים לכתיבת קבוצה

ישנן 3 דרכים לכתיבת קבוצה:

1. רשימת איברים. לדוגמה: $\{1,2,3\}$.

2. עקרון ההפרדה: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$, כאשר A היא קבוצה ו-$\varphi(x)$ תכונה.
במילים: "קבוצת כל האיברים $x \in A$ שמקיימים $\varphi(x)$".
המשמעות היא: $a \in \{x \in A \mid \varphi(x)\}$ אמ"מ $a \in A \wedge \varphi(a)$.

3. עקרון ההחלפה: $\{f(x) \mid x \in A\}$, כאשר A קבוצה ו-$f(x)$ פעולה המוגדרת על איברי A.
$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0,1,4,9,\dots\}$
במילים: "קבוצת כל ה- $f(x)$ כך ש-$x \in A$".
המשמעות היא: $a \in \{f(x) \mid x \in A\}$ אמ"מ $\exists x \in A.\, a = f(x)$.

<u>דוגמה:</u> נרשום את קבוצת המספרים הטבעיים הזוגיים בשלוש הדרכים.

1. רשימת איברים: $\{0,2,4,6,\dots\}$
2. עקרון ההפרדה: $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\, n = 2k\}$, 3 כין נוספת: $\{n \in \mathbb{N} : 2 \mid n\}$.
3. עקרון ההחלפה: $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

סימון מקוצר לקבוצת הטבעיים הזוגיים: $\mathbb{N}_{\textbf{even}}$. סימון מקוצר לקבוצת הטבעיים האי-זוגיים: $\mathbb{N}_{\textbf{odd}}$.
זוגי   אי זוגי

תרגילים

תרגיל: הוכיחו כי $5 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{Z}.\ y + x = 5\}$.

הוכחה: הקבוצה מוגדרת ע"י עקרון ההפרדה, ולכן צ"ל: $5 \in \mathbb{N} \wedge (\exists y \in \mathbb{Z}.\ y+5=5)$.
לפי הגדרת הטבעיים, מתקיים $5 \in \mathbb{N}$. כדי להוכיח שמתקיים $\exists y \in \mathbb{Z}.\ y+5=5$,
ניקח $y=0$. אז $y \in \mathbb{Z}$ לפי הגדרת השלמים, ומתקיים $y+5=0+5=5$,
כלומר מתקיים $\exists \tilde{y} \in \mathbb{Z}.\ \tilde{y}+5=5$, וסיימנו.

תרגיל: הוכיחו כי $\{1\} \in \{\{1,n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה: הקבוצה מוגדרת ע"י עקרון ההחלפה, לכן צ"ל: $\exists n \in \mathbb{N}.\ \{1\}=\{1,n\}$.
ניקח $n_0=1$. אז לפי הגדרת הטבעיים מתקיים $n_0 \in \mathbb{N}$. בנוסף, מתקיים
$\{1,n_0\}=\{1,1\}=\{1\}$ כי בקבוצה אין חשיבות לחזרות. $\blacksquare$

הכלה בין קבוצות

<u>הגדרה:</u> נאמר שקבוצה A **מוכלת** בקבוצה B, **ונסמן** $\boldsymbol{A \subseteq B}$, אם מתקיים $\forall x.\, x \in A \to x \in B$.
כלומר, אם כל איבר של A הוא גם איבר של B. במקרה כזה, A נקראת **תת קבוצה** של B.

<u>דוגמה:</u> $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$, $\{0,17\} \subseteq \{0,17\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

טענה: לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq A$.

טענה: לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$.

הוכחה: תהי A קבוצה. צריך להוכיח: $\forall x.\, x \in \phi \to x \in A$.
יהי x כלשהו. מהגדרת הקבוצה הריקה, מתקיים $x \notin \emptyset$. לכן, הרישא (התנאי) של
הפסוק $x \in \phi \to x \in A$ היא שקרית, כלומר פסוק ההגדרה הוא פסוק אמת.
בסיטואציה כזו, אומרים שהפסוק "מתקיים באופן ריק".

<u>הערה:</u> נסמן $A \nsubseteq B$ (A לא מוכלת ב-B) אם מתקיים $\neg(A \subseteq B)$, כלומר:

אם ורק אם

$$\neg(A \subseteq B) \Leftrightarrow \neg(\forall x.\ x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow \exists x.\ x \in A \wedge x \notin B$$

$$\neg(\forall x. p \to q) \Leftrightarrow \exists x. \neg(p \to q) \Leftrightarrow \exists x. \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \exists x. p \wedge \neg q$$

כלומר אם קיים ב-A איבר שאינו שייך ל-B. לדוגמה, $\{1,2\} \nsubseteq \{1\}$.

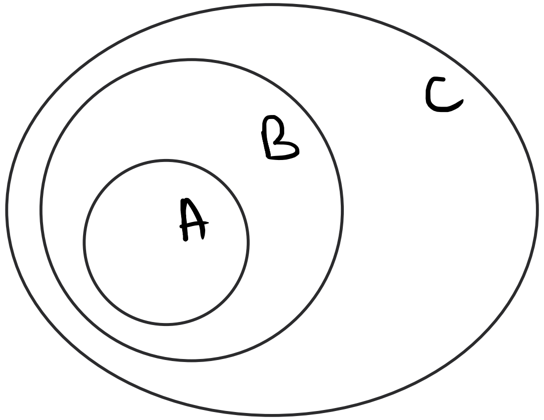
הכלה בין קבוצות

<u>**הגדרה:**</u> נאמר שקבוצה A **מוכלת ממש** בקבוצה B, ונסמן $\boldsymbol{A \subset B}$ **או** $\boldsymbol{A \subsetneq B}$, אם A מוכלת ב-B ולא שווה לה ($A \subseteq B$ וגם $A \neq B$).

<u>דוגמאות:</u>

- $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$
- $\{0,17\} \not\subset \{0,17\}$
- לכל $A \neq \emptyset$, מתקיים $\emptyset \subset A$.

הכלה בין קבוצות



דיאגרמת ון! Venn:

טענה: אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

צ"ל: $\forall x. x \in A \to x \in C$

הוכחה: יהי $x \in A$. צ"ל: $x \in C$. מאחר ש-$A \subseteq B$, נובע לפי הגדרת הכלה
$\forall y. y \in A \to y \in B$, ולכן מכך ש-$x \in A$ נובע ש-$x \in B$.
כעת, מהנתון $B \subseteq C$ נובע לפי הגדרת הכלה ש-$\forall y. y \in B \to y \in C$. לכן,
מכך ש-$x \in B$ נובע ש-$x \in C$.
סה"כ, הוכחנו $\forall x. x \in A \to x \in C$ ולכן $A \subseteq C$. ∎

תנאי שקול לשוויון קבוצות

טענה: לכל שתי קבוצות A,B מתקיים: $A=B$ אם ורק אם $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$.

הוכחה: תהיינה A,B קבוצות. מתקיים:

$$A=B \overset{\text{אקסטנציונליות}}{\iff} \forall x.\ x\in A \leftrightarrow x\in B$$

$$\overset{\text{שקילות לוגית}}{\iff} \forall x.(x\in A \to x\in B)\wedge(x\in B\to x\in A)$$

$$\overset{\text{שקילות לוגית}}{\iff} (\forall x.\ x\in A\to x\in B)\wedge(\forall x.\ x\in B\to x\in A)$$

$$\overset{\text{הגדרת הכלה}}{\iff} A\subseteq B \ \wedge \ B\subseteq A$$

לתנאי השקול הנ"ל קוראים **הכלה דו כיוונית**. כדי להוכיח שוויון קבוצות, לרוב נשתמש בהכלה דו כיוונית.

קבוצות לא שוות

ניעזר בתנאי השקול שמצאנו לשוויון קבוצות ובשקילויות לוגיות כדי למצוא תנאי שקול לאי-שוויון בין קבוצות.

$$A \neq B \iff \neg(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \iff A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \iff$$

$$\iff (\neg \forall x.\ x \in A \to x \in B) \vee (\neg \forall x.\ x \in B \to x \in A)$$

$$\iff (\exists x.\ \neg(\overbrace{x \in A \to x \in B}^{x \notin A \vee x \in B})) \vee (\exists x.\ \neg(\overbrace{x \in B \to x \in A}^{x \notin B \vee x \in A}))$$

$$\iff (\exists x.\ x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists x.\ x \in B \wedge x \notin A)$$

מסקנה: שתי קבוצות הן שונות זו מזו אמ"מ קיים איבר ששייך לאחת מהן ולא לשנייה.

פרדוקס ראסל

נתבונן בקבוצה הבאה: $S = \{X \mid X \notin X\}$. דוגמה: * $\{1\} \notin \{1\}$ ולכן $\{1\} \in S$

על פי הגדרתה, לכל Y מתקיים: $Y \in S$ אמ"מ $Y \notin Y$. * $\phi \notin \phi$ ולכן $\phi \in S$

היכן הבעיה?

אם ניקח $Y = S$, נקבל שמתקיים: $S \in S$ אמ"מ $S \notin S$.

קיבלנו פסוק שקר. כלומר, קיום הקבוצה $\{X \mid X \notin X\}$ מוביל לסתירה!

הסיבה לסתירה היא "חוסר הזהירות" בהגדרה הנאיבית של קבוצה.
בעקבות דוגמה הזו, התפתחה תורת הקבוצות האקסיומטית. בעזרת האקסיומות ניתן לבנות את כל הקבוצות ה"חוקיות", ולהימנע מפרדוקסים. למשל, עקרון ההפרדה ועקרון ההחלפה הם חלק מהאקסיומות. ישנן אקסיומות נוספות שאותן לא נלמד בקורס. לקריאה נוספת, חפשו "אקסיומות צרמלו-פרנקל".

התשובה לפרדוקס היא שהגדרת הקבוצה הייתה לא חוקית במערכת האקסיומות (אם הקבוצה הייתה מוגדרת בעזרת עקרון ההחלפה או ההפרדה, היא הייתה חוקית).

פרדוקס ראסל

מסקנה מפרדוקס ראסל: לא קיימת "קבוצת כל הקבוצות".

הוכחה ("הוכחה בדרך השלילה"): נניח בשלילה שקיימת קבוצת כל הקבוצות, נסמנה Y.

אז לפי עקרון ההפרדה, קיימת הקבוצה $S = \{X \in Y \mid X \notin X\}$.

זוהי סתירה, נראה זאת על ידי חלוקה למקרים:

- אם $S \in S$: אז לפי הגדרת S ע"י עקרון ההפרדה נובע ש-$S \notin S$, וזו סתירה.
- אם $S \notin S$: אז מאחר ש-S מקיימת $S \in Y \wedge S \notin S$, מתקיים $S \in S$, וזו סתירה.

בכל אחד מהמקרים קיבלנו סתירה. סה"כ הנחת השלילה שלנו הייתה שגויה, כלומר לא קיימת קבוצת כל הקבוצות, וסיימנו.

קבוצת חזקה

<u>הגדרה:</u> תהי A קבוצה. **קבוצת החזקה של A** היא קבוצת כל תתי הקבוצות של A:

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

במילים אחרות, לכל קבוצה B מתקיים $B \in P(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$.

$\phi \subseteq \{\mathbb{N}\}$ $\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbb{N}\}$

$P(\{\mathbb{N}\}) = \{\phi, \{\mathbb{N}\}\}$

<u>דוגמאות:</u>

$\phi \subseteq \{0,1\}$ $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ $\{1\} \subseteq \{0,1\}$ $\{0,1\} \subseteq \{0,1\}$

- $P(\{0,1\}) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
- $P(\{\{1\},2\}) = \{\phi, \{2\}, \{\{1\}\}, \{\{1\},2\}\}$
- לכל קבוצה A, מתקיים $\emptyset, A \in P(A)$.

$P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}$, 1, $2^1 = 2$

$P(\phi) = \{\phi\}$, 0, $2^0 = 1$

<u>משפט:</u> אם A היא קבוצה סופית בעלת n איברים, אז כמות האיברים ב-$P(A)$ היא 2^n.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

קבוצות בסיסיות ב-$\mathbb{R}$

קטעים: לכל $a,b \in \mathbb{R}$, מגדירים:

- קטע פתוח: $(a,b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

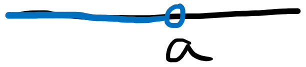
- קטע סגור: $[a,b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- קטע חצי פתוח חצי סגור: $[a,b)$, $(a,b]$, מוגדרים באופן דומה.

קרנות: לכל $a \in \mathbb{R}$, מגדירים:

- קרן פתוחה:
  - $(a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

  - $(-\infty,a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



- קרן סגורה:
  - $[a,\infty) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

  - $(-\infty,a] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$