חדו"א 1א ~ תרגיל בית 2

שחר פרץ

18 בנובמבר 2025

(1)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה ויהי $s \in \mathbb{R}$. נוכיח s החסם העליון של A אמ"מ s חסם מלעיל מינימלי.

הוכחה. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$. נוכיח שקילות באמצעות הוכחת גרירה דו־כיוונית.

$\implies$ נניח α חסם עליון של A. נוכיח שהוא חסם מלעיל מנימלי. מהיותו חסם עליון, ידוע שהוא חסם מלעיל. נוכיח שהוא מינימלי. יהי $\beta \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A. נניח בשלילה $\alpha < \beta$, אז בעבור $\varepsilon = \alpha - \beta$ קיים $a \in A$ כך ש־$a > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$, ומכאן ש־$\beta$ אינו חסם מלעיל של A וסתירה.

$\impliedby$ נניח α חסם מלעיל מינימלי, נוכיח שהוא חסם עליון. יהי $\varepsilon > 0$. אז נניח בשלילה שלא קיים $a \in A$ כך ש־$a > \alpha - \varepsilon$, ואז $\forall a \in A\colon a < \alpha - \varepsilon$ כלומר $\alpha - \varepsilon$ חסם מלעיל של A מהגדרה, אך $\alpha - \varepsilon < \alpha$ וזו סתירה למינימליות של α מבין החסמים מלעיל. סה"כ בהכרח קיים a המתאים לתנאי וסיימנו.

■

(2)

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. נוכיח או נפריך את את הטענות הבאות.

(א) נוכיח שאם ל־A אין איבר מקסימלי אז A אינסופית.

הוכחה. תהי A קבוצה ללא איבר מקסימלי. נניח בשלילה שהיא סופית. אזי $\max A$ מוגדר (ממשפט הרקורסיה: ידוע קיום זיווג $f\colon [n] \to A$ ואז הפונקציה $m_1 = f(1)$, ותנאי נסיגה $m_{n+1} = \max\{m_k, f(k+1)\}$ מגדירה את $\max A := m_n$)וחוסם את הסדרה מלמעלה, וסיימנו. ■

(ב) נפריך את הטענה שאם A אינסופית ללא איבר מינימלי אז A אינה חסומה מלרע.

הפרכה. בעבור הקבוצה $A = \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$ מתקיים תמיד $\frac{1}{n} > 0$ כלומר 0 חסם מלרע של A. מנגד כן הזיווג $f\colon A \to \mathbb{N}$ המוגדר לפי $f(a) = a^{-1}$ מראה ש־$|A| = \aleph_0$ כלומר היא אינסופית. סה"כ סתירה לטענה. ■

(ג) נפריך את כך שאם A, B חסומות ו־$\sup A = \inf B$ אז $A \cap B$ מכיל בדיוק איבר אחד.

הפרכה. נתבונן בשתי הסדרות הקבוצות:

$$B = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \quad A = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in n\mathbb{N}_+\right\}$$

בהרצאה הוכחנו ש־$\inf B = 0$. באותו האופן $\sup A = 0$. עם זאת, בהינתן $a \in A \cap B$ מתקיים קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = \frac{1}{n}$ וכן $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$a = -\frac{1}{m}$ ואז $\frac{1}{n} = -\frac{1}{m}$. נכפיל אגפים ונקבל $m = -n$, ומשום ש־$m, n > 0$ סתירה (כי בהכרח אחד מהם שלילי). ■

(ד) נפריך את הטענה שאם A, B קבוצות חסומות מלעיל וזרות, אז $\sup A \neq \sup B$.

הוכחה. נניח בשלילה את הטענה ונראה דוגמה נגדית. אכן, בעבור:

$$A = \left\{-\frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{R}_+\right\} \quad B = \{0\}$$

נוכיח ש־$\sup A = \sup B$ וכן $A \cap B = \varnothing$.

- זרות: נניח בשלילה קיום $a \in A \cap B$, אז $a = 0$ וכן $a = (-2n)^{-1}$ סה"כ קיים הופכי לאפס וסתירה.
- נוכיח $\sup A = \sup B$. הסופרמום של סינגילטון הוא 0 ואכן $\sup B = 0$. נראה ש־$\sup A = 0$.

ניכר ש־0 חוסם את A ולכן חסם מלעיל שלה (שכן הופכי לחיובי הוא חיובי, והכפלתו ב־(-1) תביא למספר שלילי). יהי $\varepsilon > 0$. אכן, בעבור

$$A \ni -\frac{1}{2n} < 0 - \varepsilon \iff 1 < 2n\varepsilon \iff \frac{1}{2\varepsilon} < n \iff n = \frac{1}{4\varepsilon}$$

וסתירה וטענה שרצינו להפריך. אז $\sup A = \sup B$ סה"כ 0 סופרמום כדרוש.

■

(3)

תהאנה a_n, b_n סדרות כך ש־$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n < b_n$ וכן $a_{n+1} \le a_n \wedge b_n \le b_{n+1}$ (כלומר b_n מונוטונית עולה ו־a_n מונוטונית יורדת). נגדיר $I_n = [a_n, b_n]$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נניח כי תמונת $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל ותמונת $\{a_n\}_n^{\infty}$ חסומה מלרע. מאקסיומת השלמות קיים $\beta = \sup b_n$ וכן $\alpha = \inf a_n$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדר הסימון $I_n = [a_n, b_n]$. נוכיח ש־$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = (\alpha, \beta)$.

הוכחה. באינדוקציה ידוע $a_m < a_0 < b_0 < b_n$ כלומר $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon a_m < b_n$. נפנה להוכיח את הדרוש הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ יהי $x \in (\alpha, \beta)$ כלומר $\alpha < x < \beta$. ממשפט ויירשטראס הראשון, a_n, b_n בעלות גבול. יתרה מכך, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. יהי $x \in (\alpha, \beta)$. נתבונן בקטע $I = (\alpha+1, x)$. מתקיים $x < \alpha < \alpha+1$ כלומר $\alpha \in I$. מההגדרה השקולה לגבול שראינו, יש כמות סופית של a_n־ים מחוץ ל־I, ומכאן ש־$|\{a \in A \mid a \in I\}| \ge \aleph_0$. סה"כ קיים בהכרח $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$a \in I$ כלומר $x < a_n < \alpha + 1$. ידוע $a_n < \alpha$ כלומר $a \in (\alpha, x)$. באופן זהה ניתן למצוא b_m כך ש־$b_m \in (x, \beta)$. בעבור $k = \max\{m, n\}$ מתקיים:

$$\alpha < a_k \le a_n < x < b_m \le b_k < \beta \implies x \in (a_k, b_k) \subseteq [a_k, b_k] = I_k$$

ומהגדרת איחוד מוכלל $x \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} I_t$ כדרוש.

$\supseteq$ מצד שני, יהי $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. נוכיח $x \in (\alpha, \beta)$. אכן ידוע קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$[a_n, b_n] = I_n \ni x$ כלומר $\alpha < a_n \le x \le b_n < \beta$ ולכן $\alpha < x < \beta$ דהיינו $x \in (\alpha, \beta)$ וסיימנו.

■

(4)

נמצא אינפימום, סופרמום, מינימום ומקסימום לקבוצות הבאות:

(א)
$$A = \left\{x + \frac{1}{x} \colon x > 0\right\}$$

נוכיח שיש לקבוצה מינימום הוא 2. יהי $k \in A$. מכאן $k = x + \frac{1}{x}$ עבור $x > 0$. יהי $k \neq 2$, נוכיח $k > 2$. נניח בשלילה $k < 2$. אז $x + \frac{1}{x} < 2$, ובשקילות נקבל $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 < 0$. אך ריבוע מספר ממשי גדול מ־0 וזו סתירה. לכן בהכרח $k = 2$ מינימלי וקיים. ידוע שהמינימום אם קיים הוא אינפימום, כלומר $\inf A = \min A = 2$.

עתה נראה שהקבוצה לא חסימה מלעיל. זאת כי לכל $M \in \mathbb{R}$ בשלילה חסם מלעיל מתקיים שאם $M < 1$ אז סתירה כי $2 \in A$, אחרת $M \ge 1$ ואז:

$$A \ni M + \frac{1}{M} > M$$

בסתירה להיות M חסם מלעיל. מהיותה לא חסומה מלעיל, אין לה סופרמום (כי סופרמום הוא חסם מלעיל), ואין לא מקסימום (כי אחרת המקסימום היה סופרמום שלא קיים).

(ב)
$$B = \{x^2 + x + 1 \colon x \in \mathbb{R}\}$$

נוכיח שהמינימום הוא $\frac{3}{4}$. עבור $x = -\frac{1}{2}$ אכן מתקיים $x^2 + x + 1 = 0.75$ ומכאן ש־$0.75 \in B$. עתה נוכיח שהוא מינימלי. נניח בשלילה ש־:

$$x^2 + x + 1 < 0.75 \implies 0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$$

וסתירה. מכאן ש־$\frac{3}{4} = \min B = \inf B$. באופן דומה ל־$A$ היא איננה חסומה: יהי M חסם עליון. משום ש־0.75 מינימום, $M > 0.75 > 0$. משום שלכל $M \in \mathbb{R}_+$ מתקיים $M + \varepsilon > M$ עבור $\varepsilon > 0$, וכן $M^2 > 0$ וגם $M^2 + 1 > 0$, מתקיים:

$$M < M + \varepsilon = M^2 + M + 1 \in A$$

וסתירה וסיימנו. מהיותה לא חסומה מלעיל, אין לה סופרמום (כי סופרמום הוא חסם מלעיל), ואין לא מקסימום (כי אחרת המקסימום היה סופרמום שלא קיים).

(ג)
$$C=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge m<n\right\}$$
נוכיח ש־C חסרת מינימום ומקסימום, וכן $\inf C=0, \sup C=1$.

- ראשית כל, נוכיח שהסופרמום הוא 1. ידוע שלכל זוג $m<n$ אכן $\frac{m}{n}<1$ ולכן הוא חסם מלעיל. יהי $\varepsilon>0$. נראה קיום $q\in C, 1-\varepsilon<q<1$. למעשה, מצפיפות הרציונלים בממשיים שקיים רציונלי $q\in\mathbb{Q}$ בטווח הזה, ולכל $q<1$ מתקיים ש־$q=\frac{m}{n}$ כלשהם ועבורם $m<n \implies \frac{m}{n}<1$ כלומר $q\in C$. באופן דומה $\inf C=0$.
- עתה נוכיח שאין לקבוצה מקסימום. יהי $M\in C$, ונניח ש־M מקסימום. אז $M\in\mathbb{R}$ וכן $M<1$ (אחרת לכל m,n טבעיים כך ש־$M=\frac{m}{n}$ מתקיים $m=n$ וסתירה) ומצפיפות הרציונליים במשיים קיים $q\in\mathbb{Q}$ (וכבר הראינו שעבור $\mathbb{Q}_+\ni q<1$ מתקיים $q\in C$) כך ש־$M<q<1$ וזו סתירה. באופן דומה אפשר להוכיח שאין מינימום.

(ד)
$$D=\left\{\tfrac{1}{n}+(-1)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$$
נראה ש־$\max D=\sup D=1.5$, $\inf D=-1$ ו־$\min D$ איננו מוגדר.

נוכיח ש־1.5 מקסימום. עבור $n=2$ אכן $1.5\in D$. יהי $x\in D$. אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=\frac{1}{n}+(-1)^n$. נוכיח $x\leq 1.5$. נפרק למקרים. לכל $n\geq 3$ נבחין ש־:
$$(-1)^n\leq 1\wedge \frac{1}{n}\leq\frac{1}{3}\implies (-1)^n+1\leq 1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$$
עבור $n=2$ ברור ש־$x=1.5$ ועבור $n=1$ מתקיים $x=0$. סה"כ בהכרח $x\leq 1.5$ וסיימנו. מהיות 1.5 מקסימום הוא גם סופרמום. לכן $\sup D=\max D=1.5$.

עתה נראה שאין מינימום. יהי $M\in D$ בשלילה מינימום. אז קיים n טבעי כך ש־$x=\frac{1}{n}+(-1)^n$. עם זאת, עבור $m=2n$:
$$D\ni\frac{1}{m}+(-1)^m=\underbrace{\frac{1}{2n}}_{>n^{-1}}+\underbrace{(-1)^{2n}}_{\geq(-1)^n}>\frac{1}{n}+(-1)^n=M$$
וסתירה. עכשיו נראה ש־-1 אינפימום. בבירור -1 חסם מלרע שכן לכל $x\in D$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=(-1)^n+n^{-1}$ ואז:
$$(-1)^n\geq -1\wedge n^{-1}>0\implies (-1)^n+n^{-1}>-1$$
יהי $\varepsilon>0$. מארכימדיאניות הטבעיים קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$1\leq n\varepsilon$. אז $n^{-1}\leq\varepsilon$. מכאן:
$$\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}\leq\varepsilon\implies\frac{1}{2n}+\underbrace{(-1)^{2n}}_{-1}<-1+\varepsilon$$
כדרוש.

(5)

נגדיר את הקבוצה:
$$A=\left\{\lceil\sqrt{n}\rceil-\sqrt{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$$
כאשר $\lceil x\rceil := \min\{n\in\mathbb{Z}\mid x\leq n\}$. נוכיח ש־$\sup A=1, \inf A=0$.

הוכחה. נראה ש־$\sup A=1, \min A=\inf A=0$, אך $\max A$ אינו מוגדר. לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים:
$$0\leq x-x\leq\lceil x\rceil-x\leq x+1-x=1$$
וזאת כי בין x לבין $x+1$ בהכרח קיים מספר טבעי (הוכח בכיתה). נסמן ב־$\tilde{x}$ את $\lceil x\rceil-x$.

- **אינפימום ומינימום:** מהא"ש לעיל בהכרח 0 חסם תחתון. יתרה מכך, $0\in A$ שכן עבור $n=0$ מתקבל $\lceil\sqrt{0}\rceil-\sqrt{0}=0$. מהגדרה $0=\min A$ כלומר $\sup A=\min A=0$.
- **סופרמום:** נוכיח ש־1 סופרמום. הוא חסם עליון מהא"ש לעיל. נראה שהוא הדוק. יהי $\varepsilon>0$. נוכיח קיום $a\in A$ כך ש־$a>1-\varepsilon$.
  - אם $\varepsilon\leq 1$, אז נפעל עלי מהשמיים שאם נבחר $k>\max\left\{2\cdot\left\lceil\frac{2+2\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon-2}\right\rceil, 1\right\}$ ואז $n=k^2-1$ (שבהכרח טבעי, כי k טבעי) אז $a=\lceil\sqrt{n}\rceil-\sqrt{n}$ יעבוד.

    לכל n מהצורה $n=k^2-1$ עבור $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\lceil\sqrt{n}\rceil=k=\sqrt{n+1}$. נדרוש
$$0\leq\lceil\sqrt{n}\rceil-\sqrt{n}=\left\lceil\sqrt{k^2-1}\right\rceil-\sqrt{k^2-1}=k-\sqrt{k^2-1}\overset{!}{>}1-\varepsilon\iff k+\varepsilon-1>\sqrt{k^2+1}$$

בגלל ההנחה $\varepsilon < 1$ (במקרים אחרים נטפל בנפרד), נשמור על שקילות לביטוי לעיל אם נעלה בריבוע את שני האגפים, כי הם גדולים מ־0. מכאן שהא"ש לעיל שקול לרצף האי־שוויונות הבאים:

$$\begin{aligned} k^2+\varepsilon^2-1+2k\varepsilon-2k-2\varepsilon &> k^2+1 \\ \varepsilon^2-2\varepsilon-1+k(2\varepsilon-2) &> 1 \\ k(2\varepsilon-2) &> 2+2\varepsilon-\varepsilon^2 \\ k &> \frac{2+2\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon-2} \end{aligned}$$

נוסיף $-k^2-\varepsilon^2+2\varepsilon+1$ לשני האגפים

החלוקה בסוף חוקית כי $2\varepsilon-2>0$ מההנחה $\varepsilon<1$. למעשה מבחירת k, כאן הראינו שקילות לא"ש לעיל, וסיימנו.

– אם $\varepsilon > 1$, אז $1-\varepsilon<0$ ואז כל $a\in A$ יעבוד כי בהכרח $a>0$, ו־A לא ריקה (לדוגמה בעבור המינימום שהראינו את קיומו).

סה"כ מצאנו a מתאים. כלומר 1 אכן סופרמום.

- **מקסימום:** נניח בשלילה קיום מקסימום. בגלל ש־$\sup A = 1$, אז $\max A=\sup A=1$ ואז $1\in A$. מכאן ש־:

$$\exists n\in\mathbb{N}\colon\ \lceil\sqrt{n}\rceil-\sqrt{n}=1 \implies \lceil\sqrt{n}\rceil=\sqrt{n}+1$$

אבל לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$x<k<x+1$. בפרט עבור $x=\sqrt{n}$, ואז $\sqrt{n}<k<\sqrt{n}+1=\lceil\sqrt{n}\rceil$ וזו סתירה להגדרת $\lceil\cdot\rceil$. ■

(6)

נוכיח שלכל קבוצה סופית קיים מקסימום ומינימום.

הוכחה. תהי A קבוצה סופית. אזי $|A|=n$ עבור n טבעי כלשהו. נוכיח באינדוקציה על n את הטענה. צעד עבור $n=1$ אז A סינגילטון ואז $A=\{a\}$ כלשהו, ו־$\max A=\min A=a$ וסיימנו. אחרת, $|A|>1$ כלומר קיים $a\in A$ וכן $|A\setminus\{a\}|=n-1$. מה.א. ל־$A\setminus\{a\}$ קיים מינימום ומקסימום, נסמנם M_+, M_- בהתאמה. אז עבור:

$$\max A =: \begin{cases} a & a>M_+ \\ M_+ & \text{else}\end{cases} \qquad \min A =: \begin{cases} a & a<M_- \\ M_- & \text{else}\end{cases}$$

מתקיים ש־$\forall b\in A\setminus\{a\}\colon\ \min A\le M_-\le b$ ומהגדרת min גם $\forall b\in A\colon b\ge\min A$ כדרוש (כי $A=(A\setminus\{a\})\uplus\{a\}$) ובאופן דומה לגבי max וסיימנו. ■

(7)

קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא דיסקרטית אם $\forall x\in A.\,\exists\varepsilon>0\colon (x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\{x\}$. נגדיר את הקבוע:

$$d(A)=\inf\underbrace{\{|x-y| : x,y\in A\wedge x\ne y\}}_{D(A)}$$

בעבור קבוצה A כלשהי.

(א) נוכיח שאם $d(A)>0$ אז A דיסקרטית.

הוכחה. תהי קבוצה A כך ש־$d(A)>0$. נוכיח שהיא דיסקרטית. יהי $x\in A$. אז עבור $d(A)>0$ נוכיח ש־$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A=\{x\}$. נניח בשלילה אחרת, אזי קיים $x\ne y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. מהגדרת הימצאות בתחום:

$$-\varepsilon<x-y<\varepsilon \implies |x-y|<\varepsilon=d(A)$$

מהגדרה $|x-y|\in D(A)$ ומשום ש־$d(A)=\inf D(A)$ אז $|x-y|\ge d(A)$ וזו סתירה לזה שהוכחנו ש־$|x-y|<d(A)$. סה"כ הראינו את הדרוש ו־A דיסקרטית. ■

(ב) נוכיח את הטענה הבאה: אם A חסומה מלעיל ו־$d(A)>0$ אז יש בה מקסימום.

הוכחה. תהי A קבוצה חסומה מלעיל ו־$d(A)>0$ בעבורה. נוכיח שיש בה מקסימום. מהיותה חסומה מלעיל, ידוע שקיים $\sup A$. נתבונן בסביבה נקובה סביב $\sup A$, מהגדרת הדיסקרטיות בהכרח $C=\{\sup A\}=:(\sup A-\varepsilon,\sup A+\varepsilon)\cap A$ עבור $\varepsilon>0$ כלשהו. עם זאת, מהגדרת הסופרמום, קיים $a\in A$ כך ש־$\sup A-\varepsilon<a\le\sup A$. מכאן שבהכרח $a\in C$ ו־$C=\{\sup A\}$ כלומר $a=\sup A$ וסה"כ $\sup A\in A$ כלומר יש מקסימום לקבוצה וסיימנו. ■

הערה: משום מה ביקשתם להוכיח רק אחת משלושת הטענות בסעיף ב'. בחרתי את (i).

(ג) נוכיח כי $\mathbb{Z}$ דיסקרטית בעבור $d(A)=1$

הוכחה. לכל $x \neq y$ כאשר $x,y \in \mathbb{Z}$ בהכרח קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x+n=y$ וגם $n \neq 0$. אז:

$$|x-y| = |-n| = n > 0$$

מספר טבעי גדול ממש מ־0 הוא גדול מ־1 כלומר $|x-y| \geq 1$. מכאן ש־1 חוסם מלמטה את $D(\mathbb{Z})$. נבחין ש־$1 \in D(\mathbb{Z})$ בגלל שעבור $0,1 \in \mathbb{Z}$ מתקיים $|1-0| = 1$. סה"כ 1 הוא המינימום של $D(\mathbb{Z})$ ובפרט האינפימום, וסיימנו. ■

(8)

נוכיח שלכל $x,y \in \mathbb{R}$, אם $x > 1$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$x^n = y$. מכאן נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$. נראה גם שלכל $x < -1$ הסדרה חסרת גבולות.

8.1 קיום שורש n־י

הוכחה. נוכיח באינדוקציה מלאה על n. עבור $n=1$ מתקיים בפשטות ש־$x^1 = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$, וזהו הבסיס. עתה נפנה להוכיח את הצעד: יהי $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ממשי אי־שלילי, ונראה קיום שורש n־י (כאשר מהנחת האינדוקציה קיים שורש של $n-k$ לכל $k \in [n]$), כלומר יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ונראה ש־$\sqrt[n]{x}$ אכן קיים. נתבונן בקבוצה $A = \{a \in \mathbb{R} \colon a^n < x\}$. נוכיח שהיא חסומה מלעיל: לכל $a \in A$, נפרק למקרים:

- אם $a > 1$ אז $a < a^n = x$ וסה"כ $\max\{x,1\}$ חסם מלעיל.
- אם $a < 1$ אז $\max\{x,1\}$ עדיין חסם מלעיל.

אז הדבר הזה באמת חסום מלמעלה. לכן קיים סופרמום, הוא $\sup A$.

נראה ש־$(\sup A)^n = x$. נפריד למקרים.

- אם בשלילה $(\sup A)^n < x$. נסמן $m = \sup A$. נבחין ש־$m \in A$ מהגדרה. בעבור:

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{x-m^n}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}m^i}_{S}}\right\}$$

מתקיים ש־:

$$(m+\delta)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}m^{n-i}\delta^i \overset{\delta<1}{<} m^n + \delta\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}m^i \overset{\delta<S}{<} \frac{x-m^n}{\cancel{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}m^i}}\cdot\cancel{\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}}m^i + m^n = x \cancel{- m^n + m^n} = x$$

סה"כ $(x+\delta)^n < x$. בגלל ש־$x > m^n$ אז $x - m^n > 0$ ומכאן ש־S חיובי, כלומר $\delta > 0$. סה"כ $m+\delta > m$. בגלל ש־$(x+\delta)^n < x$ אז $m+\delta \in A$, וסה"כ בהכרח m אינו מקסימום, למרות היותו סופרמום בקבוצה, וסתירה.

- אם בשלילה $(\sup A)^n > x$. נסמן $m = \sup A$. לכן $m^n - x > 0$ ולכן:

$$\delta = \frac{1}{2}\min\left(\{m\} \cup \left\{\sqrt[n-k]{\frac{m^n-x}{\binom{n}{k}m^k n}} \colon k \in [n]\right\}\right)$$

מקיים $\delta > 0$. נבחין שהשורש $\sqrt[n-k]{\dots}$ קיים מהנחת האינדוקציה. מתקיים ש־:

$$(m-\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k(-\delta)^{n-k} > m^n - \sum_{k\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\setminus\{0\}}^{n}\binom{n}{k}m^k\delta^{n-k} \overset{(1)}{>} m^n - c\left(\frac{m^n-x}{n}\right) \overset{(2)}{>} \cancel{m^n - m^n} + x = x$$

בעבור הנימוקים הבאים:

- א"ש (1) נכון בעבור c הוא מספר הטבעיים האי־זוגיים בין 1 ל־n (כמות האיברים בסכום), שכן לכל איבר בסכום מתקיים:

$$-\binom{n}{k}m^k\delta^{n-k} > -\binom{n}{k}m^k\left(\sqrt[n-k]{\frac{m^n-x}{\binom{n}{k}m^k n}}\right)^{n-k} = -\cancel{\binom{m}{k}\cdot m^k\cdot\frac{1}{\binom{m}{k}m^k}}\cdot\frac{m^n-x}{n} = \frac{m^n-x}{n}$$

- א"ש (2) נכון כי מספר האיברים האי־זוגיים בין 1 ל־n קטן ממש מ־n.

משום ש־$m > \delta$ אז $(\delta - m) > 0$. סה"כ מצאנו δ כך ש־$(m-\delta)^n > x$, כלומר $\sup A - \delta \notin A$. מהגדרת הסופרמום, קיים $\alpha \in A$ כך ש־$\alpha > m - \delta$, אבל אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$\alpha = m - \delta + \varepsilon$ ו־:

$$\alpha^n = (m - \delta + \varepsilon)^n > (m - \delta)^n > x$$

כלומר $\alpha^n \notin A$ וזו סתירה.

סה"כ $x \not> (\sup A)^n \wedge (\sup A)^n \not< x$. בהכרח $(\sup A)^n = x$ וסיימנו. ■

8.2 כאשר הטור הגיאומטריה מתבדר

נוכיח שלכל $x > 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$.

הוכחה. יהי $M > 0$. נוכיח קיום $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall n > N \colon x^n > M$. נתבונן ב־$N = \left\lceil \frac{M-1}{x-1} \right\rceil$. אז:

$$N > \frac{M-1}{x-1} \implies M < N(x-1) + 1 \overset{(1)}{<} (1 + x - 1)^N < x^N$$

הא"ש (1) נכון מא"ש ברנולי (וכי $x > 1$ כלומר $x - 1 > 0$). הסדרה x^n מונוטונית עולה כי $x > 0$ כלומר $x^n < x^n \cdot x = x^{n+1}$. לכן, לכל $n \geq N$ מתקיים $x^N < x^n$. מטרנזטיביות, $M < x^n$ לכל $n \geq N$ וסיימנו. ■

8.3 כאשר טור גיאומטרי חסר גבול

נוכיח שלכל $x < -1$ מתקיים ש־$\lim_{n\to\infty} x^n$ לא מוגדר.

הוכחה. לשם כך, נצטרך להוכיח שני דברים: שהטור לא מתבדר, והטור לא מתכנס. בעבור $a_n = x^n$, ידוע שתת־הסדרה a_{2n} מקיימת $a_{2n} = x^{2n} = (-|x|)^{2n} = |x|^{2n}$ ומ־8.2 היא מתבדרת ל־$+\infty$. באופן דומה הסדרה $-a_{2n+1}$ מתבדרת ל־$+\infty$, ולכן a_{2n+1} מתבדרת ל־$-\infty$. מהגדרת גבול חלקי מתבדר, לכל $M \in \mathbb{R}$, ולכל $N \in \mathbb{N}$, קיים $n \geq \mathbb{N}$ כך ש־$x^n = a_n > M$ וקיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$x^n = a_n < M$ (כי גבול חלקי אחד הולך ל־$+\infty$ ושני ל־$-\infty$). (הערה: הנתון $x < -1$ בא לידי ביטוי כאן, כאשר אנחנו משתמשים בשוויון $x = -|x|$ שנכון רק אם $x < 0$ וכן בהתבדרות $|x|^{2n}$ שנכונה בהנחה ש־$|x| > 1$).

- ראשית נוכיח ש־$\lim_{n\to\infty} x^n \neq \pm\infty$. נניח בשלילה ש־$a_n$ מתבדר. יהי $M > 0$, אז קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n > \pm M$, אך הראינו קיום $n \geq N$ כך ש־$a_n < \pm M$, וזו סתירה. מכאן ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x^n \neq \pm\infty$.
- עתה נראה ש־$\forall \ell \in \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} x^n \neq \ell$, כלומר ש־$a_n$ מתכנסת ל־ℓ. נניח בשלילה קיום $\ell \in \mathbb{R}$ כך ש־$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. מכאן שלכל $\varepsilon > 0$ ובפרט עבור $\varepsilon = 1$ מתקיים שהחל מ־$N \in \mathbb{N}$ כלשהו, $\forall n \geq N \colon |x^n - \ell| < 1$. נפריד למקרים.
  - אם $x^n - 1 > 0$ אז ידוע שבעבור אותו ה־N קיים $n > N$ כך ש־$x^n > 1 + \ell$ (עבור $M = 1 + \ell$) כי a_{2n} ת"ס מתבדרת ל־$+\infty$.
  - אם $x^n - 1 < 0$ אז ידוע שבעבור אותו ה־N קיים $n > N$ כך ש־$x^n < 1 + \ell$ (עבור $M = 1 + \ell$) כי a_{2n+1} ת"ס מתבדרת ל־$-\infty$.

  בהתאם להגדרת ערך מוחלט, בעבור אותו ה־n מתקיים $|a_n - \ell| > 1$ וזו סתירה.

מכאן שהסדרה לא מתכנסת לשום איבר, ולא מתבדרת ל־$\pm\infty$. סה"כ $\lim_{n\to\infty} x^n$ אינו מוגדר בעבור $x < -1$. ■

. . . . **(9)** . . . .

טענה: $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ צפוף ב־$[0,1]$.

הנחות:

- $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, שנתון שאלה.
- ש־$\sin x$ מונוטוני עולה ב־$[-\pi, \pi]$.
- $\sin x$ מחוזרי במחזור של 2π.

יש צורך להניח את שתי ההנחות השניות, כי לא הגדרנו את $\sin x$. בהינתן $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, נגדיר את הקבוצות הבאות:

$$A_r = \{n \bmod r \mid n \in \mathbb{N}\} \quad B_r = \left\{ \left\{ \frac{n}{r} \right\} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \left(\{x\} := x - \lfloor x \rfloor,\ n \bmod r = n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \cdot r \right)$$

למה 1. B_r צפופה ב־$[0,1]$.

הוכחה. מצפיפות הרציונליים ב־$\mathbb{R}$ בהכרח קיים $\mathbb{Q} \ni q \in [0, \varepsilon)$. בה"כ $q = \frac{n}{m}$ עבור $n, m \in \mathbb{N}$ כלשהם ואז $s = \frac{1}{m} > \frac{n}{m} > q$ (כלומר, s שבר מצרי).

נתבונן בקבוצה הבאה:

$$\left\{\left\{\frac{0}{r}\right\},\left\{\frac{1}{r}\right\},\left\{\frac{2}{r}\right\}\dots\left\{\frac{m+1}{r}\right\}\right\}=C_{/r}$$

הערה: $\{x\}$ הוא למעשה החלק השברי, או $x \bmod 1$. שכוללת $m+1$ איברים בקטע $[0,1]$. האיברים שונים, שכן אם לא כן, אז נקבל $\left\{\frac{a}{r}\right\}=\left\{\frac{b}{r}\right\}$ ואז:

$$0=\left\{\frac{a-b}{r}\right\}\implies\frac{a-b}{r}=n\in\mathbb{N}\implies r=\frac{a-b}{n}$$

אך $a,b\in\mathbb{N}$ וכן $n\in\mathbb{N}$ ומכאן ש־r רציונלי וזו סתירה. נבחין שיש m קטעים מהצורה $[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m})\mapsto k\in[m]$ (עד לכדי הקטע האחרון שיהיה סינגלטון 1). מעקרון שובך היונים, יש לנו $m+1$ קטעים ו־$m+2$ מספרים שונים ב־$C_{/r}$, אזי קיימים שני מספרים $\alpha,\beta\in C_{/r}$ שנמצאים באותו הקטע. קיימים $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש־$\alpha=:\left\{\frac{a}{r}\right\},\beta=:\left\{\frac{b}{r}\right\}$ מהגדרת $C_{/r}$, בה"כ $a>b$, ואז:

$$\left[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}\right)\ni\alpha-\beta=\underbrace{\left\{\frac{a-b}{r}\right\}}_{\gamma}<\left|\frac{k-1}{m}-\frac{k}{m}\right|=\frac{1}{m}$$

מכאן שלכל $m\in\mathbb{N}$ יש $\gamma\in B_r$ כך ש־$\gamma<\frac{1}{m}$ קטן ככל רצוננו.

נפנה להוכיח את הצפיפות. יהיו $x<y\in[0,1]$. נסמן $\Delta=x-y$. מהגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ נוכל לבחור $\frac{1}{m}$ קטן כרצוננו ובפרט נוכל לבחור $\frac{1}{m}<\Delta$. ואז קיים γ כך ש־$\gamma<\frac{1}{m}<\Delta$ ו־$\gamma\in B_r$. מארכימדיאניות קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש־$\gamma k>x$, והמינימלי מבינהם יסומן k_0 (קיים מינימום כי הסדר על הממשיים סדר טוב). בהכרח $\gamma k_0<y$ כי אחרת $k'=k_0-1$ מקיים:

$$(x-y)k'<\gamma k'<x<\gamma k_0\implies(x-y)k_0-x<(x-y)k_0-(x-y)=\Delta k'<\gamma k'\implies\gamma k_0>\gamma k'>x$$

וזו סתירה למינימליות של k_0. סה"כ קיבלנו:

$$x<k_0\gamma<y$$

כאן נצטרך את העובדה ש־$x,y\in[0,1]$: מסיבה זו, $k_0\gamma\in[0,1]$, ומכאן ש־$k_0\gamma\in B_r$ והוכחנו את הצפיפות (לכל $p\in B_r$ ו־$z\in\mathbb{Z}$, אם $pz\in[0,1]$ אז $pz\in B_r$). ■

למה 2. A_r צפופה ב־$[0,r]$.

הוכחה. מלמה 1, B_r צפופה ב־$[0,1]$ מלמה 1. מהגדרה $B_{r^{-1}}=\left\{\frac{n}{r}\in\mathbb{N}\right\}$. יהיו $x,y\in[0,r]$. אז $\frac{x}{r},\frac{y}{r}\in[0,1]$ ואז קיים $c\in B_r$ כך ש־$x<c<y$. מתקיים:

$$\exists n\in\mathbb{N}\colon c=\frac{n}{r}\implies\frac{x}{r}<\left\{\frac{n}{r}\right\}<\frac{y}{r}\implies x<\underbrace{\left\{\frac{n}{r}\right\}\cdot r}_{B}<y$$

מתקיים ש־$B=\frac{n}{r}r-\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor r=n-\left\lfloor\frac{n}{r}\right\rfloor r$ וסה"כ מהגדרה $B=n \bmod r$ כלומר $B\in A_r$ וסיימנו. ■

נפנה להוכחת המשפט.

הוכחה. יהיו $a<b\in[-1,1]$. המונוטוניות החזקה ב־$[-\pi,\pi]$ קיימת $\arcsin$ הופכית לצמצום $\sin$ על $[-\pi,\pi]$. ואז נדרוש $a<\sin n<b$ ששקול לכך ש־:

$$\sin(\arcsin a)<\sin n<\sin(\arcsin b)\overset{\text{מונוטונית עולה ומחזורית}}{\iff}\arcsin a+2\pi k_1<n+2\pi k_2<\arcsin b+2\pi k_3$$

נתבונן ב־$A_{2\pi}$ שצפופה ב־$[0,2\pi]$ מלמה 2. בה"כ $a,b\in[0,2\pi]$ (עד לכדי הוספת 2π). מהצפיפות קיים $c\in A_{2\pi}$ כך ש־$a<c<b$ ומהגדרתה $c=n-\left\lceil\frac{n}{2\pi}\right\rceil\cdot2\pi$. עבור $k_2=-\left\lceil\frac{n}{2\pi}\right\rceil$, קיבלנו את הנדרש. ■

. . . .

שחר פרץ, 2025