מתמטיקה בדידה - עבודת בית לפסח (תרגיל בית 18)

קראו את החומרים המצורפים לעבודה (החומרים מופיעים בתיקייה במודל) וענו על השאלות הבאות. כרגיל, מוזמנים לשאול שאלות בפורום במידת הצורך.
יש להגיש את העבודה עד יום שלישי 14.5.24 בשעה 23:59.

תזכורת:
נתונים n תאים (תאים תמיד יהיו שונים). בכמה אופנים ניתן לפזר בהם k כדורים ?

	כדורים זהים	כדורים שונים
בכל תא לכל היותר כדור אחד	$C(n,k)=\binom{n}{k}$	$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא	$S(n,k)=\binom{k+n-1}{k}$	n^k

ובניסוח של בחירת k איברים מתוך n: העמודה של "כדורים שונים" היא למעשה עמודה של "הסדר חשוב", העמודה של "כדורים זהים" היא למעשה "הסדר לא חשוב". השורה של "בכל תא לכל היותר כדור אחד" היא "אסור חזרות", והשורה "אין הגבלה על מספר הכדורים בתא" היא "מותרות חזרות".
הערה: בפתרונותיכם תוכלו להשתמש בסימונים המקוצרים $P(n,k), C(n,k), S(n,k)$ במידת הצורך.

1. חשבו: (תזכורת: לכל $n\geq 1$ טבעי, מסמנים $[n]:=\{1,...,n\}$)
   (א) כמה תתי קבוצות $S\subseteq [n]\times[m]$ מקיימות $S=A\times B$ עבור $A\subseteq[n],\ B\subseteq[m]$ כלשהן? (הביעו את התשובה בעזרת n,m)
   (ב) כמה מחרוזות טרינאריות (תווים 0,1,2) באורך 30 מכילות בדיוק 12 מופעים של 2 ושההפרש בערך מוחלט בין מספר האחדים למספר האפסים הוא לכל היותר 2?
   (ג) כמה יחסים R מעל הקבוצה $[n]$ ישנם המקיימים את התנאי הבא:
$$\forall x,y,z\in[n]\,.\,xRz\wedge yRz\to x=y$$

2. חשבו:
   (א) כמה שלשות סדורות $\langle A,B,C\rangle\in(P([n]))^3$ ישנן המקיימות $|A\cup B\cup C|=k$ וכן $A\cap B=\emptyset$?
   (ב) בכמה דרכים ניתן לפזר 40 כדורים כחולים זהים ו־20 כדורים לבנים זהים ל־5 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים הלבנים אינו עולה על מספר הכדורים הכחולים?

3. צוות הקורס "מתמטיקה בדידה", המונה 3 מרצים, 4 מתרגלים ו־7 בודקים, החליט להיפגש לערב גיבוש מרגש ומהנה במסעדת "מנה ומנייה". עזרו להם למנות בכמה דרכים הם יכולים להתיישב במסעדה תחת האילוצים השונים:
   (א) הצוות יישב סביב שולחן עגול, וכל המרצים ישבו זה לצד זה, כל המתרגלים ישבו זה לצד זה, וכל הבודקים ישבו זה לצד זה.
   (ב) השולחן הגדול במסעדה תפוס, ולכן הצוות צריך לשבת סביב 2 שולחנות עגולים (זהים), שכל אחד מהם מתאים ל־7 אנשים. בכמה דרכים הצוות יכול להתיישב סביב השולחנות?
   (ג) הצוות החליט לקיים ערב גיבוש נוסף ולהזמין גם את כל 280 הסטודנטים בקורס. בכמה דרכים כולם יכולים לשבת סביב שולחן עגול, כך שבין כל 2 אנשי צוות ישבו לפחות 10 סטודנטים?

4. מצאו את מספר הפתרונות למשוואות/אי שוויונות הבאים.
   (א) $(x_1+x_2+x_2)(x_4+x_5+x_6+x_7)=33$ כאשר $x_1,...,x_7\in\mathbb{N}$.
   (ב) $100\leq\sum_{i=1}^{100}x_i\leq 200$ כאשר $x_1,...,x_{100}\in\mathbb{N}$.

(ג) $\sum_{i=1}^{1000} x_i > 500$ כאשר $x_1, ..., x_{1000} \in \{0,1\}$.

5. יהיו $n,k \in \mathbb{N}$. **תזכורת:** פונקציה $f \in [n] \to [k]$ היא <u>מונוטונית עולה (חלש)</u> אם לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $f(i) \leq f(i+1)$. פונקציה $f \in [n] \to [k]$ היא <u>מונוטונית עולה חזק</u> אם לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $f(i) < f(i+1)$. באותו אופן ניתן להגדיר פונקציה מונוטונית יורדת (חלש/חזק).

   (א) כמה פונקציות $f \in [n] \to [k]$ מונוטוניות עולות חלש ישנן?

   (ב) כמה פונקציות $f \in [n] \to [k]$ מונוטוניות עולות חזק ישנן?

   (ג) נאמר ש־$f \in [n] \to [k]$ היא <u>מונוטונית עולה בטירוף</u> אם לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים $f(i) + i \leq f(i+1)$. כמה פונקציות מונוטוניות עולות בטירוף ישנן?

   הערה: במידת הצורך תוכלו להיעזר בנוסחת סכום סדרה חשבונית - $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

   (ד) כמה פונקציות $f \in [n] \to [k]$ אינן מונוטוניות עולות או יורדות ישנן?

6. יהיו $0 < n < m$. נאמר שפונקציה $f \in [m] \to [n]$ היא "כמעט זיווג" אם f על ומתקיים

$$\left|\left\{k \in [n] \ \mid \ f^{-1}\left[\{k\}\right] > 1\right\}\right| = 1$$

   (א) חשבו כמה פונקציות כאלה ישנן. נמקו.

   (ב) נסמן ב־X את קבוצת ה"כמעט־זיווגים" ב־$[m] \to [n]$. נגדיר יחס שקילות על X:

$$fSg \iff \exists h \in [m] \to [m] \, . \, (\text{זיווג } h) \wedge (f = g \circ h)$$

   (אין צורך להוכיח שזה יחס שקילות). מהי עוצמת קבוצת המנה X/S? נמקו.

7. הוכיחו קומבינטורית את הזהויות הבאות. הקפידו על המבנה הבא בפתרון: תיאור הבעיה הקומבינטורית (נסחו בעיית ספירה), מדוע צד שמאל הוא פתרון לבעיה, מדוע צד ימין הוא פתרון לבעיה.

   (א) $\binom{3n}{2} = 3\binom{n}{2} + 3n^2$

   (ב) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$

   (ג) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}$

   (ד) $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$

   (ה) $\binom{m+n+1}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k}$

   (ו) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} 2^k = 4n(n-1)3^{n-2}$

8. תהי B קבוצה סופית, $|B| = n$. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו, חשבו את $\sum_{A \subseteq B} \alpha^{|A|}$ והגיעו לתשובה ללא סכימה. (כאן הכוונה היא שהסכימה מתבצעת על פני כל תתי הקבוצות של B)

9. חשבו את המקדם של x^{17} בביטוי $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2024}$.

10. קבוצה $A \subseteq [n]$ נקראת מרוכזת בעצמה אם $|A| \in A$. כמה תתי קבוצות מרוכזות בעצמן יש ל־ $[n]$? הוכיחו תשובתכם (הגיעו לתשובה מפושטת).

11. היעזרו בנוסחת הבינום של ניוטון כדי לחשב את הסכומים הבאים (כלומר להציג ללא סכימה):

   (א) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$

   (ב) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (-1)^k$

12.

   (א) חשבו בכמה מחרוזות באורך n מעל $\{A,B,C,D\}$ מספר המופעים של התו A הוא זוגי. היעזרו בשאלה הקודמת.

   (ב) חשבו בכמה מחרוזות באורך n מעל $\{A,B,C,D\}$ מספר המופעים של התו A הוא זוגי וגם מספר המופעים של התו B הוא זוגי.

   (ג) פתרו את הבעיה מסעיף א' באופן ישיר על ידי טיעונים קומבינטוריים.