חדו"א 2א ~ הרצאה 1

שחר פרץ

14 באפריל 2026

מרצה: יעל קרשון

חלק מההערות בסיכום זה הן שלי, כלומר הן יכולות להיות שגויות.

0.1 נהלים ובירוקרטיה

חדו"א 2א. יעל קרשון. מייל: yaelkarshon@tauex.tau.ac.il.

מיילים –

- דרך המייל האוניברסיטאי
- שורת נושא
- להתחיל בשלום פרופ' קרסון/שלום יעל
- חתימה + שם בסיום

שעות הקבלה מופיעות במודל. אין צורך לתאם מראש, פשוט לבוא. במשרד שרייבר 126. תנצלו את זה, תבואו לשעות הקבלה של המתרגלים ושאר המרצים. קראו את המשוב על התרגילים. יש חובת הגשה של שמונה תרגילים במהלך הסמסטר. לא הצלחתם? תרגישו תרגיל חלקי. עדיף מכלום. תגישו בזמן, אפילו אם זה רבע תרגיל – באיחור אי אפשר להגיש.

מילואימניקים; תכתבו, יבואו לקראתכם. בפרט תוכלו להגיש תרגילים באיחור (אם כי הוא לא בהכרח יבדק).

מקורות עיקריים של הקורס, וכן רשימות של שירי ורשימות של המתרגלים, מופיעות במודל.

במהלך הסמסטר יהיו שלושה בחנים ("מאוד קצרים") שיקנו עד 6 נקודות בונוס, בעבור מי שקיבל 56 ומעלה בבחינה הסופית.

1 חדו"א 2א

אז מה זה חדו"א? חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי. דיפרנציאלי, זה נגזרות, אינטגרלי, זה אינטגרלים. היסטורית, האינטגרלים באו לפני הנגזרות. כבר אצל ארכימדס יש חישובי אינטגרלים מאוד דומים למה שאנו עושים היום (ראו את הדוגמאות של שירי). בחור יווני בשם אפוסטול כתב ספר, גם הוא עם אינטגרלים קודם. החלק הכי חשוב הוא הקשר בין הנגזרות לאינטגרלים.

נתחיל מהשיעור האחרון ברשימות של שירי – אורך של עקומה בראשון. למה? כי הוא דורש בהתעסקות על המושג של "חלוקה של קטע", מושג מאוד חשוב כאשר נדבר על אינטגרלים. באיזשהו הבט, בחדו"א 1א הגדרנו סינוס וקוסינוס גיאומטרית, בלי להסביר מה זה אורך של קשת. זה יסגור את הפינה הזו.

הפניות לרשימות של סירי יסומנו ב־0.0{. נעבור על החומרים הבאים:

2.1} אינטגרל מסוים = אינטגרל רימן.
1.2} אינטגרל לא מסוים, שהוא קבוצת הפונקציות הקדומות.
1.1} חישובים יוריסטיים לאינטגרלים (לקרוא לבד).

חלוקות של קטע

הגדרה 1. בהינתן $a, b \in \mathbb{R}$ וכן $a < b$, קטע סגור יוגדר להיות $[a, b] := \{c \mid a \leq c \leq b\}$

תרגיל 1. בהינתן קטע סגור, ניתן לעבור עליו בקצב אחיד. רמז:

$$\{c \mid a \leq c \leq b\} = \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

הגדרה 2. חֲלוּקָה של קטע $[a, b]$ (באנגלית – partition) היא קבוצה של $n+1$ נקודות $\Pi = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$, כך ש־$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

מכאן, שכמות הנקודות בחלוקה היא סופית.

הגדרה 3. בהינתן חלוקה, תת־הקטע ה־i של החלוקה הוא $[x_{i-1}, x_i]$.

סימון 1. אורכו של תת־הקטע ה־i של החלוקה הוא $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 4. ממד העדינות של החלוקה הוא $\lambda(\Pi) := \max_i \Delta x_i$.

הגדרה 5. עידון Π של חלוקה Π' כך ש־$\Pi' \supset \Pi$.

תרגיל 2. אם $\Pi' \supset \Pi$ אז $\lambda(\Pi') \leq \lambda(\Pi)$.

הוכחה באמצעות טרוויאלי. טרוויאלי. ■

עכשיו נעבור לכמה תרגילים יותר מעניינים.

תרגיל 3. תארו במפורש חלוקה Π של $[0, \sqrt{2}]$ עם $\lambda(\Pi) \leq \frac{1}{3}$.

תרגיל 4. האם $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ היא חלוקה של $[0, 1]$? למה, או למה לא?

נצטרך לדבר על מושג של מטריקה (שיעול שיעול) מרחק בין נקודות ב־$\mathbb{R}$. לפני כן, נעבור לשעת סיפור.

חלוקה איננה בהכרח צריכה להיות לקטעים שווים. לפני 25 שנים ממשלת ארה"ב החליטה לעשות מהפכה בלימודי החדו"א בקולג'ים. הם השקיעו מיליונים בלכתוב ספרי מתמטיקה, שיועדו לאנשים שאינם מתמטיקאים וצריכים ללמוד חדו"א. הם הגדירו חלוקה לקטעים שווים, ואינטגרל רימן בהתאם לחלוקה כזו! נראה בעתיד דוגמאות (כמו פונקציית דיריכלה) שבהן ההגדרה הזו נופלת. זו טעות.

מרחקים ב־$\mathbb{R}^n$

תרגיל 5. $|a - b| = |a - c| + |c - b|$ אמ"מ $a \leq c \leq b \vee a \geq c \geq b$

"אני מדברת בהמון בטחון עצמי ואומרת טעויות. אתם צריכים לתפוס אותי" $\sim$ יעל.

ב־$\mathbb{R}^n$ כל נקודה במישור מיוצגת באמצעות קורדינאטות. המרחק בין שתי נקודות p, q מוגדר להיות הנורמה (האוקלידית, לא שזה משנה חדו"אית) של חיסורם. בפרט, ב־$\mathbb{R}^2$, בהינתן $p = (x_p, y_p)$ וכן $q = (x_q, y_q)$, נקבל:

$$d(p, q) := |o - q| := \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

תרגיל 6.

$$|x_p - x_q| + |y_p - y_q| \geq |p - q| \geq \begin{cases} |x_p - x_q| \\ |y_p - y_q| \end{cases}$$

[1]

תרגיל 7.

$$|p - q| = |p - R| + |R - q| \iff R \in [p, q]$$

עקומות

לא לבחינה

הגדרה 6. עקוס/עקומה/מסילה היא פונקציה $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$.

זה לא באמת מגביל את הכלליות לדבר על $[0, 1]$ במקום $[a, b]$, בגלל סיבות שנציין בעתיד. טוב לחשוב על $[a, b]$ כעל "הזמן" שלאורכו זזה העקומה.

עכשיו, יש לשאול מהי ההגדרה ההגדרה של רציפות בכלל ב־$\mathbb{R}^2$.

הגדרה 7 (הגדרה ראשונה לרציפות). אפשר לפרק את γ להיות $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (פורמלית: $x = \pi_1 \circ \gamma, y = \pi_2 \circ \gamma$), ואז לדרוש ש־$x, y$ רציפות.

הגדרה 8 (הגדרה שנייה לרציפות). לכל $t \in [a, b]$, ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta = \delta_{t,\varepsilon} > 0$ כך שלכל $s \in [a, b]$, אם $|t - s| < \delta$ אז $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

יש לשקילות הזו משמעות עמוקה יותר בטופולוגיה[2].

[1] רמז: להוכיח את א"ש המשולש בעבור הנורמה האוקלידית באמצעות קושי שוורץ. בעבור המטריקה המושרה מנורמת L_p (מי שיודע מה זה) אפשר להשתמש בא"ש מיניקובסקי במקום, שראינו בחדו"א 1א.

[2] הדרך העמוקה לראות את זה שההגדרות שקולות, זה כי טופולוגיית טיכונוף היא ה־weak topology ביחס לפונקציות ההיטל $\pi_1 \dots \pi_n$. ואז לא רק שההיטלים רציפים, אלא שזו הטופולוגיה המינימלית (בהינתן טופולוגיה על $\mathbb{R}$) כך שההיטלים רציפים.

הגדרה 9. מסילה ליניארית מ־$p \in \mathbb{R}^2$ ל־$q \in \mathbb{R}^2$ היא המסילה $\gamma = \varphi \circ h$, כאשר:

$$\begin{aligned} [a,b] &\xrightarrow{h} [0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \\ c \mapsto \frac{c-a}{b-a} = \lambda &\longrightarrow (1-\lambda)p + \lambda q \end{aligned}$$

כאשר h, φ רציפות.

ה־h הזו ש"דוחסת" את $[a,b]$ ל־$[0,1]$ היא בדיוק הסיבה שזה לא כזה משנה על איזה domain מסתכלים. [3]

הגדרה 10. מסילה פוליגונלית דרך $p_0, p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}^2$ היא $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ כך שקיימת חלוקה $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$ כך שלכל i מתקיים ש־$\gamma|_{[x_{i-1},x_i]}$ היא מסילה ליניארית מ־$p_{i-1} = a$ ל־$p_i = b$.

אינטואיטיבית, זו מסילה שהיא בעצם קווים ישרים (מסילה ליניארית) בין נקודות מסוימות במרחב. כמובן שיש להראות שהיא אכן מסילה.

סימון 2. למסילה כלשהי $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ולחלוקה $\Pi = \{x_0 \dots x_n\}$ של הקטע $[a,b]$, נסמן:

$$\ell(\gamma, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

הגדרה 11. מסילה $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ היא בעלת אורך סופי אם הקבוצה:

$$\{\ell(\gamma, \Pi) \mid \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\}$$

חסומה.

אם כן,

הגדרה 12. אורך העקומה הוא:

$$L(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, \Pi) \mid \Pi \text{ חלוקה של } [a,b]\}$$

(במובן הרחב)

דוגמה. נתבונן בעקומה $[-1,1] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י:

$$\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$$

משפט 1. γ היא עקומה בעלת אורך סופי, וכן $2 \le L(\gamma) \le 4$. זו ממש ההגדרה

הוכחה. מספיק להראות:

1. קיימת חלוקה Π של $[-1,1]$ עם $\ell(\gamma, \Pi) = 3$
2. לכל חלוקה Π של $[-1,1]$ עם $\ell(\gamma, \Pi) \le 4$

פרטים יעלו למודל. ■

הגדרה 13. $\pi := L(\gamma)$ כאשר γ העקומה המוגדרת לעיל.

סכום רימן

נתחיל מתיאור יוריסטי: "שטח מתחת לגרף". עבור פונקציה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, נסמן:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int f$$

כאשר "מתחת לגרף" השטח שלילי. זכרו לקרוא את סעיף 1.1 ברשימות של שירי לבד, וזה מושג שנקרא "אינטגרל לא אמיתי" (זה לא בדיוק אותו הדבר כמו אינטגרל רימן). נתארו גם בצורה יוריסטית; נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בקטע $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$. יש לנו כאן בעיה – הפונקציה מוגדרת על קטע (קרן) לא חסום. עתה נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, שמוגדרת על קטע סופי $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$. כאן אומנם הפונקציה מוגדרת על קטע סופי, אך ב־0 היא שואפת לאינסוף, גם אם השטח לכאורה סופי. הפתרון הוא לקחת גבול על אינטגרל רימן של הפונקציה.

תרגיל 8. מה הקשר בין השטחים הנ"ל?

[3] טופולוגית: הומיהומורפיזם. למעשה יש כאן יותר מזה – הדחיסה מתבצעת "בקצב קבוע"

תרגיל 9. נתון מלבן $a \times b$, מחולק למלבנים $a_i \times b_i$, כאשר $i \in [n]$. אז:

$$ab = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

למה התרגיל הזה חשוב? כי אם נתבסס על הקונספט של "שטח מלבן" (שהוא ידוע להיות $a \cdot b$, אורך כפול רוחב) חשוב לראות שזה מכבד את מה שהיינו "מצפים" מהגדרה של שטח – שהשלם שווה לסך חלקיו.

להלן הרעיון מאחורי אינטגרל רימן: בהינתן פונקציה וגרפה, [איור שלא הכנסתי], נבחר חלוקה של הקטע, "נדגום" את הערך של הפונקציה בנקודה שבחרנו, וניקח את הערך בנקודת הדגימה להיות הגובה של המלבן. לבחירה הזו נקרא "תיוג" או "נקודות מתאימות".

הגדרה 14. חלוקה מתויגת (באנגלית tagged partition, ברשימות "חלוקה+נקודות מתאימות") של הקטע $[a,b]$ היא זוג $(\Pi, \{t_i\})$ כאשר $\Pi\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$, וכן תיוג $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ לכל אחד מ־$i \in [n]$ קטעי החלוקה. אז סכום רימן של הפונקציה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ביחס לחלוקה המתויגת $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ הוא:

$$S(f, \pi, \{t_i\}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

דוגמה. (גרף)

תרגיל 10. ציירו חלוקה מתויגת של הקטע $[0,1]$ עם שלושה תתי־קטעים באורכים שאינם כולם שווים, ועם $t_2 = t_3$.

עתה נתעסק עם שתי דוגמאות חשובות שבהחלט יכולות להופיע בבחינה. נתבונן בפונקציה:

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} 5 & x = a \\ 15 & x \neq a \end{cases}$$

נתבונן בסכום רימן ביחס לחלוקה כלשהי:

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = f(t_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{5} \Delta x_i$$

כתלות בבחירה של נקודת הדגימה t_1, אם $t_1 = a$ אז הסכום יוצא $10\Delta x_i + 5(b-a)$, אחרת זה יוצא $5(b-a)$. לכן, נקבל:

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - 5(b-a)| \leq 10\Delta x_i \leq 10\,\lambda(\Pi)$$

עתה נסתכל על דוגמה נוספת.

דוגמה. נתבונן בפונקציית דיריכלה:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ניקח חלוקה מתויגת $(\Pi, \{t_i\})$ של קטע $[a,b]$.

- אם לכל $i \in [n]$ מתקיים $t_i \in \mathbb{Q}$ (בהכרח קיים תיוג כזה, מצפיפות), אז:

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x_i = b - a$$

- אם לכל $i \in [n]$ מתקיים $t_i \notin \mathbb{Q}$ אז:

$$S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x_i = 0$$

אינטגרל רימן

הגדרה 15. נתונה פונקציה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. נאמר ש־$f$ אינטגרבילית רימן עם אינטגרל שווה ל־I אם[4] לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה מתויגת $(\Pi, \{t_i\})$ של $[a,b]$, עם מדד עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$, מתקיים:

$$|S(f, \Pi, \{t_i\}) - I| < \varepsilon$$

אם זה קורה, נאמר ש־I האינטגרל המסוייס של f בקטע $[a,b]$.

[4] בהגדרות, "אם" זה "אם ורק אם", כי ברור ששני הכיוונים נדרשים

במילים אחרות, לכל אפסילון, עם מספר מסוים לעידון, אז כל חלוקה ותיוג יהיו בסביבת ε של ערך האינטגרל.

סימון 3. מסמנים $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$

הגדרה 16. הפונקציה f נקראת אינטגרבילית אם קיים I כך ש־$\int_a^b f = I$.

הערה 1. I איננו במובן הרחב, כלומר $I \in \mathbb{R}$.

תרגיל 11 ("לא יכולה להגזים בכמה הוא חשוב"). רשמו את השלילה של הביטוי $\int_a^b f = I$.

הערה 2. נניח שהאינטגרל של f איננו שווה ל־I. יש שתי סיבות, מאוד שונות, לסיבה שזה קורה:

- $\int_a^b f = I' \neq I$
- f איננה אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$.

בהמשך נראה קריטריונים לאינטגרביליות של דורשים לדעת מי זה בדיוק I (באופן דומה לכך שיודעים שפונקציה מתכנסת לאנשהו באמצעות קריטריון קושי, אך לא יודעים לאן).

נציין את המשפטים הייסודים של החדו"א. לא נוכיח אותם כרגע, הם בחומר לעוד איזה חודש, אבל הם מה שיקשור את התיאוריה של ההרצאה לשבועיים הראשונים של התרגול (שכרגע יראו לא קשורים בעליל). ידועים גם בתור משפטי ניוטון־לייבניץ[5]

בהינתן $f, F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

1. "תחת הנחות מסוימות" (פונקציה סימפטית מספיק), אם $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, אז $F'(x) = f(x)$.
2. "תחת הנחות מסוימות", אם $F'(x) = f(x)$, אז $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

זה מסביר למה המושג הבא כל־כך חשוב לחישובי אינטגרלים:

הגדרה 17. לפונקציות ממשיות $f, F\colon I \to \mathbb{R}$ על קטע $I \subset \mathbb{R}$, אז F נקראת פונקציה קדומה של f על קטע[6] I אם $\forall x \in I\colon F'(x) = f(x)$, כאשר בקצוות הקטע (אם יש כאלו) מדובר על נגזרת חד־כיוונית.

נעבוד בתרגולים למצוא פונקציות קדומות, כי הן בתורן יאפשרו לחשב אינטגרלים מסוימים, באמצעות המשפט היסודי.

הגדרה 18. האינטגרל הלא מסוייס של f הוא **קבוצת** הפונקציות הקדומות של f.

בקורס "פונקציות ממשיות" נגדיר מושג אינטגרל רחב יותר, שנקרא אינטגרל לבג, וניתן להגדיר אותו גם מחוץ ל־$\mathbb{R}$. כרגע אנחנו עובדים עם אינטגרל רימן.

[5] המלחמה בנוגע מי הגיע למשפטים קודם, נמשכת עד היום.
[6] לשימושנו, קבוצה סגורה.