חדו"א 2א ~ הרצאה 9

שחר פרץ

5 במאי 2026

מרצה: יעל קרשון

תרגיל 1. 1. הוכיחו מהגדרת האינטגרל: $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ קבועה, ו־$f = M$. אז $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = M(b-a)$.

2. נתונות $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ כך שהקבוצה $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ צפופה ב־$[a,b]$. הוכיחו:

A. הוכיחו אם f,g אינטגרבילית (רימן) אז $\int_a^b f = \int_a^b g$.

A. נניח f אינטגרבילית, האם בהכרח g אינטגרבילית?

תרגיל 2. נתונות $f,g\colon J \to \mathbb{R}$ חסומות כאשר J קבוצה כלשהי. אז:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \omega(\lambda f, J) = |\lambda|\,\omega(f,J)$.
2. $\omega(f+g,J) \le \omega(f,J) + \omega(g,J)$
3. $\omega(|f|\,,J) \le \omega(f,J)$
4. $|f| \le M \implies \omega(f^2,J) \le 2M\omega(f,J)$
5. $0 < \alpha \le g \implies \omega\left(\frac{1}{g},J\right) \le \frac{1}{\alpha^2}\omega(g,J)$

תזכורת! התנודה של פונקציה חסומה על קטע מוגדרת להיות:

$$\operatorname{osc}(f,J) = \omega(f,J) = \sup_J f - \inf_J f = \sup_{x,y\in J}|f(x)-f(y)|$$

ותנודת דרבו בהינתן f חסומה וחלוקה $\Pi = \{x_i\}$ של $[a,b]$, אז:

$$\omega(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot \Delta x_i$$

מסקנה 1 (מסקנה מהתרגיל)**.** משום שתנודות מהגדרתן הן אי־שליליות, נבחין בסקווי־לינארית של אוסילציית דרבו:

1. $\omega(\lambda f,\Pi) = |\lambda|\,\omega(f,\Pi)$
2. $\omega(f+g,\Pi) \le \omega(f,\Pi) + \omega(g,\Pi)$
3. $\omega(|f|\,,\Pi) \le \omega(f,\Pi)$
4. $|f| \le M \implies \omega(f^2,\Pi) \le 2M\omega(f,\Pi)$
5. $0 < \alpha < g \implies \omega\left(\frac{1}{g},\Pi\right) \le \frac{1}{\alpha^2}\omega(g,\Pi)$

תזכורת! קריטריון דרבו המשופר אומר שבהינתן $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אמ"מ h חסומה ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש־$\omega(h,\Pi) < \varepsilon$.

את זה הוכחנו.

נשתמש בזה כדי להשתמש את הקריטריון האחרון בסדרה של אינטגרבילית.

משפט 1 (אריתמטיקת אינטגרבילית)**.** יהי זוג פונקציות $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ וכן $\lambda \in \mathbb{R}$. אם f,g אינטגרביליות, אז $\lambda f, f+g, |f|\,, f^2, f\cdot g$ אינטגרביליות כולן. יתר על כן, אם $g \ge \alpha > 0$ אז $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית.

שימו לב שהמשפט מתקיים רק בכיוון ה"אם". לדוגמה $D(x) - D(x)$ אינטגרבילי אך $D(x)$ אינה.

בכך סיימנו את §2.2.

על ערך האינטגרל

ברשימות של שירי מופיע כסעיף §2.3.

משפט 2. נתונה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ו־$I \in \mathbb{R}$. נתונה סדרת חלוקות מתוייגות $(\Pi^{(k)}, \{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k})$ של $[a,b]$ שמקיימות $\lambda(\Pi^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. יתר על כן, נניח שהיא אינטגרבילית. אז $\int_a^b f = I$ אמ"מ $S(f,\Pi^{(k)}), \{t_i\}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} I$.

את אחד הכיוונים עשינו בשיעור הקודם.

הוכחה. $\Longrightarrow$ רק אם – היה תרגיל פתיחה בשיעור #3

$\Longleftarrow$ נתון f אינטגרבילית. יהי I' כך ש־$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = I'$. מהכיוון "רק אם" מתקיים $S(f,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\}) \xrightarrow{k\to\infty} I'$. מיחידות גבול הסדרה, $I' = I$.

■

תרגיל 3. נתונים קטע $[a,b]$, $\delta > 0$ ו־$c_1 \dots c_m \in [a,b]$. מצאו חלוקה Π של $[a,b]$ עם מדד עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$ כך ש־$c_1 \dots c_m \in \Pi$.

משפט 3 (אדטיביות האינטגרל ביחס לקטע האינטגרציה)**.** נתונים $a < b < c$ ו־$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. הראינו ש־$f$ אינטגרבילית על $[a,c]$ אמ"מ f אינטגרבילית על $[a,b]$ וכן אינטגרבילית על $[b,c]$. אז:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה. לכל $k \in \mathbb{N}$, נבחר חלוקה $\Pi^{(k)}$ של $[a,c]$ עם $\lambda(\Pi^{(k)}) < \frac{1}{k}$ ו־$b \in \Pi^{(k)}$ (אפשר לעשות זאת מהתרגיל הקודם). נבחר תיוג כלשהו $\{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$ של $\Pi^{(k)}$. נסמן ב־$1 \le m_k \le n_k - 1$ את נקודת החלוקה $b = x_{m_k}^{(k)}$.
נתבונן ב־$(\Pi^{(k)} \cap [a,b], \{t_i\}_{i=1}^{m_k})$ חלוקה של $[a,b]$ עם מדד עדינות קטן מ־k,
ונתבונן ב־$(\Pi^{(k)} \cap [b,c], \{t_i\}_{i=m_k}^{n_k})$ חלוקה של $[b,c]$ עם מדד עדינות קטן מ־k.
עתה, לכל k:

$$\underbrace{S(f,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x} = \underbrace{S(f|_{[a,b]},\Pi^{(k)}\cap[a,b],\{t_i\}_{i=1}^{m_k})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} + \underbrace{S(f|_{[b,c]},\Pi^{(k)}\cap[b,c],\{t_i\}_{i=m_k}^{n_k})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x}$$

כנדרש. ■

קטע אינטגרציה מנוון או הפוך

הגדרה 1. נבצע את ההגדרות הבאות בהינתן $a < b$:

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \qquad\qquad \int_a^a f := 0$$

משפט 4. נתון קטע J ופונקציה $f\colon J \to \mathbb{R}$. נניח שלכל קטע סגור וחסום $I \subset J$ מתקיים $f|_I = I \to \mathbb{R}$. אז לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

הוכחה.
- אם $a < b < c$, הוכחנו.
- אם $a = b < c$, צ"ל $\int_a^c = 0 + \int_b^c$ וסיימנו.
- אם $a < c < b$, צ"ל $\int_a^c = \int_a^b - \int_c^b$ ולאחר העברת אגפים נקבל את האדטיביות שהוכחנו.
- אם $b < a < c$ צ"ל $\int_a^c = -\int_b^a + \int_b^c$ ולאחר העברת אגפים נקבל פשוט אדטיביות.
- לבסוף עבור $b < c < a$ צ"ל $-\int_c^a = -\int_b^a + \int_b^c$ ונקבל את הדרוש לאחר העברת אגפים גם כאן.

שאר המקרים לבית. ■

הגדרה 2. האינטגרנד זו הפונקציה המאֶסכּמֶת.

משפט 5 (לינאריות האינטגרל ביחס לאינטגרנד)**.** נתונות $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, ו־$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. נניח f,g אינטגרביליות רימן. הוכחנו $\alpha f+\beta g$ אינטגרבילית. אז:

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f(x)+\beta\int_a^b f$$

הוכחה. לכל k נבחר חלוקה $\Pi^{(k)}$ של $[a,b]$ כך ש־$\lambda(\Pi^{(k)})<\frac{1}{k}$. נבחר תיוג $\{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$ של $\Pi^{(k)}$. מלינאריות הסכום:

$$\underbrace{S(\alpha f+\alpha g,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b(\alpha f+\beta g)}=\underbrace{\alpha S(f,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b f}+\beta\underbrace{S(g,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\})}_{\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b g}$$

מתכונות של גבול של סדרה, נקבל $\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$. ■

תרגיל 4. הוכיחו שזה עובד גם לקטעים מנוונים והפוכים.

הערה 1. אין נוסחה כללית ל־$\int_a^b f\cdot g$ לפי $\int_a^b f$ ו־$\int_a^b g$. למה הכוונה? לא קיימת פונקציה אלמנטרית בשני משתנים שתלויה באינטגרל של f ו־g בלבד. תרגיל. למעשה, תמיד אפשר למצוא $\int_a^b f=0\wedge\int_a^b g=0$ אך $\int_a^b fg$ כל מספר ב־$\mathbb{R}$.

הערה 2. יש שיטות להוכיח שפונקציות מסויימות הן לא אלמנטריות. אינטגרלים של פונקציות אלמנטריות יכולים להיות לא אלמנטרית.

משפט 6 (מונוטוניות האינטגרל)**.** נתונות $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות. נניח $f\le g$. אז:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה. נבחר סדרת חלוקות מתוייגות $(\Pi^{(k)},\{t_i\}_{i=1}^{n_k})$ עם $\lambda(\Pi^{(k)})<\frac{1}{k}$. אז לכל k:

$$\int f\xleftarrow{k\to\infty}S(f,\Pi^{(k)},\{t_i\}_{i=1}^{n_k})\le S(g,\Pi^{(k)},\{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k})\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b g$$

וסיימנו. [הא"ש נובע ישירות ממונוטוניות סכום] ■

משפט 7 (חסמים שימושיים)**.** תהא $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. נניח $n\le f\le M$. אז:

1. $$n(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M(b-a)$$

   הוכחה. מצד אחד $f\le M$. מתרגיל הפתיחה ומהמשפט הקודם:

   $$\int_a^b f\le\int_a^b M=M(b-a)$$

   הא"ש השמאלי בדומה. ■

2. $$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le(b-a)\cdot\sup_{[a,b]}|f|$$

   הוכחה. ידוע:

   $$-|f|\le f\le|f|\le\sup_{[a,b]}|f|$$

   וממונוטוניות סיימנו. ■

ה"שיא של השיאים" של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, הם המשפטים הייסודיים שנגיע אליהם שיעור הבא. הם נותנים קשר בין אינטגרל לגזירות. לפני כן, נרצה להראות קשר בין אינטגרל לרציפות.

משפט 8 (רציפות האינטגרל ביחס לגבולות האינטגרציה). יהי $I \in [\zeta, \xi]$ (בחיי שלא אני זה שבחר את הסימון הזה וזו החלטה של המרצה) ותהי $f\colon I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נקבע $\alpha \in I$. נגדיר $F\colon I \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אז F רציפה.

נכון לחשוב על F כעל "פונקציה צוברת שטח".

הוכחה. נסמן $M = \sup_I |f|$. יהיו $x \in I, h > 0, x+h \in I$. אז:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ממונוטוניות:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le h \cdot M \xrightarrow{h \to 0^+} 0$$

■

מסקנה 2. אם $x \in I$ נקודה פנימית או קצה שמאלית, אז f רציפה מימין ב־x.

תרגיל 5. נסחו והוכיחו טענה דומה עבור רציפות משמאל. בשני המקרים, הסיקו ש־F רציפה ב־I [כלומר רציפה מצד אחד בקצוות ובשני הצדדים בצדדים בפנים הקטע]

משפטי ערך ביניים

תזכורת! [מחדו"א 1א] תהי $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה (באופן כללי אפשר על קטע קומפקטי), אז (ממשפט קנטור) יש לתמונתה מינימום ומקסימום $M = \max_{[a,b]} H$ ו־$m = \min_{[a,b]} H$. נתון $m \le \alpha \le M$. אז קיים $a \le x_0 \le b$ כך ש־$H(x_0) = \alpha$.

הוכחה. נבחר נקודות שבהן מתקבל המינימום והמקסימום, נאמר $f(c) = m, f(d) = M$. נפעיל את משפט ערך הביניים הרגיל של חדו"א 1א על הקטע $[c,d]$ או $[d,c]$ (תלוי בהאם $c < d$ או להפך). וסיימנו. ■

משתמשים כאן חזק בשלמות של הממשיים.

משפט 9. נתונה פונקציה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה על קטע סגור. אז קיימת $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(אפשר לחשוב על זה כעל הערך הממוצע של f בקטע)

הוכחה. יהיו $m = \max_{[a,b]} f$ ו־$m = \min_{[a,b]} f$. אז $m \le f \le M$. נבחין ש־:

$$\begin{aligned} m(b-a) \le \int_a^b d(t)\,\mathrm{d}t \qquad &\le M(b-a) \\ \implies m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{:=\alpha} &\le M \end{aligned}$$

וממשפט ערך הביניים קיימת x_0 עם $f(x_0) = \alpha$, כנדרש. ■

משפט 10 (משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרל מסוים). נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח ש־:

- f רציפה (ולכן אינטגרבילית)
- g אינטגרבילית ו־$g \ge 0$

אז קיים $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

הוכחה. נסמן $M = \max_{[a,b]} f, m = \min_{[a,b]} f$. משום ש־$m \le f \le M$ נקבל ש־$mg \le fg \le Mg$. נאסכם ונקבל:

$$m\int_a^b g \le \int_a^b fg \le M\int_a^b g$$

לכאורה, נרצה לחלק באינטגרל של g. אך אסור לחלק ב־0. אם $\int_a^b = 0$, אז אגפים שמאל וימין הינם 0, וכן $\int_a^b fg = 0$, וסיימנו. אחרת, $\int_a^b g > 0$, ולכן נוכל לנרמל:

$$m \le \underbrace{\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}}_{:=\alpha} \le M$$

וממשפט ערך הביניים קיים x_0 עם $f(x_0) = \alpha$ כנדרש. ■

למה 1 (הלמה של בונה). נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

- **גרסה 1:** נניח f מונוטונית, $g \ge 0$ ואינטגרבילית.
- **גרסה 2:** נניח g רציפה, ו־f גזירה ברציפות כך ש־$f' \ge 0$

אז, קיימת נקודת ביניים $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^{x_0} g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_{x_0}^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

הערה 3. בלעז: Bonnet.

שתי ההנחות, של גרסה 1 ושל גרסה 2, קבילות. אין הכרח להניח את שתיהן.

.....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX וצוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד