אלגוריתמים – תרגיל בית 2

להגשה עד יום חמישי, 21 במאי (שעה 23:59)

<u>הנחיות כלליות:</u>

- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה (לפי הפורמט: אלגוריתם, נכונות, סיבוכיות). אם אתם מתבקשים להוכיח טענה מתמטית ובמסגרת ההוכחה אתם מתארים אלגוריתם, אינכם חייבים לנתח את הסיבוכיות שלו.
- ניתן להסתמך על כל מה שראיתם בהרצאות ובתרגולים.
- אם לא נאמר אחרת, ניתן להניח שהגרפים הנתונים הם פשוטים.
- אם לא נתון בשאלה שהגרף קשיר, אזי הוא <u>לא בהכרח</u> קשיר.
- יש לענות בדף התשובות המופיע במודל בתוך המשבצות (במידת הצורך אפשר להוסיף דפי חירום בסוף).

1. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) אם G קשיר חזק אז בהכרח באף ריצת DFS על G לא תהיינה קשתות חוצות. (ריצת DFS יכולה לבחור באופן שרירותי את הצמתים שמהם מתחילים סריקה ואת הסדר שבו סורקים את הקשתות של כל צומת.)
   (ב) אם בכל ריצת DFS על G מתקיים $f[u] > f[v]$ אז בהכרח יש מסלול מכוון מ-u ל-v ב-G.

2. נתון גרף $G = (V, E)$, וצומת $s \in V$, כך שכל הצמתים ב-V נגישים מ-s.
<u>הערה</u>: עץ BFS (או DFS) מ-s הוא כל עץ שמתקבל מהרצת BFS (או DFS) עם צומת התחלה s על איזשהו ייצוג של הגרף (כלומר, עבור סדר כלשהו של רשימת הקשתות היוצאות מכל צומת).
הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
   (א) אם G <u>לא מכוון</u>, וקיימים עץ BFS ועץ DFS מ-s <u>זהים</u>, נסמנם T, אזי בהכרח $G = T$.
   (ב) אם G <u>מכוון וחסר מעגלים</u>, וקיימים עץ BFS ועץ DFS מ-s <u>זהים</u>, נסמנם T, אזי בהכרח $G = T$.
   (ג) אם G <u>מכוון וחסר מעגלים</u>, ומתקיים $|E| > |V| - 1$, אזי בהכרח קיימים עץ BFS ועץ DFS מ-s, נסמנם T_1, T_2, כך ש-$T_1 \neq T_2$.

3. מסלול המילטון בגרף הוא מסלול פשוט העובר בדיוק פעם אחת בכל צומת בגרף. יהי G גרף מכוון ואציקלי.
   (א) הוכיחו שאם קיים מסלול המילטון בגרף אז יש סדר מיון טופולוגי יחיד.
   (ב) האם הטענה ההפוכה ל-(א) נכונה? כלומר, אם סדר המיון הטופולוגי הוא יחיד אז הוא מהווה מסלול המילטון. הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית.
   (ג) תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן הבודק אם יש מסלול המילטון בגרף, והוכיחו את נכונותו.

4. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$, שהורץ עליו DFS אשר החזיר יער DFS G_π. נזכיר שצומת w הוא **<u>אב חורג</u>** של צומת v ביחס להרצת ה-DFS, אם יש מ-v קשת אחורית אל w (לצומת יכולים להיות כמה אבות חורגים).
   (א) נתון מסלול פשוט ביער מהשורש לצאצא: $u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_k$. נסמן ב-$G' = (V, E \setminus \{u_{k-1}, u_k\})$ את הגרף ללא הקשת $\{u_{k-1}, u_k\}$. תנו תנאי הכרחי ומספיק, אשר משתמש בהגדרת האב החורג, להאם u_0 ו-u_k נמצאים באותו רכיב קשירות ב-G', והוכיחו את נכונותו. אין להשתמש במושגים "מסלול" או "רכיב קשירות" בתנאי.
   (ב) קשת בגרף לא מכוון נקראת **<u>גשר</u>** אם הסרתה מגדילה את מספר רכיבי הקשירות. תארו אלגוריתם יעיל למציאת כל הגשרים בגרף קשיר נתון. על האלגוריתם להסתמך על האלגוריתם שמחשב ערכי low שנלמד בתרגול.
   (ג) תארו אלגוריתם יעיל שמוצא בגרף לא מכוון את כל הקשתות שמשתתפות במעגל פשוט.

5. נתון גרף לא מכוון וקשיר $G = (V, E)$. הוכיחו כי אם G חסר גשרים (לפי ההגדרה משאלה 4) אז קיים תת גרף $H = (V, E')$ קשיר וחסר גשרים המקיים $|E'| \leq 2|V| - 2$.

6. נתונים גרף מכוון $G = (V, E)$ ומספר טבעי k. תארו אלגוריתם יעיל למציאת תת־קבוצה $U \subseteq V$ בגודל k אשר מקיימת את התכונות הבאות:
   - (א) לכל צומת $v \in V \setminus U$ קיים צומת $u \in U$ כך שישנו מסלול מכוון מ-v ל-u.
   - (ב) לא קיים מסלול מכוון בין שני צמתים שונים של U.

7. עבור וקטור $X = (X_1, \dots, X_n)$ של מספרים שלמים חיוביים נגדיר את **הפיזור** של X להיות $|\{X_i | 1 \leq i \leq n\}|$. נתון שלם חיובי n וכן m אי שוויונות מהצורה $X_j \leq X_i$ עבור $1 \leq i, j \leq n$. תארו אלגוריתם שמוצא X שמקיים את כל אי־השוויונות, שפיזורו מקסימלי.

8. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$. עבור כל אחת מהתכונות הבאות, תארו אלגוריתם שבודק האם התכונה מתקיימת בגרף:
   - (א) קיים קודקוד $w \in V$ כך שלכל קודקוד $v \in V$ יש מסלול $w \rightsquigarrow v$.
   - (ב) לכל זוג קודקודים $v, u \in V$ קיים קודקוד $w \in V$, כך שקיימים מסלולים $v \rightsquigarrow w$ ו- $w \rightsquigarrow u$ (המסלולים לא בהכרח זרים בקודקודים או בקשתות).

   (שאלה למחשבה: איך הייתה משתנה התשובה לסעיף ב' אם סדר הכמתים היה מתחלף, כלומר "קיים קודקוד $w \in V$ כך שלכל זוג קודקודים $v, u \in V$...")