אלגוריתמים – תרגיל בית 3

להגשה עד יום חמישי, 11 ביוני (שעה 23:59)

<u>הנחיות כלליות:</u>

- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה (לפי הפורמט: אלגוריתם, נכונות, סיבוכיות). אם אתם מתבקשים להוכיח טענה מתמטית ובמסגרת ההוכחה אתם מתארים אלגוריתם, אינכם חייבים לנתח את הסיבוכיות שלו.
- ניתן להסתמך על כל מה שראיתם בהרצאות ובתרגולים.
- אם לא נאמר אחרת, הניחו שהגרפים הנתונים הם פשוטים.
- אם לא נתון בשאלה שהגרף קשיר, אזי הוא <u>לא בהכרח</u> קשיר.
- יש לענות בדף התשובות המופיע במודל בתוך המשבצות (במידת הצורך אפשר להוסיף דפי חירום בסוף).

0. חימום (<u>לא להגשה</u>): הוכיחו את התרגילון מתרגול 4 שקופית 6. מה ניתן להסיק מהתרגילון על אופן הפעולה של האלגוריתם של קרוסקל?

1. נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ וקשת $e \in E$.
   ~~(א)~~ תארו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|V|+|E|)$ הבודק האם <u>קיים</u> עפ"מ המכיל את הקשת e.
   ~~(ב)~~ תארו אלגוריתם בסיבוכיות $O(|V|+|E|)$ הבודק האם <u>כל</u> עפ"מ מכיל את הקשת e.

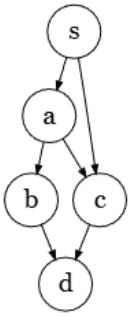
~~2.~~ נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, ועפ"מ T של G.
נגדיר גרף חדש G' שהתקבל מהוספת צומת חדש v ל-G, וקשתות ממושקלות ממנו לחלק מצמתי G. תארו אלגוריתם למציאת עפ"מ ב-G' שרץ בזמן $O(|V|\log|V|)$.

3. נתון גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ חד-חד ערכית. נתון מספר $k=O(\log|V|)$ כך ש-$|E|=|V|+k$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמחשב עפ"מ בגרף (סיבוכיות האלגוריתם יכולה להיות תלויה ב-k).

4. נתון גרף קשיר ולא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   ~~(א)~~ <u>הוכיחו</u>: אם f מונוטונית עולה <u>חלש</u> ו-T הוא עפ"מ של G ביחס ל-w, אז T עפ"מ גם ביחס ל-$f(w)$.
   ~~(ב)~~ <u>הוכיחו</u>: אם f מונוטונית עולה <u>חזק</u>, אז לכל T מתקיים ש-T עפ"מ ביחס ל-w אמ"ם T עפ"מ ביחס ל-$f(w)$.
   ~~(ג)~~ נניח ש-$|E|=2026|V|$, ולכל קשת $e \in E$ מתקיים $w(e) \in [0,|V|]$ ($w(e)$ לא בהכרח שלם). כמו כן, נתונה קבוצה $A \subseteq [0,|V|]$ כך ש-$|A|=O(1)$.
   תארו אלגוריתם יעיל שבודק האם קיים עפ"מ כך שמשקלי כל קשתותיו שייכים לקבוצה A, ורץ בזמן $O\big(|V|\alpha(|V|)\big)$.

~~5.~~ שני שחקנים נבונים A ו-B (כלומר, A ו-B משחקים אופטימלית תוך צפייה מראש של מהלכיו הסבירים של השחקן האחר) משחקים במשחק הבא: נתונה סדרה של n מספרים מסודרים בשורה משמאל לימין. השחקנים משחקים לסירוגין כשכל אחד בתורו לוקח את המספר הימני ביותר או את המספר השמאלי ביותר. שחקן A משחק ראשון. לאחר שנלקחו כל המספרים, ערך המשחק מחושב להיות סכום המספרים ששחקן A בחר פחות סכום המספרים ששחקן B בחר. מטרת שחקן A היא למקסם את ערך המשחק, בעוד ששחקן B מנסה למנם את ערך המשחק. תארו אלגוריתם יעיל שמקבל סדרת מספרים באורך n ומחשב את ערך המשחק.<u>דוגמה</u>: בהינתן הסדרה 6,3,3,8,2,1, ערך המשחק הוא $6-3+1-3+8-2=7$.

~~6.~~ נתון $G = (V, E)$ גרף מכוון <u>אציקלי</u> ונתון $s \in V$ צומת.
צמד שחקניות, אריאנה וביונסה, משחקות במשחק הבא על הגרף G:



- במהלך המשחק השחקניות בונות יחדיות מסלול שיוצא מהצומת s, כאשר בתחילת המשחק זהו המסלול הטריוויאלי $s \rightsquigarrow s$ באורך 0.
- השחקניות משחקות לסירוגין, כאשר אריאנה ראשונה לשחק.
- כל שחקנית, בתורה, מאריכה את המסלול בקשת אחת, כלומר אם המסלול הנוכחי הוא $s \rightsquigarrow u$ אז היא בוחרת קשת $(u, v) \in E$ והמסלול החדש הוא $s \rightsquigarrow u \to v$.
- אם שחקנית לא יכולה להאריך את המסלול הנוכחי, אז היא מפסידה ויריבתה מנצחת.

תארו אלגוריתם יעיל שמקבל כקלט את G, s וקובע מיהי המנצחת (ניתן להניח ששתיהן משחקות אופטימלית – כלומר, מטרת כל שחקנית לנצח, ואם יש אסטרטגיה שתבטיח ניצחון היא תפעל על פיה).

לדוגמה, בגרף משמאל מנצחת אריאנה (האסטרטגיה – אריאנה תבחר לעבור ל-a, ואז לא משנה מה תבחר ביונסה, אריאנה תעבור ל-d וביונסה תפסיד).

~~7.~~ נתונה סדרת מספרים שלמים (חיוביים, אפס או שליליים) $a_1, a_2, \dots, a_n$. תת-סדרה רצופה שלה היא סדרת מספרים $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}$ (בפרט תת-הסדרה הריקה היא תת-סדרה רצופה). ענו על הסעיפים הבאים:

~~(א)~~ תארו אלגוריתם יעיל המוצא תת-סדרה רצופה במשקל מקסימלי.

~~(ב)~~ שתי תתי-סדרות הן זרות אם קבוצות האינדקסים של איבריהן זרות. תארו אלגוריתם יעיל המוצא **שתי תתי-סדרות רצופות זרות** שסך המשקלים שלהן מקסימלי.

~~8.~~ נתונות m פונקציות $f_1, f_2, \dots, f_m : \{0,1, \dots, m\} \to \mathbb{Z}$ ומספר טבעי $n \in \mathbb{N}$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמוצא מספרים שלמים $x_1, x_2, \dots, x_m$ שממקסמים את הסכום $\sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$ תחת האילוץ $\sum_{i=1}^{m} x_i \le n$.