אלגוריתמים – תרגיל בית 4

להגשה עד יום חמישי, 25 ביוני (שעה 23:59)

<u>הנחיות כלליות:</u>

- בכל שאלה בה אתם מציגים אלגוריתם, יש להוכיח נכונות ולנתח את זמן הריצה (לפי הפורמט: אלגוריתם, נכונות, סיבוכיות). אם אתם מתבקשים להוכיח טענה מתמטית ובמסגרת ההוכחה אתם מתארים אלגוריתם, אינכם חייבים לנתח את הסיבוכיות שלו.
- ניתן להסתמך על כל מה שראיתם בהרצאות ובתרגולים.
- אם לא נאמר אחרת, הניחו שהגרפים הנתונים הם פשוטים.
- אם לא נתון בשאלה שהגרף קשיר, אזי הוא <u>לא בהכרח</u> קשיר.
- יש לענות בדף התשובות המופיע במודל בתוך המשבצות (במידת הצורך אפשר להוסיף דפי חירום בסוף).

1. נתון $G = (V, E)$ מכוון ונתונה צביעה של קשתות G בחמישה צבעים: סגול, ירוק, אדום, חום ולבן. נאמר שמעגל הוא בעל צביעה נאותה אם מתקיים:
$$2 \cdot \#_{purple}(C) > 3 \cdot \#_{brown}(C) + 4 \cdot \#_{green}(C) - 5 \cdot \#_{white}(C)$$
כאשר $\#_{color}(C)$ הוא מספר הקשתות מצבע $color$ במעגל C. תארו אלגוריתם יעיל הקובע האם **<u>כל</u>** המעגלים הפשוטים הם בעלי צביעה נאותה.

2. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, וידוע שאין בגרף מעגלים שליליים. נתונים בנוסף זוג צמתים שונים $s, t \in V$. נסמן ב-P את קבוצת ההילוכים בין s ל-t <u>שאינם</u> קלים ביותר. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמחשב הילוך קל ביותר מבין ההילוכים ב-P (או מודיע שלא קיים כזה).

3. נתון גרף $G = (V, E)$ אציקלי מכוון, ושני צמתים $s, t \in V$. כל קשת בגרף צבועה בכחול או באדום. נגדיר את ההטיה $\beta(p)$ של מסלול p בגרף להיות הערך המוחלט של ההפרש בין מספר הקשתות הכחולות והאדומות על p (למשל, ההטיה של מסלול עם 7 קשתות אדומות ו-3 כחולות היא 4).
   (א) תארו אלגוריתם שמחזיר מסלול מ-s ל-t עם הטיה <u>מקסימלית</u>.
   (ב) תארו אלגוריתם שמחזיר מסלול מ-s ל-t עם הטיה <u>מינימלית</u>.

4. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, קודקוד $s \in V$ ופונקציית משקל $w: E \to A$. תארו אלגוריתם שמחשב מרחקים קלים ביותר מ-s בזמן **<u>לינארי</u>** לכל אחד מהמקרים הבאים:
   (א) $A = \{1,2\}$, <u>מבלי</u> להשתמש ב-Dijkstra.
   (ב) $A = \{0,1,2\}$, בגרף <u>לא מכוון</u>, <u>מבלי</u> להשתמש ב-Dijkstra.
   <u>🙃 רמז ל-(א),(ב):</u> BFS. אפשר לבנות מסלול מרחק אפס מ-s לכל קודקוד בגרף, ואז לעבור על הקשתות בסדר עולה לפי משקלן.
   (ג) $A = \{0,1,2,\dots,2026\}$, <u>ניתן</u> (ורצוי) להשתמש ב-Dijkstra.
   <u>🙃 רמז ל-(ג):</u> הרצו Dijkstra, כפי שלמדתם בכיתה, תוך שמירת מרחקים נוכחיים לכל קודקוד. אפשר לעדכן את המרחקים לכל היותר פעם אחת לכל קודקוד, כדי לחסוך זמן ריצה.

5. נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, קבוצה $A \subseteq V$ וצומת $s \in A$. ידוע שמתקיים:
   (א) אם המשקל של קשת $(u, v) \in E$ הוא שלילי, אז בהכרח $u \in A, v \in V \setminus A$;

(ב) לא קיימת קשת $(u,v) \in E$ בגרף שעבורה $u \in V \setminus A, v \in A$.

תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן המחשב את $\delta(s,v)$ לכל $v \in V$.

🙃 רמז: (הערה: בגרפים מכוונים מקבלים מעגלים שליליים).

6. נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ שבו לכל קשת צבע אדום או כחול. תארו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V||E|)$ שימצא לכל זוג צמתים $s,t \in V$ מסלול מכוון מ-s ל-t שמספר שינויי הצבע לאורכו הוא מינימלי (או מודיע שלא קיים מסלול).

🙃 רמז: הערה: מראה ד מראה ר.

7. בצעו שינוי באלגוריתם למציאת מק"בים המבוסס על כפל מטריצות (min-plus), כך שהוא יהפוך לאלגוריתם למציאת אורך המעגל השלילי הקצר ביותר (ביחס למס' הקשתות) בגרף (או מודיע שלא קיים מעגל שלילי). אין צורך למצוא את קשתות המעגל.

8. נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$. כמו כן, נתונות שתי תתי קבוצות $U_1, U_2 \subseteq V$ זרות (לאו דווקא חלוקה של הגרף). מסלול $u_1 \to \cdots \to u_k$ נקרא מסודר אם אין זוג צמתים u_i, u_j במסלול כך ש-$i < j$ ו-$u_j \in U_1, u_i \in U_2$. תארו אלגוריתם יעיל ככל הניתן שמחזיר לכל זוג צמתים בגרף את אורך המסלול המסודר הקצר ביותר ביניהם (מבין כל המסלולים המסודרים), או מחזיר שלא קיים מסלול כזה.