# טופולוגיה ~ תרגיל בית 1

שחר פרץ

19 באפריל 2026

## (1)

תהי $X$ קבוצה. נוכיח כי האוספים $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ שיורדו הן טופולוגיות על $X$.

(א) טופולוגיית הקרניים המוגדרת ע"פ:

$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \uplus \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- **סגירות חיתוך סופי:** יהי אוסף סופי $U_1 \dots U_n$ של קבוצות מהמרחב. אם ישנה $U_i$ כך ש־$U_i = \varnothing$, אז החיתוך הוא ריק ובפרט במרחב. אחרת, כל הקבוצות קרניים (בה"כ, כי חיתוך עם כל המרחב לא משפיע) מצורה $U_i = (a_i, \infty)$. נבחין ש־ :

$$\bigcap U_i = \bigcap (a_i, \infty) = \left(\max_{i \in [n]} a_i,\ \infty\right) \in \mathcal{T}_1$$

כנדרש.

- **סגירות לאיחוד:** בהינתן אוסף $\mathscr{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_1)$ של קבוצות, אם $X \in \mathscr{U}$ סיימנו, אחרת בה"כ $\varnothing \notin \mathscr{U}$ ואז כל $U \in \mathscr{U}$ היא קרן ואפשר למפות $(a, \infty) \overset{f}{\mapsto} a$. קל לראות ש־:

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U = (\inf f(\mathscr{U}), \infty)$$

כאשר אם $\sup f(\mathscr{U}) = -\infty$ נקבל שוויון ל־$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ כנדרש.

- **גסה יותר מהטופולוגיה הטרוויאלית:** דה

(ב) טופולוגיות הנקודה הייחודית:

$$\mathcal{T}_2 = \{\varnothing\} \uplus \{U \subset X \mid a \in U\}$$

- **סגירות חיתוך סופי:** ניקח אוסף סופי $U_1 \dots U_n$ של קבוצות פתוחות. אם $U_i = \varnothing$ סיימנו, אחרת $a \in U_i$ לכל $i \in [n]$. מהגדרה $a \in \bigcap U_n \subset X$ כלומר $\bigcap U_n \in \mathcal{T}_2$ כנדרש.
- **סגירות לאיחוד:** ניקח אוסף $\mathscr{U} \subset \tau_2$ של קבוצות פתוחות. אם $\mathscr{U} = \{\varnothing\}$ סיימנו, אחרת קיימת $U \in \mathscr{U}$ כלשהי כך ש־$a \in U$. מהגדרה $a \in \bigcup U_n \subset X$ כלומר $\bigcup U_n \in \mathcal{T}_2$ כנדרש.
- **גסה יותר מהטופולוגיה הטרוויאלית:** בבירור $\varnothing \in \mathcal{T}_2$, ועוד נבחין ש־$a \in X \subset X$ כלומר $X \in \mathcal{T}_2$ כנדרש.

(ג) הטופולוגיה הקו־בת מנייה:

$$\mathcal{T}_3 = \{U \subset X \mid U = \varnothing \vee |U^c| \leq \aleph_0\}$$

- **סגירות חיתוך סופי:**
- **סגירות לאיחוד:**
- **גסה יותר מהטופולוגיה הטרוויאלית:**

## (2)

נמצא את כל הטופולוגיות על $\{a, b, c\}$. נעבור על כל האיברים בקבוצת החזקה של קבוצת החזקה.

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \qquad \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\} \qquad \{\varnothing, \{a\}, \{a,b,c\}\} \qquad \{\varnothing, \{a\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$$

שאר המרחבים הומיאומורפים לאלו המצוינים לעיל (או במילים אחרות אין לי כוח להמשיך).

## (3)

תהי $X$ קבוצה ויהי $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ אוסף הטופולוגיות על $X$.

(א) נוכיח ש־$\inf\Lambda := \bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ טופולוגיה.

הוכחה.

**סגירות חיתוך סופי:** נתבונן באוסף סופי של קבוצות $\mathscr{U}\subset\inf\Lambda$. מכאן ש־$\mathscr{U}\subset\mathcal{T}_\alpha$ לכל $\alpha\in\Lambda$, ומשום ש־$\mathcal{T}_\alpha$ טופולוגיה, כן $\bigcap\mathscr{U}\in\mathcal{T}_\alpha$. סה"כ $\bigcap\mathscr{U}\in\inf\Lambda$.

**סגירות לאיחוד:** נתבונן באוסף של קבוצות $\mathscr{U}\subset\inf\Lambda$. מכאן ש־$\mathscr{U}\subset\mathcal{T}_\alpha$ לכל $\alpha\in\Lambda$, ומשום ש־$\mathcal{T}_\alpha$ טופולוגיה, כן $\bigcup\mathscr{U}\in\mathcal{T}_\alpha$. סה"כ $\bigcup\mathscr{U}\in\inf\Lambda$.

**גסה יותר מהטופולוגיה הטרוויאלית:** ידוע $\varnothing,X\in\mathcal{T}_\alpha$ לכל $\alpha\in\Lambda$ ומכאן $\varnothing,X\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ ■

(ב) נוכיח ש־$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ איננה בהכרח טופולוגיה.

הוכחה. נתבונן באוסף המשמים הבא של טופולוגיות על $X=\{a,b,c\}$:

$$\mathcal{T}_1=\{\varnothing,\{a\},X\}\qquad\qquad \mathcal{T}_2=\{\varnothing,\{b\},X\}\qquad\qquad \Lambda=\{1,2\}$$

נבחין ש־$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha=\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$ איננה טופולוגיה שכן היא לא סגורה לאיחוד של $\{a\}\cup\{b\}$. ■

(ג+ד) נוכיח שקבוצת הטופולוגיות המוגדרות על $X$ הסדורה חלקית ע"י $\subset$ היא סריג.

הוכחה. נתבונן ב־$T$ אותה נגדיר להיות קבוצת הטופולוגיות המוגדרות על $X$ (נבחין ש־$T\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ ומכאן שהיא מוגדרת היטב). תהא קבוצת אינדקסים (מעוצמה כלשהי, ולמטרות פורמליות, $\Lambda\subset T$) של $T_\alpha\in T$.

- **קיום חסם תחתון מקסימלי (אינפימום):** בבירור $\inf\Lambda$ שהוגדר מקיים את הנדרש, שכן כל טופולוגיה גסה יותר $\mathcal{T}\supsetneq\inf\Lambda$ בעלת איזשהו $U\in\mathcal{T}\notin\inf\Lambda$ כלומר ישנה טופולוגיה $\mathcal{T}_\alpha$ כך ש־$U\notin\mathcal{T}_\alpha$, ומכאן ש־$\mathcal{T}\not\subset\mathcal{T}_\alpha$ והיא איננה חסם תחתון.
- **קיום חסם עליון מינימלי (סופרמום):** נגדיר את $\mathcal{T}$ להיות הטופולוגיה שנוצרת ע"י לקיחת התת־בסיס $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{T}_\alpha$ (כלומר, את כל החיתוכים הסופיים של איברים אילו וכן את איחודים הלאו־דווקא סופי). מהגדרה $\mathcal{T}_\alpha\subset\mathcal{T}$ וגם בערך מהגדרה יצירת טופולוגיה מתת־בסיס נותנת את הטופולוגיה המינימלית שמכילה תת־בסיס זה. ■

(ה) ישירות מהסעיף לעיל נקבל שהאיפימום והסופרמום של $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ המוגדרות בתרגיל הבית הוא:

$$\inf\{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\}=\{\varnothing,\{a\},X\}\qquad\qquad \sup\{\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$$

## (4)

יהי $(X,d)$ מרחב מטרי חסום. נגיד נגדיר את $X^{\aleph_0}$ להיות קבוצת הסדרות. יהי $\sum_{i=1}^n\omega_n$ טור מתכנסת ונגדיר $D\colon X^{\aleph_0}\times X^{\aleph_0}\to\mathbb{R}$ ע"פ $D(\vec{x},\vec{y})=\sum_{i=1}^n\omega_n\cdot d(x_n,y_n)$.

(א) נוכיח ש־$D$ היא פונקציה מוגדרת היטב. ידוע קיום חסם עליון $\sup_{\vec{x},\vec{y}}d(\vec{x},\vec{y})=M\in\mathbb{R}$. מכאן ש־$d(\vec{x},\vec{y})\le M$ לכל $\vec{x},\vec{y}\in X^{\aleph_0}$. נסיק ש־:

$$D(\vec{x},\vec{y})=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n d(x_n,y_n)\le M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\in\mathbb{R}$$

כנדרש.

(ב) נוכיח ש־$(X^{\aleph_0},D)$ הוא מרחב מטרי.

הוכחה.
- **אי־ניוון:** אם $D(x,y)=0$ אז משום ש־$\omega_n>0$ בהכרח $x=y$. עוד נבחין ש־$D(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_n\cdot d(x,x)=\sum_{i=1}^n\omega_n\cdot 0=0$ כנדרש.
- **א"ש המשולש:** נבחין שלכל $N\in\mathbb{N},\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in X^{\aleph_0}$ מתקיים:

$$d(x,z)\le\sum_{i=1}^{N}\omega_n\cdot d(x_n,z_n)\le\sum_{i=1}^{N}\omega_n\left(d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n)\right)=\sum_{i=1}^{N}\omega_n d(x_n,y_n)+\sum_{i=1}^{N}\omega_n d(y_n,z_n)\le d(x,y)+d(y,z)$$

ומכאן שהא"ש החלש נשמר גם בגבול $N\to\infty$.
- **סימטריות:** ישירות מסימטריות $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$.

■

## (5)

תהא $X$ קבוצה שאיננה סינגלטון, ועליה נגדיר את הטופולוגיה הטרוויאלית. נוכיח שהמרחב אינו מטרייזבילי.

הוכחה. נניח בשלילה שהמרחב מטרייזבילי עם מטריקה $d$ כלשהי, אז משום ש־$|X| \geq 2$ ישנם $x \neq y \in X$. זהו מרחב האוסדורף (מנותק אסטרמלית) שכן בהינתן $d(x,y) = \delta$ אז הכדורים הפתוחים $U(x, \frac{\delta}{2}) = \{x\},\ U(y, \frac{\delta}{y}) = \{y\}$. אך $\{x\}$ איננה קבוצה פתוחה בטופולוגיה הטרוויאלית, וזו סתירה. ■

**שחר פרץ, 2026**

קומפל ב־LaTeX וצוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד