רשימות טופולוגיה

שחר פרץ ~ 2026B

תאריך קימפול: 16 ביולי 2026

0 Introduction to the Introduction

0.1 ~ רישיון ~ License

The following summary is provided under the GNU General Public License version 3 (GPLv3). It can be distributed and/or modified under the terms of the license, or any later version of it. Additional information can be found here.
הסיכום להלן מסופק תחת רשיון התוכנה החופשית של גנו גרסה 3 (GNU General Public License (GPL version 3). ניתן להעתיקו ו/או להפיצו תחת GPLv3 או גרסה מאוחרת יותר. מידע נוסף אפשר למצוא כאן.

0.2 ~ הרבה מילים שאפשר לדלג עליהן

הסיכום להלן נכתב כתרגיל כדי לוודא שאני יודע את החומר של טופולוגיה, שלמדתי עצמאית. הוא נועד לספק ידע נוסף אל מעבר לקורס של טופולוגיה באוניברסיטת תל־אביב. יש להבהיר שהסיכום עוסק בטופולוגיה כללית (אנ' general topology או point-set topology) **ולא** עוסק בטופולוגיה אלגברית (אנ' algebraic topology), טופולוגיה גיאומטרית (אנ' geometric topology) או באנליזה על יריעות ובגיאומטריה דיפרנציאלית (אנ' differential geometry). עם זאת, הוא כן (אמור) לספק בסיס יציב לנושאים הללו.

אזהרה. הסיכום נכתב לבד, וההוכחות בו הוכחות שלי. ייתכן ואף סביר שהוא יכיל טעויות.

0.3 ~ סימונים

בסיכום הבא נניח את הסימונים הבאים:

- $[n] := \mathbb{N} \cap [0, n]$
- $\subset := \subseteq$
- $\bigcup A := \bigcup_{X \in A} X$

0.4 ~ רשימת נושאים שהוספתי לסיכום נוסף על החומר של הקורס

- התכנסות רשתות
- קומפקטיפיקצית סטון־צ'ך
- מרחבי T_5ו־T_6.
- טופולוגיה חלשה וחזקה
- משפט הקטגוריה של בייר
- טופולוגיה חלשה וחזקה
- קבוצת קנטור
- הומוטופיה

נוסף על כך, חלק ניכר מהעיסוק במרחבים מטריים שמובא בסיכום הזה נלמד בחדו"א 2א, ולא בקורס "טופולוגיה".

תוכן העניינים

0 מבוא למבוא 2
0.1 רישיון 2
0.2 הרבה מילים שאפשר לדלג עליהן 2
0.3 סימונים 2
0.4 רשימת נושאים שהוספתי לסיכום נוסף על החומר של הקורס 2

1 מרחבים מטריים 5
1.1 טופולוגיה של מרחב מטרי 5
1.2 משפט ההשלמה 5
1.3 ארצלה־אסכולי 5
1.4 רציפות 5

2 מבוא 6
2.1 מרחבים טופולוגיים 6
2.1.1 הגדרה 6
2.1.2 פעולות במרחבים טופולוגיים 8
2.2 בסיסים 10
2.2.1 בסיסים 10
2.2.2 תתי־בסיסים 12
2.3 רשתות 12
2.4 פונקציות רציפות 12

3 בניית מרחבים טופולוגיים 13
3.1 הטופולוגיה החלשה והטופולוגיה החזקה 13
3.2 טופולוגיית המכפלה 13
3.3 טופולוגיית המנה 14

4 אקסיומות מניה 15
4.1 מניה שניה ומניה ראשונה 15
4.1.1 מניה ראשונה 15
4.1.2 מניה שנייה 15
4.2 ספרבילים ולינדוף 15

5 אקסיומות הפרדה 16
5.1 מבוא 16
5.2 אקסיומות הפרדה ראשונות 16
5.3 מרחבי טיכונוף 16
5.3.1 משפטים בסיסיים 16
5.3.2 משפט השיכון של טיכונוף 16
5.4 מרחבים רגולרים 16
5.5 מרחבים נורמליים 16
5.5.1 משפטים בסיסיים 16
5.5.2 הלמה של אוריסון 16
5.5.3 מרחבים נורמלים לחלוטין ובאופן מושלם 16
5.5.4 משפט ההרחבה של טיצה 16

6 קשירות 17
6.1 קשירות רגילה 17
6.2 קשירות מסילתית 17
6.3 רכיבי קשירות 17

7 קומפקטיות 18
7.1 מרחבים קומפקטיים 18

7.1.1 מבוא 18
7.1.2 משפט טיכונוף 18
7.2 מרחבים קומפקטיים מקומית 18
7.3 קומפקטיפיקציה 18
7.3.1 קומפקטיפיקציה חד־נקודתית (אלכסנדרוב) 18
7.3.2 קומפקטיפיקצית סטון־צ'ך 18

8 נושאים נוספים 19
8.1 פרה־קומפקטיות 19
8.2 קבוצת קנטור 19
8.3 שקילות הומוטופית 19
8.4 מרחב אוקלידי מקומית 19
8.5 מרחבי פונקציות 19

9 מרחבים מטריים מנקודת מבט טופולוגית 20
9.1 מרחבים מטריים ושמורות טופולוגיות 20
9.2 מרחב מטרי קומפקטי 20
9.2.1 חסימות 20
9.2.2 משפט היינה־בורל 20
9.3 מרחבים מטרייזביליים 20
9.3.1 משפט המטרייזביליות של אוריסון 20
9.3.2 משפט המטרייזביליות של נגטה־סמירוב 20
9.4 משפט הקטגוריה של בייר 20
9.5 מרחבים נורמיים 20
9.6 תוצאות נוספות 20
9.6.1 משפט נקודות השבת של בנך 20
9.6.2 קצת משפטים איזוטריים 20

בתיאבון

1 Metric Spaces

TODO!

1.1 ∼ טופולוגיה של מרחב מטרי
1.2 ∼ משפט ההשלמה
1.3 ∼ ארצלה־אסכולי
1.4 ∼ רציפות

המשך בעמוד הבא

2 Introduction

2.1 ~ מרחבים טופולוגיים

(2.1.1) הגדרה

הגדרה 2.1.1. יהיו X ו־$\tau \subset \mathcal{P}(X)$ קבוצות. נאמר ש־(X,τ) טופולוגיה על המרחב X אם τ מקיים את התכונות הבאות:

- **סגירות לאיחוד:** לכל $\mathscr{U} \subset X$ משפחה של קבוצות, מתקיים ש־:

$$\bigcup_{U\in\mathscr{U}} U \in \tau$$

- **סגירות לחיתוך סופי:** לכל $U_1 \dots U_n \subset X$ משפחה סופית של קבוצות ב־τ, מתקיים ש־:

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_I \in \tau$$

- **מכיל את המרחב הטרוויאלי:** מתקיים ש־$\varnothing \in \tau$ וכן $X \in \tau$.

הגדרה 2.1.2. בהינתן מרחב טופולוגי (X,τ) נאמר על $U \subset X$ ש־U קבוצה פתוחה אם $U \in \tau$, ו־U קבוצה סגורה אם $\overline{U} \in \tau$.

הערה 1. אומנם המושגים של "קבוצה פתוחה" ו"קבוצה סגורה" דואלים באיזשהו הבט, הם **אינם** סותרים אחד את השני. קיימות קבוצות שהן הן פתוחות והן סגורות (נבחין שבכל מרחב הקבוצה הריקה $\varnothing$ והמרחב כולו X הן קבוצות כאלו) וקבוצות אלו יקראו סגוחות. נבחן לעומק את הקבוצות הללו כאשר נדבר על קשירות.

טענה 2.1.1. חיתוך של קבוצות סגורות הוא סגור, וכן איחוד בן מנייה.

הוכחה. • יהי $\mathscr{X} \subset \mathcal{P}(X)$ אוסף בן־מנייה של קבוצות סגורות. אז לכל $U \in \mathscr{X}$ מתקיים ש־$X \setminus U$ קבוצה פתוחה, ומהגדרת הטופולוגיה הקבוצה:

$$G := \bigcup_{U\in\mathscr{X}} X \setminus U$$

פתוחה גם היא. עוד נבחין, שמחוקי דה־מורגן:

$$X \setminus \bigcap \mathscr{X} = X \setminus \bigcap_{U\in\mathscr{X}} U = \bigcup_{U\in\mathscr{X}} (X \setminus U) = G$$

ולכן המשלים של $\bigcup \mathscr{X}$ פתוח, ומהגדרת קבוצה פתוחה, הוא סגור.

- ההוכחה בעבור איחוד בן־מנייה זהה; ראו אותה כתרגיל.

■

הגדרה 2.1.3. יהיו τ_1, τ_2 טופולוגיות על X. אם $\tau_1 \subset \tau_2$, אז נאמר ש־τ_1 חלשה, קטנה, וגסה יותר מ־τ_2, ונאמר ש־τ_2 חזקה, גדולה ועדינה יותר מ־τ_2.

הערה 2. כל השמות האלו שקולים. באנגלית, τ_1 היא coarser, weaker and smaller בעוד τ_2 היא finer, stronger and larger.

מסקנה 2.1.1. נבחין שיחס ההכלה יחס סדר חלש על קבוצת הטופולוגיות על X, כאשר טופולוגיה τ_1 קטנה מ־τ_2 אמ"מ τ_1 חלשה יותר.

הגדרה 2.1.4. נאמר ששתי טופולוגיות τ_1, τ_2 הן ברות השוואה אם הן ברות השוואה ביחס הסדר של הטופולוגיות על X.

הגדרה 2.1.5. תהי X קבוצה. הטופולוגיה הדיסקרטית היא $\tau = \mathcal{P}(X)$.

למה 2.1.2. הטופולוגיה הדיסקרטית היא טופולוגיה, והיא הטופולוגיה המקסימלית (העדינה והחזקה ביותר) ביחס הסדר של הטופולוגיות על X.

הגדרה 2.1.6. תהי X קבוצה. הטופולוגיה הטרוויאלית היא $\tau = \{\varnothing, X\}$.

למה 2.1.3. הטופולוגיה הטרוויאלית היא טופולוגיה, והיא הטופולוגיה המינימלית (הגסה והחזקה ביותר) ביחס הסדר של הטופולוגיות על X.

מסקנה 2.1.2. קיים איבר מקסימלי ומינימלי ביחס הסדר על X.

מעתה ואילך, נניח כמת של "יהי X מרחב טופולוגי" אלא אם מצוין אחרת.

הגדרה 2.1.7. יהיו $U \subset X$ ו־$x \in X$. נאמר ש־U סביבה של x_0 אם קיימת $V \in \tau$ פתוחה כך ש־$x_0 \in V \subset U$.

הקונספט של סביבה מרחיב רעיון שאנחנו מכירים כבר מחדו"א 2א – דיברנו על סביבות כדוריות, ריבועיות וכו', אבל הבחנו שהקונספט של התכנסות לא משתנה כאשר בוחרים סביבות "מסוג אחר". כדי לפרמל את הקונספט של "סוגי סביבות", נגדיר את המושג של מערכת סביבות.

הגדרה 2.1.8. מערכת הסביבות של x_0 היא קבוצת כל הסביבות של x_0.

הגדרה 2.1.9. בסיס למערכת סביבות של x_0 היא קבוצה $\mathscr{U} \subset U$ המקיימת את התנאים הבאים:

- כל $U \in \mathscr{U}$ היא סביבה של x_0.
- לכל $x \in V$ פתוחה, קיימת $U \in \mathscr{U}$ כך ש־$U \subset V$.

דוגמה. נבחין שלכל $x \in X$ בטופולוגיה, קבוצת הקבוצות הפתוחות ש־x נמצא בהן מהווה בסיס למערכת הסביבות של x. נקרא לו הבסיס הסטנדרטי למערכת הסביבות של x, ואלא אם מצוין אחרת נשתמש בו.

הגדרה 2.1.10. תהי $A \subset X$ קבוצה. אז $x_0 \in X$ יקרא נקודת הצטברות ב־A אם לכל סביבה U של x מתקיים ש־$(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$.

הערה 3. לא כל נקודת הצטברות חייבת להיות ב־A. לדוגמה בעבור $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ מתקיים ש־0 נקודת הצטברות.

טענה 2.1.4. x_0 נקודת הצטברות ב־A אמ"מ לכל $U \in \mathscr{U}$ כאשר $\mathscr{U}$ בסיס למערכת הסביבות של x_0, מתקיים ש־$(U \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$.

הוכחה. תהי $\mathscr{U}$ בסיס למערכת הסביבות.

$\Longrightarrow$ אם x_0 נקודת הצטברות ב־A, אז כל $U \in \mathscr{U}$ היא סביבה של x_0 ולכן בהכרח מהגדרת נקודת הצטברות $U \cap A \neq \{x_0\}$.

$\Longleftarrow$ אם לכל $U \in \mathscr{U}$ מתקיים התנאי לעיל, אז לכל V סביבה של x_0 קיימת $U \in \mathscr{U}$ כך ש־$U \subset V$ (מהגדרה), ומההנחה $(V \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$. משום ש־$V \subset U$ בבירור:

$$(U \cap A) \setminus \{x_0\} \subset (V \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \varnothing$$

כנדרש.

■

סימון 2.1.11. נסמן את קבוצת נקודות ההצטברות של A ב־A'.

הגדרה 2.1.12. בהינתן $A \subset X$ ו־$x_0 \in A$, x_0 יקרא נקודה מבודדת ב־A אמ"מ קיימת סביבה U של x_0 כך ש־$U \cap A = \{x_0\}$.

טענה 2.1.5. יהי $\mathscr{U}$ בסיס למערכת הסביבות. אז x_0 נקודה מבודדת אמ"מ לכל $U \in \mathscr{U}$ מתקיים ש־$U \cap A \neq \{x_0\}$.

הוכחה. יהי $\mathscr{U}$ בסיס למערכת הסביבות של U.

$\Longrightarrow$ נניח ש־x_0 נקודה מבודדת. אז כל $U \in \mathscr{U}$ גם הוא סביבה ולכן מקיים את הנדרש.

$\Longleftarrow$ נניח ש־$\mathscr{U}$ מקיים את התנאי הנדרש על x_0. אז לכל U סביבה של x_0 קיימת $U \in \mathscr{U}$ כך ש־$U \subset V$, וידוע $U \cap A \neq \{x_0\}$. משום ש־$x_0 \in U \cap A$ (שכן $x_0 \in U$ משום שהיא סביבה, ו־$x_0 \in A$ מההנחה) אז נסיק שאם $U \cap A \neq \{x_0\}$ בהכרח $V \cap A \neq \{x_0\}$ (שכנעו עצמכם בכך; נזכר כי $U \subset V$) וסיימנו. ■

כאשר ברור על איזה בסיס למערכת הסביבות $\mathscr{U}$ של x מדובר, לעיתים נקרא ל־$U \in \mathscr{U}$ סביבה בסיסית של x או פשוט סביבה בסיסית.

טענה 2.1.6. תהי $A \subset X$ קבוצה, ונניח שלכל נקודה $x \in X$ נקבע איזשהו בסיס למערכת הסביבות שלה (נסמנו ב־$\mathscr{U}_x$).

1. A פתוחה אמ"מ לכל $x \in A$ ישנה סביבה U של x כך ש־$x \in U \subset A$.
2. A פתוחה אמ"מ לכל $x \in A$ ישנה סביבה בסיסית $U \in \mathscr{U}_x$ כך ש־$x \in U \subset A$.
3. A סגורה אמ"מ לכל $x \notin A$ כל סביבה U של x כך ש־$U \cap A \neq \varnothing$.
4. A סגורה אמ"מ לכל $x \notin A$ כל סביבה בסיסית $U \in \mathscr{U}_x$ של x כך ש־$U \cap A \neq \varnothing$.

הוכחה. ■

הגדרה 2.1.13. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. בהינתן $A \subset X$, נקרא ל־(A,τ') תת־המרחב של X עם הטופולוגיה הרלטיבית כאשר τ' מוגדר להיות:

$$\tau' = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$$

טענה 2.1.7. הטופולוגיה הרלטיבית היא טופולוגיה על A.

הוכחה.
- ידוע ש־X פתוחה ב־τ. לכן $A = X \cap A \in \tau'$. באופן דומה $\varnothing \in \tau$ ולכן $\varnothing = A \cap \varnothing \in \tau'$.
- ישנה סגירות לאיחוד: לכל $\mathscr{U} \subset \tau'$, מתקיים שלכל $V \in \mathscr{U}$ קיימת $U_V \in \tau$ כך ש־$U_V \cap A = V$. ואז:

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcup_{V \in \mathscr{U}} V = \bigcup_{V \in \mathscr{U}} (A \cap U_V) = \left(A \cap \bigcup_{V \in \mathscr{U}} U_V\right)$$

ומשום ש־τ טופולוגיה ולכן סגורה לאיחוד, אז $\bigcup U_V \in \tau$ גם היא בטופולוגיה.

-
- ישנה סגירות לחיתוך סופי: לכל $\mathscr{U} \subset \tau'$ כך ש־$|\mathscr{U}| \in \mathbb{N}$, מתקיים שלכל $V \in \mathscr{U}$ קיימת $U_V \in \tau$ כך ש־$U_V \cap A = V$. ואז:

$$\bigcup \mathscr{U} = \bigcap_{V \in \mathscr{U}} V = \bigcap_{V \in \mathscr{U}} (A \cap U_V) = \left(A \cap \bigcap_{V \in \mathscr{U}} U_V\right)$$

ומשום ש־τ טופולוגיה ולכן סגורה לחיתוך סופי, אז $\bigcup U_V \in \tau$ גם היא בטופולוגיה. ■

(2.1.2) פעולות במרחבים טופולוגיים

שתי הפעולות הבסיסיות ביותר שניתן להגדיר בעבור קבוצות, הן הפעולות להלן:

הגדרה 2.1.14. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subset X$. אז נגדיר את הסגור של A להיות:

$$\overline{A} := \operatorname{Cl}_X A := \bigcap \{A \subset F \mid F \text{ is closed in } X\}$$

הגדרה 2.1.15. יהי X מרחב טופולוגי ותהי $A \subset X$. אז נגדיר את פנים של A להיות:

$$A^\circ := \operatorname{Int}_X A := \bigcup \{G \subset A \mid G \text{ is open in } X\}$$

מסקנה 2.1.3. נבחין ש־$\overline{A}$ קבוצה סגורה ו־A° קבוצה פתוחה. זו תוצאה מיידית של הגדרת הטופולוגיה ושל משפט 2.1.1. עוד נבחין שישירות מההגדרה:

$$A^\circ \subset A \subset \overline{A}$$

ואף ש־A פתוחה אמ"מ $A = A^\circ$ וסגורה אמ"מ $A = \overline{A}$. ההוכחה פשוטה.

טענה 2.1.8. לכל $A, B \subset X$ מתקיים $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ וכן $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

מסקנה 2.1.4. אם Y תת־מרחב של X, אז $\operatorname{Cl}_Y A = Y \cap \operatorname{Cl}_X A$.

הוכחה. content ■

טענה 2.1.9. מתקיים ש־:

$$\operatorname{Cl}_X A = A \cup A'$$

הוכחה. נוכיח הכלה דו כיוונית.

$\subset$ יהי $x \in \overline{A}$. נפריד למקרים:

- אם $x \in A$, סיימנו.
- אם $x \notin A$, נראה ש־$x \in A'$. תהי U סביבה של x. משום ש־$x \notin A$, די להוכיח ש־$(U \cap A) \setminus \{x\} = U \cap A \neq \varnothing$. מטענה 2.1.6 ומשום שהסגור סגור, כל סביבה V של x כך ש־$V \cap A \neq \varnothing$, ובפרט $V = U$. בכך סיימנו.

$\subset$ מספיק להוכיח שהקבוצה $A \cup A'$ סגורה כי אז מהגדרת $\mathrm{Cl}_X A$ נקבל ש־$\mathrm{Cl}_X A \subset A \cup A'$ (כי $A \subset A \cup A'$). היא אכן סגורה: לכל $x \in A \cup A'$, כל סביבה U של x מקיימת $U \cap A \neq \varnothing$, שכן:

- אם $x \in A$, אז $x \in U \wedge x \in A \implies x \in U \cap A \neq \varnothing$ וסיימנו.
- אם $x \notin A$ אז $x \in A'$, ואז מהגדרה $(U \cap A) \setminus \{x\} \neq \varnothing$. אך משום ש־$x \notin A$ נסיק ש־$U \cap A \neq \varnothing$ כנדרש ■

אם אנו מבינים כיצד נראה הסגור של קבוצות (או לחילופין, הפנים) אנחנו מבינים כיצד הטופולוגיה נראית. למה הכוונה? פונקציית הסגור ופונקציית הפנים מגדירות באופן יחיד (=חח"ע) טופולוגיה. נוכיח זאת.

טענה 2.1.10. תהי X קבוצה. נסמן ב־$\mathcal{T}$ את קבוצת הטופולוגיות על X. אז הפונקציה $\tau \overset{I}{\mapsto} \mathrm{Int}_{(X,\tau)}$ כאשר $\tau \in \mathcal{T}$ (נבחין ש־$I \colon \mathcal{T} \to (\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X))$) חח"ע.

הוכחה. יהיו $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ טופולוגיות על X. נסמן ב־$\mathrm{Int}_1 := I(\tau_1)$ את פונקציית הפנים לפי τ_1 וב־$\mathrm{Int}_2 := I(\tau_2)$ את פונקציית הפנים לפי τ_2. נניח ש־$\mathrm{Int}_1 = \mathrm{Int}_2$, ונוכיח ש־$\tau_1 = \tau_2$.

לשם כך, נראה טענת עזר. לכל $\tau \in \mathcal{T}$ נגדיר את הקבוצה:

$$\tau' := \operatorname{Im} I(\tau) = \{I(\tau)(A) \mid A \subset X\}$$

ונטען ש־$\tau' = \tau$. אכן, כל $U \in \tau'$ בתמונה של פונקציית הפנים ולכן פתוחה, ומהגדרה בטופולוגיה (נזכר כי A° קבוצה פתוחה). מצד שני, כל $U \in \tau$ מקיימת ש־$U = \mathrm{Int}_{(X,\tau)} U = I(\tau)(U)$ (הפנים של קבוצה פתוחה פתוח) ולכן $U \in \operatorname{Im} I(\tau)$ כנדרש.

נחזור להוכחת הטענה המקורית. נשלב את הלמה עם ההנחה ש־$\mathrm{Int}_1 = \mathrm{Int}_2$:

$$\tau_1 = \tau_1' = \operatorname{Im} \mathrm{Int}_1 = \operatorname{Im} \mathrm{Int}_2 = \tau_2' = \tau_2$$

כנדרש. ■

טענה 2.1.11. תהי X קבוצה. נסמן ב־$\mathcal{T}$ את קבוצת הטופולוגיות על X. אז הפונקציה $\tau \overset{C}{\mapsto} \mathrm{Cl}_{(X,\tau)}$ כאשר $\tau \in \mathcal{T}$ (נבחין ש־$C \colon \mathcal{T} \to (\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X))$) חח"ע.

הוכחה. ההוכחה דומה. תרגיל. ■

טענה 2.1.12. לכל $A \subset X$ מתקיימים השוויונות:

$$(1)\ \ \mathrm{Int}\, A = X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A) \qquad\qquad (2)\ \ \mathrm{Cl}\, A = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$$

הוכחה. ראשית נוכיח את (1), באמצעות הכלה דו־כיוונית.

$\subset$ יהי $x \in \mathrm{Int}\, A$. בפרט $x \in X$. נראה ש־$x \notin \mathrm{Cl}(X \setminus A)$. ידוע ש־$x \in U \subset A$ כאשר U פתוחה כלשהי (כי $x \in \mathrm{Int}\, A$). בפרט $F := X \setminus U$ קבוצה סגורה המקיימת $X \setminus A \subset X \setminus U = F$. סה"כ מצאנו F סגורה כך ש־$x \notin F$ (כי $x \in A$) וגם $F \subset X \setminus A$ ולכן מהגדרת הסגור, $x \notin \mathrm{Cl}\, F$ כנדרש.

$\subset$ נניח ש־$x \in X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus A)$. מכאן ש־$x \in X$. נוכיח ש־$x \in A$. מהגדרת הסגור, קיימת קבוצה סגורה F כך ש־$X \setminus A \subset F \wedge x \notin F$. נבחין ש־$U := X \setminus F$ מקיימת:

$$A = X \setminus (X \setminus A) \subset X \setminus F = U$$

ובגלל ש־$x \notin F$ וגם $x \in X$ אז $x \in X \setminus F$ (ומכאן $x \in U$). סה"כ מצאנו U פתוחה כך ש־$A \subset U \ni x$ ולכן $x \in \mathrm{Int}\, A$ (מהגדרת הפנים).

לאחר הכלה דו־כיוונית זו סיימנו להוכיח את (1). נפנה להוכחת (2); נבחין ש־:

$$\mathrm{Int}(X \setminus A) \overset{(1)}{=} X \setminus \mathrm{Cl}(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus \mathrm{Cl}\, A$$

ולכן:

$$X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus \mathrm{Cl}\, A) = A$$

ובכך הוכחנו גם את (2) כנדרש. ■

ישנן עוד פעולה אחת חשובה שמגדירים מעל מרחבים טופולוגיים: הקצה (באנגלית, frontier או boundary) של קבוצה.

הגדרה 2.1.16. תהי A קבוצה. אז $\partial A = \operatorname{Fr}_X A = \overline{A} \setminus \overline{X \setminus A}$.

טענה 2.1.13. מתקיימים השוויונות המדהימים הבאים:

$$\overline{A} = A \cup \partial A \qquad A^\circ = A \setminus \partial A \qquad X = E^\circ \uplus \partial A \uplus (X \setminus A)^\circ$$

הוכחה. ■

הגדרה 2.1.17. תהי A קבוצה. אז A תקרא קבוצה צפופה אם לכל $x \in X$ ולכל U סביבה של x מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$.

דוגמה. $\mathbb{Q}$ קבוצה צפופה ב־$\mathbb{R}$; לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל סביבה בסיסית $U := (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ של x, מתקיים $U \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ (שכן בין $x-\varepsilon, x+\varepsilon$ בהכרח קיים מספר רציונלי מארכימדיאניות).

טענה 2.1.14. תהי A קבוצה. אז הטענות הבאות שקולות:

1. A קבוצה צפופה במרחב X.
2. הקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את A היא X.
3. $\operatorname{Cl}_X A = X$
4. $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \varnothing$
5. $A \cup A' = X$

הוכחה. נוכיח שרשרת של שקילויות:

$3 \leftrightarrow 5$ מ־2.1.9 אנו מקבלים ש־$A \cup A' = \operatorname{Cl}_X A$ ומכאן באופן מיידי נקבל שקילות.

$3 \leftrightarrow 4$ מ־2.1.12 אנו מקבלים ש־$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$, ולכן אם $\operatorname{Cl}_X = X$ אז $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \varnothing$ ואם $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \varnothing$ אז $\operatorname{Cl} A = X$ כנדרש.

$2 \to 3$ אם הקבוצה היחידה שמכילה את X היא A, אז חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את A הוא חיתוך של X עם אף קבוצה אחרת, וסה"כ מהגדרה $\operatorname{Cl} A = X$ כנדרש.

$1 \to 2$ נניח ש־A צפופה ונוכיח שהקבוצה הסגורה היחידה שמכילה את A היא X. נניח בשלילה שקיימת F סגורה כך ש־$A \subset F$ אבל $F \neq X$. לכן $X \setminus F = U$ פתוחה ו־$U \neq \varnothing$, כלומר קיים $x \in U$ כלשהו. נבחין ש־U סביבה של x, ולכן $U \cap A \neq \varnothing$. עם זאת, משום ש־$A \subset F$ אז $U = X \setminus F \subset X \setminus A$ כלומר $x \notin U$, וזו סתירה לכך ש־$x \in U$, וסיימנו.

$5 \to 1$ נניח ש־$A \cup A' = X$, ונוכיח ש־A צפופה. יהי $x \in X$ ותהי U סביבה של x. נוכיח ש־$U \cap A \neq \varnothing$. נפרק למקרים.

- אם $x \in A$, אז $x \in U \cap A$ וסיימנו.
- אם $x \notin A$ אז בהכרח $x \in A'$ (שכן $x \in X = A \cup A'$), ואז מהגדרת נקודת הצטברות $U \cap A \neq \varnothing$ וסיימנו. ■

2.2 בסיסים $\sim$

כאשר הגדרנו בסיס לסביבת נקודות, שאלנו את עצמנו איזו הגדרה מספיק חזקה כדי להיות שמישה דיו כחלופה לכל המקרים בהם נרצה לדבר על סביבה של נקודה, אך מאידך חלשה יותר מההגדרה של מערכת סביבות. באופן דומה, כאשר נדבר על בסיסים, נרצה לענות על אותה השאלה בעבור המרחב הטופולוגי כולו – איזו הגדרה מספיק חלשה כדי שבמקום לדבר על קבוצה פתוחה, נדבר על קבוצה פתוחה בסיסית?

בפרק להלן על בסיסים נעסוק בשתי הגדרות – הראשונה, בסיס, הגדרה שמנצלת את הסגירות לאיחוד, והשנייה, תת־בסיס, שמנצלת גם את הסגירות לחיתוך. שתי ההגדרות מאפשרות לנו (בהינתן בסיס או תת־בסיס) להשרות טופולוגיה (למעשה, זו הדרך העיקרית בה נגדיר בהמשך טופולוגיות חדשות). בשתיהן, די יהיה להבין כיצד הבסיסים או תתי־הבסיסים נראים כדי לאפיין את הטופולוגיה, ולהפך.

(2.2.1) בסיסים

הגדרה 2.2.1. בסיס היא קבוצה $\mathscr{U}$, כך שלכל $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ ולכל $p \in U_1 \cap U_2$, ישנה U_3 כך ש־$p \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

הגדרה 2.2.2. בסיס למרחב טופולוגי (X,τ) היא קבוצה $\mathscr{U}$ כך ש־:

$$\tau = \left\{ \bigcup \mathscr{X} \;\middle|\; \mathscr{X} \subset \mathscr{U} \right\}$$

מסקנה 2.2.1. בסיס למרחב טופולוגי מכיל קבוצות פתוחות בלבד.

טענה 2.2.1. לכל $\mathscr{U}$ בסיס, הקבוצה $\tau_{\mathscr{U}}$:

$$\tau_{\mathscr{U}} = \left\{ \bigcup \mathscr{X} \;\middle|\; \mathscr{X} \subset \mathscr{U} \right\}$$

היא טופולוגיה על $X = \bigcup \mathscr{U}$, ש־$\mathscr{U}$ בסיס שלה.

הוכחה. ראשית נוכיח ש־$\tau_{\mathscr{U}}$ טופולוגיה.

- היא בבירור סגורה לאיחוד, שכן לכל $U_i \in \tau_{\mathscr{U}}$ בעבור $i \in I$ סודר כלשהו, קיימים $\mathscr{X}_i \subset \mathscr{U}$ כך ש־$\bigcup \mathscr{X}_i = U_i$. נבחין שגם $\mathscr{X} := \bigcup_{i\in I} \mathscr{X}_i \subset \mathscr{U}$ וכן מתקיים ש־:

$$U_1 \cup U_2 = \bigcup_{i\in I} \bigcup \mathscr{X}_i = \bigcup \bigcup_{i\in I} \mathscr{X}_i = \bigcup \mathscr{X}$$

  כלומר מהגדרת $\tau_{\mathscr{U}}$ מתקיים $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_{\mathscr{U}}$.
- עבור $\mathscr{X} = \mathscr{U} \subset \mathscr{U}$ מההגדרה מתקיים $X = \bigcup \mathscr{X}$ ולכן $X \in \tau_{\mathscr{U}}$. כמו כן $\varnothing \subset \mathscr{U}$ ולכן $\varnothing = \bigcup \varnothing \in \tau_{\mathscr{U}}$ גם כן.
- נוכיח שהיא סגורה לחיתוך. לשם כך נוכיח שלכל $U_1, U_2 \in \tau_{\mathscr{U}}$ מתקיים ש־$U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathscr{U}}$, ומכאן ההוכחה לגבי חיתוך סופי כללי תהיה נכונה באינדוקציה.

  משום ש־$U_1, U_2 \in \tau_{\mathscr{U}}$, אז קיימות קבוצות $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ כך ש־$U_1 = \bigcup \mathscr{X}_1$ ו־$U_2 = \bigcup \mathscr{X}_2$. נבחין ש־:

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{X\in\mathscr{X}_1} X \right) \cap \left(\bigcup_{X\in\mathscr{X}_2} X \right) = \bigcup_{\substack{X_1\in\mathscr{X}_1 \\ X_2\in\mathscr{X}_2}} X_1 \cap X_2 = \cdots$$

  נתבונן באותו החיתוך, $X_1 \cap X_2$. לכל $p \in X_1 \cap X_2$ קיימת $U_{1,2,p} \in \tau_{\mathscr{U}}$ כך ש־$p \in U_{1,2,p} \subset X_1 \cap X_2$. ולכן $X_1 \cap X_2 = \bigcup_{p\in X_1\cap X_2} U_{1,2,p}$. נסיק ש־:

$$\cdots = \bigcup_{\substack{X_1\in\mathscr{X}_1 \\ X_2\in\mathscr{X}_2}} \bigcup_{p\in X_1\cap X_2} U_{1,2,p}$$

  זהו איחוד מוכלל של קבוצות $U_{1,2,p} \in \tau_{\mathscr{U}}$ ולכן מסגירות לאיחוד סיימנו. ■

הסיבה העיקרית שבחרנו להגדיר "בסיס" ו"בסיס למרחב טופולוגי" בנפרד, היא שבהינתן בסיס ניתן להשרות טופולוגיה באמצעות 2.2.1.

דוגמה. הטופולוגיה על הישר הממשי מושרת מהבסיס שהוא קבוצת הקטעים הפתוחים.

מסקנה 2.2.2. כאשר משרים טופולוגיה τ מבסיס $\mathscr{U}$, מתקיים ש־$\mathscr{U}$ בסיס של (X,τ). ההוכחה פשוטה.

טענה 2.2.2. בסיס משרה מערכת סביבות בסיסית, באופן הבא: בהינתן בסיס $\mathscr{U}$ של המרחב X, לכל $x \in X$ נגדיר:

$$\mathscr{U}_x := \{ U \in \mathscr{U} \mid x \in U \}$$

ונוכיח ש־$\mathscr{U}_x$ מערכת סביבות בסיסית.

הוכחה. נוכיח לפי ההגדרה של מערכת סביבות בסיסית.

- אכן, כל $U \in \mathscr{U}_x$ סביבה של x כל כי $U \in \mathscr{U}_x$ פתוחה ולכן מכילה קבוצה פתוחה (את עצמה) וכן $x \in U \subset U$.
- תהי $x \in V$ קבוצה פתוחה כלשהי. נוכיח שקיים $U \subset V$ $\mathscr{U} \ni$. נבחין ש־$x \in V = \bigcup \mathscr{X}$ כאשר $\mathscr{X} \subset \mathscr{U}$. לכן קיים $U \in \mathscr{X}$ כך ש־$x \in U$ (הגדרת איחוד מוכלל) דהיינו $x \in U \in \mathscr{U}$ וכן $U \subset V$ ולכן מקיימת את הנדרש.

■

טענה 2.2.3 (לטופולוגיות יש אינפימום). תהי X קבוצה. נסמן ב־$\mathcal{T}$ את קבוצת הטופולוגיות על X. אז לכל $(\tau_i)_{i\in I}$ כך ש־$\tau_i \in \mathcal{T}$ קבוצה של טופולוגיות, קיים להם חסם תחתון מקסימלי $\inf(\tau_i)_{i\in I}$.

הוכחה. נתבונן בקבוצה:

$$\tau := \bigcap_{i\in I} \tau_i$$

נוכיח שהיא טופולוגיה המקיימת את הנדרש. מקסימליות ברורה מהגדרת החיתוך. נראה שהיא טופולוגיה.

- סגירות לאיחוד: יהי $\mathscr{U} \subset \tau$. אז לכל $U \in \mathscr{U}$ מתקיים ש־$U \in \bigcap_{i\in I} \tau_i = \tau$ ולכן כל $x \in U$ מקיים $x \in \tau$. סה"כ גם כל $x \in \bigcup \mathscr{U}$ מקיים $x \in \tau$, ומהגדרת חיתוך מכאן מתקיים ש־$\bigcup \mathscr{U} \in \tau$ כנדרש.
- סגירות לחיתוך: יהי אוסף בן־מנייה של קבוצות $(U_i)_{i=1}^n$ כך ש־$U \in \tau$. לכל U_i קיימות $U_{i,j} \in \tau_i$ כך ש־$U_i = \bigcup_{j\in I} U_{i,j}$ אז:

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n \bigcap_{j\in I} U_{i,j} = \bigcap_{j\in I} \underbrace{\bigcap_{i=1}^n U_{i,j}}_{X_j}$$

  נבחין ש־$X_j \in \tau_j$ כי τ_j סגורה לחיתוך סופי. ואז מדובר בחיתוך של קבוצות שנמצאות ב־τ_j ומהגדרת τ מתקיים $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ כנדרש.
- משום ש־$X, \varnothing \in \tau_i$ לכל $i \in I$ אז $X, \varnothing \in \bigcap \tau_i = \tau$ כנדרש. ■

(2.2.2) תתי־בסיסים

הגדרה 2.2.3. תת־בסיס

טענה 2.2.4. תת־בסיס יוצר טופולוגיה

טענה 2.2.5. יש לטופולוגיות אינפימום

מסקנה 2.2.3. קבוצת הטופולוגיות על קבוצה X הינה סריג.

2.3 ∼ רשתות

2.4 ∼ פונקציות רציפות

הגדרה 2.4.1. רציפות בנקודה

הגדרה 2.4.2. רציפות

טענה 2.4.1. שקילויות לרציפות כולל שקול לרציפות בחלוקה של הטווח

הגדרה 2.4.3. פונקציה פתוחה וסגורה

הגדרה 2.4.4. הומיאומורפיזם

הגדרה 2.4.5. תכונה טופולוגית

טענה 2.4.2. שקילויות של הומיאומורפיזמים

הגדרה 2.4.6. שיכון

טענה 2.4.3. הומיאומורפיזם זה מונד

הערה 4. אם A משוכן ב־B ו־B משוכן ב־A, לאו דווקא $A \cong B$.

הוכחה. נבחין ש־$I \hookrightarrow \mathbb{R}$ ע"י פונקציית הזהות. עוד נבחין ש־$R \hookrightarrow I$ ע"י הפונקציה $\arctan x$ (שהיא הומיאומורפיזם $\mathbb{R} \to (0,1) \subset [0,1]$). עם זאת, $I \ncong \mathbb{R}$; הוכחה נראה מאוחר יותר כאשר נוכיח שתמונה רציפה של קבוצה קומפקטית הינה קומפקטית, ו־$\mathbb{R}$ איננו קומפקטי. ■

המשך בעמוד הבא

3 Building New Spaces

3.1 ∼ הטופולוגיה החלשה והטופולוגיה החזקה

בתת־נושא זה נציג שתי הגדרות שאומנם תחילה יראו קצת מוזרות, אך יעזרו לנו להבין לעומק אחר־כך את הנושא של טופולוגיית המכפלה וטופולוגיית המנה.

הגדרה 3.1.1. תהי X קבוצה ויהיו $(Y_i)_{i\in I}$ משפחת מרחבים טופולוגיים כלשהם. תהי $(f_i)_{i\in I}$ משפחת פונקציות $f_i\colon X\to Y_i$. אז הטופולוגיה החלשה היא הטופולוגיה τ המינימלית (גסה) ביותר כך ש־$f_i\colon (X,\tau)\to Y$ פונקציות רציפות.

הערה 5. באנגלית, initial/induced/weak/limit/projective topology.

הגדרה 3.1.2. תהי X קבוצה ויהיו $(Y_i)_{i\in I}$ משפחת מרחבים טופולוגיים כלשהם. תהי $(f_i)_{i\in I}$ משפחת פונקציות $f_i\colon Y_i\to X$. אז הטופולוגיה החזקה היא הטופולוגיה τ המקסימלית (עדינה) ביותר כך ש־$f_i\colon Y\to (X,\tau)$ פונקציות רציפות.

הערה 6. באנגלית, final/coinduced/strong/colimit/inductive topology.

משפט 3.1.1 (תכונה אוניברסלית של הטופולוגיה החלשה)**.** יהי Z מרחב טופולוגי, X קבוצה. אז ל־X יש את הטופולוגיה החלשה המושרה מ־$f_i\colon X\to Y_i$ אמ"מ מתקיים שכל פונקציה $g\colon Z\to X$ רציפה אמ"מ $f_i\circ g$ רציפה:

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

רק

משפט 3.1.2 (תכונה אוניברסלית של הטופולוגיה החזקה)**.** יהי Z מרחב טופולוגי, X קבוצה. אז ל־X יש את הטופולוגיה החזקה המושרה מ־$f_i\colon Y_i\to X$ אמ"מ מתקיים שכל פונקציה $g\colon X\to Z$ רציפה אמ"מ $g\circ f_i$ רציפה:

$$\begin{tikzcd} Y_i & X \arrow[l, "f_i"'] \\ & Z \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "g\circ f_i"] \end{tikzcd}$$

כאן יש לכסות את הנושאים: [תחילה בעבור טופולוגיה חלשה, ואז לנסח את הדואלים ללא הוכחה]

- בטופולוגיה חלשה הevaluation map היא שיכון אמ"מ משפחת הפונקציות מפרידה נקודות.
- המשפט המצחיק על separting points from closed sets שגם מופיע בויקיפדיה וב־8B בווילארד

3.2 ∼ טופולוגיית המכפלה

הגדרה 3.2.1. תהי $(Y_i)_{i\in I}$ משפחת פונקציות. נגדיר את הכפל הקרטזי (המוכלל) שלהם להיות:

$$\prod_{i\in I} Y_i := \left\{ f(i)\in Y_i \;\middle|\; f\colon I\to \bigcup_{i\in I} Y_i \right\}$$

כאשר ההיטלים $(\pi_i)_{i\in I}$ יהיו:

$$\pi_i\colon \prod_{i\in I} Y_i \to Y_i \qquad\qquad \pi_i(x) := x(i)$$

נבחין שהעובדה שהקבוצה לעיל לא ריקה לכל משפחה שקולה לאקסיומת הבחירה.

הגדרה 3.2.2. בהינתן $(Y_i)_{i\in I}$ אוסף מרחבים טופולוגיים, אז טופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה המושרה מההיטלים.

הגדרה 3.2.3. טופולוגיית טיכונוף

טענה 3.2.1. בטופולוגיית טיכונוף ההיטלים רציפים ופתוחים.

משפט 3.2.2. טופולוגיית המכפלה שווה לטופולוגיית טיכונוף.

הגדרה 3.2.4. טופולוגיית קופסא

טענה 3.2.3. טופולוגיית הקופסא עדינה יותר מטופולוגיית המכפלה

3.3 ~ טופולוגיית המנה

המשך בעמוד הבא

4 Countability Axioms . . . . . .

4.1 ∼ מניה שניה ומניה ראשונה

(4.1.1) **מניה ראשונה**

(4.1.2) **מניה שנייה**

4.2 ∼ ספרביליות ולינדוף

המשך בעמוד הבא

5 Separation Axoims

5.1 ~ מבוא

[להרחיב את $R0, R1$ ל־$R2 - R3.5$, ולהבהיר שאלו לא סימונים מקובלים]

5.2 ~ אקסיומות הפרדה ראשונות

5.3 ~ מרחבי טיכונוף

(5.3.1) משפטים בסיסיים

(5.3.2) משפט השיכון של טיכונוף

5.4 ~ מרחבים רגולריס

5.5 ~ מרחבים נורמלייס

(5.5.1) משפטים בסיסיים

(5.5.2) הלמה של אוריסון

הלמה של אוריסון מספקת לנו הוכחה לפיה $R3.5$ מתקים אמ"מ $R3$. לאחר מכן, נרחיב אותה באמצעות משפט ההרחבה של טיצה. בניית הפונקציה המפרידה תיעשה באמצעות לקיחת גבול של סדרת פונקציות – דבר שאומנם הגדרנו בחדו"א 2א, אך לא בעבור מרחבים טופולוגיים כלליים.

הגדרה 5.5.1. התכנסות נקודתית

הגדרה 5.5.2. התכנסות במ"ש

משפט 5.5.1 (הלמה של אוריסון)**.** ...

(5.5.3) מרחבים נורמלים לחלוטין ובאופן מושלם

הגדרה, G_δ, F_σ וכו'.

(5.5.4) משפט ההרחבה של טיצה

המשך בעמוד הבא

6 Connectedness

6.1 ~ קשירות רגילה

6.2 ~ קשירות מסילתית

6.3 ~ רכיבי קשירות

המשך בעמוד הבא

7 Compactness

7.1 ~ מרחבים קומפקטיים

(7.1.1) מבוא

לכסות:

- קומפקטיות ואיפיון באמצעות רשתות
- קומפקטיות סדרתית
- תמונה של קבוצה קומפקטית
- משפטים על מרחב האוסדורף קומפקטי

(7.1.2) משפט טיכונוף

7.2 ~ מרחבים קומפקטיים מקומית

7.3 ~ קומפקטיפיקציה

(7.3.1) קומפקטיפיקציה חד־נקודתית (אלכסנדרוב)

(7.3.2) קומפקטיפיקצית סטון־צ'ך

המשך בעמוד הבא

8 Supplementary Material

מבין כל הנושאים שבחרתי לברבר עליהם בלי סיבה, יש כל מיני נושאים נוספים שמהווים בסיס חשוב לנושאים אחרים המתבססים על טופולוגיה במתמטיקה.

8.1 ∼ פרה־קומפקטיות

8.2 ∼ קבוצת קנטור

8.3 ∼ שקילות הומוטופית

8.4 ∼ מרחב אוקלידי מקומית

8.5 ∼ מרחבי פונקציות

המשך בעמוד הבא

9 Metric Spaces from a Topological Prespective

9.1 ~ מרחבים מטריים ושמורות טופולוגיות

באופן לא מפתיע, מרחבים מטריים מקיימים את כל אקסיומות ההפרדה. לפי משפט [...] די יהיה להראות שמרחבים מטריים הם רגולוריים וכן שקבוצות פתוחות הן G_δ כדי להוכיח את T_6 (וכל התוצאות הנובעות ממנו). תכונה חשובה אחרת של מרחבים מטריים (תוצאה ישירה של צפיפות $\mathbb{Q}$ ב־$\mathbb{R}$) היא העובדה שכולם מקיימים את אקסיומת המנייה הראשונה, ולכן התכנסות סדרות ורשתות שקולה לחלוטין.

9.2 ~ מרחב מטרי קומפקטי

(9.2.1) חסימות

(9.2.2) משפט היינה־בורל

במקרה הספציפי של מרחב אוקלידי, מתקיימים אף תנאים יותר חזקים.

9.3 ~ מרחבים מטרייזביליים

(9.3.1) משפט המטרייזביליות של אוריסון

(9.3.2) משפט המטרייזביליות של נגטה־סמירוב

9.4 ~ משפט הקטגוריה של בייר

9.5 ~ מרחבים נורמיים

9.6 ~ תוצאות נוספות

(9.6.1) משפט נקודות השבת של בנך

(9.6.2) קצת משפטים איזוטריים

.....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד