יתר החומרים (שלא את כולם אני מעלה לדרייב), הגרסה האחרונה של דף הנוסחאות, כמו כן קבצי המקור ל־pdf־ים, יחדיו עם סיכומים לחדו"א (וקורסים נוספים), זמינים בגיטהאב שלי כאן.

דף הנוסחאות זמין תחת רישיון GPL version 3 – בקצרה, מותר להשתמש בו לכל שימוש, אך שינויים לקוד המקור חייבים להיות מופצים תחת אותו הרישיון. זו כמובן לא עצה משפטית, ואני לא באמת עומד לתבוע אף אחד בנוגע לקבצים הללו (גם זו לא עצה/הבטחה משפטית).

Shit Cheat Sheet (v1) ∼ Calculus 2A ∼ TAU

Shahar Perets

14.4.2025 → 30.6.2026

(1) עקומות ב־$\mathbb{R}^n$

הגדרה 1. בהינתן $a, b \in \mathbb{R}$ וכן $a < b$, קטע סגור יוגדר להיות $[a,b] := \{c \mid a \le c \le b\}$

תרגיל 1. בהינתן קטע סגור, ניתן לעבור עליו בקצב אחיד. רמז:

$$\{c \mid a \le c \le b\} = \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \le \lambda \le 1\}$$

הגדרה 2. חֲלוּקָה של קטע $[a,b]$ (באנגלית – partition) היא קבוצה של $n+1$ נקודות $\Pi = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$ כאשר $n \in \mathbb{N}$, כך ש־$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

מכאן, שכמות הנקודות בחלוקה היא סופית.

הגדרה 3. בהינתן חלוקה, תת־הקטע ה־i של החלוקה הוא $[x_{i-1}, x_i]$.

סימון 1. אורכו של תת־הקטע ה־i של החלוקה הוא $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

הגדרה 4. ממד העדינות של החלוקה הוא $\lambda(\Pi) := \max_i \Delta x_i$.

הגדרה 5. עידון Π של חלוקה Π' כך ש־$\Pi' \supset \Pi$.

תרגיל 2. אם $\Pi' \supset \Pi$ אז $\lambda(\Pi') \le \lambda(\Pi)$.

תרגיל 3. $|a-b| = |a-c| + |c-b|$ אמ"מ $a \le c \le b \vee a \ge c \ge b$

$$d(p,q) := |o - q| := \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$$

תרגיל 4.

$$|x_p - x_q| + |y_p - y_q| \ge |p - q| \ge \begin{cases} |x_p - x_q| \\ |y_p - y_q| \end{cases}$$

תרגיל 5.

$$|p - q| = |p - R| + |R - q| \iff R \in [p,q]$$

הגדרה 6. עקוס/עקומה/מסילה היא פונקציה רציפה $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

הגדרה 7 (הגדרה ראשונה לרציפות). בהינתן $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, אפשר לפרק את γ להיות $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (פורמלית: $x = \pi_1 \circ \gamma, y = \pi_2 \circ \gamma$), ואז להגדיר ש־$\gamma$ רציפה אמ"מ x, y רציפות (במובן שהגדרנו בחדו"א 1א).

הגדרה 8 (הגדרה שנייה לרציפות). לכל $t \in [a,b]$, ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta = \delta_{t,\varepsilon} > 0$ כך שלכל $s \in [a,b]$, אם $|t - s| < \delta$ אז $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon$.

הגדרה 9. מסילה לינארית מ־$p \in \mathbb{R}^2$ ל־$q \in \mathbb{R}^2$ היא המסילה $\gamma = \varphi \circ h$, כאשר:

$$[a,b] \xrightarrow{h} [0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$$

$$c \mapsto \frac{c-a}{b-a} = \lambda \longrightarrow (1-\lambda)p + \lambda q$$

הגדרה 10. מסילה פוליגונלית דרך $p_0, p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}^2$ היא $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ כך שקיימת חלוקה $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ כך שלכל i מתקיים ש־$\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$ היא מסילה לינארית מ־$p_{i-1} = a$ ל־$p_i = b$.

סימון 2. למסילה כלשהי $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ולחלוקה $\Pi = \{x_0 \dots x_n\}$ של הקטע $[a,b]$, נסמן:

$$\ell(\gamma, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|$$

הגדרה 11. מסילה $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ היא בעלת אורך סופי אם הקבוצה:

$$\{\ell(\gamma, \Pi) \mid \text{חלוקה של } [a,b] \ \Pi\}$$

חסומה.

הגדרה 12. אורך העקומה הוא:

$$L(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, \Pi) \mid \text{חלוקה של } [a,b] \ \Pi\}$$

משפט 1. γ היא עקומה בעלת אורך סופי, וכן $2 \le L(\gamma) \le 4$.

הוכחה. מספיק להראות:

1. קיימת חלוקה Π של $[-1,1]$ עם $\ell(\gamma, \Pi) = 3$
2. לכל חלוקה Π של $[-1,1]$ עם $\ell(\gamma, \Pi) \le 4$

פרטים יעלו למודל. ■

הגדרה 13. $\pi := L(\gamma)$ כאשר γ העקומה המוגדרת לעיל.

אינטגרלי רימן

2.1 ∼ הגדרות בסיסיות

הגדרה 14. חלוקה מתויגת (באנגלית tagged partition, ברשימות "חלוקה+נקודות מתאימות") של הקטע $[a,b]$ היא זוג $(\Pi,\{t_i\})$ כאשר $\Pi\colon a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ חלוקה של הקטע $[a,b]$, וכן תיוג $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ לכל אחד מ־$i\in[n]$ קטעי החלוקה. אז סכום רימן של הפונקציה $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ביחס לחלוקה המתויגת $\{t_i\}_{i=1}^n$ הוא:

$$S(f,\pi,\{t_i\}):=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

הגדרה 15. נתונה פונקציה $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש־$f$ אינטגרבילית רימן עם אינטגרל שווה ל־I אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה מתויגת $(\Pi,\{t_i\})$ של $[a,b]$, עם מדד עדינות $\lambda(\Pi)<\delta$, מתקיים:

$$|S(f,\Pi,\{t_i\})-I|<\varepsilon$$

אם זה קורה, נאמר ש־I האינטגרל המסויים של f בקטע $[a,b]$.

סימון 3. מסמנים $\int_a^b f=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I$

הגדרה 16. הפונקציה f נקראת אינטגרבילית אם קיים I כך ש־$\int_a^b f=I$.

הגדרה 17. לפונקציות ממשיות $f,F\colon I\to\mathbb{R}$ על קטע $I\subset\mathbb{R}$, אז F נקראת פונקציה קדומה של f על קטע[1] I אם $\forall x\in I\colon F'(x)=f(x)$, כאשר בקצוות הקטע (אם יש כאלו) מדובר על נגזרת חד־כיוונית.

הגדרה 18. האינטגרל הלא מסויים של f הוא **קבוצת** הפונקציות הקדומות של f.

משפט 2. $\int_a^b f=5(b-a)$

משפט 3. פונקציית דיריכלה איננה אינטגרבילית, על אף תת־קטע סגור $[a,b]$ ($a<b$).

סימון 4. $R([a,b]):=\{f\colon[a,b]\to\mathbb{R}\mid f\text{אינטגרבילית}\}$

2.2 ∼ דרבו

הגדרה 19. תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. תהי $\Pi=\{x_i\}_{i=1}^n$ חלוקה של $[a,b]$, כלומר $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. לכל i, נגדיר:

$$M_i:=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\qquad m_i:=\inf_{[xi-1,x_i]}f$$

הגדרה 20. בהינתן ההנחות מההגדרה הקודמת, נגדיר את סכום דרבו העליון וסכום דרבו התחתון להיות:

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i\qquad \underline{\Sigma}(f,\Pi):=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$$

[1] לשימושנו, קבוצה סגורה.

משפט 4. תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, ו־Π חלוקה של $[a,b]$. אז לכל תיוג $\{t_i\}$ של החלוקה Π, מתקיים:

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi),S(f,\Pi,\{t_i\})\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$$

למה 1. תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, וכן Π חלוקה של $[a,b]$. אז:

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup\{S(f,\Pi,\{t_i\})\mid \Pi\text{ תיוג של }\{t_i\}\}$$
$$\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf\{S(f,\Pi,\{t_i\})\mid \Pi\text{ תיוג של }\{t_i\}\}$$

משפט 5 (מונוטוניות של סכומי דרבו ביחס לעידון החלוקות)**.** תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. יהיו שתי חלוקות $\Pi_1\subset\Pi_2$ חלוקות של $[a,b]$. אז:

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)$$

מסקנה 1. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 של $[a,b]$, תמיד $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

הגדרה 21. תהי $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. נגדיר:

- אינטגרל דרבו עליון:
$$\overline{I}(f):=\inf\{\overline{\Sigma}(f,\Pi)\mid \Pi\text{ חלוקה של }[a,b]\}$$
- אינטגרל דרבו תחתון:
$$\overline{I}(f):=\sup\{\underline{\Sigma}(f,\Pi)\mid \Pi\text{ חלוקה של }[a,b]\}$$

הגדרה 22. f אינטגרבילית דרבו אם $\overline{I}(f)=\overline{I}(f)$. אם זה קורה, $I(f)=\overline{I}(f)=\overline{I}(f)$ נקרא אינטגרל דרבו.

משפט 6. עבור $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, f אינטגרבילית רימן אמ"מ f חסומה וגם f אינטגרבילית דרבו. אם תנאים אלו מתקיימים, אז $\int_a^b f=I(f)$.

הערה 1. אינטגרל דרבו העליון והתחתון לא מוגדרים במידה ו־f איננה חסומה, ולכן זו תמיד תתווסף כהנחה למשפטים הדורשים אינטגרל דרבו עליון או תחתון.

משפט 7 (קריטריון דרבו)**.** $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אמ"מ f חסומה וגם לכל $\varepsilon>0$, כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$, אם $\lambda(\Pi)<\delta$ אז $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$.

משפט 8 (קריטריון דרבו המשופר)**.** $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אמ"מ f חסומה וגם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ עם $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$.

תרגיל 6 (תרגיל פתיחה)**.** תהא פונקציה $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ומספר $I\in\mathbb{R}$, וכן סדרת חלוקות מתויגות $(\Pi_k,\{t^{(k)}{}_{\{t_i\}}\})$ של $[a,b]$ שמדדי העדינות שלהן מקיימים $\lambda(\Pi_k)\xrightarrow{k\to\infty}0$. הוכיחו שאם $\int_a^b f=I$ אז $S(f,\Pi_k,\{t_i^{(k)}\})\xrightarrow{k\to\infty}0$.

משפט 9. נתונה פונקציה ממשית $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. עבור פונקציה כזו, התנאים הבאים שקולים:

1. קיים $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה מתויגת $(\Pi,\{t_i\})$ של $[a,b]$, אם $\lambda(\Pi)<\delta$, אז $|S(f,\Pi,\{t_i\})-I|<\varepsilon$.

2. הפונקציה f חסומה, וגם לכל $\varepsilon > 0$, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$, אם $\lambda(\Pi) < \lambda$, אז $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$.

3. f חסומה, וגם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש־$\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$

4. f חסומה, וגם $\overline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

הגדרה 23. בהינתן $f\colon J \to \mathbb{R}$ חסומה, תנודה של f ב־J היא $\omega(f,J) := \sup_J f - \inf_J f$

תרגיל 7. הוכיחו כי

$$\omega(f) = \sup_{x,y\in J}(f(x) - f(y)) = \sup\{|f(x) - f(y) \mid x,y \in J|\}$$

תרגיל 8. עבור J קטע פתוח, $x_0 \in J$, אז f רציפה ב־x_0 אמ"מ $\omega(f,\ (x_0-\delta, x_0+\delta)) \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.

הגדרה 24. בהינתן $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה, ו־Π חלוקה של $[a,b]$ נגדיר את תנודת דרבו של f ביחס ל־Π (או התנודה הכוללת של f ביחס ל־Π):

$$\omega(f,\Pi) := \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$$

תרגיל 9. הוכיחו כי:

$$\omega(f,\Pi) = \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi)$$

למה 2. בהינתן Π, Π' חלוקות של $[a,b]$, כך ש־$\Pi' = \Pi \cup \{p\}$, מתקיים:

$$0 \le \omega(f,\Pi) - \omega(f,\Pi') \le \lambda(\Pi)\omega(f,[a,b])$$

למה 3. נתונה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה וחלוקות Π, Π' של $[a,b]$ כך ש־Π' מתקבלת מ־Π ע"י הוספה של m_0 נקודות חלוקה. אז:

$$0 \le \omega(f,\Pi) - \omega(f,\Pi') \le m_0 \cdot \lambda(\Pi)\ \omega(f,[a,b]) \tag{1}$$
$$0 \le \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \overline{\Sigma}(f,\Pi') \le m_0 \cdot \lambda(\Pi)\ \omega(f,[a,b]) \tag{2}$$
$$0 \le \underline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi') \le m_0 \cdot \lambda(\Pi)\ \omega(f,[a,b]) \tag{3}$$

משפט 10. תהי $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה. אז לכל $\varepsilon < 0$ קיימת $\delta > 0$, כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$, אם $\lambda(\Pi) < \delta$ אז:

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon \le \overline{I}(f) \qquad \overline{I}(f) \le \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon$$

2.3 ~ קריטריוני אינטגרביליות נוספים

משפט 11. תהי $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז f אינטגרבילית.

משפט 12. תהי $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית. אז f אינטגרבילית.

תרגיל 10. הוכיחו בעבור f יורדת.

משפט 13 (איחוד קטעים זרים)**.** נתונה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, וכן $a < b < c$. נניח ש־f אינטגרבילית על $[a,b]$ וגם עם $[b,c]$. אז f אינטגרבילית אז $[a,c]$.

משפט 14 (תת־קטע)**.** נתונה $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית, ו־$a < b < c$. אז f אינטגרבילית גם על $[a,b]$ וגם על $[a,c]$.

משפט 15 (כל הקטעים השמאליים)**.** נתונה $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ **חסומה** (חשוב). נניח שלכל $a < b < c$, מתקיים ש־$f|_{[a,b]}$ אינטגרבילית. אז f אינטגרבילית.

הערה 2. שימו לב, f לא בהכרח חסומה אפילו אם היא אינטגרבילית על כל הקטעים השמאליים. לדוגמה, $\frac{1}{x^2}$.

משפט 16. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ חסומה, ו־$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ חלוקה. נניח שלכל i מתקיים ש־$f|_{(x_{i-1},x_i)}$ מונוטונית או רציפה. אז f אינטגרבילית.

תרגיל 11. נתונות $f,g\colon J \to \mathbb{R}$ חסומות כאשר J קבוצה כלשהי. אז:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon \omega(\lambda f, J) = |\lambda|\,\omega(f,J)$.
2. $\omega(f+g,J) \le \omega(f,J) + \omega(g,J)$
3. $\omega(|f|\,,J) \le \omega(f,J)$
4. $|f| \le M \implies \omega(f^2,J) \le 2M\omega(f,J)$
5. $0 < \alpha \le g \implies \omega\left(\frac{1}{g},J\right) \le \frac{1}{\alpha^2}\omega(g,J)$

מסקנה 2 (מסקנה מהתרגיל)**.** משום שתנודות מהגדרתן הן אי־שליליות, נבחין בסקווי־לינארית של אוסילציית דרבו:

1. $\omega(\lambda f,\Pi) = |\lambda|\,\omega(f,\Pi)$
2. $\omega(f+g,\Pi) \le \omega(f,\Pi) + \omega(g,\Pi)$
3. $\omega(|f|\,,\Pi) \le \omega(f,\Pi)$
4. $|f| \le M \implies \omega(f^2,\Pi) \le 2M\omega(f,\Pi)$
5. $0 < \alpha < g \implies \omega\left(\frac{1}{g},\Pi\right) \le \frac{1}{\alpha^2}\omega(g,\Pi)$

משפט 17 (אריתמטיקת אינטגרביליות)**.** יהי זוג פונקציות $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ וכן $\lambda \in \mathbb{R}$. אם f,g אינטגרביליות, אז $\lambda f, f+g, |f|\,, f^2, f\cdot g$ אינטגרביליות כולן. יתר על כן, אם $g \ge \alpha > 0$ אז $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית.

משפט 18. נתונה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ו־$I \in \mathbb{R}$. נתונה סדרת חלוקות מתוייגות $(\Pi^{(k)}, \{t_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k})$ של $[a,b]$ שמקיימות $\lambda(\Pi^{(k)}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. יתר על כן, נניח שהיא אינטגרבילית. אז $\int_a^b f = I$ אמ"מ $S(f,\Pi^{(k)}), \{t_i\}^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} I$.

תרגיל 12. נתונים קטע $[a,b]$, $\delta > 0$ ו־$c_1 \dots c_m \in [a,b]$. מצאו חלוקה Π של $[a,b]$ עם מדד עדינות $\lambda(\Pi) < \delta$ כך ש־$c_1 \dots c_m \in \Pi$.

משפט 19 (אדטיביות האינטגרל ביחס לקטע האינטגרציה)**.** נתונים $a < b < c$ ו־$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. הראינו ש־$f$ אינטגרבילית על $[a,c]$ אמ"מ f אינטגרבילית על $[a,b]$ וכן אינטגרבילית על $[b,c]$. אז:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

הגדרה 25. נבצע את ההגדרות הבאות בהינתן $a < b$:

$$\int_a^a f := 0 \qquad\qquad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

משפט 20. נתון קטע J ופונקציה $f\colon J \to \mathbb{R}$. נניח שלכל קטע סגור וחסום $I \subset J$ מתקיים $f|_I = I \to \mathbb{R}$. אז לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

הגדרה 26. האינטגרנד זו הפונקציה המאֻסכּמֶת.

משפט 21 (לינאריות האינטגרל ביחס לאינטגרנד)**.** נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, ו־$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. נניח f, g אינטגרביליות רימן. הוכחנו $\alpha f + \beta g$ אינטגרבילית. אז:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b f$$

(גם לקטעים מנוונים או הפוכים)

משפט 22 (מונוטוניות האינטגרל)**.** נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. נניח $f \le g$. אז:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 23 (חסמים שימושיים)**.** תהא $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נניח $n \le f \le M$. אז:

1. $$n(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$
2. $$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le (b-a) \cdot \sup_{[a,b]} |f|$$

משפט 24 (רציפות האינטגרל ביחס לגבולות האינטגרציה)**.** יהי $I \in [\zeta, \xi]$ (בחיי שלא אני זה שבחר את הסימון הזה וזו החלטה של המרצה) ותהי $f\colon I \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. נקבע $\alpha \in I$. נגדיר $F\colon I \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אז F רציפה.

מסקנה 3. אם $x \in I$ נקודה פנימית או קצה שמאלית, אז f רציפה מימין ב־x.

2.4 ∼ משפטי ערך ביניים

משפט 25. נתונה פונקציה $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה על קטע סגור. אז קיימת $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(אפשר לחשוב על זה כעל הערך הממוצע של f בקטע)

משפט 26 (משפט ערך הביניים הראשון לאינטגרל מסוים)**.** נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח ש־:

- f רציפה (ולכן אינטגרבילית)
- g אינטגרבילית ו־$g \ge 0$

אז קיים $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

למה 4 (הלמה של בונה)**.** נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

- **גרסה 1:** נניח f מונוטונית, $g \ge 0$ ואינטגרבילית.
- **גרסה 2:** נניח g רציפה, ו־f גזירה ברציפות כך ש־$f' \ge 0$

אז, קיימת נקודת ביניים $a \le x_0 \le b$ כך ש־:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^{x_0} g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_{x_0}^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

סימון 5. הסימון $C^i(A)$ מסמן את קבוצת הפונקציות הגזירות ברציפות i פעמים. $C^\infty(A)$ מסמן פונקציה גזירה אינסוף פעמיים בכל A, ו־$C(A)$ את קבוצת הפונקציות הרציפות.

הגדרה 27. "עצרת בדילוגים" (אנ' double factorial): עבור $k \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ נגדיר $k!! = 2 \cdot 4 \cdots (k-2) \cdot k$, בעבור $k \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ נגדיר $k!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (k-2) \cdot k$, ועבור $k = -1, 0$ נגדיר $k!! = 0$.

משפט 27.

$$I_m := \int_0^{2\pi} \sin^m x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

משפט 28 (Wallis)**.** הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

. . . . . (3) . . . . . .

אינטגרל לא אמיתי

3.1 ∼ האינטגרל הלא אמיתי ותכונותיו

הגדרה 28. נתונה $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ונתון $I \in \mathbb{R}$. נניח f אינטגרבילית רימן על כל תת־קטע סגור. נאמר ש"האינטגרל הלא אמיתי של f מתכנס ל־I, ונרשום $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = I$, אם:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

הגדרה 29. נתונה $f\colon [a,\infty)$ אינטגרבילית רימן על כל תת־קטע סופי. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי שלה מתבדר לאינסוף ונרשום $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ אם:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

הגדרה 30. נתונה $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתון $I\in\mathbb{R}$. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי של f מתכנס ל־I אם $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x, \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנסים, ומתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = I$$

משפט 29 (לינאריות בפונקציה המאוסכמת). בהינתן $f,g\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל ת"ק סגור. יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. אז:

$$\int_a^\infty (\alpha f+\beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 30 (אדטיביות). בקטע האינטגרציה: נתונה $f\colon[a,\infty)$ אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור. יהיו $a<b<\infty$. אז:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

כלומר: $\int_a^\infty$ מתכנס אמ"מ $\int_b^\infty$ מתכנס, ואם הם מתכנסים, אז מתקיים השוויון לעיל.

משפט 31 (מונוטוניות). נתונות שתי פונקציות $f,g\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל ת"ק סגור. נניח $f\le g$. אז:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

במובן הרחב (שימו לב שבמקרה בו האינטגרל של g מתבדר לאינסוף, אי אפשר אפילו לדעת אם האינטגרל של f מתבדר מתבדר (לאינסוף, לא לאינסוף, לא לשום מקום, סתם עושה שטויות) או לא)

משפט 32 (ניוטון לייבניץ לאינטגרלים לא אמיתיים). נתונות $f,G\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ ונניח ש־F גזירה ברציפות, $F'=f$. נניח f אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור. אז:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\lim_{b\to\infty} F(b)\right) - F(a)$$

במובן הרחב.

משפט 33 (שינוי משתנה). יהיו:

$$[\alpha,\eta) \xrightarrow[\text{מונוטונית עולה חלש}]{\varphi} [a,\infty) \xrightarrow[\text{רציפה}]{f} \mathbb{R}$$

(יש גרסה יותר כללית, למעשה η יכול להיות אינסופי) ונדרוש:

$$\varphi(\alpha)=a,\ \lim_{b\to\eta^-}\varphi(b)=\infty$$

אז:

$$\int_\alpha^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

כלומר:

- האינטגרל הלא אמיתי באגף ימין מתכנס אמ"מ האינטגרל הלא אמיתי באגף שמאל מתכנס, ואם זה קורה, אז מתקיים השוויון.
- אגף שמאל מתבדר ל־∞ אמ"מ אגף ימין מתבדר ל־∞
- כנ"ל ל־$-\infty$

משפט 34 (אינטגרציה לחלקים לאינטגרלים לא אמיתיים). יהיו $f,g\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירות ברציפות [הנחה יותר חזקה ממה שבפועל צריך] אז:

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

כלומר: אם שני הגבולות מימין מתכנסים, אז הגבול משמאל מתכנס ומתקיים השוויון (בגבול: בהצבה יש לנו גבול, ואינטגרל לא אמיתי הוא גבול)

משפט 35 (התכנסות מונוטונית). נתונה $g\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית חלש.

- אם g עולה וחסומה, הגבול מתכנס לסופרמום $\lim_{b\to\omega^-} g(b) = \sup_{[a,\omega)} g$.
- אם g עולה אך לא חסומה, הגבול מתבדר לאינסוף $\lim_{b\to\omega^-} g(b)=\infty$
- אם g יורדת וחסומה, אז הגבול מתכנס לאינפימום $\lim_{b\to\omega^-} g(b) = \inf_{[a,\omega)} g$
- אם g יורדת אך איננה חסומה, אז הגבול מתבדר למינוס אינסוף $\lim_{b\to\omega^-} g(b) = -\infty$

משפט 36 (סנדוויץ'). נתונות $f,g,h\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$. נניח $f\le g\le h$. אז:

$$\left(\lim_{b\to\omega^-} f(b) = 17 \wedge \lim_{b\to\omega^-} = 17\right) \implies \lim_{b\to\omega^-} g(b) = 17$$

משפט 37. תהי $g\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$ חסומה $m\le g\le M$. נגדיר $h,H\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$h(b) = \int_{[b,\omega)} g(x) \qquad H(b) = \sup_{[b,\omega)} g(x)$$

אז h,H מוגדרות היטב (הסופרמום והאינפימום קיימים), מקיימות $m\le h\le H\le M$, נוסף על כך h עולה חלש ו־H עולה חלש.

הגדרה 31. נתונה $g\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$. אז:

$$\limsup_{b\to\omega^-} g(x) = \overline{\lim_{x\to\omega^-}} g(x) := \lim_{b\to\omega^-} \underbrace{\sup_{[b,\omega)} g(b)}_{H(b)} = \inf_{b\to[a,\omega)} \sup_{[a,\omega)} g$$

באופן דומה לגבול תחתון

משפט 38. נתונה $g\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$ חסומה $m\le g\le M$. אז $\lim_{x\to\omega^-} g(x)$ מתכנס ל־I אמ"מ $\underline{\lim}_{x\to\omega^-} g(x) = I \wedge \overline{\lim}_{x\to\omega^-} g(x) = I$.

3.2 ~ קריטריוני התכנסות

משפט 39 (קריטריון קושי). נתונה $f\colon [a,\omega)\to\mathbb{R}$, אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור. אז האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $a<b_0<\omega$ כך שלכל $b_1,b_2\in[b_0,\omega)$ מתקיים:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

הגדרה 32. נאמר שהאינטגרל $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט אם $\int_a^\omega |f(x)|$ מתכנס.

משפט 40. נניח $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס. אז $\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס בהחלט, ו־:

$$\left|\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^\omega |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

משפט 41 (התכנסות לאינטגרל לא אמיתי של פונקציה חיובית). נתונה $f\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן על כל תת־קטע סגור. נניח $f\ge 0$. אז:

$$\int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x \quad \veebar \quad \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$$

(הסימן $\veebar$ מייצג $\vee$ אקסקלוסיבי, כלומר xor)

משפט 42. נתונה $f\colon[1,\infty)\to\mathbb{R}$.

- נניח f יורדת במובן החלש ו־$f>0$. אז האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתכנס. ואם תנאים אלו מתקיימים, אז $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

הגדרה 33. התכנסות בתנאי היא התכנסות לא בהחלט.

משפט 43 (קריטריוני אבל ודיריכלה). נתונות $f,g\colon[a,\omega)\to\mathbb{R}$. נתון ש־$f\in C^1([a,b])$, וכן f מונוטונית, ו־g רציפה.

- **קריטריון אבל:** נניח ש־f חסומה ו־$\int_a^\omega g(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס
- **קריטריון דיריכלה:** $x\mapsto\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה, וגם $f(x)\xrightarrow{x\to\omega^-}0$

אז $\int_a^\omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

משפט 44 (קריטריון קושי). נתונות $f_n\colon I\to\mathbb{R}$, אז $(f_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסות במ"ש אמ"מ

$$\forall\varepsilon>0.\,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}.\,\forall m,n>N_\varepsilon.\,\forall x\in I\colon\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

משפט 45 (משפט דיני). נתונות סדרה של פונקציות $f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, ו־$f$ כלשהי. נניח:

(א) f_n ו־f רציפות

(ב) נניח שיש התכנסות נקודתית $f_n\to f$.

(ג) לכל x (בנפרד), הסדרה $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ מונוטונית חלשה (לא נדרוש מונוטוניות באותו הכיוון לכל ה־x־ים).

אז $f_n\to f$ התכנסות במ"ש.

למה 5. לפונקציות חסומות $f,\hat f\colon J\to\mathbb{R}$, מתקיים: (תנודה רגילה, לא דרבו)

$$\left|\omega(f,J)-\omega(\hat f,J)\right|\le 2\sup_J\left|f-\hat f\right|$$

משפט 46 (גבול תחת אינטגרל). נתונות $f,f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. נניח שלכל n, f_n אינטגרבילית רימן. נניח ש־$f_n\to f$ במ"ש. אז f אינטגרבילית רימן, ויתר על כן, הפונקציות:

$$F(x):=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad F(x):=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

מקיימות $F_n\to F$ במ"ש.

משפט 47 (משפט המג'וראנטה). יהיו $f,f_n\colon[a,\infty)\to\mathbb{R}$. נניח ש־$f_n\to f$ במ"ש על כל ת"ק סגור וכן לכל n, f_n אינטגרבילית על כל ת"ק סגור. (לכן f אינטגרבילית גם היא על כל תת־קטע סגור). נניח שקיימת $\Psi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ("המאז'וראנטה") כך ש־:

1. $|f_n|\le\Psi$ לכל $n\in\mathbb{N}$.
2. Ψ אינטגרבילית על כל תת־קטע סגור.
3. $\int_0^\infty\Psi(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

אז $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ו־$\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנסים בהחלט, ויתר על כן:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

משפט 48 (סטרלינג).

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

כלומר:

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

3.3 ~ החלפת גבול וגזרת

משפט 49. נתונות $f,gf_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח ש־$f_n\in C^1([a,b])$ נקודתית וכן $f_n\to f, f_n'\to g$ במ"ש. אז $f_n\to f$ במ"ש וגם $f'=g$.

משפט 50 (גרסה חזקה יותר של המשפט הקודם). יהיו $f_n,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. נניח:

- $f_n\in C^1([a,b])$
- $f_n'\to g$ במ"ש
- קיימת $x_0\in[a,b]$ כך ש־$(f_n(x_0))_{n=1}^\infty$ מתכנסת ל־$c\in\mathbb{R}$.

אז הפונקציה:

$$f_n\xrightarrow{u}f(x):=c+\int_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

וכן $\frac{d}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x)$ (נוסף על התכנסות במ"ש של f_n ל־f).

3.4 ∼ טופולוגיה ב־$\mathbb{R}$

הגדרה 34. הקבוצה $U \subset \mathbb{R}$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in U$ קיימת $\delta > 0$ כך ש־$(x-\delta, x+\delta) \subset U$.

תרגיל 13. כל קטע פתוח (c,d) הוא קבוצה פתוחה.

שאלות למחשבה:

- האם $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ פתוחה? לא – היא משלים של קבוצה צפופה.
- האם $[0,\infty)$ פתוחה? לא – כי סביבות של 0 יוצאות מהקבוצה.

תרגיל 14. מצאו $U \subset \mathbb{R}$ שהיא גם פתוחה, גם צפופה, אך היא לא כל $\mathbb{R}$.

פתרון: $\mathbb{R}$ פחות קבוצה צפופה.

תרגיל 15. איחוד (לאו דווקא בן מנייה) של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה, וחיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 35. קבוצה $U \subset \mathbb{R}$ נקראת קומפקטית אמ"מ לכל כיסוי פתוח, קיים תת־כיסוי סופי.

משפט 51 (הלמה של היינה־בורל)**.** נתון קטע סגור $[a,b]$. יהי אוסף $\{U_\alpha\}$ (אוסף לאו דווקא בן מניה. פורמלית, אוסף הוא פונקציה $f\colon \Lambda \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ כאשר $U_\alpha := f(\alpha)$ עבור $\alpha \in \Lambda$) של קבוצות פתוחות $U_\alpha \subset \mathbb{R}$, שמכסות אותו כלומר:

$$[a,b] \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$$

אז קיים תת־אוסף סופי $U_{\alpha_1} \dots U_{\alpha_n}$ שמכסה אותו, כלומר $[a,b] \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$.

הערה 3. בקורס שלנו, סגור זה לא סגור במובן הטופולוגי, אלא סגור וחסום. "זה קטע סגור, אבל זה לא קטע סגור".

. . . . . (4) . . . . . .

טורי פונקציות

4.1 ∼ הגדרות בסיסיות

הגדרה 36. יהיו $f, u_N \to I \to \mathbb{R}$ (I קבוצה כללית). אז טור הפונקציות $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ מתכנס ל־f במ"ש ב־I אם סדרת הסכומים החלקיים $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ מתכנסת ל־f במ"ש ב־I.

סימון 6. מקובל להוסיף את האות u מעל השוויון (כך, $\overset{u}{=}$) כדי להדגיש ההתכנסות במ"ש.

הגדרה 37. תחת התנאים לעיל, נאמר ש־$\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ נקודתית אם לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים $\sum_{n=1}^\infty u_n(\alpha) = f(\alpha)$ כטור מספרים.

משפט 52 (קריטריון קושי להתכנסות טור פונקציות במידה שווה)**.** מתקיים $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ במ"ש אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m \geq n < N_0$ מתקיים:

$$\forall x \in I\colon \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| < \varepsilon$$

תרגיל 16. אם $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ נקודתית, אז $u_n(x) \to 0$ נקודתית. אם $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ מתכנס במ"ש, אז $u_n(x) \to 0$ במ"ש ב־I.

הערה 4. זהירות! $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס **לא גורר** ש־$g(t) \to 0$ (כאשר t שואף לאינסוף).

הגדרה 38. נתונות $u_n\colon I \to \mathbb{R}$. הטור $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ מתכנס בהחלט במ"ש ב־I אם $\sum_{n=1}^\infty |u_n(x)|$ מתכנס במ"ש ב־I.

משפט 53. אם טור מתכנס בהחלט במ"ש, אז $\sum_{n=1}^\infty |u_n(x)|$ מתכנס לכל x וגם $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ מתכנס במ"ש (הוכחה באמצעות קריטריון קושי במ"ש). **הכיוון השני לא עובד.** התכנסות בהחלט + התכנסות במ"ש לא גורר התכנסות בהחלט במ"ש.

4.2 ∼ על התכנסות טור פונקציות

משפט 54. נניח $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ במ"ש ב־$I = [a,b]$.

1. אם לכל n, u_n רציפה אז $f(x)$ רציפה.
2. אם לכל n, u_n אינטגרבילית אז $f(x)$ אינטגרבילית. במקרה זה מתקיים:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

לפעמים יקרא "אינטגרציה איבר־איבר".

משפט 55 (דיני)**.** אם f, u_n רציפות וכן $\forall n \in \mathbb{N}\colon u_n \geq 0$. אז אם $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ נקודתית אז $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) = f(x)$ במ"ש.

תרגיל 17. נתונות $u_n\colon [0,R] \to \mathbb{R}$ רציפות. נניח שהטור $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ מתכנסת במ"ש ב־$[0,R)$. אז $\sum_{n=0}^\infty u_n(x)$ מתכנס במ"ש ב־$[0,R]$.

משפט 56. תחת ההגדרות:

$$u_0(x) := \begin{cases} \{x\} & n \leq x \leq n + \frac{1}{2} \\ 1 - \{x\} & n + \frac{1}{2} \leq x \leq n+1 \end{cases}$$

$$u_k(x) := \frac{1}{4^k} u_0(4^k x)$$

לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ קיימת סדרה x_n כך ש־

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \in \begin{cases} \mathbb{N}_{\text{even}} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \mathbb{N}_{\text{odd}} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

מסקנה 4. הטור $f(x) := \sum_{k=0}^\infty u_k(x)$ מתכנס במ"ש לפונקציה שאיננה גזירה באף נקודה.

משפט 57 (ווירשטראס)**.** תהי $f\colon C([a,b])$ כלשהי. אז קיימת סדרה של פולינומים $P_k(x)$ כך ש־$f \to P_k$ במ"ש[2].

[2] מומלץ לקרוא על ה־function topology של $C([a,b])$, ואז משפט ווירשטראס למעשה אומר צפיפות של הפולינומים בתוך מרחב הפונקציות הרציפות.

4.3 ∼ טורי חזקות

ברשימות של שירי, §5. בשיעור הזה נשתדל להספיק את §5.1-§5.4.

הגדרה 39. טור חזקות סביב $x=\eta$ הוא טור פורמלי (כלומר אכפת לנו מהמקדמים בלבד) מהצורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-\eta)^k$

"אטא זה פשוט קשקוש אחר" – סטודנטית אחרי שיעל החליפה ξ ב־η.

לעת עתה, לצורך הנוחות, נניח בה"כ ש־$\eta=0$, אז ברור שהטור מתכנס ב־$x=0$. אבל מה קורה לגבי שאר ה־x־ים?

למה 6. נניח $\sum a_k x^k$ מתכנס ב־$x_0\neq 0$. יהי $R:=|x_0|$. יהי $0<R'<R$, אז הטור מתכנס במ"ש בקטע $[-R',R']$.

הערה 5. שימו לב, הטור לאו דווקא מתכנס בקטע הפתוח $(-R,R)$.

מסקנה 5. יהי נתון טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. אז:

(א) הטור מתכנס ב־$(-R,R)$. נוכל להגדיר $f\colon(-R,R)\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. מעתה ואילך, נגדיר $f(x):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

(ב) f רציפה.

(ג) גם הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ מתכנס ב־$(-R,R)$, ולכל $x\in(-R,R)$ מתקיים:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k+1}$$

משפט 58 (אבל)**.** יהי טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. אז קיים $0\le R\le\infty$, כך ש־:

- אם $|x|<R$ אז הטור מתכנס ב־x.
- אם $|x|>R$ אז הטור מתבדר ב־x.
- אם $|x|=R$ אז הולכים לשבור את הראש מה קורה ב־boundary.

ה־R הזה נקרא רדיוס התכנסות[3].

משפט 59 (קושי־הדמרד)**.** יהי R רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\,x^k$. אז:

$$\frac{1}{R}=\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$$

כאשר R רדיוס ההתכנסות, במובן הרחב.

4.4 ∼ גזירה איבר־איבר של טור חזקות

משפט 60. לטורים $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ יש אותו רדיוס ההתכנסות.

משפט 61. נתון טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, עם רדיוס התכנסות R. נגדיר $f\colon(-R,R)\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. אז f גזירה ב־$(-R,R)$ ו־$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

משפט 62. נניח $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ב־$(-R,R)$. אז f גזירה אינסוף פעמים ב־0 ו־$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ הוא טור טיילור של f ב־$x=0$.

סימון 7. ישנה מוסכמה כי את טור החזקות $a_0+a_2x+\cdots=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ נרשום כך: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, כאשר $a_k x^k$ ב־$k=0$ מוכרז להיות 1 אפילו אם $x=0$.

אזהרה. תהי $f(x)$ פונקציה חלקה (כלומר $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ עם טור טיילור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (סביב 0). כלומר לכל k, מתקיים $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. **לא נובע שטור הטיילור מתכנס לפונקציה באיזושהי סביבה של** 0. יתר על כן, במידה והוא כן מתכנס בסביבה של 0, לא נובע שהגבול הוא f.

4.5 ∼ קצה תחום ההתכנסות

משפט 63. נתון טור חזקות $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס התכנסות $0<R\in\mathbb{R}$. אם הטור מתבדר ב־$x=R$, אז ההתכנסות של הטור ב־$[0,R)$ איננה במ"ש.

משפט 64 (משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות)**.** נניח $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס נקודתית ב־$[0,R]$. אז התכנסות הטור ל־$f(x)$ היא במ"ש.

משפט 65. יהי $R\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ רדיוס ההתכנסות של טור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (ולכן גם של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k+1}$). נניח $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־$x=R$. אז גם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס ב־$x=R$.

4.6 ∼ סוגי סכימות

הגדרה 40 (סוגי סכימות של סדרות)**.** 1. צזארו: סדרה $(C_k)_{k=0}^{\infty}$ מתכנסת צזארו ל־L אם סדרת ממוצעיה $\lim_{n\to\infty}\frac{C_0+\cdots+C_n}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}L$. נסמן $C_k\to L$ (C).

2. אבל: טור פורמלי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ מתכנס לפי אבל ל־K אם $\lim_{R\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k=L$. נסמן $a_n\to L$ (A)

הערה 6. למעשה יש לנו כאן סכום כפול:

$$\sigma_N=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)a_k$$

הגדרה 41. אבל: (Abel) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ (A), פירושו:

$$\lim_{R\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k=L$$

משפט 66. אם טור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ במובן הרגיל, אז $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ (A) וגם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ (C).

משפט 67. התכנסות צזארו גוררת התכנסות לפי אבל, כלומר אם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ (C), אז $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=L$ (A).

[3] במרוכבות, זה אותו הדבר אבל אשכרה רדיוס, כי מדובר על דיסק. גם במקרה המרוכב, צריך לבדוק ידנית מה קורה ב־boundary (כלומר ב־$\partial\{x\le R\mid x\in\mathbb{R}\}\cong S^1$).

משפט 68 (טאובר). אם $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (A) וגם $a_k = o(\frac{1}{k})$ אז $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = L$.

משפט 69. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס, וכמו כן כל טור שמתקבל ממנו ע"י שינוי סדר האיברים או קיבוץ האיברים, גם הוא מתכנס (בהחלט) לאותו הגבול.

הגדרה 42. יהי $(t_j)_{j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. תזכורת־הגדרה: הטור $\sum t_j$ מתכנס בהחלט ל־L פירושו:

- הטור $\sum |t_j|$ מתכנס.
- הטור המקורי $\sum t_j$ מתכנס ל־L.

משפט 70. 1. הטור $\sum t_j$ מתכנס בהחלט, אמ"מ קבוצת הסוכמים הסופיים של הערכים המוחלטים:

$$\left\{ \sum_{j\in J} |t_j| \,\middle|\, J \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \wedge |J| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

חסומה.

2. נניח $\sum t_j$ מתכנס בהחלט ל־L. אז:

(א) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת ת"ק סופית $J \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ כך שלכל ת"ק סופית $J \subset I \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ מתקיים $\left|\sum_{j\in I} t_i - L\right| < \varepsilon$.

(ב) לכל פירוק זר לתתי קבוצות סופיות $\mathbb{Z}_{\geq 0} = J_0 \uplus J_1 \uplus J_2 \uplus \cdots$, אם נסמן $c_m := \sum_{j\in J_m} t_j$ הטור c_m מתכנס בהחלט ל־L.

משפט 71. נתונים טורים $\sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_\ell$ ו־$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ שמתכנסים בהחלט לגבולות A, B בהחלפה. נגדיר $\gamma_m = \sum_{k+\ell=m} \alpha_k \beta_\ell$. אז הטור $\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m$ שנקרא מכפלת קושי של הטורים $\sum \alpha_k, \sum \beta_k$ מתכנס בהחלט לגבול $A \cdot B$.

. . . . . (5) . . . . . .

פורייה

5.1 ~ מרוכבים

משפט 72 (לייבניץ). יהיו $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ גזירות, אז:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

משפט 73 (המשפט היסודי). תהי $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ רציפה ב־x_0. אז $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ מקיימת $F'(x_0) = f(x_0)$.

משפט 74 (ניוטון לייבניץ). נתונות $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, כך ש־$f' = g$, ו־$g$ אינטגרבילית. אז $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

משפט 75 (אינטגרציה בחלקים).

$$\int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

כאשר $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ גזירות, ו־f', g' אינטגרביליות.

5.2 ~ $R(\mathbb{T})$ ותתי־מרחביו

תרגיל 18. הפונקציה $t \mapsto e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t),\ \alpha \in \mathbb{R}$, פונקציה עם מחזור 2π אמ"מ $\alpha \in \mathbb{Z}$.

הגדרה 43. הפונקציה $f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ כאשר $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ו־$\forall n\colon c_n \in \mathbb{C}$, אז f כזו נקראת פולינום טריגונומטרי מדרגה $N \geq$

מסקנה 6. נבחין שהקבוצה:

$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \forall x\colon f(x) + 2\pi\} = f(x)$$

עם הפעולות:

$$(f+g)(t) = g(t) + f(t) \wedge (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

היא מרחב וקטורי.

תרגיל 19. המרחבים הבאים הם תתי־מרחבים וקטוריים שלו:

1. $C(\mathbb{T}) := \{f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \mid f \text{ רציפה}\}$
2. $R(\mathbb{T}) := \{f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C} \mid f \text{ אינטגרבילית רימן}\}$
3. לכל N:

$$\left\{ \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \mid n, c_n \in \mathbb{C} \right\} = \{N \geq \text{פולינום טריגונומטריים מדרגה}\}$$

יתרה מכך, נבחין ש־3 (מרחב הפולינום הטריגונומטריים מדרגה לכל היותר N) נפרש ע"י:

למה 7.

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left(\{e^{int} \mid -N \leq n \leq N\}\right) \overset{!}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left(\{1\} \cup \{\cos nt\}_{n=1}^{N} \cup \{\sin t\}_{n=1}^{N}\right)$$

תרגיל 20. אם $f, g \in R(\mathbb{T})$, אז גם $f\bar{g} \in R(\mathbb{T})$.

הגדרה 44.

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

למה 8. זו מכפלה פנימית מרוכבת (עד לכדי ניוון).

משפט 76. קל לראות ש־:

$$|f+g|^2 = |f|^2 + 2\Re\langle f \mid g \rangle + |g|^2$$

מסקנה 7 (פיתגורס). אם $f \perp g$ אז $|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2$.

הערה 7. $||\cdot||$ מתנהג כמו (סמי)נורמת L_2, כי:

$$\left|\left|\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}\right|\right| = \left(\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

מסקנה 8. א"ש קושי שוורץ (או למעשה, רק החלק של השוורץ):

$$|\langle f \mid g \rangle| \leq ||f||\,||g||$$

מסקנה 9. א"ש המשולש, $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$.

5.3 ~ סכום פורייה

הגדרה 45. מקדמי פוריה (Fourier) של $f \in R(\mathbb{T})$, הם לכל $n \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \langle f \mid e^{int}\rangle$$

הגדרה 46. מקדמי פורייה של f הם:

$$(S_n f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$$

הגדרה 47. טור פורייה של f הוא:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

משפט 77. תהי $f \in R(\mathbb{T})$, אז $S_n f$ הוא ההטלה האורתוגונלית של f על מרחב הפולינומים הטריגונומטריים מדרגה $n \geq$. או בניסוח מפורש יותר:

(1) $S_n f$ שייך למרחב הפולינומים הטריגונומטריים.

(2) לכל g פולינום טריגונומטרי מדרגה $n \geq$, $f - S_n f \perp g$.

מסקנה 10. (א) ("הזנב מאונך לקירוב") $f - S_n f \perp S_n f$

(ב) $S_n f$ הוא הפולינום הטריגונומטרי מדרגה $n \geq$ הקרוב ביותר ל־f, כלומר לכל פולינום טריגונומטרי p אחר מתקיים $||f - S_n f|| \leq ||f - p||$.

הגדרה 48. עבור $f, f_n \in R(\mathbb{T})$, נאמר ש־$f_n \xrightarrow{L_2} f$ ("התכנסות L_2", "התכנסות ב־L_2", "התכנסות בנורמת L_2") באמצעות:

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L_2} = 0$$

הגדרה 49. בהינתן $f_n, f \in \mathbb{T}$, אם:

$$\max_{t\in[0,2\pi]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

אז $f_n \to f$ במ"ש.

למה 9. הטענה לעיל שקולה לכך ש־$\Re f_n \xrightarrow{u} \Im f$ במ"ש וגם $\Im f_n \xrightarrow{u} \Im f$ במ"ש.

הערה 8. ראשית נבחין שהתכנסות במ"ש של פונקציות מרוכבות לא תלויה בנורמה שאנו עובדים איתה, ושנית נבחין שזה שקול לשימוש ב־L_∞.

למה 10. נתונה $f_n \to f \in C(\mathbb{T}) \subset R(\mathbb{T})$. נניח $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$, אז $f_n \to f$ ב־L_2.

תרגיל 21. 1. $f_n, f \in C(\mathbb{T})$ כאשר $f_n \to f$ במ"ש גורר $f_n \to f$ נקודתית

2. בהינתן $f_n \in C(\mathbb{T})$, ו־$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ כלשהי, אם $f_n \to f$ במ"ש אז $f \in C(\mathbb{T})$.

למה 11. נניח ש־p פולינום טריגונומטרי מדרגה $N \geq$. אז לכל $n \geq N$ מתקיים ש־$S_n p = p$.

משפט 78 (יחידות של גבול L_2 עד כדי מאפס). נתונות $f_n, f, g \in R(\mathbb{T})$. נניח $f_n \to f$ ו־$f_n \to g$ ב־L_2. אז $||f - g|| = 0$.

מסקנה 11. אם $f_n \to f, g$ ו־$f, g \in C(\mathbb{T})$, אז $f = g$.

משפט 79 (א"ש בזל). עבור $f \in R(\mathbb{T})$, לכל N מתקיים ש־$||S_n f|| \leq ||f||$.

5.4 ~ טור פורייה

משפט 80 (משפט פייר). עבור $f \in C(\mathbb{T})$, מתקיים ש־:

$$\sigma_N f \xrightarrow[N\to\infty]{u} f$$

במ"ש, כאשר $\sigma_N f$ מקדמי צ'זארו של f.

משפט 81. כל פונקציה אינטגרבילית ניתן לקרב במובן L_2 ע"י פונקציות ב־$C(\mathbb{T})$.

ניתן לרשום משפט זה בשני ניסוחים שונים:

- **גרסה 1:** עבור $f \in R(\mathbb{T})$ אינטגרבילית. אז לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $g \in C(\mathbb{T})$ כך ש־$||f - g|| < \varepsilon$.
- **גרסה 2:** עבור $f \in R(\mathbb{T})$ אינטגרבילית, קיימת סדרה $g_n \in C(\mathbb{T})$ כך ש־$g_n \xrightarrow{u} f$ ב־L_2.

מסקנה 12 (התכנסות L_2 של טור פורייה). תהי $f \in R(\mathbb{T})$, אז:

$$S_n f \xrightarrow{N\to\infty} f$$

ב־L_2.

למה 12 (הלמה של רימן־לבג). עבור $f \in R(\mathbb{T})$, מתקיים $\hat{f}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

תרגיל 22. הוכיחו ש־$||S_n f||^2 = \sum_{n=-N}^{N} \left|\hat{f}(n)\right|^2$.

משפט 82 (שוויון פרסבל). עבור $f \in R(\mathbb{T})$, מתקיים:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = ||f||$$

משפט 83. תהי $f \in C(\mathbb{T})$, ונניח ש־$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$ (שימו לב – לא ריבועי מקדמי פורייה, אלא ממש מקדמי פוריה עצמם). אז $S_n f \xrightarrow{u} f$ במ"ש.

הגדרה 50. נגדיר את $C^1(\mathbb{T})$ להיות קבוצת הפונקציות $f \in C^1(\mathbb{R})$ ו־$f \in C(\mathbb{T})$, כלומר פונקציות ממחוזר 2π גזירות ברציפות.

למה 13. ל־$f \in C^1(\mathbb{T})$ מתקיים $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

מסקנה 13. בהינתן $f \in C^1(\mathbb{T})$, לא רק ש־$\hat{f}(n) \to 0$, אלא גם ש־:

$$\frac{\hat{f}(n)}{\frac{1}{n}} = n\hat{f}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כלומר $\hat{f}(n)$ הוא "o קטן" של $\frac{1}{n}$ כאשר $n \to \infty$. (זאת כי $in\hat{f}(n) = \hat{f}'(n)$.)

מסקנה 14. עבור $f \in C^1(\mathbb{T})$, אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right|$ מתכנס, ולכן $S_n f \to f$ מתכנס במ"ש.

למה 14 (דעיכת מקדמי פוריה). עבור $f \in C^k(\mathbb{T})$, מתקיים ש־$n^k \hat{f}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

תרגיל 23. הוכיחו שקל פונקציה רציפה מחזורית רבמ"שית, חסומה ומשיגה את חסמיה בכל $\mathbb{R}$

5.5 ~ גרעין אבל ודיריכלה

הגדרה 51. לכל $f, g \in R(\mathbb{T})$, הקונבולוציה של f, g בנקודה x היא:

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

טענה 1 (תכונות הקונבלוציה).

- סימטריה: $f * g = g * f$
  קל להראות זאת באמצעות שינוי משתנה.
- בילינאריות: $(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + \beta(f_2 * g)$
- רציפות: $f * g \in C(\mathbb{T})$
- אסוציאטיביות: $(f * g) * h = f * (g * h)$
  (ההוכחה של זה בחדו"א 3)
- אם $g \equiv 1$:

$$(f * 1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)1\,\mathrm{d}t = \hat{f}(0)$$

כאשר נבחין ש־$\hat{f}(0)$ קבועה ולא תלויה בקונבולוציה.

- באופן כללי, אם g פולינום מדרגה $n \geq$ אז כך גם $f * g$.
- אם g פולינום טריגונומטרי מדרגה $n \leq$ אז כך גם $f * g$.
- באופן יותר ספציפי, מתקיים ש־$\widehat{(f * g)}(n)\hat{f}(n)\hat{g}(n)$ (זה נובע מאסציאטיביות)

הגדרה 52. ל־$D_N(y) := \sum_{n=-N}^{N} e_N(y)$ קוראים גרעין דיריכלה, כאשר $e_n(y) = e^{iny}$

הגדרה 53. $F_N(y) := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y)$ יקרא גרעין פייר (Fejer).

טענה 2.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n)e^{inx} &= (f * e_n)(x) \\
\sigma_N f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t &= f * F_n \\
S_N f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t &= f * D_n
\end{aligned}$$

למה 15 (נוסחה מפורשת לגרעין דיריכלה).

$$D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny} \overset{!}{=} \begin{cases} 2N+1 & y = 0 \\ \frac{\sin((N+\frac{1}{2}))y}{\sin(\frac{1}{2}y)} & y \neq 0 \end{cases}$$

למה 16 (נוסחה מפורשת של גרעין פייר).

$$F_N(y) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(y) \overset{!}{=} \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}y\right)}{\sin(\frac{1}{2}y)}\right)^2$$

מסקנה 15. (א) כל $f \in C(\mathbb{T})$ ניתנות לקירוב במ"ש ע"י פולינומים טריגונומטריים, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום טריגונומטרי p כך ש־$\max|f - p| < \varepsilon$.

(ב) עבור $f, g \in C(\mathbb{T})$, אם $\forall n \in \mathbb{N}\colon \hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ אז $f = g$.

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ונוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד