חדו"א 2 א' - תרגיל מס' 3

תרגילים להגשה

1. הגדרות וניסוחים:

(א) נסחו משפט על כך שהאינטגרל (כלומר הערך של האינטגרל המסויים) לינארי בפונקציה.

(ב) נסחו משפט על המונוטוניות של האינטגרל.

2. הוכיחו או הפריכו :

(א) אם $|f|$ אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$, אזי גם f אינטגרבילית רימן ב־$[a,b]$.

(ב) אם g אינטגרבילית רימן ב־$[a,b]$ ואינה מתאפסת ו־$\frac{1}{g}$ חסומה ב־$[a,b]$, אזי $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית רימן ב־$[a,b]$.

(ג) אם f,g אינטגרביליות רימן ב־$[a,b]$, אז גם $\max\{f,g\}$ אינטגרבילית בקטע.

3.

(א) תהי $f \geq 0$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$. הוכיחו כי אם f רציפה בנקודה $x_0 \in (a,b)$ ומתקיים $f(x_0) > 0$, אזי

$$\int_a^b f(x)\ dx > 0$$

(ב) נניח כי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ונניח כי $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. הוכיחו כי בכל נק' רציפות $x \in [a,b]$ של f מתקיים $f(x) = 0$.

4. תהי f פונקציה גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,b]$. השתמשו במשפט ערך הביניים האינטגרלי כדי להראות שקיימת $c \in (a,b)$ עבורה

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

(כלומר, שארית לגרנז' לטור טיילור נובעת מהשארית האינטגרלית).

5. נניח כי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ריימן.

(א) הוכיחו כי לכל קטע סגור $I \subset [a,b]$ קיים תת־קטע סגור $I' \subset I$ כך ש־

$$\omega(f,I') \leq \frac{1}{2}\omega(f,I).$$

<u>תזכורת:</u> הגדרנו בשיעור/תרגול כי $\omega(f,I) = \sup_I f - \inf_I f$.

(ב) הוכיחו כי קבוצת נקודות הרציפות של f צפופה בקטע $[a,b]$. כלומר, לכל קטע פתוח $J \subset [a,b]$ מתקיים

$$J \cap \{x \in [a,b] \mid f \text{ is continuous in } x\} \neq \emptyset.$$

רמז: השתמשו בסעיף הראשון כדי לבנות סדרה של קטעים סגורים מקוננים והשתמשו במשפט קנטור.

6. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית רימן על כל קטע סופי ומחזורית עם מחזור $T > 0$ (כלומר, $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$). הוכיחו שהאינטגרל $I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx$ אינו תלוי ב a.

7. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית ו־g לינארית. אז הפונקציה $f \circ g$ אינטגרבילית בכל קטע.

תרגילים נוספים

1. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש גזירה כך ש־$f'\neq 0$, ותהי F פונקציה קדומה של f (כלומר, $F'=f$). הוכיחו ש:

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C \quad .$$

2. תהי $f\geq 0$ אינטגרבילית ב־$[a,b]$. הוכיחו כי אם f רציפה בנקודה $x_0\in(a,b)$ ומתקיים $f(x_0)>0$,

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx > 0$$

3. נניח כי f,g פונקציות אינטגרביליות ריימן בקטע $[a,b]$, וכי $\#\{x \mid f(x)\neq g(x)\}<\infty$. הוכיחו כי $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

4. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a-1,\,b+1]$. הוכיחו ש־

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0 \ .$$

רמז: בחרו חלוקה Π עם תנודה $\varepsilon>0$ לכל היותר, והביטו ב־$h<\lambda(\Pi)$.

5. נניח כי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, כך ש־$f(x)\xrightarrow{x\to\infty}L$. הוכיחו כי לכל $a>0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(nx)dx = aL$$

רמז: הסבירו תחילה מדוע ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $a=1$.

6. הוכיחו ש $0<\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{x}dx<\frac{\pi^2}{64}$.

7. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים:

(א) $\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx$

(ב) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

(ג) $\int_0^6 \lfloor x\rfloor \sin\frac{\pi x}{6}dx$

(ד) $\int_0^2 |1-x|dx$

(ה) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$

8. תהי f פונקציה גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,b]$. השתמשו במשפט ערך הביניים האינטגרלי כדי להראות שקיימת $c\in(a,b)$ עבורה

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

(כלומר, שארית לגרנז' לטור טיילור נובעת מהשארית האינטגרלית).

9. נניח כי $f\in C^1[0,1]$. הוכיחו כי מתקיים:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n}$$

כאשר $M=\int_0^1|f'(x)|dx$.

10. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(a)=f(b)=0$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש

$$|f'(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$

רמז: סמנו $M=\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f$ והניחו בשלילה כי $|f'(x)|<M$ לכל x. היעזרו במשפט לגרנג' כדי למצוא חסמים על f בשני הקטעים $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ו־$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ והשתמשו בהם כדי לחסום את $\int_a^b f$ ולהגיע לסתירה.