חדו"א 2א ~ תרגיל בית 5

שחר פרץ

16 ביוני 2026

(1)

(א) נבדוק מתאי האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס.

- אם $0 < \alpha \leq 1$, אז $g(x) = \sin x$ רציפה בקרן ו־$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ מונוטונית וגזירה ברציפות. נוסף על כך $\int_1^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \propto \cos x$ ולכן חסומה, ו־$f(x)$ שואפת ל־0 באינסוף. לכן מדיריכלה האינטגרל מתכנס.

עם זאת, האינטגרל לא מתכנס בהחלט. הראנו בתרגול שהאינטגרל של $\frac{|\sin x|}{x^\alpha}$ אינו מתכנס באמצעות השוואה לטורים בהחלט, ומהשוואה (כי $t^\alpha \geq t$ עבור $\alpha \in (0,1]$):

$$\int_1^x \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \mathrm{d}t = \int_1^x \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$$

משום שאגף ימין לא מתכנס, מהשוואה כך גם אגף ימין.

- אם $\alpha > 1$, ראינו בתרגול שהאינטגרל מתכנס בהחלט באמצעות השוואה, ובפרט מתכנס.
- אם $\alpha = 0$, אז האינטגרל $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \cos t\,\mathrm{d}t = \sin x$ אך $\sin x$ אינו מתכנס באינסוף. סה"כ האינטגרל $f(x)$ אינו מתכבס ובפרט אינו מתכנס בתנאי.
- אם $\alpha < 0$, אז $f(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ בהשוואה עם $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{t^{-\alpha-\varepsilon}}\,\mathrm{d}t$ נקבל:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sin t}{t^\alpha}}{t^{-\alpha-\varepsilon}} = \frac{\sin t}{t^{-\varepsilon}} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

עוד נבחין ש־:

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{\alpha+\varepsilon}\,\mathrm{d}t =$$

האינטגרל לעיל מתבדר אמ"מ $\alpha + \varepsilon \leq 1$. תמיד נוכל למצוא ε גדול דיו כך ש־$\alpha < 1 - \varepsilon$, וסיימנו.

(ב) נתבונן באינטגרל:

$$\int_0^\infty (-1)^{[x^2]}$$

קל לראות שהוא לא מתכנס בהחלט כי במקרה זה הוא שווה לאינטגרל של 1 שאיננו מתכנס. נבדוק התכנסות בתנאי. נגדיר את הפונקציה $f(t) = (-1)^{[t^2]}$. נוכיח באינדוקציה שמתקיים $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ לכל x עם כך ש־$x^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$, ו־1 לכל x כך ש־$x^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{even}}$. הבסיס $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ עם ריבוע 0.5 שסה"כ אי זוגי, ואכן האינטגרל הוא 0. יהי x עם ריבוע שלם, ונסמן ב־$x' < x$ את המספר עם השורש השלם הקודם. אכן:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{x'} f(t)\,\mathrm{d}t}_{a} + \underbrace{\int_{x'}^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{b}$$

נפרק למקרים:

- אם $x^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{even}}$, אז $x'^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ואז $a = 0$ מה.א. ובאמצעות חישוב אפשר לראות ש־$b = 1$ וסה"כ $a + b = 1$.
- אם $x^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$, אז $x'^2 + 0.5 \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ ואז $a = 1$, ובאמצעות חישוב אפשר לראות ש־$b = -1$ וסה"כ $a + b = 0$.

סה"כ לאינטגרל יש ג"ח קבוע ב־0 וג"ח קבוע ב־1 ולכן הוא איננו מתכנס.

(2)

נסמן:

$$F(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad G(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

נבצע אינטגרציה בחלקים. נבחין ש־:

$$F(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=\dfrac{1}{1+t} & dv=\cos t \\ du=-\dfrac{1}{(1+t)^2} & v=\sin t\end{bmatrix}=\frac{\sin x}{1+x}-\int_0^x \frac{-\cos t}{(1+t)^2}=\frac{\sin x}{1+x}+G(x)$$

משום שכאשר $x\to\infty$, בבירור $\frac{\sin x}{1+x}\to 0$, וכאשר $x\to 0$, מהצבה פשוטה נקבל $\frac{\sin x}{1+x}\to 0$ גם כן, ולכן הביטוי זניח, ובשתי נקודות הגבול ה"בעייתיות" נקבל $F(x)=G(x)$ (בגבול).

בגלל ש־$\int^\infty \frac{1}{(1+x)^2}$ מתכנס ו־$|\sin x|$ חסום, מאבל נקבל ש־$G(x)$ מתכנס בהחלט. עם זאת בעבור $F(x)$ מתבדר (מהשוואה לטור הרמוני, באופן דומה לדברים שנעשו בכיתה).

(3)

תהי $f\colon [a,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות, ונניח שהאינטגרלים $\int_a^\infty (f(x))^2$ ו־$\int_a^\infty (f''(x))^2$ מתכנסים. נוכיח ש־$\int_a^\infty (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

הוכחה. ראשית נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} u=f' & dv=f' \\ du=f'' & v=f\end{bmatrix}=\underbrace{f(x)\cdot f'(x)}_{B_x}-\underbrace{\int_0^x f''(t)f(t)\,\mathrm{d}t}_{A_x}$$

נבחין שהאינטגרל באגף ימין אכן מתכנס מא"ש הממוצעים AMGM נקבל $\frac{f''(t)+f(t)}{2}\ge\sqrt[2]{f''(t)f(t)}$ כלומר:

$$A_x=\int_0^x f''(t)f(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{4}\int_0^x (f^2(t)+f''^2(t))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left[\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^x f''^2(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

אגב ימין בשאיפה לאינסוף הוא קומבינציה לינארית של אינטגרלים מתכנסים ולכן כאשר $x\to\infty$ האינטגרל A_x מתכנס. באשר ל־B_x, נוכל לבצע תהליך דומה באמצעות AMGM:

$$B_x=f(x)f'(x)\le\frac{1}{4}\left(f^2(x)+f'^2(x)\right)$$

בבירור $f^2(x)$ מתכנס בשאיפה לאינסוף, כי האינטגרל שלו מתכנס. משום ש־$f''^2(x)$ מתכנס (כי גם כאן האינטגרל מתכנס), נפצל למקרים.

- אם $f''^2(x)\to 0$, אז $f'^2(x)$ מתכנס גם הוא, ואז יש לנו קומבינציה לינארית של שתי פונקציות מתכנסות וסיימנו.
- אם $f''^2(x)\to\ell\neq 0$, אז $f''^2(x)$ הוא bounded away from zero, ואז $f'^2(x)$ מונוטונית. במצב זה יש לנו קומבינציה לינארית של פונקציה מתכנסת עם פונקצייה מונוטונית, וממשפט ויראשטראס הראשון שראינו בחדו"א 1א, B_x מתכנס במובן הרחב.

עתה נניח בשלילה ש־B_x אינסופי. במצב זה, האינטגרל $\int_1^\infty f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ בהכרח איננו מתכנס, שכן האינטגרנד איננו מתכנס. זאת בשלילה לכך שקודם לכן הראנו שהוא מתכנס.

סה"כ כאשר $x\to\infty$ הן B_x והן A_x מתכנסים, דהיינו גם B_x-A_x מתכנס ומהשוויון לעיל סיימנו. ■

(5)

נחשב את הגבולות של סדרות הפונקציות הבאות:

(א) נגדיר $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$. נקבע $x\in\mathbb{R}$ כלשהו, ואז:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

מכאן ש־$f_n\to 0$. נבדוק האם הסדרה מתכנסת במ"ש. נבחין ש־$f_n'(x)=-\frac{n(n^2x^2-1)}{(n^2x^2+1)^2}$. בהשוואה לאפס נקבל אפסים ב־$\tilde{x}_n:=\frac{1}{n}$ (ולמעשה גם בשלילי), שם ערך הפונקציה הוא מקסימלי והוא:

$$f_n(\tilde{x}_n)=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

סה"כ:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} \neq 0$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, ובפרט בשאיפה לאינסוף. לכן פונקציות אלו אינן מתכנסות במ"ש.

(ב) עבור $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ בקטע $[0,1]$. ב־$x=0$ נקבל את הגבול $\frac{1}{1+0^n} = \frac{1}{1} = 1$. בעבור $x \neq 0$ נקבל את הגבול:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(כי חזקה אוכלת הכל). סה"כ:

$$f_n \to \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נבחין ש־f_n פונקציות רציפות השואפות לפונקציה שאיננה רציפה. אך גבול במ"ש משמר רציפות, ולכן הן איננה מתכנסות במ"ש.

(ג) נתבונן במשפחת הפונקציות $f_n = \sqrt{n+1}\cdot\sin^n x\cos x$ בכל $\mathbb{R}$. קל לראות שכאשר $\sin x < 0$ (מתרחש במחזורים של 2π) הפונקציה היא שורש (מונוטוני בכיוונו) כפול סינוס שמחליף סימן כל n, ובפרט זה לא מתכנס. אם $\sin x \geq 0$, אז אם $\sin x = 1$ קיבלנו $\cos x \cdot \sqrt{n+1}$ שכאשר n שואף לאינסוף מתבדר, ועבור $\sin x \in (0,1)$ נקבל חזקה של מספר מגודל קטן מ־1 כפול שורש, והראשון יותר חזקה אסימפטוטית, כלומר נשאף ל־0. סה"כ:

$$f_n \to 0_I$$

(הפונקציה לא מוגדרת בכל $\mathbb{R}$, אלא רק בעבור $I = \{(2\pi k, 2\pi k + 0.5\pi) \uplus (2\pi k + 0.5\pi, 2\pi k + \pi) \mid k \in \mathbb{N}\}$)

במקרה זה, ההתכנסות מתבצעת במ"ש כי לכל $\varepsilon > 0$, $x \in I$ המ"מ $\sqrt{n+1}\sin^n x < \varepsilon$.

(ד) נתבונן במשפחת הפונקציות $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$. בעבור x קבוע, גבול ידוע מחדו"א 1א ש־$f_n(x) \to x$ ולכן ההתכנסות היא נקודתית לזהות. אין לי התחלה של מושג אם זה במ"ש או לא.

(ה) נתבונן במשפחת הפונקציות $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2(1-x^2)^{k-1}$. נבחין ש־:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^2(1-x^2)^{k-1} = x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(1-x^2)^{k-1} = x^2 \cdot \frac{(1-(1-x)^{n-1})}{1-(1-x)} = x \cdot \left(1-(1-x)^{n-1}\right)$$

נקבע איזשהו $x \in \mathbb{R}$. ואז:

$$f_n(x) = x\left(1-(1-x)^{n-1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} x \cdot (1-0) = x$$

כי משום ש־$1-x \in [-1,1]$ אז $(1-x)^{n-1} \to 0$. מכאן שהפונקציות לעיל מתכנסות נקודתית לפונקציה $f(x) = x$. נוכיח שההתכנסות במ"ש. משום ש־$f_n(x)$ מונוטוני (עולה), וכן f, f_n רציפות, וממשפט דיני f_n מתכנס במ"ש ל־f.

(6)

(א) תהי $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ כך ש־$f \in R[0,c]$ לכל $c > 0$. נניח כי ישנה x_n מונוטונית עולה ממש, כך ש־$x_n \to \infty \wedge x_1 = 1$. עוד נניח שב־$X_k := [x_k, x_{k+1}]$ מתקיים ש־$f|_{X_k}$ שומרת סימן. נוכיח ש־$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^\infty I_n$ מתכנס כאשר $I_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

הוכחה. נגדיר את הפונקציה $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. בה"כ נגדיר $x_0 = 0$. עוד נגדיר את הסכום $G(k) = \sum_{n=0}^k I_n$. נוכיח שלכל $k \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $G(k) = F(x_k)$. באינדוקציה, בעבור $k = 0$ מתקיים $F(x_k) = 0 = G(k)$ (שני סכומים/אינטגרלים ריקים). בצעד:

$$F(x_{k+1}) = \int_0^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t = G(k) + I_{k+1} = I_{k+1} = \sum_{i=0}^k I_i = \sum_{i=0}^{k+1} I_i = G(k+1)$$

- אם $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס, אז הראנו שגם $G(k)$ טור מתכנס. נבחין ש־$G(k) - I_0 = \sum_{n=1}^\infty I_n$ כלומר גם $\sum_{n=1}^\infty I_n$ מתכנס, לאותו הערך, כנדרש.
- אם $\sum_{n=1}^\infty I_n$ מתכנס, מנימוקים דומים $G(k)$ טור מתכנס. נראה ש־$F(x)$ מתכנס (נאמר, ל־$I \in \mathbb{R}$). תהא סדרה y_n כלשהי כך ש־$y_0 = 0, y \to \infty$. נתבונן ב־y_n כללי כלשהו, ונבחין ש־$y_n \in X_{k_n}$ עבור $k_n \in \mathbb{N}_+$ כלשהו. משום שב־X_{k_n} הפונקציה $f(x)$ עם אותו הסימן, בין x_{k_n} ל־x_{k_n+1} האינטגרל $F(x)$ רק הולך וגדל (אם הסימן חיובי) או הולך וקטן (אם הסימן שלילי), ובשני המקרים נוכל לקבוע כי:

$$\min(F(x_{k_n}), F(x_{k_n+1})) \leq f(y_n) \leq \max(F(x_{k_n}), F(x_{k_n+1}))$$

ומכאן נובע ממה שהוכחנו בתחילת ההוכחה:

$$\min(G(k_n), G(k_n+1)) \le f(y_n) \le \max(G(k_n), G(k_n+1))$$

בגלל ש־$G(k)$ מתכנס, קל לראות ש־$\min(G(k), G(k+1))$ ו־$\max(G(k), G(k+1))$ מתכנסים, ובפרט כל ת"ס שלהם מתכנס, ובפרט k_n מתכנסת, שתיהן ל־I. סה"כ מסנדוויץ' $f(y_n) \to I$. מהיינה סיימנו.

■

(ב) ניעזר בסעיף הקודם כדי להראות ש־$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ מתכנס.

הוכחה. עבור $x_k = \pi k$ נבחין ש־:

$$\begin{cases} I_{2k} = \displaystyle\int_{2\pi k}^{2\pi k+1} \frac{\sin x}{x} \\ I_{2k+1} = \displaystyle\int_{2\pi(k+1)}^{2\pi(k+2)} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

מקיים ש־I_{2k} חיוביים בעוד I_{2k+1} שליליים, ומכאן שמירת הסימן. משום שבאינטגרל על I_k, כל x שמאסכמים עליו מקיים $\pi k < x < \pi k + 1$ אז נקבל:

$$\frac{1}{\pi(k+1)} \underbrace{\int_{\pi k}^{\pi k} |\sin x|}_{C} \le \underbrace{\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin x|}{|x|}\,\mathrm{d}x}_{|I_k|} \le \frac{1}{\pi k} \underbrace{\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin x|}_{C}$$

כאשר C קבוע כלשהו (שלא תלוי ב־k). מכאן ש־$|I_k|$ סדרה מונוטונית יורדת חלש. סה"כ נקבל ש־:

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |I_k|$$

מלייבניץ הטור לעיל מתכנס. מהמשפט לפני מהסעיף הקודם, מהיות f שומרת סימן בתחומים $[x_k, x_{k+1}]$, האינטגרל גם הוא מתכנס. ■

. . . . . (7) . . . . . .

יהיו $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ L־ליפשיציות. נניח כי $f_n \to f$ נקודתית.

(א) נוכיח ש־f היא L־ליפשיץ.

הוכחה. נבחין שמתקיים:

$$L|x-y| \ge \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(y)| = \left|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(y)\right| = |f(x) - f(y)|$$

גבול משמר אי־שוויון חלש, ולכן $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$. ■

(ב) נוכיח ש־f היא L־ליפשיץ.

הוכחה. יהיו $x, y \in [a,b]$. נתבונן בחלוקה כלשהי $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, כך ש־$\lambda(\Pi) = \frac{\varepsilon}{L}$. נסמן $X_i = [x_i, x_{i+1}]$. נבחין שלכל $x, y \in X_i$ מתקיים $|x-y| \le \lambda(\Pi) = \frac{\varepsilon}{L}$, כלומר:

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \le \varepsilon \quad \wedge \quad |f_n(x) - f_n(y)| \le L|x-y| \le \varepsilon$$

לאחר הלמה לעיל, יהי $\varepsilon > 0$. נבחין ש־: (א"ש המשולש)

$$|f_n(x) - f(x)| \le \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_i)|}_{C} + \underbrace{|f_n(x_i) - f(x_i)|}_{B} + \underbrace{|f(x_i) - f(x)|}_{A}$$

כאשר x_i האיבר הכי קרוב ל־x בחלוקה, שנבחר את עדינותה להיות $\lambda(\Pi) \le \frac{\varepsilon}{3L}$. מהלמה לעיל, משום ש־$x, x_i$ במרחק $\lambda(\Pi)$ אחד מהשני, נקבל $A, C \le \frac{\varepsilon}{3}$. אשר ל־$B$, מהתכנסות נקודתית אחרי N_i מסוים לכל n יתקיים $B \le \frac{\varepsilon}{3}$. משום שיש כמות סופית של x_i־ים נוכל לסמן $N = \max_{i\in[n]}\{N_i\}$. סה"כ לכל $n > N$ בעבור אותו x_i קבוע (הקרוב ביותר ל־x בחלוקה) יתקיים ש־$|f_n(x) - f(x)| \le 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ לכל x בקטע. סה"כ הסופרמום שואף ל־0 כנדרש. ■

(8)

תהאנה $\{f_n\},\{g_n\}$ סדרות חסומות כך ש־$f_n \overset{u}{\to} f, g_n \overset{u}{\to} g$.

(א) נניח ש־f,g חסומות. נוכיח ש־$f_n \cdot g_n \overset{u}{\to} f \cdot g$.

הוכחה. **למה:** $f_n \cdot f_n \overset{u}{\to} f \cdot f$

$$\Delta(x) := |(f_n \cdot f_n)(x) - (f \cdot f)(x)| = \left|f_n(x)^2 - f(x)^2\right| = |f_n(x) - f(x)| \cdot |f_n(x) + f(x)|$$

בגבול, כאשר הפונקציות חסומות ע"י M (מהנתון):

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \Delta(x) \le \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|}^{\to 0} \cdot \overbrace{\sup_{x\in I} |f_n(x) + f(x)|}^{\to 2M} = 0 \cdot 2M = 0$$

סה"כ $f_n^2 \overset{u}{\to} f^2$ כנדרש. עתה נפנה למקרה של f,g כלליים. נבחין ש־:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

ובאופן דומה על $f_n \cdot g_n$. ממשפט מההרצאה, $f_n + g_n \overset{u}{\to} f + g$ ו־$f_n - g_n \overset{u}{\to} f - g$. מהלמה שהוכחנו $(f_n + g_n)^2 \overset{u}{\to} (f+g)^2$ וגם $(f_n - g_n)^2 \overset{u}{\to} (f-g)^2$. סה"כ מסקווי־לינאריות של סופרמום ולינאריות הגבול, התכנסות במ"ש לינארית ולכן גם כפל ב־$\frac{1}{4}$ לא ישנה התכנסות במ"ש. סה"כ $f_n \cdot g_n \overset{u}{\to} f \cdot g$, כנדרש. ■

(ב) נוכיח שאין זה עובד במידה ו־f,g אינן חסומות.

הפרכה. נגדיר את שתי סדרות הפונקציות הבאות שלחלוטין לא לקחתי מהרשימות של שירי:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad g_n(x) = \frac{1}{n}$$

(כלומר f_n סדרה קבועה, g_n פונקציה קבועה). נבחין ש־$f_n \cdot g_n = \frac{1}{nx}$ (פרט ל־0 שם שוויון ל־0). בגלל ש־$g_n \overset{u}{\to} 0$ (התכנסות נקודתית של פונקציות קבועות היא התכנסות במ"ש) ו־$f_n(x) \overset{u}{\to} f_1$ (סדרה קבועה מתכנסת לערך איבריה) כלומר אם המשפט היה נכון $f_n \cdot g_n \overset{u}{\to} 0$. אך מארכימדיאניות, לכל R קיים $x \in \mathbb{R}$ קטן דיו כך ש־$\frac{1}{nx} > R$, כלומר מהגדרת סופרמום הפונקציות לא מתכנסות במ"ש. ■

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX וווצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד