חדו״א 2 - תרגיל מס׳ 5

1 שאלת הגדרות / ניסוחים

1. עבור $a < b$, ופונקציה $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, הגדירו את האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f$.

2. נסחו טענה על כך שהתכנסות נקודתית של סדרת פונקציות נשמרת כשעוברים לתת-סדרה.

2 תרגילים

1. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט / בתנאי / מתבדרים, והוכיחו את תשובתכם:

   ~~(א)~~ $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ (בדקו את המקרים השונים לפי ערכו של α)

   (ב) $\displaystyle\int_0^\infty (-1)^{\left[x^2\right]} dx$

2. הוכיחו כי $\int\limits_0^\infty \frac{cos(x)}{1+x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{sin(x)}{(1+x)^2} dx$, אך אחד מהאינטגרלים מתכנס בהחלט ואילו השני רק בתנאי.

3. תהי $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות, ונניח שהאינטגרלים $\int_a^\infty (f(x))^2 dx$ ו- $\int_a^\infty (f''(x))^2 dx$ מתכנסים. הוכיחו כי $\int_a^\infty (f'(x))^2 dx$ מתכנס.

   רמז: התחילו מאינטגרציה בחלקים. לאחר מכן, השתמשו באי-שוויון הממוצעים על מנת להוכיח שהאינטגרל $\int_a^\infty f(x) \cdot f''(x) dx$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

   על מנת להוכיח ש-$\lim\limits_{R\to\infty} f'(x) \cdot f(x)$ קיים, ראשית הוכיחו שהוא קיים במובן הרחב, ולאחר מכן הניחו בשלילה שהוא אינסופי והסתכלו על $\int_a^\infty f(x) \cdot f'(x) dx$.

4. חזרו על המשפט שראיתם בהרצאה "מבחן אינטגרלי להתכנסות טורים"

   (א) תהי $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ חיובית ומונוטונית יורדת, ונניח שהאינטגרל $\int_0^\infty f(x) dx$ מתכנס. הוכיחו כי לכל $a > 0$ הטור $\sum_{n=1}^\infty f(na)$ מתכנס, וכי

$$\lim_{a\to 0^+} \left(a \cdot \sum_{n=1}^\infty f(na) \right) = \int_0^\infty f(x) dx$$

(ב) הראו כי המונוטוניות בסעיף א' חשובה. כלומר, מצאו פונקציה חיובית $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ וקבוע $a>0$ כך שהאינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אך הטור $\sum_{n=1}^\infty f(na)$ מתבדר.

(ג) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2x^2+1}\right)$$

5. חשבו את הגבולות של סדרות הפונקציות הבאות, ובדקו באילו מקרים ההתכנסות היא במידה שווה:

(א) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ בקטע $[0,1]$.

(ב) $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$ בקטע $[0,1]$.

(ג) $f_n(x)=\sqrt{n+1}\sin^n x\cos x$ בכל $\mathbb{R}$.

(ד) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ בתחום $[0,\infty)$.

(ה) $f_n(x)=\sum_{k=1}^n x^2(1-x^2)^{k-1}$ ב- $[-1,1]$. (רמז: אפשר לחשב במפורשות את הטור)

6.

(א) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש-$f\in R([0,c])$ לכל $c>0$. בנוסף, נניח כי ישנה סדרה $(x_n)_{n=1}^\infty$ מונוטונית עולה ממש כך ש-$x_1=1$, $x_n\to\infty$ וכך שלכל k טבעי מתקיים שבכל קטע מהצורה $[x_k,x_{k+1}]$ הפונקציה f שומרת סימן. הגדירו $I_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(t)\,dt$. הראו כי $\int_0^\infty f(t)\,dt$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^\infty I_n$ מתכנס.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם כדי להראות ש-$\int_1^\infty\frac{sin(x)}{x}$ מתכנס.

7. פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראית L-ליפשיץ אם לכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$.
נניח ש- $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ היא סדרת פונקציות שכולן L-ליפשיץ. נניח כי $f_n\to f$ נקודתית בקטע.

(א) הוכיחו כי גם f היא L-ליפשיץ.

(ב) הוכיחו כי למעשה $f_n\to f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$

רמז: התבוננו בחלוקה של הקטע $\Pi=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ כך שפרמטר החלוקה קטן וטפלו ראשית בנקודות החלוקה x_i.

8. תהנה $\{f_n\},\{g_n\}$ סדרות פונקציות על קטע I כך שמתקיים $f_n\overset{u}{\to}f, g_n\overset{u}{\to}g$.

(א) נניח ש-f,g חסומות. הוכיחו כי מתקיים $f_n\cdot g_n\overset{u}{\to}f\cdot g$.

(ב) האם בהכרח $f_n\cdot g_n\overset{u}{\to}f\cdot g$ ללא ההנחה כי f,g חסומות?

תרגול נוסף

1. תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית.

(א) נניח ש - $\lim\limits_{x\to\infty}(\log f)'(x)$ קיים ושלילי. הוכיחו ש $\int_0^\infty f$ מתכנס.

(ב) נניח ש $\int_0^\infty f$ מתכנס וש- f' חסומה. הוכיחו ש $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

2. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית, עם מחזור $T>0$. תהי $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית גזירה ברציפות המקיימת $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$.

(א) נניח כי $\int_a^{a+T}f(x)dx=0$. הוכיחו כי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

(ב) נניח כי $\int_a^{a+T}f(x)dx\neq 0$. הוכיחו כי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

רמז: הגדירו $\tilde{f}(x)=f(x)-\frac{1}{T}\int_a^{a+T}f(t)\,dt$, והשתמשו בסעיף הקודם.

3. עבור $a>0$ נסמן $\Gamma(a)=\displaystyle\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$. פונקציה זו נקראת פונקציית גמא.

(א) הוכיחו שהאינטגרל מתכנס לכל $a>0$ ושמתקיים $\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a)$.

(ב) הסיקו ש $\Gamma(n)=(n-1)!$ לכל n טבעי.

(ג) חשבו את $\Gamma(1/2),\ \Gamma(3/2)$ בהסתמך על האינטגרל הגאוסי - $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

(ד) תנו הוכחה קצרה לאי שוויון $n!\geq(n/e)^n$ לכל $n\geq 1$.

<u>רמז</u>: חסמו מלמטה את $\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ באמצעות האינטגרל החל מ-n והשתמשו בכך ש $t^n\geq n^n$ בתחום החדש.

4. הוכיחו כי סדרת הפונקציות $f_n(x)=\dfrac{1}{n+x^2}$ המוגדרות בקטע $[0,1]$ מתכנסת (נקודתית) ומצאו את הפונקציה הגבולית. האם ההתכנסות היא במ״ש?

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה שנגזרתה f' רציפה במ״ש ב-$\mathbb{R}$.

(א) הוכיחו ש- $n\cdot\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)\xrightarrow{u}f'(x)$.

(ב) מצאו דוגמה שמוכיחה שהדרישה על רציפות במ״ש של f' הכרחית.

6. תהי $f_n:E\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש ב-E לפונקציה f. הוכיחו כי $\sup_E f_n\to\sup_E f$.

7. מצאו דוגמה לסדרת פונקציות שאינן רציפות המתכנסת במ״ש לפונקציה רציפה.

8. מצאו דוגמה לסדרת פונקציות רציפות המתכנסת לפונקציה רציפה, אך לא מתכנסת במ״ש.

9.

(א) תהי $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n$. חשבו את הגבול שלה, ובדקו האם ההתכנסות היא במ״ש בתחומים הבאים:

i. $[-A, A]$ עבור $A > 0$

ii. ב-$\mathbb{R}$ כולו.

10. תהי $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונגדיר $f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor\right)$. הוכיחו כי $f_n \to f$ במ״ש ב-$[0,1]$ (כלומר, אפשר לקרב פונקציה רציפה במידה שווה על ידי פונקציות מדרגה).

11. נגדיר סדרת פונקציות $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ באופן רקורסיבי על ידי

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}, f_1(x) = \sqrt{x}$$

(א) הוכיחו שהסדרה מתכנסת נקודתית בתחום $[1, \infty)$ ומצאו את גבולה.

(ב) הוכיחו שבכל תת קטע סגור ההתכנסות היא במ״ש.