חדו"א 2א ~ תרגיל בית 8

שחר פרץ

27 ביוני 2026

(1)

(א) תהי $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ סדרה.

- אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס נקודתית, אז הוא מתכנס לאותו הערך במובן צ'זארו.
- אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) מתכנס במובן צ'זארו, אז הוא מתכנס לאותו הערך במובן אבל.

(ב) תהי $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$. דהיינו קיים ויחיד פירוק ל־$u = \Re f, v = \Im f$ כך ש־$f = u + iv$, ואז נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי של f בקטע $[0,\infty)$ הוא:

$$\ell = \lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x u(x)\,\mathrm{d}x + i\cdot\int_0^x v(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

במידה והגבול ℓ אכן קיים.

(3)

(א) נוכיח באינדוקציה על N. בעבור $N = 0$ מתקבל:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = 1 = \frac{1-z}{1-z}$$

כנדרש. בעבור הצעד, נניח באינדוקציה נכונות על N. ואכן:

$$\sum_{n=0}^{N+1} z^n = z^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} z^n = z^{N+1} + \frac{1-z^{N+1}}{1-z} = \frac{\cancel{1-z^{N+1}+z^{N+1}} - z^{N+2}}{1-z}$$

כנדרש.

(ב) נוכיח נוסחאות טריגונומטריות מצחיקות. בשביל הראשונה, ניעזר בזווית כפולה:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) = \sin(\theta+2\theta) &= \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta \\ &= \sin\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \cos\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\end{aligned}$$

בשביל השנייה ניעזר באמצעים דומים:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) = \cos(\theta+2\theta) &= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \\ &= \cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - \sin\theta\left(2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= \cos^3\theta - 2\sin^2\cos\theta\end{aligned}$$

בשביל שלישית, ניעזר בנוסחאת אוילר (מה שכנראה רציתם שגם נעשה בשתיים הראשונות):

$$\begin{aligned}1\left(\cos\alpha \pm \cos\beta\right) + i\left(\sin\alpha \pm \sin\beta\right) &= e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \pm \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \pm i\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left((1-\mathrm{sgn})2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \mathrm{sgn}\cdot 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) \\ &\quad + i\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\mathrm{sgn}\cdot 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + (1-\mathrm{sgn})\cdot 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

נוציא את החלק המרוכב החוצה. נקבל:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = \operatorname{sgn}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + (1-\operatorname{sgn})\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

נפרק למקרים ($\operatorname{sgn}=1$ כלומר חיבור, ו־$\operatorname{sgn}=0$ כלומר חיסור) ונבחין שקיבלנו את הדרוש.

(4)

נעשה ערמה של חישובים לא מעניינים:

(א) נחשב את $\left\langle t^2+it^3 \,\middle|\, t\right\rangle$. נבחין ש־:

$$\langle t^n \mid t\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^n\cdot\bar{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{2\pi}\left(t^n\bar{t}\right)$$

לכן:

$$\left\langle t^2+it^3 \,\middle|\, t\right\rangle = \left\langle t^2 \,\middle|\, t\right\rangle + i\left\langle t^3 \,\middle|\, t\right\rangle = t^2\bar{t}+t^3\bar{t} = \boldsymbol{|t|\,t\,(1+it)}$$

(ב) יהי $n\in\mathbb{Z}$. נחשב את $\left\langle t \,\middle|\, e^{int}\right\rangle$. נבחין ש־$\overline{e^{ix}} = \overline{\cos(x)+i\sin(x)} = \cos(-x)+i\sin(-x) = e^{-ix}$. לכן:

$$\left\langle t \,\middle|\, e^{int}\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot e^{-ix}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x - i\sin\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{t}{2\pi} = \frac{t}{2\pi}(\cdot)\,0 = 0$$

(5)

(א)
- עבור $c\in\mathbb{R}$ הפונקציה $f(x)=c$ מחזורית כי $\forall x\colon f(x)=c=f(x+\pi)$ כנדרש.
- עבור $x\in\mathbb{R}$, הפונקציה $g_1=e^x$ איננה מחזורית כי היא מונוטנית עולה חזק ב־$\mathbb{R}$. עם זאת, הפונקציה $g_2(x)=e^{ix}$ מחזורית מנוסחת אוילר ומהיות $\sin x,\cos x$ מחזוריות.
- פונקציית רימן בעלת מחזור 1 שכן $\frac{p}{q}+1=\frac{p+1}{q}$ ועדיין q מינימלי.
- הפונקציה $h(x)=\tan x$ מחזורית כי $\sin x,\cos x$ מחזורית ומהגדרתה.
- הפונקציה $t(x)=\cos\left(x^3\right)$ איננה מחזורית, כי היא חלקה ואם בשלילה היא מחזורית כל הנגזרות שלה מחזוריות, אך $t'(x)=-3x^2\sin\left(x^3\right)$ רציפה אך לא חסומה על־אף שפונקציה מחזורית רציפה חייבת להיות חסומה (כי ממשפט קנטור היא חסומה ורבמ"שית בצמצום על המחזור שלה, וממחזוריות החסם הזה עובד בכל $\mathbb{R}$).

(ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה עם מחזור $T_0>0$. נגדיר:

$$\operatorname{Per} f := \{T>0 \mid \forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)\}$$

נוכיח של־$\operatorname{Per} f$ קיים מינימום אמ"מ $\inf(\operatorname{Per} f)>0$.

הוכחה.
- אם קיים מינימום, הוא לא 0 ובהכרח חיובי מהגדרת הקבוצה, והוא גם האינפימום שלה, ולכן סיימנו.
- נניח ש־$T:=\inf(\operatorname{Per} f)>0$ (האינפימום מוגדר כי יש מחזור לפונקציה). נוכיח שקיים מינימום ל־$\operatorname{Per} f$, והוא T.

לכל $\varepsilon<0$ קיים $T_\varepsilon\in(T,T+\varepsilon)$ כך ש־T_ε מחזור. עבור $a_n=T-T_\varepsilon$ עבור $\varepsilon=\frac{1}{n}$ נבחין ש־$a_n\in(0,\varepsilon)$ וכן $a_n\to 0$, ואז:

$$f(x+T+a_n)=f(x+T_{\frac{1}{n}})=f(x)$$

משום ש־$a_n\to 0$ אז $x+a_n\to x$, ואם f רציפה, סיימנו מהיינה.

■

(6)

נוכיח שמרחב הפולינומים הטריגונומטריים על $[-\pi,\pi]$ צפוף במ"ש בפונקציות הרציפות בצמצום לאותו הקטע.

(א) נראה ש־$\cos^n x$ ניתן להתבטא כקומבינציה לינארית של $\cos(kx)$.

הוכחה. הראנו ש־$\cos x = \cosh(ix)$. לכן:

$$\cos^n x + 0i = \cosh^n(ix) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ix(2k-n)}}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\left((2k-n)\,x\right)+i\sin\left((2k-n)\right)x}{2^{2k-n}}$$

משום ש־$\cos^n x \in \mathbb{R}$, בהכרח כל הסינוסים יתבטלו ונקבל באמצעות שינוי סדר סכימה ש־:

$$\cos^{nx} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos((2k-n)\,x)}{2^{2k-n}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\left((n-2k)x\right)}{2^{n-2k}}$$

משום ש־$n-2k \in \{0,\dots,n\}$ קיבלנו פונקציה מהצורה הנדרשת. באופן דומה, בעבור $\sin^n x$ נקבל:

$$\sin^n x + 0i = \sinh^n(ix) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^k\left(-\frac{e^{-ix}}{2}\right)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{e^{ix(2k-n)}}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\left((2k-n)\,x\right)+i\sin\left((2k-n)\right)x}{2^{2k-n}}$$

■

(ב) נניח כי $f = u + iv$. נפרק את u לסכום של פונקציה זוגית u_e ואי־זוגית u_0.

הוכחה. ההליך פשוט. נגדיר:

$$u_e(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2} \qquad u_o = \frac{u(x)-u(-x)}{2}$$

מכאן $u = u_e + u_o$ וקל לוודא שהן זוגית ואי זוגית בהחלפה. ■

(ג) הוכחה. ממשפט וויראשטראס, קיים P_e בקטע $[-1,1]$ קרוב כרצוננו ל־$u_e \circ \arccos$, כלומר לכל $x \in [-1,1]$ מתקיים ש־ $|P_e(x) - (u_e \circ \arccos)(x)| < \frac{\varepsilon}{5}$. בפרט לכל $y \in [0,\pi]$ השווה ל־$y = \arccos x$ נקבל ש־:

$$\frac{\varepsilon}{5} > |P_e(x) - (u_e \circ \arccos)(x)| = |P_e(\cos y) - u_e(\arccos\cos y)| = |P_e(\cos y) - u_e(y)|$$

לכן: (קבוצה חסומה ב־$\frac{\varepsilon}{5}$, מותר לקחת סופרמום)

$$\sup_{y\in[-\pi,\pi]} |P_e(\cos y) - u_e(y)| \le \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{4}$$

עוד נבחין ש־$P_e(\cos x)$ פולינום טריגונומטרי. זאת כי $P_e = \sum_{i=1}^{n} a_n x^n$ פולינום, וכן את $\cos^i x$ ניתן לבטא כ־$\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell^i \cos(\ell x)$. ואז נקבל ש־:

$$P_e \circ \cos = \sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i x = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} a_i b_\ell^i \cos(\ell x) = \sum_{\ell=0}^{n}\left(\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} b_\ell^i a_i\right)}_{c_\ell}\cos(\ell x)\right) = \Re\left(\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell e^{i\ell x}\right)$$

כנדרש. ■

(ד) הוכחה. באופן דומה, ממשפט וויראשטראס $u_o \circ \arcsin$ רציף ולכן קיים P_o הקרוב אליו כרצוננו, ומטיעונים דומים (נציב $y = \arcsin x$) נקבל ש־$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_o(\sin x) - u_o(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$. ואכן באופן דומה, כאשר $P_o = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ ואת $\sin^i x$ נבטא כקומבינציה לינארית

$$P_o \circ \sin = \sum_{i=0}^{n} a_i \cos^i x = \sum_{i=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} a_i b_\ell^i \cos(\ell x) = \sum_{\ell=0}^{n}\left(\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} b_\ell^i a_i\right)}_{c_\ell}\cos(\ell x)\right) = \Re\left(\sum_{\ell=0}^{n} c_\ell e^{i\ell x}\right)$$

■