פתרון שאלה 4(ג) במועד 26BA

שחר פרץ

24 ביולי 2026

יהי (X,d) מרחב מטרי, ונניח שכל סדרה מקוננת של כדורים סגורים בעלת חיתוך לא־ריק. נוכיח שהוא שלם.

הוכחה. תהא x_n סדרת קושי. נסמן $\varepsilon_n = \frac{1}{n^2}$ ו־$r_n = \frac{1}{n}$. משום ש־x_n קושי, לכל ε_n ישנו $N \in \mathbb{N}$ כך ש־$\forall m \geq N\colon\ |x_n - x_m| < \varepsilon_n$. נסמן $y_n = x_N$, ואז בבירור y_n ת"ס של x_n.

נוכיח שהכדורים $\overline{B}(y_n, r_n) \subset \overline{B}(y_{n-1}, r_{n-1})$ מקוננים. ראשית, נבחין באי־השוויון הבא:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2} \implies \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1}$$

עתה נפנה להוכיח את ההכלה. יהי $z \in \overline{B}(y_n, r_n)$. נראה ש־$z \in \overline{B}(y_{n-1}, r_{n-1})$, כלומר ש־$d(z, y_{n-1}) \leq r_{n-1}$. אכן מא"ש המשולש:

$$d(z, y_{n-1}) \leq \underbrace{d(z, y_n)}_{\leq r_n} + \underbrace{d(y_n, y_{n-1})}_{\leq \varepsilon_n} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} = r_{n-1}$$

ולכן הכדורים מקוננים כנדרש. יתרה מכך, $r_i \to 0$ ולכן מההנחה ישנה $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}(y_i, r_i)$. נבחין שלכל $i \in \mathbb{N}$, מתקיים ש־$d(y_i, y) \leq r_i$ מהגדרת חיתוך מוכלל. דהיינו $d(y_i, y) \to 0$ ו־$y_i \to y$. מסעיף (א), הסדרה y_i המהווה ת"ס של x_n מתכנסת לאותו הערך שסדרת הקושי x_n מתכנסת. לכן $x_n \to y$ סדרת קושי מתכנסת.

נסכם שכל סדרת קושי מתכנסת ולכן המרחב שלם כנדרש. ■

.....

שחר פרץ, 2026

קומפל ב־LaTeX ועוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד