חדו"א 2 א' - תרגיל מס' 1

תרגילים להגשה

1. מהו אוסף הפונקציות הקדומות של הפונקציה f המוגדרת על הקבוצה A במקרים הבאים:

(א) $A=\mathbb{R}, \quad f(x)=\begin{cases}\sin x & x<\pi/4\\ \cos x & x\geq \pi/4\end{cases}$

(ב) $A=(0,1)\cup(2,3)$, $f(x)=x^2$.

2. חשבו את האינטגרלים הבאים. אם הפתרון תקף רק לתחום הגדרה מסויים, ציינו מהו התחום.

(א) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

(ב) $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^5}dx$

(ג) $\int\frac{x^2+5}{x^2+1}dx$

(ד) $\int\sqrt{1-\cos^2(x)}dx$

(ה) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$

(ו) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx, \quad a>0$

(ז) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2(1+\cos x)}}dx$ (רמז: זווית כפולה).

3. השתמשו באינטגרציה בחלקים (ובשיטות נוספות) כדי לחשב את האינטגרלים הבאים.

(א) $\int xe^{-2x}dx$

(ב) $\int\sin(\ln x)dx$

(ג) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

(ד) $\int\sqrt{1-x^2}dx$

4. השתמשו באינטגרציה בחלקים ומצאו נוסחה רקורסיבית ל I_m במקרים הבאים.

(א) $I_m=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$.

(ב) $I_m=\int x^\alpha\ln^m x dx$ כאשר $\alpha\neq-1$.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י הצבה או בכל דרך אחרת.

(א) $\int\frac{x^7}{1-x^4}dx$, בתחום $x\leq 0$.

(ב) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx$

(ג) $\int\frac{dx}{x\ln|x|}$

(ד) $\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}dx$

(ה) $\int \frac{e^x+2}{e^x+4+7e^{-x}}dx$

(ו) $\int \cot(x)dx$

(ז) $\int x^3e^{-x^2}dx$, בתחום $x \leq 0$.

(ח) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

(ט) $\int xe^x\cos x dx$

(י) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(נסו $t = x+\sqrt{a^2+x^2}$.)

6. יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n. הוכיחו ש

$$\int P(x)e^x dx = Q(x)e^x + C$$

כאשר $Q(x)$ אף הוא פולינום ממעלה n.

תרגילים נוספים

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (שימו לב לתחומי ההגדרה!)

(א) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

(ב) $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx$

(ג) $\int (3x-7)^{12}dx$

2. השתמשו באינטגרציה בחלקים (ובשיטות נוספות) כדי לחשב את האינטגרלים הבאים.

(א) $\int x\ln^2 x dx$

(ב) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

(ג) $\int e^{2x}\sin(3x)\,dx$

(ד) $\int x^n \ln x dx$

3. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י הצבה או בכל דרך אחרת.

(א) $\int \frac{1}{1-x}dx$

(ב) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$

(ג) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

(ד) $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$, בתחום $x \geq 0$