אלגוריתמים ~ הרצאה 5

שחר פרץ

10 במאי 2026

מרצה: עמית ווינשטיין

לאור כושר ההשרדות הנמוך שלנו בשיעור הקודם (שיעור הרדמות גבוה במיוחד בסוף השיעור), בשיעור הזה נסיים בשבע, יהיו יותר הפסקות, ונתמקד פחות בפורמליות של ההוכחות.

מסלולים קצרים ביותר

השיעור נדבר על מסלולים קצרים ביותר מנקודה אחת (באנגלית – single source shortest paths, בקיצור SSSP). הבעיה:

בהינתן גרף $G = (V, E)$ (מכוון ולא מכוון), ומשקלים $w\colon E \to \mathbb{R}$ (מאפשרים משקלים שליליים). משקל של מסלול יוגדר להיות סכום משקליל הקשתות לאורכו. נתעניין במסלולים קלים ביותר (מק"בים). מסלול הוא לא בהכרח פשוט.

נבחין בבעיה – אם יש מעגל שלילי, כלומר מעגל שמשקלו שלילי, נוכל לעבור בו כמה פעמים שנרצה מה שיאפשר למק"ב להיות במשקל $-\infty$. מכאן נוציא כמה נקודות חשובות:

- נרצה שהאלגוריתמים שלנו יזהו ויעצרו אם יש מעגל שלילי.
- בהינתן שאין מעגל שלילי, כל המק"בים יהיו מסלולים פשוטים (בה"כ – למעשה, מדויק יותר להגיד שיש להם גרסה פשוטה, בגלל מעגלים שאינם שליליים אך משקלם 0).
- לא ניתן להוסיף משקל קבוע לכל המשקלים שכן מסלולים שונים הם באורכים שונים.
- אם w היא הפונקציה הקבועה 1, משקל המסלול=אורך המסלול פחות אחת. לכן BFS פותר את הבעיה בזמן לינארי.
- סימון $\delta(s, v)$: משקל מהסלול קל ביותר מ־s ל־v. במקרי קצה, $\delta(s, v) = \infty$ אם v לא נגיש מ־s, ו־$\delta(s, v) = -\infty$ אם יש מעגל שלילי "בדרך" מ־s ל־v.
- בגרפים לא מכוונים, משקלים שליליים משמעותם זהה למשמעותם של מעגלים שליליים בגרפים מכוונים.

ישנן תכונות נחמדות לסימון של $\delta(s, v)$:

- א"ש המשולש: $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$.
- תת־מסלול של מק"ב הוא מק"ב בפני עצמו.
- אם (u, v) קשת אחרונה במק"ב $s \rightsquigarrow v$, אזי $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$.

להלן הרעיון הכללי, ולאחר מכן נראה כל מיני אלגוריתמים ש"מממשים" את הרעיון הזה:

- נחזיק לכל קודקוד שני ערכים:
  - $\mathrm{d}[v]$ – המשקל של המק"ב שמצאנו עד כה מ־s ל־v.
  - $\pi[v]$ – הקודקוד הקודם של v במסלול, שמשקלו $\mathrm{d}[v]$.
- פעולה בודדת $\texttt{Relax}(u, v)$ עבור קשת (u, v) שבודקת האם אפשר לשפר מק"ב:

```
if d[u] + w(u, v) < d[u]:
        d[v] = d[u] + w(u, v)
        pi[v] = u
```

- הרעיון: נתאחל את d, π ונבצע Relax כמה שאפשר.

ואז, האלגוריתמים שלנו יהיו שונים בצורה ובסדר בו הם עושים Relax־ים. נבחין בכמה אבחנות בנוגע לגישה הזו:

- בבירור $\mathrm{d}[v] \geq \delta(s,v)$ לאורך כל האלגוריתמים.
- ברגע ש־$\forall v \in V\colon \mathrm{d}[v] = \delta(s,v)$ ברור שלא ניתן לבצע יותר Relax שישפר משהו שכן זה בהכרח יקטין $\mathrm{d}[v]$ כלשהו בסתירה לנקודה הקודמת.
- בדומה ל־BFS, מצביעי π במידה והמרחקים חושבו ייצגו מק"ב בהיפוך כיוון.

נתחיל במקרה של גרף מכוון חסר מעגלים.

- **אלגוריתם:** יש לגרף מיון טופולוגי. ניכר שקודקודים לפני s אינם מעניינים (אי אפשר להגיע אליהם). עתה האלגוריתם פשוט: נעבור על הקודקודים לפי סדר המיון הטופולוגי, ולכל קודקוד נבצע Relax על כל הקשתות שלו. בסוף הריצה $\mathrm{d}[v] = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$.
- **סיבוכיות:** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- **נכונות:** באינדוקציה על הסדר במיון הטופולוגי. נראה שכאשר מגיעים לקודקוד i, מתקיים $\mathrm{d}[v_i] = \delta(s,v_i)$. נניח בה"כ ש־$s = v_0$ (לא משנה כי לפני s מתקיים $\mathrm{d}[v] = \infty$). עבור $i = 0$ הטענה מתקיימת ($\mathrm{d}[s] = 0 = \delta(s,s)$). נניח נכונות עד $i-1$ ונוכיח עד i. יהא v_k קודקוד שלפני v_i במסלול קל ביותר $s \rightsquigarrow v_i$. בהכרח $k < i$, ולכן $\mathrm{d}[k] = \delta(s,k)$ בזמן הטיפול ב־v_k. בזמן ביצוע `Relax(`v_k`, `v_i`)` נקבל מה.א.:

$$\mathrm{d}[v_i] \leq \mathrm{d}[v_k] + w(v_k, v_i) = \delta(s, v_k) + w(v_k, v_j) = \delta(s, v_i)$$

כלומר $\mathrm{d}[v_] = \delta(s, v_i)$.

עתה נטפל במקרה הכללי.

- **האסטרטגיה של Ford:** נבצע Relax עד שלא ניתן יותר.
- מה יקרה אם יש מעגל שלילי? החרא הזה לא יעצור.
- **שאלה:** כמה Relax־ים משפרים לכל היותר נוכל לבצע? [איור של גרף אציקלי שבמקרה הגרוע נעשה בו $2^{|E|}$ רילקסים. בגרף שבנה המורה בין כל זוג איברים במיון הטופולוגי יש קשת במשקל 0 וקשת במשקל 2^i]
- בגרף אציקלי, המסלולים הפשוטים הם באורך $|V| - 1$.
- **האסטרטגיה של Bellman-Ford:** במקום לעשות Relax־ים בלי שום סדר בינהם, ניקח את הקשתות בסדר כלשהו, ונעשה $|V| - 1$ פעמים רצף Relax־ים על הקשתות לפי הסדר הזה. לאחר מכאן נבצע איטרציה אחרונה של Relax־ים, ואם משהו השתנה, נסיק שיש מעגל שלילי.
- **האסטרטגיה של יואב עירוני:** אפשר לשלב את שני האלגוריתמים, לעשות מיון טופולוגי על גרף העל ולהשתמש באלגוריתם הראשון, ואז לטפל באמצעות בלמן־פורד בכל רכיב קשירות חזקה בנפרד.
- **סיבוכיות Bellman-Ford:** $\mathcal{O}(|E| \cdot |V|)$
- **נכונות:** אם אין מעגלים שליליים, אחרי $|V| - 1$ איטרציות, נוכיח ש־$\mathrm{d}[v] = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$. נוכיח באינדוקציה על **אורך** (לא בהכרח משקל) מינימלי של מק"ב מ־s לכל קודקוד v. עבור אורך 0, $v = s$ וזה מתקיים. נוכיח באינדוקציה על האיטרציות שאחרי i איטרציות כל קודקוד עם מק"ב באורך לכל היותר i מקיים $\mathrm{d}[v] = \delta(s,v)$.

  אחרי 0 איטרציות מתקיים $\mathrm{d}[s] = 0 = \delta(s,)$ (אין מעגל שלילי). נניח עד $i-1$, נראה בעבור i. יהא v קודקוד שאורך מינמלי במק"ב שלו הוא i. נניח u קודקוד לפני v במק"ב באורך זה. אורך מינמלי של מק"ב של u הוא $i-1$ ולכן אחרי $i-1$ איטרציות, מתקיים $\mathrm{d}[u] = \delta(s,u)$. באיטרציה ה־$i$ נבצבע Relax על u, v ונקבל $\delta(s,v) \leq \mathrm{d}[v] \leq \mathrm{d}[u] + w(u,v) = \delta(s,u) + w(u,v) = \delta(s,v)$ וסיימנו.

  עתה נראה שהוא מזהה מעגלים שליליים ע"י בדיקת שינויים באיטרציה ה־$|V|$. נניח שהאלגוריתם לא שיפר באיטרציה ה־$|V|$. יהא $v_0 \ldots v_k = v_0$ מעגל. נראה שבאיטרציה ה־$|V|$ כל ה־Relax־ים לא שיפרו, כלומר $\forall i\colon \mathrm{d}[v_i] \leq \mathrm{d}[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$. נסכם את האי־שוויונים האלה:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}[v_i] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{d}[v_i] + \sum_{k=1}^{n} w(v_{i-1}, v_i) \implies 0 \leq \sum_{k=1}^{n} w(v_{i-1}, v_i)$$

כלומר משקל המעגל אי־שלילי.

נניח שהיה שיפור באיטרציה ה־$|V|$, נרצה לטעון שיש מעגל שלילי. אם לא היו מעגלים שליליים, כבר אחרי $|V|-1$ איטרציות התקיים $\mathrm{d}[v]=\delta(s,v)$ לכל v. מצד שני, הלאוגיתם כן הצליח לבצע Relax כדי לשפר, נניח על קשת (u,v). נשתמש בא"ש המשולש:

$$\mathrm{d}[u]+w(u,v)=\delta(s,u)+w(u,v)\geq\delta(s,v)=\mathrm{d}[v]$$

ולכן שום Relax אינו יכול לשפר.

במקרה שבו אין משקלים שליליים, ניתן לבצע משהו יעיל יותר.

- **האלגוריתם של Dijkstra:** האלגוריתם עובר על צמתים לפי סדר משקל עולה מ־s ומבצעים Relax על הקשתות. נעזרים בתור עדיפויות על מנת לבחור את הצומת הבא בכל פעם.
- **סיבוכיות:** נעשה $\mathcal{O}(|E|)$ של Dec-Key, נעשה $\mathcal{O}(|V|)$ הוספות לתור, ו־$\mathcal{O}(|V|)$ פעמים Delete-Min. הסיבוכיות היא תלוי מימוש.
  - בערימת פיבונאצי זה יצא $\mathcal{O}(|V|\log|V|+|E|)$.
  - בערימה רגילה $\mathcal{O}((|V|+|E|)\log|V|)$
  - במערך $\mathcal{O}(|V|^2+|E|)$

עתה נדבר על אלגוריתמים שמשפרים את הביצועים בעבור המקרה של חיפוש מק"ב בין s ל־t ספציפיים, אם כי לא אסימפטוטית.

- **Bidirectional Dijkstra:** במקרה בו רוצים למצוא מסלול קל ביותר מ־s ל־t ספציפי. הרעיון: במקום לעשות רק Dijkstra מ־s, להפעיל בו זמנית גם מ־s וגם מ־t, ולטעון שאם שתי הריצות נפגשו באמצע בקודקוד, הוא אינדיקציה לכך שמצאנו מסלול קצר ביותר (הוא לא בהכרח יהיה חלק ממנו, אך הוא מודיע לנו על כך שיש לנו את המידע הנגרש).

  אינטואיטיבית, אם נחפש מ־s ובמקביל מאחורה מ־t נוכל לעיתים לחסוך בזמן החיפוש. בדוגמה של 2d grid זה יחסוך פי 2 (מנוסחת שטח מעגל). בכל צעד נוציא מאחד התורים, לפי אצל מי מהם יש מפתח קטן ביותר.

  הטענה העיקרית לגבי תנאי העצירה של זה: ברגע שיש קודקוד שיצא גם מ־s וגם מ־t, בהכרח כבר גילינו מסלול קל ביות רמ־s ל־t (לאו דווקא כזה שעובר בקודקוד זה). האינטואציה להוכחה היא הפעלה של א"ש המשולש (בגרסה מורחבת, עם $\delta(u,t)$ במקום $w(u,t)$).
- **אלגוריתם $\mathbf{A}^*$:** אומנם מתחיל רק מ־s, אבל נותן עדיפות לדברים ש"יש סיכוי יותר טוב שיגיעו ל־t". אי אפשר להפעיל אותו בכל גרף. נשתמש בפונקציית הערכה למרחק (שמתעלמת ממכושלים באמצע) מכל קודקוד v ל־t שמקיימת שתי תכונות:
  - הפונקציה חייבת להיות אופטימית, כלומר קטנה או שווה מהמרחק האמיתי.
  - צריכה לקיים את א"ש המשולש: $h(v)\leq h(u)+w(u,v)$.

  במידה ו־$h=0$, שקול ללהריץ Dijkstra.

שאלה: כשאין משקלים שליליים, האם עץ מסלולים קלים ביותר מ־s הוא בהכרח עץ פורש מינימלי.

תשובה: לא

עתה ההרצאה תהפוך לתרגול.

תרגיל 1. נתונים n סוגי מטבעות $c_1\dots c_n$ וטבלת המרה a_{ij} – כמה מטבעות מסוג c_j נקבל בעבור מטבע מסוג c_i (לדוגמה, נקבל 2.9 שקלים בעבור דולר אחד. ברשימות של המרצה/מתרגל עוד כתוב 3.6). נרצה לבדוק האם יש ארביטראג', כלומר, סדרת המרות שבסופה נשאר עם יותר כסף ממה שהתחלנו.

הרעיון: אנחנו מחפשים רצף מטבעות (הכפלות בשערים) $c_{i_1}\dots c_{i_k}$ כך שאם נתחיל ממטבע מסוג c_{i_1} נסיים עם יותר ממנו בסוף, כלומר, נרצה ש־$a_{i_1,i_2}\cdot a_{i_2,i_3}\cdots a_{i_k,i_1}>1$. נוציא $\log$ כך שנרצה למעשה שסכום הלוגים יהיה גדול מ־0.

נבנה גרף שמשקליו הם $-\log a_{i,j}$ עבור הקשת המכוונת (i,j) (בין המטבע ה־i למטבע ה־j) ונחפש מעגל שלילי. סיבוכיות: $\mathcal{O}(n^3)$.

תרגיל 2. נתונה מערכת א"שים מהצורה $x_i-x_j\leq c_{ij}$ עבור משתנים $x_1\dots x_n$. נרצה פתרון למערכת, אם קיים, או להגיד שאין כזה.

הפתרון: נבנה גרף עם $n+1$ קודקודים, $x_1\dots x_n$ וקדקוד s שמחובר לכולם עם משקל 0. נוסיף עבור אי־השוויון $x_i-x_j\leq c_{ij}$ קשת (x_j,x_i) במשקל c_{ij}. נמצא מרחקים מ־s ע"י BF. אם יש מעגל שלילי, אין פתרון. אחרת, $\delta(s,x_i)$ הוא הצבה טובה עבור x_i. זאת כי:

$$\delta(s,x_i)\leq\delta(s,x_j)+ij\iff x_i-x_j\leq c_{ij}$$

ומעגל שלילי אמ"מ קב' אש"ים שהסכומים שלהם גוררים סתירה.

שאלה: גרף מכוון ללא מעגלים שליליים. נרצה לבדוק אם יש בו מעגל ממשקל 0.

רעיון: נוסיף קודקוד s עם קשת במשקל 0 לכל שאר הקודקודים. נריץ BF מ־s. נבנה גרף מק"בים מ־s, כלומר, נכלול רק קשתות (u,v) עבורן $\delta(s,v)=\delta(s,u)+w(u,v)$. נחפש מעגל בגרף זה (למשל DFS) ונטען שקיים מעגל בגרף זה אמ"מ יש מעגל במשקל 0 בגרף המקורי. זה הטריק שראינו מקודם של סכימה וחיסור סכום ה־$\delta(s,v)$־ים משני האגפים.

שאלה: נתון גרף G מכוון וכל המשקלים מהקבוצה $\{0,1,2\}$. רוצים למצוא מק"ב מ־S.

פתרון: אפשר להחזיר טור עדיפויות של מערך באורך $2|V|$ במקום פיבונאצי. ואז סך פעולות `Del-Min` יעלו $\mathcal{O}(|V|)$ וסך פעולות `Dec-Key` יעלו $\mathcal{O}(|E|)$. קודקודים ישמשו כמפתח במערך„ אך פעם לא חוזרים אחורה.

שאלה: מצאו מק"בים באורך זוגי.

רעיון: כמו פעם קודמת אפשר להשתמש בגרף דו"צ מצחיק.

שאלה: איך מוצאים מק"בים כאשר יש משקל גם על צמתים?

פתרון: נחליף כל צומת בשני צמתים עם קשת עליה יש את המשקל של הצומת המקורית, ואז נפעיל את האלגוריתם הרגיל.

.....

שחר פרץ, 2026

קופפל ב־LaTeX וגוצר באמצעות תוכנה חופשית בלבד